

УДК 534.1

В.А. Печерний

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛОЖЕНЬ РІВНОВАГИ СФЕРИЧНОГО МАЯТНИКА ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Вступ

Сферичний маятник є найпростішим прикладом коливальної системи з двома ступенями свободи. Більшість явищ, характерних для сферичного маятника, проявляються в динаміці систем із розподіленими параметрами, які мають періодичну координату: кілець, циліндричних і сферичних оболонок, круглих пластин, середовищ у циліндричних і сферичних порожнинах. Тому вивчення властивостей коливань сферичного маятника пояснює коливальні ефекти в ряді вказаних систем.

Дослідження складної нелінійної динаміки сферичного маятника при неідеальному збудженні проведені в працях [1–3]. Для динамічної системи, утвореної сферичним маятником, точка підвісу якого збуджується електродвигуном, в [1, 2] побудовано математичну модель, яка враховує обмеженість потужності джерела збудження. У вказаних публікаціях досліджено особливості переходу від регулярних коливань маятника до хаотичних та встановлено, що виникнення хаотичних режимів зумовлено взаємодією маятника з джерелом збудження. Питання визначення множини положень рівноваги та їх стійкості для сукупної системи сферичний маятник–електродвигун потребують детального вивчення.

Постановка задачі

Для проведення досліджень усталених регулярних та хаотичних коливань динамічних систем вивчаються положення рівноваги та їх властивості. При цьому визначаються області параметрів системи, в яких можливе існування відмінних від положення рівноваги регулярних режимів та нерегулярних хаотичних.

Метою даної статті є визначення положень рівноваги динамічної системи, яка описує коливання сферичного маятника при неідеальному збудженні, та дослідження їх властивостей.

Математична модель

Коливання фізичного маятника при збудженні його точки підвісу в більшості праць вивчаються в так званій ідеальній постановці. За такої постановки залишаються поза увагою питання зворотного впливу коливань маятника на джерело їх збудження. Якщо ж потужність джерела збудження порівнянна з енергією, що витрачається на коливання маятника, тоді в сукупній системі при дисипації енергії можуть виникати нерегулярні динамічні режими. Це випадок неідеального або обмеженого збудження.

У даній статті досліджується динамічна система, що описує просторові коливання фізичного маятника з неідеальним збудженням. Точка підвісу маятника збуджується у вертикальній площині через кривошипно-шатунний механізм електродвигуном обмеженої потужності (рис. 1). Детальний опис такої системи та її математична модель, що враховує зворотний вплив коливань маятника на режим роботи електродвигуна, наведено в [1–3].

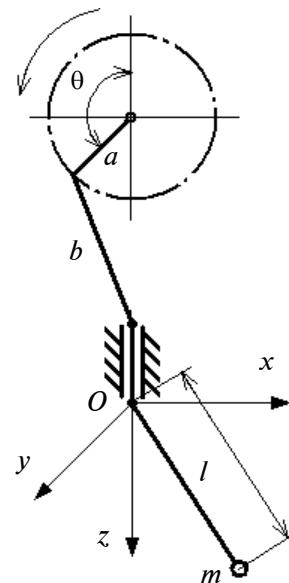


Рис. 1. Система сферичний маятник–електродвигун

Згідно із вказаними працями введемо декартову систему координат $Oxyz$, як показано на рис. 1. Через a, b позначимо відповідно довжину шатуна та повзуна, причому $b \gg a$. Коли кривошип a повертається на кут θ , повзун з підвісом отримує переміщення вздовж вертикальної осі нерухомої системи координат вигляду $v(t) = -a \cos \theta$ (див. рис. 1). Тоді в нерухомій декартовій системі координат $Oxyz$ кі-

нетична енергія системи маятник—електродвигун запишеться у вигляді

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{v} + \dot{z})^2],$$

а потенціальна — у вигляді

$$V = mg(l - z - v),$$

де x, y, z — декартові координати центра мас маятника; I — момент інерції ротора електродвигуна; m — маса маятника; l — довжина маятника. Маса повзуна та підвісу нехтується.

Згідно з [1–3], введемо нові змінні α і β за формулами

$$x = l \sin \alpha, \quad y = l \sin \beta.$$

Оскільки у введеній системі координат $Oxyz$ для маятника завжди виконується співвідношення $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, то

$$z = l \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Для малих α і β лагранжیان досліджуваної системи $T - V$ запишемо у вигляді [1]

$$\begin{aligned} T - V = & \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - \\ & - 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\dot{\theta} \frac{a}{l} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \frac{a^3}{l^2} \sin^2 \theta] - \\ & - g m l \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{24} + \frac{\alpha^2 \beta^2}{4} + \frac{a}{l} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Тому для основних змінних $\theta(t)$, $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ рівняння Лагранжа (рівняння руху) запишуться в такій формі [1–3]:

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta} = & L(\dot{\theta}) - H(\dot{\theta}) - m l a \left[\ddot{\theta} \frac{a}{l} \sin^2 \theta + \right. \\ & + \dot{\theta}^2 \frac{a}{l} \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \theta - \\ & \left. - (\alpha \ddot{\alpha} + \beta \ddot{\beta}) \sin \theta \right], \\ \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha \beta^2}{2} \right) + \delta_1 \dot{\alpha} + \alpha (\dot{\beta}^2 + \beta \ddot{\beta}) - \\ & - \frac{a}{l} \alpha (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) = 0, \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2 \beta}{2} \right) + \delta_1 \dot{\beta} + \beta (\dot{\alpha}^2 + \alpha \ddot{\alpha}) - \end{aligned} \quad (1)$$

$$- \frac{a}{l} \beta (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) = 0,$$

де $L(\dot{\theta})$ — рухомий момент електродвигуна; $H(\dot{\theta})$ — внутрішній момент сил опору обертання ротора електродвигуна; $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — власна частота маятника; δ_1 — коефіцієнт демпфування сили опору середовища, в якому рухається маятник.

Отримана система диференціальних рівнянь (1) описує складний процес взаємодії обертання вала двигуна (формування сили збудження) та просторових коливань маятника. Вона є суттєво нелінійною та не допускає точного аналітичного розв'язку. Для спрощення системи рівнянь (1) згідно з [1] введемо малий параметр $\varepsilon = \frac{a}{l}$, вважаючи, що $a \leq l$. Крім того,

припустимо, що реалізуються умови основного параметричного резонансу, коли швидкість обертання вала двигуна $\dot{\theta}$ близька до подвоєної власної частоти маятника $2\omega_0$, а саме

$$\dot{\theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon \omega_0 v(t). \quad (2)$$

Для дослідження резонансних коливань маятника в рівняннях (1) виконаємо заміну змінних за формулами [1–3]

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_1(\tau) \cos \frac{\theta(t)}{2} + y_2(\tau) \sin \frac{\theta(t)}{2} \right], \\ \beta(t) = & \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_4(\tau) \cos \frac{\theta(t)}{2} + y_5(\tau) \sin \frac{\theta(t)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

За допомогою заміни (3) переходимо в рівняннях (1) до нових змінних $y_1(\tau), y_2(\tau), y_4(\tau),$

$y_5(\tau)$ і повільного часу $\tau = \frac{\varepsilon}{4} \theta(t)$. Підставивши вираз (3) в рівняння (1) та виконавши процедуру усереднення за швидким часом $\theta(t)$, отримуємо таку систему рівнянь [1–3]:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & C y_1 - \left[y_3 + \frac{1}{8} (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 - \\ & - \frac{3}{4} (y_1 y_5 - y_2 y_4) y_4 + 2 y_2, \\ \dot{y}_2 = & C y_2 + \left[y_3 + \frac{1}{8} (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_5 + 2y_1, \\
\dot{y}_3 &= D(y_1 y_2 + y_4 y_5) + E y_3 + F, \\
\dot{y}_4 &= C y_4 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 + \\
& + \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_1 + 2y_5, \\
\dot{y}_5 &= C y_5 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 + \\
& + \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_2 + 2y_4.
\end{aligned} \quad (4)$$

При виводі системи рівнянь (4) у статтях [1, 2] використовувалася лінійна апроксимація статичної характеристики двигуна, коли

$$\frac{L(\dot{\theta}) - H(\dot{\theta})}{I + \frac{1}{2} m a^2} = \varepsilon \frac{\omega_0}{2} (N_0 - E \dot{\theta}) + \varepsilon^2 + \dots,$$

тому $F = \left(\frac{N_0}{\omega_0} - 2E \right) \frac{l}{a}$, $D = -\frac{2ml^2}{I + \frac{1}{2} m a^2}$, $C = -\frac{\delta_1}{\omega_0}$. Крім того, в (4) введено позначення $y_3 = v$.

Отримана система диференціальних рівнянь п'ятого порядку (4) використовується як математична модель детермінованої коливальної системи сферичний маятник—електродвигун. Система рівнянь (4) явно містить чотири керуючих параметри C , D , E і F , які знаходяться через електричні та механічні характеристики досліджуваної системи. Параметр E безпосередньо визначається кутом нахилу статичної характеристики електродвигуна, параметр C пропорційний опору середовища, D і F є мультипараметрами динамічної системи (4). Вони залежать від довжини та маси маятника, його власної частоти, коефіцієнта демпфування, лінійних розмірів кривошипно-шатунного механізму, моменту інерції ротора і від параметрів статичної характеристики електродвигуна.

Структура множини положень рівноваги

Положення рівноваги динамічної системи сферичний маятник—електродвигун виражаються як розв'язки однорідної нелінійної системи алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
& C y_1 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 - \\
& - \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_4 + 2y_2 = 0, \\
& C y_2 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 - \\
& - \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_5 + 2y_1 = 0, \\
& D(y_1 y_2 + y_4 y_5) + E y_3 + F = 0, \\
& C y_4 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 + \\
& + \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_1 + 2y_5 = 0, \\
& C y_5 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 + \\
& + \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_2 + 2y_4 = 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язки такої системи рівнянь, у загальному випадку, аналітично знайти неможливо. З фізичного змісту параметра C , який пропорційний опору середовища, та параметра E , який визначається кутом нахилу статичної характеристики електродвигуна, впливає, що значення C і E від'ємні. Отже, подальші дослідження будемо проводити за умови $C < 0$ і $E < 0$.

Розглянемо деяку поверхню $Q \{y_i, i = \overline{1, 5}\} \subset \subset \Phi$ у фазовому просторі системи (4)

$$\begin{aligned}
Q: \quad y_2 &= k y_1, \\
y_3 &= p, \\
y_5 &= k y_4, k, p \in R,
\end{aligned} \quad (6)$$

де $k, p \in R$ — довільні дійсні числа. Позначимо $M_0 \in Q$ точку з координатами

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0, y_2 = 0, y_3 = -\frac{F}{E}, y_4 = 0, y_5 = 0 \\
&\text{при } E < 0.
\end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, що (7) є розв'язком однорідної системи (5). Отже, $M_0 \in Q$ є положенням рівноваги системи (4). Для поверхні Q в цілому буде виконуватись така теорема.

Теорема 1. Якщо для параметрів системи (4) виконуються умови:

- 1) $C \in [-2, 0)$,
- 2) $E < 0$,
- 3) $D \neq \frac{1}{8} \left(1 + \frac{C}{-2 \pm \sqrt{4 - C^2}} \right) E$,

то існують такі константи $k, p \in R \setminus \{0\}$, які не дорівнюють нулю, що довільна точка поверхні $M \in Q$ буде положенням рівноваги системи (4).

Для доведення теореми необхідно показати, що знайдуться такі ненульові константи k і p , при яких поверхня Q (6) буде описувати розв'язки однорідної системи рівнянь (5).

Підставимо першу і другу рівності умови (6) в систему (5). Врахувавши, що $y_1 y_5 = y_2 y_4$, систему (5) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} C y_1 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(k^2 + 1)(y_1^2 + y_4^2) \right] k y_1 + 2 k y_1 &= 0, \\ C k y_1 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(k^2 + 1)(y_1^2 + y_4^2) \right] y_1 + 2 y_1 &= 0, \\ D k (y_1^2 + y_4^2) + E y_3 + F &= 0, \\ C y_4 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(k^2 + 1)(y_1^2 + y_4^2) \right] k y_4 + 2 k y_4 &= 0, \\ C k y_4 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(k^2 + 1)(y_1^2 + y_4^2) \right] y_4 + 2 y_4 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Склавши перше рівняння з (8) і друге помноживши на k за умови $y_1 \neq 0$, або четверте рівняння та п'яте помноживши на k за умови $y_4 \neq 0$, отримаємо

$$C k^2 + 4 k + C = 0.$$

За першої умови теореми знаходимо

$$k_{1,2} = -\frac{-2 \pm \sqrt{4 - C^2}}{C}. \quad (9)$$

Випадку $y_1 = y_4 = 0$ за другої умови теореми відповідає положення рівноваги M_0 (7), що показано вище. Враховуючи (9), з будь-якого рівняння системи (8) можна отримати вираз для $y_1^2 + y_4^2$:

$$y_1^2 + y_4^2 = \frac{-C k - y_3 - 2}{\frac{1}{8}(k + 1)}. \quad (10)$$

Підставивши (10) у третє рівняння (8), за третьої умови теореми запишемо

$$\begin{aligned} D k \frac{-C k - y_3 - 2}{\frac{1}{8}(k + 1)} + E y_3 + F &= 0, \\ D k (-C k - y_3 - 2) + E y_3 \frac{1}{8}(k + 1) + F \frac{1}{8}(k + 1) &= 0, \\ y_3 &= \frac{\frac{1}{8}(k + 1)F - k^2 C D - 2 k D}{k D - \frac{1}{8}(k + 1)E}, \end{aligned}$$

звідки одержимо

$$p = \frac{\frac{1}{8}(k + 1)F - k^2 C D - 2 k D}{k D - \frac{1}{8}(k + 1)E}. \quad (11)$$

Теорема доведена.

Умови (6), (9), (11) визначають структуру однієї з множин положень рівноваги системи (4). Якщо розглядати коливання маятника лише в одній площині, поклавши $y_4 = y_5 = 0$, множина Q буде являти собою дві особливі лінії $y_2 = k_1 y_1$ і $y_2 = k_2 y_1$, які лежать у площині $y_3 = p$. У загальному випадку будемо називати Q особливою поверхнею. Якщо точки поверхні Q є стійкими положеннями рівноваги, то для довільної точки $M \in Q$ можна вказати такий окіл, що всі траєкторії, які проходять через точки цього околу, прямуватимуть при $\tau \rightarrow +\infty$ до M [4]. З'ясуємо, який рух здійснює маятник у такому випадку.

Якщо траєкторія системи (4) прямує до точки M_0 (7), то з формул (3) випливає, що

$$\alpha(t) = 0,$$

$$\beta(t) = 0.$$

У такому випадку маятник знаходитиметься в положенні рівноваги, повністю сумісвшись із вертикальною віссю. Якщо ж траєкторія системи (4) прямує до довільної точки $M(y_1, k y_1, p, y_4, k y_4) \in Q$, яка не збігається з M_0 , то з (2) випливає, що

$$\dot{\theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon \omega_0 p = \text{const.}$$

Отже, вал електродвигуна здійснює обертання з постійною кутовою швидкістю. Якщо

вважати $\theta(0) = 0$, то, враховуючи (3), можна записати

$$\begin{aligned}\theta(t) &= (2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 p)t, \\ \alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_1 \times \\ &\times \left[\cos \frac{(2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 p)t}{2} + k \sin \frac{(2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 p)t}{2} \right], \quad (12) \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_4 \times \\ &\times \left[\cos \frac{(2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 p)t}{2} + k \sin \frac{(2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 p)t}{2} \right].\end{aligned}$$

Таким чином, мають місце регулярні просторові коливання маятника за законом (12).

Розглянемо проекцію особливої поверхні Q (6) на фазовий підпростір $\bar{\Phi}\{y_1, y_2, y_4, y_5\} \subset \Phi$

$$\begin{aligned}\bar{Q}(y_1, y_2, y_4, y_5): \quad y_2 &= k_1 y_1, y_2 = k_2 y_1, \\ y_5 &= k_1 y_4, y_5 = k_2 y_4,\end{aligned} \quad (13)$$

де k_1, k_2 визначаються за формулою (9). Тоді для \bar{Q} можна сформулювати наслідок з теореми 1.

Наслідок 1. Якщо для параметра C системи (4) виконується умова $C \in [-2, 0)$, то довільна точка поверхні $\bar{M} \in \bar{Q}$ (13) буде нерухомою точкою системи (4) у фазовому підпросторі $\bar{\Phi}\{y_1, y_2, y_4, y_5\} \subset \Phi$.

Дійсно, з доведення теореми 1 випливає, що при таким чином вибраних y_1, y_2, y_4, y_5 матимемо

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{y}_2 &= 0, \\ \dot{y}_4 &= 0, \\ \dot{y}_5 &= 0,\end{aligned}$$

незалежно від y_3 . У такому випадку третє рівняння системи (4) стає лінійним і для нього елементарно може бути знайдено загальний розв'язок. Для довільної точки $\bar{M}(\bar{y}_1, k\bar{y}_1, \bar{y}_4, k\bar{y}_4) \in \bar{Q}$, де $k = k_1$ або $k = k_2$ (9), при $E < 0$ можна записати

$$\frac{dy_3}{d\tau} = kD(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_4^2) + Ey_3 + F,$$

$$\int \frac{dy_3}{kD(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_4^2) + Ey_3 + F} = \int d\tau,$$

$$\frac{1}{E} \ln |Ey_3 + kD(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_4^2) + F| = \tau + \ln |s|,$$

де $s = \text{const}$, звідки маємо

$$y_3(\tau) = \frac{1}{E} (se^{E\tau} - kD(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_4^2) - F).$$

Розглянемо випадок ідеального збудження коливань маятника. При цьому допускають, що потужність електродвигуна, джерела збудження коливань, настільки велика, що маятник не впливає на обертання його вала. В такому випадку система рівнянь (4) розкладеться на дві підсистеми. Одна підсистема складатиметься з першого, другого, четвертого і п'ятого рівнянь системи (4). Фазовий простір такої системи буде збігатися з $\bar{\Phi}$, і згідно з наслідком 1 особливої поверхні \bar{Q} (13) буде описувати множину її положень рівноваги. Друга підсистема складатиметься лише з третього рівняння. Оскільки впливом коливань маятника на обертання вала електродвигуна нехтується, то в цьому рівнянні покладають $D = 0$. Загальний розв'язок такого рівняння запишеться у вигляді

$$y_3(\tau) = \frac{1}{E} (se^{E\tau} - F),$$

де s — довільна стала. Отже, при ідеалізації джерела збудження реалізується випадок, коли коливальна система перебуває в положенні рівноваги, а усталеним значенням розлагодження $y_3(\tau)$ буде величина $-\frac{F}{E}$, оскільки при $E < 0$ маємо

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} y_3(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{E} (se^{E\tau} - F) = -\frac{F}{E}.$$

Стійкість положення рівноваги

Дослідимо стійкість деяких з отриманих положень рівноваги. Умови стійкості (за Ляпуновим) положення рівноваги M_0 (7) системи (1) визначаються такою теоремою.

Теорема 2. Якщо виконуються умови

- 1) $E < 0$,
- 2) $C < 0$ при $\frac{F}{E} \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$,
- 3) $C < -\sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}$ при $\frac{F}{E} \in [-2, 2]$,

то положення рівноваги M_0 (7) системи (4) є стійким, причому асимптотично.

Доведення. Нехай $(\tilde{y}_i(t), i = \overline{1, 5})$ – деяке мале збурення траєкторії системи (4). Побудуємо рівняння першого наближення для такого збурення:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{y}}_1 &= C\tilde{y}_1 + \left(2 + \frac{F}{E}\right)\tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \left(2 - \frac{F}{E}\right)\tilde{y}_1 + C\tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= E\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_4 &= Cy_4 + \left(2 + \frac{F}{E}\right)y_5, \\ \dot{\tilde{y}}_5 &= \left(2 - \frac{F}{E}\right)y_4 + Cy_5.\end{aligned}\quad (14)$$

Тоді характеристичне рівняння системи (14) визначається з умови

$$\begin{vmatrix} C - \lambda & 2 + \frac{F}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 2 - \frac{F}{E} & C - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C - \lambda & 2 + \frac{F}{E} \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \frac{F}{E} & C - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки матимемо

$$\begin{aligned}(C - \lambda)^2 \left[(E - \lambda)(C - \lambda)^2 - \left(4 - \frac{F^2}{E^2}\right)(E - \lambda) \right] - \\ - \left(4 - \frac{F^2}{E^2}\right) \left[(E - \lambda)(C - \lambda)^2 - \left(4 - \frac{F^2}{E^2}\right)(E - \lambda) \right] = 0,\end{aligned}$$

або

$$(E - \lambda) \left[(C - \lambda)^2 - \left(4 - \frac{F^2}{E^2}\right) \right]^2 = 0. \quad (15)$$

Знайдемо всі корені характеристичного рівняння (15) і покажемо, що їх дійсні частини за умов теореми будуть від'ємними.

Перший корінь рівняння (15) має вигляд

$$\lambda_1 = E < 0. \quad (16)$$

При $\frac{F^2}{E^2} \leq 4$ інші чотири корені визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= C + \sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}, \\ \lambda_{4,5} &= C - \sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}.\end{aligned}\quad (17)$$

Оскільки $-\sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}} \leq 0$, то

$$\lambda_{2,3} < 0, \lambda_{4,5} < 0 \text{ при } \frac{F^2}{E^2} \leq 4, C < -\sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}. \quad (18)$$

Відповідно при $\frac{F^2}{E^2} > 4$ інші чотири корені знаходяться за формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= C + i\sqrt{\frac{F^2}{E^2} - 4}, \\ \lambda_{4,5} &= C - i\sqrt{\frac{F^2}{E^2} - 4}.\end{aligned}\quad (19)$$

Оскільки $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) = \operatorname{Re}(\lambda_{4,5}) = C$, то

$$\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) < 0, \operatorname{Re}(\lambda_{4,5}) < 0$$

$$\text{при } \frac{F^2}{E^2} \leq 4, C < -\sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}. \quad (20)$$

Таким чином, враховуючи (16), (18) і (20), маємо, що дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння системи (14) за умов теореми будуть від'ємними. Тоді за теоремою Ляпунова про стійкість за першим наближенням [4, 5] незбурений рух стійкий, причому асимптотично, якими б не були члени вищих порядків у диференціальних рівняннях збуреного руху. Тим самим, теорема доведена.

Наслідок 2. Якщо $C > -\sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}$ при $\frac{F}{E} \in [-2, 2]$, то положення рівноваги M_0 (7) системи (4) буде нестійким.

Доведення. При $\frac{F}{E} \in [-2, 2]$ чотири корені характеристичного рівняння (15) визначаються за формулою (18), звідки матимемо

$$\lambda_{2,3} = C + \sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}, \quad \lambda_{4,5} = C - \sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}.$$

Отже, при виконанні умови $C > -\sqrt{4 - \frac{F^2}{E^2}}$

дійсна частина коренів характеристичного рівняння $\text{Re}(\lambda_{2,3})$ системи у варіаціях буде додатною. Тоді за теоремою Ляпунова про нестійкість за першим наближенням [4, 5] незбурений рух буде нестійким при довільному виборі членів порядку вище першого в диференціальних рівняннях збуреного руху, що і вимагалось довести.

Використовуючи умови теореми 2, можна визначити області стійкості положення рівноваги досліджуваної системи. На рис. 2 і 3 побудовано області стійкості положення рівноваги M_0 (7) відносно параметрів системи C, E і

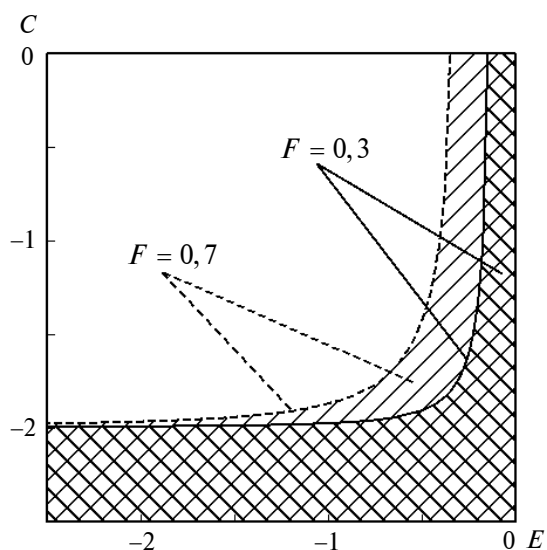


Рис. 2. Області стійкості положення рівноваги відносно параметрів C, E

C, F , відповідно. При значеннях параметрів системи (4), які відповідають заштрихованим областям на вказаних рисунках, положення рівноваги M_0 (7) буде асимптотично стійким.

Як видно з рис. 2 і 3, зміною величини параметрів E і F можна досягати збільшення об'єму області стійкості положення рівноваги M_0 (7) у просторі параметрів системи. Проте для довільних значень параметрів $E < 0$ і F дане положення рівноваги буде завжди стійким при $C \leq -2$.

Побудовані області стійкості визначають ті значення параметрів системи (4), при яких будуть стабілізуватись коливання маятника в околі положення рівноваги (7). Якщо ж дане положення рівноваги втрачає свою стійкість, то всі траєкторії системи (4), які стартують з околу точки M_0 (7), з плином часу залишають цей окіл і, в силу дисипативності системи, прямуватимуть до деяких граничних множин, аттракторів, фазового простору системи, які можуть бути як регулярними, так і хаотичними [3]. Інакше кажучи, при втраті стійкості положення рівноваги (7), просторові коливання маятника можуть ставати нерегулярними, хаотичними. Отже, існування детермінованого хаосу в системі сферичний маятник–електродвигун можливе лише при таких значеннях параметрів C, E, F , яким відповідають не заштриховані області на рис. 2 і 3.

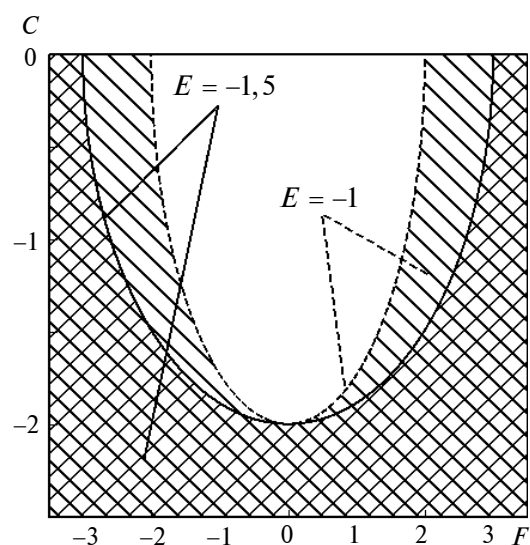


Рис. 3. Області стійкості положення рівноваги відносно параметрів C, F

Висновки

Динамічна система, яка описує просторові коливання фізичного маятника з неідеальним збудженням, має нескінченну кількість положень рівноваги. Встановлено, що у фазовому просторі системи існує особлива поверхня, всі точки якої є положеннями рівноваги.

Встановлені в статті достатні умови асимптотичної стійкості для одного з положень рівноваги дають можливість будувати області

стійкості в просторі параметрів досліджуваної системи. Тоді можна визначати і області можливого існування відмінних від положення рівноваги атракторів системи, як регулярних, так і хаотичних.

Отримані в даній статті результати в подальших дослідженнях регулярної та хаотичної динаміки будуть використані для побудови атласу карт динамічних режимів системи сферичний маятник—електродвигун.

В.А. Печерный

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Исследуются положения равновесия динамической системы, образованной сферическим маятником, точка подвеса которого возбуждается в вертикальной плоскости электродвигателем ограниченной мощности. Установлено, что в фазовом пространстве системы существует особая поверхность, все точки которой являются положениями равновесия. Для одного из таких положений равновесия получены достаточные условия асимптотической устойчивости и построены соответствующие области устойчивости в пространстве параметров системы.

V.A. Pechernyi

RESEARCH OF EQUILIBRIUM STATES OF A SPHERICAL PENDULUM WITH NON-IDEAL EXCITATION

The present paper studies the equilibrium states of a dynamic system, formed by a spherical pendulum, whose point of suspension is excited in vertical plane by power-constrained electromotor. We identify that in the phase space of the system there is a singular surface, whose all points are the equilibrium states. Furthermore, sufficient conditions of asymptotic stability are obtained for one of equilibrium states and relevant domains of stability in the space of parameters system are constructed.

1. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источником энергии // Прикл. механика. — 1992. — 28, № 10. — С. 61–68.
2. Швец А.Ю. Детерминированный хаос сферического маятника при ограниченном возбуждении // Укр. мат. журн. — 2007. — 59, № 4. — С. 534–548.
3. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — М., Ижевск: R&CD, 2008. — 280 с.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 532 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
26 травня 2009 року