УДК 519.713

Р.В. Скуратовський

ФРАКТАЛЬНА РЕКУРСИВНА ФУНКЦІЯ ГІПЕРЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ЗРОСТАННЯ

This article considers the research methods of deterministic fractal sets. Specifically, it develops constructive methods for studying recursive functions. The obtained results allow consider deterministic fractal functions from the novel theoretical standpoint. We also develop constructive methods of fractal recursive functions and investigate primitive recursive function similar to the functions of the form depending on the specific value p. We elaborate the theoretical background for determining the area limitations of this feature. Of some theoretical and practical interest is the first ever approach to defining generating function allowing use previously found generators functions. Moreover, despite the fact that the direct calculation by iteration, this function has hyperexponential increase of the required minimum amount of memory, due to the proposed calculation method it can be successfully applied for addressing many practical issues.

Вступ

Задача обчислення значення рекурсивної функції другого степеня без використання схеми рекурсії є доволі непростою і досі повністю не вивчена. Саме такого типу функція виникає у знаменнику ряду Остроградського другого роду, який використовується для наближення ірраціональних чисел раціональними числами, що є частковими сумами ряду Остроградського другого роду. Тому виникла потреба оцінити величину, що стоїть у знаменнику цього ряду, звідси виникла функція $q_n = q_{n-1}(q_{n-1}+1)$. Ця функція має значення для характеризації фрактальних множин, що породжуються цією та подібними функціями, бо дає оцінку її величини при різних значеннях параметра рекурсії, що дає змогу характеризувати область її збіжності або область обмеженості, а у випадку розбіжності – швидкість її розбіжності.

Далі ця ж рекурсивна функція виникає в багатьох працях, наприклад в [1], при дослідженні розкладів чисел у ряди Остроградського 2-го роду $\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}-\ldots\right)$, де $q_n = q_{n-1}(q_{n-1}+1)$. Ще не знайдено метод для знаходження області обмеженості [2] цієї функції та підмножини з множини Мандельбротта.

Крім як у статті [1], оцінку значення цієї рекурсивної функції ще не шукали.

Постановка задачі

Метою роботи є знаходження оцінок значення згаданої вище рекурсивної функції і методів дослідження такої функції.

Для розв'язання згаданої вище задачі необхідно розробити теоретичне підґрунтя для знаходження області обмеженості цієї функції. Знайти підхід до визначення твірної функції, що допускає використання раніше знайдених твірних функцій. Крім того, незважаючи на те, що при прямому обчисленні шляхом ітерування ця функція має гіперекспоненційне зростання необхідного мінімального обсягу пам'яті, завдяки запропонованим підходам до її обчислення можна знайти підхід до її застосування у багатьох прикладних задачах. Знайти оцінки для її значень на n-й ітерації. Задача знаходження функції $f(n) = q_n$ є дуже складною, тому тут представлено оцінки вигляду $q_n \le \varphi(n)$.

Основні результати

Для дослідження функції, яка має таке рекурсивне задання: $C_n = C_{n-1}(C_{n-1}+1)+m+1$, $C_1 = m$, $m \in ¥$, де m – це параметр рекурсії, n – номер ітерації. Покладемо, що $D_n = C_n + \frac{1}{2}$, тоді $C_n(C_n+1) = \left(D_n+\frac{1}{2}\right)\left(D_n-\frac{1}{2}\right) = D_n^2 - \frac{1}{4}$, звідки отримуємо $C_{n+1} = D_n^2 - \frac{1}{4} + m + 1$.

Тоді функція D_n набуває вигляду $D_1 = m + \frac{1}{2}$, $D_2 = D_1^2 + m + \frac{5}{4}$, $D_n = D_{n-1}^2 + m + \frac{5}{4}$. Далі замінимо параметр m з метою редукування дробової частини у визначенні D_n, отже, усі її коефіцієнти $c_i \in ¤_+$.

Нехай $k = m + \frac{5}{4}$, тоді $m = k - \frac{5}{4}$, $D_1 = = k - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = k - \frac{3}{4}$, $D_n = D_{n-1}^2 + m + \frac{5}{4} = D_{n-1}^2 + k$. Тут D_n – значення рекурсивної функції на n-й ітерації. Проітеруємо останню функцію: $D_1 = = m + \frac{1}{2} = k - \frac{3}{4}$, $D_2 = k^2 - \frac{k}{2} + \frac{9}{16}$, $D_3 = k^4 - k^3 + + \frac{11}{8}k^2 - \frac{1}{16}k + \frac{81}{256}$.

Ця функція є примітивно-рекурсивною, оскільки визначається скінченою кількістю підстановок раніше визначеної [3] примітивно-рекурсивної функції (або однократно-рекурсивної функції) в раніше визначену примітивно-рекурсивну функцію. Дійсно, ще у C_n функції використовується одна з вихідних функцій – наступний за $N(x) = x + 1$.

Дійсно, остання функція задається за допомогою такої схеми рекурсії: $D(0, k) = \frac{5}{4}$, це окреме задання функції на 0-й ітерації.

$D(n, S(k)) = \mathrm{Sum}(n, k, \mathrm{Exp}(n, k))$ – схема задання примітивної рекурсії через відомі примітивно-рекурсивні функції $\mathrm{Sum}()$ і $\mathrm{Exp}(n, k)$, де k – це параметр рекурсії. Саме тому ця функція рекурсивна, а не рекурентна, бо її можна задати за схемою примітивної рекурсії, не використовуючи оператор мінімізації.

Позначимо $D_n(k)$ – представлення функції на n-й ітерації з параметром рекурсії, рівним k, як полінома від k.

Твердження 1. Для суми коефіцієнтів у розкладі $D_n(k)$, яку позначимо D_n, має місце наступна її оцінка зверху при $n > 1$ $D_n(1) < 2^{2^{n-1,85}-1}$.

До функції $D_1 = m + \frac{1}{2}$, $D_n = D_{n-1}^2 + m + \frac{5}{4}$ застосуємо підстановку $m = k - \frac{5}{4}$. Звідси $D_n = D_{n-1}^2 + k$, $D_1 = k - \frac{3}{4}$. Покладемо $k = 1$, $D_n = D_{n-1}^2 + 1$, $D_1 = k - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ і використаємо метод математичної індукції по n.

Перевіримо базу індукції для $n = 4, 5, \ldots$

Обчислимо значення рекурсивно заданої функції $D_1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, $D_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16} < < 2^{2^{0,15}-1} = 2^{1,10956-1} = 1,0789$, $D_3 = \left(\frac{17}{16}\right)^2 + 1 = = \frac{545}{256} < 2^{2^{1,15}-1}$. Отже, база індукції $2^{2^{1,15}-1} = 2^{1,219}$ правильна.

Нехай припущення індукції для номера ітерації $n-1$ виконується $D_{n-1} < 2^{2^{(n-1)-1,85}-1}$.

Здійснимо індукційний перехід, користуючись зробленим припущенням, для цього доведемо таке:

$$a_n = P_n(1) \le 2^{2^{n-1,85}-1}, \quad P_0(x) = x + 1,$$

$$P_n(x) = P^2(x) + x,$$

$$a_n = a_{n-1}^2 + 1 < 2^{2^{n-1,85}-1}, \quad a_{n-1}^2 + 1 < 2^{2 \cdot 2^{(n-1)-1,85}-2} + 1 =$$

$$= 2^{2^{(n)-1,85}-2} + 1 < 2^{2^{n-1,85}-2} + 2^{2^{n-1,85}-2},$$

$$2^{2^{n-1,85}-2} + 2^{2^{n-1,85}-2} = 2 \cdot 2^{2^{n-1,85}-2} = 2^{2^{n-1,85}-1}.$$

Отже, доведено. Таким чином оцінили суму коефіцієнтів $D_n(k)$.

Зауваження 1. Цілком аналогічно доводиться справедливість більш точної оцінки значення нашої функції $D_n(1) < 2^{2^{n-1,95}-1}$, що починає виконуватися з $n = 8$.

Зауваження 2. Для D_n виконується оцінка знизу $D_n > 2^{2^{n-3}}$.

Доведення. $D_n = a_n = a_{n-1}^2 + 1 > a_{n-1}^2 \ge (2^{2^{n-4}})^2 = = 2^{2 \cdot 2^{n-4}} = 2^{2^{n-3}}$, де $a_{n-1}^2 \ge (2^{2^{n-4}})^2$ виконується за припущенням індукції. Таким чином, $D_n > 2^{2^{n-3}}$.

Позначимо $c_{m,n}$ – коефіцієнт при одночлені степеня m на n-й ітерації степеня, $d_{m,n}$ – одночлен m-го степеня з n-ї ітерації.

Знайдемо генератриси коефіцієнтів для функції D_n, $D_n = D_{n-1}^2 + k$. Розглянемо спочатку $D_1 = k - \frac{3}{4}$, $D_2 = k^2 - \frac{k}{2} + \frac{9}{16}$, звідси $C_{2^{n-1},n} = 1$, $C_{2^{n-1}-1,n} = 2^{n-3} \cdot (-1)$. Справді $d_{2^{n-1}-1,n} = 2^{n-2}\frac{1}{2} = = 2^{n-3} \cdot (-1)$ при $n > 2$.

Далі розглянемо

$$C_{2^{n-1}-2,n}=C^2_{2^{n-2}-1,n-1}+2C_{2^{n-2}-2,n-1}C_{2^{n-2},n-1}=$$

$$=((-1)\cdot 2^{n-3})^2+2((-1)\cdot 2^{n-4}+2C_{2^{n-3}-2,n-2}C_{2^{n-3},n-2})=$$

$$=((-1)\cdot 2^{n-3})^2+2\left(((-1)\cdot 2^{n-4})^2+2\left((-1)^2\cdot 2^{2n-25}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\left((-1)^2\cdot 2^{2n-36}+\left(\left(\ldots+2\left(\left(\frac{(-1)}{2}\right)^2+2\frac{9}{16}\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)=$$

$$=((-1)\cdot 2^{n-3})^2+2((-1)\cdot 2^{n-4})^2+2^2((-1)\cdot 2^{n-5})^2+$$

$$+2^3((-1)\cdot 2^{n-6})^2+\ldots=\sum_{i=0}^{n-4}2^i((-1)\cdot 2^{n-3-i})^2+2^{n-3}\frac{9}{16},$$

де $(n-2)-2=n-4$ – пари дужок, бо на 2-й ітерації вже не існує степеня $2^{l-1}-2,\ l=2$:

$$C_{0,2}=C^2_{0,1},\ C_{0,n}=C^2_{0,n-1},C_{1,2}=2C_{1,1}C_{0,1}+1,$$

$$C_{1,6}=2^4C_{1,2}C^{15}_{0,2}+2^3C^{14}_{0,2}+2^2C^{12}_{0,2}+2\ C^{8}_{0,2}+1,$$

$$C_{1,n}=2^{n-2}C_{1,2}C^{s}_{0,2}+2^{n-3}C^{s-1}_{0,2}+2^{n-4}C^{s-3}_{0,2}+$$

$$+2^{n-5}C^{s-7}_{0,2}+2^{n-6}C^{s-15}_{0,2}+2^{n-7}C^{s-m}_{0,2}+\ldots+1,$$

$$m=2^k-1,\quad k\in\{0,1,\ldots,n-2\}.$$

$s=((\ldots(((2+1)2+1)2+1)\ldots)2+1)$, де кількість пар дужок: $k=n-3$, $s=2^{n-3}+2^{n-2}+$ $+\ldots+2^2+2+1=2^{n-2}-1$.

Це легко перевірити, використовуючи метод математичної індукції:

$$C_{2,6}=C^2_{1,5}+2C_{2,5}C_{0,5}=C^2_{1,5}+2(2C_{2,4}C_{0,4})C_{0,5}=$$

$$=C^2_{1,5}+2^4C_{2,2}C_{0,2}C_{0,3}C_{0,4}C_{0,5}=$$

$$=C^2_{1,5}+2^4C_{0,2}C^2_{0,2}C^4_{0,2}C^5_{0,2}=C^2_{1,5}+2^4C_{2,2}C^{2^{n-2}-1}_{0,2},$$

$$\Sigma=2^{n-2}=1+2+4+\ldots+2^{n-2}=\frac{1-2^{n-2}}{1-2}=2^{n-2}.$$

Лема 1 (Про зв'язок між ітерацією і максимальним степенем). Має місце рівність $\max\deg d_{i,n}=2^{n-1}$.

Доведення. База індукції $D_2=k^2-\frac{k}{2}+\frac{9}{16}$ при переході індукції на $n-1$ кроці $\max\deg(D_{n-1})=2^{n-2}$. Тоді на n-му кроці за формулою $D_n=D^2_{n-1}+k$ отримуємо $\max\deg(D_n)=2^{n-1}$.

Нехай тепер $k=P(H_{n-1},m)$ [4] – кількість різних однорідних одночленів у розкладі $d_{m,n}$ через добутки одночленів з попередньої n-1 ітерації. Тоді доведемо наступне твердження.

Лема 2:

- якщо $d_{m,n}: m\geq 2^{n-2}$ і m – непарне, то $k=\left[\frac{C^1_{i+1}}{2}\right]=\left[\frac{i+1}{2}\right]$, де $i=2^{n-1}-m$;
- якщо $d_{m,n}: m\geq 2^{n-2}$ і m – парне, то $k=\left[\frac{C^1_{i+1}}{2}\right]+1=\left[\frac{i+1}{2}\right]+1$, де $i=2^{n-1}-m$;
- якщо $d_{m,n}: m< 2^{n-2}$ і m – парне, то $k=\left[\frac{C^1_{i+1}}{2}\right]+1=\left[\frac{i+1}{2}\right]+1$, де $i=m$;
- якщо $d_{m,n}: m< 2^{n-2}$ і m – непарне, то $k=\left[\frac{C^1_{i+1}}{2}\right]=\left[\frac{i+1}{2}\right]$, де $i=m$. Тут $[x]$ – ціла частина від x.

Доведення. Це так, бо n різних предметів можна поділити на l частин C^{l-1}_{n+l-1} способами з [5], при цьому допускаються комбінації вигляду $\left(\underbrace{n,0,0,\ldots,0}_{l}\right)$, $\left(\underbrace{0,n,0,\ldots,0}_{l}\right)\ldots$ Але при $l=2$ розбиття типу $(n-s,s)$, $(s,n-s)$ ототожнюються, бо це невпорядковані набори, тому маємо щонайменше $\left[\frac{C^1_{n+1}}{2}\right]$ розбиттів числа $2n$ на суму двох степенів. Крім того, при наявності розбиття навпіл, яке буде тоді й тільки тоді, коли $m\equiv 0(\bmod 2)$. Ми в цьому розбитті навпіл зовсім не втрачаємо доданок з коефіцієнтом $c^2_{n,i}$ при діленні на $2i$, бо воно не має симетричного до нього розбиття, тому додаємо 1 при $i\equiv 0(\bmod 2)$. Іншими словами, за наявності в розкладі на елементи з попередньої ітерації квадрату, крім подвоєних добутків, маємо те, що при діленні на 2 і взятті цілої частини він не рахується, тому додаємо 1.

При $m > 2^{n-2}$ у розбитті не беруть участі $s = m - 2^{n-2}$ елементів з попередньої ітерації, бо якщо взяти елемент степеня $s < m - 2^{n-2}$, то $\bar{\exists} z \in \{0,1,\dots,2^{n-2}\}$ такого, щоб $s + z = m$, тому $i = 2^{n-2} - s = 2 \cdot 2^{n-2} - m = 2^{n-1} - m$, а $p(H_n, m) = = k = \left[\frac{C_{i+1}^1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{i+1}{2}\right] + 1$. При $m \le 2^{n-2}$ у розбитті беруть участь перші m чисел з попередньої ітерації.

Зауваження 2 (Про величину $p(H_{n+2}, m)$ для $d_{m,n+4}$ $m < 2^{n+2}$). Для $d_{m,n+4}$, $m < 2^{n+2}$ виконується $p(H_{n+2}, m) = \left[\frac{m+1}{2}\right]$, $m \equiv 1(\bmod 2)$, $p(H_{n+2}, m) = \left[\frac{m+1}{2}\right] + 1$, $m \equiv 0(\bmod 2)$.

Це дійсно так, бо одночлени зі степенями менше за m не ввійдуть у розбиття одночлена степеня m, тому ситуація зводиться до описаних у лемі 1 випадків.

Отже, маючи п'ять точно визначених коефіцієнтів для молодших степенів, зробимо оцінку для найбільшого коефіцієнта наступної ітерації, використовуючи максимальний коефіцієнт, отриманий на попередній.

Оцінимо максимальний коефіцієнт на 5-й ітерації: $M_5 = \max_i \{c_{i,5}\} = \frac{7232320621}{16384}$ – при степені 7. Це в розбитті на схрещені добутки 8-й коефіцієнт. Схрещені добутки – це добутки на зразок таких, які є в числах Каталано: $c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$, але тут до $c_{1,j}$ на кожній ітерації додається 1, бо 1 це коефіцієнт при k, яке додається на кожній ітерації за формулою рекурсії. Тобто у вказаній вище сумі буде один видозмінений добуток – $c_{n-1}(c_1 + 1)$. А оскільки добуток такого типу присутній у розбитті кожного коефіцієнта $C_{k,n}$, $k \le 2^{n-2}$ на суми коефіцієнтів при відповідних степенях, то коефіцієнти ростуть швидше, ніж ті, у яких $k > 2^{n-2}$, тобто при степенях більше 2^{n-2}. Тому, починаючи з певної ітерації, максимальний коефіцієнт зміщується від степеня 2^{n-2} до степеня $k \le 2^{n-2}$, а при доволі великих n максимальним коефіцієнтом буде, як перевірено вище, $C_{k,n}$, $k < 2^{n-2}$.

Розклад максимального коефіцієнта з 6-ї ітерації через коефіцієнти попередньої ітерації такий:

$$M_6 = 2(c_6 c_0 + c_5 c_1 + c_4 c_2) + c_3^2 \le 2(M_5 c_0 + + M_5 c_1 + c_4 c_2) + c_3^2,$$

$$M_n = \sum_{10}^{2^{n-2}} M_{n-1}^2 + 2\sum_{i=0}^{4} M_{n-1} c_i, \quad n > 4,$$

$$M_{n-1} = \sum_{10}^{2^{n-3}} M_{n-2}^2 + \sum_{i=0}^{4} M_{n-2} c_i, \quad n > 4,$$

де $M_{n-1} = \max_i \{c_{i,n-1}\}$, $M_{n-1} = \sum_{10}^{2^{n-2}} \left(\sum_{10}^{2^{n-3}} M_{n-2}^2 + M_{n-2} \sum_{i=0}^{4} c_i \right)^2 + + \sum_{i=0}^{4} \left(\sum_{10}^{2^{n-3}} M_{n-2}^2 + M_{n-2} \sum_{i=0}^{4} c_i \right) c_i$ і т.д. аж до M_6.

Це дає оцінку для значення рекурсивної функції на n-й ітерації, отримання якої вимагає меншої обчислювальної і часової складності (також менший обсяг використаної оперативної пам'яті), ніж обчислення точного значення.

Якщо виділити 4 Кб пам'яті для одного коефіцієнта, то, зробивши всього 39 ітерацій, матимемо 2^{38} коефіцієнтів, що потребує 2^{40} Кб пам'яті, що рівнозначне 1 Тбайту. Тому, застосовуючи запропонований метод, який використовує пам'ять економніше, можна зробити набагато більшу кількість ітерацій.

Теорема 1. Коефіцієнт $c_{m,n}$ можна оцінити зверху: $c_{m,n} < f(c_{m,7}, K_{n-2,(n)}, \dots, K_{1,(n)}, c_{l,7})$, $l \in \{0, 1, \dots, 4\}$, де $K_{j,(n)}$ – кількість степенів одночленів (з попередньої ітерації), через які представляється $c_{m,n}$.

Доведення. Позначимо межі суми невідомих коефіцієнтів у розкладі $c_{m,n}$, $l_1(m,n)$ – нижня межа суми розбиття $c_{m,n}$ через елементи попередньої ітерації (це найменший степінь, що бере участь у представленні $c_{m,n}$ через степені попередньої ітерації):

$$l_1(m,n) = \begin{cases} k, & m > 2^{n-2} + 5, \\ m - 5, & m \le 2^{n-2} + 5. \end{cases}$$

Аналогічно, $s_1(m,n)$ – верхня межа розбиття:

$$s_1(m,n) = \begin{cases} 2^{n-2} - 2, & m \ge 2^{n-2} - 2, \\ n, & m < 2^{n-2} - 2. \end{cases}$$

А $s_1(n)$ – число всіх одночленів при представленні всіх елементів n-ї ітерації через елементи попередньої, n – номер коефіцієнта з n-ї ітерації. Тоді $K_{j,(n)}$ – кількість степенів одночленів (з попередньої ітерації), через які представляється $c_{m,n}$.

Наприклад,

$$K_{2,(n)} = s_1(m_2) - l_1(m_2) = 1+2+3+\ldots+16+17+16+ +15+\ldots+1, \quad m_2 = 16,$$

$$m > m_2 = 2^{2^{n-2}} S_1 = s_1(1,m_2) - l_1(1,m_2) = 2 \quad 31 = = (16+15)+(15+16), \; k=1, \; i=1,$$

$$S_2 = s_1(2,m_2) - l_1(2,m_2) = 3 \quad 30 = (15+ +15)+(14+16)+(16+14), \; k=2,$$

$$S_3 = s_1(3,m_2) - l_1(3,m_2) = 4, \quad k=2,$$

$$\ldots$$

$$S_{15} = s_1(15,m_2) - l_1(15,m_2) = 16, \quad k=8.$$

Підрахуємо S_{i,m_2}. З леми 2 випливає, що $S_{i,m_2} = C_{i+1}^1$, бо тут симетричні розбиття ми не ототожнюємо.

Отже, з леми 2 отримуємо $K_{2,(n)} = = 2\dfrac{1+m_2}{2}(m_2)+1 = (1+m_2)\, m_2 + 1$ – кількість доданків у розкладі всіх одночленів d_{i,n_1} при $m_1 = 2^{n_1-1}$, $m_2 = 2^{n_1-2}$,

$l_1(i,m_1,5)$ – нижня межа суми з урахуванням найменших п’яти доданків, які відсутні. Тоді отримуємо оцінку

$$c_{m,n} = \sum_{i=5}^{2^{n-2}-5} c_{m-i}c_i + \sum_0^5 c_{m-i}c_i =$$

$$= \sum_{i=5}^{m_1}\left(\sum_{l_1(m-i,m_2)}^{s_1(m-i,m_2)} c_{s_1-j}c_j + \sum_{j=0}^{5} c_{5-j}c_j\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{l_1(i,m_2)}^{s_1(i,m_2)} c_{l_2-j}c_j + \sum_{j=0}^{5} c_{5-j}c_j\right) + \sum_0^5 c_{m-i}c_i <$$

$$< \sum_{i=5}^{m}\sum_{l_1(i,m_2,5)}^{s_1(i,m_2)} (M_{j,n-2}^2 + C_{2,j})(M_{j,n-2}^2 + C_{2,j}) + C_1 =$$

$$= K_1(K_2M_{n-2}^2 + C_2)^2 + C_1 =$$

$$= K_1(K_2^2M_{n-2}^4 + 2K_2M_{n-2}^2C_2 + 4C_2^2) + C_1 =$$

$$= \left| M_{n-2} > K_2 \quad M_{n-2} > 2C_2 \quad K_1 = m-8 \right| =$$

$$= K_1(K_2^2+1)M_{n-2}^4 + K_1C_2^2 + C_1 =$$

$$= K_1(K_2^2+1)((K_3M_{n-3}^2 + C_3)^2)^2 + 4C_2^2 + C_1 =$$

$$= K_1(K_2^2+1)(K_3^2M_{n-3}^2 + 2K_3C_3M_{n-3}^2 + C_3^2)^2 + + K_1C_2^2 + C_1 = K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)M_{n-3}^4 + C_3^2)^2 + + K_1C_2^2 + C_1 = K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)^2M_{n-3}^8 + + 2C_3^2(K_3^2+1)M_{n-3}^4 + C_3^4) + K_1C_2^2 + C_1 =$$

$$= K_1(K_2^2+1)(((K_3^2+1)^2+1)M_{n-3}^8 + C_3^4) + + K_1C_2^2 + C_1 = K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)^2+1)M_{n-3}^8 + + K_1(K_2^2+1)C_3^4 + K_1C_2^2 + C_1 =$$

$$= K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)^2+1)(((K_4^2+1)^2 + +1)^2+1)M_{n-4}^{16} + K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)^2+1)C_4^4 + + K_1(K_2^2+1)C_3^4 + K_1C_2^2 + C_1,$$

$$m_1 = 2^{n-2}-5 \quad m_2 = 2^{n-2}, \; m = 2^{n-3}.$$

M_{n-k} – максимальний коефіцієнт з коефіцієнтів, які утворюються на $n-k$-й ітерації.

$M_{j,n-k}$ – максимальний коефіцієнт серед тих, що є в розкладі $c_{j,n-k+1}$ через коефіцієнти з $n-k$-ї ітерації.

$$c_{m,n} < K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)^2+1)\ldots$$

$$\ldots\underbrace{((\ldots(K_{n-2}^2+1)^2\ldots)^2+1)}_{n-6}\frac{7232320621}{16384} +$$

$$+ K_1(K_2^2+1)((K_3^2+1)^2+1)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot\underbrace{((\ldots(K_{n-3}^2+1)^2\ldots)^2+1)}_{n-7}C_{n-5} +$$

$$+ (K_2^2+1)((K_3^2+1)^2+1)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot\underbrace{((\ldots(K_{n-4}^2+1)^2\ldots)^2+1)}_{n-8}C_{n-6} + \ldots + K_1C_1^2 + C_1,$$

де $\dfrac{7232320621}{16384}$ – максимальний коефіцієнт з 7-ї ітерації.

Верхня межа другої суми дорівнює $2^{n-3}-3$, а $K_1 = 2^{n-2}-8$.

Нагадаємо означення твірної функції. Згідно з [1], з деякою послідовністю чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ можна зв’язати твірну функцію (генератрису) $g(x)$, визначену так: $g(x) =$

$= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots$ А якщо радіус збіжності $R > 0$, то деякі властивості дають можливість обчислити коефіцієнти u_n чи зробити оцінку їх величини.

Теорема 2. Точне значення довільного коефіцієнта $c_{k,n}$ можна задати у вигляді твірної функції, де $c_{k,n}$ – коефіцієнт при одночлені степеня k, що виникає на n-й ітерації:

$$c_{k,n} = 2(c_{0,n-1}c_{k,n-1} + c_{1,n-1}c_{k-1,n-1} + c_{2,n-1}c_{k-2,n-1} +$$
$$+\ldots + c_{k/2-1,n-1}c_{k/2+1,n-1}) + c_{k/2}^2 =$$
$$= 2c_{0,n-1}c_{k,n-1} + G_{k,n-1} =$$
$$= 2c_{0,n-1}(2c_{0,n-2}c_{k,n-2} + G_{k,n-2}) + G_{k,n-1} =$$
$$= 2c_{0,n-1}(2c_{0,n-2}(2c_{0,n-3}c_{k,n-3} + G_{k,n-3}) + G_{k,n-2}) + G_{k,n-1} =$$
$$= 2^r \prod_{i=1}^{n-r} c_{o,n-i}c_{k,n-r} \cdot R + \prod_{i=1}^{n-r+1} c_{0,n-i}G_{k,n-i-1} + G_{k,n-1},$$

де $r: \ 2^{r-1} \geq k$, $R = c_{2^{r-2},r-1}c_{2^{r-2}-l,r-1} + c_{2^{r-2}-1,r-1} \times$ $\times c_{2^{r-2}-l+1,r-1} + \ldots + c_{k/2+1,r-1}c_{k/2-1} + c_{k/2,r-1}c_{k/2,r-1}$, а

$$G_{k,n-1} = c_{1,n-1}c_{k-1,n-1} + c_{2,n-1}c_{k-2,n-1} +$$
$$+\ldots + c_{k/2-1,n-1}c_{k/2+1,n-1} + c_{k/2}^2, \qquad k \equiv 0 \bmod 2,$$
$$G_{k,n-i} = c_{1,n-i}c_{k-1,n-i} + c_{2,n-i}c_{k-2,n-i} +$$
$$+\ldots + c_{k/2-1,n-i}c_{k/2+1,n-i} + c_{k/2}^2, \qquad k \equiv 0 \bmod 2,$$
$$G_{k,n-i} = c_{1,n-i}c_{k-1,n-i} + c_{2,n-i}c_{k-2,n-i} +$$
$$+\ldots + c_{k/2-1,n-i}c_{k/2+1,n-i}, \qquad k \equiv 1 \bmod 2.$$

Тобто $G_{k,n-i}$ – частина представлення $c_{k,n}$ через коефіцієнти, генератриси яких відомі. А для $c_{j,n}$, $j < k$ генератриси вже відомі. Ще враховуємо, що $c_{o,n-i} = (3/4)^{n-i}$, а $c_{j,i} =$

$$= \begin{cases} c_{1,i} = c_{1,i}^* + 1, \ j = i, \\ c_{j,i} = c_{j,i}^*, \ j \neq i. \end{cases}$$

Твердження 2. Значення коефіцієнта $c_{n,i}$ оцінюється так: $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leq \sigma(c) \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, де a_i, b_j – коефіцієнти з попередньої ітерації, а $\sigma(c)$ – значення після дії перестановки σ: $a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)}$.

Можливе застосування нерівності $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leq \sigma \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ таким чином. Як відомо [6], якщо $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ і $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, то визначивши підстановки $i(1), i(2), \ldots, i(n)$ та суму $\sigma = a_1 b_{i(1)} + a_2 b_{i(2)} + \ldots + a_n b_{i(n)}$, маємо, що справедливі нерівності $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leq \sigma \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, де a_i, b_j – коефіцієнти з попередньої ітерації, а σ – оціночне значення для $c_{n,i}$.

Кожен коефіцієнт з непарним індексом формується як підкручене число Каталано:

$$C_{2n+1} = 2(c_0 c_{2n+1} + (c_1 + 1)c_{2n} +$$
$$+ c_2 c_{2n-1} + c_3 c_{2n-2} + \ldots + c_n c_{n+1}) \leq$$
$$\leq 2((c_1 + 1)c_1 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_{2n-1}^2) +$$
$$+ 2c_0 F(c_{2n+1,i-1}) = \sigma_{n-1}.$$

Аналогічні міркування для парних індексів

$$C_{2n} = 2(c_0 c_{2n} + (c_1 + 1)c_{2n-1} + c_2 c_{2n-2} +$$
$$+ c_3 c_{2n-3} + \ldots + c_{n-1}c_{n+1}) + c_n^2 \leq$$
$$\leq 2((c_1 + 1)c_1 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_{2n-1}^2) +$$
$$+ 2c_0 F(c_{2n,i-1}) = \sigma_{n-1}.$$

Заміна $b_{j,i} = c_{1,i} + 1$, $j = 1$, а при $j \neq 1$ $b_{j,i} = c_{1,i} + 1$, тоді

$$c_{2n,i} = 2c_0 F(c_{2n,i-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} c_{2n-j,i-1}c_{j,i-1} + c_n^2 \leq$$
$$\leq 2c_0 \left(2c_0 F(c_{2n,i-2}) + \sum_{j=1}^{2n} b_{j,i-2}^2 \right) + \sum_{j=1}^{2n} b_{j,i-1}^2 =$$
$$= 2c_0 \left(2c_0 \left(2c_0 F(c_{2n,i-2}) + \sum_{j=1}^{n/2} b_{j,i-2}^2 \right) + \sum_{j=1}^{n} b_{j,i-2}^2 \right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2n} b_{j,i-1}^2 = 2c_0 \left(2c_0 \left(2c_0 \ldots \left(2c_{0,i-m-1} \cdot \sum_{j=1}^{l} b_{j,i-m-1}^2 \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n_m} b_{j,i-m}^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n_2} b_{j,i-3}^2 \right) + \sum_{j=1}^{n_1} b_{j,i-2}^2 \right) + \sum_{j=1}^{2n} b_{j,i-1}^2 =$$
$$= (2c_0)^{i-5} \sum_{j=1}^{l} b_{j,i-5}^2 + (2c_0)^{i-6} \sum_{j=1}^{2l} b_{j,i-6}^2 +$$
$$+ (2c_0)^{i-7} \sum_{j=1}^{2^2 l} b_{j,i-7}^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{2n} b_{j,i-1}^2.$$

$F(c_{2n,i-1})$ – розклад $c_{2n,i-1}$ через коефіцієнти попередньої ітерації. Тут l – кількість різних добутків одночленів у розбитті c_{i-m-1} на ітерації з найбільшим номером $i-m$, найбільший степінь якої $2^{i-m-1} < 2n$, тобто найбільший номер ітерації, з якого ця нерівність починає виконуватись. На наступній $i-m-1$ ітерації не існує елементів, що утворюють розбиття елемента $2n$, тут утворюються вже розбиття для елементів з попередньої ітерації, на які розпався елемент $2n$.

А для усіх коефіцієнтів з σ_{i-1} (тобто з попередньої ітерації) генератриси вже відомі, тому тепер легко для кожного $C_{n,i}$ з i-ї ітерації, де $n > 2^{i-2}$, отримати доволі точну оцінку зверху. Межі сум коефіцієнтів формуються з ітерації $i-m : 2^{m-i} \geq 2n$, тому $l_{i-m} = 2n$. Але для $i-m-1$: $2^{i-m-1} \leq 2n$, тому з леми 1 випливає $l_{i-m-1} = 2^{i-m} - 2n = l$.

Знаходження такої оцінки має на порядок меншу обчислювальну складність, бо використовує для обчислення C_{2n} і C_{2n+1} одну й ту ж саму суму квадратів $2((c_1+1)c_1 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_{2n-1}^2)$, а при обчисленні перехресних добутків, таких, як у числах Каталано, у виразі точних значень коефіцієнтів $c_{2n,i}$ маємо обчислювати кожного разу нові добутки та суми.

Висновки

У статті досліджено примітивно-рекурсивну функцію, визначену на ¥, яка задається таким самим квадратичним законом, як і функція Мандельбротта $z_n = z_{n-1}^2 + c$, що породжує множину Жуліа. Для вихідної функції вдалося редукувати лінійний член, тому отримано функцію, для якої застосовна теорія Мандельбротта, тобто зроблено певні оцінки цієї функції, які дають нове теоретичне підґрунтя для знаходження області обмеженості цієї функції, яка при цьому залежить від значення параметра рекурсії. Але, крім цього, ці оцінки спрямовані на наближення величини знаменника ряду Остроградського 2-го роду.

Оскільки всі фрактальні рекурсивні функції задаються подібним нелінійним рекурсивним законом, то зрозуміло, що запропоновані методи можуть бути перенесені і для їх дослідження. Ці параметри в сукупності дають множину усіх параметрів, або множину Мандельбротта.

У статті зроблено більш точні, ніж ті, які використовувалися раніше, оцінки зверху сумарного значення цієї функції. Крім того, запропоновано рекурсивні формули для її коефіцієнтів, використовуючи які можна отримувати точні значення самої функції з меншою обчислювальною складністю, ніж безпосереднє обчислення. При цьому можна використати наближення деяких коефіцієнтів. Оскільки закон рекурсії пов’язаний із розбиттями числа на всі можливі суми з парним числом доданків, то ефективно використовуються генератриси, які для фрактальних рекурсивних функцій (з наявністю квадратичного закону) ще не досліджувалися.

Перспективою продовження є дослідження інших рекурсивних функцій другого степеня цим самим методом або дослідження зростання значення цієї функції при інших початкових параметрах. Також можна збільшувати точність оцінок та обчислених значень.

1. *Працьовита І.М.* Про розклади дійсних чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го видів // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 7. – С. 958–968.
2. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 354 с.
3. *Гудстейн Р.Л.* Рекурсивный анализ. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
4. *Эндрюс Г.* Теория разбиений – М.: Наука, 1982. – 256 с.
5. *Холл М.* Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
6. *Кукуш А.Г.* Монотонні послідовності і функції. – К.: Вища шк., 2007. – 104 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
18 травня 2012 року