

УДК 301.17.15; 301.07.13

П.В. Лук'янов

МОДЕЛЬ СФЕРИЧНОГО КОМПАКТНОГО ВИХОРУ

The aim of the investigations is obtaining of simplest model that describes compact spherical vortex with only radial distribution and also to derive self-similar equation for the vortex's diffusion and it's solution. The investigations are theoretical ones. The obtained results are the following ones. Any of the vortical flows that has zero radial velocity is always helical one. Meridional and azimuthal velocity components have the same distributions (are invariant). The vorticity field compensation condition for spherical coordinates does not result into vortex compactness as it is for cylindrical vortices. The general vortical flow velocity field compactness condition has been formulated. The self-similar solution for spherical vortex diffusion equation has been obtained. Conclusions. It has been derived compact spherical vortex model. The difference between compact spherical vortex and it's cylindrical counterpart was pointed out. The kinetic energy of obtained flow is finite and agrees with energy conservation law.

Вступ

Коли мова іде про природу, ми маємо чітко усвідомлювати: Земля, та все, що на ній перебуває, мають скінченні розміри. Утім дуже часто в математичних моделях різноманітних явищ вчені вдаються до так званого наближення нескінченності. Мається на увазі досить типова в геофізиці ситуація, коли те чи інше явище має просторові масштаби хоча б в одному із напрямків, менші за розміри області середовища, що розглядається. Стосовно вихрових рухів ідеться про так звані компактні вихори.

Раніше було знайдено, що для того щоб реальні циліндричні вихори мали скінченні розміри, необхідна компенсація поля завихреності [1, 2]. У праці [1] розглянуто приклад бароклічного сферичного компенсованого вихору на f -площині. Однак до сих пір не існує простих моделей сферичних вихорів зі строго окресленою зовнішньою границею. Наприклад, відомий вихор Хілла [3] не відповідає такій течії, тому що зовні кулі деякого радіуса швидкість частинок середовища не нульова — течія потенціальна. У працях класика гвинтових течій І.С. Громеки [4] розглядаються також вихори, в яких вісь обертання перпендикулярна до сферичної поверхні. Заслуговує на увагу праця [5], в якій розглянуто сферичні вихори, що складаються з двох частин — ядра та оболонки. Утім на сьогодні не існує публікацій, де б розглядалися сферичні вихрові течії, що залежать від однієї радіальної змінної та мають дві компоненти швидкості — азимутальну та меридіональну. Однією із найбільш важливих причин є те, що навіть при зазначених обмеженнях рівняння руху для даного класу течій — формально нелінійні. Отже, пропонується одна з

найпростіших моделей сферичного компактного вихору, усі характеристики якого залежать лише від радіальної координати.

Постановка задачі

Предметом дослідження є знаходження математичного розв'язку, який описує найпростіший клас вихрових течій у сферичній системі координат, у яких відсутня радіальна складова швидкості, а дві інші — азимутальна та меридіональна — залежать лише від радіальної координати і можуть також змінюватись у часі (дифундувати). Мета роботи — побудувати найпростішу модель компактного сферичного гвинтового вихору, а також вивести автономне рівняння, що описує дифузію цієї течії, та знайти його розв'язок.

Основна властивість компактного сферичного вихору

У сферичній системі координат (r, ϑ, φ) існує клас течій

$$U_r = 0, U_{\vartheta} = U_{\vartheta}(r), U_{\varphi} = U_{\varphi}(r), \quad (1)$$

у якого компоненти швидкості $U_{\vartheta} = r \frac{d\vartheta}{dt}$ та

$U_{\varphi} = r \sin \vartheta \frac{d\varphi}{dt}$ задовольняють

$$\frac{d\vartheta}{dt} = f(r), \frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta = \frac{d\vartheta}{dt} = f(r),$$

де $f(r)$ — деяка функція радіальної координати. Хоча $\frac{d\varphi}{dt}$ має особливість на полюсах

($\vartheta = 0; \pi$), поля швидкості та завихреності, що характеризують рух рідини як суцільного середовища, позбавлені цього недоліку.

У такому випадку рівняння Гельмгольца [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + U_\vartheta \frac{\partial \omega_r}{r \partial \vartheta} + \frac{U_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} = \\ = \omega_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \omega_\vartheta \frac{\partial U_r}{r \partial \vartheta} + \frac{\omega_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \omega_\vartheta}{\partial t} + U_r \frac{\partial \omega_\vartheta}{\partial r} + U_\vartheta \frac{\partial \omega_\vartheta}{r \partial \vartheta} + \frac{U_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \omega_\vartheta}{\partial \varphi} - \\ - \frac{U_r \omega_\vartheta - U_\vartheta \omega_r}{r} = \omega_r \frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} + \omega_\vartheta \frac{\partial U_\vartheta}{r \partial \vartheta} + \frac{\omega_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial t} + U_r \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + U_\vartheta \frac{\partial \omega_\varphi}{r \partial \vartheta} + \frac{U_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} - \\ - \frac{U_r \omega_\varphi - U_\varphi \omega_r}{r} - \frac{U_\vartheta \omega_\varphi \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} = \\ = \omega_r \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \omega_\vartheta \frac{\partial U_\varphi}{r \partial \vartheta} + \frac{\omega_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{U_\varphi \omega_\vartheta \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \end{aligned}$$

спрощуються до єдиного:

$$-\frac{U_\vartheta \omega_\varphi \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} = -\frac{U_\varphi \omega_\vartheta \cos \vartheta}{r \sin \vartheta},$$

або

$$U_\vartheta \omega_\varphi = U_\varphi \omega_\vartheta. \quad (2)$$

Усі течії вигляду (1) мають задовольняти (2). Згідно з означенням гвинтових течій [3, 6], мають місце такі рівності:

$$\omega_r = \lambda U_r, \omega_\vartheta = \lambda U_\vartheta, \omega_\varphi = \lambda U_\varphi. \quad (3)$$

Співвідношення (3), після виключення параметра λ , з урахуванням відсутності радіальних компонент швидкості та завихреності, є не що інше, як отримана вище умова (2). Отже, має місце така властивість сферичних гвинтових течій: *будь який сферичний вихор, у якого відсутня радіальна компонента швидкості, а дві інші залежать лише від радіальної координати, є гвинтовою течією. Іншими словами, клас найпростіших, з точки зору математики, сферичних вихорів є одночасно класом гвинтових течій.*

Приклад гвинтового сферичного компактного вихору

Рівняння гвинтової течії у сферичній системі координат мають такий вигляд [3]:

$$\omega_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(\sin \vartheta U_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial U_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = \lambda U_r, \quad (4)$$

$$\omega_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial U_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \vartheta U_\varphi)}{\partial r} \right] = \lambda U_\vartheta, \quad (5)$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r U_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \vartheta} \right] = \lambda U_\varphi. \quad (6)$$

Якщо поле швидкості не залежить від змінних (ϑ, φ), рівняння (4)–(6) спрощуються до

$$\omega_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{d(r U_\varphi)}{dr} = \lambda U_\vartheta, \quad (7)$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d(r U_\vartheta)}{dr} = \lambda U_\varphi. \quad (8)$$

Останні два рівняння еквівалентні одному:

$$U_\varphi \frac{d(r U_\varphi)}{dr} = -U_\vartheta \frac{d(r U_\vartheta)}{dr}. \quad (9)$$

З рівняння (9) випливає, що коли відома одна з компонент швидкості, то друга легко знаходиться.

Як зазначалося раніше, існуючі моделі сферичних вихорів не мають чітких границь [3, 4]. Використаємо наявний досвід [6] знаходження компактних циліндричних вихорів і застосуємо його тут. Припустимо, що азимутальна компонента швидкості V_φ та, відповідно, ω_ϑ розподілені, як і в компактному компенсованому вихорі [2, 6]:

$$V_\varphi = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{V_0 a (R^2 - r^2)}{r}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (10)$$

$$\omega_{\theta} = \begin{cases} -\frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи вирази (10)–(11) у ліву частину (9), отримаємо

$$U_{\varphi} \frac{d}{dr}(rU_{\varphi}) = \begin{cases} -\frac{2V_0^2 r^2}{a^2}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{2V_0^2 a^2 (R^2 - r^2)}{(R^2 - a^2)^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (12)$$

Використаємо вираз (12) для знаходження U_{φ} . Згідно з (9) і (12) маємо

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dr} [(rU_{\varphi})^2] = \begin{cases} -\frac{2V_0^2 r^3}{a^2}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{2V_0^2 a^2 (R^2 - r^2) r}{(R^2 - a^2)^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (13)$$

Інтегрування (13) слід проводити, починаючи із зовнішньої області, задовольнивши основну умову — умову компактності вихору:

$$(rU_{\varphi})^2 = \begin{cases} \frac{V_0^2 r^4}{a^2} \Big|_0^r + C_1, & 0 \leq r \leq a; \\ -\frac{4V_0^2 a^2}{(R^2 - a^2)^2} \left(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_a^r + C_2, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (14)$$

Константа C_2 знаходиться з граничної умови $U_{\varphi}(r = R) = 0$:

$$C_2 = \frac{V_0^2 a^2 R^4}{(R^2 - a^2)^2},$$

тому розв'язок в області $a \leq r \leq R$ має такий вигляд:

$$U_{\theta} = \frac{V_0 a}{r} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}. \quad (15).$$

Константа C_1 знаходиться з умови рівності швидкості: $U_{\theta}(r = a) = V_0$. Отримаємо

$$U_{\theta} = \frac{V_0 r}{a}. \quad (16)$$

Компонента завихреності ω_{φ} , згідно з отриманим розв'язком, є:

$$\omega_{\varphi} = \begin{cases} -\frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (17)$$

Співвідношення (10), (11), (15), (17) ілюструють один із прикладів компактного гвинтового вихору. Цей вихор має такий самий радіальний розподіл компонент швидкості, що й циліндричний (10). І головне — ці компоненти ідентичні, тобто описуються одними і тими ж розподілами. Отже, модуль абсолютної швидкості, що складається з азимутальної та меридіональної компонент, відрізняється від них, згідно з теоремою Піфагора, на $\sqrt{2}$. Сказане також стосується вектора завихреності. Але в чому ж відмінність отриманого компактного сферичного вихору від його “циліндричного аналога”? Оскільки у сферичній системі координат якобіан дорівнює $r^2 \sin \theta$, інтеграли зі змінними верхніми границями, згідно з якими отримуються компоненти швидкості за завихреностями, що впливають з (10), (11), тепер не відповідають інтегралам за об'ємом. І навіть при скороченні на $\sin \theta$ у рівнянні (8) отримується $r\omega_{\theta}$ під знаком інтеграла, а не вказаний якобіан у сферичній системі координат. Отже, у сферичній системі координат умова компактності (скінченності) поля швидкості за умови компактності поля завихреності не збігається з умовою компенсованості, тобто рівності нулеві інтеграла за об'ємом вихору від завихреності. У цьому і полягає основна відмінність між скінченим циліндричним об'ємом рідини, що обертається, та її сферичним аналогом. Доречно сказати, що циліндричний вихор є компактным лише в одному — радіальному — вимірі.

З урахуванням сказаного легко сформулювати умову скінченності області обертання рідини, що обумовлена скінченною вихровою областю. Skorистаємось енциклопедичною літературою. Так, згідно з [7], якщо скінченна область рідини (D) зайнята вихровою течією, вектор швидкості знаходиться як

$$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{\Pi}, \quad (18)$$

де $\mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\text{rot } \mathbf{V}}{r} d\tau$ – вектор-потенціал.

Таким чином, щоб зовні об'єму рідини (D) був відсутній будь-який рух, необхідно та достатньо, щоб там виконувалась рівність

$$\text{rot } \mathbf{\Pi} = 0. \quad (19)$$

Дифузія компактного сферичного вихору

Зручно розглянути рівняння Нав'є–Стокса у сферичній системі координат у вигляді рівнянь Громеки–Ламба:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_r^2 + U_\vartheta^2 + U_\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = \\ = U_\vartheta \omega_\varphi - U_\varphi \omega_\vartheta - \frac{v}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(\omega_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \omega_\vartheta}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_r^2 + U_\vartheta^2 + U_\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = \\ = U_\varphi \omega_r - U_r \omega_\varphi - \frac{v}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \omega_\varphi \sin \vartheta)}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_r^2 + U_\vartheta^2 + U_\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = \\ = U_r \omega_\vartheta - U_\vartheta \omega_r - \frac{v}{r} \left(\frac{\partial(r \omega_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \vartheta} \right), \end{aligned}$$

З урахуванням (1) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial t} &= v \left(\frac{\partial^2 U_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} &= v \left(\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

З рівнянь (20) випливає, що автомодельні розв'язки для обох компонент швидкості збігаються, тому що рівняння одні і ті ж. Крім того, не наведено рівняння для тиску, яке залишається після редукції першого рівняння Громеки–Ламба. Тиск просто перераховується з цього рівняння – за полем швидкості.

Позначимо шуканий автомодельний розв'язок та автомодельну змінну відповідно

$$U = U(\eta), \quad \eta = r/t^b. \quad (21)$$

Підстановка (21) в будь-яке з рівнянь (20) дає

$$\frac{dU}{d\eta} \frac{(-b)}{t} \eta = \frac{1}{\text{Re } t^{2b}} \left(\frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{dU}{d\eta} \right),$$

звідки випливає $b = 0,5$ і слідує автомодельне рівняння

$$\frac{d^2 U}{d\eta^2} + \left(\frac{2}{\eta} + \frac{\text{Re}}{2} \eta \right) \frac{dU}{d\eta} = 0. \quad (27)$$

Загальний розв'язок (27) є такою комбінацією з чотирьох функцій:

$$\begin{aligned} U(\eta) = - \frac{\exp \left[-\frac{\text{Re}}{4} \eta^2 \right]}{\eta} - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{\pi \text{Re}} \cdot \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\text{Re}}}{2} \eta \right) + C_1 \eta + C_2, \end{aligned} \quad (28)$$

де $\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\xi^2) d\xi$ – так звана функція похибок.

Константи C_1 і C_2 у (28) визначаються з умов прямування до нуля розв'язку та умови компактності. В решті-решт отримаємо

$$\begin{aligned} U(\eta) = - \frac{\exp \left[-\frac{\text{Re}}{4} \eta^2 \right]}{\eta} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\pi \text{Re}} \left(\frac{2}{\sqrt{\text{Re}}} - \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\text{Re}}}{2} \eta \right) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

З визначення функцій похибок видно, що алгебрична сума другого та третього доданків у останньому виразі дуже швидко прямує до нуля. Так, вже при $\eta = 5$ вказаний вираз відріз-

няється від нуля лише на шостому знаку після коми. Згідно з (29), кінетична енергія в сферичному вихорі скінченна, оскільки в центрі сфери квадрат особливості у першому доданку, помножений на якобіан (квадрат радіальної координати), дає лише експоненціально спадний доданок. Інші складові квадрата швидкості також, після інтегрування за скінченним об'ємом, рівні константі. Отже, отриманий автомодельний розв'язок — цілком фізичний, тому що, по-перше, задовольняє рівняння Гельмгольца, а по-друге, узгоджується із законом збереження енергії.

Нижче наведено три типові розподіли U . Для малих значень числа Re (рисунок, *а*) швидкість поводить себе як в ізолюваному гауссіані [6, 8]. При $Re = 10 \gg 1$ маємо розподіл, схожий на квазіточковий вихор [9] (рисунок, *б*). І лише при $Re = 1$ (рисунок, *в*) поле швидкості має оригінальний вигляд: воно складається з двох областей, у кожній з яких швидкості мають протилежні знаки (протитечії).

Компоненти вектора завихреності, після переходу до автомодельної змінної, визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned}\omega_{\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_{\varphi})}{\partial r} = \\ &= -\frac{1}{\eta\sqrt{t}} \frac{\partial(\eta\sqrt{t}U_{\varphi})}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{\eta\sqrt{t}} \frac{\partial(\eta U_{\varphi})}{\partial \eta}, \quad (30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_{\theta})}{\partial r} = \\ &= \frac{1}{\eta\sqrt{t}} \frac{\partial(\eta\sqrt{t}U_{\theta})}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\eta\sqrt{t}} \frac{\partial(\eta U_{\theta})}{\partial \eta}. \quad (31)\end{aligned}$$

Після підстановки (29) у вирази (30) і (31) можна отримати

$$\begin{aligned}\omega_{\theta} = -\omega_{\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{t}\eta} \left[\sqrt{\pi} \left[\frac{\sqrt{Re}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Re}}{2}\eta\right) - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Re}{2}\eta + \sqrt{Re} \right) \exp\left(-\frac{Re}{4}\eta^2\right) \right]. \quad (32)\end{aligned}$$

Оскільки границя функції похибок прямує на нескінченності до одиниці, то доданок у квадратних дужках прямує до нуля, причому дуже швидко. Наступні два доданки є компактними за Сеффменом [10]: вони експоненційно спа-

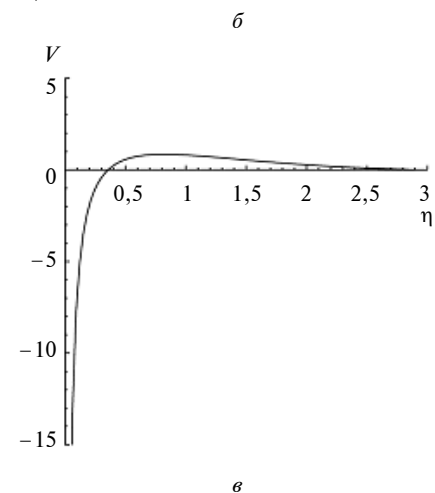
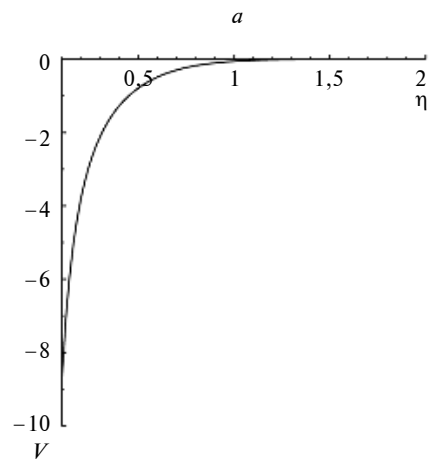
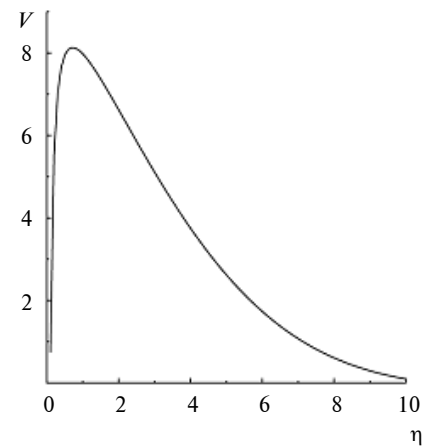


Рисунок. Розподіл швидкості. Автомодельні розв'язки для чисел Рейнольдса 0,1 (*а*), 10 (*б*), 1 (*в*)

дають, навіть швидше, якщо враховувати множник $\frac{1}{\sqrt{t}\eta}$. На вісі обертання розв'язок (32) має

особливість. Але, як зазначалось вище, це не є принциповим недоліком. Зрозуміло, що в малому околі біля вісі потрібно просто врахувати

в'язкість, і особливість зникає. Але модель ускладнюється при цьому досить серйозно.

Висновки

Показано, що у найпростішому класі сферичних вихрових течій, у яких відсутня радіальна компонента швидкості, а дві інших залежать лише від радіальної координати, будь-який розв'язок є гвинтовим вихором. Наведено один із найпростіших прикладів сферичного компактного гвинтового вихору. Отримано автомодельне рівняння та його розв'язок для дифузії компактного сферичного вихору. Маючи особ-

ливість у центрі сфери, такий розв'язок задовольняє рівняння Гельмгольца та узгоджується із законом збереження енергії: кінетична енергія в отриманому автомодельному розв'язку є скінченною.

Перспективою подальших досліджень є знаходження інших аналітичних розв'язків, які належать до розглянутого класу вихрових течій. Крім того, отриманий автомодельний розв'язок можна використати для більш складних задач.

Результати роботи можуть бути використані в гідромеханіці, а також в інших сферах фізики, де спостерігаються сферичні вихрові рухи.

1. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей // Известия АН. Физика атмосферы и океана. — 1992. — 28, № 6. — С. 615–624.
2. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — 13 (85), № 2. — С. 37–43.
3. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. — Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. — 504 с.
4. Громека И.С. Собрание сочинений. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 296 с.
5. Ярмицкий А.Г. Сферические вихреобразования с ядром и оболочкой // Механика жидкости и газа. — 2001. — № 3. — С. 21–27.
6. Лук'янов П.В. Одномерні моделі компактних компенсованих вихорів // Наукові вісті НТТУ "КПІ". — 2010. — № 4. — С. 145–150.
7. Математическая энциклопедия. Т.1 — М.: Сов. энциклопедия, 1977. — 1552 с.
8. E.J. Hopfinger and G.J.F. van Heijst, "Vortices in rotating fluids", Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 25, pp. 241–89, 1993.
9. Лук'янов П.В. Модель квазіточкового вихору // Наукові вісті НТТУ "КПІ". — 2011. — № 4. — С. 139–142.
10. Сэффман Ф.Дж. Динамика вихрей. — М.: Наука, 2000. — 402 с.
11. Васильев О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. — 144 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
20 жовтня 2011 року