УДК 517.954

В.О. Капустян, І.О. Пишнограєв

УМОВИ ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ РОЗВ’ЯЗКУ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Processes described with parabola-hyperbolic differential equations are crucial in the theory of mathematical physics. The article deals with the heterogeneous parabola-hyperbolic equation with nonlocal boundary conditions. To further investigate this class of problems, we need to find its classical solution. We show the system of eigenfunctions and associated functions of the boundary value problem. Using these biorthogonal systems forming the basis Riesz, we build the desired classical solution that presents an infinite number whose elements are defined as solutions of the corresponding Cauchy problem. We prove the lemma for evaluating the elements of the problem solution. Using calculations for homogeneous parabola-hyperbolic equations and statements required auxiliary lemmas on assessing the elements solution; we derive the conditions for existence and uniqueness of the problem solution, which is formulated as a theorem. The results can be used to study optimal control problems for parabola-hyperbolic equations.

Вступ

Дуже важливими в теорії математичної фізики виявляються процеси, що описуються параболо-гіперболічними диференційними рівняннями. Необхідність дослідження крайових задач для рівнянь змішаного типу продиктована численними практичними застосуваннями у газовій динаміці, теорії нескінченно малих згинань поверхонь, у магнітній гідродинаміці, у теорії електронного розсіювання, у прогнозуванні рівня ґрунтових вод, у математичній біології та інших областях (наприклад, [1]). Такі задачі для рівнянь параболо-гіперболічного типу вивчались багатьма авторами. У [2], наприклад, була розглянута задача про рух газу по каналу з пористим навколишнім середовищем, при цьому в каналі рух описувався хвильовим рівнянням, а ззовні – рівнянням дифузії.

К.Б. Сабітов у своїй праці [3] розглянув однорідне параболо-гіперболічне рівняння в прямокутній області з нелокальною умовою Самарського–Іонкіна. Для крайової задачі цього виду ним були знайдені умови існування і єдиності розв’язку, а також класичний розв’язок у вигляді нескінченних рядів.

Ця стаття присвячена пошуку класичного розв’язку неоднорідного параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними граничними умовами, виведенню умов існування і єдиності розв’язку, що для цього класу задач робиться вперше.

Постановка задачі

Нехай маємо параболо-гіперболічне рівняння

$$L\ y(x,t) = \acute{u}(x,t) \tag{1}$$

з початковою

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

та граничною умовами

$$y(0,t) = 0,\ y'(0,t) = y'(1,t),\ -\alpha \le t \le T, \tag{3}$$

де функції $\acute{u}, \varphi$ вважаємо заданими, а їхні властивості будуть показані нижче,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & t > 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & t < 0. \end{cases}$$

Необхідно знайти функцію $y(x,t) \in \in C^1(\bar{D}) \cap \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$, що задовольняє на D цьому рівнянню, де $D = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ -\alpha < t \le \le T, \alpha, T > 0\}$, $D_- = \{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \le 0\}$, $D_+ = = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \le T\}$, а також показати умови існування і єдиності цього розв’язку.

Приклади фізичних процесів, які описуються параболо-гіперболічними крайовими задачами, наведено в [1].

Формальне розв’язання задачі

У праці [3] задачу (1)–(3) розглянуто у випадку $\acute{u}(x,t) \equiv 0$. У [4] побудовано систему власних і приєднаних функцій $W_0 = \{X_j(x),$ $j = 0,1,\ldots\}$, елементи якої мають вигляд

$$X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),\ X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),$$
$$k = 1,2,\ldots,\ X_0(x) = x. \tag{4}$$

Для системи функцій W_0 існує біортогональна до неї система функцій $R_0 = \{Y_i(x),$ $i = 0,1,\ldots\}$, елементи якої мають вигляд

$$Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx),\ Y_{2k}(x) = 4(1-x)\times$$
$$\times\sin(2\pi kx),\ k = 1,2,\ldots,Y_0(x) = 2. \tag{5}$$

Системи W_0, R_0 утворюють базиси Рісса в просторі $L_2(0,1)$ і для будь-якої функції $\varphi(x) \in$ $\in L_2(0,1)$ справедлива оцінка

$$r \| \varphi \|_{L_2}^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^2 \le R \| \varphi \|_{L_2}^2, \tag{6}$$

де $r = 3/4$, $R = 16$, $\varphi_k = (\varphi, Y_k)_{L_2}$.

Більше того, у [5] доведено, що у просторі $L_2(0,1)$ можна ввести еквівалентну норму за правилом

$$\| \varphi \|_D^2 = (D\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^2, \tag{7}$$

де $D : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – деякий додатньо-визначений оператор.

Повернемось до крайової задачі (1)–(3), позначивши для зручності

$$\breve{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \ge 0, \\ v(x,t), & t < 0. \end{cases}$$

Для наведення її розв'язання справедлива формула [3]

$$y(x,t) = X_0(x)\, y_0(t) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (X_{2k-1}(x)\, y_{2k-1}(t) + X_{2k}(x)\, y_{2k}(t)), \tag{8}$$

де функції $y_i(t)$ визначаються як розв'язки задачі Коші

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = u_0(t),\ t > 0, \\ \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = v_0(t),\ t < 0, \tag{9} \\ y_0(-\alpha) = \varphi_0;$$

$$\frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2\, y_{2k-1}(t) = u_{2k-1}(t),\ t > 0, \\ \frac{d^2 y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = v_{2k-1}(t),\ t < 0, \tag{10} \\ y_{2k-1}(-\alpha) = \varphi_{2k-1},\ \lambda_k = 2k\pi,$$

$$\frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2\, y_{2k}(t) = -2\lambda_k\, y_{2k-1}(t) + u_{2k}(t),\ t > 0, \\ \frac{d^2 y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\, y_{2k}(t) = -2\lambda_k\, y_{2k-1}(t) + v_{2k}(t),\ t < 0, \tag{11} \\ y_{2k}(-\alpha) = \varphi_{2k},\ k = 1, 2, \ldots,$$

причому $y_i(t) \in C^1(-\alpha, T)$, $\breve{u}_i(t) = (\breve{u}(.,t), Y_i(.))_{L_2(0,1)}$, $i \ge 0$.

У задачах (9)–(11) послідовність чисел $\{\varphi_k\}$ взята з подання функції $\varphi(x)$ за базисом Рісса W_0.

Випишемо розв'язання задач (9)–(11). Для задачі (9) маємо

$$y_0(t) = \varphi_0 + \alpha \left(u_0(0) - \int_{-\alpha}^{0} v_0(\tau)\, d\tau \right) - \\ - \int_{-\alpha}^{0} \tau\, v_0(\tau)\, d\tau + \int_0^t u_0(\tau)\, d\tau,\ t > 0, \\ y_0(t) = \left(u_0(0) - \int_{-\alpha}^{0} v_0(\tau)\, d\tau \right)(t + \alpha) + \varphi_0 + \tag{12} \\ + \int_{-\alpha}^{t} (t - \tau) v_0(\tau)\, d\tau,\ t < 0.$$

Побудуємо розв'язання задачі (10). Її загальний розв'язок має вигляд

$$y_{2k-1}(t) = c_k \exp(-\lambda_k^2\, t) + \\ + \int_0^t \exp(-\lambda_k^2\, (t - \tau))\, u_{2k-1}(\tau)\, d\tau,\ t > 0; \\ y_{2k-1}(t) = a_k \cos(\lambda_k t) + b_k \sin(\lambda_k\, t) + \tag{13} \\ + \frac{1}{\lambda_k} \int_{-\alpha}^{t} \sin(\lambda_k (t - \tau))\, v_{2k-1}(\tau)\, d\tau,\ t < 0.$$

Умови спряження і початкові умови приводять до системи рівнянь для визначення сталих

$$c_k - a_k = f_{k,1}, \\ -\lambda_k\, c_k - b_k = f_{k,2}, \tag{14} \\ a_k \cos(\lambda_k \alpha) - b_k \sin(\lambda_k\, \alpha) = f_{k,3},$$

де

$$f_{k,1} = -\frac{1}{\lambda_k} \int_{-\alpha}^{0} \sin(\lambda_k\, \tau)\, v_{2k-1}(\tau)\, d\tau,$$

$$f_{k,2} = -\frac{1}{\lambda_k} \left(u_{2k-1}(0) - \right. \\ \left. - \int_{-\alpha}^{0} \cos(\lambda_k\, \tau)\, v_{2k-1}(\tau) d\tau \right),\ f_{k,3} = \varphi_{2k-1}.$$

Нехай визначник системи (14)

$$\delta_k(\alpha) = \cos \lambda_k\, \alpha + \lambda_k\, \sin \lambda_k\, \alpha \ne 0. \tag{15}$$

Тоді

$$c_k = \frac{\cos(\lambda_k\alpha)\ f_{k,1} - \sin(\lambda_k\alpha)\ f_{k,2} + f_{k,3}}{\delta_k(\alpha)},$$

$$a_k = \frac{-\lambda_k\ \sin(\lambda_k\alpha) f_{k,1} - \sin(\lambda_k\alpha)\ f_{k,2} + f_{k,3}}{\delta_k(\alpha)}, \quad (16)$$

$$b_k = -\frac{\lambda_k\ \cos(\lambda_k\alpha)\ f_{k,1} + \cos(\lambda_k\alpha)\ f_{k,2} + \lambda_k\ f_{k,3}}{\delta_k(\alpha)}.$$

Формули (13), (16) є розв'язанням задачі (10).

Загальний розв'язок задачі (11) має вигляд

$$y_{2k}(t) = \tilde{c}_k\ \exp(-\lambda_k^2\ t) + \omega_k^+(t) - 2\ \lambda_k \times$$
$$\times \int_0^t (t-\tau)\exp(-\lambda_k^2\ (t-\tau))\ u_{2k-1}(\tau)\ d\tau +$$
$$+ \int_0^t \exp(-\lambda_k^2\ (t-\tau))\ u_{2k}(\tau)\ d\tau,\ t>0, \quad (17)$$
$$y_{2k}(t) = \tilde{a}_k\ \cos(\lambda_k t) + \tilde{b}_k\ \sin(\lambda_k\ t) + \omega_k^-(t) -$$
$$-\frac{1}{\lambda_k}\int_{-\alpha}^{t}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k(t-\tau) - (t-\tau)\cos\lambda_k(t-\tau)\right)\times$$
$$\times v_{2k-1}(\tau)\ d\tau + \frac{1}{\lambda_k}\int_{-\alpha}^{t}\sin(\lambda_k(t-\tau))\ v_{2k}(\tau)\ d\tau,\ t<0,$$

де

$$\omega_k^+(t) = -\ 2\ \lambda_k\ c_k\ t\ \exp(-\lambda_k^2 t),\ t>0,$$
$$\omega_k^-(t) = -b_k\ \lambda_k^{-1}\ \sin\lambda_k t -$$
$$-\ t\ (a_k\ \sin\lambda_k t - b_k\ \cos\lambda_k t),\ t<0,$$

а сталі $\tilde{c}_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ визначаються з системи рівнянь

$$\tilde{c}_k - \tilde{a}_k = \tilde{f}_{k,1},$$
$$-\ \lambda_k\ \tilde{c}_k - \tilde{b}_k = \tilde{f}_{k,2}, \quad (18)$$
$$\tilde{a}_k\ \cos(\lambda_k\alpha) - \tilde{b}_k\ \sin(\lambda_k\ \alpha) = \tilde{f}_{k,3},$$

де

$$\tilde{f}_{k,1} = \frac{1}{\lambda_k}\int_{-\alpha}^{0}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\tau - \tau\cos\lambda_k\tau\right)\times$$
$$\times v_{2k-1}(\tau)\ d\tau - \frac{1}{\lambda_k}\int_{-\alpha}^{0}\sin\lambda_k\ \tau\ v_{2k}(\tau)\ d\tau,$$
$$\tilde{f}_{k,2} = 2\ c_k - \frac{1}{\lambda_k}\left(u_{2k}(0) + \right.$$
$$\left. + \int_{-\alpha}^{0}\tau\sin\lambda_k\ \tau\ v_{2k-1}(\tau)\ d\tau\right) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_k}\int_{-\alpha}^{0}\cos\lambda_k\ \tau\ v_{2k}(\tau)\ d\tau,$$
$$\tilde{f}_{k,3} = -\ \omega_k^-(-\alpha) + \varphi_{2k}.$$

Сталі $\tilde{c}_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ визначаються за формулами (16), в яких потрібно замінити $f_{k,i}$ відповідно на $\tilde{f}_{k,i}$.

Умови існування єдиного розв'язку задачі

Має місце лема.

Лема 1 ([3]). Якщо α – додатне раціональне число, то при достатньо великих k існує таке додатне число C_0, яке залежить від α, що виконується така нерівність:

$$|\ \delta_k(\alpha)| \geq C_0 > 0. \quad (19)$$

Тоді справедлива така теорема.

Теорема 1 ([3]). Якщо $\tilde{u}(x,t) \equiv 0$, $\varphi(x) \in C^5(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{IV}(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$ і виконані умови (15), (19), то задача (1)–(3) має єдиний розв'язок і він визначається рядом (8).

Далі покладемо $\varphi(x) \equiv 0$ і знайдемо умови на функцію $\tilde{u}(x,t)$, які забезпечують існування розв'язку вихідної задачі.

Із (8)–(11) формальним диференціюванням знаходимо

$$y_t(x,t) = X_0(x)\ u_0(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(X_{2k-1}(x)\ (-\ \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) + u_{2k-1}(t)) +$$
$$+ X_{2k}(x)\ (-\ \lambda_k^2\ y_{2k}(t) - 2\lambda_k\ y_{2k-1}(t) + u_{2k}(t))),$$
$$t>0,$$
$$y_{tt}(x,t) = X_0(x)\ v_0(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(X_{2k-1}(x)\ (-\ \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) + v_{2k-1}(t)) + \quad (20)$$
$$+ X_{2k}(x)\ (-\ \lambda_k^2\ y_{2k}(t) - 2\lambda_k\ y_{2k-1}(t) + v_{2k}(t))),$$
$$t<0,$$
$$y_{xx}(x,t) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty}((\lambda_k^2\ X_{2k-1}(x) + 2\ \lambda_k\ X_{2k}(x))\ y_{2k-1}(t) +$$
$$+ \lambda_k^2\ X_{2k}(x)\ y_{2k}(t)),\ t \in (-\alpha, T).$$

Тоді має місце наступна лема.

Лема 2. Нехай виконані умови (15), (19) і $\varphi(x) \equiv 0$; $v_i(t) \in C(-\alpha, 0)$, $u_i(t) \in C(0,T)$, $i \geq 0$. Тоді при достатньо великих k для коефіцієнтів розкладу (8) справедливі такі оцінки:

$$|\,y_{2k-1}(t)\,| \le \frac{C}{\lambda_k}(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}),$$

$$t \in [0,T],$$

$$|\,y_{2k-1}(t)\,| \le C\left(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \frac{\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}\right),$$

$$t \in [-\alpha, 0];$$

$$|\,y_{2k}(t)\,| \le C\left(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \frac{1}{\lambda_k}(\|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \right.$$

$$\left. + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)})\right),\ t \in [0,T],$$

$$|y_{2k}(t)| \le C(\lambda_k\,\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$\left. + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \frac{\|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}\right),\ t \in [-\alpha, 0].$$

Доведення. Знайдемо оцінки коефіцієнтів зображення (13):

$$|\,c_k\,| \le \frac{|\,f_{k,1}\,| + |\,f_{k,2}\,|}{|\,\delta_k(\alpha)\,|} \le$$

$$\le \frac{C}{\lambda_k}(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}),$$

$$|\,a_k\,|, |\,b_k\,| \le \frac{\lambda_k\,|\,f_{k,1}\,| + |\,f_{k,2}\,|}{|\,\delta_k(\alpha)\,|} \le \tag{21}$$

$$\le C\left(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \frac{\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}\right).$$

Тоді з (13), (21) маємо

$$|\,y_{2k-1}(t)\,| \le C\left(|\,c_k\,| + \frac{\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k^2}\right) \le$$

$$\le \frac{C}{\lambda_k}(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}),\ t \in [0,T];$$

$$|\,y_{2k-1}(t)\,| \le C\left(|\,a_k\,| + |\,b_k\,| + \frac{1}{\lambda_k}\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)}\right) \le$$

$$\le C\left(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \frac{\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}\right),\ t \in [-\alpha, 0].$$

Аналогічно попередньому знайдемо оцінки для складових зображення (17):

$$|\,\omega_k^+(t)\,| \le 2\,\lambda_k\,|\,c_k\,|\,t\,\exp(-\lambda_k^2 t) \le$$

$$\le C\,\frac{|\,c_k\,|}{\lambda_k} \le C\,\frac{|\,f_{k,1}\,| + |\,f_{k,2}\,|}{\lambda_k} \le$$

$$\le C\,\frac{(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)})}{\lambda_k^2},\ t \in [0,T];$$

$$|\,\omega_k^-(t)\,| \le |\,b_k\,|\,|\,\lambda_k^{-1}\,\sin\lambda_k t - t\,\cos\lambda_k t\,| +$$

$$+\ |\,a_k\,|\,|\,t\sin\lambda_k t\,| \le$$

$$\le C\left(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \frac{\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}\right),\ t \in [-\alpha, 0]; \tag{22}$$

$$|\,\tilde{c}_k\,| \le \frac{|\,\tilde{f}_{k,1}\,| + |\,\tilde{f}_{k,2}\,| + |\,\tilde{f}_{k,3}|}{|\,\delta_k(\alpha)\,|} \le C\,(\|v_{2k-1}\|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_k}(\|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \|u_{2k}\|_{C(0,T)})),$$

$$|\,\tilde{a}_k\,| \le \frac{\lambda_k\,|\,\tilde{f}_{k,1}\,| + |\,\tilde{f}_{k,2}\,| + |\,\tilde{f}_{k,3}\,|}{|\,\delta_k(\alpha)\,|} \le$$

$$\le C\left((\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_k}(\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)})\right),$$

$$|\,\tilde{b}_k\,| \le \frac{\lambda_k\,|\,\tilde{f}_{k,1}\,| + |\,\tilde{f}_{k,2}\,| + \lambda_k\,|\,\tilde{f}_{k,3}\,|}{|\,\delta_k(\alpha)\,|} \le$$

$$\le C\left(\lambda_k\,\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \right.$$

$$\left. + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \frac{\|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}\right).$$

Тоді з (17), (22) маємо

$$|\,y_{2k}(t)\,| \le C\left(|\,\tilde{c}_k\,| + |\,\omega_k^+(t)\,| + \right.$$

$$\left. + \frac{\|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k} + \frac{\|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k^2}\right) \le$$

$$\le C\,(\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \frac{\|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}),$$

$$t \in [0,T],$$

$$|\,y_{2k}(t)\,| \le |\,\tilde{a}_k\,| + |\,\tilde{b}_k\,| + |\,\omega_k^-(t)\,| +$$

$$+ \frac{\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)}}{\lambda_k} \le$$

$$\le C(\lambda_k\,\|\,v_{2k-1}\,\|_{C(-\alpha,0)} + \|\,v_{2k}\,\|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \|\,u_{2k-1}\,\|_{C(0,T)} + \frac{\|\,u_{2k}\,\|_{C(0,T)}}{\lambda_k}),\ t \in [-\alpha, 0].$$

Лема 3. Нехай $\varphi(x) \equiv 0$, виконані умови (15), (19), а неперервні функції $u(x,t), v(x,t)$, що визначають $\vec{u}(x,t)$, такі, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \| v_{2k-1} \|_{C(-\alpha,0)} + \lambda_k^2 \| v_{2k} \|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \lambda_k^2 \| u_{2k-1} \|_{C(0,T)} + \lambda_k \| u_{2k} \|_{C(0,T)}) < \infty.$$

Тоді задача (1)–(3) має єдиний розв'язок і він визначається рядом (8).

Доведення. Так як $X_i(x) \le 1, i \ge 0$, $x \in [0,1]$, то з (8), (20) отримаємо оцінки

$$| y(x,t) | \le | y_0(t) | + \sum_{k=1}^{\infty}(| y_{2k-1}(t) | + | y_{2k}(t) |),$$

$$t \in [-\alpha, T];$$

$$| y_t(x,t) | \le | u_0(t) | + \sum_{k=1}^{\infty}((\lambda_k^2 \; | y_{2k-1}(t) | +$$

$$+ | u_{2k-1}(t) |) + (\lambda_k^2 \; | y_{2k}(t) | + 2 \lambda_k \; | y_{2k-1}(t) | +$$

$$+ | u_{2k}(t) |)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \; (2 \, | y_{2k-1}(t) | + | y_{2k}(t) |) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} | u_i(t) |, \; t > 0; \qquad (23)$$

$$| y_{tt}(x,t) | \le | v_0(t) | + \sum_{k=1}^{\infty}((\lambda_k^2 \; | y_{2k-1}(t) | +$$

$$+ | v_{2k-1}(t) |) + (\lambda_k^2 \; | y_{2k}(t) | + 2 \lambda_k \; | y_{2k-1}(t) | +$$

$$+ | v_{2k}(t) |)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \; (2 \, | y_{2k-1}(t) | + | y_{2k}(t) |) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} | v_i(t) |; \; t < 0,$$

$$| y_{xx}(x,t) | \le \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 \; (2 \, | y_{2k-1}(t) | + | y_{2k}(t) |),$$

$$t \in (-\alpha, T).$$

Ряди з (23) мажоруються рядом

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 \; (2 \, | y_{2k-1}(t) | + | y_{2k}(t) |),$$

для якого, згідно з лемою 2, справедлива оцінка

$$Y(t) \le C \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \| v_{2k-1} \|_{C(-\alpha,0)} + \lambda_k^2 \| v_{2k} \|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \lambda_k^2 \| u_{2k-1} \|_{C(0,T)} + \lambda_k \| u_{2k} \|_{C(0,T)}), \; t \in [-\alpha, T],$$

що і закінчує доведення леми.

З викладеного вище випливає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $\varphi(x) \ne 0, u(x,t) \ne 0$ і для цих функцій виконані умови теореми 1 і леми 3. Крім цього, будемо вважати, що мають місце умови (15), (19). Тоді задача (1)–(3) має єдиний розв'язок і він визначається рядом (8).

Висновок

У статті було наведено результати розв'язання параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними граничними умовами. Знайдено його класичний розв'язок, визначено умови існування і єдиності цього розв'язку.

У подальшому результати будуть використані у дослідженні задач керування для параболо-гіперболічних рівнянь з нелокальними граничними умовами.

1. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – 6, № 6. – С. 991–1001.
2. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – 14, № 3. – С. 3–19.
3. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. – 2010. – 46, № 10. – С. 1468–1478.
4. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – 13, № 2. – С. 294–304.
5. *Мокин А.Ю.* Согласованость норм при исследовании разностных схем для задачи Самарского–Ионкина // Дифференциальные уравнения. – 2006. – 42, № 7. – С. 969–978.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 30 серпня 2012 року