УДК 517.968

Г.О. Южакова

РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ ЛЕЖАНДРА

Вступ

При розв'язанні різноманітних задач у багатьох галузях прикладної математики, прикладної і теоретичної фізики, астрономії, біомедицини та інших наук виникають спеціальні функції різної природи і складності – функції, які не виражаються через елементарні. Ці функції (функції Бесселя, Лежандра, ортогональні многочлени, гіпергеометричні функції та ін.) відіграють важливу роль як в теорії, так і в застосуваннях, зокрема при розв'язанні крайових задач квантової теорії поля, математичної фізики, теорії імовірностей та математичної статистики тощо. У зв'язку з розширенням потреб практичного застосування і розвитком обчислювальної математики за останні кілька десятиліть кількість спеціальних функцій значно збільшилась.

Останнім часом особлива увага приділяється узагальненим спеціальним функціям, дослідженням і вивченню їх властивостей з метою подальшого застосування в теорії та практиці [1–6] та ін.

Постановка задачі

Розглянемо τ-узагальнену (за Райтом) функцію Лежандра у вигляді

$$^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}{}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\,\nu+1;\,1-\mu;\,\frac{1-z}{2}\right) \quad (1)$$

і дослідимо композиційні співвідношення з цією функцією. В (1) $|1-z|<2$, $\mu\neq 1,2,\ldots$, ${}_2^{\tau}F_1$ – τ-узагальнена гіпергеометрична функція Гаусса [7]:

$$_2^{\tau}F_1(a,\,b;\,c;\,\xi)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-\xi t^{\tau})^{-a}dt,$$

$\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$; $\tau\in\mathbb{R}$; $\tau>0$; $a,b,c\in\mathbb{C}$; $\Gamma(c)$ – класична гамма-функція [8].

Деякі відомості про τ-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса ${}_2^{\tau}F_1(a,\,b;\,c;\,\xi)$

Серед властивостей τ-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2^{\tau}F_1(a,\,b;\,c;\,\xi)$ [6] відзначимо її зображення у вигляді ряду

$$_2^{\tau}F_1(a,\,b;\,c;\,\xi)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{\xi^n}{n!}, \quad (2)$$

а також деякі рекурентні співвідношення між суміжними функціями:

$$c\,{}_2^{\tau}F_1=(c-b)\,{}_2^{\tau}F_1(c+1)+b\,{}_2^{\tau}F_1(b+1;\,c+1), \quad (3)$$

$$(c-b-1)\,{}_2^{\tau}F_1=(c-1)\,{}_2^{\tau}F_1(c-1)-b\,{}_2^{\tau}F_1(b+1), \quad (4)$$

$$(c-a\tau-1)\,{}_2^{\tau}F_1=(c-1)\,{}_2^{\tau}F_1(c-1)-a\tau\,{}_2^{\tau}F_1(a+1), \quad (5)$$

$$(b-a\tau)\,{}_2^{\tau}F_1=b\,{}_2^{\tau}F_1(b+1)-a\tau\,{}_2^{\tau}F_1(a+1), \quad (6)$$

$$_2^{\tau}F_1(b+1)=$$

$$={}_2^{\tau}F_1+a\tau\xi\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b+1)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2^{\tau}F_1(a+1,b+\tau;c+\tau;\,\xi), \quad (7)$$

які будуть використані в подальшому. Тут позначено:

$$_2^{\tau}F_1(a,\,b;\,c;\,\xi)={}_2^{\tau}F_1,$$

$$_2^{\tau}F_1(a+1,\,b;\,c;\,\xi)={}_2^{\tau}F_1(a+1),$$

$$_2^{\tau}F_1(a,\,b+1;\,c;\,\xi)={}_2^{\tau}F_1(b+1),$$

$$_2^{\tau}F_1(a,\,b;\,c-1;\,\xi)={}_2^{\tau}F_1(c-1),$$

$$_2^{\tau}F_1(a,\,b+1;\,c+1;\,\xi)={}_2^{\tau}F_1(b+1;\,c+1).$$

Теорема 1. При умовах існування τ-узагальненої (за Райтом) функції Лежандра $^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$ (1) справедливі такі співвідношення:

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}\,{}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)=$$

$$=-(\mu+\nu)\,{}^{\tau}P_{\nu}^{\mu-1}(z)-\frac{1}{\tau}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}\,{}^{\tau}P_{\nu+1}^{\mu}(z)+$$

$$+\left(\nu+1+\frac{1-\mu}{\tau}\right){}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu-1}(z), \tag{8}$$

$$\frac{\mu+\nu+1}{\mu}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)={}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(z)+$$

$$+\frac{1}{\tau}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)-\left(\nu+1-\frac{\mu}{\tau}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(z), \tag{9}$$

$$(\nu+1+\nu\tau)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)=-\frac{1}{\tau}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu+1}(z)+$$

$$+\left(\nu+1-\frac{\mu}{\tau}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(z)+$$

$$+\tau{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)+(\mu+\nu)\tau\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(z), \tag{10}$$

$$(\nu\tau-\mu)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)={}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(z)+\tau{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)+$$

$$+(\mu+\nu)\tau\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(z). \tag{11}$$

Доведення. 1. При $a=-\nu,\ b=\nu+1,\ c=$ $=1-\mu,\ \xi=\dfrac{1-z}{2}$ формула (3) набуває вигляду

$$(1-\mu)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=(-\mu-\nu)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+(\nu+1)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{12}$$

Подамо функцію ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+2; 2-\mu; \frac{1-z}{2}\right)$ у формі

$${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$={}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu-1+1,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{13}$$

Тоді з властивості (5) можна записати

$${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a+1)=\frac{c-1}{a\tau}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(c-1)-\frac{c-a\tau-1}{a\tau}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1, \tag{14}$$

або для $a=-\nu-1,\ b=\nu+2,\ c=2-\mu,\ \ \xi=\dfrac{1-z}{2}$ з (13) і (14) матимемо

$${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1-\mu}{(-\nu-1)\tau}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+\frac{1-\mu+(\nu+1)\tau}{(\nu+1)\tau}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{15}$$

Підставивши вираз (15) в (12), одержимо

$$(1-\mu)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=(-\mu-\nu)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+\frac{\mu-1}{\tau}\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+\frac{1-\mu+(\nu+1)\tau}{\tau}\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu-1,\ \nu+2;\ 2-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{16}$$

Помноживши обидві частини рівності (16) на вираз $\dfrac{1}{\Gamma(2-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}$ і використавши зображення (1) функції ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$ через τ-узагальнену гіпергеометричну функцію та врахувавши властивість гамма-функції [8] $\Gamma(2-\mu)=$ $=(1-\mu)\Gamma(1-\mu)$, отримаємо рекурентне співвідношення (8).

2. При $a=-\nu,\ b=\nu+1,\ c=1-\mu,\ \xi=\dfrac{1-z}{2}$ формула (4) після спрощень матиме вигляд

$$(\mu+\nu+1)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=\mu\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ -\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)+$$

$$+(\nu+1)\ {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{17}$$

Запишемо функцію ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\ \nu+2;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)$ у формі

$$ {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\, \nu+2;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) = $$

$$ = {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu-1+1,\, \nu+2;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right). \qquad (18) $$

Тоді згідно з (14) для $a=-\nu-1,\, b=\nu+2,$ $c=1-\mu,\ \ \xi=\frac{1-z}{2}$ з (18) дістанемо

$$ {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\, \nu+2;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) = $$

$$ = \frac{\mu}{(\nu+1)\tau}\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu-1,\, \nu+2;\, -\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) + $$

$$ + \frac{-\mu+(\nu+1)\tau}{(\nu+1)\tau}\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu-1,\, \nu+2;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right). \quad (19) $$

Підставивши вираз (19) в (17) і скориставшись зображенням (1) для функції ${}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$ та властивістю гамма-функції $\Gamma(1-\mu)=-\mu\Gamma(1-\mu)$ [8], після перетворень отримаємо рекурентне співвідношення (9).

3. При $a=-\nu,\ b=\nu+1,\ c=1-\mu,\ \xi=\frac{1-z}{2}$ згідно з формулою (6) маємо

$$ (\nu+1+\nu\tau)\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) = $$

$$ = (\nu+1)\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\, \nu+2;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) + $$

$$ + \nu\tau\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right). \qquad (20) $$

Із властивості (4) можна записати

$$ {}_2^{\tau}F_1(b+1) = \frac{c-1}{b}\, {}_2^{\tau}F_1(c-1) - \frac{c-b-1}{b}\, {}_2^{\tau}F_1, $$

звідки при $a=-\nu+1,\ b=\nu,\ c=1-\mu,\ \xi=\frac{1-z}{2}$ функцію ${}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right)$ з формули (20) можна подати в новій формі

$$ {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) = $$

$$ = -\frac{\mu}{\nu}\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu;\, -\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) + $$

$$ + \frac{\mu+\nu}{\nu}\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right). \qquad (21) $$

Підставивши вирази (19) і (21) в (20), помноживши обидві частини одержаної рівності на $\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}$ та врахувавши зображення (1) для функції ${}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$ і властивість $\Gamma(1-\mu)=-\mu\Gamma(-\mu)$ гамма-функції [8], отримаємо рекурентне співвідношення (10) для τ-узагальнених функцій Лежандра.

4. При $a=-\nu,\ b=\nu+1,\ c=1-\mu,\ \xi=\frac{1-z}{2}$ формула (5) набуває вигляду

$$ (\nu\tau-\mu)\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) = $$

$$ = -\mu\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu,\, \nu+1;\, -\mu;\, \frac{1-z}{2}\right) + $$

$$ + \nu\tau\, {}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right). \qquad (22) $$

Підставивши в (22) вираз (21) для ${}_2^{\tau}F_1\left(-\nu+1,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-z}{2}\right)$, помноживши одержану рівність на вираз $\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}$, скориставшись зображенням (1) для функції ${}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$ і властивістю $\Gamma(1-\mu)=-\mu\Gamma(-\mu)$ [8], отримаємо рекурентне співвідношення (11).

Теорема 2. При умовах $|1-z|<2$, $\mu \ne 1, 2, \ldots$, $\operatorname{Re}(1-\mu) > \operatorname{Re}(1+\nu) > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau>0$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ справедливі такі формули диференціювання τ-узагальненої (за Райтом) функції Лежандра ${}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)$ (1):

$$ \frac{d}{dz}\, {}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z) = \left(\frac{\nu+1}{2\tau} - \frac{1}{z^2-1}\right) {}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z) + $$

$$ + \frac{1}{2\tau^2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{\nu+1}^{\mu+1}(z) - \frac{(\nu+1)\tau-\mu}{2\tau^2}\, {}^{\tau}P_{\nu+1}^{\mu}(z), \quad (23) $$

$$ \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}\, {}^{\tau}P_{\nu}^{\mu}(z)\right) = -\frac{(z-1)^{\frac{\mu-1}{2}-\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu+1}{2}}}\, {}^{\tau}P_{\nu-1}^{\mu+1}(z) - $$

$$-(-1)^{\nu}(\mu+\nu)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}^{\tau}\mathrm{P}^{\mu}_{\nu-1}(z). \quad (24)$$

Доведення. 1. Використовуючи зображення (2) τ-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a, b; c; \xi)$ у вигляді ряду, пересвідчуємось, що для довільних $p, q \in$ має місце формула

$$\frac{d}{d\xi}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a, b; c; p\xi+q) =$$

$$= pa\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a+1, b+\tau; c+\tau; p\xi+q). \quad (25)$$

Зокрема, для $\xi = z,\ p = -\frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$ формула (25) набуде вигляду

$$\frac{d}{dz}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(a, b; c; \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= -\frac{a}{2}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(a+1, b+\tau; c+\tau; \frac{1-z}{2}\right). \quad (26)$$

Із властивості (7) дістаємо

$$a\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b+1)\Gamma(c+\tau)}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(a+1, b+\tau; c+\tau; \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau}({}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(b+1) - {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1).$$

Отже, врахувавши властивість $\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)} = b$, співвідношення (26) можна подати у формі

$$\frac{d}{dz}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(a, b; c; \frac{1-z}{2}\right) = -\frac{b}{2\tau}({}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(b+1) - {}_2^{\tau}\mathrm{F}_1). \quad (27)$$

Використовуючи зв'язок (1) τ-узагальненої функції Лежандра ${}^{\tau}\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(z)$ і τ-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1$, запишемо вираз для $\frac{d}{dz}\,{}^{\tau}\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(z)$:

$$\frac{d}{dz}\,{}^{\tau}\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\times$$

$$\times\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{d}{dz}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)\right]. \quad (28)$$

Для похідної $\frac{d}{dz}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)$ скористаємось формулою (27) при $a = -\nu$, $b = \nu+1$, $c = 1-\mu$. Тоді (28) набуде вигляду

$$\frac{d}{dz}\,{}^{\tau}\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\frac{\mu}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}-1}\times$$

$$\times\frac{-2}{(z-1)^2}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\nu+1}{2\tau}\times$$

$$\times\left[{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+2; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)\right]. \quad (29)$$

Після використання формул (1), (19) і нескладних перетворень із (29) прийдемо до формули (23).

2. Використовуючи зображення (2) τ-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a, b; c; \xi)$ у вигляді ряду, переконуємось, що для довільних $p, q \in$ має місце формула

$$\frac{d}{d\xi}[(p\xi+q)^a\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a, b; c; p\xi+q)] =$$

$$= pa\xi^{a-1}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a+1, b; c; p\xi+q). \quad (30)$$

А для $\xi = z,\ p = -\frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2},\ a = -\nu,\ b = \nu+1$ $c = 1-\mu$ формула (30) матиме вигляд

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^{-\nu}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\nu}{(1-z)^{\nu+1}}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu+1, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right). \quad (31)$$

Із формули (1) дістанемо

$$(1-z)^{-\nu}\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu,\,\nu+1;\,1-\mu;\,\frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\mu)(-1)^{\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}\,{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z). \qquad (32)$$

Функцію ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu+1,\,\nu+1;\,1-\mu;\,\frac{1-z}{2}\right)$ подамо за формулою (21) і підставимо (32) і (21) в (31):

$$(-1)^{\nu}\Gamma(1-\mu)\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}\,{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-z)^{\nu+1}}\left[-\mu\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu+1,\,\nu;\,-\mu;\,\frac{1-z}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(\mu+\nu)\,{}_2^{\tau}\mathrm{F}_1\left(-\nu+1,\,\nu;\,1-\mu;\,\frac{1-z}{2}\right)\right]. \qquad (33)$$

Після множення (33) на $\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}$ і врахування зв’язку (1) функцій ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1$ і ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$ дістанемо

$$\frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}-\nu}}{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}\,{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)\right]=$$

$$=\frac{-\mu}{(1-z)^{\nu+1}\Gamma(1-\mu)}\,{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(z)+$$

$$+\frac{\mu+\nu}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}\,{}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(z). \qquad (34)$$

Остаточно, врахувавши, що $\frac{-\mu}{\Gamma(1-\mu)}=\frac{1}{\Gamma(-\mu)}$, з (34) після спрощень матимемо формулу (24).

Висновки

Теореми 1 і 2 доведені за умов існування τ-узагальненої (за Райтом) функції Лежандра ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$. Для такої узагальненої функції Лежандра ці результати одержано вперше. При доведенні використано відомі властивості τ-узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a,\,b;\,c;\,\xi)$ і зв’язок функцій ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}$ та ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1$. Із запропонованого способу доведення видно, що аналогічні результати можна дістати і для складнішої τ, β-узагальненої функції Лежандра ${}^{\tau,\beta}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$, окремим випадком якої є розглянута в статті функція ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$. Одержані нові наукові результати є певним кроком у подальшому розвитку теорії спеціальних функцій — вони відкривають нові можливості для її використання при розв’язанні складніших математичних та практичних задач.

А.А. Южакова

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛЕЖАНДРА

Рассмотрена τ-обобщенная (по Райту) функция Лежандра ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$, сформулированы и доказаны теоремы о рекуррентных соотношениях и формулах дифференцирования для этой функции. При доказательстве использованы известные свойства τ-обобщенной (по Райту) гипергеометрической функции Гаусса ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a,b;c;\xi)$ и связь функций ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}$ и ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1$.

G.O. Yuzhakova

RECURRENT RELATIONS WITH THE GENERALIZED LEGENDRE FUNCTIONS

This paper considers τ-generalized (by Wright) ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(z)$ Legendre functions. By using the known properties of τ-generalized (by Wright) ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1(a,b;c;\xi)$ Gauss hypergeometric function and the relation between ${}^{\tau}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}$ and ${}_2^{\tau}\mathrm{F}_1$ functions, the theorem of recurrent relations, as well as the theorem of differentiation formulas for these functions are formulated and proved.

1. *Virchenko N., Fedotova I.* Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. – Singapore: World Scientific, 2001. – 196 p.
2. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимация. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
3. *Saigo M., Glaeske H.-J.* Fractional calculus operators involving the Gauss function on spaces $F_{p,\mu}$ and $F^{1}_{p,\mu}$ // Math. Nachr. – 1990. – **147**. – P. 285–306.
4. *Andrews L.C., Askey R., Roy R.* Special functions. – New York: Cambridge University Press, 1999.
5. *Южакова Г.О.* Про системи гібридних парних інтегральних рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2005. – № 1. – С. 152–156.
6. *Вірченко Н.О., Рум'янцева О.В.* (τ, β) -Узагальнена гіпергеометрична функція Гаусса та її застосування // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 1. – С. 139–143.
7. *Вірченко Н.О.* Про гіпергеометричні функції, їх узагальнення та застосування // Наукові записки АН ВШ України. – 2006. – **1**. – С. 20–25.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
26 жовтня 2009 року