

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**І. Р. Пархомей, В. П. Пасько, О. М. Польшакова,
О. А. Стенін**

Теорія цифрових систем управління

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 126 «інформаційні системи та технології»,
освітньої програми «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *Кривий С. Л.*, доктор фізико – математичних наук, професор кафедри інформаційних технологій факультету комп’ютерних наук та кібернетики КНУ ім. Т. Г. Шевченка.

Самсонкін В. М., доктор технічних наук, професор, академік транспортної академії України, професор кафедри Управління процесами перевезень Державного університету інфраструктури та технології МОН України.

Відповідальний редактор *Ткач М. М.*, к.т.н., доцент.

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 05.11.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Пархомей Ігор Ростиславович, д-р техн. наук, проф.,
Стенін Олександр Африканович д-р техн. наук, проф.,
Пасько Віктор Петрович, канд. техн. наук, доц.,
Польшакова Ольга Михайлівна.

ТЕОРІЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Теорія цифрових систем [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студ. спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», освітньої програми «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем» / І. Р. Пархомей, В. П. Пасько, О. М. Польшакова, О. А. Стенін ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2.851 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 133 с.

Анотація орієнтовно 640 символів

© І. Р. Пархомей, В. П. Пасько, О. М. Польшакова, О. А. Стенін, 2020
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

- 1.1. Особливості цифрового управління
- 1.2. Основні поняття і визначення

2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСУ КВАНТУВАННЯ

- 2.1. Закони управління роботою квантувача
- 2.2. Решітчаста функція
- 2.3. Різницеві рівняння

3. ТЕОРІЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

- 3.1. Визначення z-перетворення
- 3.2. Модифіковане z-перетворення
- 3.3. Зворотне z-перетворення
- 3.4. Відповідність між s- та z-площинами
- 3.5. Обмеження методу z-перетворення

4. ФІКСАТОР НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

5. ІМПУЛЬСНІ ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

6. МЕТОД ПРОСТОРУ СТАНІВ

- 6.1. Рівняння стану цифрових систем управління
- 6.2. Апроксимація аналогової системи цифровою моделлю
- 6.3. Розв'язання стаціонарного рівняння стану за допомогою z-перетворення
- 6.4. Зв'язок рівняння стану з передавальною функцією
- 6.5. Характеристичне рівняння
- 6.6. Діагоналізація матриці системи управління
- 6.7. Методи обчислення перехідної матриці стану

7. АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

- 7.1 Аналіз ЦСУ у часовій області
- 7.2. Аналіз в частотній області. Годограф Найквіста
 - 7.2.1 Метод z-перетворення
 - 7.2.2. Метод нескінченного ряду
 - 7.2.3. Метод білінійного перетворення
- 7.3. Логарифмічні частотні характеристики
- 7.4. Визначення смуги пропускання ЦСУ

8. КЕРОВАНІСТЬ І СПОСТЕРЕЖНІСТЬ ЦСУ

8.1. Загальні визначення процесів керованості і спостережності

8.2. Керованість лінійних ЦСУ

8.3. Спостережуваність лінійних ЦСУ

9. МЕТОДИ ПОБУДОВИ І КОРЕКЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

9.1. Реалізація цифрових регуляторів в ЦСУ

9.2. Методи корекції показників якості ЦСУ

10. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

10.1. Класичне варіаційне числення

10.2. Дискретний принцип максимуму(мінімуму)

10.3. Метод динамічного програмування

11. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЛІНІЙНО-КВАДРАТИЧНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА

11.1. Постановка задачі

11.2. Синтез лінійно-квадратичного цифрового регулятора на кінцевому інтервалі часу

11.3. Синтез лінійно-квадратичного цифрового регулятора на нескінченному інтервалі часу

11.4. Синтез оптимального за витратами енергії цифрового регулятора

11.5. Рекурентний метод рішення дискретного рівняння Рікатті

12. ЦИФРОВИЙ СПОСТЕРІГАЧ СТАНУ ЦСУ

12.1. Критерій спостережності лінійної ЦСУ

12.2. Синтез спостерігача стану повного порядку

12.3. Синтез спостерігача стану пониженого порядку

ВСТУП

Цифрові системи управління відрізняються від неперервних тим, що серед сигналів, що діють в системі, є дискретні. Цифрові системи автоматичного керування передбачають перетворення безперервних сигналів у цифрові коди та зворотне перетворення цифрових кодів у безперервні сигнали.

Системи, у структурі яких використовуються цифрові обчислювальні пристрої (ЦОП) (контролери, мікропроцесори, комп'ютери і т. д.), є цифровими. Цифрові системи управління (ЦСУ) знаходять широке застосування в управлінні різноманітними технічними пристроями. Область застосування ЦСУ – управління електромеханічними і електромагнітними пристроями, системами телевимірювання і телекерування, багатоканальними системами зв'язку і т. д.

В сучасних умовах зберігається стійка тенденція збільшення частки цифрових методів перетворення, обробки, передачі та зберігання інформації у всіх сферах діяльності людини, йде зміна поколінь технічних засобів обробки інформації та інформаційного обміну. Ці засоби можуть безпосередньо не зачіпати традиційні галузі автоматизації: датчики, приводи, регулятори, проте змінюють середовище існування засобів автоматизації в цілому.

У період бурхливого розвитку мікропроцесорної техніки (80-ті роки 20-го століття) було розроблено та впроваджено велику кількість технічних пристроїв для систем автоматичного керування з жорсткою логічною структурою, що мали цілком задовільні характеристики. Разом з тим ставало зрозуміло, що тільки використання спеціалізованих та універсальних програмних пристроїв забезпечить майбутнє технічних засобів автоматики. На цьому етапі відбулося розділення шляхів розвитку систем управління на дві лінії: на основі універсальних ЕОМ і на основі контролерів та більш простих обчислювальних пристроїв, оптимізованих для вирішення задач

певного класу. Обидва підходи мають право на життя, а їх розумне поєднання забезпечує високу якість систем автоматичного управління (САУ).

В сучасних проектах використовують апаратні та програмні технології відкритого типу, апробовані і стандартизовані на ринку загальнопромислових додатків, поряд з розвитком і вдосконаленням традиційних засобів автоматизації. Контролери, вбудовані у засоби автоматизації зазвичай працюють в жорстких умовах експлуатації, а ціна відмови пристрою в системі автоматичного управління також може бути набагато вище, ніж в інших інформаційних системах, так як об'єкт управління функціонує постійно і в реальному часі.

Цифрові САУ зазвичай містять велику кількість різноманітних датчиків і перетворювачів інформації фізичних величин, таких, як температура, тиск, витрата рідини, швидкість і т. п. Датчики перетворюють результат вимірювання конкретної фізичної величини в деяку стандартну величину, як правило, напругу чи струм. При використанні комп'ютера постає завдання перетворення цієї проміжної фізичної величини в цифрову форму, що обумовило появу і стрімкий розвиток нового покоління датчиків, в яких є вбудовані контролери, що здійснюють таке перетворення. Такий інтелектуальний датчик сам стає елементом обчислювальної системи, що підтримує використання мережевих протоколів для передачі даних в цифровій формі. Часто контролер такого датчика виконує попередню цифрову обробку сигналу, наприклад, корекцію систематичної похибки перетворювача, попередню фільтрацію випадкових завад, а також контроль працездатності. Все більше технічних засобів САУ стають чисто цифровими, в яких перетворення фізичних величин відбувається безпосередньо в цифрову форму, підготовлену до передачі по каналу зв'язку.

В САУ цифровими і інтелектуальними (з вбудованими мікроконтролерами) можуть бути і інші складові частини: виконавчі пристрої, канали зв'язку, фільтри і т. п. Крім можливості їх програмування, це дає підвищення надійності шляхом гнучкості конфігурації. Кількість

комп'ютерів, що використовуються для управління технологічними процесами, зростає практично експоненціально.

Основною метою підручника є ознайомлення з класичними методами аналізу і синтезу цифрових систем управління. Книга містить велику кількість прикладів, деякі з них спрощені для більшої наочності.

Структура підручника повністю відповідає меті і складається наступним чином. У розділах 1-5 викладені основні положення теорії цифрового управління. Розділи 6-9 присвячені методам аналізу і синтезу ЦСУ в просторі станів. У розділах 10,11 викладені основні методи оптимального управління ЦСУ. Розділ 12 присвячено цифровим спостерігачам стану.

Книга може бути корисною для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», а також тим, хто цікавиться питаннями аналізу і синтезу цифрових систем автоматичного управління.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

1.1. Особливості цифрового управління

Сучасна теорія управління надає універсальний метод дослідження цифрових систем управління (ЦСУ) – дискретне перетворення Лапласа, яке дозволяє максимально наблизити методологію дослідження ЦСУ до методології дослідження неперервних систем. Однак функціонування ЦСУ має особливості, обумовлені наявністю в цих системах імпульсних елементів, за допомогою яких здійснюється перетворення неперервних величин у послідовності дискретних сигналів. Дискретні сигнали управління надходять в окремі точки ЦСУ у фіксовані або довільні моменти часу і робота цифрових систем управління пов'язана з формуванням, передачею та перетворенням послідовності дискретних сигналів.

Дискретні сигнали отримують з неперервних квантуванням за рівнем, за часом або одночасно і за рівнем, і за часом.

При квантуванні за рівнем неперервний сигнал $x(t)$ перетворюється в послідовність дискретних сигналів, фіксованих в довільні моменти часу за умови $\Delta x = const$. Системи, в яких використовуються сигнали, квантовані за скінченною кількістю рівнів (часто 2-3 рівні), називаються *релейними системами*. Квантування за рівнем є нелінійним перетворенням сигналів, отже, релейні системи належать до класу нелінійних систем.

При квантуванні за часом сигнали фіксуються в дискретні моменти часу $\Delta t = const$. При цьому рівні сигналу можуть приймати довільні значення. Системи, що реалізують квантування сигналів за часом, називаються *імпульсними системами*. Квантування за часом здійснюється імпульсним елементом, який у особливому випадку пропускає вхідний сигнал $x(t)$ лише протягом деякого часу.

При одночасному квантуванні за рівнем і за часом неперервний сигнал замінюється дискретними значеннями на рівнях, найближчих до значень

неперервного сигналу в дискретні моменти часу $\Delta t = \text{const}$. Дискретні системи, в яких сигнали квантуються за рівнем і за часом, називаються цифровими або релейно-імпульсними.

Пристрої, які здійснюють перетворення неперервних сигналів у цифрові, називають аналогово-цифрові перетворювачі (АЦП). Зворотнє перетворення виконують цифро-аналогові перетворювачі (ЦАП). Квантування за часом визначає частоту перетворювача, а квантування за рівнем – розрядність. Як правило, вихідні сигнали перетворювача подаються в двійковому паралельному чи послідовному коді. Послідовний код – це такий код, для якого значення розрядів одержаного результату передається по одному каналу як функція часу. При використанні паралельного коду розряди перетвореного сигналу передаються одночасно по паралельних каналах.

1.2. Основні поняття і визначення

Решітчастою функцією називається функція, що утворюється як результат заміни неперервної змінної на дискретну, визначену в дискретні моменти часу nT , $n = 0, 1, 2, \dots$. Неперервній функції $x(t)$ відповідає решітчаста функція $x(nT)$, де T – період квантування, при цьому неперервна функція огинає решітчасту функції. При заданому періоді квантування T неперервній функції $x(t)$ відповідає єдина решітчаста функція $x(nT)$. Однак оберненої однозначної відповідності між решітчастою і неперервною функцією в загальному випадку не існує, оскільки через точки решітчастої функції можна провести безліч кривих.

Відліки по шкалі часу зручно вести в цілих одиницях, кратних періоду квантування T . З цією метою замість змінної t неперервної функції вводиться нова змінна $\tau = t/T$, при цьому неперервній функції $x(\tau)$ буде відповідати решітчаста функція $x(nT) = x(n) \equiv x_n$.

Процес *імпульсної модуляції* полягає в зміні якого-небудь параметра періодично повторюваних імпульсів. Стосовно немодульованої послідовності імпульсів такими параметрами є амплітуда імпульсів A , тривалість βT , і період повторення T . Величина, що визначає закон модуляції, називається модулюючою величиною. Якщо за законом зміни модулюючої величини змінюється амплітуда імпульсів, то модуляція називається амплітудно-імпульсною (АІМ), якщо змінюється ширина – широтно-імпульсною (ШІМ), при зміні періоду – часово-імпульсною модуляцією (ЧІМ).

Вид модуляції, при якій параметри послідовності імпульсів змінюються залежно від значень модулюючої величини у фіксовані рівновіддалені один від одного моменти часу, називається імпульсною модуляцією першого роду. У цьому випадку модульований параметр амплітуда, ширина або частота імпульсу, що визначається значенням моделюючої величини-рівновіддалені дискретні моменти часу. Вид модуляції, при якій модульовані параметри послідовності імпульсів змінюються відповідно з поточним значенням модулюючої величини, називається імпульсною модуляцією другого роду. У цьому випадку модульований параметр змінюється протягом часу існування імпульсу.

Параметри імпульсних елементів (ІЕ), що виконують в системах управління дискретизацію аналогових сигналів та модуляцію імпульсів є такими:

- *коефіцієнт посилення* K_i імпульсного елемента – відношення величини модульованого параметра імпульсів до величини вхідного сигналу $x_{ex}(t)$ у відповідний дискретний момент часу. Наприклад, коефіцієнт посилення амплітудного імпульсного елемента $K_{ai} = A/x_{ex}$, де A – амплітуда імпульсу, x_{ex} – відповідне дискретне значення вхідної величини;
- *період повторення імпульсів* T або *частота повторення імпульсів* $\omega_0 = 2\pi/T$;

- *тривалість імпульсів* $\tau = \beta T$, де β – *шпаруватість імпульсів*, що показує, яку частину періоду повторення імпульсів займає тривалість імпульсу;
- *форма імпульсу* $S(t)$ може бути прямокутною, трикутною, синусоїдальною, експоненціальною, тощо;
- *характеристика імпульсного елемента* – залежність величини модульованого параметра імпульсів від відповідних дискретних значень вхідної величини. Може бути як лінійною, так і нелінійною (наприклад, логарифмічною), а також комбінованою.

Імпульсні елементи різноманітні по конструкції (механічні, електромеханічні, фотоелектричні, електронні). Імпульсним елементом може бути як простий ключ, так і більш складніший пристрій, наприклад, контролер. Найбільш широке застосування на практиці отримали амплітудні імпульсні елементи, що здійснюють амплітудно-імпульсну модуляцію першого і другого роду. Надалі будемо розглядати, в основному, імпульсні системи з амплітудними імпульсними елементами першого роду.

Імпульсні системи (ІС) можуть бути лінійними і нелінійними. В лінійних ІС діє принцип суперпозиції: реакція ІС на суму впливів дорівнює сумі реакцій на кожне вплив окремо. У цих системах параметри імпульсного елемента не залежать від зовнішніх впливів і змінних, що характеризують стан системи. До лінійних ІС належать, наприклад, амплітудно-імпульсні системи з лінійною частиною неперервної і з лінійною характеристикою імпульсного елемента. В подальшому будуть розглядатися лінійні імпульсні системи, в яких ІЕ може бути включений до неперервної частини, після неї або між окремими частинами неперервної системи. У замкнутих ІС імпульсний елемент може перебувати в прямій частині системи, у ланцюзі зворотного зв'язку або поза замкнутого контуру.

Функціональні схеми ЦСУ. В цифрових системах автоматичного керування цифровий обчислювальний прилад (ЦОП) можна включати поза

замкнутого контуру управління, в замкнутий контур управління і як елемент порівняння. Найбільш типові схеми включення ЦОП до складу систем управління наведено на рис. 1.1.

У системах першого типу (ЦОП поза замкнутого контуру управління, рис.1.1-1) за допомогою аналого-цифрового перетворювача (АЦП) неперервний (аналоговий) вплив $u(t)$ перетворюється в цифровий код u_k . ЦОП на підставі інформації, що надходить, виробляє оптимальний вплив u'_k . Останній за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) перетворюється в неперервний сигнал $u'(t)$ і надходить на елемент порівняння замкнутої системи, сигнал з якого надходить на вхід об'єкта управління (ОУ). Замкнутий контур системи може бути неперервним або імпульсним. Перевага такої ЦСУ полягає в простоті зміни програми ЦОП, відповідно до якої виробляється заданий вплив.

У системах другого типу (ЦОП у контурі управління, рис.1.1-2) обчислювальний пристрій, який включено в прямий ланцюг замкненого контуру системи виконує функцію послідовного коригувального пристрою. В системах третього типу (рис.1.1-3) ЦОП включено в ланцюг локального зворотного зв'язку, що охоплює неперервну частину ОУ системи, і є паралельним коригувальним пристроєм. Цифрові коригувальні пристрої в цих системах дозволяють реалізувати досить складні закони управління.

У системах четвертого типу (рис.1.1-4) ЦОП виконує функції елемента порівняння та коригуючого пристрою. В цій системі на цифровий елемент порівняння діє вплив u_k і керована величина y_k , що надходять в цифровій формі через відповідні АЦП. На виході елемента порівняння сигнал неузгодженості також виходить у вигляді коду e_k . За допомогою перетворювача ЦАП цифровий код перетворюється в неперервний сигнал $e(t)$, що надходить на ОУ системи. ЦСУ четвертого типу мають всі якості першого, другого та третього типів, а завдяки більш високій роздільній здатності елемента порівняння мають і більш високу точність.

Перетворювач АЦП (аналог-код) – пристрій, що автоматично перетворює вхідний аналоговий сигнал в дискретний код (цифровий сигнал), який кількісно характеризує амплітуду вхідного сигналу (двійковій, вісімковій, десятковій і т. п. системі числення).

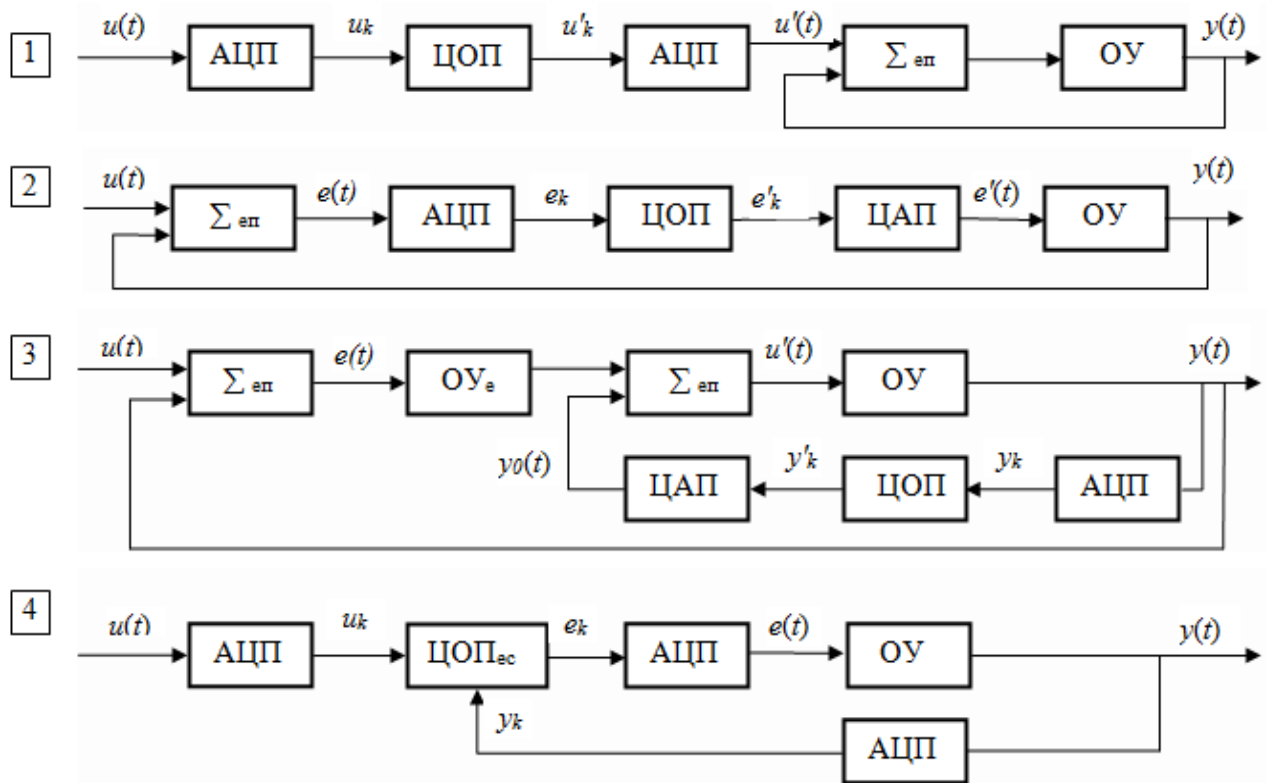


Рис.1.1. Типові схеми включення ЦОП в систему управління

Вхідними величинами АЦП зазвичай є часові інтервали, кути повороту, електрична напруга або струм, значення частоти та фази коливань. Важливою характеристикою АЦП є кількість каналів, що визначає максимальну кількість датчиків аналогових сигналів, які можуть бути одночасно підключені до перетворювача. Слід виділити три основні групи АЦП.

1. Перетворювачі просторових переміщень і кутів повороту.
2. Перетворювачі електричних величин (напруги, струмів і ін).
3. Перетворювачі інтервалів часу.

Перетворювачі кут-код діляться на перетворювачі зчитування та перетворювачі послідовного рахунку. В перетворювачах зчитування кут

повороту валу видається зі зчитувального пристрою безпосередньо в двійковому коді. Основним елементом перетворювача є диск або барабан з кодової шкалою (маскою). Знімання кодованих сигналів здійснюється за допомогою фотоелектричних пристроїв, контактних щіток, магнітних голівок і іншими способами (одне зчитувальний пристрій на один розряд коду). Висока точність зазвичай реалізується з допомогою фотоелектричних перетворювачів (до 14-18 кодових розрядів). Перетворювачі кут – код із звичайною двійкової кодової шкалою, як правило, не застосовуються, так як є ймовірність появи помилок зчитування з-за того, що в двійковій системі числення при переході від одного числа до іншого можуть змінюватися цифри відразу в декількох розрядах.

Для усунення цього недоліку застосовуються диски з масками спеціальних кодів – двійкового коду Грея або двійково-зрушеного коду Баркера, помилки зчитування яких не перевищують одиниці молодшого розряду. В перетворювачах послідовного рахунку кут повороту валу перетворюється на кількість імпульсів. Для цього використовується закріплений на валу диск або барабан з мітками реєструючих датчиків (контактних, фотоелектричних, та ін). При повороті диска у зчитувальному пристрої формуються імпульси, число яких залежить від кута повороту валу і щільності міток. Широке застосування мають також перетворювачі, які працюють за методом рахунку, здійснюють послідовне перетворення кут \rightarrow часовий інтервал \rightarrow код.

Перетворювачі напруги в цифровий код діляться на перетворювачі, що працюють за принципом послідовного рахунку і за принципом порівняння (зважування). Для перетворювачів, що працюють за принципом послідовного рахунку характерно проміжне перетворення вимірюваної напруги в пропорційний часовий інтервал, який заповнюється імпульсами генератора певної частоти, число яких переводиться в кодову форму. В перетворювачах, що працюють за принципом порівняння, вхідна напруга порівнюється з еталонним, який формується через ЦАП від лічильника вихідного коду.

Перетворювачі ЦАП (код \rightarrow аналог) є пристроями, що здійснюють автоматичне декодування вхідних величин у цифровому коді в еквівалентні їм значення якої-небудь фізичної величини, частіше всього напруги.

Для перетворення цифрового коду у напругу використовуються резистори, сполучені з кодовим лічильником за певною схемою, включення яких на джерело еталонної напруги відбувається у відповідності з декодуючим числом так, що вихідна напруга, що знімається з навантаження, пропорційна декодуючому числу. Основним типом перетворювачів код-напруга є перетворювачі з підсумовуванням напруги на атенюаторі резисторів. Щоб перетворити числа різних знаків, необхідно на вході схеми встановити знаковий тригер, а на виході схеми передбачити можливість отримання напруги різної полярності. Перетворювачі володіють високою швидкістю, достатньою точністю (точність перетворення може бути доведена до 0,05... 0,1 %), мають порівняно просту схему і забезпечують пропорційне перетворення кодів з числом розрядів $n \leq 10$, що цілком достатньо для цифрових автоматичних систем.

Багато задач вимагають формування таких складних законів управління, які не можуть бути реалізовані традиційними елементами та пристроями автоматики. Так, наприклад, в системах управління рухомими об'єктами потрібні складні обчислення з перетворенням координат, рішенням прямокутних і сферичних трикутників, обчисленням шляху і т. п. Дуже складні обчислення проводяться в адаптивних системах керування. Ці завдання вирішуються з допомогою цифрових обчислювальних пристроїв (ЦОП), що вводяться в контур керування динамічною системою.

В практиці управління використовуються ЦОП різних типів, серед яких можна виділити багатопроцесорні системи, міні-комп'ютери (мікро-комп'ютери) та мікроконтролери. Структура ЦОП обумовлена технологіями та методами обробки інформації.

Питання до самоконтролю

1. Види квантування.
2. Класифікація ЦСУ за видом квантування.
3. Визначення решітчастої функції.
4. Характеристика процесу імпульсної модуляції.
5. Види імпульсної модуляції.
6. Форми імпульсів.
7. Характеристика імпульсних елементів.
8. Типові схеми включення цифрових пристроїв в системи автоматичного управління.
9. Типи АЦП і їх характеристики.
10. Типи ЦАП і їх характеристики.

2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСУ КВАНТУВАННЯ

2.1. Закони управління роботою квантувача

Закони управління роботою квантувача, що використовуються в цифрових системах, можуть бути різні. На рис.2.1 показана структурна схема періодичного квантувача зі скінченним часом вибірки. Тривалість імпульсу або час вибірки p , період квантування – T .

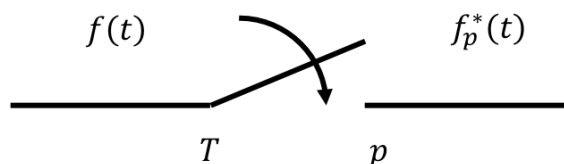


Рис.2.1. Схема періодичного квантувача

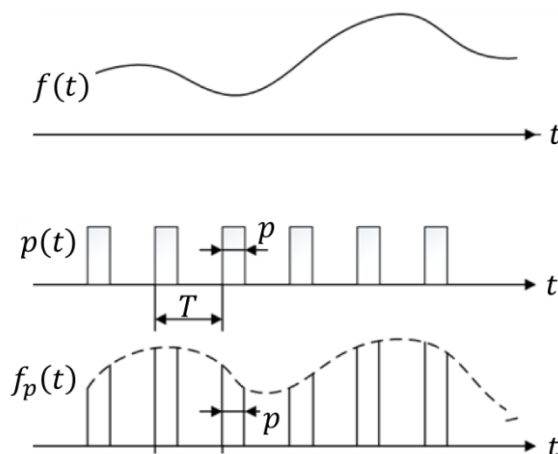


Рис.2.2. АІМ для представлення квантувача

Використання моделі (рис.2.2) забезпечує очевидну перевагу, а саме: за різних законів квантування змінюється тільки несучий сигнал $p(t)$ (наприклад, ШІМ). У цьому випадку квантувач є лінійним пристроєм, оскільки відповідає принципу суперпозиції. Це дозволяє для отримання співвідношень вхід-вихід використовувати перетворення Фур'є і Лапласа.

Важливим питанням є вибір кроку квантування, при якому дискретна функція повинна за можливістю точно відображати неперервну функцію. Відповідь дає теорема Котельникова: «Функція часу $f(t)$, яка не містить

складових частоти вище f_c (Гц) повністю визначається своїми значеннями в моменти, віддалені один від одного на $\frac{1}{2} f_c$ (сек)».

У загальному випадку вирази для перетворення Фур'є і Лапласа від функції $f(t)$ квантувачів з скінченною шириною імпульсів достатньо складні і можуть бути суттєво спрощені, якщо прийняти, що час вибірки p набагато менше періоду квантування T і найменшої постійної часу сигналу $f(t)$.

В цьому випадку $f_p^*(t)$ описується послідовністю прямокутних імпульсів (рис.2.2):

$$f_p^*(t) = \begin{cases} f(kT), & kT \leq t \leq kT + p, \\ 0, & kT + p \leq t \leq (k + 1)T, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $k=0,1,2,3 \dots$

Запишемо $f_p^*(t)$ у вигляді:

$$f_p^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)[u_s(t - kT) - u_s(t - kT - p)], \quad (2.2)$$

де $u_s(t)$ – одинична ступінчаста функція.

За Лапласом отримаємо:

$$F_p^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \left[\frac{1 - e^{-ps}}{s} \right] e^{-kTs}. \quad (2.3)$$

Оскільки час вибірки p дуже малий, то

$$1 - e^{-ps} = 1 - \left[1 - ps + \frac{(ps)^2}{2!} - \dots \right] \cong ps. \quad (2.4)$$

Тоді вираз (2.3) приймає вигляд

$$F_p^*(s) \cong p \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}, \quad (2.5)$$

що відповідає оригіналу

$$f_p^*(t) = p \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT), \quad (2.6)$$

де $\delta(t)$ – одинична імпульсна функція.

Перша частина (2.6) являє собою послідовність імпульсів з площиною імпульсу $pf(kT)$ при $t = kT$. Це означає, що квантувач з скінченною шириною

імпульсів може бути замінений імпульсним модулятором (рис. 2.3) як квантувач $p(t)$ з сигналом вигляду:

$$\delta\tau(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (2.7)$$

або ідеальним квантувачем, вихід якого з'єднаний з атенюатором (коефіцієнт послаблення p), як показано на рис. 2.4. Квантувачі a і b еквівалентні, якщо p набагато менше періоду квантування T та найменшої постійної часу $f(t)$.

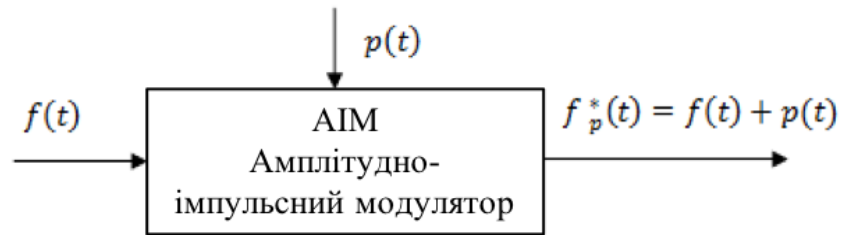


Рис. 2.3. Амплітудно-імпульсний модулятор

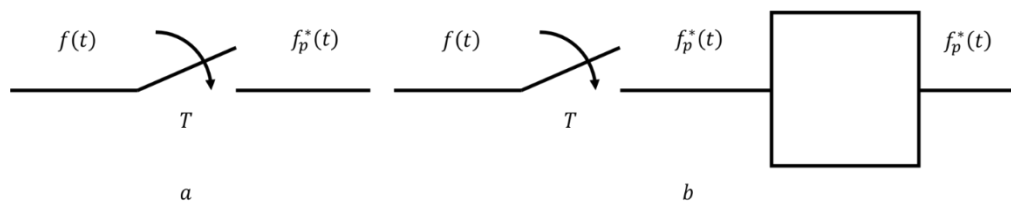


Рис.2.4. Ідеальний квантувач: із скінченним проміжком часу (a), вихід якого з'єднаний з атенюатором (b)

Таким чином, ідеальний квантувач може бути визначено, як квантувач з нульовим часом вибірки, котрий замикається чи розмикається миттєво через кожні T секунд. Зауважимо, що атенюатор необхідний тільки в тому випадку, якщо не застосовується пристрій фіксації.

Вихідний сигнал ідеального квантувача можна записати у вигляді:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) = f(t)\delta_T(t), \quad (2.8)$$

де $f(t)$ – вхідний сигнал квантувача за умови, що квантування починається при $t = 0$.

Зображення по Лапласу вихідного сигналу ідеального квантувача матиме вигляд:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}. \quad (2.9)$$

Це означає, що квантувач з скінченною шириною імпульсів (рис.2.1) може бути замінений ідеальним квантувачем, вихід якого з'єднаний з атенюатором з коефіцієнтом ослаблення p (рис.2.4).

Тут

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \delta_T(t). \quad (2.10)$$

А його зображення по Лапласу

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}. \quad (2.11)$$

2.2. Решітчаста функція

На рис.2.5 показані типові вхідний і вихідний сигнали ідеального квантувача. Представлену на рис.2.5 функцію $f^*(t)$ називають *решітчастою функцією*, ординати якої визначають дискрети вихідної неперервної функції $f(t)$ в моменти $t = kT$, тобто в абсолютному дискретному масштабі часу.

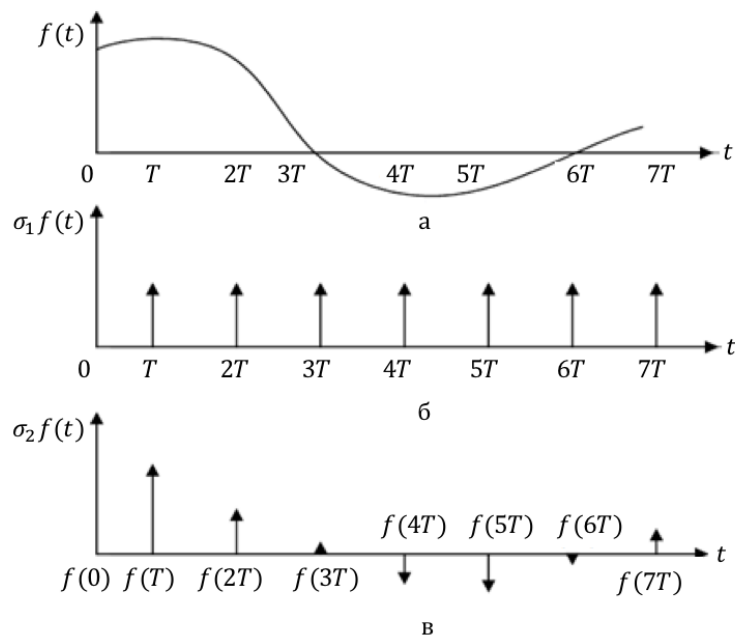


Рис.2.4. Решітчаста функція

Решітчаста функція може бути задана і у відносному масштабі часу. У цьому випадку запис $f^*(t, \varepsilon)$ означає, що дискрети вихідної неперервної

функції

$f(t)$ фіксуються в зсунути моменти часу $t = kT + \Delta T = (k + \varepsilon)T$, де $\varepsilon = \frac{|\Delta T|}{T} < 1$.

Слід зазначити, що обернена задача, а саме, формування неперервної функції із решітчастої, не має однозначного розв'язку, оскільки для функції, заданої в дискретні моменти часу, можна поставити у відповідність нескінченну множину неперервних функцій. Неперервні функції, які співпадають із заданими дискретами, називаються *огинаючими* решітчастої функції.

Решітчасті функції є основою для побудови різницевих схем рівнянь і дискретного перетворення Лапласа.

2.3. Різницеві рівняння

Аналогом першої похідної неперервної функції для решітчастої функції є або перша пряма різниця

$$\Delta f[k] = f[k+1] - f[k],$$

або перша обернена різниця

$$\nabla f[k] = f[k] - f[k-1].$$

Пряма різниця визначається в момент часу $t = kT$ по майбутньому значенням решітчастої функції при $t = (k+1)T$, якщо це можливо. В іншому випадку застосовують обернену різницю.

Для простоти викладу матеріалу позначимо решітчасту функцію через $f[k]$. Для обчислення n -ой різниці використовують рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} \Delta^n f[k] = \sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v f[k+n-v], \\ \nabla^n f[k] = \sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v f[k-v]. \end{cases} \quad (2.12)$$

де біноміальні коефіцієнти (кількість сполучень) обчислюються як

$$C_n^\gamma = \frac{n!}{\gamma!(n-\gamma)!}. \quad (2.13)$$

Обернені різниці мають важливу властивість. Якщо решітчасті функції визначені тільки для додатніх значень аргументу, тобто $f[k] = 0$ при $k < 0$, то, як наслідок із (2.12) і (2.13), в точці $k=0$ для будь-якого цілого додатного n різниця $\nabla^n f[0] = f[0]$.

Аналогами інтеграла неперервної функції в межах від 0 до t для решітчастої функції є неповна сума:

$$\Sigma[k] = \sum_{m=0}^{k-1} f[m] = \sum_{\gamma=1}^k f[k-\gamma],$$

і повна сума:

$$\Sigma_0[k] = \Sigma[k] + f[k] = \Sigma[k+1] = \sum_{m=0}^k f[m].$$

Із вказаного вище випливає, що аналогом диференціальних рівнянь є різницеві рівняння (рівняння в скінченних різницях). Неоднорідні лінійні різницеві рівняння при використанні прямих різниць мають вигляд:

$$b_0 \Delta^m y[k] + b_1 \Delta^{m-1} y[k] + \dots + b_m \Delta y[k] = f[k], \quad (2.14)$$

де $f[k]$ – задана, а $y[k]$ – шукана решітчаста функція.

Враховуючи (2.12) і (2.13), рівняння (2.14) може бути задане в наступному вигляді:

$$a_0 y[k+m] + a_1 y[k+m-1] + \dots + a_m y[k] = f[k] \quad (2.15)$$

де

$$a_i = \sum_{\gamma=0}^i (-1)^{i-\gamma} b_\gamma C_{m-\gamma}^{i-\gamma},$$

$$C_{m-\gamma}^{i-\gamma} = \frac{(m-\gamma)!}{(i-\gamma)!(m-i)!}.$$

При використанні обернених різниць:

$$b_0 \nabla^m y[k] + b_1 \nabla^{m-1} y[k] + \dots + b_m y[k] = f[k]$$

або

$$a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_m y[k-m] = f[k], \quad (2.16)$$

$$\text{де } a_{m-i} = \sum_{\gamma=0}^i (-1)^{m-i} b_{\gamma} C_{m-\gamma}^{i-\gamma}.$$

Різницеві рівняння можна розглядати як рекурентні співвідношення, що дозволяють обчислювати значення $y[k+m]$ при $k=0, 1, 2, \dots$ для заданих початкових значень $y[0], y[1], \dots, y[m-1]$ і рівняння (2.16). Такі рівняння просто реалізуються на комп'ютері навіть при змінних коефіцієнта a_i – і в цьому їх велика перевага перед неперервними аналогами.

Загальні рішення однорідного різницевого рівняння для некратних коренів характеристичного рівняння $\lambda_i (i=1, m)$

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

має вигляд

$$y[k] = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + \dots + C_m \lambda_m^k, \quad (2.17)$$

де C_i – довільні константи. З (2.17) випливає умова того, що вільний рух системи (2.15) буде затухаючим (умова *стійкості*): $|\lambda_i| < 1, i=1, m$.

Для дослідження розв'язків різницевих рівнянь широко використовується дискретне перетворення Лапласа і частотні методи.

Питання до самоконтролю

1. Схеми періодичного квантування і закони управління ними.
2. Математична модель квантувача.
3. Імпульсний модулятор. Математична модель.
4. Визначення решітчастої функції.
5. Математичний опис решітчастої функції.
6. Різницеві рівняння і методи їх рішення.

3. ТЕОРІЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

3.1. Визначення z-перетворення

Одним з математичних методів аналізу і проектування цифрових систем управління є z-перетворення. Цей метод є аналогом перетворення Лапласа для неперервних систем управління. Процедура знаходження z-перетворення неперервної функції включає наступні три етапи.

1. Визначення $f^*(t)$ як вихідного сигналу ідеального квантувача для вхідної функції $f(t)$.

2. Визначення перетворення Лапласа $f^*(t)$

$$F^*(s) = L[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}.$$

3. Заміна e^{Ts} на z у виразах для $F^*(s)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}. \quad (3.1)$$

Незручність виразу (3.1) полягає в тому, що він є нескінченним рядом, а не еквівалентною функцією в компактній формі. Щоб виразити $F(z)$ в компактній формі, ряд (3.1) повинен збігатися.

Якщо вхідну функцію $f(t)$ представити у вигляді перетворення Лапласа

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, то можна використовувати формулу:

$$F(z) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \cdot \frac{1}{1 - e^{\lambda_n T} \cdot z^{-1}}. \quad (3.2)$$

або за скінченної кількості простих полюсів $F(s)$

$$F(z) = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(-1)^{m_n-i} K_{ni}}{(m_n-i)!} \left[\frac{d^{m_n-i}}{ds^{m_n-i}} \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \right] \Big|_{s=s_n} \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3.3)$$

де $K_{ni} = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} (s - s_n)^{m_n} F(s) \right] \Big|_{s=s_n}$, при кратних полюсах $s_1 \dots s_k$ з кратністю

$m_1 \dots m_k$.

Приклад 3.1.

Знайти z -перетворення функції $f(t) = e^{-at}$, де a – дійсне постійне число.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \quad (3.4)$$

Нескінченний ряд збігається для всіх значень z , які задовольняють умові: $|e^{-aT} z^{-1}| < 1$.

Для отримання виразу в компактній формі помножимо обидві частини рівняння (3.4) на $e^{-aT} z^{-1}$ і віднімемо результат від того ж рівняння $F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$.

За другим варіантом перетворення Лапласа від e^{-aT}

$$F(s) = \frac{1}{s + a}.$$

Ця функція має простий полюс $s = -a$. $N(s) = 1$, $D(s) = s + a$, $D'(s) = 1$, маємо

$$F(z) = \frac{N(\lambda_1)}{D(\lambda_1)} \frac{1}{1 - e^{\lambda_1 T} z^{-1}} \Big|_{\lambda_1 = -a} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3.5)$$

Для практичного використання знаходження z -перетворень для деяких функцій, що часто зустрічаються, наведено в літературі як таблиці z -перетворень. Істотно допоможуть визначати z -перетворення функцій деякі правила.

1. Додавання і віднімання.

$$\mathfrak{Z}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z). \quad (3.6)$$

2. Множення на константу.

$$\mathfrak{Z}[af(t)] = aF[z]. \quad (3.7)$$

3. Зсув у часовій області.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}[f(t - nT)] &= z^{-n} F(z) \\ \mathfrak{Z}[f(t + nT)] &= z^n [F(z) - \sum f(kT)z^{-k}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

де n – додатнє ціле число.

4. Множення оригіналу на експоненту (зміщення в області зображення)

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}[e^{\pm at} f(t)] &= F(z^{\pm aT}) \\ a &= \text{const} \end{aligned} \quad (3.9)$$

5. Початкове значення.

Якщо існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$, то $\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ (значення

дискретного сигналу $f^*(t)$ при $t = 0$ задається значенням $F(z)$ при $z \rightarrow \infty$).

6. Кінцеве значення .

Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення $F(z)$ і якщо функція $(1 - z^{-1})F(z)$ не має полюсів на колі одиничного радіусу $|z| = 1$ або поза нього на z -площині, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z). \quad (3.10)$$

7. Теорема диференціювання.

Нехай z -перетворення функції $f(t, a) \in F(z, a)$, де a – незалежна змінна або константа. Тоді z -перетворення частинної похідної функції $f(t, a)$ по a має вигляд

$$\Im \left[\frac{\partial}{\partial a} [f(t, a)] \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a). \quad (3.11)$$

8. Згортка в часовій області.

Якщо функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають z -перетворення $F_1(z)$ і $F_2(z)$ відповідно і

$f_1(t) = f_2(t) = 0$ для $t < 0$, то

$$F_1(z)F_2(z) = \Im \left[\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT - nT) \right]. \quad (3.12)$$

9. Згортка в області зображення.

Якщо z -перетворення $f_1(t)$ і $f_2(t)$ відповідно дорівнюють $F_1(z)$ і $F_2(z)$, то z -перетворення добутку цих функцій

$$\Im [f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)F_2(\xi^{-1})}{\xi} d\xi, \quad (3.13)$$

де Γ – окіл, який лежить в кільцевій області і визначається виразами

$$\sigma_1 < |\xi| < \frac{|z|}{\sigma_2}$$
$$|z| > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2),$$

де σ_1 і σ_2 – радіуси збіжності $F_1(\xi)$ та $F_2(\xi)$.

Приклад 3.2.

Застосуємо теорему про згортку в області зображень для z -перетворення функції $f(t) = te^{-at}$.

Нехай $f_1(t) = t$ і $f_2(t) = e^{-at}$, тоді

$$F_1(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1 = \sigma_1,$$

$$F_2(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad |z| > e^{-aT} = \sigma_2.$$

Підставляючи ці вирази в початкову формулу

$$\Im[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)F_2(\xi^{-1})}{\xi} d\xi, \quad (3.15)$$

де Γ – окіл, що належить кільцю

$$1 < |\xi| < \frac{|z|}{e^{-aT}} = |z|e^{aT}, \quad |z| > 1. \quad (3.16)$$

Звідси, контур інтегрування включає в себе тільки ті полюси підінтегральної функції, які відповідають $\xi = 1$. Застосовуючи теорему про залишки, маємо:

$$\zeta[f_1(t)f_2(t)] = \text{Res} \frac{Tz\xi^{-1}}{(\xi-1)^2(z\xi^{-1}-e^{-aT})} \Big|_{\xi=1} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{Tz\xi^{-1}}{(z\xi^{-1}-e^{-aT})} \right] \Big|_{\xi=1} = \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} \quad (3.17)$$

3.2. Модифіковане z-перетворення

Метод передбачає введення в дискретну систему фіктивної часової затримки. Модифіковане z-перетворення функції $c(t)$ будемо позначати

$$c(t) = \Im_m[c(t)] = C(z, m), \quad (3.18)$$

причому на практиці $C(z, m)$ визначають також як z-перетворення функції з запізненням $c(t - \Delta T)$, де $0 \leq \Delta < 1$ і $0 \leq m < 1$, тобто

$$C(z, m) = \Im[c(t - \Delta T)] = \Im[c(t - T + mT)]. \quad (3.19)$$

Останній вираз можна записати як нескінченний ряд

$$C(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c[(k+m)T] z^{-k}. \quad (3.20)$$

Значення сигналу між моментами квантування визначають з $C(z, m)$ при зміні значення m або Δ від нуля до одиниці. Очевидно, що при $\Delta = 0$ – це звичайне z-перетворення, яке однозначно справджується тільки при $c(0) =$

0. Відзначимо також, що якщо для сигналу $c(t)$ існує перетворення Лапласа $C(s)$, то можна використовувати формулу:

$$C(z, m) = z^{-1} \operatorname{Res} C(\xi) \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \text{ в полюсах } C(\xi).$$

Таблиці модифікованого z -перетворення можна знайти у довідниках.

Приклад 3.3.

Розглянемо часову функцію $C(t) = e^{-at} (t \geq 0)$, де a – константа.

$$C(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a(k+m)T} z^{-k}. \quad (3.21)$$

Нескінченний ряд може бути представлений в скінченній компактній формі

$$C(z, m) = \frac{e^{-maT}}{z - e^{-aT}}. \quad (3.22)$$

Оскільки $C(0) \neq 0$, то $C(z, 1) \neq C(z)$. Так як для $C(t)$ існує перетворення Лапласа, застосовуємо теорему залишків

$$C(z, m) = z^{-1} \left[\operatorname{Res} \frac{1}{s+a} \cdot \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \right]_{\xi=-a} = z^{-1} \cdot \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \Big|_{\xi=-a} = \frac{e^{-maT}}{z - e^{-aT}} \quad (3.2)$$

3)

3.3. Зворотне z -перетворення

Зворотне z -перетворення позначається як

$$f(kT) = \mathfrak{Z}^{-1} [z^{-1} F_1(z)] = f_1[(k-1)T], \quad (3.24)$$

$$\text{де } F_1(z) = zF(z) = \frac{Az}{z+a} + \frac{Bz}{z+b} + \dots$$

Зворотне z -перетворення є неоднозначним. У загальному випадку для зворотнього z -перетворення можна використовувати один з 3-х методів:

1. Метод розкладання на прості дроби.

Цей метод при незначній модифікації цей метод відповідає методу розкладання на прості дроби в перетворенні Лапласа. Розкладення $F(z)$ в цьому випадку дає можливість знайти дискретну часову функцію у вигляді:

$$f(kT) = \mathfrak{I}^{-1}[z^{-1}F_1(z)] = f_1[(k-1)T], \quad (3.25)$$

$$\text{де } F_1(z) = zF(z) = \frac{Az}{z+a} + \frac{Bz}{z+b} + \dots$$

Приклад 3.4.

$$\text{Дано } z\text{-перетворення } F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})},$$

де T – період квантування, a – константа. Необхідно методом розкладання на прості дроби знайти більш простіший вираз, а також дискретну часову функцію.

$$\text{Запишемо } \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-aT}}, \quad \text{звідки } \quad \text{шуканий } \quad \text{результат}$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Крім того, із таблиці z -перетворення відомо, що $f(kT) = 1 - e^{-akT}$ і тоді дискретна часова функція буде мати вигляд:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT}) \delta(t - kT).$$

2. Метод розкладання в степеневий ряд.

$$\text{Із } F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \text{ випливає, що зворотне } z\text{-перетворення може бути}$$

визначено розкладанням її в нескінченний ряд

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots$$

Тут коефіцієнти ряду відповідають значенням $f(t)$ в моменти квантування.

Приклад 3.5.

Визначити зворотне z -перетворення функції

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}. \quad (3.26)$$

Послідовне ділення чисельника на знаменник дає

$$F(z) = (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + \dots \quad (3.27)$$

Звідси, згідно виразу $f(kT) = 1 - e^{-akT}$ ($k=0,1,2,\dots$), маємо також

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT}) \delta(t - kT). \quad (3.28)$$

3. Метод з використанням формули обернення.

Можна показати, що для зворотного z -перетворення існує аналогічний до s -перетворення вираз

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{-k} dz, \quad (3.29)$$

де Γ – замкнений контур (зазвичай, коло) на z -площині, включаючи всі особливі точки (рис.3.1).

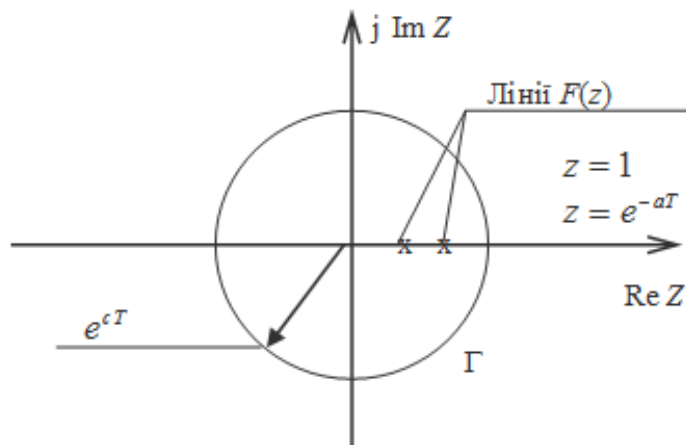


Рис.3.1. Контури інтегрування на s - та z -площинах

Тут лінія інтегрування (із Лапласа) $s = c - j\frac{\omega_s}{2}$ до $s = c + j\frac{\omega_s}{2}$ перетворюється в окіл $|z| = e^{cT}$, в якому лежать всі особливі точки (рис.3.1).

Приклад 3.6.

Визначити зворотне z -перетворення від функції попереднього прикладу, тобто визначити

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})} z^{k-1} dz.$$

Цей інтеграл визначається, як

$$f(kT) = \sum \text{Res} F(z) z^{k-1}$$

в полюсах $F(z)$, тобто

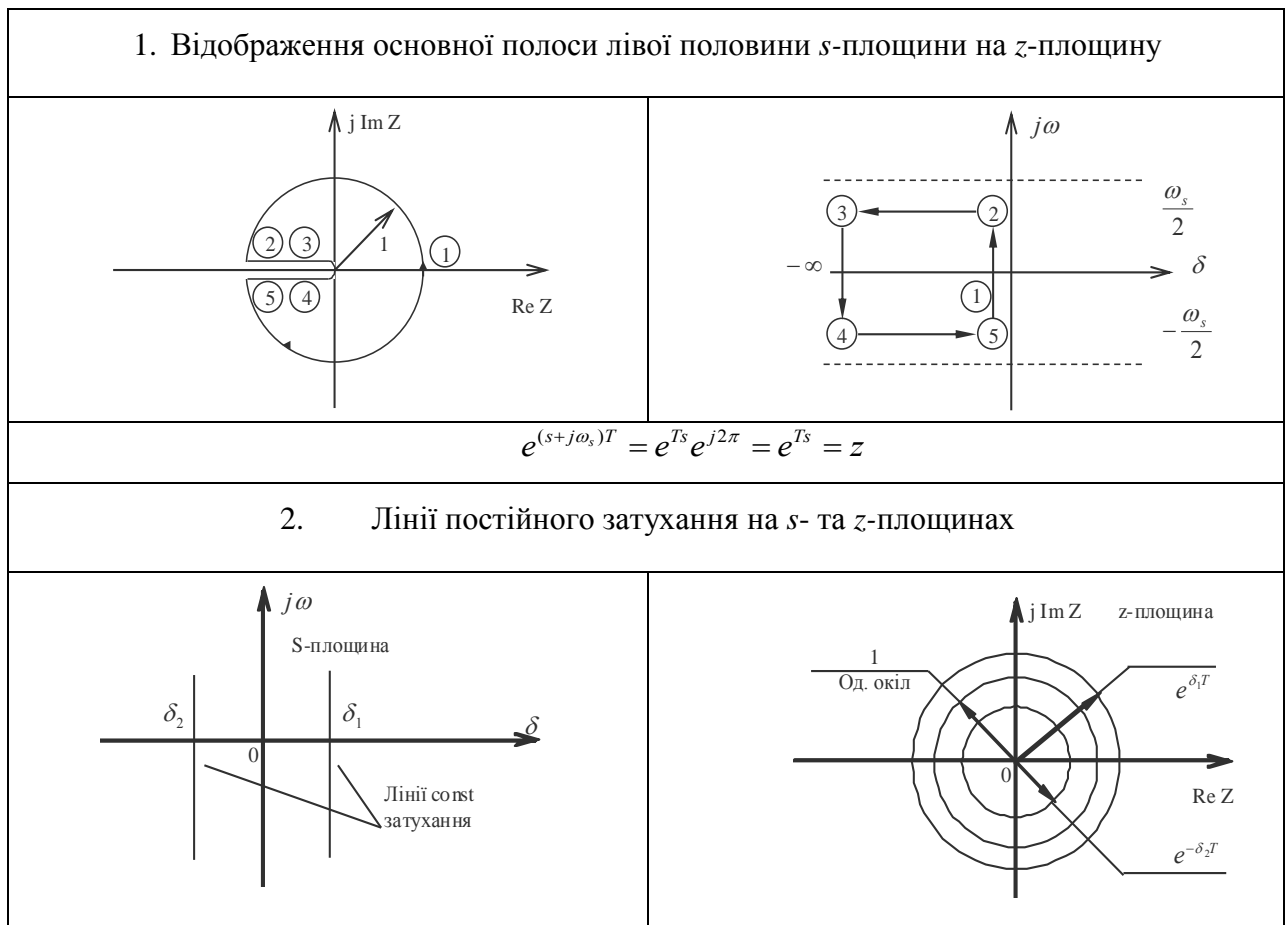
$$f(kT) = \sum \operatorname{Res} s \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})} z^{k-1} \Big|_{\substack{z=1 \\ z=e^{-aT}}} = 1 - e^{-akT}, \quad (3.30)$$

де $z = e^{Ts}$.

3.4. Відповідність між s- та z-площинами

Проектування неперервних систем управління часто базується на аналізі розташування нулів та полюсів передавальної функції системи на s-площині. Так само і полюси та нулі на z-площині визначають реакцію системи в моменти перемикання. Тому відповідність між s- та z-площинами є досить важливим питанням. Для визначення координат на z-площині будь-якої точки s-площини треба скористатися формулою $z = e^{Ts}$, де T – період квантування.

На рис. 3.3 наведено відображення на z-площині деяких кривих, що часто застосовуються, на s- площині.



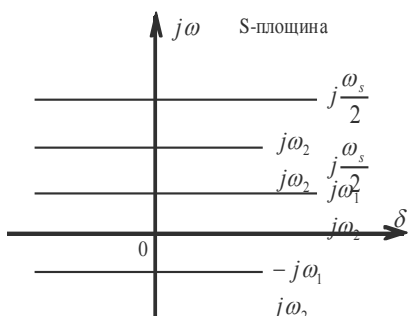
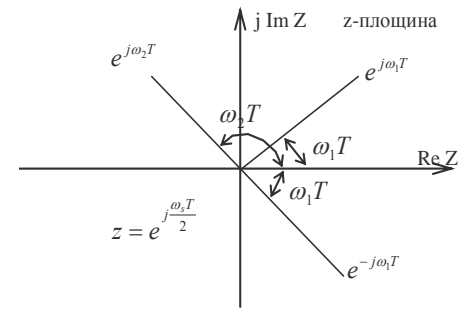
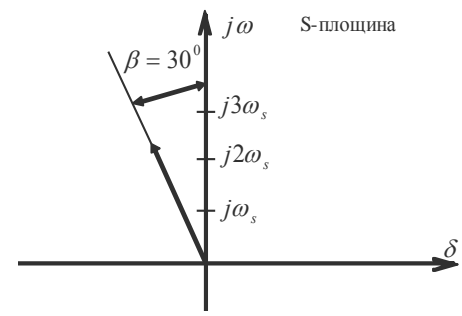
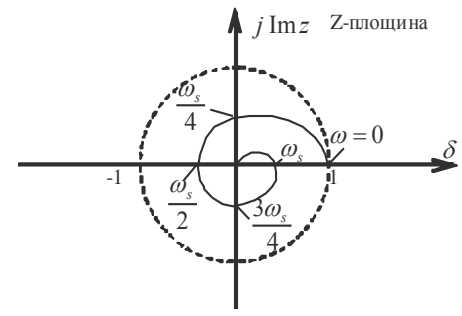
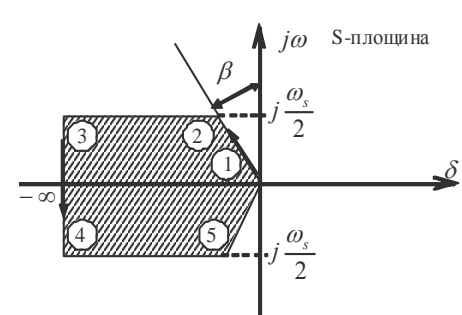
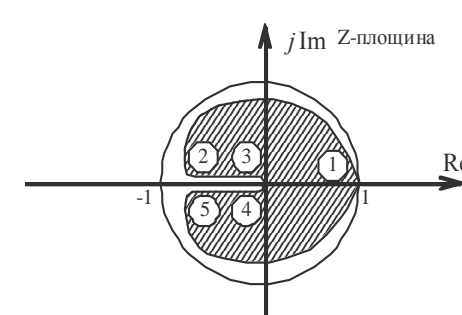
3. Лінії постійної частоти s- та z-площинах	
	
$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$	
4. Лінії постійного коефіцієнта затухання s- та z-площинах	
<p>Описуються виразом $s = -\omega \cdot \operatorname{tg} \beta + j\omega$</p> <p>$z = e^{Ts} = \exp(-2\pi\omega \cdot \operatorname{tg} \beta / \omega_s) \exp(j2\pi\omega / \omega_s)$, де $\beta = \arcsin(\xi) = \text{const}$</p>	
	
5. Лінії постійного коефіцієнта затухання s- та z-площинах	
<p>Описуються виразом $s = -\omega \cdot \operatorname{tg} \beta + j\omega$</p> <p>$z = e^{Ts} = \exp(-2\pi\omega \cdot \operatorname{tg} \beta / \omega_s) \exp(j2\pi\omega / \omega_s)$, де $\beta = \arcsin(\xi) = \text{const}$</p>	
	

Рис.3.2. Відповідність між z-площиною та s-площиною

3.5. Обмеження методу z-перетворення

Метод z-перетворення є зручним засобом дослідження лінійних цифрових систем управління. Однак він має ряд властивостей, які слід враховувати при його застосуванні та інтерпретації отриманих результатів.

1. z-перетворення базується на припущенні, що квантований сигнал це послідовність імпульсів, площа яких дорівнює амплітуді вхідного сигналу квантувача в дискретні моменти часу. Це припущення справедливе тільки в тому випадку, якщо час квантування набагато менше визначаючої постійної часу системи .
2. Для заданої функції $F(z)$ її зворотне z-перетворення $F(kT)$ описує $f(t)$ лише в моменти квантування $t = kT$.
3. При аналізі лінійної системи методами z-перетворення передавальна функція неперервної системи $G(s)$ повинна мати полюсів, принаймні, на один більше, ніж нулів. Еквівалентною вимогою є відсутність розриву імпульсної перехідної функції для $G(s)$ при $t = 0$.

Питання до самоконтролю

1. Визначення z-перетворення.
2. Основні правила z-перетворення.
3. Модифіковане z-перетворення.
4. Зворотне z-перетворення.
5. Методи реалізації зворотного z-перетворення.
6. Відповідність між s- і z-перетвореннями.
7. Обмеження на використання z-перетворення.

4. ФІКСАТОР НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Будь-який сигнал $f(t)$ можна апроксимувати розкладанням в ряд на інтервалі між моментами вибірки kT и $(k+1)T$

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t - kT)^2 + \dots, \quad (4.1)$$

де $f_k(t) = f(t)$, $kT \leq t < (k+1)T$.

$$f'(kT) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT}; \quad f''(kT) = \left. \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \dots \quad (4.2)$$

$$\text{Причому } f'(kT) = \frac{1}{T} [f(kT) - f[(k-1)T]].$$

Цей процес можна розглядати як процес екстраполяції, оскільки неперервний сигнал повинен відновлюватись на основі інформації, доступної тільки в попередні моменти вибірки.

На практиці для простоти часто використовують пристрій, в якому враховано тільки перший член ряду $f(kT)$, який називають екстраполятором (фіксатором) нульового порядку (ФНП). Назва обумовлена тим, екстраполятором фіксує значення попередньої вибірки протягом вказаного періоду квантування до наступної вибірки. Фіксатор цього типу використовується для моделювання фіксації в пристроях вибірки та зберігання. Значення $f_k(t) = f(kT)$ – є імпульсною перехідною функцією фіксатора нульового порядку, вхідний і вихідний сигнали якого показані на рис.4.1.

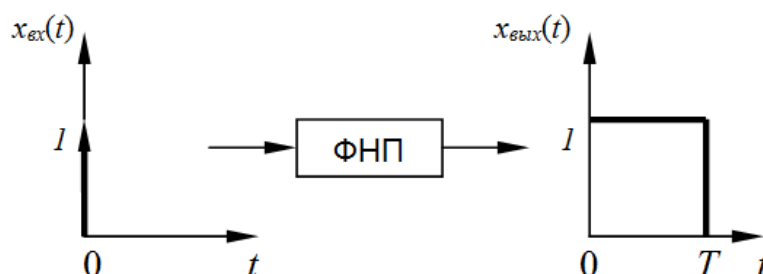


Рис. 4.1. Одиночний імпульс на вході ФНП і його вихідна реакція

Робота квантувача і ФНП ілюструється рис. 4.2.

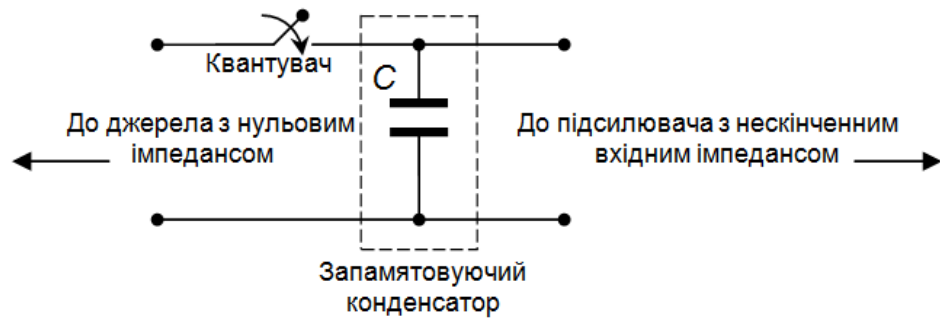


Рис.4.2. Спрощена схема квантувача і ФНП

Таким чином, ФНП перетворює вхідні імпульси в послідовність прямокутних імпульсів тривалістю T . Припускається, що конденсатор C заряджається миттєво до напруги $f(kT)$ в момент вибірки $t = kT$ ($T_{зар} = RC$). На рис. 4.3 зображено вхідний $f(t)$ та квантований $f^*(t)$ сигнали (а), а також вихідний сигнал ФНП (б).

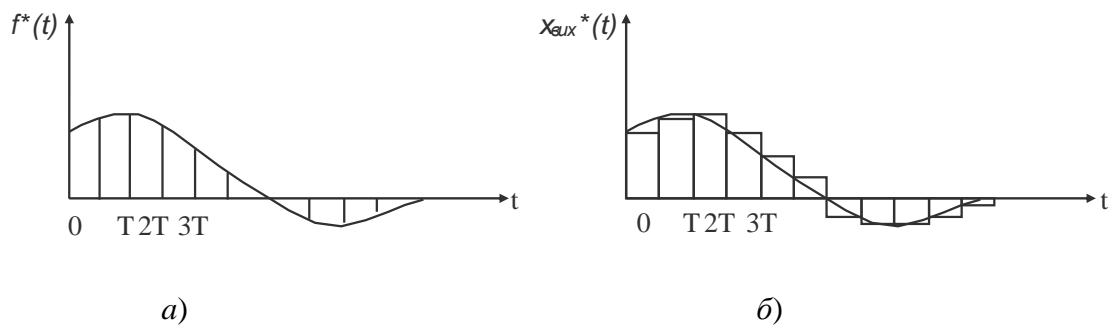


Рис.4.3. Процеси у ФНП

Реакцію ФНП на імпульсний вплив можна записати як:

$$g_{h_0}(t) = u_s(t) - u_s(t - T),$$

де $u_s(t)$ – одинична ступінчата функція.

Тоді передавальна функція ФНП:

$$G_{h_0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (4.5)$$

Замінивши $s = j\omega$, отримаємо

$$G_{h_0}(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin(\frac{\pi\omega}{\omega_s})}{(\frac{\omega\pi}{\omega_s})} e^{-j\pi(\frac{\omega}{\omega_s})}. \quad (4.6)$$

Амплітудна і фазова характеристики ФНП наведені на рис. 4.4.

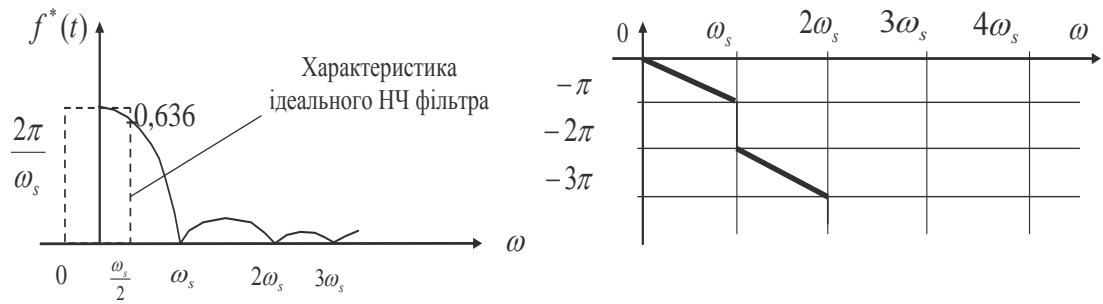


Рис. 4.4. АЧХ та ФЧХ для ФНП

z -перетворення $G_{h_0}(s)$ – це

$$G_{h_0}(z) = \mathfrak{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right] = (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = (1-z^{-1})\frac{z}{z-1} = 1. \quad (4.7)$$

Якщо за ФНП слідує неперервна частина системи (рис.4.5), то

$$c(z) = G_1(z)R(z), \text{ де } G_1(z) = \mathfrak{Z}[G_{h_0}(s)G(s)] \quad (4.8)$$

$$G_1(z) = \mathfrak{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right] = (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]. \quad (4.9)$$

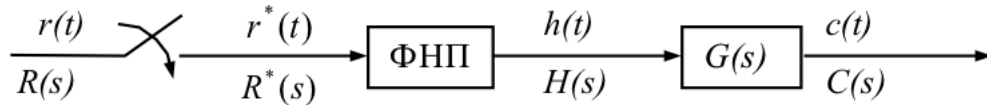


Рис.4.5. Структурна схема ФНП

Теоретично при нескінченному зростанні частоти квантування імпульсна система прагне до відповідної неперервної системи. Однак це не означає, що для заданого перетворення

$$\mathfrak{Z}[G(s)] = G(z), \quad (4.10)$$

впливає $\lim_{T \rightarrow 0} G(z) = G(s)$.

Оскільки z -перетворення базується на амплітудно-імпульсній модуляції неперервного сигналу з періодом квантування T , то спрямування T до нуля не має фізичного змісту, тобто навіть при ідеальному квантувачі $r^*(t)$ і $r(t)$ не збігаються. Однак, якщо дискретний сигнал $r^*(t)$ надходить на вхід ФНП, вихід якого є $h(t)$, то

$$\lim_{T \rightarrow 0} h(t) = r(t), \quad (4.11)$$

вихідний сигнал останнього збігається з $r(t)$ при прямуванні періоду квантування до нуля.

Питання до самоконтролю

1. Фіксатор нульового порядку (ФНП).
Призначення.
2. Спрощена схема кантувача і ФНП. Перехідні характеристики.
3. Передавальна функція ФНП.
4. Структурна схема ФНП.

5. ІМПУЛЬСНІ ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Розглянемо випадок, коли дискретний сигнал надходить на вхід лінійної системи. Для лінійної розімкнутої системи з неперервним сигналом $r(t)$ на вході співвідношення вхід-вихід описується передавальною функцією

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}. \quad (5.1)$$

Якщо тепер на вхід цієї ж системи прикласти квантований сигнал, то перетворення Лапласа для вихідного сигналу системи можна записати так, як показано рис.5.1, де $R^*(s)$ – перетворення Лапласа дискретного сигналу.

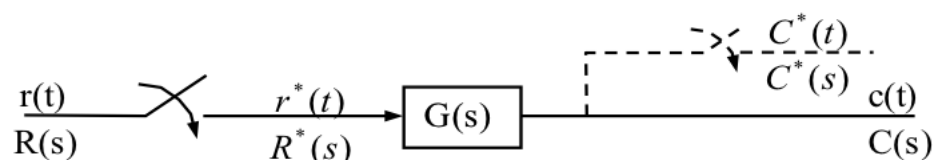


Рис.5.1 Перетворення Лапласа для вихідного сигналу.

Слід зауважити, що вихідний сигнал може бути неперервним, але в термінах z -перетворення він визначається тільки в моменти квантування.

$$C(s) = R^*(s)G(s), \quad (5.2)$$

Наше завдання – знайти спосіб опису цифрової системи в термінах z -перетворень $C(z)$, $R(z)$, $G(z)$. Оскільки послідовність одиничних імпульсів є періодичною функцією з періодом T , то вона може бути представлена у вигляді ряду Фур'є:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}. \quad (5.3)$$

Із виразу

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega_s)G(s + jn\omega_s) = R^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) = R^*(s)G^*(s),$$

переходячи до змінної z ($z = e^{Ts}$), отримаємо

$$C(z)=G(z)R(z). \quad (5.4)$$

Цей вираз можна отримати через

$$C^*(t) = g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\delta(t-kT), \quad (5.5)$$

де $g(kT)$ – імпульсна послідовність системи при $k=0, 1, 2, 3 \dots$

Якщо прикласти дискретний сигнал $r^*(t)$, то

$$C(t) = r(0)g(t) + r(T)g(t-T) + \dots \quad (5.6)$$

при $t=kT$.

$$C(kT) = \sum_{n=0}^k r(nT)g(kT-nT) \quad (5.7)$$

Беручи z -перетворення

$$C(z) = R(z)G(z), \quad (5.8)$$

де $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}$ – імпульсна передавальна функція лінійної системи.

Якщо дві послідовні ланки розділені ідентичними квантувачами, то

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)R(z). \quad (5.9)$$

Якщо ці ланки не розділені квантувачами, то

$$C(z) = G_1G_2R(z). \quad (5.10)$$

Передавальна функція замкнутої системи із зворотнім зв'язком (рис.5.2) має вигляд:

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z). \quad (5.11)$$

Зазначимо, що якщо є реальний фіксатор, то, як було показано вище, необхідно розглянути

$$G_1(z) = \mathfrak{Z}[G_{h_0}(s)G(s)] \quad (5.12)$$

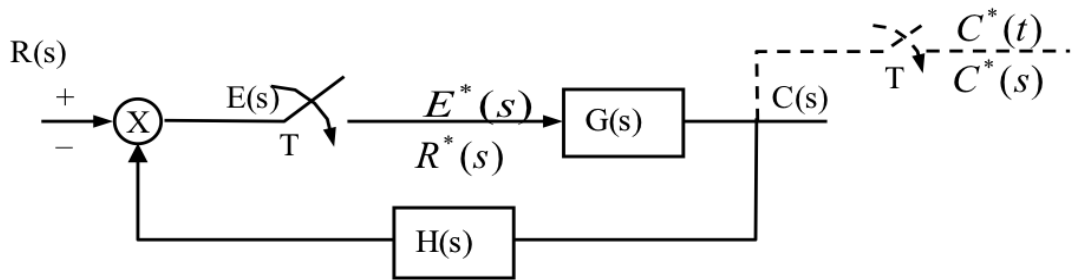


Рис.5.2. Передавальна функція замкнутої системи

За наявності в прямому каналі часового запізнювання, залежно від величини запізнювання використовуються або загальні формули ($\tau > T$), або модифіковане z -перетворення ($\tau < T$).

Як і в неперервних системах, для визначення передавальних функцій системи управління зі складною структурою можна використати метод дискретних графів, в якому всі вузлові змінні мають дискретні значення, або метод прямого графа, де вводяться «білі» вузли для неперервних змінних і «чорні» вузли для дискретних.

Питання до самоконтролю

1. Математичний опис імпульсної передавальної функції (ІПФ).
2. Передавальна функція замкнутої системи.
3. Вплив запізнювання на математичний опис ІПФ.

6. МЕТОД ПРОСТОРУ СТАНІВ

6.1. Рівняння стану цифрових систем управління

Цей метод має незаперечну перевагу перед традиційними методами (z-перетворенням, передавальними функціями, структурними схемами, графами і т. д.) через ряд причин, а саме.

1. Опис в просторі станів є природним і зручним для реалізації його на комп'ютері.
2. Дозволяє уніфікувати опис цифрових систем з різними типами квантування.
3. Дозволяє уніфікувати опис одновимірних і багатовимірних систем.
4. Може застосовуватися до деяких типів нелінійних і нестационарних систем.

У просторі станів неперервна система описується системою диференціальних рівнянь першого порядку, інакше кажучи *рівняннями станів*. Для цифрових систем, що містять тільки дискретні елементи, рівняння стану – *різницеві рівняння першого порядку*.

Описують на відміну від неперервних систем

$$\bar{x} = \theta(t, t_0)\bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \theta(t, \tau)B(\tau)\bar{u}(kT)d\tau, \quad (6.1)$$

де $t_0 = kT$ и $kT \leq t \leq (k+1)T$, дискретні стани системи можна отримати, приймаючи $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

$$\bar{x}[(k+1)T] = \theta[(k+1)T, kT]\bar{x}(kT) + \theta[(k+1)T, kT]\bar{u}(kT),$$

де

$$\theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \theta[(k+1)T, \tau]B(\tau)d\tau. \quad (6.2)$$

Слід зазначити, що, хоча $u_i(kT)$ є постійною величиною тільки на інтервалі від kT до $(k+1)T$ розв'язок (6.1) справедливий для всього інтервалу

квантування, включаючи $t = (k+1)T$ оскільки $x(t)$ є неперервна функція стосовно часу t .

Вираз (6.2) є дискретним рівнянням стану цифрової системи, що описує динаміку системи тільки в моменти квантування.

Рівняння спостереження

$$\bar{C}(kT) = D(kT)\bar{x}(kT) + E(kT)\bar{u}(kT). \quad (6.3)$$

Рівняння (6.2) і (6.3) утворюють рівняння динаміки цифрової системи. Якщо нормувати період квантування ($T = 1$), то рівняння динаміки

$$\bar{x}(k+1) = \theta(k+1, k)\bar{x}(k) + \theta(k+1, k)\bar{u}(k),$$

де $\theta(k+1, k) = \int_k^{k+1} \theta(k+1, \tau) B(\tau) d\tau$

$$\bar{C}(k) = D(k)\bar{x}(k) + E(k)\bar{u}(k).$$

Для лінійної системи, що складається лише з цифрових елементів, рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A(k)\bar{x}(k) + B(k)\bar{u}(k), \\ \bar{C}(k) &= D(k)\bar{x}(k) + E(k)\bar{u}(k). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Рівняння (6.4) є загальним рівнянням стану з нестационарними дискретними значеннями коефіцієнтів. Перехідні рівняння стану відповідають динаміці загального рівняння стану.

Для рівняння (6.4) у стаціонарному випадку перехідне рівняння стану має вигляд

$$\bar{x}(N) = A^N \bar{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} B \bar{u}(k). \quad (6.5)$$

6.2. Апроксимація аналогової системи цифровою моделлю

Розглянемо нестационарну неперервну систему

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t), \\ \bar{C}(t) &= D(t)\bar{x}(t) + E(t)\bar{u}(t). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для цифрової апроксимації в моменти $t = t_k$, покладемо $t_{kn} = t_k + \Delta t_k$.
 Похідну від $\bar{x}(t)$ в момент $t = t_k$ можна наближено обчислити за наступним виразом:

$$\bar{x}(t_k) \cong \frac{1}{\Delta t_k} [\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)]. \quad (6.7)$$

Тоді рівняння стану:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_{kn}) &= [I + \Delta t_k A(t_k)] \bar{x}(t_k) + \Delta t_k B(t_k) \bar{u}(t_k), \\ \bar{C}(t_k) &= D(t_k) \bar{x}(t_k) + E(t_k) \bar{u}(t_k). \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.3. Розв'язання стаціонарного рівняння стану за допомогою z -перетворення

Візьмемо z -перетворення від обох частин рівняння (6.1)

$$zX(z) - z\bar{x}(0) = \theta(T)X(z) + \Theta(T)U(z),$$

де згідно з визначенням

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}(kT) z^{-1},$$

те ж саме стосується і $U(z)$.

Із (6.5) витікає, що

$$X(z) = [zI - \theta(T)]^{-1} z\bar{x}(0) + [zI - \theta(T)]^{-1} \Theta(T)U(z), \quad (6.9)$$

де $[zI - \theta(T)]^{-1}$ – дискретна перехідна матриця стану $\theta(kT)$. Останній член в наведеному виразі (6.9) обчислюється за допомогою теореми згортки.

Приклад 6.1.

У цьому прикладі продемонструємо аналіз розімкненої цифрової системи методом простору станів. Нехай є система рівнянь, яка описує динаміку деякого неперервного об'єкта

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$C(t) = x_1(t),$$

де $u(t)$ – вихідний сигнал ФНП, тобто $u(t) = u(kT)$;

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перехідна матриця стану для A визначається із зворотного перетворення Лапласа від $(sI - A)^{-1}$:

$$\theta(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

$$\theta(t) = \int_0^T \theta(T - \tau) B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-(T-\tau)} - e^{-2(T-\tau)} \\ -e^{-(T-\tau)} + 2e^{-2(T-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}.$$

Тепер підставимо отримані вирази в (6.2) при $T = 1c$ і отримаємо дискретне рівняння станів системи:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)] \\ x_2[(k+1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.466 & -0.097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} u(k).$$

6.4. Зв'язок рівняння стану з передавальною функцією

Припустимо, що цифрова багатовимірна система описується за допомогою z -перетворення співвідношенням

$$C(z) = G(z)U(z), \quad (6.10)$$

де

$$C(z) = \begin{bmatrix} C_1(z) \\ \vdots \\ C_q(z) \end{bmatrix}; \quad U(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_p(z) \end{bmatrix}; \quad G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \dots & G_{1p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(z) & G_{q2}(z) & \dots & G_{qp}(z) \end{bmatrix}.$$

В загальному випадку елементи матриці $G(z)$ мають вигляд

$$G_{ij}(z) = \frac{a_{n+1} + a_n z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n}}{b_{m+1} + b_m z^{-1} + \dots + b_1 z^{-m}}. \quad (6.11)$$

Динаміка цифрової системи

$$\bar{x}[(k+1)T] = A\bar{x}(kT) + B\bar{u}(kT), \quad (6.12)$$

$$\bar{C}(kT) = D\bar{x}(kT) + E\bar{u}(kT), \quad (6.13)$$

дозволяє обчислити z -перетворення від обох частин першого рівняння

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z\bar{x}(0) + (zI - A)^{-1} BU(z). \quad (6.14)$$

Підстановка (6.14) в (6.13) дає наступний вираз

$$C(z) = D(zI - A)^{-1} z\bar{x}(0) + D(zI - A)^{-1} BU(z) + EU(z). \quad (6.15)$$

Передавальна функція визначається за нульової початкової умови $\bar{x}(0)$, тому вираз спрощується

$$C(z) = D(zI - A)^{-1} BU(z) + EU(z). \quad (6.16)$$

Звідси, матрична передавальна функція системи

$$G(z) = D(zI - A)^{-1} D + E. \quad (6.17)$$

Зворотне матричне перетворення передавальної функції називається *імпульсною перехідною матрицею*.

$$g(kT) = D\theta[(k-1)T]B + E\delta(0). \quad (6.18)$$

де $\delta(0)$ – дельта-функція при $t = 0$.

Оскільки $\theta[(k-1)T] = 0$ для $k < 1$, матрицю $g(kT)$ можна записати

$$g(kT) = E, k = 0,$$

$$g(kT) = D\theta[(k-1)T]B, k \geq 1.$$

6.5. Характеристичне рівняння

Нехай лінійна одновимірна цифрова система описується різницевиими рівняннями n -го порядку

$$c(k+1) + a_n c(k+n-1) + \dots + a_2 c(k+1) + a_1 c(k) = b_{n+1} r(k+n) + b_n r(k+n-1) + \dots + b_2 r(k+1) + b_1 r(k). \quad (6.19)$$

Характеристичним рівнянням системи називається поліном n -го порядку, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами однорідного різницевого рівняння, тобто

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda + a_1 = 0. \quad (6.20)$$

Характеристичне рівняння отримується також з передавальної функції

$$G(z) = \frac{c(z)}{R(z)} = \frac{b_{n+1} z^n + b_n z^{n-1} + \dots + b_2 z + b_1}{z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_2 z + a_1}. \quad (6.21)$$

Прирівнюємо знаменник до 0, тобто

$$z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_2 z + a_1 = 0. \quad (6.22)$$

В просторі станів для системи

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \quad (6.23)$$

характеристичне рівняння

$$|zI - A| = 0. \quad (6.24)$$

Корені характеристичного рівняння називаються власними значеннями матриці A . Вектор \bar{p}_i розмірності $n \times 1$, який задовольняє матричному рівнянню

$$(\lambda_i I - A)p_i = 0, \quad (6.25)$$

де $\lambda_i, i = 1, 2 \dots n$ – власне значення матриці A , що називається власним вектором матриці A , що відповідає власному значенню λ_i .

6.6. Діагоналізація матриці системи управління

Розв'язувати рівняння стану цифрових систем було б просто, якби змінні стану були незалежними, тобто матриця A цифрової системи була діагональною

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k). \quad (6.26)$$

Нехай $y(k) = p^{-1}x(k)$, так що

$$\bar{y}(k+1) = \Lambda\bar{y}(k) + \Gamma\bar{u}(k), \quad (6.27)$$

де

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ та } \Lambda = P^{-1}AP, \quad \Gamma = P^{-1}B. \quad (6.28)$$

Для різних дійсних власних значень матриці A матриця P – це матриця Вандермонда:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Для кратних коренів використовується канонічна форма Жордана, при якій

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right| & & 0 \\ & \left| \begin{array}{ccc} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right| \end{bmatrix}.$$

Таке перетворення визначається системою рівнянь

$$\begin{aligned} (\lambda_j I - A) \bar{p}_1 &= 0, \\ (\lambda_j I - A) \bar{p}_2 &= -\bar{p}_1, \\ (\lambda_j I - A) \bar{p}_3 &= -\bar{p}_2, \\ &\dots \\ (\lambda_j I - A) \bar{p}_m &= -\bar{p}_{m-1}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.7. Методи обчислення перехідної матриці стану

Для цифрової системи виду

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k), \quad (6.31)$$

було показано, що перехідна матриця стану визначається як $\theta(N) = A^N$.

Розглянемо основні методи знаходження перехідної матриці стану.

Метод на основі теореми Келі-Гамільтона.

Теорема стверджує, що кожна квадратна матриця задовольняє своєму характеристичному рівнянню, тобто

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_{Ni} A^i, \quad (6.32)$$

для будь-якого додатного цілого числа n , де n -розмірність матриці A ; a_{Ni} – коефіцієнти характеристичного рівняння матриці A . Аналогічно, для $\theta(T)$.

Приклад 6.2.

Припустимо, що матриця системи має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння $|\lambda I - A| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$,

звідси $A^2 - 6A + 5I = 0$,

$$A^2 = 6A - 5I,$$

$$A^3 = A^2 A = A(6A - 5I) = 6A^2 - 5A = 6(6A - 5I) - 5A = 31A - 30I,$$

$$A^4 = AA^3 \dots$$

Продовжуючи обчислення можна отримати матрицю A^n для будь якого значення n .

Метод, заснований на z -перетворенні.

Для цифрової системи (6.10) перехідна матриця має вигляд:

$$\theta(N) = \zeta^{-1}[(zI - A)^{-1}z].$$

Нехай $(zI - A)^{-1} = F$, тоді легко показати по теоремі Келі-Гамільтона, що

$$F = \frac{\sum_{j=1}^n z^j \sum_{i=j}^n a_{i+1} A^{i-j}}{\sum_{i=0}^n a_{i+1} z^i}, \text{ або } F = \frac{\sum_{j=1}^n z^j \sum_{i=j}^n a_{i+1} A^{i-j}}{|zI - A|}.$$

Після обчислення F визначаємо $\theta(N) = \zeta^{-1}[F]$.

Метод власних значень (теорема розкладання Сільвестра).

Для систем з різними власними значеннями теорема стверджує, що якщо

$$f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k, \quad (6.33)$$

то

$$f(a) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) F(\lambda_i), \quad (6.34)$$

де

$$F(\lambda_i) = \sum \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i = 1, n. \quad (6.35)$$

Для обчислення перехідної матриці стану

$$f(a) = \theta(T) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{A^k T^k}{k!} = e^{AT}, \quad (6.36)$$

звідси $f(\lambda_j) = e^{\lambda_j T}$ і $\theta(T) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} F(\lambda_i)$, де $F(\lambda_i)$ по (6.35).

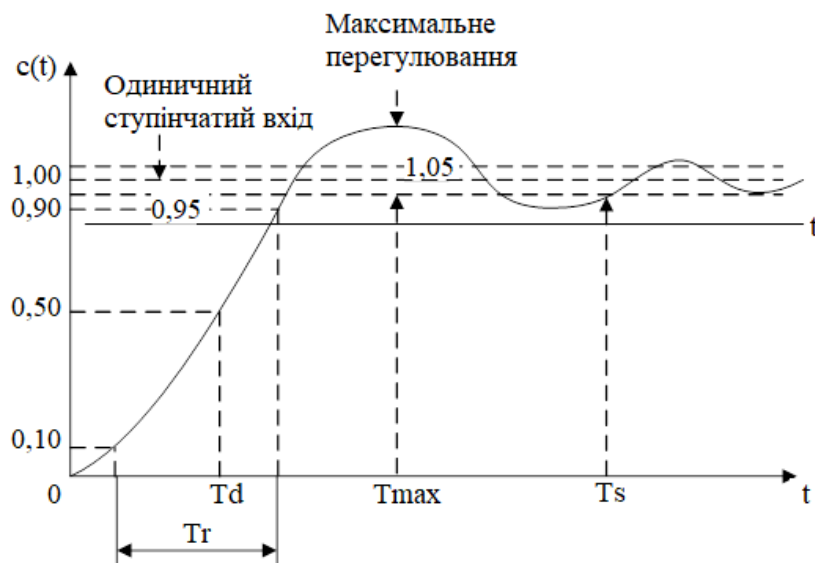
Питання до самоконтролю

1. Переваги використання методу простору станів.
2. Математичні моделі ЦСУ в просторі станів.
3. Апроксимація аналогової системи цифровою моделлю.
4. Розв'язання стаціонарного рівняння стану ЦСУ за допомогою z -перетворення.
5. Зв'язок рівняння стану з передавальною функцією.
6. Характеристичне рівняння лінійної ЦСУ.
7. Методи обчислення перехідної матриці стану лінійної ЦСУ.
8. Теорема Келі-Гамільтона.
9. Теорема Сільвестра.

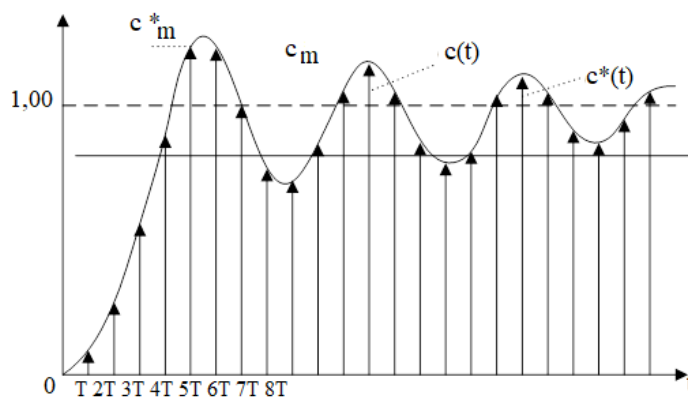
7. АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

7.1. Аналіз ЦСУ у часовій області

Якість ЦСУ в часовій області часто досліджується поданням на її вхід тестового сигналу – одиничної ступінчастої функції. Для лінійних систем це дозволяє визначити ряд характеристик системи, таких як перерегулювання, час наростання, час запізнювання, час встановлення, коливальність. Реакція системи на одиничний ступінчатий вхідний сигнал називається *перехідною функцією* $C(t)$ (рис.7.1).



а)



б)

Рис.7.1. Перехідна функція цифрової систем и управління та її дискретне зображення

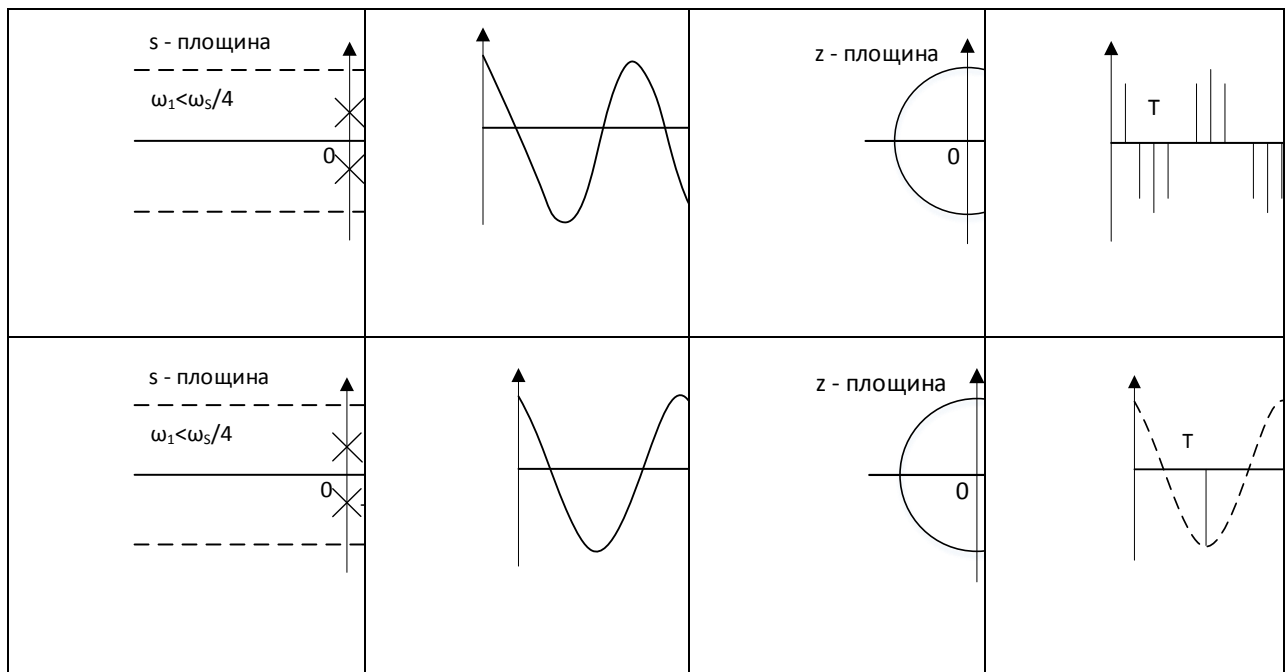
а – типова перехідна функція цифрової системи і її характеристики (T_r – час наростання, T_s – час встановлення);

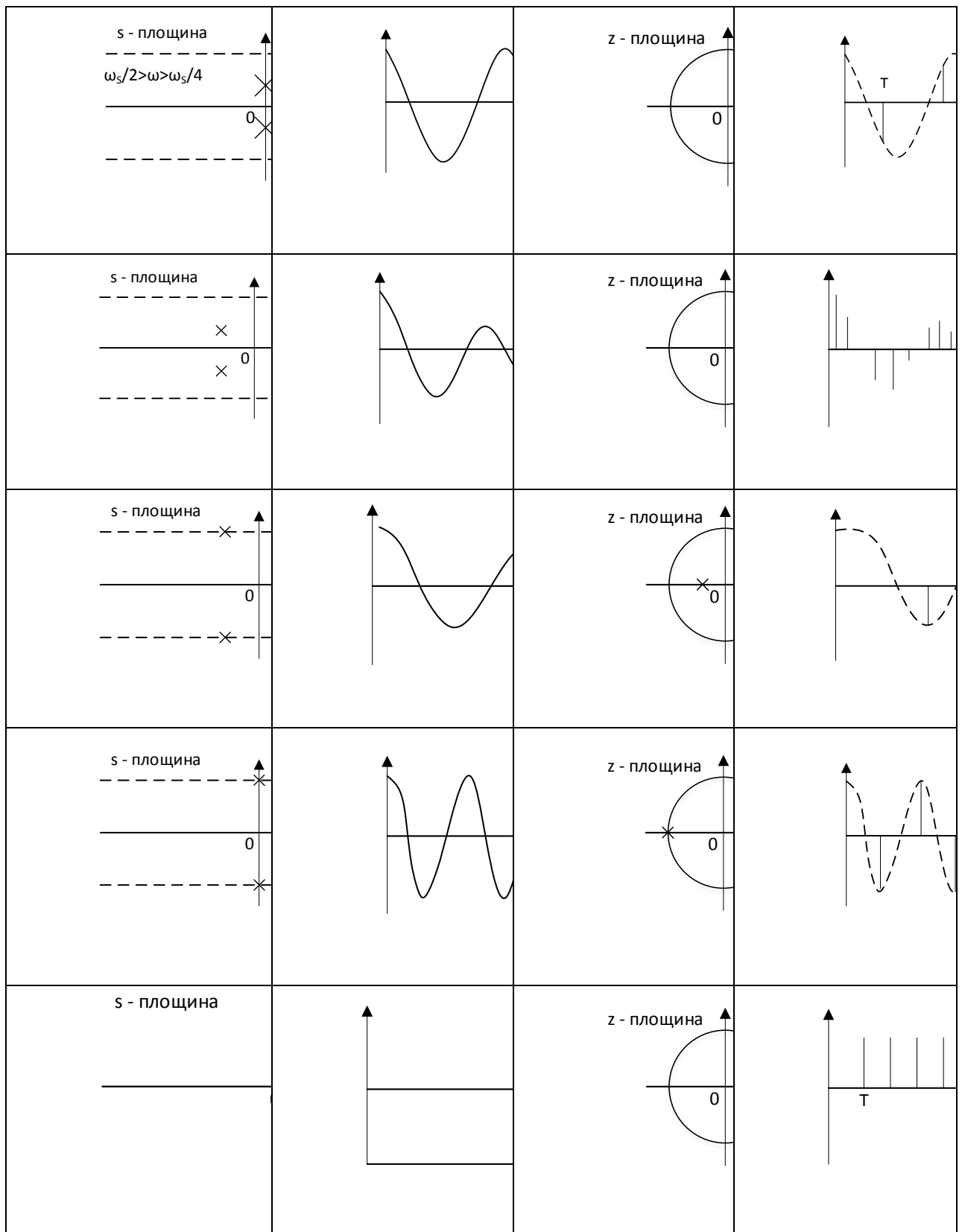
б – дискретні відліки типової перехідної функції

Слід зазначити, що хоча система є цифровою, її вихідний сигнал (реакція на вхідний сигнал) зазвичай є функцією неперервної змінної t , тому всі параметри визначаються так, як показано на рис. 7.1.

Якщо для аналізу використовується z -перетворення або рівняння стану в дискретній формі, то їх реакції задаються тільки в моменти замикання. Ці значення слід використовувати обережно, оскільки вони можуть і не бути точною реакцією цифрової системи.

Наприклад, на рис. 7.1б видно, що завжди $C_m^* \leq C_m$. Аналогічно і інші характеристики. Щоб ЦСУ була асимптотично стійкою, корені її характеристичного рівняння повинні лежати на z -площині всередині одиничного кола $|Z|=1$. Очевидно, що величина T може призвести і до нестійкості. Для систем високого порядку неможливо аналітично отримати вирази для C_m і T_{\max} . Відомо, що для опису динаміки функціонування більшості реальних технічних систем достатньо лише двох домінуючих полюсів, причому інші, як правило, знаходяться далеко зліва на s -площині та їх вплив на перехідну функцію незначний. Вплив цієї пари домінуючих коренів можна продемонструвати таким рисунками.





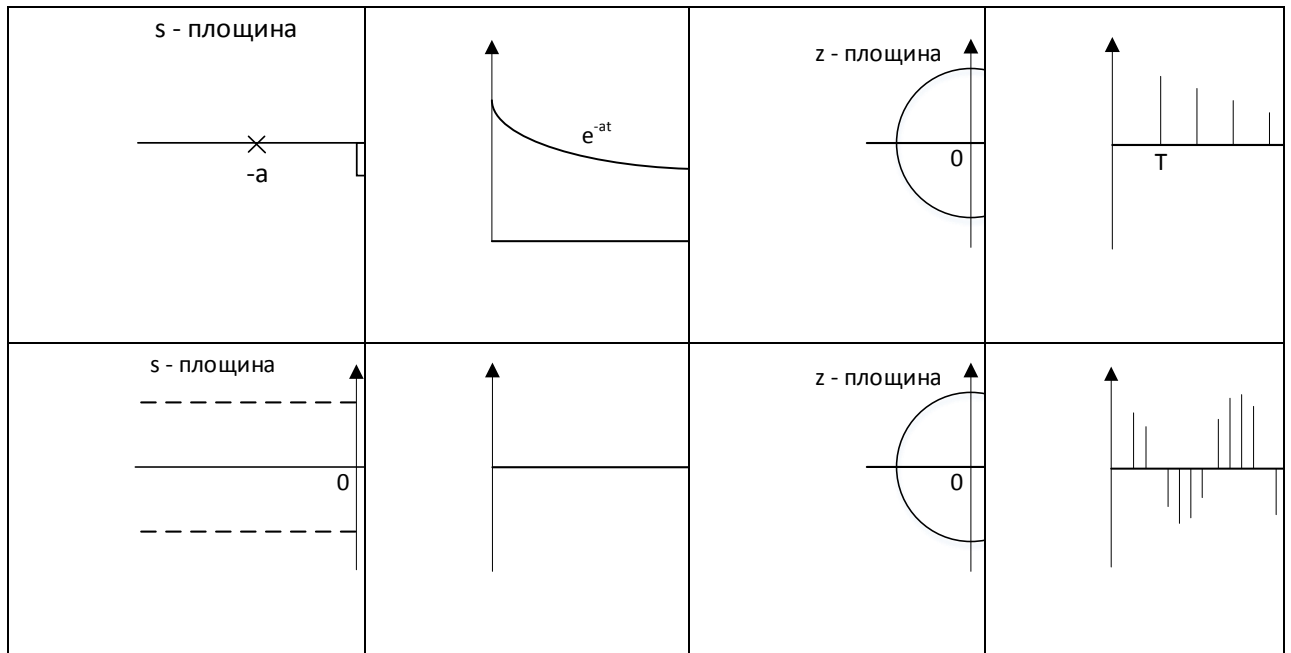


Рис. 7.2. Розташування коренів на s-та z-площинах и відповідні часові характеристики

Для аналізу абсолютної і відносної стійкості можна використовувати кореневий годограф ЦСУ, який по суті є діаграмою траєкторій коренів характеристичного рівняння як функції деякого параметра K , який змінюється від 0 до ∞ . Наприклад:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)},$$

$$G(Z) = z[G(s)] = \frac{K(1-e^{-T}) \cdot Z}{(Z-1) \cdot (Z-e^{-T})},$$

$$1 + G(Z) = (Z-1)(Z-e^{-T}) + K(1-e^{-T})Z = 0.$$

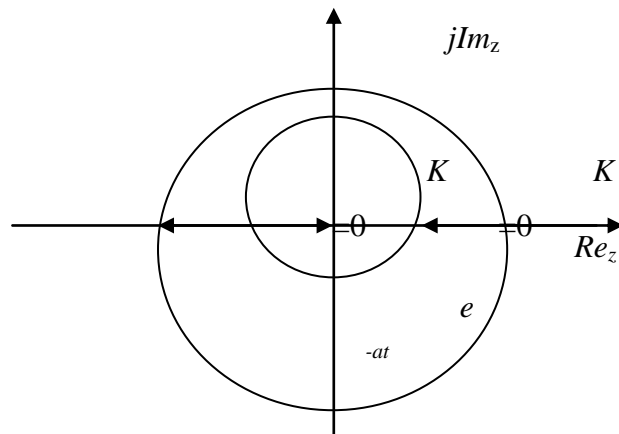


Рис. 7.2. Траєкторія коренів характеристичних рівнянь при зміні K від 0 до ∞

Одним з основних показників якості ЦСУ є значення статичної (усталеного значення) похибки, яка у загальному випадку для ЦСУ обчислюється як $e(t) = r(t) - b(t)$.

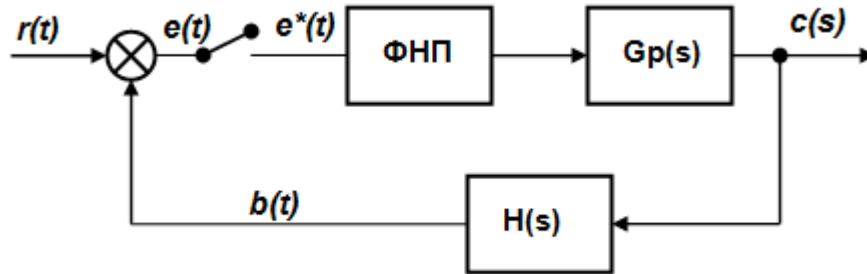


Рис.7.3. Структурна схема цифрової системи управління

Статична похибка в момент замикання

$$l_{уст}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(KT). \quad (7.1)$$

Використовуючи z --перетворення та теорему про кінцеве значення

$$l_{уст}^* = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) \cdot E(z), \quad (7.2)$$

за умови, що немає полюсів на околі $|Z| = 1$ і поза ним.

Статичну похибку між моментами замикання можна визначити за допомогою модифікованого z -перетворення

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ 0 \leq m \leq 1}} l(KT, m) = \lim_{\substack{Z \rightarrow 1 \\ 0 \leq m \leq 1}} (1 - Z^{-1}) \cdot E(Z, m). \quad (7.3)$$

Відомо, що помилка залежить від вхідного еталонного впливу і параметрів системи.

1. *Ступінчаста вхідна функція*

$$R(Z) = \frac{R_z}{Z - 1}, \quad (7.4)$$

$$l_{уст}^* = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) \cdot \frac{R(Z)}{1 + GH(Z)} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{R}{1 + GH(Z)} = \frac{R}{1 + \lim_{Z \rightarrow 1} GH(Z)}, \quad (7.5)$$

$$\text{де } GH(Z) = (1 - Z^{-1})z \left[\frac{Gp(s)H(s)}{s} \right]. \quad (7.6)$$

Визначимо коефіцієнт помилки за положенням як $Kp = \lim_{Z \rightarrow 1} GH(Z)$.

$$\text{Звідси } l_{\text{уст}}^* = \frac{R}{1 + K_p}$$

Тобто, похибка дорівнює нулю за умови $K_p \rightarrow \infty$, а це означає, що передавальна функція $GH(z)$ повинна мати хоча б один полюс $z = 1$ (астатизм першого порядку).

2. Лінійна вхідна функція

$$r(t) = RtU_3(t) \quad (7.7)$$

$$R(Z) = \frac{RTZ}{(Z-1)^2} \quad (7.8)$$

$$l_{\text{уст}}^* = \frac{R}{K_v}$$

$$l_{\text{уст}}^* = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{RT}{(Z-1) \cdot [1 + GH(Z)]} = \frac{R}{\lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z-1}{T} \cdot GH(Z)} \quad (7.9)$$

K_v – коефіцієнт похибки за швидкістю має зміст, якщо немає полюсів на колі $|Z| = 1$ і поза ним.

3. Параболічна вхідна функція

$$r(t) = \frac{RtU_3(t)}{2}, \quad (7.10)$$

$$R(Z) = \frac{RT^2 Z(Z+1)}{2 \cdot (Z-1)^3}, \quad (7.11)$$

$$l_{\text{уст}}^* = \frac{R}{K_a}$$

$$l_{\text{уст}}^* = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{R(Z+1)}{(Z-1)^2 \cdot [1 + GH(Z)]} = \frac{R}{\lim_{Z \rightarrow 1} \frac{(Z-1)^2}{T^2} \cdot GH(Z)}. \quad (7.12)$$

7.2. Аналіз в частотній області. Годограф Найквіста

На відміну від неперервних лінійних систем, де частота гармонійного сигналу на виході не змінюється, квантувач в ЦСУ (реальний або фіктивний) діє як генератор гармонік, тому реакція системи на

синусоїдальний сигнал в принципі може містити вищі гармоніки, що ускладнює побудову частотних характеристик.

Годограф Найквіста дозволяє графічно дослідити стійкість замкнутої системи (рис.7.4) за частотним годографом передавальної функції розімкнутого контуру, побудованому в полярних координатах.

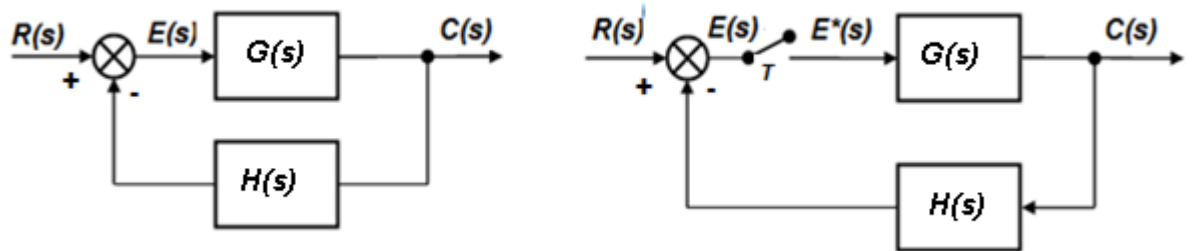


Рис.7.4. Структурні схеми неперервної та цифрової систем управління

Замкнена передавальна функція даної системи

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7.13)$$

Стійкість системи визначається нулями і полюсами функції.

Годограф Найквіста для $GH(z)$ [або $GH^*(s)$] будується в полярних координатах при зміні змінної z уздовж контуру Γ_z або змінною s уздовж контуру Γ_s . Нижче ми покажемо більш зручні методи побудови годографа Найквіста.

Критерій Найквіста вказує на те, що для стійкості замкнутої цифрової системи годограф Найквіста $GH(z)$ має охоплювати точку $(-1, j0)$ на площині $GH(z)$ [або $GH^*(s)$] стільки разів, скільки полюсів $GH(z)$ [або $GH^*(s)$] знаходиться всередині контуру Найквіста Γ_z [або Γ_s], причому охоплення повинно відбуватися за годинниковою стрілкою.

Іншими словами, $N = Z - P$, де N – кількість охоплень точки $(-1, j0)$ годографом Найквіста $GH(z)$, причому N береться зі знаком «+» при охопленні проти годинникової стрілки і зі знаком «-» при охопленні за годинниковою стрілкою; Z – кількість нулів функції $1 + GH(z)$,

розташованої на z -площині поза одиничного кола; P – кількість полюсів функції $1 + GH(z)$, поза одиничного кола, охоплених контуром Найквіста.

Щоб замкнута система була стійка, має виконуватися тотожність $Z \equiv 0$, тобто всі корені характеристичного рівняння повинні лежати всередині одиничного кола, тобто $N = (-P)$.

Якщо функція $GH(z)$ не має полюсів поза одиничного кола (тобто $P = 0$), це означає, що розімкнута система стійка і критерій Найквіста приймає найпростішу форму $N = 0$.

Якщо розімкнута система стійка і $Z = 0$, то для того, щоб замкнута система також була стійка, годограф Найквіста $GH(z)$ взагалі не повинен охоплювати точку $(-1, j0)$.

Причому в цьому випадку необхідно побудувати тільки область I ($z = e^{j\omega T}$, $0 \leq \omega \leq \infty$) годографа Найквіста. Область I будується на основі виразу:

$$GH^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(j\omega + jn\omega_s) \cdot H(j\omega + jn\omega_s), \quad (7.14)$$

де ω змінюється від 0 до $+\infty$.

Іншим способом можна побудувати годограф за виразом для $GH(z)$, замінюючи $z = e^{j\omega T}$ при ω від 0 до $+\infty$. Нижче наведемо найбільш відомі методи побудови годографа Найквіста.

7.2.1. Метод z -перетворення

При гармонічному аналізі неперервних систем у виразі для передавальної функції проводиться підстановка $s = j\omega$, тобто на s -площині розглядаються тільки точки, розташовані на додатній частині уявної осі. Для цифрових систем управління відповідний аналіз в частотній області пов'язаний в нашому випадку із заміною $z = e^{j\omega T}$, тобто на z -площині розглядаються тільки точки, розташовані на одиничному колі $|z| = 1$. Так, для заданої передавальної функції $G(z)$ має місце тотожність:

$$G(z) = G^*(s), \quad s = \frac{1}{T} \ln z.$$

Звідси

$$G(z) = G^*(s), \text{ при } z = e^{j\omega T} \text{ і } s = j\omega. \quad (7.15)$$

Приклад 7.1.

Нехай розімкнута цифрова система (рис. 7.4) має передавальну функцію

$$G(s)H(s) = \frac{1.57}{s(s+1)} \quad \text{при } \omega_s = 4 \text{ рад/с, } T = \pi/2 \text{ с.}$$

За методом z -перетворення отримаємо:

$$GH(z) = 1.57 \cdot \frac{0.792 \cdot z}{(z-1) \cdot (z-0.208)}.$$

Відповідно з (7.15) для частотного годографа отримаємо наступний вираз:

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{1.243 \cdot e^{j\omega T}}{(e^{j\omega T} - 1) \cdot (e^{j\omega T} - 0.208)} = \frac{1.243 \cdot (\cos \omega T + j \sin \omega T)}{(\cos \omega T + j \sin \omega T - 1) \cdot (\cos \omega T + j \sin \omega T - 0.208)}$$

,

графік якого зображений на рис.7.5. Годограф побудований при зміні z уздовж одиничного кола.

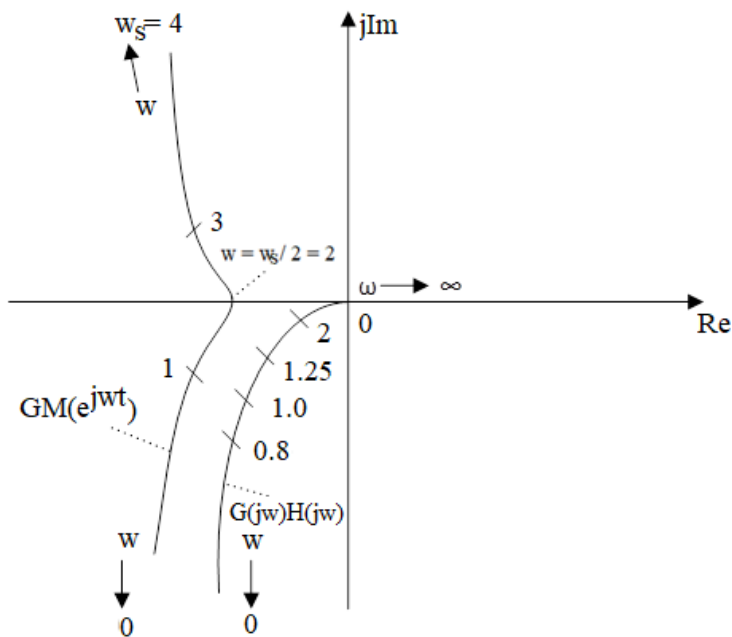


Рис.7.5. Частотні годографи для прикладу 7.1

Оскільки повному обходу по одиничному колу відповідає $(-n\omega_s/2) \leq \omega \leq (n\omega_s/2)$, де $n = 1, 2, \dots$, то в зазначених інтервалах частот годограф $GH(z)$ має один і той же вигляд. Неперервна система при такій передавальній функції завжди стійка в замкнутому стані. Для цифрової системи управління годограф $GH(z)$, при $K = 1.57$, перетинає від'ємну вісь в

точці -0,515. Звідси, ЦСУ, при $K = 1,57$ і $T = \pi / 2$, є стійкою. Однак, при $K \geq 3,05$ вона вже не стійка.

7.2.2. Метод нескінченного ряду

Імпульсна передавальна функція ЦСУ може бути записана у вигляді

$$GH^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jn\omega_s)H(j\omega + jn\omega_s), \quad (7.16)$$

де з метою аналізу в частотній області виконана заміна $s = j\omega$. Оскільки більшість систем управління мають властивості НЧ-фільтра, то модуль функції $G(j\omega)H(j\omega)$ зменшується із зростанням частоти ω . Тому ряд (7.16) можна обмежити до N членів:

$$GH^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N G(j\omega + jn\omega_s)H(j\omega + jn\omega_s), \quad (7.17)$$

де N обчислюється за критерієм похибки:

$$|G[j\omega + j(N+1)\omega_s]H[j\omega + j(N+1)\omega_s] + G[j\omega - j(N+1)\omega_s]| \leq \Delta |GH^*(j\omega)| \quad (7.18)$$

причому Δ – задана величина.

На відміну від методу z -перетворення у цьому методі відпадає необхідність обчислення $GH(z)$ за виразом для $G(s)H(s)$.

7.2.3. Метод білінійного перетворення

Метод білінійного перетворення визначається співвідношенням

$$z = \frac{1+w}{1-w},$$

звідки

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (7.19)$$

За умови, що $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ маємо:

$$w = \frac{z-1}{z+1} = j \cdot \frac{\sin\omega T}{1 + \cos\omega T} = j \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{\omega T}{2}\right] \quad (7.20)$$

Таким чином, одиничне коло на z -площині відображається в уявну вісь комплексної ω -площини. Область всередині одиничного кола відповідає

лівій половині ω -площини, а додатній напрямок уявної осі відповідає діапазону частот $n\omega_s \leq \omega \leq (n+1)\omega_s$.

Нехай комплексна змінна ω має вигляд: $\omega = \sigma_w + j\omega_w$. Тоді, із (7.20) наслідком є рівність $\omega_w = \text{tg}\left[\frac{\omega T}{2}\right]$, яка встановлює зв'язок між частотою ω и псевдочастотою ω_w . Таким чином, для аналізу в частотній області, можна в передавальній функції замінити z на

$$z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (7.21)$$

Наприклад, для передавальної функції

$$G(z) = \frac{1.2 \times 10^{-7} K_p (z+1)}{(z-1)(z-0.242)},$$

із врахуванням (7.4) отримаємо в частотній області

$$G(j\omega) = \frac{1.6 \times 10^{-7} K_p (1 - j\omega_w)}{j\omega_w (1 + j 1.636 \omega_w)}.$$

Зауважимо, що позначення $G(j\omega_w)$ використовується в тому сенсі, що передавальна функція залежить від $j\omega_w$, і зовсім не означає простої заміни z на $j\omega_w$. За отриманого виразу можна побудувати годограф $G(j\omega_w)$ від псевдочастоти ω_w при зміні її від 0 до ∞ .

7.3. Логарифмічні частотні характеристики

Використання білінійного перетворення дозволяє отримати такий вираз для передавальної функції, який дозволяє дуже просто побудувати логарифмічні частотні характеристик. Так, передавальної функції виду:

$$G(j\omega) = \frac{1.6 \times 10^{-7} K_p (1 - j\omega_w)}{j\omega_w (1 + j 1.636 \omega_w)}$$

логарифмічна амплітудна частотна характеристика має простий вираз, якому відповідають точки зламу амплітудної характеристики $\omega_w = 1$ та

$\omega_w = 1/1.636 = 0.611$. На рис.7.5 зображені ЛЧХ даного прикладу для $K_p = 1.6 \cdot 10^6$; $K_p = 6.3 \cdot 10^6$ та $K_p = 10^7$. Амплітудні характеристики

побудовані з урахуванням апроксимації характеристик співмножників $G(j\omega_w)$ прямолінійними відрізками. з нахилом 20 дБ/дек.

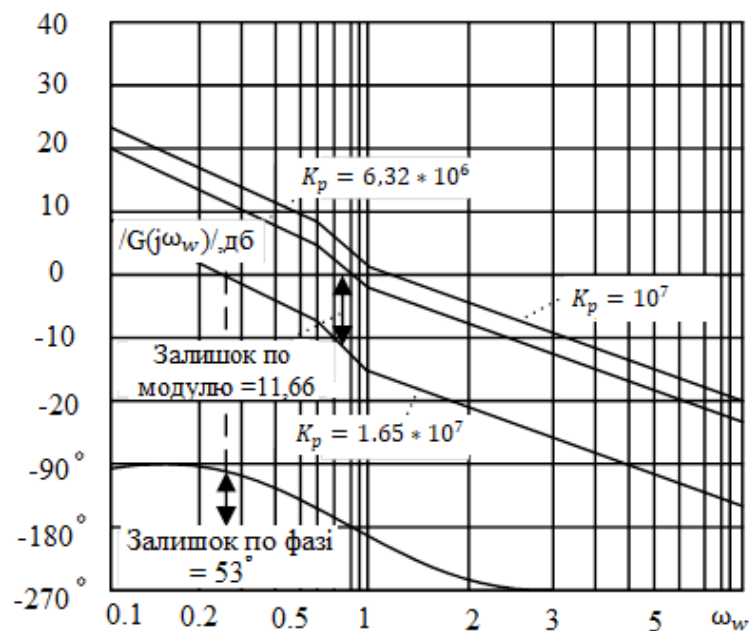


Рис.7.6. Логарифмічні частотні характеристики для функції $G(j\omega_w)$

На відповідному годографі маємо:

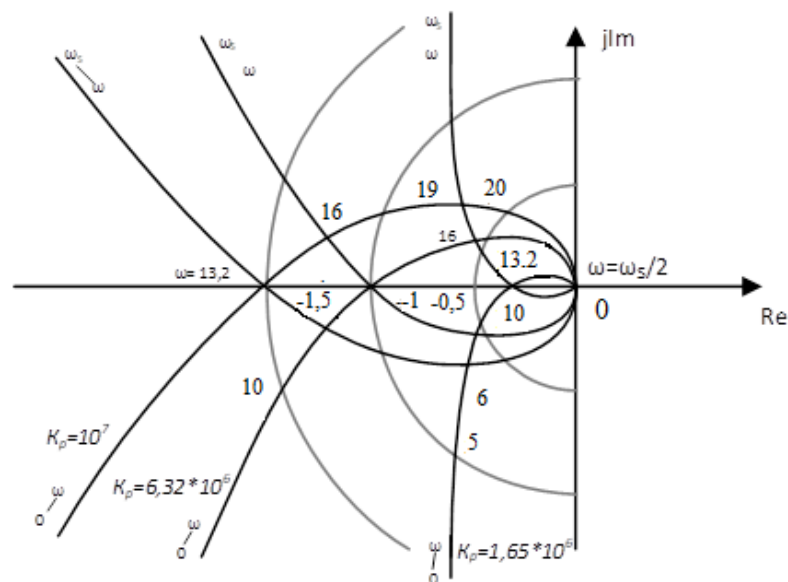


Рис.7.7. Частотні годографи функції $G(z)$

Точка, в якій годограф $G(z)$ перетинає одиничне коло, характеризує перехід посилення системи через значення, рівне одиниці. Відповідна цій точці частота називається *частотою зрізу*.

7.4. Визначення смуги пропускання ЦСУ

При синтезі систем управління в частотній області якість системи зазвичай оцінюють за її смугою пропускання. Нехай система другого порядку має в замкнутому стані передавальну функцію:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_{\Pi}^2}{s^2 + 2\xi\omega_{\Pi}^2 \cdot s + \omega_{\Pi}^2}, \quad (7.22)$$

Тоді її полоса пропускання:

$$ПП = \omega_{\Pi} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \xi^2) + \sqrt{4 \cdot \xi^4 - 4 \cdot \xi^2 + 2} \right]^{1/2}, \quad (7.23)$$

яка відповідає частоті ω , при якій:

$$|C(j\omega) / R(j\omega)| = 0.707. \quad (7.24)$$

Для ЦСУ найпростіша передавальна функція другого порядку зазвичай містить в чисельнику член $(z - z_1)$, до того ж при переході в частотну область змінна z пов'язана з ω співвідношенням $z = e^{j\omega T}$. Це істотно ускладнює процедуру отримання аналітичного виразу, що пов'язує полосу пропускання із значеннями полюсів і нулів функції $C(z)/R(z)$.

Приклад 7.4.

Нехай вихідна передавальна функція замкнутої системи:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K \cdot (z - z_1)}{(z - p_1) \cdot (z - \bar{p}_1)},$$

де p_1 , \bar{p}_1 – дійсні або комплексно-спряжені числа. Використовуючи білінійне перетворення, отримаємо:

$$\frac{C(w)}{R(w)} = \frac{\omega_{w\Pi}^2 \cdot (1 + T_w \cdot w)}{w^2 + (2\xi_w \omega_{w\Pi}^2 + T_w \omega_{w\Pi}^2) \cdot w + \omega_{w\Pi}^2},$$

де $\omega_{w\Pi}$, ξ_w , T_w – не обов'язково мають якийсь фізичний зміст, а просто є фіксованими параметрами в області w , що дозволяють застосувати неперервний аналог передавальної функції:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_{\Pi}^2 \cdot (1 + T_s)}{s^2 + (2\xi_w \omega_{\Pi}^2 + T \omega_{\Pi}^2) \cdot s + \omega_{\Pi}^2}.$$

Полоса пропускання системи визначається наступним чином:

$$ПП = \left[-\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + 4\omega_{\Pi}^4} \right]^{1/2},$$

де $a = 4\xi^2\omega_{\Pi}^2 + 4\xi\omega_{\Pi}^3T - 2\omega_{\Pi}^2 - \omega_{\Pi}^4T^2$.

Тоді

$$(ПП)_w = \left[-\frac{aw}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_w^2 + 4\omega_{w\Pi}^4} \right]^{1/2},$$

де $a = 4\xi_w^2\omega_{w\Pi}^2 + 4\xi_w\omega_{\Pi}^3T_w - 2\omega_{w\Pi}^2 - \omega_{w\Pi}^4T^2$.

Повертаючись до z -перетворення: $(ПП)_z = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} (ПП)_w$

Для визначення смуги пропускання систем високого порядку використовують амплітудно-фазові діаграми Нікольса, на які накладається амплітудно-фазова характеристика досліджуваної системи.

У даному розділі ми розглянули системи другого порядку, оскільки при проектуванні систем вищого порядку можна задати два домінуючих кореня, а решту розташувати значно лівіше.

Питання до самоконтролю

1. Перехідна функція ЦСУ. Графічне зображення.
2. Показники якості перехідної функції.
3. Зв'язок розташування полюсів ЦСУ на z -площині з показниками якості перехідної функції.
4. Статичні та динамічні похибки ЦСУ.
5. Годограф Найквіста. Методи побудови годографа Найквіста.
6. Частотний критерій стійкості ЦСУ.
7. Логарифмічні частотні характеристики.

8. КЕРОВАНІСТЬ І СПОСТЕРЕЖНІСТЬ ЦСУ

8.1. Загальні визначення процесів керованості і спостережності

Поняття керованості і спостережності, введене Калманом, відіграють важливу роль при проектуванні систем управління. Дамо визначення цих понять.

Процес G називається керованим, якщо на кожну змінну стану системи G можна цілеспрямовано впливати необмеженим сигналом керування $U(t)$ протягом скінченного проміжку часу.

Дуальним відносно керованості є поняття спостережності. *Спостережність* – це оцінка того, чи дають наявні результати вимірювання стану системи адекватну інформацію про систему.

Процес G називається спостережним, якщо кожна змінна стану системи впливає на результати вимірювання певних вихідних змінних.

8.2. Керованість лінійних ЦСУ

Нехай лінійна нестационарна ЦСУ описується рівняннями:

$$x(k_{i+1}) = A(k_i) \cdot x(k_i) + B(k_i) \cdot u(k_i); \quad (8.1)$$

$$c(k_{i+1}) = D(k_i)x(k_i) + E(k_i)U(k_i), \quad (8.2)$$

де $x(k_i)$ – k -вимірний вектор; $u(k_i)$ – r -вимірний вектор; $c(k_i)$ – p -вимірний вектор. Розрізняють наступні визначення керованості лінійних нестационарних ЦСУ:

1. *Повна керованість системи за станом.* Система (8.1) називається повністю керованою за станом, якщо для довільного початкового моменту k_0 існує послідовність необмежених управлінь $u(k_i), i = 0, 1, \dots, N - 1$, яка може перевести кожен початковий стан $x(k_0)$ в деякий кінцевий $x(k_N)$ за скінченну $k_N \geq k_0$.

2. *Повна керованість за виходом.* Система (8.1) і (8.2) називається керованою по виходу, якщо для довільного початкового моменту k_0 існує послідовність необмежених управлінь $u(k_i), i = 0, 1, \dots, N - 1$, для яких деяке

кінцеве значення вихідної змінної $s(k_N)$ може бути досягнуто із початкового довільного стану системи за скінченний проміжок $k_N \geq k_0$.

3. *Абсолютна керованість.* Система називається абсолютно керованою (за станом або за виходом), якщо вона є повністю керованою (за станом або за виходом) для всіх k_0 і всіх $k_N \geq k_0$.

4. *Сильна і слабка керованість.* Система називається сильно керованою (в сенсі абсолютної, повної керованості за станом або за виходом), якщо вона є керованою стосовно кожної керованої змінної, причому всі інші змінні дорівнюють нулю. В іншому випадку система називається слабо керованою або просто керованою.

8.2.1. Керованість лінійних стаціонарних ЦСУ

Нехай лінійна ЦСУ описується наступними рівняннями:

$$x(k_{i+1}) = Ax(k_i) + BU(k_i), \quad (8.3)$$

$$s(k_{i+1}) = Dx(k_i) + EU(k_i), \quad (8.4)$$

де $x(k_i)$ – k -вимірний вектор; $u(k_i)$ – r -вимірний вектор; $s(k_i)$ – p -вимірний вектор.

Визначення 1. Лінійна стаціонарна ЦСУ (8.3) і (8.4) є повністю керованою за станом, якщо $(n \times Nr)$ -вимірна матриця Q

$$Q = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{N-1}B], \quad (8.5)$$

має ранг n або матриця QQ^T є невиродженою.

Визначення 2. Лінійна стаціонарна ЦСУ (8.3) і (8.4) є повністю керованою за виходом, якщо матриця T

$$T = [DA^{N-1}B \ DA^{N-2}B \ \dots \ DAB \ DB \ E]$$

має ранг p .

Крім того, є наступні альтернативні варіанти визначення керованості лінійних цифрових систем за станом:

1. Система (8.3) і (8.4) є повністю керованою за станом тільки в тому випадку, якщо $(n \times n)$ -вимірна матриця Грама

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} \cdot B \cdot B^t \cdot (A^{N-i-1})^t$$

є невивродженою, де $N \geq n$.

2. Система (8.3) і (8.4) є повністю керованою за станом, якщо рядки $(n \times m)$ -вимірної матриці $(Z I - A)^{-1} B$ є лінійно незалежними.

3. Система (8.3) і (8.4) є повністю керованою за станом тільки в тому випадку, якщо $(n \times (n + m))$ -вимірна матриця $[\lambda \cdot I - A \cdot B]$ має ранг n для всіх власних значень матриці A .

Якщо ж матриця A є діагональною або представлена в канонічній формі Жордана, то рядки матриці, які відповідають останнім рядкам клітин Жордана для всіх власних значень матриці A , не можуть складатися повністю з нулів.

Зауваження

Якщо цифрова система, отримана з неперервної шляхом квантування за часом, дискретне рівняння стану має вигляд

$$x[(k + 1)T] = \Theta(T)x(kT) + \theta(T)u(kT)$$

і система є повністю керованою тільки, коли матриця

$$Q = [Q_0, Q_1 \dots Q_{N-1}]$$

має ранг n , де $Q_i = \Theta(iT) \cdot \theta(T)$, $i = 0, 1 \dots N-1$.

8.3. Спостережність лінійних ЦСУ

Нехай лінійна нестационарна ЦСУ описується рівняннями:

$$x(k_{i+1}) = A(k_i) \cdot x(k_i) + B(k_i) \cdot u(k_i); \quad (8.6)$$

$$c(k_{i+1}) = D(k_i)x(k_i) + E(k_i)u(k_i), \quad (8.7)$$

де $x(k_i)$ – k -вимірний вектор; $u(k_i)$ – r -вимірний вектор; $c(k_i)$ – p -вимірний вектор. Розрізняють наступні визначення спостережності лінійних ЦСУ:

1. *Повна спостережність.* Лінійна ЦСУ повністю спостережна, якщо для деякого k_0 стан $x(k_0)$ може бути визначений по відомим $s(k)$ і $u(k)$ для $k_N \geq k_0$, де k_N – кінцевий час або крок.

2. *Глобальна спостережність.* Лінійна ЦСУ глобально-спостережна, якщо вона повністю спостережна для всіх k_0 і всіх $k_N \geq k_0$.

8.3.1. Спостережність лінійних стаціонарних ЦСУ

Варіанти визначення повної спостережності лінійних стаціонарних ЦСУ аналогічні варіантам визначення керованості і можуть бути отримані шляхом заміни B на D^T і A на A^T .

1. Система (8.6) і (8.7) повністю спостережна, якщо матриця

$$L = [D^T \quad A^T D^T \quad (A^T)^2 D^T \quad \dots \quad (A^T)^{N-1} D^T]$$

має ранг n .

2. Система (8.6) і (8.7) повністю спостережна, якщо матриця

Грама $V = \sum_{i=0}^{N-1} (A^{N-i-1})^T D^T D A^{N-i-1}$ є невивродженою.

3. Система (6.6) і (6.7) повністю спостережна, якщо матриця

$D(Z \cdot I - A)^{-1}$ має лінійно незалежні стовбці.

Зауваження.

Керованість і спостережність лінійних ЦСУ мають дуальний зв'язок, який обумовлений тим, що керованість лінійних ЦСУ за станом передбачає спостережність її модифікованої спряженої системи.

Питання до самоконтролю

1. Визначення керованості і спостережності по Калману.
2. Повна керованість цифрової системи управління (ЦСУ) за станом.
3. Повна керованість ЦСУ за виходом.
4. Абсолютна керованість ЦСУ.
5. Сильна і слабка керованість ЦСУ.
6. Визначення керованості лінійних ЦСУ.
7. Визначення спостережності лінійних ЦСУ.
8. Визначення дуальності ЦСУ.

9. МЕТОДИ ПОБУДОВИ І КОРЕКЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

9.1. Реалізація цифрових регуляторів в ЦСУ

Найбільш типові структури ЦСУ зображено на рис. 9.1 – 9.4.

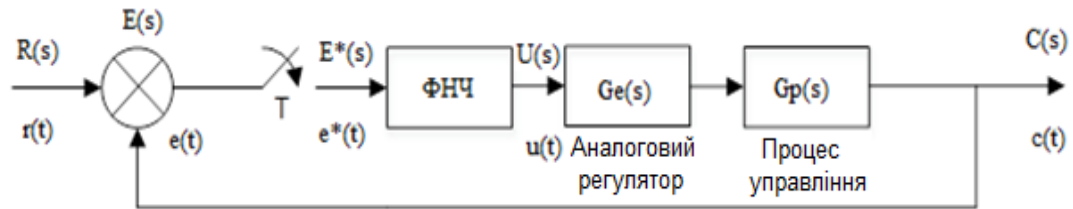


Рис. 9.1. ЦСУ с послідовно підключеним аналоговим регулятором

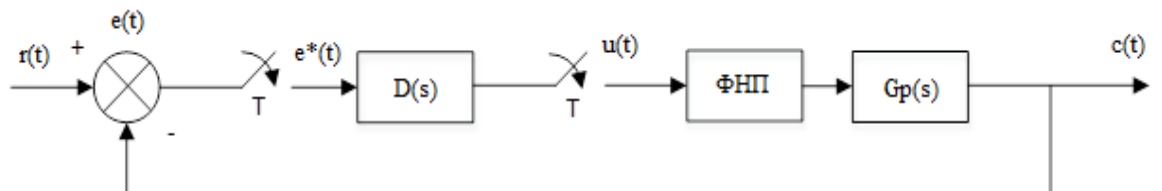


Рис. 9.2. ЦСУ з послідовно підключеним цифровим регулятором

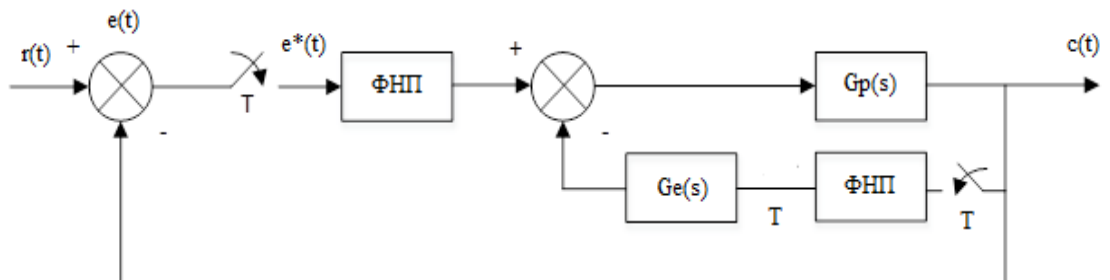


Рис. 9.3 ЦСУ з аналоговим регулятором у колі зворотного зв'язку

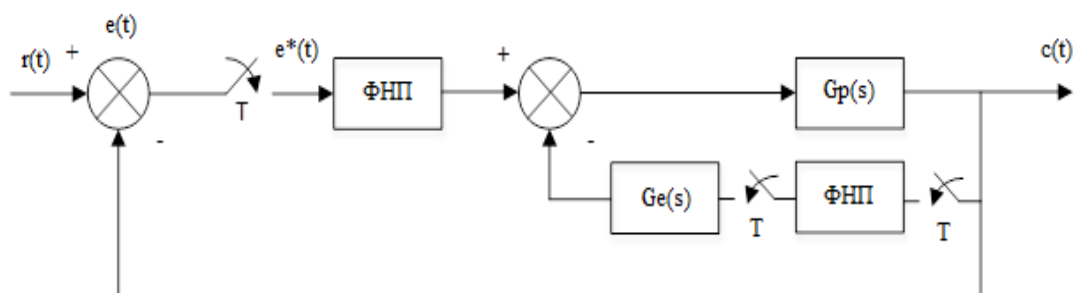


Рис. 9.4. ЦСУ с цифровим регулятором у колі зворотного зв'язку

Функції цифрових регуляторів можуть виконувати імпульсні фільтри, цифрові PI -, PD -, PID -регулятори або мікроконтролери. Основні переваги цифрових регуляторів – краща якість ЦСУ і можливість швидкої програмної зміни алгоритму управління.

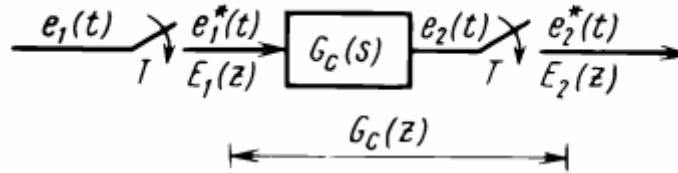


Рис. 9.5. Структурна схема цифрового регулятора

Передавальна функція цифрового регулятора, зображеного на рис. 9.5 у загальному випадку має вигляд:

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^k}{\sum_{k=0}^n a_k z^k}.$$

Для технічної реалізації цифрового регулятора розкладання $G_c(z)$ в ряд не повинно містити додатних степенів z . Це означає, що порядок знаменника повинен бути більшим, ніж порядок чисельника, тобто $n \geq m$. Якщо ж $b_0 \neq 0$, то умовою реалізації є $a_0 \neq 0$.

9.1.1. Реалізація цифрового регулятора у вигляді імпульсних фільтрів

1. Послідовний імпульсний фільтр.

$$G_c(z) = G_h o G_d(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_d(s)}{s} \right],$$

$$Z \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} G_c(z).$$

Це співвідношення дозволяє визначити передавальну функцію імпульсного фільтра за заданою передавальною функцією цифрового регулятора $G_c(z)$.

Для реалізації послідовного імпульсного фільтра необхідно виконання наступних умов:

- кількість полюсів $G_c(z)$ має бути більше або дорівнює кількості нулів;
- нулі $G_c(z)$ є довільними;
- полюси $G_c(z)$ повинні бути простими, дійсними, додатними $i < 1$.

Приклад 9.1.

$$Gc = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}}; T = 1c.$$

$$Z\left[\frac{Gd(s)}{s}\right] = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})} = \frac{0.625}{1 - z^{-1}} + \frac{0.375}{1 - 0.2z^{-1}}$$
$$\frac{Gd(s)}{s} = \frac{0.625}{s} + \frac{0.375}{s + 1.61} = \frac{s + 1}{s(s + 1.61)} \quad Gd(s) = \frac{s + 1}{s + 1.61}$$

2. Імпульсний фільтр у колі зворотного зв'язку

Передавальна функція імпульсного фільтру у колі зворотного зв'язку визначається із передавальної функції замкненої системи. Нехай передавальна функція замкненої системи має вигляд

$$Gc(z) = \frac{1}{1 + GhoH(z)},$$

звідси передавальна функція імпульсного фільтру у колі зворотного зв'язку визначається як

$$Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \left[\frac{1 - Gc(z)}{Gc(z)} \right].$$

3. Імпульсний фільтр комбінованого типу (RC-схема)

На попередні фільтри є обмеження. В послідовному довільні нулі, у зворотному – полюси, плюс неможливість їх використання при комплексних полюсах і нулях. Звідси – необхідність комбінованих фільтрів. Визначимо передавальну функцію комбінованого фільтра наступним чином:

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{GhoGd(z)}{1 + GhoH(z)}$$

Дві схеми (послідовна і зворотна) будуть еквівалентними, якщо

$$Gc(z) = \frac{GhoGd(z)}{1 + GhoH(z)}$$

Нехай $Gc(z)$ має комплексно – спряжені полюси і нулі, полюси і нулі на одиничному колі і поза ним.

В такому випадку

$$Gc(z) = Gcf(z)Gcs(z),$$

де

$$Gcf(z) = \frac{1}{1 + GhoH(z)}$$

імпульсний фільтр в ланцюгу зворотного зв'язку повинен містити всі полюси, які є комплексними, на одиничному колі і поза нею. Нулі – прості, полюси – дійсні, додатні. Кількість нулів і полюсів однакова.

$Gcs(z) = GhoGd(z)$ – послідовний імпульсний фільтр.

Приклад 9.2

→| Реалізовані

нулі |← Нереалізовані нулі →|

$$Gc(z) = \frac{(1 - 0.5 \cdot z^{-1})(1 - 0.6 \cdot z^{-1})(1 - 0.8 \cdot z^{-1})(1 + 0.2 \cdot z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.2 \cdot z^{-1})(1 - 0.37 \cdot z^{-1})(1 - 0.9 \cdot z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0.5 \cdot z^{-1} + z^{-2})}$$

→| Реалізовані

полюси |← Нереалізовані полюси →|

$$Gcf(z) = \frac{\text{реалізовані нулі}}{\text{нереалізовані полюси}}; \quad Gcs(z) = \frac{\text{нереалізовані нулі}}{\text{реалізовані полюси}};$$

У даному прикладі це було легко, тому що кількість реалізованих полюсів дорівнює кількості нездійснених нулів і навпаки. У загальному випадку ці умови можуть не виконуватися.

Нехай

→| Реалізовані

нулі |← Нереалізовані нулі →|

$$Gc(z) = \frac{(1 - 0.5 \cdot z^{-1})(1 + 0.2 \cdot z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.2 \cdot z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0.5 \cdot z^{-1} + z^{-2})}$$

→| Реалізовані

полюси |← Нереалізовані полюси →|

$$Gcf(z) = \frac{\text{Реал.нуль}}{\text{Нереал.полюс}} = \frac{z - 0.5}{(z - 1)(z^2 - 0.5 \cdot z + 1)} \quad \text{мають неоднакову кількість}$$

$$Gcs(z) = \frac{\text{Нереал.нуль}}{\text{Реал.полюс}} = \frac{(z + 0.2)(z^2 - z + 1)}{z - 0.2} \quad \text{нулів і полюсів.}$$

Щоб цього уникнути, додамо в чисельник $G_{cf}(z)$ и в знаменник $G_{cs}(z)$ $(z - a)(z - b)$, де $0 < a < 1$; $0 < b < 1$; $a \neq b$, і a і b не дорівнюють іншим нулям і полюсам.

9.1.2. Реалізація цифрових регуляторів на комп'ютері

Переваги: швидкодія, обсяг пам'яті, гнучкість. Передавальна функція може бути реалізована у вигляді програми трьома методами програмування: безпосереднім, послідовним і паралельним.

1. Безпосереднє програмування

Нехай синтезований ЦР у вигляді

$$Gc(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Взявши обернене z –перетворення, маємо

$$a_0 e_2^*(t) + \sum_{k=1}^n a_k e_2^*(t - kT) = \sum_{k=0}^m b_k e_1^*(t - kT)$$

$$\text{або } e_2^*(t) = \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=0}^m b_k e_1^*(t - kT) - \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot e_2^*(t - kT)$$

Для програмування необхідні дві операції: накопичення даних і арифметичні дії, які можна представити у вигляді такої структурної схеми (рис.9.6).

Якщо ввести фіктивну змінну $x(z)$ і помножити на неї чисельник і знаменник (безпосередньо декомпозиція), можна отримати:

$$E_2(t) = \frac{1}{a_0} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) \cdot x(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{a_0} E_1(z) - \frac{1}{a_0} (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) \cdot x(z)$$

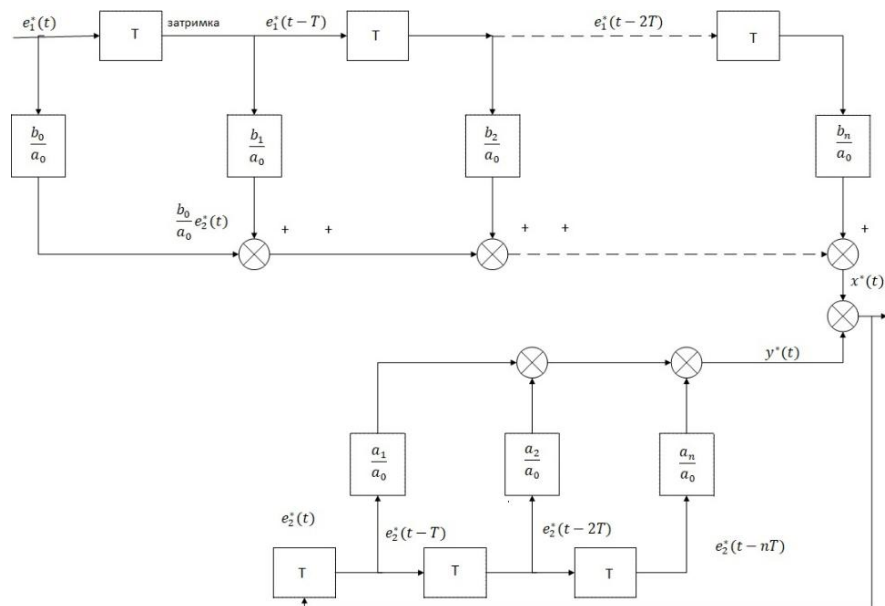


Рис.9.6. Структурна схема програмування передавальної функції загального вигляду

Даному виразу відповідає структурна схема, наведена на рис.9.7.

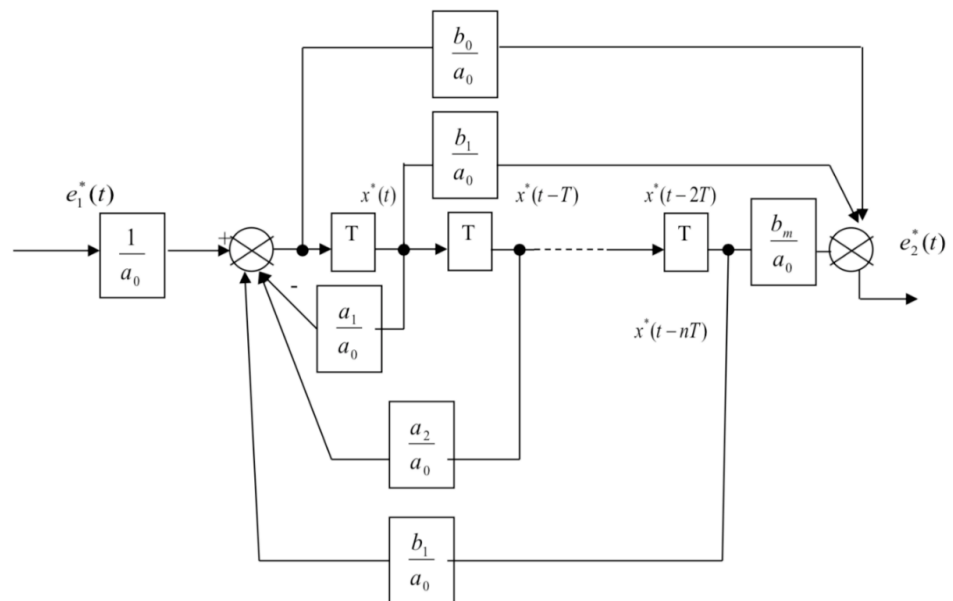


Рис.9.7. Структурна схема програмування з фіктивною змінною

2.Послідовне програмування

Якщо ЦСУ має вигляд послідовного з'єднання ланок, то передавальна функція записується як: $G_s(z) = \prod_{k=1}^P G_{ck}(z)$, де p – найбільше із чисел n та m , і структурна схема її реалізації наведена на рис.9.8.

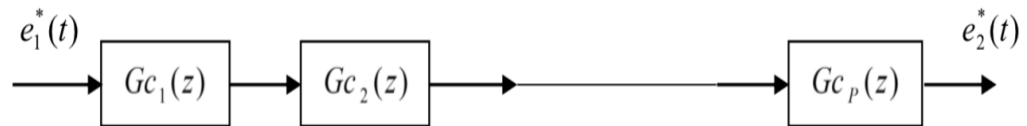


Рис. 9.8. Структурна схема послідовного з'єднання ланок

3. Паралельне програмування

Якщо передавальна функція може бути записана у вигляді паралельного з'єднання ланок $Gc(z) = \sum_{k=1}^p Gck(z)$, де p – найбільше із чисел m та n , то структурна схема її реалізації зображена на рис.9.9.

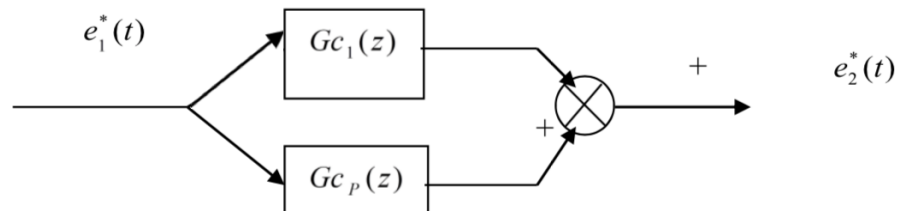


Рис.9.9. Структурна схема паралельного з'єднання ланок

9.1.3. Реалізація цифрового ПІД – регулятора

Загальна структурна схема ПІД-регулятора наведена на рис.9.10:

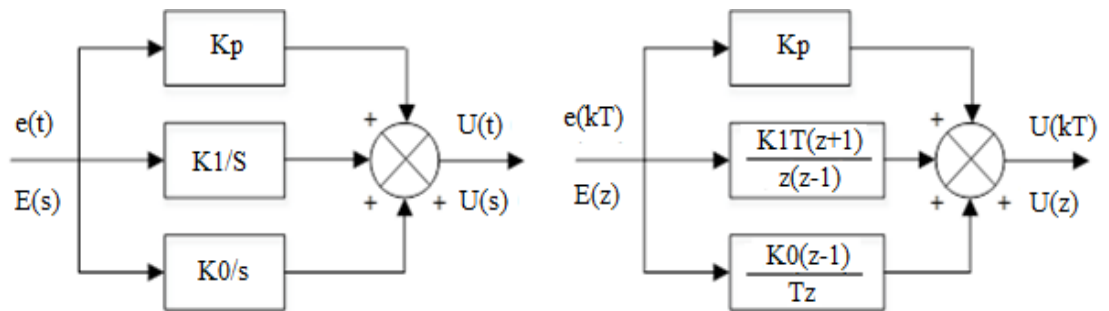


Рис.9.10. Структурна схема ПІД-регулятора

Реалізація цифрового ПІД- регулятора полягає у визначенні значень K_p , K_i , K_d по заданим вимогам до якості системи управління.

9.2. Методи корекції показників якості ЦСУ

1. Послідовна корекція за допомогою аналогових регуляторів

Імпульсна передавальна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$\frac{C(z)}{E(z)} = Z[Gho(s)Gc(s)Gp(s)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_s(s)G_p(s)}{s}\right]$$

Метою корекції є визначення передавальній функції $G_s(s)$ аналогового регулятора, що забезпечує необхідні показники якості ЦСУ і може бути фізично реалізованим. На жаль, з виразу для $C(z)/E(z)$ видно, що перетворення функцій $G_s(s)$ і $G_p(s)$ виконується разом, тому не можна незалежно досліджувати ефект регулятора. У цьому разі доводиться апроксимувати цифрову систему аналоговою моделлю. Однак, таку апроксимацію слід використовувати обережно.

2. Апроксимація постійним запізненням

У цьому методі для апроксимації дискретної системи аналоговою моделлю використовується заміна пристрою вибірки і збереження ланкою чистого запізнення. Дійсно, для фіксатора нульового порядку справедливо:

$$Gho(j\omega) = T \frac{\sin \pi(\omega / \omega_s)}{\pi(\omega / \omega_s)} * e^{-j\pi(\omega / \omega_s)}.$$

З урахуванням цього виразу маємо:

$$G_{h0}G_cG_p^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{h0}(j\omega + jn\omega_s)G_c(\omega + jn\omega_s)G_p(\omega + jn\omega_s) =$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega + n\omega_s}{2} T}{\frac{\omega + n\omega_s}{2} T} e^{-j(\omega + n\omega_s)T/2} G_c(\omega + jn\omega_s)G_p(\omega + jn\omega_s).$$

У більшості випадків $G_p(j\omega)$ має властивості фільтра НЧ, де вираз

$$\frac{\sin \frac{\omega + n\omega_s}{2} T}{\frac{\omega + n\omega_s}{2} T} \approx 1.$$

У цьому випадку $G_{h0}G_cG_p^*(j\omega)$ можна апроксимувати тільки першим членом ряду ($n = 0$). Тоді маємо:

$$G_{h0}G_cG_p^*(j\omega) \approx G_c(j\omega)G_p(j\omega)e^{-j\omega T/2}.$$

Це означає, що операція вибірки й зберігання замінюється чистим запізненням, що дорівнює половині періоду квантування. В результаті маємо

еквівалентну схему (рис. 9.11). На рис.9.12 показані процеси, що відображають таку заміну.

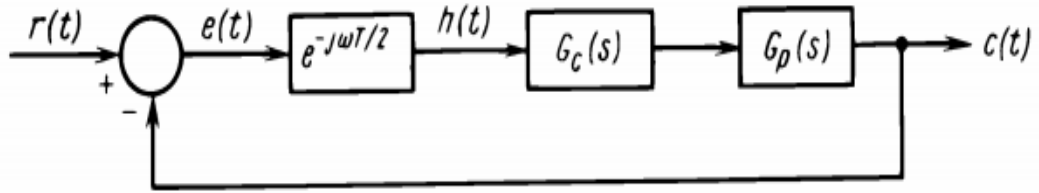


Рис. 9.11. Апроксимація імпульсної системи неперервною системою з запізненням

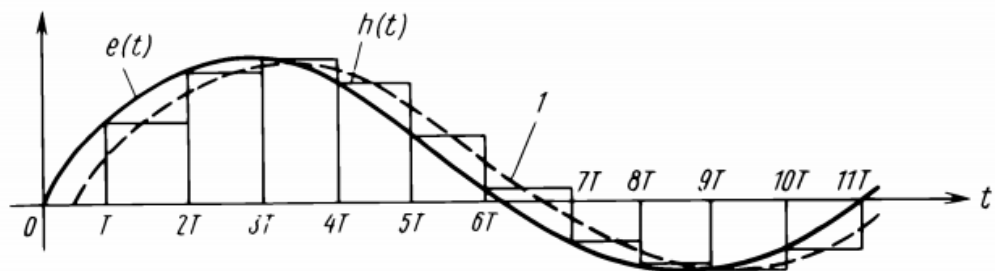


Рис. 9.12. Процеси, що характеризують заміну операції вибірки і збереження чистим запізненням $T/2$ (1 – апроксимація $h(t)$)

З рисунку видно, що таку апроксимацію можна використовувати, якщо період квантування досить малий.

3. Білінійні перетворення

Етапи синтезу цим методом полягають у наступному.

1. Визначаємо передавальну функцію системи без корекції:

$$G_{h0}G_p(\omega) = G_{h0}G_p(\omega), \quad z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}$$

2. Приймаючи, що $\omega = j\omega_w$, будуємо ЛЧХ для функції $G_{h0}G_p(\omega)$ і, якщо необхідно, АЧХ і ФЧХ переносять на діаграму Нікольса. Оцінюють запаси стійкості за модулем, фазою, полюсу пропускання, резонансну частоту і пік, тобто оцінюють динамічні властивості системи без корекції.
3. Якщо необхідна корекція системи, то $G_{h0}G_p(\omega)$ множать на передавальну функцію послідовного регулятора $G'_c(\omega)$, який може

давати або випередження або відставання за фазою. Проте характеристики фільтра НЧ або ВЧ в ω -області можуть і не мати прямих аналогів в s -області. Тому віднесення його до того чи іншого типу по виду $G'_c(\omega)$ виконується лише з метою використання відомих впливів аналогових регуляторів на корекцію неперервних систем в s -області.

Після цього виконуємо послідовність перетворень:

$$G'_c(\omega)G_{h0}G_p(\omega) \rightarrow G_c(s)G_{h0}(s)G_p(s) \rightarrow G_c(s).$$

Головна вимога до $G_c(s)$ – це можливість фізичної реалізації, що обумовлює такі вимоги до неї:

- а. полюси функції $G'_c(\omega)$ повинні лежати в лівій половині s -площини і бути простими і дійсними;
- б. кількість полюсів має бути більше кількості нулів або дорівнювати їм.

Взагалі кажучи, нулі можуть бути розташовані будь де на s -площині. З вимоги а) випливає, що область розташування полюсів обмежена від'ємним напрямком дійсної осі. Оскільки полюси $G_c(s)$ обумовлені полюсами $G'_c(\omega)$, а від'ємний напрямок дійсної осі на s -площині відповідає відрізку $-1 \leq \omega \leq 0$ на ω -площині, то це означає, що $G'_c(\omega)$ може мати тільки прості дійсні полюси в діапазоні від -1 до 0.

4. Якщо отримано вираз для $G'_c(\omega)G_{h0}G_p(\omega)$, то для обчислення $G_c(s)G_{h0}(s)G_p(s)$ необхідно виконати зворотній перехід від змінної ω до змінної s . Зауважимо, що

$$G'_c(\omega)G_{h0}G_p(\omega) = [G_cG_{h0}(s)G_p(z)], \quad z = \frac{1+\omega}{1-\omega},$$

але оскільки

$$G'_c(\omega) \neq \zeta[G_c(s)], \quad z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$$

передавальна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$G_{h0}G_p(z) = (1 - z^{-1}) \zeta \left[\frac{G_c(s)}{s} \right].$$

Переходячи до ω , отримаємо:

$$G_{h0}G_p(\omega) = (1 - z^{-1}) \zeta \left[\frac{G_c(s)}{s} \right] = \frac{2\omega}{1 + \omega} \zeta \left[\frac{G_c(s)}{s} \right], \quad z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}.$$

З урахуванням $G'_c(\omega)$ маємо

$$G'_c(\omega)G_{h0}G_p(\omega) = G_{h0}G_cG_p(\omega) = \frac{2\omega}{1 + \omega} \zeta \left[\frac{G_c(s)G_p(s)}{s} \right], \quad z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}.$$

Звідси

$$\zeta \left[\frac{G_c(s)G_p(s)}{s} \right] = \frac{\omega}{1 + 2\omega} G'_c(\omega)G_{h0}G_p(\omega), \quad z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}.$$

Передавальна функція $\frac{G_c(s)G_p(s)}{s}$ отримуємо з останнього виразу шляхом розкладання $G'_c(\omega)G_{h0}G_p(\omega)$ на суму елементарних дробів і знаходження відповідних їм оригіналів в області змінної s .

Із отриманого виразу $\frac{G_c(s)G_p(s)}{s}$ неважко обчислити $G_c(s)$.

5. Однак через невідповідність між кількістю нулів в s - і ω - площинах, передавальна функція $G_c(s)$ у багатьох випадках матиме нулів більше, ніж полюсів.

Щоб реалізувати функцію $G_c(s)$ фізично, в неї можна додати один або кілька віддалених полюсів, розташованих на від'ємній частині дійсної осі. Ці додаткові полюси не повинні суттєво впливати на показники якості системи.

4. Корекція за допомогою аналогових регуляторів у колі зворотного зв'язку

Ця корекція заснована на використанні еквівалентного послідовного цифрового регулятора. Щоб це показати, розглянемо дві системи управління, зображені на рис. 9.13 та 9.14. Оскільки передавальна функція $G_c(z)$ цифрового регулятора відокремлена від екстраполятора і процесу управління, то ефекти, зумовлені зміною параметрів $G_c(z)$, аналізувати дуже просто.

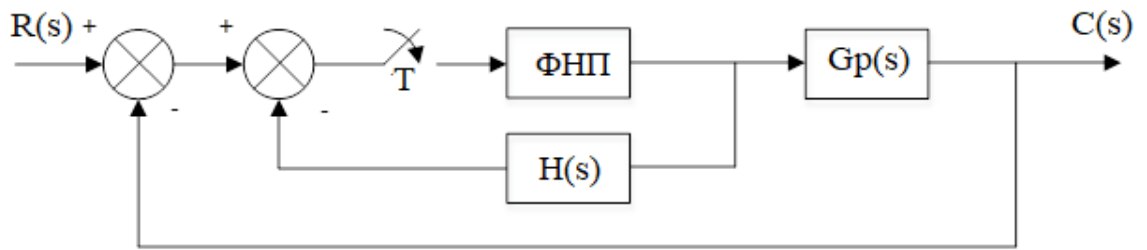


Рис. 9.13. ЦСУ з аналоговим регулятором у колі зворотного зв'язку

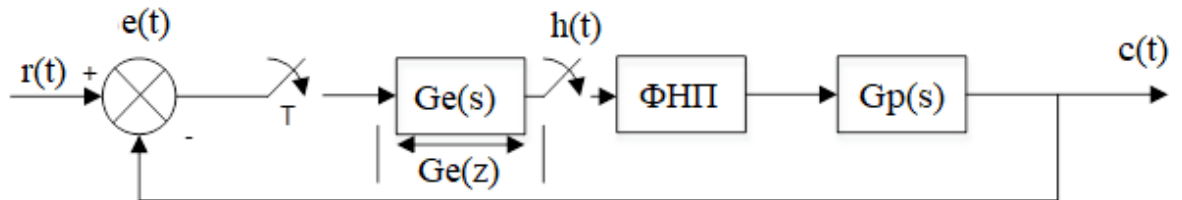


Рис. 9.14. ЦСУ з послідовним цифровим регулятором

Приймемо, що для системи на рис. 9.14 отримано бажану передавальну функцію $G_c(z)$, що задовольняє критерію якості системи. Покажемо, що в системі на рис. 9.13 регулятор у колі зворотного зв'язку можна синтезувати, отримавши співвідношення між $H(s)$ і $G_c(z)$, що забезпечує еквівалентність обох систем.

Ці системи у замкнутому стані мають передавальні функції виду, відповідно:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{h0}G_p(z)}{1 + G_c(z)G_{h0}G_p(z)}$$

та

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{h0}H(z) + G_{h0}G_p(z)},$$

або помноживши чисельник і знаменник на $G_c(z)$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{h0}G_p(z)}{G_c(z) + G_c(z)G_{h0}H(z) + G_c(z)G_{h0}G_p(z)}.$$

Порівнюючи ці вирази, бачимо, що вони будуть рівними, якщо

$$1 + G_c(z)G_{h0}G_p(z) = G_c(z) + G_c(z)G_{h0}H(z) + G_c(z)G_{h0}G_p(z).$$

Звідки

$$G_{h0}H(z) = \frac{1 - G_c(z)}{G_c(z)},$$

або

$$\zeta \left[\frac{H(s)}{s} \right] = \frac{z}{z-1} \frac{1 - G_c(z)}{G_c(z)}.$$

Звідси за відомою передавальною функцією $G_c(z)$ цифрового регулятора в схемі (рис. 9.8) можна знайти $H(z)$ для схеми рис. 9.7.

Основним знову залишається питання можливості фізичної реалізації $H(s)$, що накладає певні обмеження на $G_c(z)$. Відомо, щоб передавальну функцію можна було фізично реалізувати, система, що описується нею, не повинна давати реакцію на виході раніше, ніж з'явиться вхідний сигнал. Це справедливо як для неперервних, так і для цифрових систем управління.

Якщо $H(s)$ може бути фізично реалізована, то $H(s)/s$ – тим більше, тому розклад $\zeta \left[\frac{H(s)}{s} \right]$ в степеневий ряд не повинен містити додатних ступенів z .

Нехай $\zeta \left[\frac{H(s)}{s} \right]$ представлено у вигляді

$$\zeta \left[\frac{H(s)}{s} \right] = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}.$$

Ця передавальна функція може бути фізично реалізована, якщо $b_0 \neq 0$, а m та n – будь-які додатні цілі числа. Підставляючи цей вираз у попередній, отримаємо

$$G_c(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k} + (1 + z^{-1}) \sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}.$$

Основна умова можливості реалізації – $b_0 \neq 0$.

Щоб $H(s)$ можна було реалізувати, все полюси цієї передавальної функції повинні бути простими і лежати на від'ємній напівосі, виключаючи початок координат і нескінченність. Нулі $H(s)$ можуть бути будь-якими.

Тоді можна записати

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{s - s_k},$$

де s_k – прості від’ємні полюси. Запишемо ζ -перетворення у вигляді:

$$\zeta \left[\frac{H(s)}{s} \right] = \frac{A_0 z}{z - 1} + \sum_{k=1}^m \frac{A_k z}{z - e^{-s_k T}}.$$

Воно має тільки один полюс, а всі інші полюси лежать всередині одиничному колі $|z| = 1$. З виразу для $G_c(z)$ випливає, що для можливості її реалізації необхідно, щоб $G_c(z)$ мало однакову кількість нулів і полюсів, і всі нулі лежали всередині одиничного кола.

Приклад 9.3.

Нехай для схеми (рис. 9.8) цифровий регулятор має передавальну функцію:

$$G_c(z) = \frac{(1 - 0.2 z^{-1})(1 - 0.1 z^{-1})}{(1 - 0.5 z^{-1})(1 - 0.8 z^{-1})}.$$

Оскільки $G_c(z)$ має рівну кількість полюсів і нулів, причому всі нулі є простими і розташовані усередині одиничного кола $|z| = 1$, то $H(s)$ можна реалізувати у вигляді схеми фільтра:

$$\begin{aligned} \zeta \left[\frac{H(s)}{s} \right] &= \frac{z}{z - 1} \frac{1 - G_c(z)}{G_c(z)} = \frac{-z^{-1} + 0.38 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2 z^{-1})(1 - 0.1 z^{-1})} = \\ &= \frac{-0.86z}{z - 1} - \frac{2.25z}{z - 0.2} + \frac{3.11z}{z - 0.1}. \end{aligned}$$

Нехай $T = 1$ с, тоді отримуємо перетворення Лапласа:

$$\frac{H(s)}{s} = -\frac{0.86}{s} - \frac{2.25}{s + 1.61} + \frac{311}{s + 2.3}.$$

звідки

$$H(s) = \frac{-3.53s - 3.18}{(s + 1.61)(s + 2.3)}.$$

Питання до самоконтролю

1. Типові структури ЦСУ.
2. П о с л і д о в н и й і м п у л ь с н и й ф і л ь т р .
3. І м п у л ь с н и й ф і л ь т р у к о л і з в о р о т н о г о з в ' я з к у .

4. Імпульсний фільтр комбінованого типу.
5. Методи програмування передавальних функцій ЦСУ на ЦВМ
6. Передавальна функція ПІД-регулятора.
7. Послідовна корекція за допомогою аналогових регуляторів.
8. Апроксимація постійним запізненням.
9. Білінійні перетворення.
10. Корекція за допомогою аналогових регуляторів у колі зворотного зв'язку.

10. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

10.1. Класичне варіаційне числення

При проектуванні значного класу оптимальних систем управління ставиться мета забезпечити мінімум або максимум критерія якості

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), x(k+1), u(k), k], \quad (10.1)$$

де $F[x(k), x(k+1), u(k), k]$ – скалярна функція. Пошук максимуму чи мінімуму критерія якості J виконується при наявності обмежень

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad (10.2)$$

яке є рівнянням стану системи поряд з іншими обмеженнями. В рівнянні (10.2) вектор $x(k)$ має розмірність n , а вектор $u(k)$ — розмірність p .

Більшість методів проектування оптимальних систем засновано на варіаційному численні. Згідно принципу варіації задача знаходження мінімуму функції при наявності обмежень у вигляді рівнянь вирішується шляхом додавання обмежень на цю функцію.

Визначимо вектор $x(k+1)$ розмірністю $(n \times 1)$ як множник Лагранжа. Критерій якості (10.1) зводиться к критерію

$$J_c = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), x(k+1), u(k), k] + \langle \lambda(k+1), [x(k+1) - f(x, u, k)] \rangle, \quad (10.3)$$

де символ $\langle \bullet \rangle$ означає скалярне множення векторів.

В теорії варіаційного числення доводиться, що знаходження мінімуму або максимуму функціонала J при умові (10.2) відповідає пошуку мінімуму або максимуму функціонала J_c без обмежень.

Нехай $x(k)$, $x(k+1)$, $u(k)$ та $x(k+1)$ мають різні варіації:

$$x(k) = x^\circ(k) + \epsilon \eta(k), \quad (10.4)$$

$$x(k) = x^\circ(k+1) + \epsilon \eta(k+1), \quad (10.5)$$

$$u(k) = u^\circ(k) + \delta \mu(k), \quad (10.6)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda^\circ(k+1) + \gamma \omega(k+1), \quad (10.7)$$

де $x^\circ(k)$, $x^\circ(k+1)$, $u^\circ(k)$ та $x^\circ(k+1)$ – вектори, які відповідають оптимальним траєкторіям.

Підстановка співвідношень (10.4)-(10.7) в рівняння (10.3) де

$$J_c = \sum_{k=0}^{N-1} F[x^\circ(k) + \epsilon\eta(k), x^\circ(k+1) + \epsilon\eta(k+1), u^\circ(k) + \delta\mu(k), k] + \langle \lambda^\circ(k+1) + \gamma\omega(k+1), x^\circ(k+1) + \epsilon\eta(k+1) - f[x^\circ(k) + \epsilon\eta(k), u^\circ(k) + \delta\mu(k), k] \rangle. \quad (10.8)$$

Спростивши запис, запишемо J_c у вигляді

$$J_c = \sum_{k=0}^{N-1} F_c[x(k), x(k+1), \lambda(k+1), u(k), k]. \quad (10.9)$$

Розклавши F_c в ряд Тейлора в околі точки $x^\circ(k)$, $x^\circ(k+1)$, $u^\circ(k)$ та $\lambda^\circ(k+1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} F_c[x(k), x(k+1), \lambda(k+1), u(k), k] &= F_c[x^\circ(k), x^\circ(k+1), \lambda^\circ(k+1), u^\circ(k), k] + \\ &+ \langle \epsilon\eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} \rangle + \langle \epsilon\eta(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k+1)} \rangle + \langle \gamma\omega(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} \rangle + \langle \delta\mu(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} \rangle + \\ &+ \text{члени вищого порядку,} \end{aligned} \quad (10.10)$$

де

$$F_c^\circ(k) = F_c[x^\circ(k), x^\circ(k+1), \lambda^\circ(k+1), u^\circ(k), k]. \quad (10.11)$$

Для мінімуму критерія J_0 необхідно виконати наступні умови

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon = \delta = \gamma = 0} = 0, \quad (10.12)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \gamma} \right|_{\epsilon = \delta = \gamma = 0} = 0, \quad (10.13)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \delta} \right|_{\epsilon = \delta = \gamma = 0} = 0. \quad (10.14)$$

Виконавши підстановку (10.10) в (10.9) і враховуючи необхідні умови існування мінімуму J_c [див. рівняння (10.12)-(10.14)], отримаємо

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} \rangle + \langle \eta(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k+1)} \rangle \right] = 0, \quad (10.15)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \omega(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} \rangle = 0, \quad (10.16)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \mu(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u^\circ(k+1)} \rangle = 0. \quad (10.17)$$

Рівняння (10.10-10.15) можуть бути записані як

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} \rangle = & - \sum_{k=1}^N \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle = - \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle + \\ & + \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=0} - \\ & \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=N} , \end{aligned} \quad (10.18)$$

де

$$F_c^\circ(k-1) = F_c[x^\circ(k-1), x^\circ(k), \lambda^\circ(k), u^\circ(k-1), k-1] . \quad (10.19)$$

Рівняння (10.18) може бути записано більш скорочено у вигляді

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} + \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle + \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=0}^k = N = 0. \quad (10.20)$$

Згідно основній лемі варіаційного числення, рівняння (10.20)

задовольняється, якщо виконуються наступні рівняння:

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} + \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} = 0 , \quad (10.21)$$

$$\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=0}^k = N = 0. \quad (10.22)$$

Рівняння (10.21) є дискретним рівнянням Ейлера-Лагранжа, воно є необхідною умовою існування екстремуму (максимуму або мінімуму) критерія якості J_c . Рівняння (10.22) відомо як умова трансверсальності, гранична умова, яка необхідна для вирішення диференціальних рівнянь в частинних похідних (10.21).

Враховуючи дві додаткові умови (10.16) и (10.17) , отримаємо

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda_i^\circ(k+1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n , \quad (10.23)$$

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u_j^\circ(k+1)} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p . \quad (10.24)$$

Рівняння (10.23) веде до виразу

$$x^0(k+1) = f[x^0(k), u^0(k), k] \quad (10.25)$$

і означає, що рівняння оптимальної траєкторії повинні задовольняти рівнянню стану. Рівняння (10.24) для $F_c^\circ(k)$ визначає оптимальне управління $u^0(k)$ через $x^0(k+1)$.

Для більшості задач проектування задано початковий стан $x(0)$. Звідки збурення $x(k)$ при $k=0$ рівно нулю, так як $x(0)$ зафіксовано. Умова трансверсальності (10.22) зводиться до умови.

$$\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=N} = 0. \quad (10.26)$$

Більшість задач оптимального управління класифікують згідно з граничними умовами. Наприклад, якщо $x(N)$ задано, то маємо задачу проектування із закріпленими крайніми точками. Якщо значення $x(N)$ не задано або належить деякій області, то маємо задачу з вільними крайніми точками. Умову трансверсальності (10.26) необхідно використовувати згідно з наступними граничними умовами в крайніх точках:

Задача з закріпленими крайніми точками: $x(N)$ – фіксовано, $x(0) = 0$; звідки похідна

$$\eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \Big|_{k=N}$$

має довільне значення і для розв'язування рівняння (10.21) немає необхідності в умові трансверсальності.

Задача з вільними крайніми точками: $x(N)$ – не фіксовано (вільне), $x(N)$ – може бути фіксовано. Тоді

$$\eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial x^\circ(k)} \Big|_{k=N} = 0,$$

що є умовою трансверсальності, яка необхідна для розв'язування рівняння (10.21). В багатьох випадках одні елементи вектора $x(k)$ фіксовані, а інші вільні.

Приклад 10.1.

Знайти оптимальне управління $u^\circ(k), k = 0, 1, 2, \dots, 10$ яке мінімізує критерій якості

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} [x^2(k) + 2u^2(k)]$$

при обмеженні у вигляді

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k)$$

для наступних випадків.

А. Початковий стан $x(0) = 1$, кінцевий $x(11) = 0$.

Б. Початковий стан $x(0) = 1$, кінцевий стан $x(11)$ не фіксований.

Випадок А.

Запишемо критерій оптимальності у вигляді

$$J_c = \sum_{k=0}^{10} F_c[x(k) + u(k)]$$

$$F_c[x(k), u(k)] = \frac{1}{2} [x^2(k) + 2u^2(k)] + \lambda(k+1)[x(k+1) - x(k) - 2u(k)] = F_c(k).$$

Використовуючи рівняння (10.21), визначимо дискретне рівняння Ейлера-Лагранжа з урахуванням

$$\lambda^\circ(k+1) - \lambda^\circ(k) - x^\circ(k) = 0 \quad (10.27)$$

і (10.23) буде мати вигляд

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} = x^\circ(k+1) - x^\circ(k) - 2u^\circ(k) = 0. \quad (10.28)$$

Оптимальне управління визначається із (10.24) наступним чином

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} = 2u^\circ(k) - 2\lambda^\circ(k+1) = 0.$$

Звідки

$$u^\circ(k) = \lambda^\circ(k+1). \quad (10.29)$$

Після підстановки (10.29) в (10.28) рівняння (10.27) і (10.28) породжують систему із двох різницевих рівнянь першого порядку, вирішення якої визначає $X(k+1)$. Так як $X(0)$ и $X(11)$ задані, в розглянутому випадку ці значення визначають граничні умови для вирішення рівнянь (10.27) та (10.28) і використовувати умову трансверсальності (10.26) немає необхідності. Система із двох різницевих рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} \lambda^\circ(k+1) - \lambda^\circ(k) - x^\circ(k) &= 0 \\ x^\circ(k+1) - 2\lambda^\circ(k+1) - x^\circ(k) &= 0 \end{aligned}$$

за умови $x(0)=1$ і $x(11) = 0$. Ці рівняння можна розв'язати методом z -перетворення або методом перехідних станів. Рішення мають вид

$$x^o(k) = 0,289[2,732 + 2\lambda^o(0)](3,732)^k + 0,289[0,732 - 2\lambda^o(0)] \cdot (0,268)^k. \quad (10.30)$$

$$\lambda^o(k) = [0,289 + 0,211\lambda^o(0)](3,732)^k + [-0,289 + 0,789\lambda^o(0)] \cdot (0,268)^k. \quad (10.31)$$

З рівняння (10.30) при $x(11) = 0$ визначимо s

$$\lambda^o(0) = -1,366.$$

Звідси оптимальна траєкторія $x(k)$ описується як:

$$x^o(k) = (0,268)^k, \quad (10.32)$$

а оптимальне управління:

$$u^o(k) = -2,732(0,268)^{k+1} = -0,732x^o(k) \quad (10.33)$$

При $k = 11$, $x^o(11)$ повинно дорівнювати нулю; однак використання чисельних методів дає в цьому випадку похибку $(0,268)^{11} = 5,1 \cdot 10^{-7}$.

Випадок Б.

Якщо $x(0) = 1$, а $x(11)$ не фіксовано, необхідно використати умову трансверсальності.

$$\left. \frac{\partial F_c^o(k-1)}{\partial x^o(k)} \right|_{k=11} = 0.$$

Остання умова дає

$$\lambda^o(11) = 0. \quad (10.34)$$

Підставляючи (10.34) в (10.31), отримаємо такий же результат, як і в (10.32) і (10.33).

Однаковий результат при вільному та закріпленому кінці $x(11)$ пояснюється тим, що критерій якості містить обмеження для $x(k)$, через що $x(k)$ швидко наближається до нуля. В загальному випадку, коли $x(N)$ не фіксовано, воно може досягти будь-якого кінцевого значення.

Таким чином, метод варіаційного числення потребує розв'язування дискретного рівняння Ейлера-Лагранжа. Однак для системи n -го порядку, порядок цього рівняння дорівнює $2n$. Це означає що, розв'язування рівняння Ейлера-Лагранжа є достатньо складною процедурою.

10.2. Дискретний принцип максимуму(мінімуму)

Принцип максимуму (чи мінімуму) Понтрягіна є універсальним методом пошуку оптимального управління для широкого класу неперервних систем. Він базується на варіаційному численні, але процедура пошуку оптимального розв'язку оригінальніша, аніж при використанні рівняння Ейлера-Лагранжа. Для розрахунку цифрових систем управління доцільно використати дискретний принцип максимуму. Строго кажучи, використання дискретного принципу максимуму потребує дослідження умови випуклості системи. Матеріал даного розділу обмежений практичним використанням метода, тому строгі математичні викладки зведені до мінімуму.

Задача проектування може бути сформульована наступним чином. Знайти оптимальне управління $U^0(k)$ на інтервалі $[0, N]$, яке мінімізує критерій оптимальності:

$$J = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] \quad (10.35)$$

за обмежень

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad (10.36)$$

Член $G[x(N), N]$ у виразі (10.35) є термінальною складовою критерія якості. Ця складова необхідна як обмеження на кінцевий стан тільки в випадку, якщо $x(11)$, не є закріпленою точкою.

По аналогії з множником Лагранжа визначимо n -мірний додатковий вектор $p(k)$. Звідси задача оптимізації еквівалентна мінімізації

$$J_c = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N+1} \left[F[x(k), u(k), k] - \langle p(k+1), [x(k+1)] - f(x, u, k) \rangle \right] \quad (10.37)$$

Визначимо гамільтоніан як скалярну функцію

$$H[x(k), u(k), p(k+1), k] = F[x(k), u(k), k] - \langle p(k+1), f[x(k), u(k), k] \rangle.$$

При заданні гамільтоніана таким чином він відповідає задачі дискретного принципу максимуму. Для дискретного принципу мінімуму гамільтоніан визначається у вигляді

$$H[x(k), u(k), p(k+1), k] = F[x(k), u(k), k] + \langle p(k+1), f[x(k), u(k), k] \rangle. \quad (10.38)$$

Як буде показано нижче, принцип максимуму засновано на тім, що гамільтоніан має максимум вздовж оптимальної траєкторії, і навпаки, для принципу мінімуму гамільтоніан має мінімум.

Підставляючи вираз (10.38) в співвідношення (10.37), отримаємо

$$J_c = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [H[x(k), u(k), p(k+1), k] - \langle p(k+1), x(k+1) \rangle], \quad (10.39)$$

що відповідає принципу мінімуму.

Нехай $x(k)$, $x(k+1)$ та $u(k)$ має наступні варіації:

$$\begin{aligned} x(k) &= x^\circ(k) + \epsilon \eta(k) & (n \times 1), \\ x(k+1) &= x^\circ(k+1) + \epsilon \eta(k+1) & (n \times 1), \\ u(k) &= u^\circ(k) + \delta \mu(k) & (p \times 1), \\ p(k+1) &= p^\circ(k+1) + \gamma \omega(k+1) & (n \times 1). \end{aligned}$$

Тоді вираз (10.39) можна записати як

$$J_c = G[x^\circ(N) + \epsilon \eta(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} H[x^\circ(k) + \epsilon \eta(k), u^\circ(k) + \delta \mu(k), p^\circ(k+1) + \gamma \omega(k+1), k] - \langle p^\circ(k+1) + \gamma \omega(k+1), x^\circ(k+1) + \epsilon \eta(k+1) \rangle \quad (10.40)$$

Розкладаючи $G[x(N), N]$ в ряд Тейлора в околі точки $G[x^\circ(N), N]$ отримаємо

$$G[x(N), N] = G[x^\circ(N), N] + \epsilon \langle \eta(N), \frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} \rangle + \dots$$

Також розкладаючи $H[x(k), u(k), p(k+1), k]$ в ряд Тейлора в околі точки $x^\circ(k), u^\circ(k), p^\circ(k+1)$ і $x^\circ(k+1)$:

$$\begin{aligned} H[x(k), u(k), p(k+1), k] &= H[x^\circ(k), u^\circ(k), p^\circ(k+1), k] + \\ &+ \epsilon \langle \eta(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} \rangle + \delta \langle \mu(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} \rangle + \gamma \langle \omega(k+1), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial p^\circ(k+1)} \rangle + \dots \end{aligned}$$

де

$$H^\circ(k) = H[x^\circ(k), u^\circ(k), p^\circ(k+1), k].$$

Підставляючи в вираз (10.40) розклад в ряд Тейлора для $G[x(N), N]$ і $H[x(k), u(k), p(k+1), k]$ і враховуючи наступні необхідні умови мінімуму J_c :

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon = \delta = \gamma = 0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \gamma} \right|_{\epsilon = \delta = \gamma = 0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \delta} \right|_{\epsilon = \delta = \gamma = 0} = 0.$$

Отримаємо:

$$\langle \eta(N), \frac{\partial H^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(N), \frac{\partial H^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k+1), \eta(k+1) \rangle = 0, \quad (10.41)$$

$$\langle \mu(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mu^\circ(k)} \rangle = 0, \quad (10.42)$$

$$\langle \omega(k+1), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial p^\circ(k+1)} - x^\circ(k+1) \rangle = 0. \quad (10.43)$$

З рівняння (10.43) витікає

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial p^\circ(k+1)} = x^\circ(k+1).$$

Що є вихідним рівнянням стану (10.36). Із рівняння (10.42) маємо

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} = 0,$$

що відповідає екстремуму гамільтоніана відносно оптимального управління вздовж оптимальної траєкторії.

Останній член в лівій частині рівняння (10.41) можна записати як:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k+1), \eta(k+1) \rangle = \sum_{k=1}^N \langle p^\circ(k), \eta(k) \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k), \eta(k) \rangle + \langle p^\circ(N), \eta(N) \rangle - \langle p^\circ(0), \eta(0) \rangle. \quad (10.44)$$

Оскільки $x(0)$ задано, тоді рівняння (10.44) отримає вигляд

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k+1), \eta(k+1) \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k), \eta(k) \rangle + \langle p^\circ(N), \eta(N) \rangle.$$

Після підстановки останнього рівняння в (10.41) і перетворень отримаємо

$$\left\langle \frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} - p^\circ(N), \eta(N) \right\rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} - p^\circ(k), \eta(k) \right\rangle = 0. \quad (10.45)$$

Враховуючи, що варіації незалежні, рівняння (10.45) задовольняється тільки за умови, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} &= p^\circ(N), \\ \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} &= p^\circ(k). \end{aligned}$$

Таким чином, критерій якості J_c досягає екстремуму, коли виконуються наступні умови:

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} = p^\circ(k), \quad (10.46)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial p^\circ(k+1)} = x^\circ(k+1), \quad (10.47)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} = 0, \quad (10.48)$$

$$\frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} = p^\circ(N). \quad (10.49)$$

Рівняння (10.46) и (10.47) дають $2n$ різницевих рівнянь першого порядку (канонічні рівняння стану). Рівняння (10.47) визначає оптимальне управління $u^0(k)$, а рівняння (10.49) задає умову трансверсальності, яку необхідно використовувати, коли $x(N)$ є незакріпленою точкою. Якщо деякі елементи вектора $x(k)$ відомі, то відповідна умова трансверсальності для $p^0(k)$ не використовується.

Приклад 10.2.

Знайти оптимальне управління $u(k), k = 0, 1, \dots, 10$, яке мінімізує

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} [x^2(k) + 2u^2(k)] \quad (10.50)$$

за наявності обмеження

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k).$$

Початковий стан $x(0) = 1$, кінцевий $x(11) = 0$. Ця задача співпадає із задачею А прикладу 10.1.

Першим кроком синтезу з використанням дискретного принципу мінімуму є визначення гамільтоніана. У відповідності з виразом (10.38) маємо:

$$H[x(k), u(k), p(k+1)] = \frac{1}{2}[x^2(k) + 2u^2(k)] + p(k+1)[x(k) + 2u(k)].$$

Канонічні рівняння стану можуть бути отримані із рівнянь (10.46) і (10.47). Вони мають вигляд

$$p^\circ(k+1) - p^\circ(k) = -x^\circ(k), \quad (10.51)$$

$$x^\circ(k+1) - x^\circ(k) = 2u^\circ(k).$$

Із рівняння (10.48) знайдемо оптимальне управління

$$u^0(k) = -p^\circ(k+1). \quad (10.52)$$

Оскільки кінцева точка $x(11)$ зафіксована, в умові трансверсальності (10.49) немає необхідності.

Рішення рівнянь (10.51)-(10.52) мають вигляд:

$$x^0(k) = 0.289[2.737 - 2p^0(0)](3.732)^k + 0.289[0.732 + 2p^0(0)]0.268^k, \quad (10.53)$$

$$p^0(k) = [-0.289 + 0.211p^0(0)](3.732)^k + [0.289 + 0.789p^0(0)]0.268^k. \quad (10.54)$$

Ці рівняння подібні (10.30) и (10.31) і відрізняються кількома знаками. Підстановка $x^0(11) = 0$ в формулу (10.53) дає результат $p^0(0) = 1,366$.

Отже:

$$x^0(k) = (0.268)^k$$

$$u^0(k) = -2.732(0.268)^{k+1}$$

Рішення співпадає з результатами, отриманими в прикладі 10.1 (задача Б).

Якщо $x(11)$ є вільною крайньою точкою, додамо к критерію (10.50) додаткову термінальну складову

$$J = \frac{1}{2}x^2(11) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}[x^2(k) + 2u^2(k)].$$

Умова трансверсальності (10.49) дає

$$x^0(11) = p^0(11)$$

Тоді із формул (10.53) і (10.54) при $k = 11$ маємо $p(0) = 1,366$. Для $x^0(k)$ і $u(0)$ є той же результат, що і в попередньому випадку.

Необхідно підкреслити, що розв'язування задачі оптимізації за критерієм мінімуму з використанням критерію з термінальною складовою при вільній крайній точці можуть дати результат, відмінний від результату, отриманого при розв'язуванні методом варіаційного числення.

10.3. Метод динамічного програмування

Принцип оптимальності. Оптимальна стратегія управління має ту властивість, що за будь якого початкового стану і управління на початкових кроках, подальше управління має бути оптимальним стосовно стану, що є наслідком попереднього управління.

Іншими словами, будь яка стратегія управління, яка оптимальна на інтервалі $[r, N]$, обов'язково є оптимальною на інтервалі $[r+1, N]$ для $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Сформулюємо задачу синтезу лінійного оптимального цифрового регулятора. Знайти оптимальне управління $u^0(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, таке, щоб

$$J_N = G[x(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} F_k[x(k), u(k)] = \text{мінімум},$$

де

$$G[x(N)] = \frac{1}{2} x'(N) S x(N),$$

$$F_x[x(k), u(k)] = \frac{1}{2} x'(k) \hat{Q} x(k) + \frac{1}{2} u'(k) \hat{R} u(k) \quad (10.53).$$

за умови обмеження $x(k+1) = \varphi x(k) + \theta u(k)$ і при заданому $x(0)$.

Позначим через $J_{N-1}[x(i)]$ критерій оптимальності на останніх $(N-i)$ інтервалах, або кроках. Тоді

$$J_{N-1}[x(i)] = G[x(N)] + \sum_{k=i}^{N-1} F_k[x(k), u(k)] \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Нехай мінімальне значення $J_{N-1}[x(i)]$ записується виразом

$$f_{N-1}[x(i)] = \min_{u(i)} J_{N-1}[x(i)].$$

При $z = N$ останній вираз є критерієм оптимальності, виграш на останньому (нульовому) кроці, який є термінальною складовою

$$f_0[x(N)] = G[x(N)] = \frac{1}{2} x'(N) S x(N). \quad (10.54)$$

При $i=N-1$ отримуємо однокроковий процес, або процес з одним інтервалом управління, який співпадає з останнім кроком. Тоді оптимальне значення критерія якості

$$f_1[x(N-1)] = \min_{u(N-1)} J_1[x(N-1)] = \min_{u(N-1)} [G[x(N)] + F_{N-1}[x(N-1), u(N-1)]]. \quad (10.55)$$

Підставляючи (10.53) і співвідношення

$$G[x(N)] = \frac{1}{2} [\varphi x(N-1) + \theta u(N-1)]' S [\varphi x(N-1) + \theta u(N-1)].$$

в (10.55) і спрощуючи вираз, отримаємо:

$$\begin{aligned} f_1[x(N-1)] = \min_{u(N-1)} & \left[\frac{1}{2} x'(N-1) (\hat{Q} + \varphi' S \varphi) x(N-1) + \right. \\ & x'(N-1) \frac{1}{2} \varphi' S \theta u(N-1) + \frac{1}{2} u'(N-1) \theta' S \varphi x(N-1) + \frac{1}{2} u'(N-1) (\hat{R} + \\ & \left. \theta' S \theta) u(N-1) \right] = \min_{u(N-1)} J_1[x(N-1)] \end{aligned} \quad (10.56)$$

Запишемо умову мінімуму $J_1[x(N-1)]$:

$$\frac{\partial J_1[x(N-1)]}{\partial u(N-1)} = 0.$$

В результаті отримаємо:

$$\left[\left(\frac{1}{2} \varphi' S \theta \right)' + \frac{1}{2} \theta' S \varphi \right] x^0(N-1) + (\hat{R} + \theta' S \theta) u^0(N-1) = 0.$$

Таким чином, оптимальне управління має вигляд

$$u^0(N-1) = -(\hat{R} + \theta' S \theta)^{-1} S \varphi x^0(N-1). \quad (10.57)$$

Підставивши вираз (10.57) в (10.56) для $x(N-1)$, після спрощень

маємо

$$K(N-1) = \hat{Q} + \varphi' S \varphi - (\theta' S \varphi)' (\hat{R} + \theta' S \theta)^{-1} \theta' S \varphi, \quad (10.58)$$

$$K(N) = S.$$

Зауважимо, що співвідношення (11.49) співпадає з рівнянням Ріккати при $k = N-1$, яке буде розглянуто в розділі 11.

Оптимальні значення виграшу згідно виразів (10.54) и (10.55) можна записати як:

$$\begin{aligned} f_0[x(N)] &= \frac{1}{2} x'(N) k(N) x(N), \\ f_1[x(N-1)] &= \frac{1}{2} x'(N-1) K(N-1) x(N-1). \end{aligned} \quad (10.59)$$

Продовжуючи цей процес, покладемо $i = N-2$, тобто розглянемо задачу оптимізації для двох (останніх) кроків. Запишемо оптимальне значення критерію для двохкрокового процесу:

$$f_2[x(N-2)] = \min_{u(N-2)} J_2[x(N-2)] = \min_{\substack{u(N-2) \\ u(N-1)}} [F_{N-2}[x(N-2), u(N-2)] + F_{N-1}[x(N-1), u(N-1)] + G[x(N)]]. \quad (10.60)$$

Згідно принципу оптимальності, для того, щоб двохкроковий процес був оптимальним незалежно від управління на першому кроці, останній крок повинен бути оптимальним сам по собі. Тому запишемо співвідношення (10.60) у вигляді

$$f_2[x(N-2)] = \min_{u(N-2)} [F_{N-2}[x(N-2), u(N-2)] + f_1[x(N-1)], \quad (10.61)$$

де $f_1[x(N-1)]$ – оптимальний виграш на останньому кроці, згідно виразу (10.59). Підставляючи співвідношення

$$F_{N-2}[x(N-2), u(N-2)] = \frac{1}{2} x'(N-2) \hat{Q} x(N-2) + \frac{1}{2} u'(N-2) \hat{R} u(N-2),$$

і співвідношення

$$\begin{aligned} f_1[x(N-1)] &= \\ &= \frac{1}{2} [\varphi x(N-2) + \theta u(N-2)]' K(N-1) [\varphi x(N-2) + \theta u(N-2)] \end{aligned}$$

в вираз (10.61) і враховуючи

$$\frac{\partial J_2[x(N-2)]}{\partial u(N-2)} = 0,$$

можна показати, що оптимальне управління має вигляд:

$$\begin{aligned} u^0(N-2) &= -[\hat{R} + \theta' K(N-1) \theta]^{-1} [K(N-1) \varphi] x^0(N-2), \\ f_2[x(N-2)] &= \frac{1}{2} x'(N-2) [\hat{Q} + \varphi' K(N-1) \varphi - [\theta' K(N-1) \varphi]' [\hat{R} + \\ &\quad + K(N-1) \theta]^{-1} \varphi' [K(N-1) \varphi]] x(N-2). \quad (10.62) \end{aligned}$$

Враховуючи, що:

$$\begin{aligned} K(N-2) &= \hat{Q} + \varphi' K(N-1) \varphi \\ &\quad - [K(N-1) \varphi]' [\hat{R} + \theta' K(N-1) \theta]^{-1} [\theta' K(N-1) \varphi] \end{aligned}$$

запишемо співвідношення (10.62) в компактному вигляді

$$f_2[x(N-2)] = \frac{1}{2} x'(N-2) K(N-2) x(N-2).$$

Подовжуючи процес методом індукції можна показати, що у загальному випадку

$$f_{N-1}[x(i)] = \frac{1}{2}x'(i)K(i)x(i),$$

де

$$K(i) = \hat{Q} + \varphi'K(i+1)\varphi - [\theta'K(i+1)\varphi]'[\hat{R} + \theta'K(i+1)\theta]^{-1}[\theta'K(i+1)\varphi]. \quad (10.63)$$

Оптимальне управління має вигляд:

$$u^0(i) = -[\hat{R} + \theta'K(i+1)\theta]^{-1}[\theta'K(i+1)\varphi]x^0(i). \quad (10.64)$$

Таким чином, на основі принципу оптимальності отримано рівняння Ріккаті, а також вираз (10.64) для визначення оптимального управління. Даний метод вирішення називається динамічним програмуванням.

Питання до самоконтролю

1. Класичне варіаційне числення. Характеристика та умови використання.
2. Дискретне рівняння Ейлера-Лагранжа.
3. Умови трансверсальності і необхідність їх застосування.
4. Дискретний принцип максимуму Понтрягіна.
5. Гамільтоніан та його математичний опис.
6. Різницеві канонічні рівняння стану.
7. Умова екстремуму гамільтоніана по оптимальному управлінню.
8. Принцип оптимальності Белмана.
9. Дискретне рівняння Белмана.
10. Покрокова процедура оптимізації.

11. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЛІНІЙНО-КВАДРАТИЧНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА

11.1. Постановка задачі

Одним із найбільш відомих сучасних методів проектування оптимальних систем управління є метод синтезу лінійного регулятора. При постановці задачі вхідні впливи вважаються нульовими, а метою проектування є підтримування станів або вихідних змінних системи максимально близьким до положення рівноваги. Умова нульових вхідних впливів не є жорстким обмеженням при проектуванні, оскільки для результуючої системи гарантується стійкість (на нескінченнім інтервалі часу) і задане згасання, оскільки на практиці якість системи буде задовільною, навіть якщо вхідні впливи відмінні від нуля.

Надалі спочатку визначимо критерій оптимальності для лінійного неперервного процесу з квантуванням за часом, а потім – для повністю цифрового процесу.

Задача синтезу лінійно-квадратичного цифрового регулятора може бути сформульована наступним чином.

Нехай задана лінійна система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (11.1)$$

де $x(t)$ – $(n \times 1)$ -вимірний вектор стану; $u(t)$ – $(p \times 1)$ -вимірний вектор управління, який задовольняє співвідношенню

$$u(t) = u(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T. \quad (11.2)$$

Знайти оптимальне управління $u^0(k)$ для $k = 1, 2, \dots, N-1$, яке мінімізує квадратичний критерій

$$J = \frac{1}{2} \langle x(t_f), Sx(t_f) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt. \quad (11.3)$$

де $t_f = NT$; S , Q – симетричні позитивно-напіввизначені матриці $(n \times n)$; R – симетрична позитивно-визначена матриця $(p \times p)$.

Перш за все приведемо систему (11.1) до дискретного вигляду, тобто до різницевого рівняння:

$$x[(k+1)T] = \varphi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT), \quad (11.4)$$

де

$$\varphi(T) = e^{AT},$$

$$\theta(T) = \int_0^T \varphi(T-\tau)Bd\tau.$$

Критерій (11.3) також запишемо в дискретному вигляді

$$J_N = \frac{1}{2} \langle x(NT), Sx(NT) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} [\langle x(t), Qx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt. \quad (11.5)$$

Перехідне рівняння стану для системи (11.1) для $t > kT$ має вигляд:

$$x(t) = \varphi(t-kT)x(kT) + \theta(t-kT)u(kT) \quad (11.6)$$

$$x'(t) = x'(kT)\varphi'(t-kT) + u'(kT)\vartheta'(t-kT). \quad (11.7)$$

З урахуванням особливостей матриць Q і R видно, що $Q(T)$ є симетричною і підстановка (11.2), (11.6) і (11.7) в (11.5) дає:

$$J_N = \frac{1}{2} x'(NT)Sx(NT) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x'(kT)\hat{Q}(T)x(kT) + 2x'(kT)M(T)u(kT) + u'(kT)\hat{R}(T)u(kT)]. \quad (11.8)$$

де

$$\hat{Q}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi'(t-kT)Q\varphi(t-kT)dt,$$

$$M(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi'(t-kT)Q\varphi(t-kT)dt,$$

$$\hat{R}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} [\vartheta'(t-kT)Q\varphi(t-kT) + R]dt.$$

де $\hat{Q}(T)$ є позитивно-напіввизначеною; $\hat{R}(T)$ є симетричною і позитивно-визначеною. Проте відносно матриці $M(T)$ нічого сказати не можна.

Тепер задача полягає у тому, щоб для заданої цифрової системи (11.4) визначити оптимальне управління, яке мінімізує критерій (11.8).

У загальному випадку цифрову систему можна описати рівнянням стану типу (11.4) із самого початку, тому немає особливого сенсу в такому складному критерії якості (11.8), тим більше не ясно, із яких міркувань

повинна обиратися матриця M . Природніше розглядати наступний квадратичний критерій якості

$$J_N = \frac{1}{2} \langle x(N), Sx(N) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\langle x(k), Qx(k) \rangle + \langle u(k), Ru(k) \rangle], \quad (11.9)$$

де Q і R – матриці ваги з визначеними раніше властивостями, а період квантування T не розглядається для спрощення запису.

11.2. Синтез лінійно-квадратичного цифрового регулятора на кінцевому інтервалі часу

Задача побудови лінійно-квадратичного цифрового регулятора, яка сформульована в розділі 11.1, може бути вирішена з використанням дискретного принципу максимуму.

Процес управління системою (11.1) згідно (11.4) описується рівнянням

$$x(k+1) = \varphi x(k) + \theta u(k) \quad (11.10)$$

при заданому $x(0)$. Мета синтезу полягає в обчисленні $u^0(k)$, яке переводить систему (11.10) із довільних початкових станів $x(0)$ в нульові кінцеві і мінімізує критерій якості J_N (11.9), де $Q = \hat{Q}$, $R = \hat{R}$.

Гамільтоніан даної задачі має вигляд

$$H(k) = H[x(k), p(k+1), u(k)] = \frac{1}{2} \langle x(k), \hat{Q}x(k) \rangle + \frac{1}{2} \langle u(k), \hat{R}u(k) \rangle + \langle p(k+1), \varphi x(k) + \theta u(k) \rangle. \quad (11.11)$$

Необхідні умови існування екстремума для J_N згідно (11.11) мають вигляд

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial x^0(k)} = p^0(k) = \hat{Q}x^0(k) + \varphi' p^0(k)(k+1), \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial p^0(k+1)} = x^0(k+1) = \varphi x^0(k) + \theta u^0(k), \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial H^0(k)}{\partial u^0(k)} = \hat{R}u^0(k) + \theta' p^0(k+1) = 0, \quad (11.14)$$

де x^0 , p^0 , u^0 – оптимальні значення змінних.

Оскільки $x(N)$ не задано, врахуємо умови трансверсальності

$$\frac{\partial G[x(N), N]}{\partial x(N)} = \frac{\partial}{\partial x(N)} \left[\frac{1}{2} \langle x(N), Sx(N) \rangle \right] = Sx(N) = p(N).$$

Оптимальне управління знаходимо із співвідношення (11.14) :

$$u^0(k) = -\hat{R}^{-1}[\theta' p^0(k+1)]. \quad (11.15)$$

Підставляючи останній вираз в (11.12) і (11.13), отримаємо канонічні рівняння стану системи:

$$x^0(k+1) = \varphi x^0(k) - \theta \hat{R}^{-1} \theta' p^0(k+1), \quad (11.16)$$

$$(\varphi') p^0(k+1) = p^0(k) - (\hat{Q}) x^0(k). \quad (11.17)$$

Рівняння (11.16) і (11.17) є системою різницевих рівнянь, які необхідно розв'язати за відомих граничних умов $x(0)$ та $p^0(N) = Sx(N)$. Відмітимо, що рівняння (11.16) і (11.17) зв'язані через $x^0(k)$ і $p^0(k)$ і їх не можна розв'язувати незалежно.

Проте можна показати, що шукане рішення має вигляд

$$p(k) = K(k)x(k), \quad (11.18)$$

де $K(k)$ – $(n \times n)$ -вимірна матриця з невідомими властивостями за винятком того, що при $k = N$, як наслідок з (11.9),

$$K(N) = S. \quad (11.19)$$

Підставляючи вираз (11.18) в (11.16), отримаємо:

$$x^0(k+1) = [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \varphi x^0(k). \quad (11.20)$$

Аналогічно, підставляючи (11.18) в рівняння (11.17), маємо

$$\varphi' K(k+1) x^0(k+1) = [K(k) - \hat{Q}] x^0(k). \quad (11.21)$$

Тепер підставимо вираження (11.20) в (11.21). В результаті отримаємо

$$\varphi' K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \varphi x^0(k) = [K(k) - \hat{Q}] x^0(k).$$

Для будь якого $x^0(k)$ повинно виконуватися наступне співвідношення:

$$\varphi' K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \varphi = K(k) - \hat{Q}. \quad (11.22)$$

Це нелінійне матричне різницеве рівняння відносно $K(k)$ називається дискретним рівнянням Ріккаті. Матриця $K(k)$ розмірністю $(n \times n)$ відома як коефіцієнт Ріккаті. Гранична умова для рівняння Ріккаті задається рівнянням (11.19). В загальному випадку рівняння (11.22) складається із $2n$ скалярних рівнянь з тією ж кількістю невідомих елементів матриці $K(k)$. Проте надалі

буде показано, що матриця $K(k)$ симетрична, тому вона має тільки $n(n+1)/2$ невідомих. Оптимальне управління визначається в результаті підстановки (11.18) в (11.15). Таким чином, отримаємо

$$\begin{aligned} u^0(k) &= -[I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \hat{R}^{-1} [\theta' K(k+1) \varphi] x^0(k) = \\ &= -[\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} [\theta' K(k+1) \varphi] x^0(k). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Тобто це рівняння представлено в формі зворотного зв'язку за станом системи. Перш ніж описати методи розв'язування рівняння Ріккати розглянемо важливі властивості цього рівняння і коефіцієнта Ріккати $K(k)$.

Рівняння Ріккати у вигляді (11.22) представлено в одній з багатьох еквівалентних форм, кожна з яких задовольняє оптимальному синтезу лінійного дискретного регулятора. Коефіцієнт Ріккати $K(k)$ – це симетрична матриця, яка є позитивно напіввизначеною для $k=0,1,2, \dots, N$.

Зробимо ряд зауважень стосовно керованості, спостережності і стійкості системи. Для задачі синтезу лінійного цифрового регулятора з скінченним інтервалом часу (N – обмежено) не потрібно, щоб процес був керованим, спостережним або навіть стійким. Критерій J_N може мати скінченне значення при скінченному N , навіть якщо некерований стан стійкий. Мета синтезу з використанням квадратичного критерію полягає в переміщенні системи із довільного початкового стану $x(0)$ як можна ближче к стану рівноваги (до початку координат), але сам кінцевий стан $x(N)$ не визначений. Тому для скінченних N стійкість системи не є обов'язковою.

11.3. Синтез лінійно-квадратичного цифрового регулятора на нескінченному інтервалі часу

Для нескінченного інтервалу часу, або нескінченного числа шагів $N=\infty$, критерій якості (11.9) приймає вигляд:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\langle x(k), \hat{Q}x(k) \rangle + \langle u(k), \hat{R}u(k) \rangle].$$

В даному випадку термінальна складова в критерії відсутня, оскільки при безконечному збільшенні N -кінцевий стан $x(N)$ повинен прямувати до

нуля (положенню рівноваги), тому в термінальному обмеженні більш немає необхідності.

Важлива вимога при синтезі лінійно-квадратичного регулятора на нескінченному інтервалі часу полягає у тому, що замкнута система повинна бути асимптотично-стійкою, тобто задовольняти наступним умовам:

- бути або повністю керованою, або стабілізованою за допомогою зворотного зв'язку за станом (необхідна умова);
- бути повністю спостережною;
- коефіцієнти матриці Ріккати є сталими, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k) = K.$$

Змінюючи в рівнянні (11.22) $K(k+1)$ і $K(k)$ на K , отримаємо рівняння Ріккати

$$K = \varphi' K \varphi + \hat{Q} - \varphi' K \theta (\hat{R} + \theta' K \theta)^{-1} \theta' K \varphi, \quad (11.24),$$

яке є алгебраїчним рівнянням Ріккати. На підставі (11.23) оптимальне управління має вигляд

$$u^0(k) = -(\hat{R} + \theta' K \theta)^{-1} \theta' K \varphi x^0(k). \quad (11.25)$$

В цьому випадку матриця зворотного зв'язку є сталою, тобто

$$G = (\hat{R} + \theta' K \theta)^{-1} \theta' K \varphi.$$

Оптимальне значення критерія якості для нескінченного N дорівнює:

$$J_\infty^0 = \frac{1}{2} x'(0) K x(0).$$

Умови керованості і спостережності потребують подальшого обговорення.

Для оптимального регулятора (11.25) на нескінченному інтервалі часу необхідно, щоб процес (11.10) був або керованим, або стабілізованим за допомогою зворотного зв'язку за станом. Керованість є більш сильною вимогою, оскільки некерована система може бути стабілізованою, якщо некеровані стани системи стійкі. Проте, той факт, що система (11.10) є керованою або стабілізованою, ще не означає асимптотичну стійкість

замкненої системи, побудованій на основі теорії лінійно-квадратичного оптимального регулятора.

Умова спостережності також повинна виконуватися. Тому керованість і стабілізованість є необхідними умовами, у той час як спостережність служить достатньою умовою.

11.4. Синтез оптимального за витратами енергії цифрового регулятора

Проблема проектування оптимальної системи може бути сформульована як задача переведення системи із стану $x(0)$ в стан $x(N)$ з мінімальними витратами енергії. Процедура пошуку оптимального управління базується на дискретному принципі максимуму. Задача формулюється наступним чином.

Нехай задана повністю управляюча цифрова система (11.10) у наступному дискретному вигляді

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (11.26)$$

де $x(k)$, $u(k)$ – вектори розмірністю n ; A – невироджена матриця.

Необхідно знайти оптимальне управління $u^o(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ яке переводить систему (11.26) із початкового стану $x(0)$ в кінцевий $x(N) = 0$ і мінімізує функціонал

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u'(k) R u(k) = \text{minimum}, \quad (11.27)$$

де R – симетрична і позитивно-визначена матриця.

Критерій (11.27) є квадратичною формою і в даному випадку відображає енергетичні обмеження. Розв'язування задачі починаємо з знаходження гамільтоніану

$$H[x(k), p(k+1), u(k)] = \frac{1}{2} \langle u(k), Ru(k) \rangle + \langle p(k+1), x(k+1) \rangle.$$

Для мінімуму J необхідно виконати наступні умови:

$$\frac{\partial H^o(k)}{\partial x^o(k)} = p^o(k) = A^T p^o(k+1), \quad (11.28)$$

$$\frac{\partial H^{\circ}(k)}{\partial p^{\circ}(k+1)} = x^{\circ}(k+1) = Ax^{\circ}(k) + Bu^{\circ}(k), \quad (11.29)$$

$$\frac{\partial H^{\circ}(k)}{\partial U^{\circ}(k)} = Ru^{\circ}(k) + B' p^{\circ}(k+1) = 0, \quad (11.30)$$

де

$$H^{\circ}(k) = \frac{1}{2} \langle u^{\circ}(k), Ru^{\circ}(k) \rangle + \langle p^{\circ}(k+1), Ax^{\circ}(k) + Bu^{\circ}(k) \rangle$$

Оскільки $x(0)$ і $x(N)$ фіксовані, в умові трансверсальності немає необхідності.

Оптимальне управління визначається з рівняння (11.30)

$$u^{\circ}(k) = -R^{-1}B' p^{\circ}(k+1), \quad (11.31)$$

де обернена матриця R^{-1} існує, оскільки R – позитивно-визначена матриця.

В даному випадку рівняння (11.28) визначає додатковий вектор $p^{\circ}(k)$ і не залежить від змінної стану $x(k)$. Тоді рішення

$$p^{\circ}(k) = (A^{-k})' p^{\circ}(0), \quad (11.32)$$

де передбачається існування оберненої матриці A^{-1} . Підстановка виразу (11.31) в рівняння (11.29) дає

$$x^{\circ}(k+1) = Ax^{\circ}(k) - BR^{-1}B' p^{\circ}(k+1). \quad (11.33)$$

Розв'язок рівняння (11.33) має вигляд

$$x^{\circ}(N) = A^N x(0) - \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} BR^{-1}B' (A^{-1})' p^{\circ}(k). \quad (11.34)$$

Для $x^{\circ}(N) = 0$ рівняння (11.34) відносно $x(0)$ із використанням (11.32) буде мати вигляд:

$$x(0) = \sum_{k=0}^{N-1} A^{-k-1} BR^{-1}B' (A^{-k-1})' p^{\circ}(0) \quad (11.35)$$

Відмітимо, що

$$W = \sum_{k=0}^{N-1} A^{-k-1} BR^{-1}B' (A^{-k-1})' = \sum_{k=0}^{N-1} S_k S_k', \quad (11.36)$$

є матрицею керованості, якщо R – одинична матриця. Для будь якої неодиначної матриці R , яка є симетричною і позитивно-визначеною, покладемо

$$R^{-1} = KK', \quad (11.37)$$

де K – матриця розмірності $(p \times p)$. Тоді в виразі (11.36)

$$S_k = A^{-k-1}BK.$$

Оскільки R – симетрична і позитивно-визначена матриця, R^{-1} має такі ж властивості. Рівняння (11.37) має єдиний розв’язок – симетричну і позитивно-визначену матрицю K , оскільки це рівняння є простою формою нелінійного матричного рівняння Ріккати:

$$K\theta Q^{-1}\theta' - K\phi - \phi' K - R^{-1} = 0$$

при $O = I$, $Q - I = I$ і $\Phi = 0$.

Матриця W розмірністю $(n \times n)$ в (11.36) є невиродженою, якщо матриця

$$[A^{-1}BK \ A^{-2}BK \ \dots \ A^{-N}BK] \ (n \times pN) \quad (11.38)$$

має ранг n . Остання матриця може бути записана у вигляді

$$[A^{-1}B \ A^{-2}B \ \dots \ A^{-N}B] \begin{bmatrix} K & & & \\ & K & & \\ & & \ddots & \\ & & & K \end{bmatrix}.$$

Ранг матриці (11.38) той же, що і ранг матриці $[A^1B \ A^2B \ \dots \ A^N B]$ або матриці $[A^{-1}B \ A^{-2}B \ \dots \ A^{-N}B]$, оскільки K – позитивно-визначена матриця. Отже, якщо пара $[A, B]$, повністю керована, то і пара $[A, BK]$ також повністю керована.

Таким чином, якщо пара $[A, B]$ повністю керована, то W – невироджена матриця. Із (11.35) отримаємо

$$p^o(0) = W^{-1}x(0).$$

Звідси, оптимальне управління може бути визначено через стан $x(0)$, оскільки

$$u^o(k) = -R^{-1}B'(A^{-1})' p(k) = -R^{-1}B'(A^{-1})'(A^{-k})' p(0).$$

Тоді

$$u^o(k) = -R^{-1}B'(A^{-k-1})'W^{-1}x(0). \quad (11.39)$$

Підставляючи вираз (11.39) в рівняння (11.27), після спрощень отримаємо оптимальний критерій якості у вигляді

$$J^o = \frac{1}{2}x'(0)W^{-1}x(0). \quad (11.40)$$

Цінність цього результату полягає у тому, що оптимальний критерій якості залежить від початкового стану $x(0)$. Оскільки матриця W залежить тільки від заданих A , B і R , то вираз (11.40) показує, що при фіксованій верхній межі для $x(0)$ може бути визначена область керованих станів. Іншими словами, вираз (11.40) визначає область в просторі станів для $x(0)$, з якої забезпечується перевід в $x(N)=0$ для заданих N і p .

Приклад 11.1.

Задана цифрова система

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (11.41)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Необхідно визначити наступне:

Задача А. Знайти сталу матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку по G , таку, що $u(k) = -Gx(k)$ переведе систему із будь якого стану $x(0)$ в $x(N) = 0$ за $N = 2$. Визначити оптимальне управління $u(k)$ для $k = 0$, і оптимальну траєкторію $x(k)$ при $x(0) = 1$ і $x(2) = 2$.

Задача Б. Управління має обмеження $|u(k)| < 1$. визначити область керованих станів для $x(0)$ на площині станів для $N = 2$ і $x(N) = 0$.

Задача В. Знайти оптимальне управління $u(k)$, яке переведе систему із початкового стану $x(0) = 1$ в $x(2) = 0$ одночасно задовольнить критерій

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) = \text{minimum}. \quad (11.42)$$

Визначити оптимальну траєкторію $u(k)$ і оптимальне значення J .

Задача Г. Визначити область керованих станів для $x(0)$ на площині станів для $N = 2$ при $x(N) = 0$ і J , яке задано (11.42). Визначити рішення для $|u(k)| < 0,25$

Розв'язування задачі А.

Поклавши $x(2) = 0$ в рівняння (11.41), отримаємо

$$u^o(k) = -[1 \ 0][A^{-1}B \ A^{-2}B]^{-1}x(k).$$

Отже,

$$u^o(k) = -[0.5 \ 0.2]x(k).$$

Оптимальна матриця зворотного зв'язку по стану

$$G = [-0.5 \ -0.2].$$

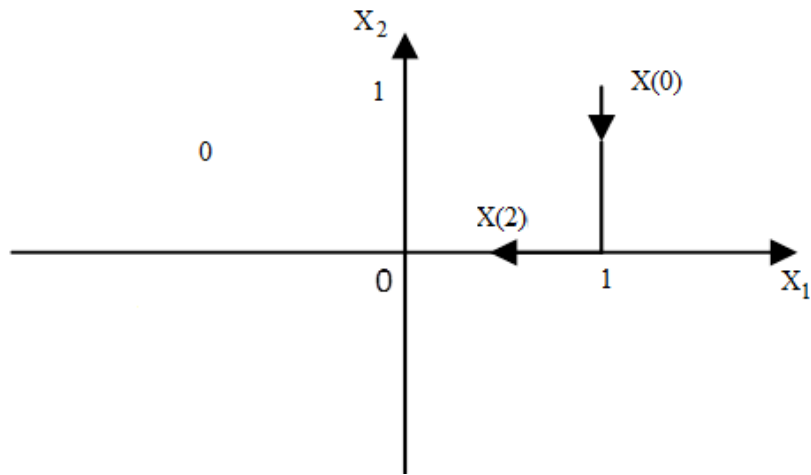


Рис. 11.1. Оптимальна траєкторія станів

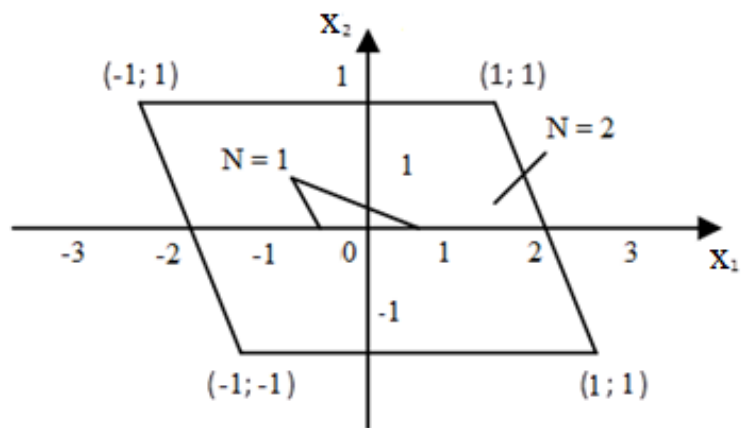


Рис. 11.2. Область управляючих станів

Для заданого початкового стану може бути отримане наступне рішення

$$\begin{aligned} u^o(0) &= 0.7, & x^o(1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ u^o(1) &= 0.5, & x^o(2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Оптимальна траєкторія станів показана на рис. 11.1

Розв'язування задачі Б.

Управління при обмеженні $|u(k)| < 1$. Для $N = 2$ рівняння перехідних станів запишемо у вигляді

$$x(2) = A^2 x(0) + ABu(0) + Bu(1) = 0.$$

Для $x(0)$ із останнього рівняння отримаємо

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -0.8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix}. \quad (11.43)$$

Вершини області керованих станів знаходимо підстановкою чотирьох можливих комбінацій $u(k) = +1$ і $u(k) = -1$ в рівняння (11.43). При цьому отримаємо наступні результати

$$u(0) = u(1) = 1, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u(0) = -u(1) = 1, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2.8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$u(0) = u(1) = -1, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad -u(0) = u(1) = 1, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -2.8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Опуклий багатокутник з цими чотирма вершинами показаний на рис. 11.2.

Розв'язування задачі В.

Для критерія якості (11.40) і $R = I$ матриця W визначається за допомогою виразу (11.36) для $N = 2$.

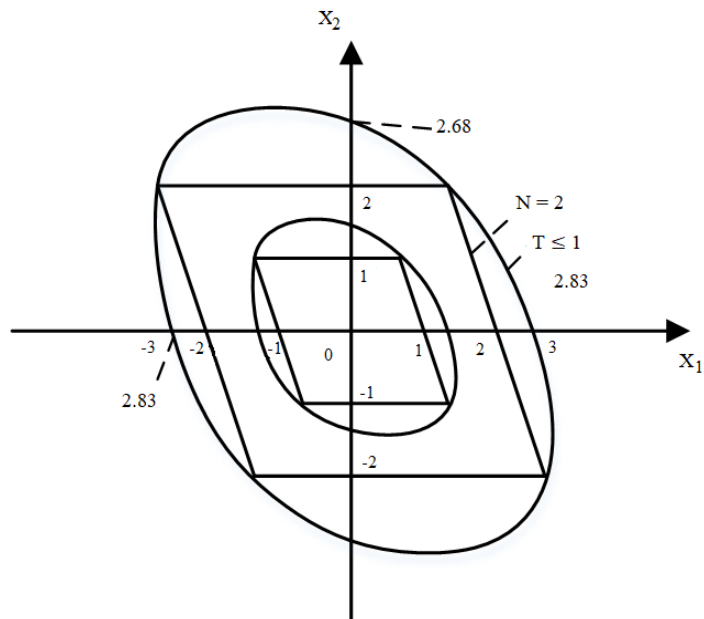


Рис. 11.3. Області керованих станів

$$W = A^{-1}BB'(A^{-1})' + A^{-2}BB'(A^{-2}) = \begin{bmatrix} 4.64 & -1.6 \\ -1.6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Оптимальне управління визначається рівнянням (11.39)

$$u^o(k) = -B'(A^{-k-1})'W^{-1}x(0).$$

Отже, $u(0) = 0,7$ і $u(1) = 0,5$. Відмітимо, що дане рішення ідентичне рішенням задачі А. Це пояснюється тим, що оскільки N менше або рівно 2, рішення для системи другого порядку у випадку $x(N) = 0$ є єдиним. Оптимальний критерій якості

$$J^o = \frac{1}{2}x'(0)W^{-1}x(0) = 0.37.$$

Розв'язування задачі Г.

Для $J \leq 1$ отримаємо

$$\frac{1}{2}x'(0)W^{-1}x(0) \leq 1$$

чи

$$0.125x_1^2(0) + 0.1x_1(0)x_2(0) + 0.145x_2^2(0) \leq 1.$$

Останній вираз описує еліпс в площині станів. Області керованих станів для $J < 1$ та для $J < 0,25$ показані на рис. 11.3.

11.5. Рекурентний метод розв'язування дискретного рівняння Ріккаті

Кількість опублікованих робіт, присвячених вирішенню і властивостями рівняння Ріккаті, може, мабуть, скласти цілу книгу. У загальному випадку розв'язати алгебраїчне рівняння Ріккаті (11.24) набагато складніше, ніж різницеве рівняння (11.22).

Різницеве рівняння Ріккаті, як правило, розв'язують одним із наступних методів:

- чисельних;
- рекурентного методу;
- методу власних значень і власних векторів.

Чисельні методи передбачають ітеративне розв'язування нелінійного різницевого рівняння Ріккаті і достатньо детально представлені в літературі. З точки зору використання для оптимізації цифрових систем управління методу динамічного програмування варто розглянути рекурентний метод розв'язування рівняння Ріккаті. Метод динамічного програмування, описаний в розділі 10.2, в загальному вигляді є також методом рекурентного розв'язування задач оптимального управління.

Розглянемо матрицю коефіцієнтів посилення зворотного зв'язку лінійно-квадратичного оптимального цифрового регулятора:

$$G(i) = [\hat{R} + \theta'K(i+1)\theta]^{-1}[\theta'K(i+1)\varphi]. \quad (11.44)$$

Запишемо оптимальне управління (11.55) у вигляді

$$u^o(i) = -G(i)x^o(i).$$

Аналогічно запишемо рівняння Ріккаті у вигляді

$$K(i) = \hat{Q} + \varphi' K(i+1) \varphi - [\theta' K(i+1) \varphi]' G(i). \quad (11.45)$$

Рівняння (11.44) і (11.45) рекурентно розв'язуються у зворотному напрямку, починаючи з граничної умови $K(N) = S$.

Використаємо рівняння Ріккаті (11.22), яке з урахуванням

$$H(k+1) = K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \quad (11.46)$$

можна записати у вигляді

$$K(k) = (\varphi') H(k+1) (\varphi) + \hat{Q}. \quad (11.47)$$

Ці два рівняння можна рекурентно розв'язати у зворотному напрямку, починаючи з граничної умови $K(N) = S$, як у методі динамічного програмування.

Рівняння (11.46) і (11.47) має таку позитивну властивість, що матриця $K(k+1)$ міститься тільки у виразі для $H(k+1)$. Однак перевага рекурентного методу, заснованого на використанні рівнянь (11.46) і (11.47), полягає в тому, що матриця зворотного зв'язку визначається безпосередньо з рівняння (11.46).

Приклад 11.2.

Припустимо, що цифровий процес першого порядку описується рівнянням

$$x(k+1) = x(k) + u(k),$$

причому $x(0) = x_0$. Мета синтезу полягає в визначенні такого оптимального управління $u^\circ(k)$, $k=0, 1, 2, \dots, 9$, яке мінімізує наступний критерій якості:

$$J_{10} = \frac{1}{2} [10x^2(10)] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 [x^2(k) + u^2(k)].$$

Нехай $S=10$, $R=1$, $Q=1$, $A=1$. При підстановці цих параметрів в співвідношення (11.45) отримуємо рівняння Ріккаті:

$$k(i) = 1 + K(i+1) - K(i-1)G(i), \quad (11.48)$$

$$G(i) = \frac{K(i+1)}{1+K(i+1)}. \quad (11.49)$$

Оптимальне управління має вигляд

$$u^\circ(i) = -G(i)x^\circ(i)$$

Рівняння (11.48) і (11.49) вирішуються рекурентно, починаючи з граничної умови $K(10) = S = 10$. Результати представлені в табл. 11.1.

Таблиця 11.1. Результати рекурентних обчислювань рекурентним методом

i	$K(i)$	$G(i)$
0	1.6180	0.6180
1	1.6180	0.6180
2	1.6180	0.6180
3	1.6180	0.6180
4	1.6180	0.6180
5	1.6182	0.6182
6	1.6188	0.6188
7	1.6236	0.6236
8	1.6562	0.6562
9	1.9091	0.9091
10	10	0

Можна показати, що оптимальна траєкторія $x(k)$ описується співвідношенням

$$x^o(k) = \prod_{i=0}^{k-1} [1 - G(i)] x_0, \text{ при } k = 0, 1, \dots, 10.$$

Для будь-якого значення $x(0)=x_0$, яке відрізняється від нуля, $x^0(k)$ швидко сходиться до нуля при зростанні k .

Питання до самоконтролю

1. Формулювання задачі синтезу лінійно-квадратичного цифрового регулятора.
2. Математичний опис квадратичних критеріїв якості.
3. Синтез лінійно-квадратичного цифрового регулятора на кінцевому інтервалі часу. Основні співвідношення.
4. Синтез лінійно-квадратичного цифрового регулятора на безконечному інтервалі часу. Основні співвідношення.
5. Синтез оптимального за витратами енергії лінійно-квадратичного цифрового регулятора. Основні співвідношення.
6. Рекурентний метод рішення дискретного рівняння Рікатті. Зв'язок з методом динамічного програмування.

12. ЦИФРОВИЙ СПОСТЕРІГАЧ СТАНУ ЦСУ

12.1. Критерій спостережності лінійної ЦСУ

Значна частина положень теорії оптимального управління цифровими системами базується на використанні зворотного зв'язку за змінними стану. На жаль, на практиці не всі змінні стану доступні для вимірювання, і, як правило, вимірюються тільки вихідні змінні системи. Тому, якщо потрібно забезпечити зворотний зв'язок за всіма змінними стану системи, а не всі вони доступні для вимірювання, необхідно «відновлювати» ці стани за інформацією, яка є у результатах вимірювання доступних вхідних і вихідних змінних. Підсистема, яка здійснює відновлення змінних стану і заснована на вимірюванні вхідних і вихідних змінних, називається *спостерігачем стану*, або просто *спостерігачем*. На рис. 12.1 зображена структурна схема цифрової системи управління зі спостерігачем стану. Відновлений вектор стану $x_e(k)$ використовується для формування керуючого впливу $u(k)$ за допомогою матриці зворотного зв'язку G . З рис. 12.1 випливає, що управлінський вплив описується співвідношенням

$$u(k) = Er(k) - Gx_e(k). \quad (12.1)$$

З'ясуємо спочатку умови, що визначають можливість побудови спостерігача. проектування цифрового спостерігача стану тісно пов'язане з критерієм спостережності.

Розглянемо лінійну цифрову систему, яка описується наступними рівняннями динаміки

$$x(k+1) = Ax(k) - Bu(k) \quad (12.2)$$

$$c(k) = Dx(k) \quad (12.3)$$

де $x(k)$, $u(k)$ і $c(k)$ – відповідно n , p і q -вимірні вектори. Вважається, що матриця A є невинродженою. Вектор стану $x(k)$ може бути визначений як лінійна комбінація вихідної $c(k)$, вхідної $u(k)$ и попередніх значень цих змінних, якщо цифрова система повністю спостережна.

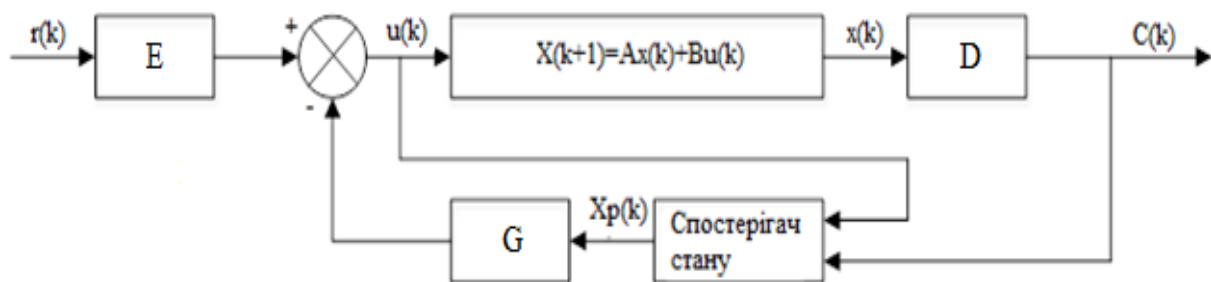


Рис. 12.1. Лінійна цифрова система зі спостерігачем та зворотнім зв'язком по стану

Рівняння (12.2) може бути записано у вигляді

$$x(k-1) = A^{-1}x(k) - A^{-1}Bu(k-1). \quad (12.4)$$

У загальному випадку

$$x(k-n) = A^{-1}x(k-n+1) - A^{-1}Bu(k-1).$$

Відповідно з (12.3) запишемо

$$c(k-1) = Dx(k-1) \quad (k \geq 1). \quad (12.5)$$

Підстановка рівняння (12.4) в (12.5) дає

$$c(k-1) = DA^{-1}x(k) - DA^{-1}Bu(k-1) \quad (k \geq 1).$$

За аналогією

$$c(k-2) = Dx(k-2) = DA^{-2}x(k) - DA^{-2}Bu(k-1) - DA^{-1}Bu(k-2).$$

Подовжуючи цю процедуру, отримаємо

$$c(k-N) = DA^{-N}x(k) - \sum_{i=1}^N DA^{-N+i-1}Bu(k-i) \quad (k \geq N).$$

Запишемо ці рівняння в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} c(k-1) \\ c(k-2) \\ \vdots \\ c(k-N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DA^{-1} \\ DA^{-2} \\ \vdots \\ DA^{-N} \end{bmatrix} x(k) - \begin{bmatrix} DA^{-1}B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ DA^{-2}B & DA^{-1}B & 0 & \dots & 0 \\ DA^{-3}B & DA^{-2}B & DA^{-1}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ DA^{-N}B & DA^{-N+1} & DA^{-N+2} & \dots & DA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bu(k-1) \\ Bu(k-2) \\ \vdots \\ Bu(k-N) \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

Це матричне рівняння містить Nq рівнянь з n невідомими компонентами вектора стану $x(k)$. При $Nq > n$ відомих керуючих впливах і вихідних змінних вектор $x(k)$ може бути знайдений з рівняння (12.6), якщо матриця

$$[DA^{-1} \quad DA^{-1} \quad \dots \quad DA^{-N}]' \quad (Nq \times n). \quad (12.7)$$

має ранг n . Очевидно, що обмеження на ранг матриці (12.7) збігається з критерієм спостережності пари $[A, D]$ для $N = n$.

При певних умовах рівняння (12.6) має єдине розв'язок щодо вектора стану $x(k)$. Якщо $Nq = n$, матриця (12.7) стає квадратною і, якщо вона не вироджена, вектор $x(k)$ може бути визначений для $k > N$ шляхом вимірювання N попередніх значень вихідної і вхідної змінної.

12.2. Синтез спостерігача стану повного порядку

Спостерігач стану, зображений на рис. 12.1, повинен проектуватися таким чином, щоб поновлений стан $x_e(k)$ був якомога ближче до дійсного стану $x(k)$. Існує багато способів проектування цифрових спостерігачів стану і, як правило, декілька способів визначення близькості $x_e(k)$ та $x(k)$. Можна припустити, що спостерігач стану описується такими ж рівняннями стану, як і вихідна система. Однак у структурі спостерігача, що використовує $u(k)$ $c(k)$ у якості вхідних змінних, повинна бути передбачена можливість автоматичної мінімізації відхилення $x(k)$ від $x_e(k)$.

Проектування цифрового спостерігача стану, описане нижче, аналогічно проектуванню спостерігача для неперервних систем.

Оскільки $x(k)$ не можна вимірювати безпосередньо, не можна порівнювати $x_e(k)$ і $x(k)$. Замість цього можна порівнювати $c_e(k)$ і $c(k)$, де

$$c_e(k) = Dx_e(k).$$

На рис. 12.2 представлена логічна структура цифрового спостерігача стану, заснована на попередніх міркуваннях. Спостерігач являє собою замкнуту систему управління з матрицею зворотного зв'язку G_e . Завдання

проектування полягає в знаходженні такої матриці G_e , щоб відхилення $c_e(k)$ від $c(k)$ зменшувалася як можна швидше.

Рівняння стану замкнутого спостерігача має вигляд

$$x_e(k+1) = (A - G_e D)x_e(k) + Bu(k) + G_e c(k). \quad (12.8)$$

де матриці A , B і D збігаються з матрицями в рівняннях (12.2) і (12.3), а G_e – матриця зворотного зв'язку розмірністю $(n \times q)$. Якщо змінна $c_e(k)$ дорівнює $c(k)$, рівняння (12.8) приймає вигляд

$$x_e(k+1) = Ax_e(k) + Bu(k), \quad (12.9)$$

яке ідентичне рівнянням стану вихідної системи

Об'єднуючи структурні схеми спостерігача стану (12.2) і цифрової системи управління (12.1), отримаємо комбіновану систему, представлену на рис. 12.3.

Оскільки $c(k)$ та $x(k)$ пов'язані співвідношенням (12.3), перепишемо рівняння (12.8):

$$x_e(k+1) = Ax_e(k) + Bu(k) + G_e D[x(k) - x_e(k)] \quad (12.10)$$

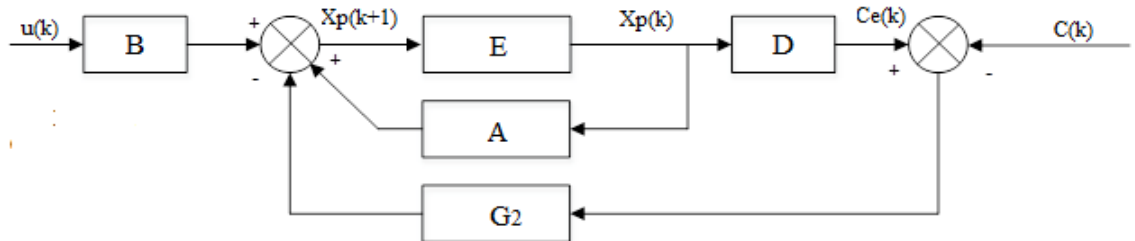


Рис. 12.2. Цифровий спостерігач стану із зворотним зв'язком

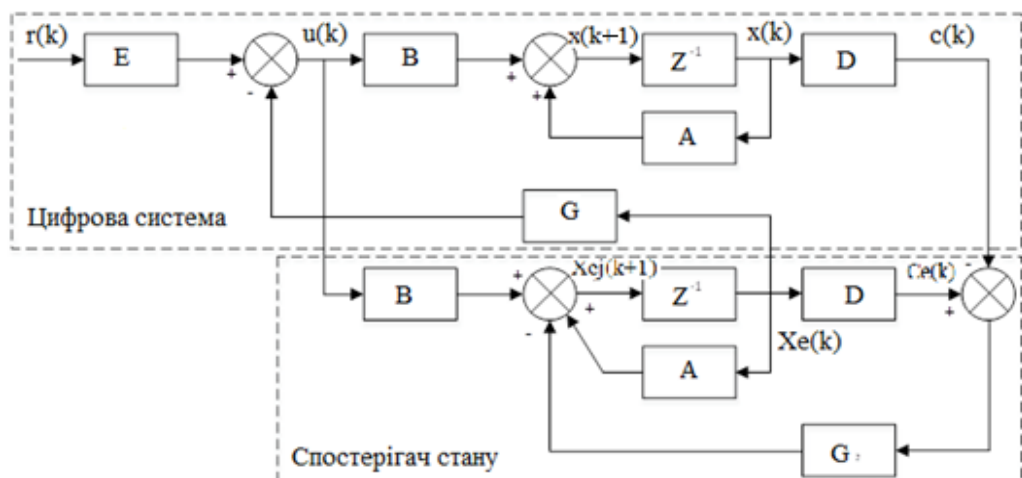


Рис. 12.3. Цифрова система управління із спостерігачем

Зміст цього рівняння полягає в тому, що якщо збігаються початкові стану $x(0)$ і $x_e(0)$, рівняння (12.10) аналогічно рівнянню (12.9), а отже, реакція спостерігача збігається з реакцією вихідної системи. Тому проектування спостерігача має сенс, коли початкові умови для $x(k)$ і $x_e(k)$ різні.

Віднімаючи рівняння (12.10) з (12.2), отримаємо такий вираз:

$$x(k+1) - x_e(k+1) = (A - G_e D)[x(k) - x_e(k)], \quad (12.11)$$

яке можна розглядати як однорідне різницеве рівняння стану лінійної цифрової системи з матрицею коефіцієнтів $(A - G_e D)$. Один із способів забезпечення швидкої збіжності $x_e(k)$ $x(k)$ полягає у визначенні матриці $G_e D$ з умови відповідного розміщення власних значень $(A - G_e D)$ на z -площині.

12.3. Синтез спостерігача за власними значеннями

На основі методики проектування за заданими власними значеннями, елементи G_e повинні вибиратися таким чином, щоб траєкторія вільного руху системи (12.11) прямувала до нуля якомога швидше.

Оскільки власні значення матриць $A - G_e D$ і $(A - G_e D)' = A' - D_1 G_{e1}$ збігаються, то умова довільного розміщення власних значень $A - G_e D$ полягає в тому, щоб пара $[A', D']$ була повністю керованою. Так як керованість $[A', D']$ еквівалента повної спостережності $[A, D]$, виконання цієї умови буде гарантувати не тільки існування спостерігача стану, але і можливість довільного розміщення його власних значень.

Наступний приклад ілюструє процедуру синтезу спостерігача стану за заданими власним значенням

Приклад 12.1.

Розглянемо цифровий процес з прикладу 11.3 з рівняннями стану

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (12.12)$$

де $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Нехай рівняння виходу має вигляд

$$c(k) = Dx(k),$$

де $D = [2 \ 0]$.

Необхідно спроектувати цифровий спостерігач, який відновлює змінні стану $x_1(k)$ і $x_2(k)$ за спостереженнями вихідної змінної $c(k)$.

Цифровий спостерігач має структурну схему, зображену на рис. 12.2. Характеристичне рівняння спостерігача описується співвідношенням

$$|\lambda I - A + G_e D| = 0,$$

$$\text{або} \quad \lambda^2 + (2g_{e1} - 1)\lambda + 1 + 2g_{e2} - 2g_{e1} = 0, \quad (12.13)$$

де g_{e1} і g_{e2} – елементи матриці зворотного зв'язку G_e розмірністю (2×1) . Спроектуємо спостерігач, який має аперіодичну реакцію, при якій $x_e(k)$ досягає значення $x(k)$ за два періоду квантування. Для аперіодичної реакції спостерігача необхідно, щоб характеристичне рівняння мало вигляд $\lambda^2 = 0$.

Таким чином, із рівняння (12.13) маємо $g_{e1} = 0,5$ і $g_{e2} = 0$. Відповідна матриця коефіцієнтів для замкнутого спостерігача має вигляд

$$A - G_e D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $u(k) = 0$ запишемо рівняння стану спостерігача

$$x_e(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_e(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k). \quad (12.14)$$

Задамо довільний початковий стан системи і спостерігача

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_e(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо ітераційне рівняння (12.12) і (12.14), починаючи з заданих початкових станів. Справжні змінні стану $x_1(k)$, $x_2(k)$ і відновлені змінні стану $x_{e1}(k)$, $x_{e2}(k)$ представлені на рис. 12.4. Відновлені змінні стану досягають значень дійсних змінних стану найбільше за два періоду квантування.

Замкнута система управління з спостерігачем.

У наведеному прикладі синтезу цифрового спостерігача приймалося, що система управління є розімкненою, тобто $G = 0$ (див. рис. 12.3). Для загального випадку, представленого на рис. 12.3, запишемо рівняння стану наступним чином:

$$x(k+1) = Ax(k) - BGx_e(k) - BEr(k) \quad (12.15),$$

$$x_e(k+1) = (A - BG - G_e D)x_e(k) + G_e D x(k) + B E r(k). \quad (12.16)$$

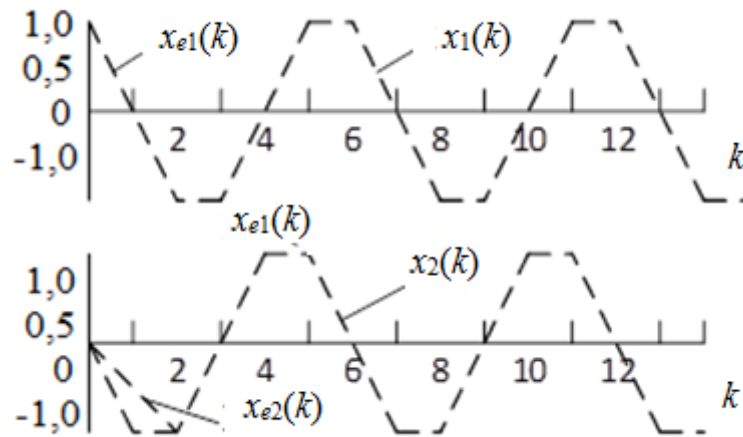


Рис.12.4. Змінні стану цифрової системи і регулятора

Досліджуємо вплив початкових станів і взаємний вплив цих двох систем за допомогою z -перетворення рівнянь (12.15) і (12.16). Після перевизначення членів рівняння мають вигляд

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + B E R(z) - B G X_e(z) \quad (12.17)$$

$$(zI - A + B G + G_e D)X_e(z) = zx_e(0) + G_e D X(z) + B E R(z) \quad (12.18)$$

Віднімаючи (12.18) від (12.17), при $x(0) = x_e(0)$ отримаємо:

$$(zI - A + G_e D)X(z) = (zI - A + G_e D)X_e(z).$$

Таким чином,

$$x(k) = x_e(k)$$

і рівняння (12.17) приймає вигляд:

$$(zI - A + B G)X(z) = zx(0) + B E R(z).$$

Цей результат показує, що при $x(0) = x_e(0)$ динаміка вихідної системи не залежить від динаміки спостерігача. Однак у загальному випадку перехідний процес вихідної системи при $x(0)$ відмінною від $x_e(0)$ буде визначатися спостерігачем.

Віднімаючи рівняння (12.16) з (12.15), отримаємо

$$x(k+1) - x_e(k+1) = (A - G_e D)[x(k) - x_e(k)].$$

звідки видно, що при заданих A і D вільний рух $x(k) - x_e(k)$ залежить тільки від G_e . Тому проектування спостерігача для системи з матрицею зворотного зв'язку за станом G може виконуватися на основі розміщення власних значень $(A - G_e D)$. Єдина відмінність полягає в тому, що для $x(0)$ відмінного від $x_e(0)$ на реакцію системи $x(k)$ буде впливати динаміка спостерігача за наявності зворотного зв'язку по $x_e(k)$ через матрицю G .

У наступному прикладі розглянуто характеристики системи спільно з спостерігачем з прикладу 12.1 з урахуванням зворотного зв'язку за станом.

Приклад 12.2.

Розглянемо цифровий процес з прикладу 12.1 з оптимальною матрицею коефіцієнтів зворотного зв'язку, отриманої в прикладі 11.3

$$G = [-0.654 \quad 0.486]. \quad (12.19)$$

Знайдена в прикладі 12.1 матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку цифрового спостерігача, що забезпечує аперіодичну реакцію $x(k) - x_e(k)$, має вигляд

$$G_e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.20)$$

Таким чином, для $r(k) = 0$ запишемо з урахуванням (12.15) і (12.16) рівняння стану цифрової системи із зворотнім зв'язком і спостерігачем:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dots \\ x_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \vdots & -BG \\ \dots & \dots & \dots \\ G_e D & \vdots & A - BG - G_e D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dots \\ x_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \vdots & 0.654 & -0.486 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & -0.346 & 0.514 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dots \\ x_e(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

На рис 12.5 представлені динаміка змінних стану $x_1(k)$ і $x_2(k)$ для $x(0) = x_e(k)$, що еквівалентно відсутності спостерігача. Процес у вихідній системі з спостерігачем також представлений на рис. 12.5 Як було показано вище, динаміка спостерігача впливає на перехідний процес системи. При вибраних початкових станах $x_e(0)$ приймає значення $x(k)$ після двох періодів квантування.

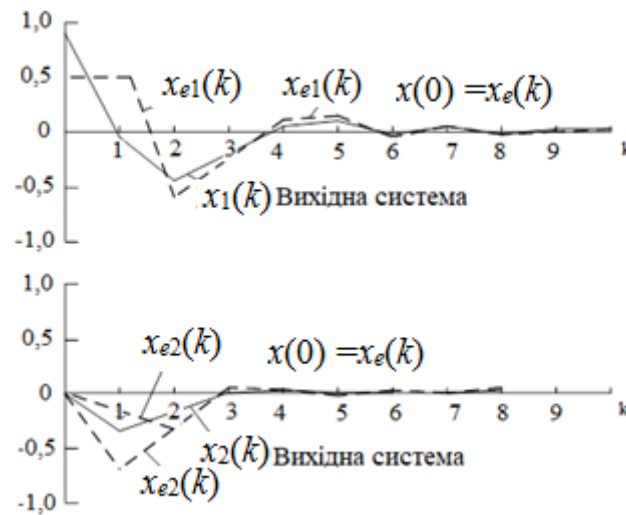


Рис. 12.5. Перехідні процеси в цифровій замкнутій системі із спостерігачем

12.4. Синтез спостерігача на основі сполученої канонічної форми фазової змінної.

Оскільки синтез спостерігача, представлений вище заснований на розміщенні власних значень замкнутого спостерігача, то для цієї мети можна використовувати перетворення до канонічної форми фазової змінної. Розглянемо тільки системи з одним входом і виходом

Сформулюємо знову задачу синтезу спостерігача. Стани, які необхідно відновити, описуються рівнянням стану

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

де $x(k)$ – n -вимірний вектор; $u(k)$ – скалярна вхідна змінна. Керуючий вплив визначається за допомогою зворотного зв'язку за станом $u(k) = -Gx(k)$, а рівняння виходу має вигляд:

$$c(k) = Dx(k). \quad (12.21)$$

де $c(k)$ – скалярна вихідна змінна; D – матриця розмірністю $(1+n)$. Динаміка спостерігача

$$x_e(k+1) = (A - G_e D)x_e(k) + Bu(k) + G_e c(k). \quad (12.22)$$

Вхідна система має вигляд:

$$x(k+1) = (A - BG)x(k).$$

Відомо, що якщо пара $[A, B]$ повністю керована, то власні значення $(A - BG)$ можуть розташовуватися довільно з допомогою відповідного вибору елементів матриці зворотного зв'язку G . Відомо, що якщо пара $[A, B]$ керована, A і B можуть бути перетворені в канонічну форму фазової змінної. Тоді кожен з елементів матриці зворотного зв'язку залежить тільки від одного коефіцієнта характеристичного рівняння. Як впливає з рівняння (12.22), при синтезі спостерігача за заданими власним значенням виникає подібна задача. У цьому випадку власні значення $(A - G_e D)$ повинні бути розміщені певним чином за допомогою відповідного вибору елементів матриці зворотного зв'язку G_e . Оскільки власні значення $(A - G_e D)$ збігаються з власними значеннями $(A - G_e D)' = (A' - D_1 G_{e1})$, можна провести паралель між системою з матрицями коефіцієнтів A, B, G і системою з матрицями A', D', G_{e1} .

Зауважимо, що передумовою довільного завдання власних значень спостерігача є повна керованість пари $[A', D_1]$, що еквівалентно спостережності $[A, D]$, тобто вимогу, яке було сформульоване у розділі 12.1.

Спочатку потрібно перетворити рівняння спостерігача до так званої сполученої канонічній формі фазової змінної. Необхідність цього перетворення викликана тим, що запис матриці коефіцієнтів у формі $(A' - G'_{e1})$ дозволяє виділити елементи матриці зворотного зв'язку в коефіцієнти характеристичного рівняння. Ця матриця відповідає системі з рівнянням стану виду:

$$y(k+1) = A'y(k) + D'v(k),$$

де

$$v(k) = -G'_e y(k),$$

$$y(k+1) = (A' - D'G'_e)y(k).$$

Необхідно перетворити рівняння спостерігача (12.22) в наступну форму:

$$y_k(k+1) = (A_1 - K_e D_1)y(k) + B_1 u(k) + K_e c(k), \quad (12.23)$$

де A_1 має розмірність $(n \times n)$; K_e, B_1 – розмірність $(n \times 1)$; D_1 – розмірність $(1 \times n)$. В загальному випадку $u(k)$ не обов'язково повинна бути скалярною вхідною змінною, оскільки матриця B_1 не буде входити в рівняння.

Шукане перетворення має вигляд^

$$y_e(k) = Px_e(k),$$

де P – невироджена матриця.

Тоді

$$K_e = PG_e = [k_{e1} \quad k_{e2} \quad \dots \quad k_{en}], \quad (12.24)$$

$$D_1 = DP^{-1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], \quad (12.25)$$

$$B_1 = PB.$$

і

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}. \quad (12.26)$$

Таким чином, система з матрицями коефіцієнтів A_t і B_j є зв'язаною канонічною формою фазової змінної, оскільки ці матриці є відповідно транспонований матрицями A та B канонічної форми фазової змінної. Остаточного маємо

$$(A_1 - K_e D_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & -k_{e1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} & -k_{e2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} & -k_{e3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 & -k_{en} \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння перетвореного спостерігача, що описується рівнянням (12.23), має вигляд:

$$|\lambda I - A_1 + K_e D_1| = \lambda^n + (a_1 + k_{en})\lambda^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_{e2})\lambda + (a + k_{e1}) = 0.$$

Слід відзначити, що елементи матриці зворотного зв'язку K_e містяться тільки у відповідних коефіцієнтах характеристичного рівняння. Для визначення матриці P покладемо

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}, \quad (12.27)$$

де P_i – матриця-рядок розмірністю $(1 \times n)$. Підставляючи вираз (12.27) в (12.26), отримаємо:

$$A_1 P = PA = \begin{bmatrix} -a_n P_n \\ P_1 - a_{n-1} P_n \\ P_2 - a_{n-2} P_n \\ \vdots \\ P_{n-1} - a_1 P_n \end{bmatrix}. \quad (12.28)$$

Із співвідношення (12.25) маємо

$$D_1 P = D = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] P = P_n. \quad (12.29)$$

Тоді рівняння (12.28) приймає вигляд:

$$\begin{bmatrix} -a_n D \\ P_1 - a_{n-1} D \\ P_2 - a_{n-2} D \\ \vdots \\ P_{n-1} - a_1 D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 A \\ P_2 A \\ \vdots \\ P_n A \end{bmatrix}.$$

Із останнього рівняння маємо:

$$P_{n-1} = a_1 D + DA, \quad (12.30)$$

$$P_{n-2} = a_2 D + P_{n-1} A = a_2 D + a_1 DA + DA^2,$$

$$\vdots$$

$$P_2 = a_{n-2} D + a_{n-3} DA + \dots + a_1 DA^{n-3} + DA^{n-2}, \quad (12.31)$$

$$P_1 = a_{n-1} D + a_{n-2} DA + \dots + a_1 DA^{n-2} + DA^{n-1}$$

Об'єднавши рівняння (12.29) і (12.30) – (12.31), запишемо матрицю P в вигляді:

$$P = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^{n-2} \\ DA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (12.32)$$

Слід підкреслити, що коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_{n-1} визначаються останнім стовпцем матриці A_1 [див. рівняння (12.26)]. Однак ще більш важливо, що ці коефіцієнти знаходять із характеристичного рівняння матриці A , що має вигляд:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (12.33)$$

Описаний метод поєднаної канонічної форми фазової змінної можна застосовувати до систем з кількома виходами. Припустимо, що в рівнянні (12.21) $c(k)$ тепер є n -вимірний вектор, а D -матриця розмірністю $(q \times n)$. Оскільки зміна змінних стану досліджуваної системи не впливає негативно на її спостережливість, можна перетворити рівняння стану до наступної форми:

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_q \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix} u(k),$$

де всі $A_i, i = 1, 2, \dots, q$, представлені в сполученій канонічній формі фазової змінної (12.26). Рівняння виходу перетвориться до виду:

$$c(k) = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_q \end{bmatrix} y(k),$$

де $D_i, i = 1, 2, \dots, q$, представлені в формі матриці-строки (12.25).

Використовуємо задачу синтезу спостерігача з прикладу 12.2 для ілюстрації методу сполученої канонічної форми фазової змінної

Приклад 12.3.

Для цифрового процесу, описаного в прикладах 12.1 і 12.2, запишемо характеристичне рівняння матриці A :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \quad (12.34)$$

Порівнюючи рівняння (12.33) і (12.33), бачимо, що $a_1 = -1$ і $a_2 = 1$. Спряжена канонічна форма фазової змінної для A має вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для аперіодичної реакції $x_e(k) - x(k)$ із рівняння (12.27) знаходимо

$$k_{e2} = -a_1 = 1,$$

$$k_{e1} = -a_2 = -1.$$

Таким чином,

$$K_e = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця перетворення P визначається із співвідношення (12.32):

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ DA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.35)$$

Матриця зворотного зв'язку спостерігача обчислюється з використанням (12.24):

$$G_e = P^{-1}K_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

що співпадає з результатом, отриманим вище (див. рівняння (12.20)).

12.3. Синтез спостерігача стану пониженого порядку

У попередніх параграфах розглядалася методика синтезу спостерігача повного порядку. Іншими словами, порядки спостерігача і системи збігалися. У загальному випадку, оскільки з вихідних змінних є лінійними комбінаціями p змінних стану, необхідно відновлювати не більше p станів. Ця ідея реалізується в спостерігача зниженого порядку. Так як в системі, описаній в підрозділі 12.1, з $x(k) = x_1(k)$, фактично можна визначити $x_1(k)$ безпосереднього результату виміру $c(k)$ без будь-якого спостерігача. У цьому випадку потрібен спостерігач тільки першого порядку. Однак слід

зазначити, що при визначенні q змінних стану безпосередньо з виходу системи є менше можливостей у забезпеченні необхідної динаміки спостерігача зниженого порядку.

Принцип дії спостерігача пониженого порядку ілюструється структурною схемою на рис. 12.6. Цей спостерігач має порядок, рівний $(n - q)$. Компоненти n -вимірного вектора стану $x_e(k)$ утворюються з $(n - q)$ відновлюваних станів у вигляді вектора $w_e(k)$ і q -вимірного вектора виходу $c(k)$.



Рис 12.6 Цифрова система із спостереженням пониженого порядку

Спостерігач зниженого порядку може бути спроектований з використанням принципу перетворення до спряженої канонічної форми фазової змінної. Розглянемо спочатку систему

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (12.36)$$

$$c(k) = Dx(k), \quad (12.37)$$

яка є керованою і спостережною. Система перетворюється до спряженої канонічної форми фазової змінної:

$$y(k + 1) = A_1 y(k) + B_1 u(k), \quad (12.38)$$

де $A_1 = PAP^{-1}$ описується виразом (12.26), а $B_1 = PB$. Рівняння виходу перетворюється до виду:

$$c(k) = D_1 y(k), \quad (12.39)$$

де

$$y(k) = Px(k),$$

$$D_1 = DP^{-1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] (1 \times n). \quad (12.40)$$

Спостерігач повного порядку для системи (12.36) і (12.37) описується рівнянням:

$$x_e(k+1) = (A - G_e D)x_e(k) + Bu(k) + G_e c(k)$$

де G_e – $(n \times 1)$ -вимірна матриця зворотного зв'язку спостерігача. Спостерігач повного порядку для системи, представленій в спряженій канонічній формі фазової змінної (12.38) і (12.39), описується рівнянням:

$$y_e(k+1) = (A_1 - K_e D_1)y_e(k) + B_1 u(k) + K_e c(k),$$

де K_e – $(n \times 1)$ -вимірна матриця зворотного зв'язку спостерігача. Оскільки D_1 має форму, що задовольняє співвідношенню (12.40), це означає, що $c(k) = y_n(k)$, так що необхідність у відновленні $y_n(k)$ відпадає. Щоб відновити залишилися $(n-1)$ станів $y(k)$ і мати можливість довільно розміщувати власні значення, покладемо

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (n \times n).$$

Тоді

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Помітимо, що $(QQ^{-1}) = 1$ (одинична матриця). Тоді:

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & -a_1 a_{n-1} - a_n + a_1 a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} & -a_1 a_{n-2} - a_n + a_1 a_{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & -a_{n-3} & -a_1 a_{n-3} - a_n + a_1 a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_1 & -a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 + a_1 \end{bmatrix}. \quad (12.41)$$

Перетворимо тепер систему із змінними стану $y(k)$ до наступної системи

$$w(k+1) = A_2 w(k) + B_2 u(k), \quad (12.42)$$

$$c(k) = D_2 w(k),$$

де $w(k) = Qu(k)$.

Матриця A_2 визначається співвідношенням (12.41), а $B_2 = QBt$, і

$$D_2 = D_1 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.43)$$

Спостерігач, який відновлює $w(k)$, має вигляд

$$w_e(k+1) = A_2 w_e(k) + B_2 u(k) + L_e D_2 [w(k) - w_e(k)]. \quad (12.44)$$

Оскільки D_2 описується співвідношенням (12.43), отримуємо $c(k) = w_n(k)$, тобто n -на компонента вектора стану $w(k)$ є вихідною змінною, так що її не потрібно відновлювати.

Тому що $w_{en}(k) = w_n(k)$ і $L_e D_2 [w(k) - w_e(k)] = 0$ рівняння (12.44) приймає вигляд:

$$w_e(k+1) = A_2 w_e(k) + B_2 u(k). \quad (12.45)$$

Тепер основна мета полягає в перетворенні спостерігача (12.44) в спостерігач $(n-1)$ -го порядку з можливістю в той же час довільно розташовувати його власні значення. Рівняння (12.45) представимо в наступному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_e(k+1) \\ \dots \\ w_{en}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & & \vdots & E_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_e(k) \\ \dots \\ c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ \dots \\ b_2 \end{bmatrix} u(k).$$

Таким чином, спостерігач $(n-1)$ -го порядку описується рівнянням

$$\bar{w}_e(k+1) = \bar{A}_2 \bar{w}_e(k) + E_2 c(k) + \bar{B}_2 u(k),$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$E^2 = \begin{bmatrix} -a_1 a_{n-1} - a_n + a_1 a_{n-1} \\ -a_1 a_{n-2} - a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_{n-2} \\ \dots \\ -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 \end{bmatrix}$$

і $B_2 = [(n-1) \times 1]$ – вимірна матриця.

Оскільки матриця A_2 представлена в сполученій канонічній формі фазової змінної, її останній стовпчик складається з коефіцієнтів характеристичного рівняння

$$|\lambda I - \bar{A}_2| = \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + a_2\lambda^{n-3} + \dots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1} = 0.$$

Якщо відновлюваний вектор зниженого порядку $w_e(k)$ визначений, то $w_e(k)$ описується співвідношенням:

$$x_e(k) = (QP)^{-1}w_e(k).$$

Тоді

$$w_e(k) = \begin{bmatrix} \bar{w}_e(k) \\ c(k) \end{bmatrix}, \quad (12.46)$$

що і є шуканим перетворенням, яке показано на рис 12.6.

Ефективність спостерігача пониженого порядку проаналізуємо далі, порівнюючи відновлений стан $w_e(k)$ і дійсний стан $w(k)$. Віднімаючи рівняння (12.45) з (12.42), отримаємо:

$$w(k+1) - w_e(k+1) = A_2[w(k) - w_e(k)].$$

Оскільки $w_n(k) = [c(k) - w_{en}(k)]$, останнє співвідношення перетвориться до

$$\bar{w}(k+1) - \bar{w}_e(k+1) = \bar{A}_2[\bar{w}(k) - \bar{w}_e(k)].$$

Таким чином, динаміка наближення $\bar{w}_e(k)$ $\bar{w}(k)$ визначається власними значеннями матриці A_2 . Оскільки перетворення (12.46) не є динамічним і $w_{en}(k) = c(k)$, процес відновлення $(n-1)$ змінних вектора стану $x(k)$ також залежить від власних значень A_2 .

Приклад 12.4.

Розглянемо ще раз цифровий процес, описаний у прикладі 12.1. Припустимо спочатку, що система є розімкнутої. Рівняння стану має вигляд

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.47)$$

Рівняння виходу задовольняє співвідношення

$$c(k) = Dx(k) = [2 \quad 0]x(k).$$

Завдання полягає в синтезі спостерігача першого порядку для розглянутої системи. Матриця P , яка перетворює матрицю A в спряжену канонічну форму фазової змінної, описується виразом (12.35). Запишемо матрицю A_2 [див. рівняння (12.41)] для системи другого порядку у вигляді:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 \\ 1 & -a_1 + a_1 \end{bmatrix},$$

де a_1 і a_2 – коефіцієнти характеристичного рівняння матриці A , тобто

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Таким чином, відповідно з рівнянням (12.33) $a_1 = -1$ і $a_2 = 1$. Коефіцієнт a_1 обчислюється із характеристичного рівняння матриці A_2 , яке має вигляд:

$$\lambda + a_1 = 0.$$

Перетворений спостерігач пониженого порядку описується співвідношеннями:

$$\bar{w}_e(k+1) = \bar{A}_2 \bar{w}_e(k) + E_2 c(k) + \bar{B}_2 u(k), \quad (12.48)$$

та

$$w_e(k) = [\bar{w}_e(k) \quad c(k)]', \quad (12.49)$$

$$\bar{A}_2 = -a_1,$$

$$E_2 = -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 = -a_1^2 - a_1 - 1,$$

$$\bar{B}_2 = 2.$$

Щоб отримати перехідний процес для помилки спостерігача, покладемо коефіцієнт a_1 рівним нулю. Рівняння (12.49) прийме вигляд:

$$\bar{w}_e(k+1) = -c(k) + 2u(k). \quad (12.51)$$

Діаграма стану системи зі спостерігачем першого порядку представлена на рис 12.7. Для довільних початкових стану $x(0)$ і $w_e(0)$ можна показати, що $x_e(k)$ приймає значення $x(k)$ при k більше 1. Для $w_e(0) = [1, 0]$, $w_e(0) = 0,5$ і $u(k) = 0$ при всіх k в табл. 12.1 представлені значення змінних стану системи для k менше 5.

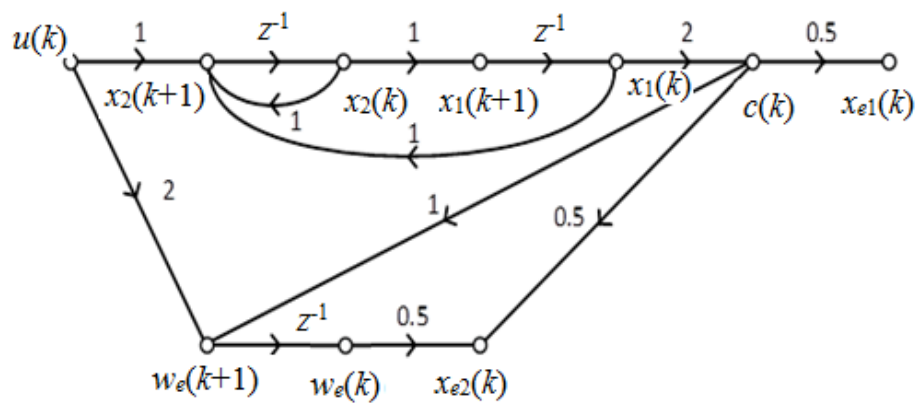


Рис. 12.7. Спостерігач пониженого порядку та розімкнена цифрова система

Таблиця 12.1. Динаміка змінних стану

Змінна	k					
	0	1	2	3	4	5
$x_1(k)$	1	0	-1	-1	0	1
$x_{e1}(k)$	1	0	-1	-1	0	1
$x_2(k)$	0	-1	-1	0	1	1
$x_{e2}(k)$	1.25	-1	-1	0	1	1
$w_e(k)$	0,50	-2	0	2	2	0
$c(k)$	2	0	-2	-2	0	2

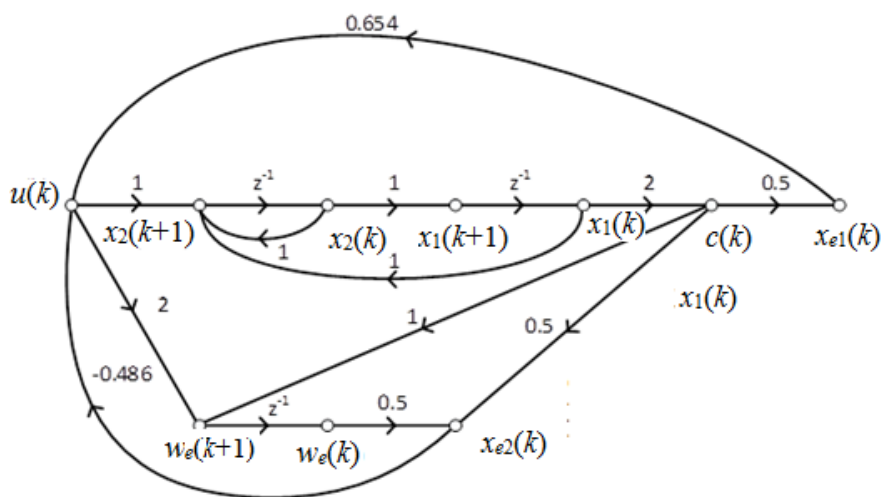


Рис.12.8. Спостерігач пониженого порядку та цифрова замкнена система

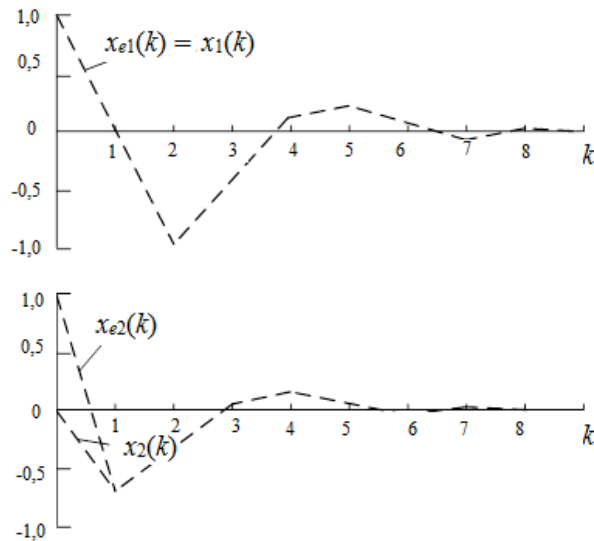


Рис. 12.9. Перехідні процеси в цифровій замкнутій системі з спостерігачем стану пониженого порядку

У замкнутій системі $u(k) = -Gx_e(k)$, де матриця зворотного зв'язку G описується виразом (12.19). Підставляючи співвідношення (12.50), (12.47) і вираз для управління в рівняння (12.51), отримаємо

$$\bar{w}_e(k+1) = -c(k) - 2Gx_e(k) = 2x_1(k) + [1.308 - 0.972] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ 0.5\bar{w}_e(k) + x_1(k) \end{bmatrix}$$

чи

$$\bar{w}_e(k+1) = -1.664x_1(k) - 0.486\bar{w}_e(k).$$

Рівняння стану цифрової системи (12.48) з урахуванням зворотного зв'язку за станом мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -0.832x_1(k) + x_2(k) - 0.243\bar{w}_e(k). \end{aligned}$$

На рис. 12.8 зображено діаграму стану замкнутої системи зі спостерігачем першого порядку.

Щоб отримати перехідні процеси для $x(k)$ і $w_e(k)$, $k = 1, 2, \dots$ необхідно розв'язати рівняння (12.52) – (12.53) при заданих початкових умовах $x(k) = [1, 0]$ і $w_e(0) = 0.5$. Відновлені стану $x_e(k)$ визначаються з виразу (12.47), а саме

$$x_e(k) = (QP)^{-1}\bar{w}_e(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ 0.5\bar{w}_e(k) + x_1(k) \end{bmatrix}$$

Таким чином, в даній системі $x_{e1}(k)$ збігається з $x_1(k)$, а єдиним станом, який відновлюється спостерігачем першого порядку є $x_2(k)$.

На рис 12.9 представлені перехідні процеси для $x_1(k)$ і $x_{ek}(k)$ в замкнутій системі. Зазначимо, що, оскільки синтезований аперіодичний спостерігач має перший порядок, $x_{ek}(k)$ приймає значення $x(k)$, за один період квантування. Однак, порівнюючи перехідні процеси, представлені на рис 12.9, з процесами в системі зі спостерігачем повного порядку (рис 12.5), можна помітити, що використання спостерігача зниженого порядку призводить до збільшення перерегулювання в замкнутій системі.

Питання до самоконтролю

1. Критерій спостережності лінійної ЦСУ
2. Синтез спостерігача повного порядку за власними значеннями.
3. Синтез спостерігача повного порядку на основі сполученої канонічної форми фазової змінної.
4. Особливості синтезу спостерігача стану пониженого порядку.
5. Принцип перетворення до спряженої канонічної форми фазової змінної.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Олссон Г. Цифровые системы автоматизации и управления / Г. Олссон, Д. Пиани. – СПб.: Издательство: Невский Диалект, 2001. – 557 с.
2. Деменков М. П. Управление в технических системах: учебник / М. П. Деменков, Е. А. Микрин. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 452 с.
3. Цифровые системы управления / [В. В. Григорьев, С. В. Быстров, В. И. Бойков та ін.]. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. – 133 с.
4. Ким Д. П. Теория автоматического управления : учебник и практикум для академического бакалавриата / Д. П. 4. Ким. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 276 с.
5. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
6. Точки Р. Д. Цифровые системы. Теория и практика. Учебник. 8-е издание. / Р. Д. Точки, Н. С. Уидмер. – М.: Изд-во Вильямс, 2004. – 1024 с.
7. Основы цифровых систем / [І. П. Барбаш, М. П. Благодарная, В. Я. Жихарев та ін.]. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк, авіац. інс-т", 2002. – 672 с.