

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”**

**А.Є. БАБЕНКО, О.О. БОРОНКО, Я.І. ЛАВРЕНКО, С.І. ТРУБАЧЕВ**

**КОЛИВАННЯ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

**МОНОГРАФІЯ**

**КИЇВ – 2020**

## Рецензенти:

д-р техн. наук, провідний наук.співр. О.Є. Богініч

д-р техн. наук, член кор. НАН України В.В. Книш

рекомендовано до друку вченою радою Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (протокол № 8 від 14 . 12 . 2020 р. )

<b>III-</b>	Бабенко А.Є Коливання неконсервативних механічних систем: Монографія / А.Є.Бабенко, О.О.Боронко, Я.І.Лавренко, С.І.Трубачев. – Нац.техн.ун-т України «КПІ імені Ігоря Сікорського». –Київ: 2020. – 153с.
-------------	--

УДК 539.3

© А.Є.Бабенко, О.О.Боронко

© Я.І.Лавренко, С.І.Трубачев, 2020

© НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

Монографія присвячена нашому вчителю, колезі, професору кафедри Динаміки і міцності машин та опору матеріалів Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського М.В. Василенко.

## ЗМІСТ

Передмова	7
Вступ	7
Розділ 1. Предмет та задачі теорії коливань	9
1.1. Основні поняття	9
1.2. Задачі теорії коливань і стійкості руху	9
1.3. Класифікація коливальних процесів	10
1.4. Вільні коливання та вимушені коливання	13
1.5. Параметричні коливання	16
1.6. Автоколивання	17
1.7. Причини виникнення шкідливих коливань і міри боротьби з ними	19
1.8. Використання коливань у техніці	30
1.9. Основні цілі і етапи динамічного розрахунку	32
1.10. Динамічна модель	34
1.11. Математична модель	36
1.12. Розв'язок і аналіз результатів	36
1.13. Експериментальна перевірка	37
1.14. Динамічне проектування	37
Розділ 2. Постановка задачі	39
2.1. Технічні теорії внутрішнього тертя	41
2.2. Пружно-пластичний гістерезис	53
2.3. Малі пружно-пластичні деформації при складному напруженому стані	60
2.4. Лінійна теорія пружності для фізично нелінійних середовищ	63
2.5 Врахування внутрішнього тертя при коливаннях	65
2.6. Загальні висновки з огляду і постановка задачі	67
Розділ 3. Коливальні системи з зосередженими параметрами	69
3.1 Вільні коливання з урахуванням тертя систем з одним ступенем	69

вільності	
3.2 Вплив в'язкого тертя на вільні коливання систем з одним ступенем вільності	70
3.3 Вплив частотно-незалежного тертя на вільні коливання систем з одним ступенем вільності	72
3.4 Методи врахування тертя	73
3.5. Нелінійне в'язке тертя	75
3.5.1 Вимушені коливання з врахуванням тертя	76
3.5.2 Гармонічне збудження коливань у коливальній системі з частотно-незалежним тертям	78
3.6 Вплив тертя на параметричні коливання	78
3.7 Вимушені коливання нелінійної системи з урахуванням в'язкого тертя	80
Розділ 4. Коливальні системи з розподіленими параметрами	82
4.1 Поздовжні коливання стрижня з урахуванням тертя	82
4.1.1 В'язке внутрішнє тертя	82
4.1.2 Зовнішнє в'язке тертя	83
4.1.3 Внутрішнє частотно-незалежне тертя	83
4.2. Вільні поперечно – крутильні коливання стрижня несиметричного перерізу	84
4.3. Вільні крутильні коливання масивного диска, закріпленого консольно на круглому стрижні	89
4.4. Коливання чистого згину	92
4.5. Вільні поздовжні коливання вантажу на невагомому стрижні	95
4.6. Згинні коливання консольної балки під дією масивного вантажу	96
4.7. Порівняння результатів врахування внутрішнього тертя при коливаннях за допомогою теорій нелінійно – гістерезисного та пружно – пластичних тіл	99
4.8. Поперечні коливання пружно – пластичного стрижня	102

4.9. Коливання тягача, закріпленого ексцентрично на круглому стрижні з урахуванням внутрішнього тертя в стрижні	109
4.10. Експериментальна перевірка застосування теорій нелінійно-гістерезисного тіла для врахування розсіювання енергії при механічних коливаннях	115
4.11. Вібрації при різанні металів та методи їх встановлення	131
4.12 Первинні автоколивання при різанні металів (теорія А.П. Соколовського)	134
4.13 Вторинні автоколивання (обробка поверхні, на якій маютьсЯ сліди вібрацій)	138
4.14 Автоколивання при різанні з нестійким наростом	142
4.15. Вимушені нелінійні коливання крісла водія при їх кінематичному збудженні з урахуванням частотно-незалежного тертя	143
Додатки	148
Список літератури	153

## Передмова

Коливання – одне з найбільш поширених явищ у природі, фізиці, механіці. Коливання елементів конструкцій часто є причиною багатьох аварій. Тому при проектуванні механічних систем інженеру необхідно знати основні властивості та закони коливань.

Реальні механічні коливання системи континуальні, неконсервативні й нелінійні. Дослідження таких систем дуже складні, тому часто в практичних задачах розглядають спрощені коливальні системи.

Дослідження коливань складних елементів конструкцій можна звести до дослідження системи з однією ступінню свободи. Така система дає можливість встановити спільні властивості коливальних процесів. В даній роботі головна увага приділяється вибору простіших моделей, простішому способу складання рівнянь, з'ясуванню суттєвості рішення і практичному його застосуванню.

## Вступ

Розкачування дерев від вітру, качання корабля на хвилях, вібрації різця при обробці металів, землетрус, людська річ, скорочення серця, шлунка і т.п. – всі ці рухи навколо нас та в нас самих характеризуються посереднім зростанням та спаданням деяких величин.

Далі ми будемо розглядати тільки механічні коливання, що пов'язані з переміщенням у просторі. Механічні коливання представляють собою ряд повторних відхилень від положення рівноваги. Цей вид коливань відіграє велику роль в машинобудуванні, в будівельній справі. Коливання можуть бути корисними та шкідливими. Відповідно до цього існує і дві задачі: збудити малою силою коливання чи їх ослабити. До числа корисних можна віднести вібрації, що використовують при вбиванні паль, ущільнення ґрунтів, вібротранспортивці, відчистці, в приладах та ін. Шкідливими є коливання неврівноважених обертових частин машин, що приводять до швидкого зносу та поломкам. Біля 60% аварій і поломок в машинах виникає в наслідок недопустимо великих коливань. Шкідливими обертовими є вібрації різця, що

пошкоджують якість обробки деталі. Багато неприємностей доставляють людині землетруси.

У всіх випадках таких коливань треба вміти усувати чи ослаблювати їх шкідливий вплив, а для цього необхідно знати закони коливань.

В залежності від характеру збудження коливання можуть бути вільними, вимушеними, самозбуджуючимися (автоколивання) та параметричними. Вільні (власні) коливання – коливання, що виникли внаслідок початкового відхилення від положення рівноваги чи удару, а потім підтримані силами пружності системи. Неминучі сили опору приводять до затухання вільних коливань.

Коливання, що викликані та підтримані весь час змінною (звичайно періодично) зовнішньою силою (збуджуючою), називають вимушеними.

Автоколивання – встановленні коливання, які підтримуються зовнішніми силами, характер яких регулюється виниклими коливаннями. На відміну від власних коливань автоколивання не затухають. Автоколивання відрізняються від вимушених коливань тим, що в першому випадку збуджуюча сила регулюється самим коливальним процесом, а в другому – навпаки, сила, що задається зовні регулює коливальний процес.

Параметричні коливання – коливання, що збуджуються періодичною зміною параметрів системи – маси та жорсткості.

В залежності від того, являється закон руху періодичною чи неперіодичною функцією, коливання називаються відповідно періодичними чи аперіодичними. Існують ще майже періодичні коливання (близькі до періодичних).

По виду фізичних залежностей і відповідних диференціальних рівнянь розрізняють коливання лінійні та нелінійні, стаціонарні та нестаціонарні.

В залежності від виду деформації коливання можуть бути поздовжніми (розтяг-стиск), крутильними (кручення), поперечними (згинними), складними (згин, кручення та інші).

Наведена класифікація є умовною та не претендує на повноту.



## **РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ ТА ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ**

### **1.1. Основні поняття.**

Наука про основні закони коливань має назву теорія коливань. Коливання - це процес почергового зростання та убуття за часом значень якої-небудь величини. За своєю природою розрізняють коливання механічні, електричні та ін. Далі будуть розглянуті механічні коливання. Механічні коливання – це відхилення від положення рівноваги, що повторюються. Цей вид коливань відіграє велику роль в машинобудуванні і в будівництві.

### **1.2. Задачі теорії коливань і стійкості руху**

Коливання – одне з найпоширеніших явищ у природі, фізиці та техніці. Вони є причиною багатьох аварій і катастроф (втомні руйнування машин, відмови приладів, землетруси), шкідливо впливають на людину (віброзахворювання). Водночас коливання виконують і корисну роль, будучи основою технологічних операцій (вібропереміщення вантажів, віброзабивка паль тощо) і цілих галузей техніки (радіотехніка).

Суттєвою властивістю коливань є стійкість, тому дослідження стійкості обов'язкове об'єкту при розгляданні нелінійних коливань, де необхідно визначити умови при яких коливання стійкі.

Якщо коливальна система має обмежені розміри, то процес коливань охоплює усі точки системи майже одночасно. Якщо ж система протяжна і має необмежені розміри, то коливання передаються від точки до точки послідовно, хоч і з великою швидкістю. Це поширення коливань або інших збурень у середовищі називається хвилею (біжучою хвилею). Коливання і хвилі відрізняються від інших рухів тим, що можуть бути охарактеризовані в цілому одним параметром – відповідно кутовою частотою і довжиною хвилі.

Під час коливань відбувається неперервне перетворення потенціальної енергії в кінетичну і навпаки. При цьому внаслідок недосконалої пружності частина механічної енергії перетворюється на теплову, яка випромінюється з коливальної системи. Це явище називається розсіянням енергії при коливаннях. Внаслідок розсіяння енергії вільні коливання і біжучі хвилі з часом згасають.

### 1.3. Класифікація коливальних процесів.

Розрізняють два основних класи коливальних процесів: періодичні, при яких кожне значення коливальної величини повторюється через рівні проміжки часу; неперіодичні, які не задовольняють вказаній умові, а також не дуже періодичні,

До найбільш поширених періодичних коливань відносяться гармонічні або синусоїдальні чи косинусоїдальні. В залежності від характеру збудження коливання можуть бути вільними, вимушеними, самозбуджуючими (автоколивання) та параметричними.

Вільними називаються коливання, які виникають в ізольованій системі завдяки зовнішньому збудженню, яке викликає початкове переміщення системи від положення рівноваги, а потім продовжуються під дією відновлювальної сили.

Вимушеними називаються коливання пружної системи, викликані та підтримані впродовж всього процесу коливань зовнішніми періодично змінними збуджуючими силами. Вимушені коливання відбуваються з частотою збуджуючої сили та підтримуються за рахунок неперервного припливу енергії зовні.

Автоколивання – коливання системи, які виникають за рахунок самозбудження, збудження коливань здійснюється надходженням енергії від неколивального джерела. Воно є частиною системи. Кількісне надходження енергії регулюється рухом самої системи. Прикладом автоколивань можуть служити вібрації частин літака (флатер), коли джерелом додаткової енергії, підтримуючої коливання системи, являється енергія повітряного потоку.

Параметричними називаються коливання пружної системи, в процесі яких під дією сил періодично змінюються фізичні параметри системи, які характеризують масу та жорсткість системи. Прикладом параметричних коливань можуть служити поперечні коливання маси на обертовому стержні некруглого перерізу, який має різні моменти інерції відносно головних осей.

За числом степенів вільності розрізняють коливальні системи з однією, двома, трьома ступенями вільності і т.д., а також з нескінченним числом степенів вільності.

Число степенів вільності (число незалежних координат, що визначають положення системи) залежить від вибору розрахункової схеми.

За періодичним принципом (Рис.1.1):

Форма малих і великих коливань в лінійній системі однакова і близька до форми малих коливань в нелінійній системі. Великі коливання в нелінійній системі значно відрізняються періодом і формою.

Можна стверджувати, що в лінійній системі серед визначаючих величин немає параметра з розмірністю амплітуди, тобто відсутній характерний масштаб амплітуди. Це значить, що коливання різної амплітуди повинні проходити одним шляхом: графік залежності динамічних змінних від часу для коливань більшої і меншої амплітуд виглядають однаково, хоча відрізняються лише масштабом по осі ординати (рис. 1.2, а). Навпаки ж, в нелінійній системі принцип суперпозиції не виконується, а коливання будуть протікати по-різному в залежності від того, мала чи велика їх амплітуда (рис. 1.2, б).

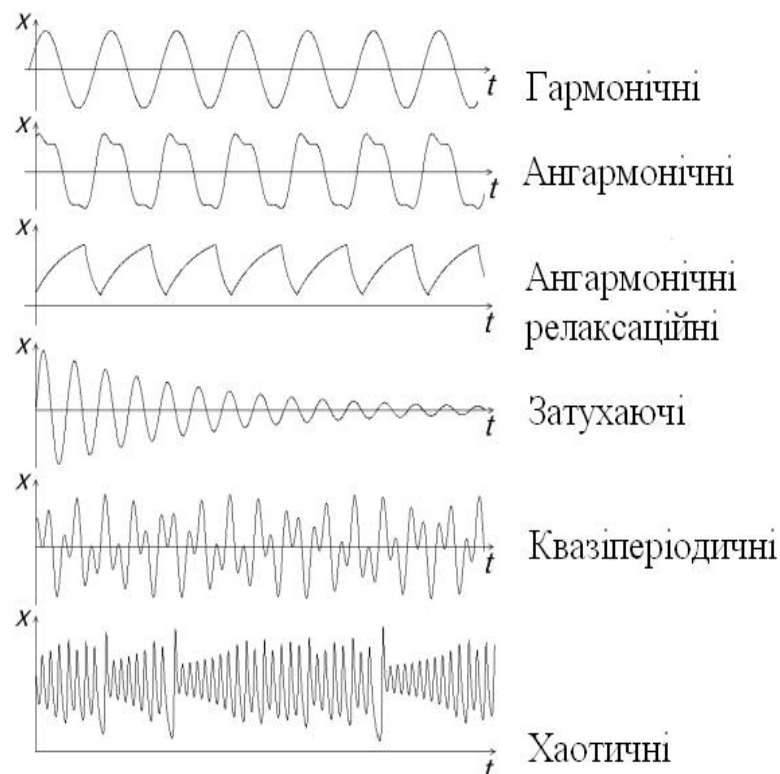
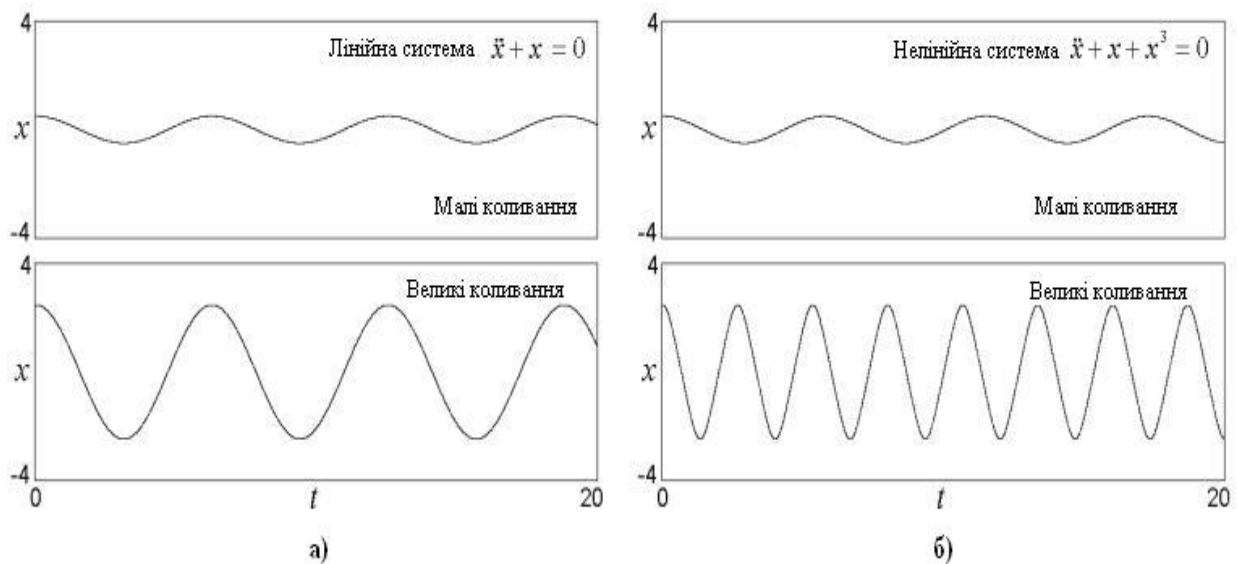


Рис.1.1. Коливальні системи за періодичним принципом

Залежно від виду деформації:

- позовжні (розтягнення-стискання);
- крутильні (кручення);
- згині (згинання);
- складні (згинання і кручення, розтягання і згинання).

При розгляді коливальних систем поряд з динамічними змінними, залежність яких від часу складає суть коливального процесу, приходиться мати справу також з величинами іншого роду – параметрами, які входять в рівняння і вважаються постійними в часі, але від завдання яких може залежати характер реалізуючого режиму. Високкокваліфікованому інженеру будь-якого фаху необхідно знати властивості та закони коливань, що допоможе йому в практичній діяльності використовувати корисні коливання та запобігати шкідливим виявам коливань.



Великий і важливий крок у класифікації коливальних явищ ми робимо, коли починаємо розглядати малі та великі коливання.

Рис.1.2. Коливання малої амплітуди (зверху) і великої (знизу) для двох коливальних систем – лінійної (а) і нелінійної (б).

#### 1.4. Вільні коливання та вимушені коливання

Пружними коливаннями називають періодичні відхилення пружної системи від положення стійкої рівноваги. Якщо система виведена з положення рівноваги одноразовою дією силового імпульсу, то виникаючі коливання називають вільними.

Вимушеними коливаннями називаються такі коливання, які виникають під дією заданих зовнішніх періодичних сил і діють незалежно від коливань в системі. Тут характер коливального процесу залежить як від властивостей системи, так і від зовнішньої сили. Енергія в коливальну систему надходить від зовнішнього джерела. Пояснимо сказане на прикладах.

Нехай верхній кінець  $A$  пружини з вантажем  $Q$  приводиться в рух за допомогою кривошипно-шатунного механізму (рис. 1.3). У цьому випадку ми маємо справу вже не з вільними, а з вимушеними коливаннями, нав'язаними системі дією зовнішньої сили  $F$ .

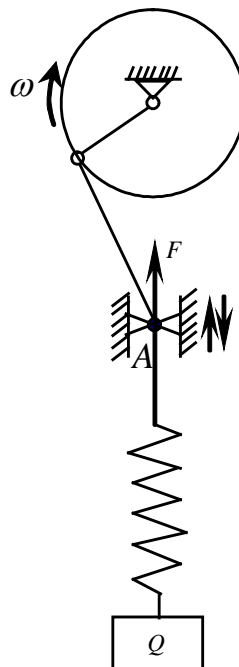


Рис.1.3. Вимушені коливання вантажу, викликані переміщенням точки  $A$  підвісу пружини за допомогою кривошипно-шатунного механізму.

Сила, що періодично змінює свою величину та напрям і тим самим підтримує вимушені коливання, називається збурюючою силою. Зміна цієї

збурюючої сили має синусоїдальний характер. Користуючись прикладом, наведеним на рис. В, відмітимо деякі особливості вимушених коливань.

Змінюючи частоту розгойдування системи, ми можемо збільшувати або зменшувати амплітуду коливань. Якщо частота коливань точки  $A$  буде мала в порівнянні з частотою власних коливань вантажу  $Q$ , підвішеного на пружині, то вантаж буде здійснювати приблизно такий же коливальний рух, як і точка підвісу  $A$ . Якщо ж частота коливання точки підвісу  $A$  буде наближатися до частоти власних коливань вантажу в системі виникнуть вимушені коливання зі збільшеною амплітудою. Збіг частоти вимушених і вільних коливань викликає явище резонансу. У цьому випадку навіть невелика збурювальна сила здатна викликати коливання з надзвичайно великою амплітудою. Якщо частота коливань точки підвісу  $A$  буде досить велика у порівнянні з частотою власних коливань вантажу  $Q$ , то амплітуда коливань вантажу зменшиться так, що вантаж можна буде розглядати, як нерухомий в просторі.

В якості іншого прикладу вимушених коливань розглянемо крутильні коливання неврівноваженого ротора електродвигуна, встановленого на балці перекриття (рис. 1.4). Якщо ротор має ексцентриситет (тобто його центр ваги  $e$  не лежить на осі обертання  $O$ ), то при його рівномірному обертанні з кутовою швидкістю  $\omega$  виникає відцентрова сила  $C$ , яка залишається постійною величиною. Однак величина і напрям її вертикальної складової періодично змінюються, тому що безперервно змінюється напрямок самої відцентрової сили.

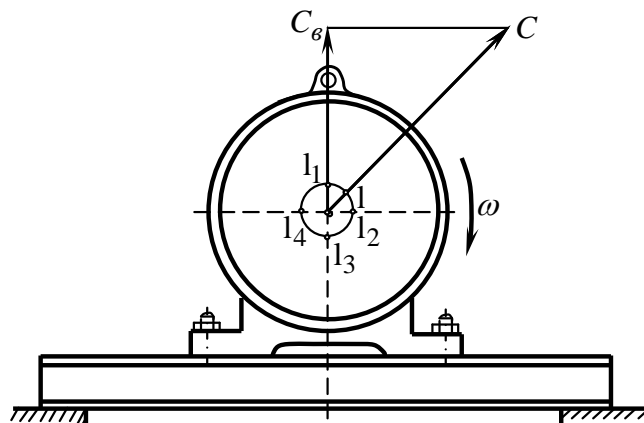


Рис.1.4. Електродвигун з незрівноваженим ротором.

Коли центр ваги ротора знаходиться в положенні  $e_1$ , вертикальна складова  $C_B$  відцентрової сили дорівнює самій відцентровій силі, тобто має найбільше значення, і спрямована вгору (рис. 1.4). Потім вона зменшується, поки в положенні  $e_2$  не перетворюється в нуль, так як тут сама відцентрова сила горизонтальна. Далі центр ваги ротора виявиться нижче осі обертання  $O$ , і вертикальна складова буде направлена вниз, причому в положенні  $e_3$  вона буде мати найбільше значення. І, нарешті, в положенні  $e_4$  сила  $C_B$ , знову перетвориться в нуль, після чого знову буде направлена вгору.

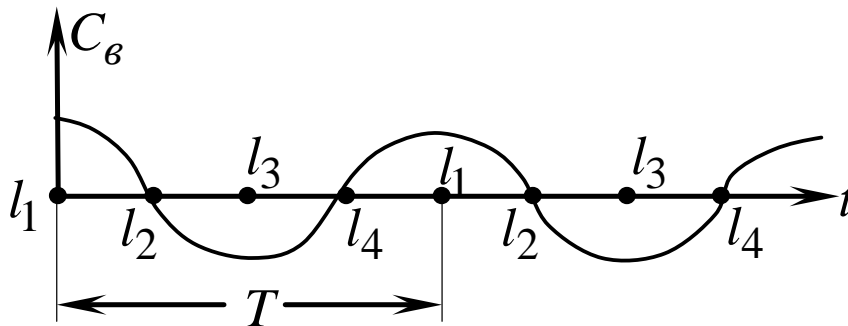


Рис.1.5. Характер зміни збудової сили неврівноваженого ротора електродвигуна.

На рис. 1.5. показаний графік зміни сили  $C_B$ , залежно від часу  $t$  або, що те ж саме, від положення ротора. Ця змінна зовнішня сила  $C_B$ , розгойдує балку з електродвигуном (рис. 1.4), і є збудовою силою, яка породжує вимушені коливання. Ці коливання відбуваються з частотою вимушених коливань за гармонічним законом

$$C_B = C \cdot \cos \omega t, \quad (1.1)$$

де  $C$  - максимальна амплітуда вимушених коливань.

Частота вимушених коливань зазвичай дорівнює частоті збудової сили. Енергія вимушених коливань підтримується збудовою силою. Вимушені коливання при наявності згасання відбуваються із зсувом фаз щодо вимушених коливань.

### 1.5. Параметричні коливання

Параметричними коливаннями називаються такі коливання, які виникають внаслідок періодичної зміни деяких фізичних параметрів самої системи (маса, пружність, коефіцієнт тертя, індуктивність, ємність, електричний опір і т. д.) під дією зовнішніх факторів.

Параметричні коливання відрізняються від вимушених тим, що вони залежать від роду зовнішнього впливу. Вимушені коливання зумовлені дією заданих зовнішніх сил на систему, властивості якої незмінні, тобто фізичні параметри, що характеризують ці властивості, постійні, а при параметричних коливаннях безпосередньо на систему не діє зовнішня сила, але параметри системи змінюються в залежності від часу.

Прикладом параметричного коливання може бути періодична зміна моменту інерції механічної системи, що здійснює коливальний рух. В електротехніці відома параметрична машина Мандельштама і Папалексі - генератор змінного струму, що працює на принципі періодичної зміни індуктивності (або ємності) електричного контуру.

Наочним прикладом, на якому можна з'ясувати фізичну сутність явища параметричних коливань, є знайомий всім спосіб розгойдування гойдалок. Гойдалки зі стоячою на них людиною можна представити у вигляді маятника зі змінною довжиною (рис. 1.6).

Припустимо, що після якогось зовнішнього збурення (поштовху) маятник почав здійснювати власні коливання. Нехай частота змін довжини маятника в 2 рази більше частоти власних коливань. Маса маятника  $m$  робить рух по траєкторії, позначеної цифрами 0-1-2-3-4-5-0.



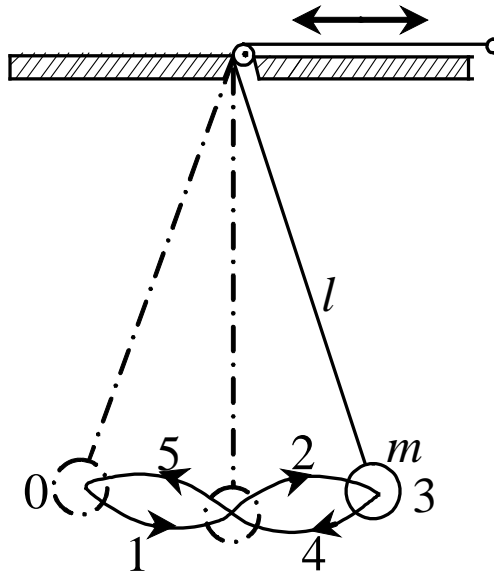


Рис.1.6. Коливання маятника змінної довжини.

При малій швидкості маятника, коли маса  $m$  знаходиться близько до крайнього положення, – вона опускається.

При максимальній швидкості маятника, коли він проходить біля положення рівноваги, маса  $m$  піднімається.

Таким чином виходить, що натяг нитки при піднятті маси  $m$  більше, ніж при опусканні. Це означає, що зовнішня система, яка змінює довжину маятника, здійснює тривалу роботу, передає енергію маятнику.

Якщо тертя невелике, то амплітуда коливань буде зростати. Це явище називається «параметричним резонансом».

Таким способом розгойдуються на гойдалках, присідаючи й піднімаючись у такт з качанням гойдалок.

### 1.6. Автоколивання

Автоколиваннями або самозбуджуючі коливаннями називаються такі коливання, коли встановлена амплітуда і частота визначаються властивостями самої коливальної системи. Автоколивання є незатухаючими коливаннями, підтримуваними зовнішніми силами, характер зміни яких залежить від самого коливального процесу. Джерело енергії, що покриває витрати енергії при коливаннях, зазвичай становить невід'ємну частину системи.

Розповсюдженими в техніці є так звані фрикційні (тобто обумовлені тертям) автоколивання. Фізика явища таких коливань може бути спрощено пояснена наступним прикладом (рис. 1.7).

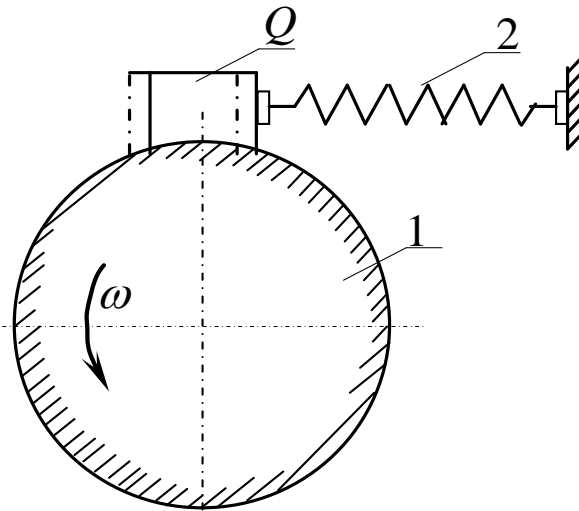


Рис. 1.7. Приклад фрикційного автоколивання.

До циліндричної поверхні маховика 1, що рівномірно обертається притиснута колодка  $Q$ , утримувана гвинтовою пружиною 2. Силою тертя ця колодка захоплюється в бік обертання маховика, розтягуючи пружину 2. Колодка  $Q$  отримує зворотний рух в той момент, коли сила пружності пружини перевершить силу тертя спокою між колодкою і маховиком, тому що сила тертя при русі менша сили тертя спокою. При зворотному русі колодки зменшується розтяг пружини, а, отже, і її сила пружності. До того моменту, коли сила пружності пружини стане менше сили тертя руху, колодка  $Q$  зупиниться, а потім знову буде захоплена рухом маховика в бік його обертання.

Так змінні сили тертя викликають фрикційні автоколивання. Частота коливань колодки  $Q$  залежить від жорсткості пружини, сили притиснення колодки до маховика, від стану поверхонь що труться і швидкості їх відносного руху.

З різновидами автоколивальних процесів ми зустрічаємося часто: при швидкісному різанні металів на верстатах, при неправильних зазорах в підшипниках і невідповідному режимі змащення частин машин, при деяких

режимах польоту літака і роботи гідротурбін, при певній швидкості руху автомобіля, в лініях електропередач при відомих станах погоди і т. д.

Відмінною особливістю автоколивань є те, що їх частота, звичайно постійна, не збігається з частотою періодичних рухів деталей об'єктів і не кратна їй. Форма коливань не синусоїдальна, а являє собою суму основної гармоніки з вищими. Іншою характерною особливістю автоколивань є те, що вони звичайно зникають при зміні режиму роботи об'єкта.

### **1.7. Причини виникнення шкідливих коливань і міри боротьби з ними**

Багато коливальних процесів, що відбуваються в механічних системах, називають вібраціями. Загальноприйнятого визначення, що відрізняє вібрацію від інших механічних коливань, немає. Тому дуже часто терміни «вібрація» і «механічні коливання» вважають синонімами.

Перший термін прийнято вживати в прикладних задачах, тоді як другий термін вживається здебільшого в питаннях теоретичних. У техніці вібрацією називають переважно шкідливий коливальний рух в машинах, у спорудах та їх елементах.

У переважній більшості випадків коливання викликаються періодичними силами, що виникають внаслідок періодичних поштовхів, великих прискорень періодично рухомих неврівноважених мас і ударних дій рухомих навантажень. Такі коливання, як відомо, називаються вимушеними, і енергія цих коливань підтримується збурюючими силами. Прикладами можуть служити крутильні коливання валів, вібрація фундаментів верстатів і машин, вібрація турбінних дисків (рис.1.8), барабанів, підшипників роторів турбогенераторів або маховиків через погане балансування або викривлення валу.

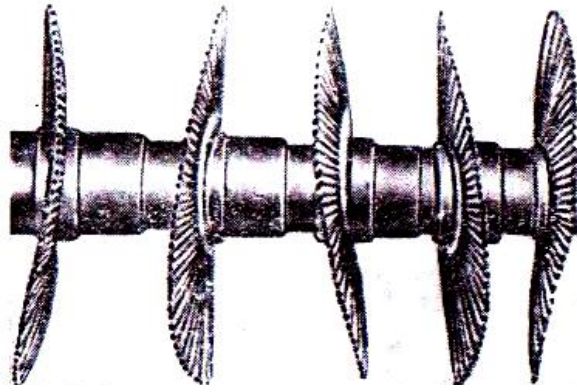


Рис.1.8. Викривлення турбінних дисків від вібрації внаслідок їх невірноваженості.

На рис. 1.9 ( а, б) показані синусоподібні форми вібрації, що дуже часто зустрічаються на практиці. Найпростішим прикладом такої вібрації може служити вібрація невірноваженого ротора, де центр ваги зміщений від його осі обертання на деяку величину  $e$ , що зветься ексцентриситетом. Внаслідок невірноваженості з'являється змінна по напрямку відцентрова сила, дію якої на опорні підшипники і через них на основу викликає у площині  $x$ – $y$  еліптичну вібрацію, іноді перехідну в кругову.

Як при еліптичній, так і при круговій вібрації лінійні зміщення будь-якої точки об'єкта в заданому напрямі відбуваються по гармонічному закону.

Вібрація не завжди є наслідком однієї тільки незбалансованості деталей що обертаються. Овальність шийки валу також створює періодичну силу, що діє в напрямку тиску на підшипник і викликає коливання з частотою, в 2 рази більшою частоти обертання валу. Неоднакова жорсткість вала в двох взаємно перпендикулярних напрямках породжує поперечні коливання, частота яких у 2 рази більше частоти обертання валу. Джерелами шкідливих коливань нерідко є неправильне центрування з'єднаних валів, неточне виконання елементів зчеплення зубчастих коліс і т. д.

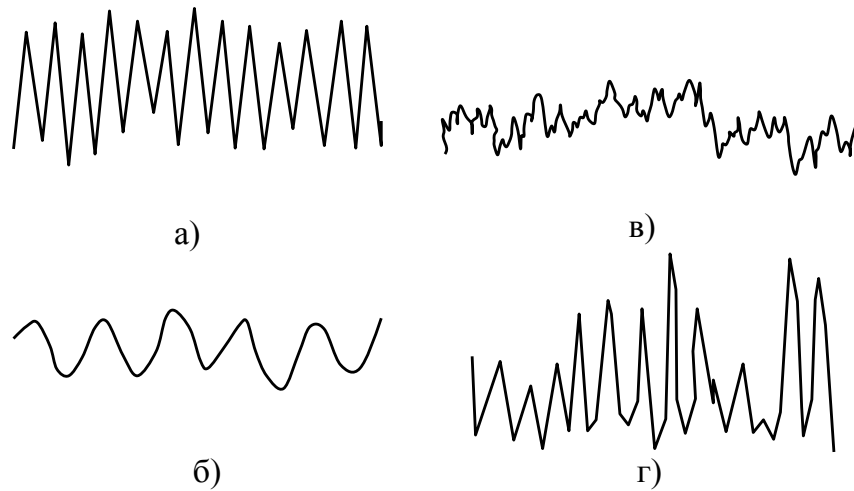


Рис.1.9. Характерні форми вібрації: *а, б* – синусоподібна вібрація;  
*в* – хаотична вібрація; *г* – пульсуюча вібрація.

У деяких механізмах є деталі, під час роботи яких виникають коливання, які за формою нагадують гармонійні. До таких механізмів відносяться грейферні, кривошипні, кулачкові, повідкові та ін.

Виникнення коливань може бути також викликане люфтами в з'єднаннях механізму, що спричиняють деренчання деталей. Такі коливання носять здебільшого хаотичний характер (рис. 1.9, в).

На практиці дуже часто зустрічаються випадки несиметричної зміни форми синусоїди. Така форма може вийти як при роботі складових пружних елементів (ресор, конічних пружин і ін), так і внаслідок одностороннього торкання віброуючих деталей з сусідніми елементами. В останньому випадку вібрація набуває пульсуючої форми (рис. 1.9, г).

При неправильних зазорах в підшипниках і невідповідному режимі змащування мастила дуже часто виникають вібрації масляного клину, що є одним з видів автоколивань.

Причиною виникнення коливань при роботі парових машин і двигунів внутрішнього згорання можуть бути також змінний тиск пари, вихлоп газу та інші періодичні впливи. При вібраціях будь-якого двигуна частина наданої йому енергії марно витрачається на тряску фундаменту і будівлі. Коефіцієнт корисної дії двигуна помітно знижується, і він сам, а також фундамент або

перекриття, на якому він встановлений, сильно зношується. Ці явища нерідко призводять до великих аварій. Крім того, такі вібрації часто супроводжуються шумом, надають дратівливу дію на обслуговуючий персонал і в деяких випадках є причиною професійних захворювань.

Дослідження питання про довготривалу міцність машин і механізмів при вібраціях є однією з найважливіших передумов для створення міцних і економічних конструкцій, безпечних і зручних в експлуатації.

Статистика показує, що близько 70-80% поломок і аварій у машинобудуванні є результатом неприпустимих коливань.

Таким чином, шкода, завдана вібрацією, дуже велика. На думку американських фахівців, вона завдає промисловості США збитки, які обчислюються щорічно багатьма мільйонами доларів.

Для оцінки вібраційного стану машин розроблені норми і ДСТУ, де в залежності від швидкості обертання машини даються допустимі амплітуди коливань. Наприклад, надійна робота механізмів деяких швидкохідних машин, що мають деталі, що обертаються зі швидкістю 25000 об / хв, може бути забезпечена, якщо амплітуда коливань не перевищує 1,5 мк.

Дослідами встановлено, що в деяких випадках, поряд з вимірюванням амплітуди коливань, істотним чинником оцінки вібраційного стану машини може бути також величина створюваного вібраціями максимального прискорення.

Дуже шкідливо діє вібрація, якщо її частота співпадає з власними частотами елементів конструкції. Тому при конструюванні це намагаються врахувати і у відповідних випадках прораховують власні частоти коливань деталей. Крім того, є цілий перелік правил, де зазначено, як треба вибирати матеріал і оформляти деталь, що працює в умовах вібрації. Про це йдеться, зокрема, в курсах «Опір матеріалів» та «Деталі машин».

У тих випадках, коли неможливо домогтися знищення вібрації шляхом відповідного конструювання деталей, вдаються до різного роду амортизаторів і поглиначів коливань. Зменшення вібрацій досягається за рахунок установки

між вібруючим об'єктом (машина, двигун) і його основою різних пружних прокладок.

В якості амортизаторів використовуються сталеві пружини, пневматичні (балонні) подушки, гумові і коркові прокладки, а також прокладки з прогумованої або просоченої бітумом тканини і т. п. Амортизацію виконують таким чином, щоб частота власних коливань об'єкта на амортизаторах була, принаймні, в 2 рази нижче частоти вимушених коливань.

Коли доводиться знижувати вібрації будь-якої окремої частини об'єкта, то вдаються до віброгасників (поглиначі коливань).

Широке впровадження пластмасових матеріалів у багато областей техніки вимагає всебічного теоретичного та експериментального вивчення роботи пластмасових деталей, як гасників вібрації. В даний час у швидкісних машинах широко використовуються нейлонові деталі. Нейлонові підшипники, наприклад, сприяють гасінню вібрації веретен прядильних машин. Еластичні пластмасові шестерні більш стійкі проти вібрації, чим сталеві. Шестерні з текстоліту і капрону безшумно працюють без мастила при високих швидкостях. Капронові шестерні успішно переносять великі навантаження. Капрон має високу пружність і малий коефіцієнт тертя. Він майже не чутливий до концентрації напруг і ударних навантажень. Легкі пластмасові важелі абсолютно незамінні в швидкісних машинах для зменшення сил інерції. Болти з нейлону гарні для з'єднання рухомих деталей, тому що пружні властивості нейлону дозволяють утримувати болтове з'єднання в затягнутому стані, оберігаючи його від розгвинчування при вібрації.

Усунення вібрації машин може бути досягнуто в результаті проведення цілого комплексу заходів.

Як правило, перед проектуванням машини конструктор проводить необхідні розрахунки з визначення частоти власних коливань окремих елементів конструкції з метою усунення можливості появи небезпечних резонансних коливань; визначає сили інерції, створювані рухомими деталями кінематично складних машин, і знаходить умови їх взаємного врівноваження;

призначає допуски на врівноважування і визначає способи коригування невірноважених мас. Після проектування і виготовлення дослідного зразка машини конструктор під час її випробувань за допомогою вібровимірювальних приладів досліджує вібрації, визначає причини, що викликають їх, і знаходить найбільш прості засоби для їх усунення.

Будь-які вібрації, що виникають при обробці деталей різанням на металообробних верстатах, є шкідливими, оскільки при їх наявності відбуваються порушення правильної роботи верстата, передчасний знос інструменту та погіршення якості обробленої поверхні.

Причини, що викликають вібрації в металорізальних верстатах, різні. Вони можуть бути викликані ззовні, так як коливання в іншій машині або установці, поширюючись через фундамент або перекриття, можуть впливати на навколишні об'єкти. Коливання цього типу зустрічаються при розташуванні верстатів у верхніх поверхах будівель. Заходи боротьби з цими коливаннями зводяться до посилення фундаментів і перекриттів, до постановки пружних прокладок під станину верстата і т. і.

Вібрації верстатів можуть бути викликані не тільки незбалансованістю частин верстата, але і невірноваженістю встановленого на ньому оброблюваного виробу. Частота коливань верстата, викликана невірноваженістю тієї або іншої маси, дорівнює або кратна числу оборотів цієї маси в секунду.

Радикальним заходом боротьби з вібраціями цього роду є балансування обертових частин верстата і оброблюваної деталі. Причинами виникнення вібрацій у верстатах нерідко є погана збірка і дефекти у передачах.

Вібрації верстатів у багатьох випадках виникають також через переривчастого характеру процесу різання, наприклад, при обточуванні ребристих деталей, при обробці деталей зубчастим ріжучим інструментом.

При швидкісних виробничих процесах, зокрема, при швидкісному різанні, можливе виникнення автоколивань.



Поява автоколивань при різанні металів можна пояснити змінним тертям між інструментом і оброблюваним виробом, а також умовами стружкоутворення (шаруваті стружки). Коливання цього роду виникають, як тільки починається процес різання, і припиняються при відведенні різця від виробу. Частота коливань залежить від жорсткості пружної системи: верстат - оброблювана деталь - інструмент. Чим жорсткіше ця система, тим вище частота коливань. Частота коливань залежить і від коливальних мас.

Для боротьби з вібраціями в металорізальних верстатах застосовують ряд заходів, а саме: підвищують жорсткість пружної системи (верстат - оброблювана деталь - інструмент), усувають всі зайві зазори в з'єднаннях, користуються більш раціональним ріжучим інструментом, тобто застосовують різці з великими кутами в плані (більш 45°) і з великими передніми кутами, причому обточку рекомендують вести при помірних глибинах різання і не дуже малих подачах. Коли при певних режимах різання важко створити умови роботи без вібрацій, вдаються до застосування спеціальних віброгасників. Значний інтерес представляє вивчення вібрації судів. Цьому питанню присвячено ряд капітальних праць радянських і зарубіжних вчених.

Коливання судна можуть складатися з качки корпусу, що викликається зовнішніми причинами, тобто дією морських хвиль і вітру, та вібрацією самого корпусу судна, що викликається, головним чином, роботою судових механізмів.

При цьому можна розрізняти «рискання», що представляє собою обертальні коливання навколо деякої вертикальної осі судна, кильову качку навколо деякої поперечної осі судна і бічну качку навколо поздовжньої осі. При кильовій качці найбільшу амплітуду коливання мають ніс і корма, середня ж частина судна зміщується незначно. При бічній качці, навпаки, найбільші переміщення здійснюють середні частини борта.

Зрозуміло, в реальних умовах рідко спостерігають зазначені типи коливань в чистому вигляді.

Зазвичай відбуваються більш складні хитання судна, що представляють собою результат складання декількох коливань, що протікають одночасно; ці результуючі коливання складаються ще з рухом самого корпусу судна щодо води. З метою боротьби з бічними качками судна застосовують спеціальні поглиначі коливань (баки Фрама, гіроскопічний заспокоювач качки корабля і т. д.).

Крім качки суден при хвилюванні моря, корпус судна часто піддається вібраціям від того, що в машинах (зазвичай поршневого типу) сили інерції рухомих частин бувають не цілком врівноважені, внаслідок чого виникають періодичні впливи, сприймані станинами машин і передаються корпусу корабля.

Корабель і його окремі частини мають певні частоти власних коливань. При збігу частоти зовнішньої дії, що відповідає числу оборотів машини, з частотами власних коливань корабля або його окремих частин виникає явище резонансу, поєднане із зростанням амплітуди коливань.

Для припинення сильної вібрації корабля виводять коливальну систему зі стану резонансу. З цією метою змінюють частоту зовнішнього впливу (тобто число обертів машини), роблячи її відмінною від частоти власних коливань системи.

Вібраціям піддаються також судові гребні гвинти, так як гідродинамічні сили, що діють на їх лопасті, змінюються періодично. Частота коливань відповідає швидкості обертання гвинта, помноженої на кількість лопастей. Небезпечні коливання гребного гвинта на найбільшому французькому океанському пароплаві «Нормандія» були усунені заміною трилопастевих гребних гвинтів чотирьохлопастевими, чим вдалося вивести систему судно-гвинт зі стану резонансу.

Вивчення коливань літака давно привертало увагу вчених і конструкторів. Основними частинами літака, вивченню вібрації яких доводиться приділяти серйозну увагу, є крила, хвостове оперення, повітряні гвинти, а також двигун.

При польоті виникають аеродинамічні сили, які можуть як підсилювати, так і послаблювати коливання крил. Неврівноважені сили інерції авіадвигуна, вихор, що зривається з крила літака, та ін. є періодично обурюючими силами, які породжують вимушені коливання. Проте бувають і такі коливання, які виникають без будь-яких зовнішніх періодично діючих сил. Такі, наприклад, автоколивання типу «флаттер» (тріпотіння). Ці автоколивання представляють собою небезпечне для конструкції поєднання згинальних і крутильних коливань крила, хвостового оперення або інших елементів літака. Вони виникають при критичній, суворо визначеній для даного літака швидкості і, зазвичай, є наслідком неправильного конструювання.

Практичний інтерес представляє також своєрідний вид автоколивань коліс літака і автомобіля, що має назву «шиммі».

Самозбудження коливань носового колеса триколісного шасі літака на рулюванні, розбігу і пробігу виражається в коливанні колеса і може призвести до поломки стійки шасі і до аварії літака. «Шиммі» усувається за допомогою спеціальних гасителів коливань, які, не позбавляючи носового колеса здатності орієнтуватися, перешкоджають виникненню самозбурюючих коливань.

У деяких конструкціях автомобіля при певній швидкості руху спостерігається самозбудження коливань передніх коліс. Ці коливання складаються з поворотів коліс відносно вертикальної осі і бічних зсувів та викликають вібрацію всієї машини. «Шиммі» виникають при їзді по рівній дорозі, при гарному балансуванню коліс. Джерелом, що підтримує коливання «шиммі», є кінетична енергія руху автомобіля.

До автоколивальних процесів відноситься також явище «галопування» проводів електропередач (рис. 1.10). Як відомо, лінія електропередачі складається з дротів круглого перерізу, натягнутих між щоглами, що знаходяться один від одного на відстані до 100 м. Кожен проліт лінії коливається з частотою приблизно в один герц, утворюючи половину хвилі з амплітудою 3 м в середній частині (рис. 1.10). Галопування проводів електропередач відбувається взимку при температурі близько  $0^{\circ}$  і при сильному

поривчастому вітрі в напрямку, поперечному до лінії електропередачі. В таку погоду дроти покриваються налипшим мокрим снігом. Незважаючи на відсутність суворої регулярності поривів вітру, великі автоколивання такої лінії тривають іноді кілька діб.

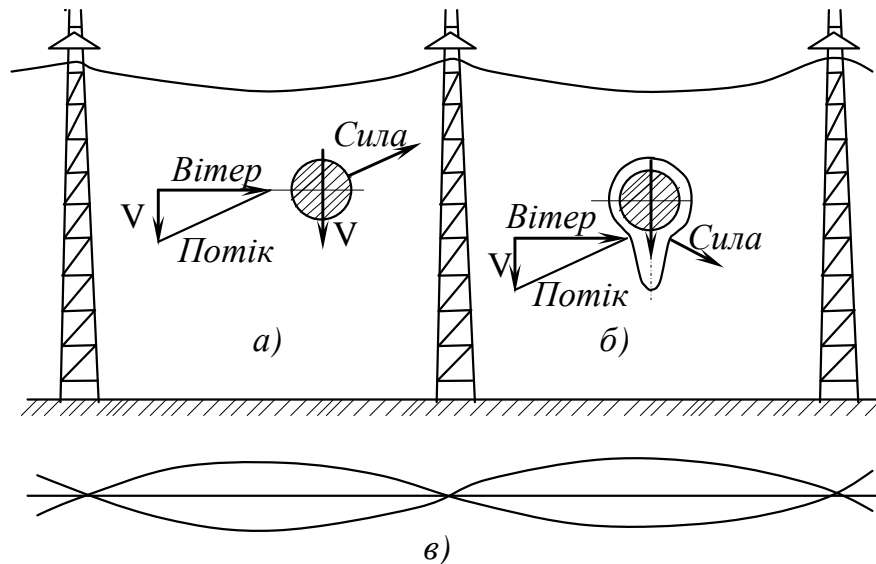


Рис.1.10. Галопування лінії електропередач

Якби провід мав круговий поперечний переріз і рухався вниз, то сила, що виникає від дії вітру, мала б вертикальну складову, спрямовану вгору (рис. 1.10, а). При русі дроту вгору складова буде спрямована вниз. Виходить, що коливання круглого дроту загасають.

Однак у випадку некруглого поперечного перерізу (рис. 1.10, б) можуть створитися умови динамічної нестійкості внаслідок несиметричного перерізу проводу, що рухається вниз при бічному вітрі. При цьому сила, що виникає від дії вітру, може мати вертикальну складову, спрямовану також вниз, що змусить провід рухатися далі в тому ж напрямку. Цей рух буде продовжуватися до тих пір, доки виникші у проводі пружні сили не припинять його. Форма перетину дроту з налипшим снігом може бути така, що після зазначеної зупинки результуюча пружних і аеродинамічних сил виявиться спрямованою вгору, внаслідок чого амплітуда коливань швидко зросте.

Таким чином, тут ми також маємо справу з автоколиваннями, для підтримки яких не потрібно дії періодичної зовнішньої сили.

Такі відповідальні споруди, як мости, завжди були предметом ретельного вивчення коливань.

Відомо, що поїзд, який швидко проходить по мосту, викликає прогини і зусилля в фермах, що більші тих, які виникають при нерухомому розташуванні того ж складу поїзда на мосту. Це динамічний вплив залежить як від частоти власних коливань мосту, так і від співвідношень ваг мосту і поїзда. Чим більша швидкість поїзда, тим більша величина прогину в порівнянні з його статичним значенням. Велике значення для мосту має ударна дія проходящих по мосту вагонів, особливо тоді, коли частота ударів близька до частоти власних коливань мосту.

Колона людей, крокуючих в ногу по мосту, може також викликати вимушені коливання. При цих коливаннях можливі явища резонансу. Крім вимушених коливань, в мостах можуть з'являтися автоколивання типу «флаттер», які тут не менш небезпечні, ніж у літаках. Цей вид автоколивань в мостах до теперішнього часу мало вивчений.

У різних будовах шкідливі механічні коливання можуть виникнути під впливом повітряних потоків і завихрень. Так, у висотних будівлях, маяках, вежах, фабричних трубах, щоглах, які мають велику висоту, розмахи коливань, тобто подвійні амплітуди верхніх частин будівель, досягають порядку 30-80 см.

У районах, схильних до землетрусів, доводиться споруджувати сейсмостійкі будівлі з підвищеною стійкістю проти підземних поштовхів, що здорожує будівництво.

З розглянутих прикладів шкідливих дій коливань видно, що основними методами боротьби із шкідливими вібраціями в машинобудуванні і в будівельній справі є:

1) раціональне конструювання і розрахунок машин і споруд, спрямовані на усунення резонансних явищ і на створення умов, несприятливих для самозбудження коливань;

2) підвищення динамічної міцності за рахунок застосування спеціальних матеріалів, правильної технології обробки деталей і надання їм форми, що сприяє усуненню небезпечних для конструкції напруг;

3) балансування і ретельна збірка (усунення зайвих люфтів), правильна експлуатація з дотриманням встановлених режимів і своєчасного ремонту;

4) розробка віброізолюючих і віброгасячих конструкцій для самого джерела вібрації і для об'єкта, що захищається.

## **1.8. Використання коливань у техніці**

Вище ми показали шкідливий вплив механічних коливань і вказали заходи боротьби з ними. Однак, якщо в одних випадках механічні коливання, що супроводжують роботу машин і споруд, шкідливі і небезпечні, то в інших випадках властивостями і особливостями механічних коливань користуються з великою вигодою для різних цілей.

В даний час механічні коливання широко використовують як в техніці, так і в наукових дослідженнях.

Коливальний рух поршня будь-якої машини-двигуна за допомогою шатунно-кривошипного механізму перетворюється на корисний обертальний рух вала. Дуже часто зустрічаються і зворотні процеси, коли обертальний рух перетворюється на машинах в коливальні рухи, що повідомляються робочим органам. З такими перетвореннями ми зустрічаємося в різних сортувальних і друкарських машинах, валках, грохотах і т. п. У багатьох галузях народного господарства застосовуються вібруючі транспортери, труби та інші канали для безперервної подачі сипучих і в'язких матеріалів.

Представляє великий практичний інтерес використання механічних коливань у ливарному виробництві. Якщо ківш з розплавленим чавуном помістити на спеціальну віброплатформу, то вібрація ковша сприяє виділенню наявних у чавуні газів і видалення з поверхні ковша шлакових включень. При такому способі лиття підвищується якість литого виробу. Дуже широке поширення в промисловості отримав пневматичний інструмент ударної дії,

принцип роботи якого ґрунтується на використанні коливальних рухів. Цей інструмент приводиться в рух стистемним до 5-7 атмосфер повітрям, енергія якого перетворюється в механічну. До пневматичних інструментів відносяться відбійні молотки, бури, клепальні і рубільноклепальні молотки та інші інструменти, де здійснюється зворотньо-поступальний рух робочих органів.

Способи випробування посуду в побуті і великих зварних резервуарів у промисловості також засновані на вібраційних явищах; по вібраціям звуку при постукуванні по досліджуваному об'єкті можна легко визначити наявні дефекти.

В даний час розроблений метод притирання плоских деталей з застосуванням вібрації, за допомогою якого може бути досягнута чистота поверхні, відповідна середньоквадратичному відхиленню нерівностей, рівному  $+0,075$  мк, що відповідає приблизно 12-му класу чистоти поверхні за ГОСТом 2789-59.

У будівельній справі при виробництві трудомістких і складних робіт широко користуються спеціальними вібраторами для поглиблення паль в ґрунт, для ущільнення бетону, перемішування різних матеріалів, утрамбування, подрібнення і т. п.

Існують також станкові вібратори і віброплощадки, що необхідні для виготовлення бетонних і залізобетонних виробів. Застосування цих вібраторів для зазначених цілей прискорює виробництво робіт, значно здешевлює їх вартість і спрощує весь процес роботи. Останнім часом у дорожньому будівництві набули широкого поширення потужні поверхневі вібратори. Вони за одну зміну ущільнюють від 7000 до 9000 м<sup>3</sup> ґрунту. Глибина ущільнення досягає 3-5 м.

Аналогічні вібратори застосовуються також при зведенні гідротехнічних споруд і для ущільнення підстав під фундаменти важких машин, робота яких супроводжується струсами.

У всіх зазначених вище вібраторах і віброплощинах штучно створювана вібрація здебільшого має синусоподібну форму. На транспорті складними

коливаннями пружних елементів (ресор, пружин, гумових шин) і пневматиків широко користуються для забезпечення плавності пересування.

У приладобудуванні механічними коливаннями користуються досить широко. Так, у багатьох годинникових механізмах і самопишущих приладах в якості коливального елемента, що забезпечує дію цих приладів, застосовується маятник або баланс. У різних аеронавігаційних приладах користуються вібраційними гіроскопами. В електротехніці широко відомі різні прилади, що містять вібруючі елементи. Такими є, наприклад, вібраційний гальванометр, вібраційний випрямляч, резонансний частотомір та ін.

Ряд наук, тісно пов'язаних з коливаннями земної кори або її окремих ділянок, спеціально займається питаннями коливань. До таких наук відносяться, наприклад, сейсмологія і геофізика. У цих областях створено багато різних приладів для вимірювання коливань.

Для виробництва вібраційних випробувань дуже часто вібрацію відтворюють штучно в лабораторіях чи стендових умовах за допомогою спеціальних вібраторів і вібраційних столів. У цих випадках створюється чиста синусоїдальна вібрація. Тривалі випробування різних об'єктів для виявлення їх опору руйнівному впливу вібрації називаються випробуваннями на віброміцність. Випробування ж, що мають на меті виявлення несправностей і порушень нормальної дії об'єкта, що виникають при вібрації, називаються випробуваннями на вібростійкість.

До вібраційних випробувань відноситься також експериментальне визначення власних частот і форм коливань складних конструкцій.

### **1.9. Основні цілі і етапи динамічного розрахунку**

Створення сучасних машин немислимо без врахування коливальних процесів, в більшості визначаючих виробництво машин, якість продукції, довговічність та надійність обладнання, умови праці людини-оператора. Необхідність вивчення та висвітлення цих актуальних питань підтверджується



загальними тенденціями технічного процесу, що знайшло своє відображення в директивних документах, зокрема, в регіональних програмах інтенсифікації виробництва, а також у комплексних планах ряду міністерств та відомств з розвитку дослідно-конструкторських робіт в області віброзахисту обладнання та боротьбі з шумом.

Інтенсифікації виробничих процесів в кінцевому випадку завжди супроводжує ріст робочих швидкостей, що в свою чергу, диктує необхідність більш поглибленого і різностороннього врахування динамічних факторів. Проблемам динаміки машин присвячена велика кількість учбових посібників та монографій, що є природним, оскільки цьому розділу машинобудування притаманна не тільки велика різноманітність задач, але й багатоступінчатість на рівні висвітлення однієї і тієї ж проблеми. Останнє пов'язане як зі всебічними інтересами при розв'язку інженерної задачі, так і з великим числом умов і факторів, визначаючих кінцевий результат.

Сучасний динамічний розрахунок машин і механізмів потребує накопичення і удосконалення знань особливостей досліджуваного об'єкту і повинен базуватися на розумному сполученні аналітичних та числових методів. Реалізація аналітичних методів немислима без широкого використання ЕОМ, що знайшло відображення і в даній роботі. Аналітичний акцент при викладенні матеріалу відобразився в прагненні автора, зберігаючи достатню спільність при постановці задачі, представити результати в формі, яка б допускала фізичну інтерпретацію та інженерні оцінки.

Стосовно до задач проектування машин врахування коливальних явищ зазвичай переслідує наступні цілі:

- усунення аварійних режимів;
- створення нормальних умов роботи машини, при яких забезпечується високоякісне і надійне здійснення заданої технологічної і транспортної операції;
- відтворення з заданою точністю програмних кінематичних залежностей;

- обмеження динамічних навантажень та рівня коливань, обумовлених експлуатаційними характеристиками механізмів, приладів, засобів автоматизації і т.д.;
- захист людини-оператора від підвищеного рівня вібрацій та шуму;
- раціональне використання коливальних явищ при створенні спеціальних вібротехнічних засобів, виконуючих технологічні і транспортні операції.

### **1.10. Динамічна модель**

Навіть при сучасному рівні розвитку механіки машин і обчислювальної техніки повний опис усіх аспектів динамічної поведінки елементів машини та процесів, в ній відбуваючих, не представляється можливим, як втім і необхідним. Тому перший етап динамічного розрахунку пов'язаний з розумним спрощенням вихідного об'єкту, тобто заміною його деякої схеми чи моделі, в якій прагнуть відобразити найбільш суттєві фактори розглядаємої задачі. Оскільки в даному випадку мова йде про проблеми динаміки механізмів, в подальшому зручніше користуватися терміном «динамічна модель» (ДМ), розуміючи під цим ідеалізоване відображення системи, що використовується при її теоретичному дослідженні та інженерних розрахунках.

Допускаємо, що при розгляді якої-небудь реальної механічної системи неминуче приходиться абстрагуватися від деяких її частинних особливостей. Ось тому не може бути складена настільки удосконалена модель, яка б повністю відповідала своєму оригіналу. Таким чином, динамічна модель виявляється обмеженою і придатною лише при певних умовах та колу питань. З іншого боку звідси випливає, що при динамічному дослідженні одному й тому ж механізму може відповідати цілий ряд динамічних моделей.

Степінь ідеалізації реальної системи при її відображенні динамічною моделлю залежить від багатьох факторів. Так число степенів вільності залежить від частотного спектру вимушених сил; інколи без шкоди для точності

результатів будь-яка група сил може бути не врахована, а врахована в лінійному наближенні і т.д.

Надзвичайно важливо, щоб при виборі динамічної моделі ідеалізація не вступила в протиріччя з можливостями принципіального характеру в описі тих чи інших коливальних явищ. Наприклад, при дослідженні параметричних коливань обов'язково повинна бути прийнята до уваги зміна параметрів системи, а при дослідженні автоколивань – нелінійні характеристики системи. Як бачимо, процедура вибору ДМ вже потребує певного рівня знань та розуміння якісної картини вивчаємих явищ. В одних випадках конструктивні особливості механізму такі, що дозволяють відразу скласти одну або декілька моделей, на яких повинні базуватися динамічні розрахунки. В більш складних випадках для складання потребують попередні розрахунки, а інколи навіть пошуковий експеримент. Найбільшу роль для вибору ДМ відіграє інженерна інтуїція, яка базується на досвіді попередніх розрахунків і експериментальних дослідженнях, а також на практиці експлуатації різноманітних машин та механізмів.

Не дивлячись на те, що вид ДМ в значній степені визначається конкретними умовами, можливий відбір ряду типових моделей, властивих більшості механізмів як по цілі динамічного розрахунку, так і по здатності відобразити найбільш важливі динамічні властивості.

Динамічні моделі механізмів мають відмінні особливості, що виділяють їх в окремий клас зі своїми специфічними властивостями. Одна із особливостей полягає в тому, що програмний рух циклових механізмів є джерелом кінематичних збуджень, із-за яких виникають динамічні помилки і додаткові навантаження ланок. Інша особливість – абсолютні координати при проходженні кінематичного ланцюгу можуть піддаватися нелінійним перетворенням у відповідності з геометричними характеристиками.

### **1.11. Математична модель**

Кожній фізичній моделі відповідає своя математична модель (ММ), тобто система диференціальних, інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь, з допомогою яких здійснюється математичний опис об'єкту, що досліджується. При побудові ММ в ряді випадків приходиться застосовувати деякі гіпотези та припущення для компенсації недоліку знань чи з метою спрощення самої процедури математичного опису системи та її подальшого аналізу.

Складання ММ механізму являється другим етапом динамічного розрахунку, що припускає розуміння основ аналітичної механіки і експериментальних закономірностей, що використовуються для математичного опису деяких сил.

### **1.12. Розв'язок і аналіз результатів**

Третім етапом динамічного розрахунку є задача розв'язку рівнянь, отриманих на другому етапі при складанні математичної моделі. При цьому використовуються як аналітичні методи, що дають чітку картину і достовірні інженерні оцінки, так і числові методи, які опираються на великі можливості сучасної обчислювальної техніки. Великою перспективою наділені числено-аналітичні методи, основані на розумному сполученні обох методів.

При виборі методу розв'язку задачі неможливо абстрагуватися від кола припущень, закладених в процесі ідеалізації досліджуваного об'єкту на етапі складання динамічної моделі. При цьому виникає цілий ряд цікавих і важливих проблем сучасної прикладної математики.

За розв'язком задачі безпосередньо впливає аналіз отриманих результатів, який зазвичай потребує від дослідника певної загальнотеоретичної підготовки. При цьому чим складніша система, тим більш повною має бути інформація про можливий якісний характер очікуваних динамічних явищ.

### 1.13. Експериментальна перевірка

За допомогою експерименту нерідко виявляються нові ефекти, перевіряються деякі гіпотези і припущення, які були використані при теоретичному дослідженні. При цьому особливо важливо впевнитися в достовірності прийнятої динамічної моделі. Оскільки широка варіація параметрами і структурою системи пов'язана з великою працеемкістю та затратами, експеримент повинен розумно сполучатися з теоретичними дослідженнями і динамічними розрахунками. Останнє потребує почуття міри, що не допускає як перебільшення області застосування використовуваної моделі, так і нерідко зустрічаючої недовіри до теорії, що подекуди призводить до прагнення піддати експериментальній перевірці будь-яке положення, наприклад, кожний новий варіант механізму, вплив зміни його параметрів і т.д.

### 1.14. Динамічне проектування

Стосовно до коливальних систем машин цей етап в першу чергу представляє інтерес для зниження віброактивності механізмів чи більш ефективного використання коливань в технологічному процесі. Розробка методів оптимізаційного динамічного синтезу являється у цей час однією з найбільш важливих і актуальних проблем динаміки машин.

В залежності від степені відповідальності динамічного розрахунку перераховані етапи можуть бути виконані на різному за точністю рівні як по відношенню до вибраних ДМ, так і методів їх дослідження. Нерідко деталі обчислювальних процедур заслоняють фундаментальну проблему формування модельних представлень про дослідний об'єкт. При цьому виникає реальна небезпека, пов'язана з можливістю невідповідності великого об'єму числової інформації рівню фізичного розуміння спостерігаємих явищ. В свою чергу, це призводить до того, що дослідник нерідко стає рабом ЕОМ, приймаючи на віру всю отриману від неї інформацію. Вказана обставина потребує постійного удосконалення наших фізичних представлень про об'єкт дослідження, на основі

якого в кожному класі машин може бути створена певна ієрархія динамічних моделей, розроблені інженерні оцінки та інші методи, здатні виключати помилки, що викликані невідповідністю моделей чи допущених при програмуванні і обрахунках.

## РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Навіть у пружній області лінія розвантаження 2 не збігається з лінією навантаження 1 (рис.2.1). Це явище називається "пружним" гістерезисом, а відповідна діаграма деформування - петлею "пружного" гістерезису.

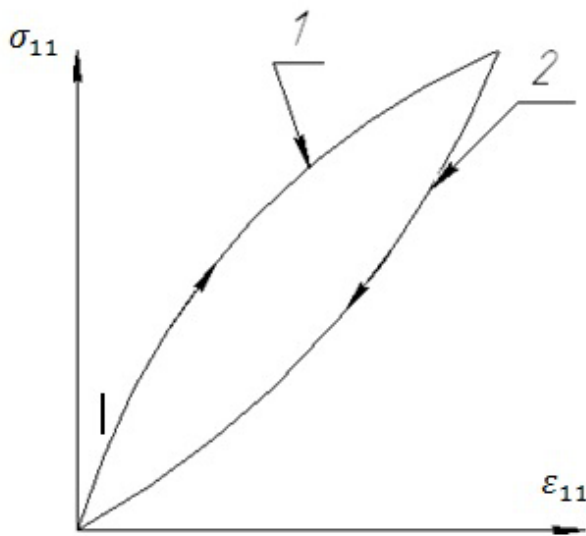


Рис.2.1.

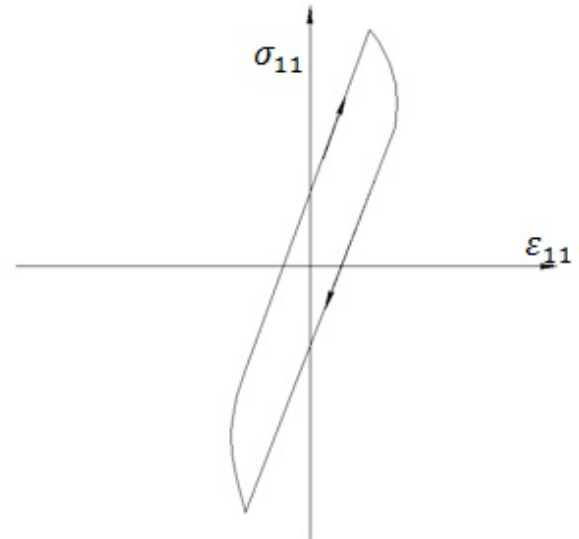


Рис.2.2.

В умовах знакозмінного циклу з пружною області утворюється також петля гістерезису (рис.2.2). Пружний гістерезис, обумовлюється деяким запізненням деформації в перші періоди навантаження і розвантаження.

При деформуванні металів за межею пружності до пружного гістерезису додається явище пластичного гістерезису і утворюється петля пружно-пластичного гістерезису (рис.2.3, 2.4).

Одінг вважає, що цю петлю (рис.2.3) слід відрізнити від петлі пружного гістерезису (рис.2.2). "Якщо петля пружного гістерезису характеризується відставанням зміни деформації від зміни напруження в моменти початку навантажування і розвантаження, то петля пластичного гістерезису, навпаки, характеризується відставанням напруження від деформації", - пише він у монографії.

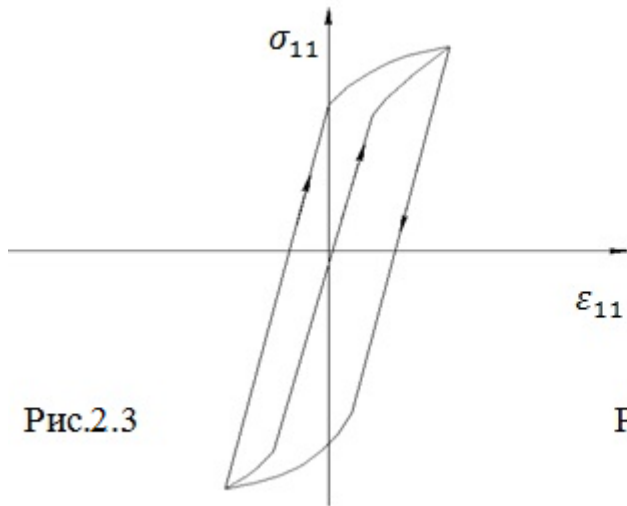


Рис.2.3

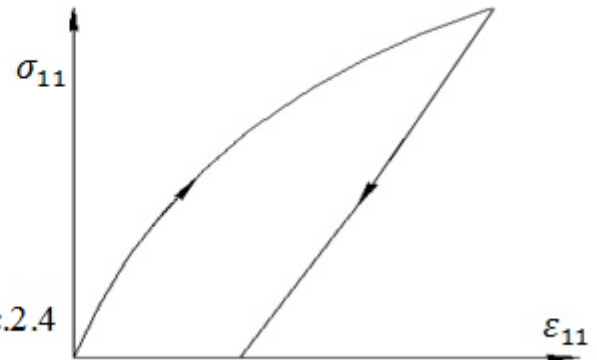


Рис.2.4

Мабуть, тут допускається неточність, хоча і є деяка відмінність у формі петлі. У випадку "пружного" і у разі пластичного гістерезису деформація в переважній частині циклу відстає від напруження, про що говорить однаковий напрямок обходу (за годинниковою стрілкою) обох петель (рис.2.2 і рис.2.4) із зростанням параметра часу. Площа петлі при такому обході характеризує необоротно поглинену енергію в тілі за цикл. При зворотному обході петлі, який мав би місце у випадку відставання напруження від деформації, площа її характеризувала б запасену енергію, що йде на розкачку процесу циклічного деформування. А це в суцільному середовищі не спостерігається. [1]

Зміна напрямку обходу діаграми навантаження-переміщення можливе за деяких умов в системах (напр., в системі оброблювана деталь - інструмент і т.д.).

При феноменологічному підході, заснованому на експериментальних кривих деформування, пластичний і пружний гістерезис подібні явища. "Не доводиться відрізняти гістерезис від звичайної пластичної деформації за іншою ознакою, крім кількісного до тих пір, поки ми не маємо надійної атомної теорії пластичної деформації, створювати особливу теорію для гістерезису було б просто передчасно". [6]



## 2.1. Технічні теорії внутрішнього тертя

Велике значення внутрішнього тертя в інженерній справі. Завдяки ньому відбувається згасання вільних коливань, обмеження амплітуд резонансних коливань, зниження напружень при ударних навантаженнях, перерозподіл напружень у місцях концентрації їх. Тому питанню дослідження внутрішнього тертя в твердих тілах з давніх пір (1784г. Кулон) приділяється велика увага.

Відношення роботи сили тертя (необоротно поглиненої енергії)  $\Delta W$  за один цикл деформування до потенціальної енергії  $W$  відповідної амплітуди деформації за той же цикл, називається коефіцієнтом поглинання  $\psi$  (питомим розсіюванням енергії)

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}. \quad (2.1.1)$$

На практиці для вимірювання різних ефектів внутрішнього тертя застосовують і інші характеристики: логарифмічний декремент коливань  $\delta$ , добротність системи  $Q$ , затухання  $\gamma$  (коефіцієнт внутрішнього тертя).

Всі вони пов'язані між собою:

$$\psi = 2\delta = \frac{2\pi}{Q} = 2\pi\gamma. \quad (2.1.2)$$

Ці характеристики зберігають свою силу для будь-якого виду напруженого стану. При однорідному напруженому стані вони будуть однаковими для всіх частин тіла, а при неоднорідному - є узагальненими (усередненими по всьому об'єму тіла) характеристиками, якщо вони залежать від амплітуд деформації (напруження). Відомі дві гіпотези внутрішнього тертя в матеріалі. Згідно з першою гіпотезою внутрішнє тертя в матеріалі залежить від швидкості деформації, а по другій - від деформації. Можлива і третя: внутрішнє тертя залежить від деформації і її швидкості.

Хоча експериментальним вивченням внутрішнього тертя почали займатися давно (1784 р.), перша гіпотеза була висловлена значно пізніше (в 1865 р.) англійським фізиком Кельвіном.

Кельвін (Томсон) пояснював внутрішнє тертя в твердих тілах їх в'язкістю. На підставі цієї гіпотези в 1890-1892 рр. В. Фойгт запропонував наступну залежність між нормальним напруженням  $\sigma_{11}$  і відносною деформацією  $\varepsilon_{11}$ :

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \gamma E \dot{\varepsilon}_{11}, \quad (2.1.3)$$

де  $E$ - модуль Юнга,  $\gamma$  - коефіцієнт в'язкого внутрішнього тертя,  $\dot{\varepsilon}_{11}^*$  - швидкість деформації. З тих пір гіпотеза Кельвіна-Фойгта отримала широке поширення в прикладній теорії коливань з огляду на її простоту (лінійний вид). Другий доданок у правій частині рівняння (2.1.3) - гістерезисне непружне напруження (сила тертя, яка припадає на одиницю площі перерізу).

Амплітудне значення його при гармонійному деформуванні

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^* \sin \omega t, \quad (2.1.4)$$

дорівнюватиме  $\gamma E \varepsilon_{11}^* \omega$ .

Обчислимо за формулою (2.1.1), використовуючи (2.1.3), коефіцієнт поглинання:

$$\psi = \frac{\oint \sigma_{11} d\varepsilon_{11}}{\int_0^{\varepsilon_{11}^*} \sigma_{11} d\varepsilon_{11}} = 2\pi E \gamma \omega. \quad (2.1.5)$$

Таким чином, відповідно до гіпотези Кельвіна-Фойгта внутрішнє тертя у твердому тілі пропорційно частоті й амплітуді деформації в першому ступені, а коефіцієнт поглинання пропорційний частоті і не залежить від амплітуди. Проте численні експерименти показують, що коефіцієнт поглинання у більшості матеріалів при середніх напруженнях і нормальних температурах практично не залежить від частоти і залежить від амплітуди деформації в різному ступені [3].

Невідповідність гіпотези Кельвіна-Фойгта експерименту змусило вчених уточнювати теорію внутрішнього тертя. Так, у 1932 р. Бок, а в 1935р. Шліппе внесли поправку в (2.1.3), запропонувавши вважати коефіцієнт внутрішнього тертя обернено-пропорційним частоті коливань  $\omega$ :

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \frac{\gamma}{\omega} E \dot{\varepsilon}_{11}. \quad (2.1.6)$$

У цьому випадку коефіцієнт поглинання

$$\psi = 2\pi E\gamma.$$

не буде залежати ні від частоти, ні від амплітуди деформацій. На площині  $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$  рівняння (2.1.3) і (2.1.6) дають еліптичну петлю гістерезису, причому у випадку (2.1.3) площа петлі залежить, а в разі (2.1.6) - не залежить від частоти. Скелетної лінією в обох випадках буде похила пряма (закон Гука).[4]

Поправка Бока-Шліппе усунула вплив частоти на коефіцієнт поглинання, проте не ввела вплив амплітуди деформації, що експериментально спостерігається. У зв'язку з цим гіпотезу Кельвіна-Фойгта пізніше намагалися різним чином підправити інші автори. Зокрема, Лунц Є.Б., Гловнін Г.Я. відповідно призводять рівняння:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E \dot{\varepsilon}_{11}^n, \quad (2.1.7)$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \gamma \left| \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\omega} \right|^n \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\omega}. \quad (2.1.8)$$

Згідно співвідношенню (2.1.7) внутрішнє тертя в матеріалі залежить нелінійно від частоти і амплітуди деформації, а згідно (2.1.8) - лише від амплітуди деформації.

У 1936-1938 рр. були опубліковані результати дослідів Беневітця і Ретгера при поперечних коливаннях сталевого і алюмінієвого дроту в широкому діапазоні частот (0,5-500 Гц) незначних напругах (порядку  $0,1 \text{ кгс}/\text{см}^2$ ). Отримано немонотонні, з екстремумами, залежності внутрішнього тертя від швидкості деформації. Зінер теоретично обґрунтував ці результати, вважаючи що внутрішнє тертя залежить від теплової дифузії.

До 1938 р. оформилася друга концепція внутрішнього тертя в твердих тілах. Найбільш чітко сформулював і обґрунтував гіпотезу М.М. Давиденків, вказавши межі застосовності її. Якщо неушкоджені кристали проявляють досконалу пружність, то при деформуванні полікристалів внаслідок їх неоднорідності виникають місцеві мікропластичні деформації.

Пластичну деформацію можна розділити на дві частини: термічну і атермічну. Перша залежить від температури (збільшується зі зростанням температури) і швидкості навантаження (зазвичай зменшується зі збільшенням швидкості деформування) і є причиною післядії. Друга не залежить від температури і швидкості навантаження, а визначається лише рівнем напруження. Вона-то і є причиною статичного гістерезису. У разі післядії або "в'язкого" тертя теж виникає гістерезис, але величина його в цьому випадку різним чином залежить від швидкості навантаження.

"Явища післядії та гістерезису йдуть одночасно, і відокремити їх один від одного важко" Проте при середніх напруженнях в умовах нормальної температури термічна пластична деформація в металах не встигає розвинути в той час, як атермічна деформація проявляється повністю. У цьому випадку можна знехтувати малою величиною термічної складової у порівнянні з атермічною і розглянути явище статичного гістерезису окремо від наслідку. Статичну петлю гістерезису М. М. Давиденків запропонував описувати двома параболою  $n$ -го порядку

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \frac{E\eta_n}{n} \left[ (\varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{11})^n - 2^{n-1} \varepsilon_{11}^{*n} \right], \quad (2.1.9)$$

де  $\eta_n$  і  $n$ - експериментальні параметри петлі гістерезису,  $\varepsilon_{11}^*$  - амплітуда деформації.

Вперше застосував нелінійну гіпотезу (2.1.9) в інженерній практиці Г.С. Писаренко, вирішивши за допомогою асимптотичних методів основні задачі на вібрації з урахуванням нелінійного внутрішнього тертя і запропонував нові рівняння контуру петлі гістерезису для симетричного і несиметричного циклів.

Коефіцієнт поглинання у випадку (2.1.9) дорівнює:

$$\psi = \frac{2^{n+2} \eta_n (n-1)}{n(n+1)} (\varepsilon_{11}^*)^{n-1}, \quad (2.1.10)$$

тобто не залежить від частоти, а залежить від  $n - 1$  -го ступеня амплітуди деформації, що узгоджується з експериментальними даними при середніх напруженнях в металах у разі монотонної зміни декременту.

До принципів переваг рівняння (2.1.9) слід віднести те, що на відміну від інших рівнянь, воно враховує не тільки несинфазне (гістерезисне) відхилення від закону Гука, але і синфазне (дефект модуля пружності). "Внутрішнє тертя не можна відривати від іншого явища - зміни ефективного модуля пружності внаслідок пружної недосконалості". На жаль, ці два ефекти пружної недосконалості в (2.1.9) не розділені і співвідношення між ними залежить від вибору параметра  $n$ . У випадку  $n=1$  рівняння (2.1.9) замикаються в пряму  $\sigma_{11} = (E - \eta)\varepsilon_{11}$  (закон Гука), а коефіцієнт поглинання згідно (2.1.10) обертається в нуль, тоді як має бути  $\psi = \text{const} \neq 0$ . Іншими словами, внутрішнє тертя з'являється і зникає разом з дефектом модуля, а лінійного тертя або нелінійного без дефекту модуля не існує. Крім того, співвідношення (2.1.9), (2.1.10) не дають можливості апроксимувати немонотонну зміну тертя зі зміною амплітуди деформації.

Зазначені недоліки відносяться лише до рівнянь (2.1.9), (2.1.10). Сама ж гіпотеза Давиденкова М.М. за змістом ширше рівнянь (2.1.9) і взагалі всіх варіантів другої гіпотези, що встановлюють лише амплітудну залежність внутрішнього тертя, бо вона не заперечує і швидкісної залежності явища гістерезису, яке при феноменологічному описі, коли в основу береться експериментальна петля, ототожнюється з внутрішнім тертям, не залежно від причини походження петлі (термічна або атермічна пластична деформація). Вона лише нехтує цією залежністю в металах за певних умов (середня величина напруження, нормальна температура і т.д.). Зі зміною цих умов (підвищення напружень за межу втоми при одночасному зменшенні швидкості навантаження) зростає вплив наслідків. Може наступити момент, коли обидві частини пластичної деформації (термічна і атермічна) будуть порівнянні, і петля гістерезису зі збільшенням швидкості деформування (частоти) буде

зменшуватися. Розвиток і переконливе експериментальне підтвердження ця частина гіпотези Давиденкова М.М. отримала тільки зараз [1].

Виникнення нового погляду на явище внутрішнього тертя послужило поштовхом для розвитку експериментальних і теоретичних досліджень, а також створення методів розрахунку коливань з врахуванням нелінійного тертя.

Були запропоновані різні лінійні варіанти нової гіпотези:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E\varepsilon_{11}^*, \\ \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E\varepsilon_{11}^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^*} \right), \end{array} \right. \quad \text{Корчинський І.Л., 1938 (2.1.11)}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E\varepsilon_{11}^* \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^*} \right)^2 \right], \quad \text{Панов Д.Ю., 1940 (2.1.12)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E\varepsilon_{11}^* \sqrt{1 - \left( \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^*} \right)^2}, \\ \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \left( 1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right), \end{array} \right. \quad \text{Сорокін Є.С., 1949 (2.1.13)}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} e^{i\alpha}, \quad \text{Назаров О.Г., 1953 (2.1.14)}$$

де  $\gamma$  - коефіцієнт амплітудного тертя,  $\alpha$  - кут тертя.

Всі лінійні залежності дають коефіцієнт поглинання, не залежний ні від частоти циклу (що за певних умов узгоджується з експериментом), ні від амплітуди деформацій (що справедливо лише для дерева, залізобетону, цегли, скла, гуми), у металів же коефіцієнт поглинання істотно залежить від амплітуди деформацій (напружень), внаслідок чого лінійні теорії для них не придатні.

Апроксимувати експериментальні дані по внутрішньому тертю за допомогою одного параметра  $\gamma, \psi$  чи  $\alpha$ , як це передбачається лінійними формулами (2.1.11-2.1.14), практично неможливо.

Для того, щоб пристосувати їх для металів і розширити можливості апроксимації експериментальних даних, у лінійні формули була введена

амплітуда деформації в деякій мірі, від чого лінійний вигляд рівнянь не змінився, зате коефіцієнт поглинання став залежати від амплітуди деформації. Так з'явилися "лінеаризовані" варіанти другої гіпотези внутрішнього тертя:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \left[ 1 + i\gamma(\varepsilon_{11}^*) \right], \quad \text{Сорокін Є.С., 1951; (2.1.15)}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E\varepsilon_{11}^{*n} \sqrt{1 - \left( \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^*} \right)^2}, \quad \text{Пановко Я.Г., 1953; (2.1.16)}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm E(\mu_0 + \mu_1\varepsilon_{11}^* + \mu_2\varepsilon_{11}^{*2}) \frac{\varepsilon_{11}}{\omega} \quad \text{Філліпов А.П., 1953; (2.1.17)}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \left[ U(\varepsilon_{11}^*) + i\nu(\varepsilon_{11}^*) \right], \quad \text{Сорокін Є.С., 1960; (2.1.18)}$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E(\varepsilon_{11}^*) E\varepsilon_{11}(t - \tau) \quad \text{Сорокін Є.С., 1964. (2.1.19)}$$

тут  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \gamma$  - експериментальні параметри. У ці рівняння величина  $\sigma$ , що змінюється протягом циклу, входить до першого ступеня; амплітуда деформації, хоча і входить нелінійно, є протягом циклу постійною. Внаслідок цього петля гістерезису буде еліптичною. Поряд з цим в роботах з'являється ідея використання комплексної жорсткості для внутрішнього тертя [7].

Лінеаризовані рівняння стали точніше апроксимувати експериментальні дані по внутрішньому тертю, оскільки число параметрів зросло до двох ( $\gamma, n$ ) в рівнянні (2.1.16), до трьох ( $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ ) на (2.1.17), а в інших рівностях таких параметрів можна взяти скільки завгодно. На відміну від співвідношень (9) лінеаризовані рівняння враховують лише гістерезисні відхилення (внутрішнє тертя) від закону Гука, нехтуючи синфазними відхиленнями (дефектом модуля). Виняток становить рівняння (2.1.18), де дефект модуля враховується січною скелетною лінією 4 (рис.2.1.1). Крім того і гістерезисні відхилення нелінійно залежать не від деформації, як в (2.1.9), а від амплітуди деформації, що спотворює реальну картину деформацій (напружень) всередині циклу. Деформації (напруження) всередині циклу будуть істотно відрізнятися від

дійсних у тому випадку, коли дефект модуля великий і їм нехтують (рис. 1.1.2).

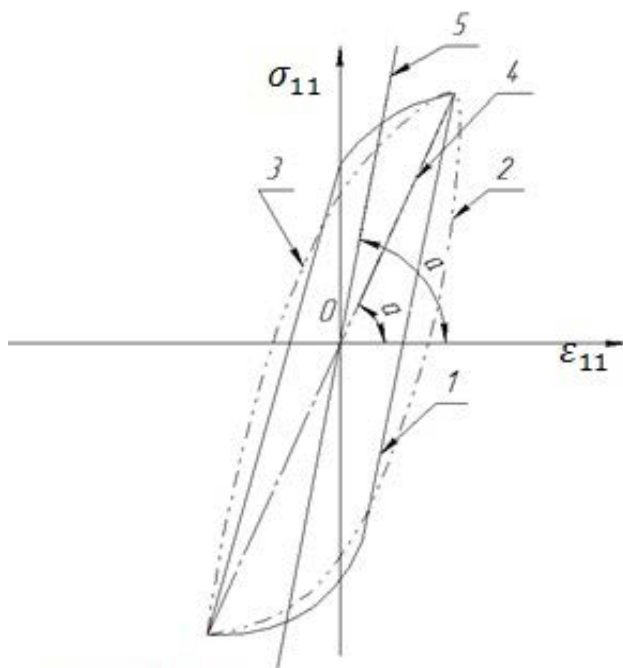


Рис.2.1.1

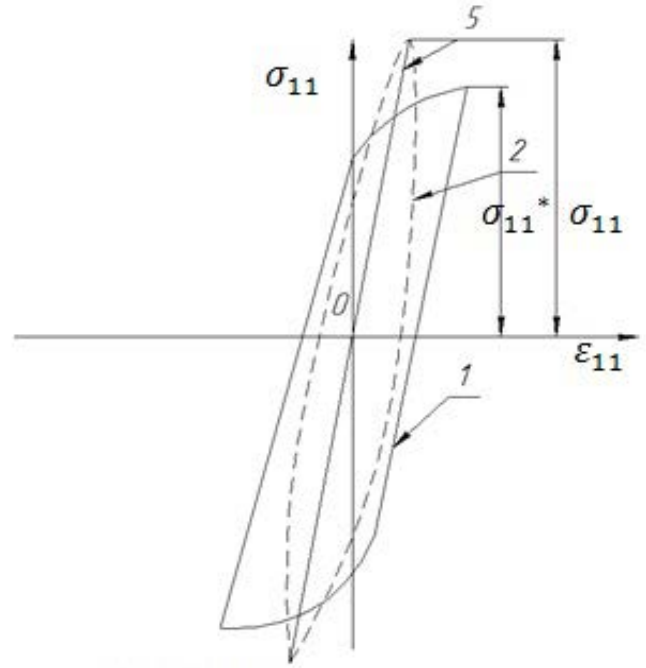


Рис.2.1.2

1- експериментальна петля гістерезису, 2- еліпс з віссю 5, що дорівнює петлі 1, 3- еліпс з віссю 4, що дорівнює петлі 1, 5- пряма Гука

Інтегральні характеристики внутрішнього тертя (коефіцієнт поглинання, логарифмічний декремент) згідно нелінійної залежності (2.1.9), з одного боку, і всіх лінеаризованих рівнянь з іншого боку, будуть однаковими, якщо забезпечити рівність петель гістерезису у всій області зміни амплітуди деформації.

У технічну літературу увійшли і нелінійні варіанти другої гіпотези:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \gamma E \varepsilon_{11}^n, \quad \text{Леонов М.Я., Беспалько С.А., 1955.} \quad (2.1.20)$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \pm \lambda \gamma f\left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^*}\right) \varepsilon_{11}^{*n}, \quad \text{Хільчевський В.В., 1969} \quad (2.1.21)$$

( $\lambda$  - поправочний коефіцієнт, за допомогою якого враховується вплив різних чинників на величину внутрішнього тертя).

$$\overline{\sigma}_{11} = E \left[ \varepsilon_{11} \pm \alpha \left( \varepsilon_2^* - \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{11}^2}{\varepsilon_2^*} \right) \right], \quad \text{Писаренко Г.С., 1971} \quad (2.1.22)$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma}_{11} &= E \left\{ \varepsilon_{11} - \alpha \left[ \varepsilon_{11} - \varepsilon_2^* + \frac{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0^*)^2}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_0^*} \right] \right\}, \\ \overleftarrow{\sigma}_{11} &= E \left\{ \varepsilon_{11} - \alpha \left[ \varepsilon_{11} - \varepsilon_1^* - \frac{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0^*)^2}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_0^*} \right] \right\},\end{aligned}\quad \text{Писаренко Г.С., 1972}$$

В останніх рівняннях

$$\alpha = \frac{3}{8} \delta, \varepsilon_2^*, \varepsilon_1^* \quad - \text{максимальна і мінімальна амплітуда деформації [7]}$$

$$\varepsilon_0^* = \frac{\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*}{2}.$$

У зв'язку з тим, що в сталевих канатах і у деяких пластмас при середніх напруженнях поряд з амплітудною виявлена частотна залежність логарифмічного декременту, з'явилися спроби об'єднати першу і другу гіпотези відповідно на основі лінеаризованої і нелінійного варіантів другої гіпотези:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} + \lambda E \varepsilon_{11}^{*n} \varepsilon_{11}, \quad (2.1.23)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{11} = E \left\{ \varepsilon_{11} \pm \alpha \frac{\eta}{n} \left[ 1 + \frac{n+1}{4\eta} \delta_\omega \varepsilon_{11}^{*n-1} \right] (\varepsilon_{11}^n - \varepsilon_{11}^{*n}) \right\}, \quad (2.1.24)$$

де  $\delta_\omega$  - коефіцієнт, що враховує добавку до декременту за рахунок зміни частоти.

У роботі метою одночасного опису всіх непружних недосконалостей твердого тіла вироблено об'єднання спадкової гіпотези Ішлінського О.Ю. з лінійними рівняннями (2.1.12) Панова Д.Ю. Залежність між напруженням і деформацією, в яку явно увійшов і час, вийшла складною. Автор зміг провести лише якісне дослідження, прийшовши до висновку, що спадкова частина, рівняння виявляється істотною лише при малих частотах і деформаціях. Інші спадкові гіпотези, огляд яких наведено в роботі, використовуються при обліку внутрішнього тертя зважаючи на поганій згоді з експериментом [9].

У технічній літературі йде дискусія навколо питання про вплив розмірів тіла на статичний гістерезис, відповідний другій гіпотезі. Одні автори заперечують наявність такого, а інші стверджують на підставі експериментів,

що такий вплив має місце. Очевидно, в останньому випадку невірно тлумачиться експеримент. Так, наприклад, при затухаючих крутильних коливаннях диска на круглих металевих консольних зразках, спостерігається зростання логарифмічного декременту зі збільшенням діаметра і зі зменшенням довжини зразка. Мабуть, до внутрішнього тертя у зразку додалося зовнішнє в'язке тертя коливань диска в повітрі (а не в порожнечі), що і призвело до появи масштабного фактора.

Дійсно, в'язке тертя пропорційно частоті, яка в даному випадку дорівнювала

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{iJ_m}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \frac{d^2}{l^{0.5} D^2}, \quad (2.1.25)$$

діаметр диска  $D$ , щільність матеріалу диска  $\rho$  і модуль зсуву  $G$  зразка не змінювалися, змінювалися лише діаметр  $d$  і довжина зразка  $l$ . Від останніх двох величин (розмір зразка) і в тому ж напрямку, яке передбачається формулою (2.1.25), змінювалося експериментальне значення декременту.

При великих напруженнях, поблизу і вище межі втоми, виявлено зміну коефіцієнта поглинання з числом циклів.

Дуже важливою проблемою є вивчення внутрішнього тертя при складному напруженому стані. Опубліковано з цієї проблеми мало робіт. До сих пір не вирішено питання, як використовувати у випадку об'ємного напруженого стану дані, отримані при одноосьовому напруженому стані. Правда, лінійні варіанти гіпотез внутрішнього тертя легко узагальнити на випадок складного напруженого стану зважаючи справедливості принципу суперпозиції. Це зроблено Назаровим Л.Г. за допомогою комплексного уявлення виду (2.1.14) напружень деформації і пружних постійних. Нелінійне тертя врахувати таким шляхом при об'ємному напруженому стані не можна, тому що в цьому випадку принцип суперпозиції несправедливий. Було зроблено пропозицію записати нелінійні рівняння петлі гістерезису, як і в теорії пластичності, через інтенсивність деформації і напружень. Пізніше цю пропозицію було здійснено в практичних розрахунках. Однак розрахунки

свідчать, що при однакових інтенсивностях напружень логарифмічний декремент у разі поздовжніх коливань буде менше на 13%, ніж у випадку крутильних коливань тонкостінного трубчастого зразка (умови закріплення однакові, напружений стан в обох випадках практично однорідний). Тут, очевидно, справа в тому що при поздовжніх коливаннях, поряд з девіаторною частиною напружено-деформованого стану, є і шарова частина на відміну від крутильних коливань, де є лише девіаторна частина [11]. Розсіювання ж енергії відбувається не тільки внаслідок пластичної деформації і не тільки в девіаторній частині. Тому в першому випадку внутрішнє тертя при однаковій інтенсивності деформацій (при однаковій девіаторній частині) буде іншим, ніж у другому.

Таким чином, в питанні обліку внутрішнього тертя при складному напруженому стані не можна цілком покластися на деформаційну теорію пластичності, нехтуючи всяким відхиленнями від закону Гука в шаровій частині напружено-деформованого стану.

Аналізуючи згадані вище теоретичні та експериментальні роботи, можна прийти до наступних висновків:

1. Внутрішнє тертя в твердих тілах в загальному випадку залежить не тільки від величини деформації, але і від її швидкості (від амплітуди і частоти коливань), причому як амплітудна, так і частотні залежності нелінійні і немонотонні. Петля гістерезису тому в загальному випадку буде динамічною (залежить від швидкості деформування).

2. Немонотонність частотної і амплітудної залежностей такого типу, що дозволяє в деяких областях зміни параметрів зосередити увагу тільки на одній залежності, нехтуючи іншою. Так, наприклад, у металів відомі три області: область низьких напружень, де виявлена залежність з екстремумами внутрішнього тертя від частоти при наявності залежності від амплітуди; область середніх напружень при нормальній температурі (область статичного гістерезису), де частотної залежності майже немає, а амплітудна нелінійна і

немонотонна (рис.2.1.3), область високих напружень (поблизу і вище межі втоми), де спостерігається істотна частотна і амплітудна залежність.

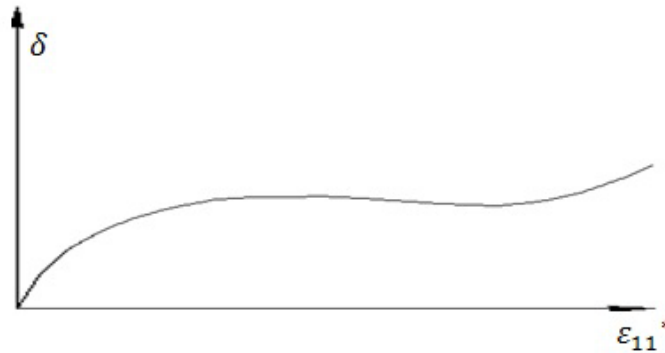


Рис.2.1.3 Залежність між логарифмічним декрементом та амплітудою деформації

3. Внаслідок немонотонності амплітудної і частотної залежності жодну з них не представляється можливим записати одночленною формулою з двома експериментальними коефіцієнтами в скільки-небудь значної області зміни параметрів. З точки зору простоти і зручності використання в додатках з багаточленних залежностей найбільш придатними є алгебраїчні поліноми.

4. В області високих напружень треба враховувати не тільки динамічне внутрішнє тертя (сумарний ефект від всіх пружних недосконалостей матеріалу, що визначається експериментальною петлею гістерезису), але і дефект модуля (визначається по зміні нахилу скелетної лінії динамічної петлі гістерезису) інакше розрахункова картина напружень буде далека від дійсності.

5. Якщо внутрішнє тертя відстає у часі від пружної сили (відповідає закону Гука) на чверть періоду, то пов'язаний з дефектом модуля непружний опір збігається з нею в часі.

6. Не можна без помітної помилки у разі складного напруженого стану використовувати на підставі деформаційної теорії пластичності отримані при простих експериментах дані про внутрішнє тертя, якщо знехтувати відхиленнями від закону Гука в шаровій частині напружено-деформованого стану, як це прийнято в теорії пластичності.

7. В області високих напружень внутрішнє тертя залежить від числа циклів навантаження.

## 2.2. Пружно-пластичний гістерезис

Хоча вивчення пружно-пластичних властивостей конструкційних матеріалів при циклічному навантаженні розпочато у зв'язку з потребами теорії малоциклової втоми, воно може зіграти важливу роль і в уточненні динамічних розрахунків. Відомо, що в даний час в розрахунках враховується лише підвищення навантажень внаслідок динамічного характеру їх застосування, але при цьому не враховується зміна поведінки матеріалу, підвищення опірності його при динамічному навантаженні. Так само, як і при повторно-статичних навантаженнях в різних циклах одним і тим же зовнішнім силам відповідають різні напруження, деформації і переміщення, так і при вимушених пружно-пластичних коливаннях внаслідок зміни опірності матеріалу від циклу до циклу можливо як загасання, так і наростання коливань при незмінній амплітуді збуджуючої сили, а отже, і відповідна зміна напружень і деформацій.

Систематичне вивчення циклічних властивостей металів уперше почав Баушінгер. Він виявив нелінійність розвантаження та наявність петлі гістерезису при повторному навантаженні (рис.2.2.1). Баушінгер, очевидно також вперше, зауважив, що при реверсивному навантаженні (після попереднього розтягування зразка за границю текучості) у подальшому напівциклі межа плинності знижується (рис. 2.2.2). Це явище названо ефектом Баушінгера [10].

Пізніші експерименти підтвердили нелінійність розвантаження і зміни модуля пружності. Внаслідок нелінійності розвантаження точне визначення межі текучості при реверсивному навантаженні ускладнено ще більше, ніж при вихідному навантаженні.

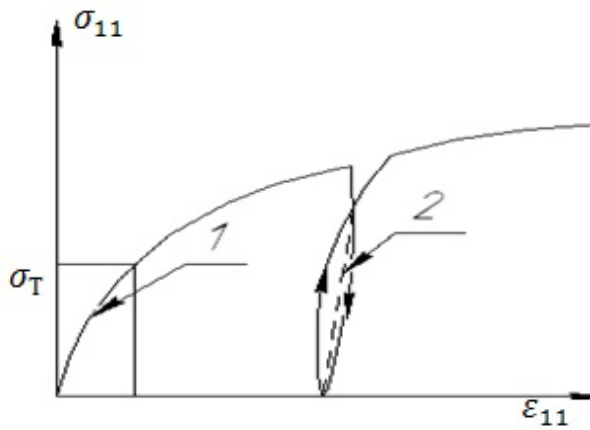


Рис.2.2.1

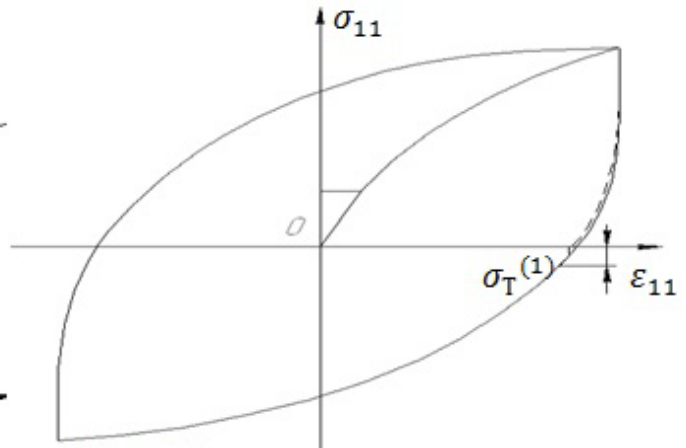


Рис.2.2.2

Величини знайдених з експериментів меж текучості (меж пропорційності) повністю залежать від допуску  $\Delta$  на залишкову деформацію (рис.2.2.3), що робить їх малоцінними характеристиками. А між тим треба знати напруження та деформації всередині кожного циклу. Це змусило вчених звернути увагу на експериментальне вивчення форми петлі пружно-пластичного гістерезису. На рис.2.2.3 представлена схема незамкненої петлі пружно-пластичного гістерезису, утвореною діаграмою одноразового (вихідного) навантаження  $OAB$ , діаграмою розвантаження  $BC$ , діаграмою реверсивного навантаження  $CDK$  і діаграмою розвантаження  $KL$ . Тут в нульовий напівцикл, окрім лінії навантаження  $OAB$ , включена лінія розвантаження. У перший цикл включена діаграма  $CDK$  реверсивного навантаження і лінія розвантаження  $KL$ . Загалом, в  $k$ -ий напівцикл повинна входити діаграма навантаження і діаграма подальшого розвантаження. Без лінії подальшого розвантаження в даному півциклі не можна визначити величину залишкової деформації (ширину петлі), якщо не зроблено спрощуючих припущень про пряmolінійності лінії розвантаження і рівності модуля розвантаження модулю навантаження. Схема на рис.2.2.3 виконана без таких спрощених припущень. Замінюючи прямими ділянки ліній малої кривизни на рис.2.2.2 та нехтуючи зміною модуля розвантаження, отримують схематизовані діаграми циклічного деформування (рис. 2.2.4). На діаграмах найбільше значення поточної пластичної деформації рівно залишковій (ширині петлі гістерезису).

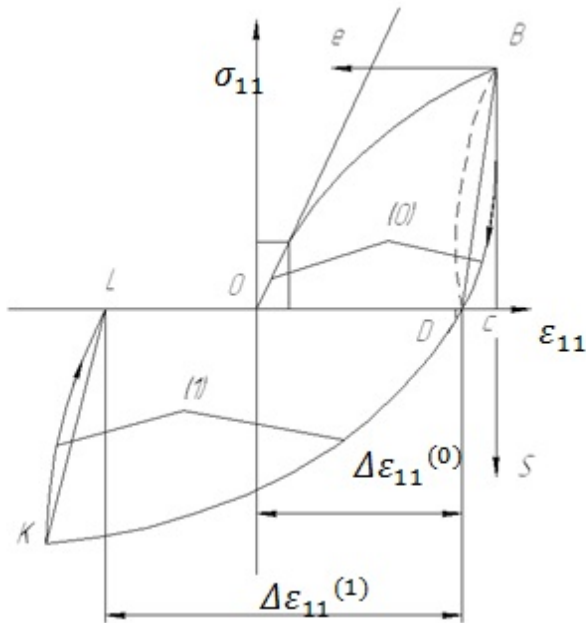


Рис.2.2.3 Петля гістерезису до спрощення

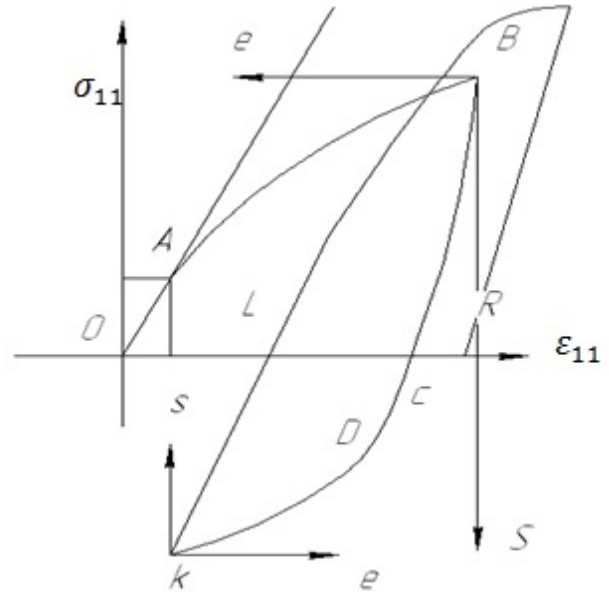


Рис.2.2.4 Схематична петля гістерезису

Представлена на рис.2.2.3 петля гістерезису для циклічно ідеального матеріалу задовільно описується за допомогою припущення, яке Москвітін В.В. назвав принципом Мазінга. Згідно з припущенням Мазінга крива повторного знакозмінного навантаження співпадає з кривою вихідного (нульового) навантаження, побудованої в осях з подвоєним масштабом і зворотним напрямком. Якщо у вихідному навантаженні залежність між напруженням  $\sigma_{11}$  і деформацією  $\varepsilon_{11}$  визначається виразом

$$\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11}),$$

то рівняння діаграми деформування для наступного циклу в координатах  $S - e$ , початок яких у кожному півциклі поєднується з початком розвантаження (рис.2.2.4), за принципом Мазінга має вигляд:

$$S = 2f\left(\frac{e}{2}\right).$$

Москвітін В.В. узагальнив принцип Мазінга на випадок циклічно нестабільних матеріалів (циклічно зміцнюється і циклічно знеміцнюється). Він пропонує вважати, що крива змінного навантаження співпадає з кривою

вихідного навантажування зі зміною масштабу не у два рази, а в  $\alpha_k$  раз по осі деформації і по осі напружень ( $\alpha_k$  - функція вихідної деформації і числа півциклів). Тоді рівняння діаграми деформування в  $k$ -му напівциклі приймає вигляд:

$$S^{(k)} = \alpha_k f\left(\frac{e^{(k)}}{\alpha_k}\right). \quad (2.2.1)$$

Співробітники Інституту машинознавства записують рівняння спрямленої діаграми деформування в  $k$ -му півциклі наступним чином:

$$\bar{e}^{(k)} = \bar{S}, \quad \bar{S} \leq \bar{S}_T^{(k)}, \quad (2.2.2)$$

$$\bar{e}^{(k)} = \bar{S} + \frac{A}{k^\alpha} \left[ f\left(\frac{\bar{S}}{2}\right) - 1 \right], \quad \bar{S} > \bar{S}_T^{(k)}, \quad (2.2.3)$$

де  $\bar{e} = \frac{e}{e_T}$ ,  $\bar{S} = \frac{S}{S_T}$ ,  $k$  - число півциклів,  $f\left(\frac{\bar{S}}{2}\right)$  - рівняння вихідної діаграми деформування,  $A, \alpha$  - константи матеріалу, причому  $\alpha > 0$  для циклічно зміцнюючого матеріалу,  $\alpha < 0$  для циклічно знеміцнюючого матеріалу і  $\alpha = 0$  для стабільного матеріалу. Другий доданок в рівності (2.2.3) відповідає ширині петлі гістерезису. При цьому  $A \left[ f\left(\frac{\bar{S}}{2}\right) - 1 \right]$  - ширина петлі у вихідному (нульовому) півциклі, а  $\frac{1}{k^\alpha}$  - ступеневий закон зміни ширини петлі з числом півциклів.

Іноді для циклічно знеміцнюючого матеріалу приймається експонентний закон зміни ширини петель гістерезису. У цьому випадку рівняння діаграми деформування у пластичній області приймає вигляд:

$$\bar{e}^{(k)} = \bar{S} + A \left[ f\left(\frac{\bar{S}}{2}\right) - 1 \right] \exp \beta (k - 1), \quad (2.2.4)$$

де  $A, \beta$  - експериментальні параметри.



В інженерних розрахунках застосовується лінійна або полігональна апроксимація діаграм вихідного деформування. Лінійна і полігональна апроксимація дає можливість знизити трудомісткість розрахунків при вирішенні інженерних задач, однак може привести до неправильних висновків. Так, розглядаючи вимушені коливання в пружно-пластичних системах на підставі білінійної петлі гістерезису (рис.2.2.5), автори робіт прийшли до висновку, що кількість резонансних частот перевищує число ступенів свободи. Система з одним ступенем свободи, наприклад, має дві резонансні частоти, одна з яких відповідає характеристиці 1, інша - характеристиці 2 (рис. 2.2.5). При такому підході в системі з одним ступенем свободи буде стільки власних частот, скільки має відрізків ламана лінія, апроксимуюча діаграму вихідного деформування. Експеримент ж показує, що буде одна частота, незначно спадна при зростанні амплітуди коливань.

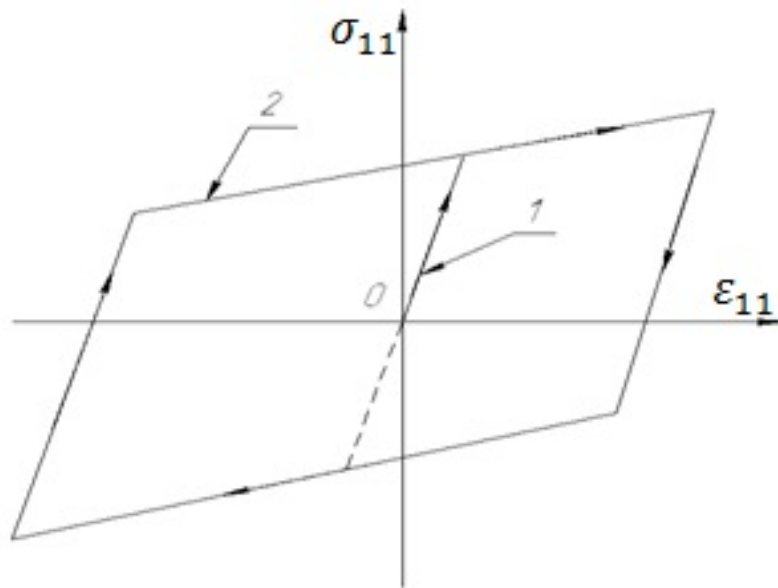


Рис. 2.2.5 Білінійна схематизація петлі гістерезису

Для апроксимації діаграми вихідного деформування було запропоновано ряд нелінійних виразів з двома експериментальними параметрами. Як вже зазначалося, домогтися задовільної апроксимації експериментальної діаграми за допомогою двох параметрів на скільки-небудь значному інтервалі деформації неможливо [8].

Експериментальне вивчення кривих циклічного деформування проводиться при м'якому (з постійною амплітудою напруження) або жорсткому (з постійною амплітудою деформації) навантаженнях. При м'якому навантаженні циклічна поведінка матеріалу характеризується зміною величини деформації (точніше: ширини петлі гістерезису по осі деформації). Якщо деформація (ширина петлі гістерезису) зменшується чи збільшується зі зростанням числа півциклів, то відбувається відповідно циклічне зміцнення або знеміцнення матеріалу. У циклічно стабільному стані ширина петлі не змінюється, приймаючи однакове значення у парних і непарних півциклах (ізотропний матеріал) або одне значення у парних та інше у непарних півциклах (циклічно анізотропний матеріал). [11]

При жорсткому навантаженні циклічна поведінка матеріалів характеризується зміною величини напруження (ширини петлі гістерезису по осі напруження) зі збільшенням числа циклів навантаження. Ефект циклічного зміцнення проявляється у збільшенні напруження, а ефект циклічного знеміцнення - у зменшенні напруження. Циклічно стабільний стан при жорсткому навантаженні характеризується незмінністю амплітуди напружень.

На характер циклічного поведіння матеріалів істотний вплив роблять наступні фактори: рівень вихідної деформації, стан матеріалу (термообробка, наклеп і т.д.), число циклів, швидкість деформування (швидкість навантаження), вид навантаження (м'яке, жорстке). Сталь 45, наприклад, при малих значеннях вихідної деформації знеміцнюється, а при високих - зміцнюється. Сталь 30ХГСА в відпаленому стані зміцнюється, а в загартованому або наклепаному знеміцнюється.

Літературні дані про вплив швидкості суперечливі. За даними це вплив незначний, а результати експериментів вказують на помітну немонотонну зміну циклічної поведінки зі зміною швидкості деформування.

Як випливає з робіт, вплив швидкості деформування на вихідну діаграму істотний в області великих напружень і швидкостей деформування. У разі

відсутності початкової анізотропії механічних властивостей або її усунення відпалом, криві розтягування практично збігаються з кривими стиску.

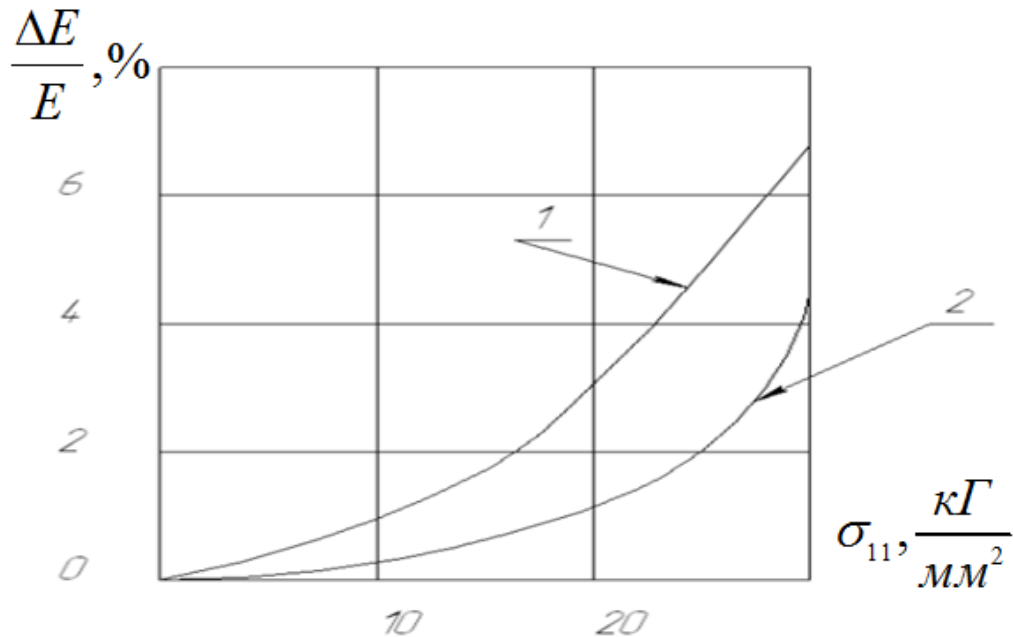


Рис. 2.2.6 Амплітудні залежності дефекта модуля Юнга сталі на частоті 10 кгц (1) та 20 кгц (2)

У роботі при поздовжніх коливаннях досліджувався вплив амплітуди великих напружень і високих частот коливань на дефект модуля. Результати представлені на рис.2.2.6 у вигляді кривих з яких випливає, наприклад, що при амплітуді напруження, що дорівнює:  $20 \text{ кг/мм}^2$ , внаслідок збільшення частоти циклів з 10 кгц до 20кгц дефект модуля зменшується в півтора рази. У стільки ж разів зменшується і викликає зміну ефективного модуля пластична деформація. В іншій роботі наводяться дані про вплив частоти коливань на розсіювання енергії. З цих даних випливає, що збільшення частоти циклів з 10 до 20 кгц, наприклад, у сталі 45 при амплітуді напружень в  $20 \text{ кг/мм}^2$  призводить до зменшення коефіцієнтів поглинання в півтора рази.

Аналіз експериментальних даних дозволив авторам роботи зробити висновок про можливість роздільного обліку впливу на ширину петлі гістерезису зазначених вище факторів. Цей висновок справедливий, очевидно, в першому наближенні.

Поряд з експериментальним вивченням пружно-пластичного гістерезису були зроблені спроби теоретичного опису кривих деформування з допомогою статистичних методів на основі апіорних припущень про структуру матеріалу. Всі згадані теорії досить добре розкривають процес утворення петлі гістерезису і навіть кінетику її зміни з числом циклів. Однак вони все ж не можуть передбачити без значного ускладнення структурних моделей всі експериментальні ефекти, пов'язані зі зміною умов деформування.

Наведений короткий огляд дозволяє стверджувати, що всі висновки попереднього пункту, зроблені для «пружного» гістерезису, ще більшою мірою справедливі для пружно-пластичного гістерезису.

### **2.3. Малі пружно-пластичні деформації при складному напруженому стані**

Результати експериментів, отримані при будь-якому простому однорідному напруженому стані (розтяг-стиск, чистий зсув) в умовах одноразового або циклічного пружно-пластичного деформування, використовуються для розрахунків при неоднорідних складних напружених станах на підставі теорій пластичності. Найбільшого поширення отримала теорія малих пружно-пластичних деформацій внаслідок своєї простоти.

Закони деформаційної теорії пластичності для одноразового активного деформування тіла формулюються наступним чином:

1. Гідростатичне деформування підпорядковується закону Гука.
2. Девіатор напружень пропорційний девіатору деформацій.
3. Між інтенсивністю напруження і інтенсивністю деформацій існує єдина для всіх напружених станів залежність.

Формулюючи таким чином перший закон пластичності, нехтують невеликими відхиленнями від закону Гука, складовими для сталі на межі плинності близько 1%. З цієї причини й інші закони є наближеними. У разі розвинених пластичних деформацій, нехтуючи малими в порівнянні з ними

пружними деформаціями, перший закон пластичності замінюють умовою нестисливості.

У деформаційній теорії пластичності приймається, що розвантаження відбувається пружно без зміни модуля пружності (модуль навантаження дорівнює модулю розвантаження). Для обчислення остаточних напружень необхідно з отриманих напружень відняти фіктивні напруження, знайдені за допомогою теорії пружності.

Теорія малих пружно-пластичних деформацій справедлива при простому навантаженні. Простим навантаженням називається такий процес зміни напружено-деформованого стану в часі, коли компоненти тензора напружень в будь-якій точці тіла змінюються по одному параметру, залежному від часу і не залежному від координат точки, а компоненти тензора деформації і вектора переміщень пропорційні іншому за величиною параметру часу, пов'язаному з першим будь-яким загальним для всіх точок тіла співвідношенням.

Ільюшин А. А. ввів поняття простого навантаження і знайшов достатні умови простого навантаження: нестисливості матеріалу (відсутність області пружних деформацій), зростання всіх навантажень по одному параметру, одночленна ступенева залежність між інтенсивністю напружень і деформацій, відсутність інерційних членів у рівняннях рівноваги.

Сєдов Л.І. показав, що поняття простого навантаження застосовне для геометрично малих деформацій, а для кінцевих деформацій просте навантаження, як правило, нездійсненне. У разі многочленної залежності, як показав Івлєв Д. Д., просте навантаження також нездійсненно, бо при пропорційній зміні компонентів девіатора деформацій компоненти девіатора напружень будуть змінюватися по складному закону. Таким же чином можна показати, що і навпаки, при пропорційній зміні компонентів девіатора напружень, компоненти девіатора деформацій будуть змінюватися по складному закону.

Однак, якщо в многочленній залежності виділяється один за величиною член, то прямого шляху деформування в просторі деформацій відповідає в

просторі напружень шлях навантаження, що мало відхиляється від прямого шляху, що визначається головним членом. Навпаки, прямому шляху навантаження відповідає мало відхилений від прямого шлях деформування. А в цьому випадку деформаційна теорія дає результати, близькі до результатів інших теорії пластичності.

Москвитін В. В. теорію малих пружно-пластичних деформацій поширив на випадок квазістатичної циклічного деформування, довівши відповідні теореми і записавши закони деформаційної теорії для цього випадку в координатах, пов'язаних з початком розвантаження в кожному напівциклі деформування.

Всі інші рівняння ( рівняння спільності деформацій, рівняння рівноваги у напруженнях, граничні умови. Залежності між деформаціями та переміщеннями) мають такий же вигляд, як і в класичній теорії пружності.

Рівняння рівноваги в переміщеннях отримують «фізичну» нелінійність внаслідок використання нелінійного закону стану (нелінійної залежності між напруженнями і деформаціями).

Повна система рівнянь механіки суцільного середовища з застосуванням деформаційної теорії пластичності може бути вирішена тільки методом послідовних наближень. У розрахунковій практиці набули поширення два таких методи: метод пружних рішень і метод змінних параметрів пружності.

У більшості інженерних завдань важко вирішити повну систему рівнянь. У цих випадках рівняння спільності деформацій задовольняються наближено, будучи замінені кінематичними гіпотезами (гіпотеза плоских перерізів, гіпотеза прямих радіусів, гіпотеза прямих нормалей та ін.) Введення кінематичних гіпотез дозволяє перейти від співвідношень напруження-деформації до залежностей внутрішніх зусиль від переміщень. При такому підході враховуються зазвичай тільки напруження, передбачені лінійною теорією пружності, а рішення пружно-пластичної задачі лише уточнює їх величину.

Багато задач циклічного пружно-пластичного деформування вирішені по деформаційної теорії пластичності.

#### **2.4. Лінійна теорія пружності для фізично нелінійних середовищ**

Загальна нелінійна теорія пружності використовує нелінійні залежності між деформаціями та переміщеннями. У лінійній теорії пружності, заснованій на геометричній лінеаризації, стан середовища задається лінійним співвідношенням між тензором напружень і лінійним тензором деформації. При цьому можливі два випадки: коефіцієнт пропорційності між цими тензорами постійна величина чи залежить від деформації (напруження). У першому випадку залежність між компонентами тензора напружень і деформацій буде лінійною (закон Гука). Цей випадок відповідає повній лінеаризації (геометричній і фізичній). У другому випадку залежність між компонентами тензорів нелінійна, проведена тільки геометрична лінеаризація. Новожилов В. В. переконливо показав, що процеси фізичної і геометричної лінеаризації мають різні основи і не залежать один від одного. Тому в рамках геометрично лінійної теорії суцільного середовища можна вирішувати як фізично лінійні, так і фізично нелінійні задачі.

Геометрично лінійне і фізично нелінійне середовище називається ізотропним середовищем Генкі. За міру малих деформацій у цьому середовищі можна прийняти технічну міру, бо при малих деформаціях практично всі заходи деформації збігаються (рис.2.4.1).

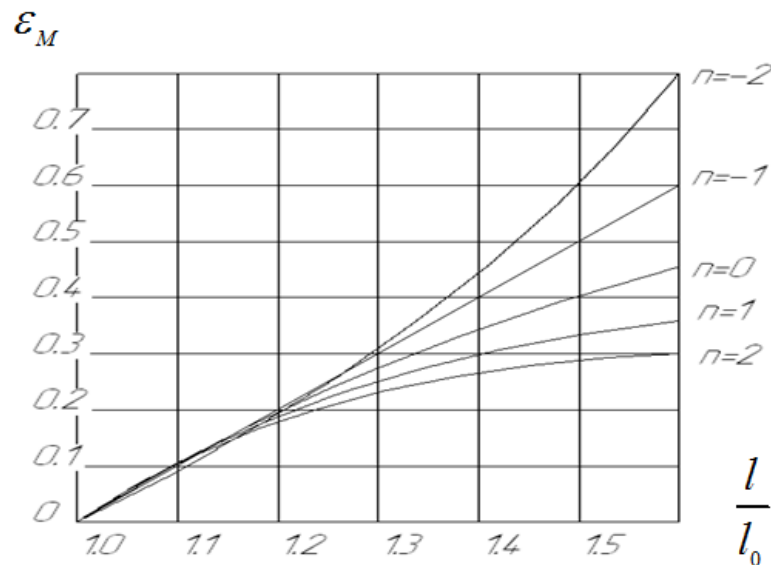


Рис. 2.4.1 Зміна міри деформації в залежності від коефіцієнту  $n$

Криві залежностей деформації від співвідношення  $\frac{l}{l_0}$  побудовані на рис.2.4.1 відповідно до формули узагальненої деформації:

$$\varepsilon_M = \frac{1}{n} \left[ 1 - \left( \frac{l}{l_0} \right)^n \right], \quad (2.4.1)$$

де  $l$ - поточна довжина стрижня,  $l_0$  - початкова довжина,  $n$ - константа. При  $n=2$  за цією формулою отримуємо міру Аманзі для деформації, при  $n=1$  міру Свейгера, при  $n=0$  - Генки (природна, логарифмічна), при  $n=-1$  - Коші (технічна деформація) при  $n=-2$  - Гріна. Каудерер сформулював для нелінійно пружного тіла такі закони стану:

1. Гідростатичне деформування підпорядковується нелінійному закону.
2. Деформація формозміни відбувається по нелінійному закону.
3. Між інтенсивностями дотичних напружень і деформацій зсуву існує єдина для всіх напружених станів залежність.

Тут, як і в теорії пластичності, передбачається, що немає взаємного впливу шарової і девіаторной частин напружено-деформованого стану один на одного.

Фізично нелінійна теорія пружності та деформаційна теорія пластичності в разі активної деформації ідентичні один одному. Проте є певна різниця. Так, в



нелінійній теорії пружності передбачається наявність другої єдиної кривої - нелінійної залежності між середнім напруженням і середньою деформацією, тоді, як в теорії пластичності замість кривої береться пряма (закон Гука) або умова нестисливості.

При циклічному деформуванні нелінійно пружних тіл за межею пружності петля гістерезису девіаторної частини напружено-деформованого стану буде мало відрізнятися від петлі пружно-пластичного гістерезису. Проте поточні відхилення від закону Гука в нелінійно "пружному" тілі не рівні залишковим.

В гідростатичній частині напружено-деформованого стану нелінійно пружного тіла за межею пружності поряд з поточними відхиленнями будуть і залишкові, оскільки має місце петля гістерезису. У теорії ж пластичності поточними відхиленнями від лінійної залежності між гідростатичним напруженням і деформацією нехтують, а ототожені з пластичною деформацією залишкові відхилення вважаються відсутніми [10].

Останнє робиться для згоди з уявленням про те, що пластична деформація йде шляхом зрушень в кристалах і не залежить від середнього напруження, оскільки гідростатичний розтяг і стиск не викликає руху дислокації.

## **2.5 Врахування внутрішнього тертя при коливаннях**

Недосконала пружність матеріалу конструкцій при коливаннях виявляється в синфазному (дефект модуля пружності) і несинфазному (внутрішнє тертя) відносно переміщення відхиленнях від закону Гука (рис. 2.5.1).

Синфазні відхилення формують скелетну лінію, а несинфазні утворюють навколо неї петлю гістерезису. Обмежимося лінійним наближенням. Іноді в лінійному випадку нехтують синфазними відхиленнями, а несинфазні (гістерезисні) вважають пропорційними швидкості або переміщенню. В

першому випадку відповідне внутрішнє тертя називають в'язким, а в другому – нев'язким (іноді гістерезисним). Проте обидва види внутрішнього тертя спричиняють гістерезис (відставання переміщення від сили) і спричиняють утворення петлі гістерезису навколо скелетної лінії.

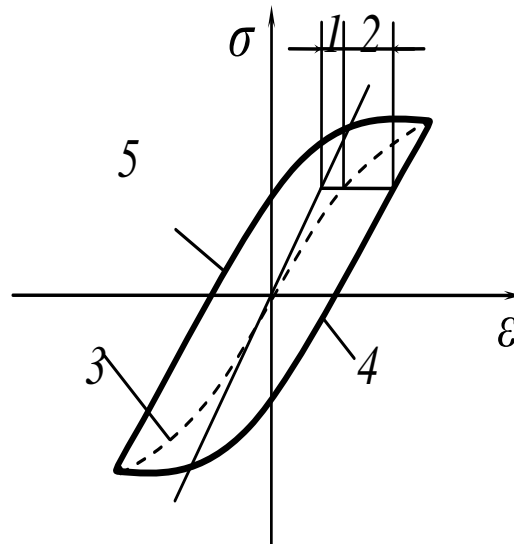


Рис. 2.5.1 Петля гістерезису

де 1 – синфазне відхилення;

2 – несинфазне (гістерезисне) відхилення від закону Гука;

3 – скелетна лінія;

4 – спадна гілка петлі;

5 – зростаюча гілка петлі.

При в'язкому терті площа петлі гістерезису і логарифмічний декремент коливань залежать від частоти, а при гістерезисному – не залежать. Тому перший вид тертя є частотно-залежним, а другий – частотно-незалежним. Назву «гістерезисне тертя» можна вживати до обох видів тертя. Невдалим для позначення частотно-незалежного тертя є термін «амплітудно-залежне тертя», тому що в нелінійному випадку залежить від амплітуди і в'язке тертя, а в лінійному випадку логарифмічний декремент коливань для обох видів тертя не залежить від амплітуди коливань.

В'язке тертя характерне для полімерів, гістерезисне – для металів.

Опір середовища є зовнішнім тертям. Це тертя може залежати від швидкості, переміщення або від їх знаку, але не залежить від матеріалу коливальної системи. Тому зовнішнє тертя має враховуватися окремо від внутрішнього.

Для врахування частотно-залежного (в'язкого) і частотно-незалежного тертя використовують відповідну гіпотезу Кельвіна-Фойхта і гіпотезу Бока-Шліппе-Колара.

Рівняння коливань системи з одним степенем вільності за цими гіпотезами матимуть вигляд:

$$a\ddot{q} + c\left(1 + \frac{b_1 d}{dt}\right)q = 0$$

$$a\ddot{q} + c\left(1 + \frac{\alpha_1 \omega_0^{-1} d}{dt}\right)q = 0$$

де  $b_1$  - гістерезисний коефіцієнт несинфазного відхилення від закону Гука при в'язкому терті;  $\alpha_1$  - такий самий коефіцієнт при частотно-незалежному терті; коефіцієнти синфазних відхилень вважаються рівними нулю.

Вплив тертя на вимушені коливання залежить від розладу частот – різниці між квадратами власної і змушувальної. За відсутності розладу частот (резонанс) тільки тертя обмежує вимушені коливання. За наявності розладу частот дія його є переважаючою, а тертя має неістотний вплив. Тому немає ніякого значення те, що модель тертя Бока-Шліппе-Колара не є частотно-незалежною в нерезонансних областях [1].

## 2.6. Загальні висновки з огляду і постановка задачі

Численні експериментальні і теоретичні роботи свідчать, що всі реальні тіла і складові системи при циклічних навантаженнях виявляють гістерезисну поведінку, що полягає в тому, що збурення (переміщення, деформація) відстає

по фазі (часу) від навантаження (напруження), що збурює. Внаслідок цього процес деформування незворотній, лінія навантаження криволінійна і не збігається з лінією розвантаження. Сукупність цих кривих утворює петлю гістерезису.

Незважаючи на різну природу гістерезисної поведінки суцільного середовища або складових систем в різних завданнях (циклічна пластичність, внутрішнє тертя і т.д.) при феноменологічному підході, коли за основу приймається експериментальна петля гістерезису, ці завдання мають багато спільного.

Зазначені розділи механіки суцільного середовища подібні не тільки видом диференціальних рівнянь, але і за методами їх рішень (Варіаційні методи, методи збурень тощо).

Експериментальні петлі гістерезису апроксимують алгебраїчними поліномами, як найбільш зручними у доданках і в той же час забезпечують необхідну точність апроксимації експерименту. При цьому поліном гістерезисних (необоротних) відхилень повинен мати запізнювання на чверть періоду.

Для розв'язання статичних та динамічних задач з урахуванням нелінійно-гістерезисного опору середовища застосовують методи малого параметра, так як вони добре розроблені і обґрунтовані. Варіаційні методи дають ту ж точність, проте менш пристосовані для вивчення загального вигляду нестационарних процесів [5].

У разі несталої поведінки матеріалу досліджуються диференціальні рівняння динамічних задач за допомогою узагальненого асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського, застосовуючи згадану вище гіпотезу стаціонарності.

## РОЗДІЛ 3. КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 3.1 Вільні коливання з урахуванням тертя систем з одним ступенем вільності

Згідно з лінійною і кусково-лінійною теоріями розрізняють три види узагальнених сил тертя: частотно-залежне (в'язке) -  $b\dot{q}$ , частотно-незалежне -  $\alpha I\dot{q}$  і сухе -  $\beta \operatorname{sgn} \dot{q}$ . Ці види тертя залежать відповідно від узагальненої швидкості, гістерезисного переміщення і знака узагальненої швидкості. Сухе тертя визначається перервною кусково-лінійною функцією. Тому при дослідженні коливань виявляються деякі ознаки нелінійності: зміна логарифмічного декременту коливань з номером півцикла, залежність його від амплітуди коливань, поява обертонів основної частоти тощо.

Узагальнені коефіцієнти тертя обчислюють за експериментальними значеннями логарифмічного декременту, знайденими при коливаннях головної узагальненої координати системи.

Натуральний логарифм відношення двох послідовних, максимальних або мінімальних значень коливної величини при її вільних коливаннях називається логарифмічним декрементом коливань.

Кожний згаданий вид тертя може мати внутрішню (недосконала пружність) або зовнішню (опір середовища) причину. Тому можна вважати, що коефіцієнти узагальнених сил тертя пропорційні коефіцієнту жорсткості або коефіцієнту інерції

$$\begin{aligned} b &= b_1 c \text{ або } b = b_2 a; \\ \alpha &= \alpha_1 c \text{ або } \alpha = \alpha_2 a; \\ \beta &= \beta_1 c \text{ або } \beta = \beta_2 a . \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Величини  $b_1, \alpha_1, \beta_1, b_2, \alpha_2, \beta_2$  - розмірні коефіцієнти несинфазних (гістерезисних, циклічних) відхилень від закону Гука або інших лінійних залежностей [2].

### 3.2 Вплив в'язкого тертя на вільні коливання систем з одним ступенем вільності

Якщо кінетична енергія  $T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$ , потенціальна енергія  $\Pi = \frac{1}{2} c q^2$ , а дисипативна функція  $\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$ , то рівняння Лагранжа другого роду набере вигляду

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \quad (3.2.1)$$

Це рівняння вільних коливань з урахуванням в'язкого (внутрішнього або зовнішнього) тертя можна знайти також іншими методами. Наприклад, підставити в другий закон Ньютона відновлюючу силу -  $cq$  та силу в'язкого тертя -  $b\dot{q}$ , то знову прийдемо до (3.4.2.1)

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q}$$

Розділивши всі члени рівності (2.4.2.1) на  $a$ , матимемо рівняння

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.2.2)$$

з двома сталими параметрами  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}, h = \frac{b}{2a}$ .

Параметр  $\omega_0$  - це власна кутова частота системи. Фізичний зміст і роль параметра  $h$ , що має розмірність першого, встановимо після знаходження розв'язку рівняння (3.2.2). Частинні розв'язки знайдемо за методом Ейлера у вигляді  $q = Be^{2t}$ .

Дістанемо характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0$ . Його корені  $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$  залежать від величини в'язкого тертя.

Перший випадок:  $h^2 < \omega_0^2$  (мале в'язке тертя). Оскільки

$$\sqrt{h^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - h^2} = i\omega, \quad \text{то}$$

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\omega. \quad (3.2.3)$$

Використовуючи принцип суперпозиції, запишемо

$$q = e^{-ht} (B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}).$$

Припустимо, що  $B_1 = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}; B_2 = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$ . Тоді дістанемо

$$q = A e^{-ht} \frac{e^{i(\omega t - \varphi)} + e^{-i(\omega t - \varphi)}}{2} = A e^{-ht} \cos(\omega t - \varphi) = e^{-ht} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

$$\text{Звідки} \quad C_1 = A \cos \varphi, C_2 = A \sin \varphi, A^2 = C_1^2 + C_2^2, \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}. \quad (3.2.4)$$

Другий випадок:  $h^2 > \omega_0^2$  (велике в'язке тертя). Корені характеристичного рівняння будуть дійсними, від'ємними, різними за величиною:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm k \quad (3.2.5)$$

Загальний розв'язок  $q = e^{-ht} (B_1 e^{kt} + B_2 e^{-kt})$ .

Припустимо, що  $B_1 = \frac{A}{2} e^{-\varphi}; B_2 = \frac{A}{2} e^{\varphi}$ . Тоді дістанемо загальний розв'язок

$$q = A e^{-ht} (kt - \varphi) = e^{-ht} (C_1 chkt + C_2 shkt). \quad (3.2.6)$$

Звідки

$$C_1 = A ch \varphi, C_2 = A sh \varphi, A^2 = C_1^2 - C_2^2, \operatorname{tg} \varphi = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (3.2.7)$$

Рух (3.4, 3.6) – затухаючий неколивальний. Коливна точка наближається до положення рівноваги, перетинаючи його не більше одного разу.

Третій випадок:  $h^2 = \omega_0^2$  (критичний). Значення коефіцієнта демпфірування, при якому рух втрачає коливальний характер, називається критичним коефіцієнтом демпфірування. Коефіцієнт в'язкого тертя  $b$  і коефіцієнти несинфазних відхилень  $b_1$  і  $b_2$  також називаються критичними. При цьому

$b_{1кр} = 2\omega_0^{-1}$  - для внутрішнього в'язкого тертя,  $b_{2кр} = 2\omega_0$  - для зовнішнього в'язкого тертя.

Корені характеристичного рівняння будуть дійсними, від'ємними, кратними  $\lambda_{1,2} = -h$ . Загальний розв'язок

$$q = e^{-ht} (C_1 t + C_2) \quad (3.2.8)$$

### Висновки:

1. В'язка дисипативна сила зменшує амплітуду вільних коливань за експоненціальним законом.
2. Вплив її на період і частоту коливань незначний.
3. Логарифмічний декремент коливань залежить від частоти коливань, але по-різному при зовнішньому та внутрішньому в'язкому терті.

### 3.3 Вплив частотно-незалежного тертя на вільні коливання систем з одним ступенем вільності

Підставляючи  $T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$ ,  $\Pi = \frac{1}{2} c q^2$ ,  $H = \alpha I \dot{q}^2$  у рівняння Лагранжа другого роду, дістанемо рівняння вільних коливань лінійної системи з одним ступенем вільності з урахуванням частотно-незалежного тертя:

$$a\ddot{q} + \alpha I \dot{q} + c q = 0 \quad (3.3.1)$$

або

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.3.2)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, h = \frac{\alpha \omega_0^{-1}}{2a}.$$

Для рівняння (3.3.2) розрізняють 3 випадки, як описувалося вище. Проте тут, при врахуванні частотно-незалежного внутрішнього або зовнішнього тертя, коефіцієнт демпфірування  $h$  і логарифмічний декремент коливань  $\Lambda$  інакше залежать від частоти. При внутрішньому частотно-незалежному терті, коли



$\alpha = \alpha_1 c$ , коефіцієнт демпфірування і логарифмічний декремент коливань відповідно дорівнюють:

$$h = \frac{\alpha_1 c}{2a\omega_0} = \frac{\alpha_1 \omega_0}{2}; \Lambda \approx hT = \frac{\alpha_1 \omega_0}{2} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\alpha_1 \quad (3.3.3)$$

або

$$h = \frac{\alpha_2 c}{2a\omega_0} = \frac{\alpha_2}{2\omega_0}; \Lambda \approx hT = \frac{\alpha_2}{2\omega_0} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\alpha_2 \omega_0^{-2} \quad (3.3.4)$$

Ці формули правильні при малому значенні коефіцієнта демпфірування.

Наближені значення критичного тертя визначаються рівностями для коефіцієнтів відхилень

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 2\omega_0^2 = 2\frac{c}{a},$$

що відповідають внутрішньому і зовнішньому частотно-незалежному тертю.

### 3.4 Методи врахування тертя

З другої формули рівняння (2.3.4) випливає, що логарифмічний декремент коливань при урахуванні недосконалої пружності пружини (внутрішнє тертя) за гіпотезою Бока-Шліппе-Колара не залежить від частоти коливань. Це підтверджують і експерименти. Враховуючи недосконалу пружність за гіпотезою Кельвіна-Фойхта, приходимо до залежності  $\Lambda = b_1 \pi \omega_0$  логарифмічного декременту коливань від їх частоти, що суперечить експериментам. Для врахування недосконалої пружності іноді застосовують уявну одиницю  $i$  (гіпотеза комплексного тертя, метод комплексних модулів пружності). У цьому разі рівняння (3.4.1) матиме вигляд:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 (1 + \alpha_1 i) q = 0$$

Йому відповідають алгебраїчне рівняння відносно характеристичних чисел і точні значення його коренів (характеристичних чисел)

$$\lambda^2 + \omega_0^2 (1 + \alpha_1 i) = 0; \lambda_1 = -h + i\omega; \lambda_2 = h - i\omega \quad (3.4.1)$$

Корені характеристичного рівняння комплексні, але не спряжені. Перший корінь відповідає стійкому розв'язку, другий – нестійкому і його відкидають як не відповідний затухаючим коливанням. Проте таке відкидання є порушенням принципу суперпозиції розв'язків лінійного рівняння і свідчить про недоцільність застосування гіпотез на зразок комплексного тертя для опису частотно-незалежного тертя (зовнішнього також) у разі неусталених коливань. Щодо усталених періодичних коливань обидва згаданих підходи приводять до однакових результатів.

Наведений факт пояснюється різною дією операторів зсуву  $\frac{d}{d\psi} = \frac{d}{\omega_0 dt}$  та  $i$  на узагальнену координату (переміщення). Перший оператор створює зсув у часі не тільки в циклічній частині переміщення, а й у нециклічній. Другий зсуває у часі тільки циклічну частину. В разі усталених коливань нециклічна частина переміщення відсутня, внаслідок чого дія операторів збігається. Оператор Кельвіна-Фойхта приводить, на відміну від оператора Бока-Шліппе-Колара, не тільки до зсуву, а й до множення на частоту. Таким чином, гіпотези Кельвіна-Фойхта і Бока-Шліппе-Колара математично коректні, але тільки друга з них визначає недосконалу пружність металевих матеріалів. У випадку стаціонарних коливань недосконала пружність може бути врахована і за допомогою будь-якої гістерезисної гіпотези, в тому числі і за допомогою гіпотез комплексного тертя.

Унаслідок недосконалої пружності пружини (внутрішнє тертя) характеристика відновлювальної сили стає неоднозначною (петельною). Характеристика  $R = c(q + b_1 \dot{q})$  симетрична відносно початку координат  $o$  в припущенні, що внутрішнє тертя в'язке при гармонічних коливаннях  $q = A \cos \psi$  (рис. 3.4.1, а). Скелетна лінія є прямою, а площа петлі і у випадку частотно-незалежного внутрішнього тертя, проте її площа вже не залежить від частоти  $\omega_0$ .

При зовнішньому в'язкому або частотно-незалежному терті характеристика відновлювальної сили є прямою лінією (рис. 3.4.1, б), адже зовнішнє тертя не пов'язане із жорсткістю системи [1].

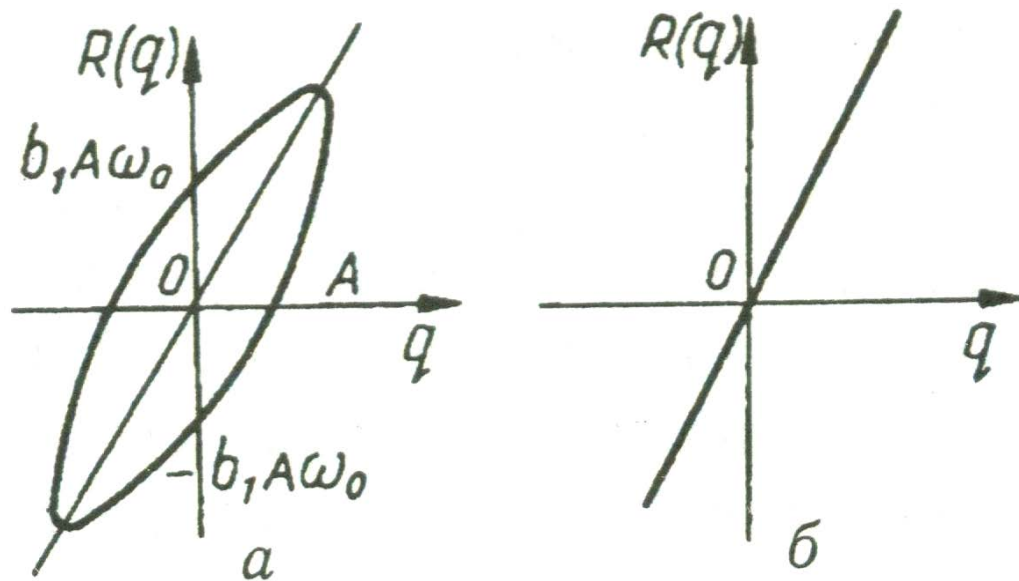


Рис. 3.4.1 Характеристика відновлювальної сили: а – при внутрішньому терті, б – при зовнішньому терті

### 3.5. Нелінійне в'язке тертя

З урахуванням нелінійного в'язкого тертя  $-\gamma|\dot{q}|^{n-1}\dot{q}$  рівняння вільних коливань запишеться у вигляді

$$a\ddot{q} + \gamma|\dot{q}|^{n-1}\dot{q} + cq = 0 \quad (3.5.1)$$

Точний розв'язок цього рівняння в елементарних функціях представити неможливо. Для наближеного розв'язку передусім знайдемо коефіцієнт еквівалентного лінійного в'язкого тертя  $b$  з рівності робіт еквівалентного і нелінійного тертя

$$\int_0^{2\pi} b\dot{q}(-dq) = \int_0^{2\pi} \gamma|\dot{q}|^{n-1}\dot{q}(-dq)$$

за цикл коливань, що відбуваються за законом  $q = A\cos\psi$ .

$$b = \frac{4\gamma}{\pi A \omega}; b = \gamma; b = \frac{8}{3} \frac{\gamma \omega_0 A}{\pi} \quad (3.5.2)$$

Знаходимо розв'язок:

$$\Lambda = \frac{b}{2a} \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{4\gamma}{Ac}; \Lambda = const; \Lambda = \frac{8}{3} \frac{\gamma \omega_0^2 A}{c} \quad (3.5.3)$$

У дійсності логарифмічний декремент коливань системи із сухим тертям залежить не тільки від амплітуди, що впливає з першої формули (3.5.3), а й від номера напівциклу.

### 3.5.1 Вимушені коливання з врахуванням тертя

Тертя може бути частотно-залежним (в'язким), частотно-незалежним або сухим. Кожне з них є внутрішнім чи зовнішнім.

**Гармонічне збудження у системі з урахуванням тертя.** Рівняння вимушених коливань з урахуванням тертя має вигляд

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = P \cos \omega t \quad (3.5.4)$$

Частинний розв'язок шукаємо, використовуючи вигляд його правої частини

$$q = A \cos \psi t$$

Загальний розв'язок має вигляд (при малому терті ( $h^2 < \omega_0^2$  )):

$$q = e^{-ht} \left( C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \right) + A \cos(\omega t - \varphi)$$

АЧХ з урахуванням в'язкого тертя.

Вигляд кривих залежить від величини тертя  $\frac{h}{\omega_0}$  в коливальній системі.

Можливо 4 випадки при суто вимушених коливаннях: немає тертя, є тертя, є критичне тертя, є велике тертя.

У першому випадку згадані криві мають розрив ( $\frac{h}{\omega_0} = 0$  ); у другому –

( $\frac{h}{\omega_0} < 0.7$  ) обидві криві неперервні, а АЧХ мають максимум в інтервалі

$0 \leq \frac{\omega}{\omega_0} < 1$  (до точного резонансу). Прирівнюючи до нуля похідну за  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  від підкореневого виразу в  $A = q_{cm} \aleph$ , знаходимо абсцису та ординату цього максимуму

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2 \frac{h^2}{\omega_0^2}}; \aleph_{\max} = \frac{\omega_0^2}{2h\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}$$

Звідки випливає, що максимум розміщується в областях

$$0 < \frac{h^2}{\omega_0^2} \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1$$

Геометричне місце максимумів АЧХ є монотонно зростаючою функцією у тому разі, коли амплітуда змушувальної сили не залежить від частоти збудження.

Третій випадок ( $\frac{h}{\omega_0} = 0.7$ ) є критичним, тому що  $\aleph_{\max} = 1$  і немає резонансу – відсутнє збільшення амплітуди коливань понад статичне переміщення. Крива АЧХ стає монотонно спадною і при  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  буде  $\aleph = 0,7$ .

У четвертому випадку (велике тертя  $\frac{h}{\omega_0} > 0.7$ ) криві АЧХ також монотонно спадають. Вони також починаються у точці  $\frac{h}{\omega_0} = 0$ ;  $\aleph = 1$ , яка вже не буде для них екстремумом, а при  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  буде  $\aleph \ll 1$ .

При дуже малому терті максимальне значення коефіцієнта динамічності не на багато більший, ніж його значення при точному резонансі. Останнє простіше обчислюється і тому в розрахунках береться як максимальне.

### 3.5.2 Гармонічне збудження коливань у коливальній системі з частотно-незалежним тертям

Диференціальне рівняння вимушених коливань має вигляд

$$a\ddot{q} + \alpha I\dot{q} + cq = P\cos\omega t$$

або

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{P}{a}\cos\omega t \quad (3.5.5)$$

де

$$I = \omega_0^{-1}, h = \frac{\alpha}{2a\omega_0}$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.5.3.1) шукаємо за виглядом правої частини

$$q = A\cos\psi$$

В результаті матимемо

$$A = \frac{P}{a\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}; \operatorname{tg}\varphi = \frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.5.6)$$

### 3.6 Вплив тертя на параметричні коливання

Рівняння параметричних коливань з урахуванням зовнішнього тертя має вигляд

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 - 2\mu\cos\omega t\right) \varphi - \gamma\varphi^3 = 0 \quad (3.6.1)$$

При підстановці частинного розв'язку матимемо:

$$-h\omega A - \mu\omega_0^2 \sin 2\Theta = 0; \left[ \omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\gamma A^2 \right] - \mu\omega_0^2 \cos 2\Theta = 0 \quad (3.6.2)$$

Визначимо амплітуду і фазу субгармонічних парметричних коливань.

$$A^2 = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\gamma} \left[ -\left( \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \right) + 1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{h^2 \omega^2}{\omega_0^4}} \right]; \quad (3.6.3)$$

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{h\omega}{\omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2} \quad (3.6.4)$$

При  $\gamma = 0$  буде  $A^2 \rightarrow \infty$ , тобто лінійне тертя в лінійній системі не обмежує амплітуду параметричних коливань. Останні 2 рівняння дають змогу побудувати АЧХ і ФЧХ (рис. 3.6.1). Ширина АЧХ вздовж ліній, паралельних до осі абсцис, менші ніж  $2\mu$  (менші, ніж в системі без тертя), і змінюються зі зміною  $A^2$ .

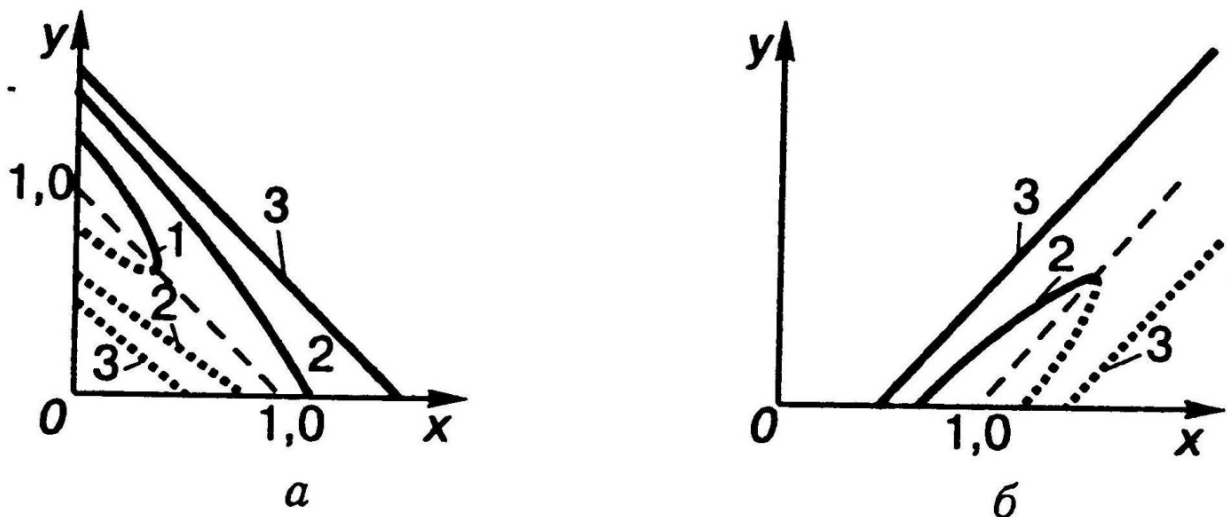


Рис. 3.6.1 АЧХ нелінійної параметричної системи при субгармонічному збудженні з тертям: а – з м'якою, б – з жорсткою характеристиками відновлювальних сил

Розглянувши задачі про параметричні коливання, можна зробити висновки.

1. Лінійна задача дає змогу визначити області нестійкості, але не дає визначити амплітуду усталених параметричних коливань.
2. Лінійне тертя не обмежує амплітуду параметричних коливань лінійної системи, а лише звужує область нестійкості та підвищує поріг параметричного збудження.

3. Нелінійність відновлювальної сили обмежує амплітуду параметричних коливань і спричиняє нахил скелетної лінії та АЧХ ліворуч при «м'якій» її характеристиці або праворуч при «жорсткій».

4. Нелінійне тертя разом з нелінійністю відновлювальної сили визначає естремальну (максимально можливу) амплітуду коливань (замикає ліву і праву гілки АЧХ) при  $\mu^2 = \frac{h^2 \omega^2}{\omega_0^4}$ . За останньої рівності

можна визначити значення абсциси максимально можливої амплітуди, а з формули  $A^2 = \frac{4\omega_0^2}{3\gamma} \left[ -\left( \frac{\omega}{2\omega_0} \right)^2 + 1 \mp \sqrt{\omega_0^4 \mu^2 - h^2 \omega^2} \right]$  - значення квадрата цієї амплітуди.

### 3.7 Вимушені коливання нелінійної системи з урахуванням в'язкого тертя

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q - \gamma q^3 = P \cos \omega t. \quad (3.7.1)$$

Частинний розв'язок  $q = A \cos \psi$

Застосовуючи метод гармонічного балансу, отримаємо:

$$2h\omega A = P \sin \Theta; \left[ \omega_0^2 - \omega^2 \right] A - \frac{3}{4} \gamma A^3 = P \cos \Theta \quad (3.7.2)$$

Останні співвідношення є наближеними, тому що вища гармоніка тут не зрівноважена. Перепишемо:

$$\left[ \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2 \right]^2 A^2 = P^2 - (2h\omega A)^2 \quad (3.7.3)$$

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2} \quad (3.7.4)$$

Прирівнюючи обидві частини першого рівняння до нуля, дістанемо:



$$\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{4}\gamma A^2 = 0; P^2 - (2h\omega A)^2 = 0 \quad (3.7.5)$$

Перше з них описує скелетну лінію (баланс реактивних енергій), друге – енергетичну лінію (баланс активних енергій при точному резонансі). Ординати перетину дорівнюють максимально можливим значенням амплітуди.

Чим менший коефіцієнт демпфірування, тим більше віддалені гілки гіперболи від початку координат. При малому значенні гіпербола не перетинає скелетну лінію. При цьому не буде максимально можливих значень амплітуди. Амплітудно-частотна характеристика не замкнена. При великому значенні коефіцієнта демпфірування криві перетинаються в двох точках. Можливі два види вимушених коливань – з великою або малою амплітудами коливань. У випадку жорсткої характеристики відновлювальної сили криві перетинаються завжди один раз.

## РОЗДІЛ 4. КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 4.1 Поздовжні коливання стрижня з урахуванням тертя

#### 4.1.1 В'язке внутрішнє тертя

Рівняння вільних поздовжніх коливань з врахуванням в'язкого внутрішнього тертя:

$$pF \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) - b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.1.1)$$

Розв'язок шукаємо за МГК у вигляді

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t), \quad (4.1.2)$$

де  $U_l(x)$  визначається з рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + pF \omega_l^2 U_l = 0.$$

і відповідних граничних умов.

Отримаємо характеристичне рівняння

$$\ddot{\eta}_l + b_1 \omega_l^2 \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l = 0, \quad b_1 \omega_l^2 = 2h_l. \quad (4.1.3)$$

Частинні розв'язки знаходимо за методом Ейлера

$$\eta_l = B_l e^{\lambda_l t} \quad (4.1.4)$$

Розглянемо випадок малого тертя ( $h_l < \omega_l$ ).

$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_l^2 - h_l^2}$  - демпфуюча частота.

$$\lambda_{1,2} = -h_l \pm \sqrt{h_l^2 - \omega_l^2}, \quad \eta_l = A_l e^{-h_l t} \cos(\tilde{\omega} t - \varphi_l) \quad (4.1.5)$$

#### 4.1.2 Зовнішнє в'язке тертя

Рівняння вільних коливань з урахування зовнішнього в'язкого тертя:

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) + b_2 \rho F \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (4.1.7)$$

По аналогії з попереднім розділом розв'язок матиме вигляд

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-h_l t} \cos(\tilde{\omega}_l t - \varphi_l) \sin \frac{2l-1}{2} \pi x \quad (4.1.8)$$

В цьому випадку коефіцієнт демпфірування,  $2h_l = b_2$  а логарифмічний декремент коливань  $\Lambda_l = h_l T_l \approx \frac{b_2 \pi}{\omega_l}$ .

#### 4.1.3 Внутрішнє частотно-незалежне тертя

Рівняння вільних коливань з урахуванням частотно-незалежного внутрішнього тертя:

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \alpha_1 i \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.1.9)$$

де  $E(1 + \alpha_1 i)$  - оператор Сорокіна.

Використовуючи МГК, отримаємо характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_l + \alpha_1 i \omega_l^2 \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l &= 0, \\ \lambda^2 + \alpha_1 i \omega_l + \omega_l^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$\text{Корені} \quad \lambda_{1l} = -h_l + i\tilde{\omega}_l; \lambda_{2l} = h_l - i\tilde{\omega}_l. \quad (4.1.11)$$

Перший корінь відповідає стійкому розв'язку, а другий – нестійкому і має бути відкинутим.

При дослідженні нестационарних коливань з урахуванням частотно-незалежного тертя замість оператора Сорокіна використовується оператор Бока-Шліппе-Колара

$$\alpha_1[\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}$$

Рівняння вільних поздовжніх коливань перепишеться

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \alpha_1[\omega]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.1.12)$$

Розв'язок має вигляд

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t)$$

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-h_l t} \cos(\omega_l t - \varphi_l) \sin \frac{2l-1}{2} \pi x \quad (4.1.13)$$

## 4.2. Вільні поперечно – крутильні коливання стрижня несиметричного перерізу

В попередніх параграфах була викладена методика побудови асимптотичних рішень трьохвимірного диференціального рівняння коливань нелінійно – гістерезисного тіла. Тут викладемо методику побудови асимптотичних рішень для системи диференціальних рівнянь коливань нелінійно – гістерезисних систем з розподіленими параметрами. Для цього візьмемо конкретну задачу про вільні коливання нелінійно – гістерезисного стрижня постійного перерізу, що має одну вісь симетрії. Центр тяжіння такого перерізу знаходиться на відстані  $x_c$  від центру жорсткості (центру кручення). Внаслідок неспівпадіння центрів тяжіння і жорсткості поперечні коливання стержня будуть обов'язково супроводжуватись крутильними коливаннями.

Зв'язок між поперечними і крутильними коливаннями в лінійно пружному твердому тілі здійснюється через сили інерції, а в лінійно – гістерезисному виникає і координатний зв'язок. Якщо при цьому гістерезис залежить від швидкості деформування, то буде і третій вид зв'язку між коливаннями – швидкісний зв'язок (через похідні по часу).

Очевидно, що при малих відхиленнях від закону Гука, переважаючу роль буде грати інерційний зв'язок, який врахуємо при виводі диференціальних рівнянь коливань.

При згинно – крутильних коливаннях інтенсивності сил інерції  $q$  та їх моментів  $m_z$  будуть дорівнювати:

$$q = -m\ddot{v} - mx_c\ddot{\varphi}, \quad (4.2.1)$$

$$m_z = -J_m\ddot{\varphi} - mx_c\ddot{v}, \quad (4.2.2)$$

де  $\varphi(z, t)$  - кутове переміщення перерізів стержня,

$v(z, t)$  - лінійне переміщення,

$m$  - маса одиниці довжини,

$J_m$  - момент інерції маси одиниці довжини стержня.

Нехтуючи координатним зв'язком лінійних і кутових переміщень при згинно – крутильних коливаннях, використаємо рівняння стану суто згинних і суто крутильних коливань:

$$\sigma_{11} = E \left[ 1 - \varepsilon (a_k + \alpha_k I^k) \varepsilon_{11}^{k-1} \right] \varepsilon_{11}, \quad (4.2.3)$$

$$\tau = G \left[ 1 - \varepsilon (\tilde{d}_k + \tilde{\delta}_k I^k) \gamma^{k-1} \right] \gamma. \quad (4.2.4)$$

З врахуванням відомих формул для відносного видовження  $\varepsilon_{11}$  при згині та кута зсуву  $\gamma$  при крученні

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y, \quad (4.2.5)$$

$$\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rho, \quad (4.2.6)$$

та рівнянь (4.2.3), (4.2.4), отримаємо вираз для згинаючого і крутного моментів в довільному перетині стрижня:

$$M = EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \varepsilon EJ_x^{(k)} (a_k + \alpha_k I^k) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^k, \quad (4.2.7)$$

$$M_{kp} = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varepsilon GJ_p^{(k)} (\tilde{d}_k + \tilde{\delta}_k I^k) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^k, \quad (4.2.8)$$

де  $y, \rho$  - відстані елементарних площинок  $dF$  відповідно до нейтральної осі перерізу та до центра кручення,  $\varepsilon$  - малий параметр.

Знайдені вирази для інтенсивності інерційних навантажень (4.2.1), (4.2.2) та вирази для моментів внутрішніх зусиль (4.2.7), (4.2.8) підставимо в відомі співвідношення

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = q(z, t),$$

$$-\frac{\partial M_{\kappa p}}{\partial z} = m_z,$$

прийдемо до системи диференціальних рівнянь вільних згинно – крутильних коливань нелінійно – гістерезисного стрижня несиметричного перерізу:

$$EJ_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + m\ddot{v} + mx_c \ddot{\varphi} = \varepsilon (a_k + \alpha_k I^k) EJ_x^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^k, \quad (4.2.9)$$

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + J_m \ddot{\varphi} + mx_c \ddot{v} = \varepsilon (\tilde{d}_k + \tilde{\delta}_k I^k) GJ_p^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^k. \quad (4.2.10)$$

При  $\varepsilon = 0$  з системи (4.2.9), (4.2.10) отримаємо рівняння вільних коливань лінійно пружного стержня, для яких відоме точне рішення. Підстановка форми часткового рішення

$$v(z, t) = V(z) a e^{i(\omega t + \nu)},$$

$$\varphi(z, t) = \Phi(z) b e^{i(\omega t + \nu)},$$

у вказану систему ( $\varepsilon = 0$ ) для власних функцій (форм згинно – крутильних коливань) дає наступні звичайні рівняння:

$$\frac{EJ_x}{l^4} \frac{d^4 V}{dz^4} - m\omega^2 a V - mx_c \omega^2 b \Phi = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{GJ_p}{l^2} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - J_m \omega^2 b \Phi + mx_c \omega^2 a V = 0. \quad (4.2.12)$$

Шукаючи часткові рішення систем (4.2.11), (4.2.12) у вигляді

$$aV = Be^{\lambda z},$$

$$b\Phi = Ce^{\lambda z},$$

отримаємо:

$$B \left( \frac{EJ_x}{l^4} \lambda^2 - m\omega^2 \right) - C m x_c \omega^2 = 0, \quad (4.2.13)$$

$$C \left( \frac{GJ_p}{l^2} \lambda^2 + J_m \omega^2 \right) + B m x_c \omega^2 = 0. \quad (4.2.14)$$

Враховуючи, що  $B \neq 0, C \neq 0$ , прийдемо до характеристичного рівняння 3-го порядку відносно  $\lambda^2$ , з якого знаходимо характеристичні числа виду:

$$\lambda_1 = k_1; \lambda_2 = -k_1; \lambda_3 = ik_2; \lambda_4 = -ik_2; \lambda_5 = ik_3; \lambda_6 = -ik_3.$$

Тоді інтеграл системи (4.2.11), (4.2.12) представиться так:

$$aV = B_1 shk_1 z + B_2 chk_1 z + B_3 \sin k_2 z + B_4 \cos k_2 z + B_5 \sin k_3 z + B_6 \cos k_3 z, \quad (4.2.15)$$

$$b\Phi = \alpha_1 B_1 shk_1 z + \alpha_1 B_2 chk_1 z + \alpha_2 B_3 \sin k_2 z + \alpha_2 B_4 \cos k_2 z + \alpha_3 B_5 \sin k_3 z + \alpha_3 B_6 \cos k_3 z, \quad (4.2.16)$$

де постійні  $\alpha_i$ , знайдені з рівняння (4.2.13) чи (4.2.14), будуть дорівнювати:

$$\alpha_i = \frac{C_i}{B_i} = \frac{\frac{EJ_x}{l^4} \lambda_i^2 - m\omega^2}{m x_c \omega^2} = - \frac{m x_c \omega^2}{\frac{GJ_p}{l^2} \lambda_i^2 + J_m \omega^2}. \quad (4.2.17)$$

Підставляючи (4.2.15), (4.2.17) в граничні умови, наприклад, для консольного стрижня, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих постійних  $B_i = \overline{1..6}$ . З цієї системи знаходимо лише відношення вказаних постійних. Прирівнюючи до нуля детермінант системи, отримаємо трансцендентне рівняння для власних частот згинно – крутильних коливань стрижня несиметричного перерізу.

Відношення  $\beta = \frac{b}{a}$  знаходимо з (4.2.11) чи (4.2.12). Форми нормальних

коливань (4.2.15), (4.2.16) нормуємо таким чином, щоб амплітудні коефіцієнти **a, b** були рівні відповідно амплітудам лінійного та кутового переміщень вільного кінця стержня.

Часткове рішення системи (4.2.9), (4.2.10) нелінійних рівнянь ( **$\varepsilon \neq 0$** ), близьке до будь-якої нормальної форми згинно – крутильних коливань з

частотою  $\omega_r$ , шукаємо згідно узагальненому асимптотичному методу (наприклад, в першому наближенні) в наступному вигляді:

$$v(z, t) = aV_r(z) \cos \psi, \quad (4.2.18)$$

$$\varphi(z, t) = b\Phi_r(z) \cos \psi = \beta a\Phi_r(z) \cos \psi, \quad (4.2.19)$$

Де амплітуда  $a$  і повна фаза  $\psi = \omega_r t + \nu$  визначаються з рівняння першого наближення

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \varepsilon t), \quad (4.2.20)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_r + \varepsilon B_1(a, \varepsilon t), \quad (4.2.21)$$

а фундаментальні функції  $V_r, \Phi_r$  по формулам (4.2.15), (4.2.16) для частоти  $\omega_r$ .

Функції,  $\varepsilon A_1(a, \varepsilon t); \varepsilon B_1(a, \varepsilon t)$  що характеризують зміну амплітуди коливань і власної частоти в часі унаслідок нелінійно – гістерезисної поведінки матеріалу, можна знайти, підставляючи (4.2.20), (4.2.21) в рівняння гармонійного балансу.

Ці рівняння в даному випадку отримаємо, помножуючи (4.2.9) та (4.2.10) відповідно на  $aV(z)dz$  та  $b\Phi(z)dz$ , а після додаючи отримані вирази.

Далі суму помножуємо один раз на  $\cos \psi d\psi$ , а другий раз на  $\sin \psi d\psi$ , після чого інтегруємо по  $z$  від 0 до 1 ( $z$  - аргумент, віднесений до довжини  $l$  стержня) та відповідно від 0 до  $2\pi$ . Знайдемо:

$$2\pi a N_r \omega_r \varepsilon B_1 + \chi_1(a, \varepsilon t) = 0, \quad (4.2.22)$$

$$2\pi N_r \omega_r \varepsilon A_1 + \chi_2(a, \varepsilon t) = 0, \quad (4.2.23)$$

де:

$$N_r = \int_0^1 (mV_r^2 + 2\beta m x_c V_r \Phi_r + \beta^2 \Phi_r^2) dz,$$

$$\chi_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f_0(z, \psi) \cos \psi d\psi dz,$$

$$\chi_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f_0(z, \psi) \sin \psi d\psi dz,$$



$$f_0 = a^k \left( a_k \cos^k \psi + \alpha_k \sin^k \psi \right) \left[ EJ_x^{(k)} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right)^k V_r + GJ_p^{(k)} \frac{d}{dz} \left( \frac{d\Phi_r}{dz} \right)^k \beta \Phi_r \right].$$

З рівняння гармонійного балансу (4.2.22), (4.2.23) легко знаходимо  $\varepsilon A_1, \varepsilon B_1$ .

Тоді рівняння (4.2.20), (4.2.21) приймуть остаточний вигляд:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\chi_2}{2\pi N_r \omega_r}, \quad (4.2.24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_r - \frac{\chi_1}{2\pi N_r \omega_r a} = \omega_e(a, \varepsilon t). \quad (4.2.25)$$

З (4.2.24) знаходимо амплітуду коливань, що огинає, а рівняння (4.2.25) характеризує зміну власної частоти коливань.

### 4.3. Вільні крутильні коливання масивного диска, закріпленого консольно на круглому стрижні

Розглянемо крутильні коливання диска на круглому консольному стрижні з нелінійно – гістерезисного матеріалу.

Враховуємо, що

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \gamma_u = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \rho \theta$$

Отримаємо з загального рівняння стану для даного випадку наступне рівняння:

$$\tau = \sigma_{23} = \sigma_{\varphi z} = G \left[ 1 - \left( \alpha_k + \delta_k I^k \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} |\rho \theta|^{k-1} \right] \rho \varphi, \quad (4.3.1)$$

де  $\theta$  – відносний кут закручування стрижня,  $\theta = \frac{\varphi}{l}$ ,  $\varphi$  – кут закручування диска (повний кут закручування стрижня),  $l$  – довжина стрижня.

Крутний момент в довільному перерізі стрижня дорівнює:

$$M_{\kappa p} = \int \int_{(F)} \tau \rho dF = G J_p \frac{\varphi}{l} \left[ 1 - (\alpha_k + \delta_k I^k) \left( \frac{J_p^{(k)}}{J_p} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} \left| \frac{\varphi}{l} \right|^{k-1} \right], \quad (4.3.2)$$

де  $\rho$  – відстань від осі кручення до розглядуваної точки перерізу стрижня,  $J_p^{(k)}$ ,

$J_p$  – геометричні характеристики.

Момент дотичних сил інерції диска дорівнює:

$$M_{in} = -J_m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (4.3.3)$$

де  $J_m$  – момент інерції маси диска.

Вважаємо, що маса диска значно переважає масу стрижня. Тому масу стрижня і сили інерції від неї не враховуємо.

По принципу Д'Аламбера прирівнюємо один до одного моменти і (4.3.3). В результаті отримаємо звичайне диференціальне рівняння вільних коливань диска на круглому стрижні:

$$J_m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + G J_p \frac{\varphi}{l} = \varepsilon G (\alpha_k + \delta_k I^k) J_p^{(k)} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} \left| \frac{\varphi}{l} \right|^{k-1} \frac{\varphi}{l}, \quad (4.3.4)$$

або

$$J_m \ddot{\varphi} + C_\varphi \varphi = \varepsilon G (\alpha_k + \delta_k I^k) J_p^{(k)} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} \left| \frac{\varphi}{l} \right|^{k-1} \frac{\varphi}{l}, \quad (4.3.5)$$

позначимо 
$$C_\varphi = \frac{G J_p}{l}, \quad (4.3.6)$$

припущення про те, що відхилення від закону Гука є незначним дає можливість в правій частині (4.3.4) або (4.3.5) виділити малий додатній параметр  $\varepsilon$  і розв'язати рівняння за допомогою метода Крилова–Боголюбова–Митропольського.

Обчислимо функції  $\chi_1$  і  $\chi_2$ , остаточне рішення рівняння (4.3.5) представимо в наступному вигляді:

$$\varphi = a \cos \cos(\omega t + \vartheta), \quad (4.3.7)$$

$$\frac{da}{dt} = -\delta_k \frac{G J_p^{(k)}}{2\pi\omega J_m} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} R_k \left| \frac{a}{l} \right|^k, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \alpha_k \frac{GJ_p^{(k)}}{2\pi\omega J_m a} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} R_k \left| \frac{a}{l} \right|^k, \quad (4.3.9)$$

$$\omega^2 = \frac{C_\varphi}{J_m} = \frac{GJ_p}{J_m l}, \quad (4.3.10)$$

Зіставляючи (4.3.8) і (4.3.9) та враховуючи (4.3.10), знайдемо залежності узагальнених (усереднених) логарифмічних декрементів відповідно зміни амплітуди та частоти від амплітуди і кута закручування диска:

$$\delta = \delta_k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{J_p^{(k)}}{J_p} R_k \left(\frac{b}{l}\right)^{k-1}, \quad (4.3.11)$$

$$\delta_\omega = d_k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{J_p^{(k)}}{J_p} R_k \left(\frac{b}{l}\right)^{k-1}, \quad (4.3.12)$$

якщо перейти в цих формулах до амплітудного значення максимальних напружень за допомогою співвідношення

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{GJ_p}{W_p} \frac{b}{l} = \frac{Grb}{l}, \quad (4.3.13)$$

то отримаємо з точністю до  $\varepsilon$ :

$$\delta = \delta_k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{J_p^{(k)}}{J_p} R_k \left(\frac{\tau}{Gr}\right)^{k-1}, \quad (4.3.14)$$

$$\delta_\omega = d_k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{J_p^{(k)}}{J_p} R_k \left(\frac{\tau}{Gr}\right)^{k-1}, \quad (4.3.15)$$

У випадку трубчастих круглих стрижнів, товщина стінок  $h$  яких мала в порівнянні з середнім радіусом  $r$ , можна знехтувати невеликою зміною напруження по товщині стінки і вважати напружений стан однорідним, підставив в (1)  $\rho = r$ .

Підстановка дає достеменні значення декрементів:

$$\delta = \delta_k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} R_k \left(\frac{b}{l} r\right)^{k-1}, \quad (4.3.16)$$

$$\delta_\omega = d_k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} R_k \left(\frac{b}{l} r\right)^{k-1}, \quad (4.3.17)$$

$$\delta = \delta_k \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} R_k \left( \frac{\tau}{G} \right)^{k-1}, \quad (4.3.18)$$

$$\delta_{\omega} = d_k \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{k-1}{2}} R_k \left( \frac{\tau}{G} \right)^{k-1}. \quad (4.3.19)$$

#### 4.4. Колювання чистого згину

Вільні колювання, в результаті яких виникає чистий згин, можливо здійснити в тонкому пластинчатому стрижні прямокутного перерізу з масами на його кінцях. Маса вантажу значно перевищує масу стрижня, так що останньою можна знехтувати та вважати, що на коливальну систему діє момент сил інерції тільки вантажу:

$$M = -J_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (4.4.1)$$

де  $J_m$  - момент інерції відносно осі, навколо якої вантаж повертається на кут  $\theta$  (це також і кут повороту кінцевого перерізу стрижня).

У відповідності до гіпотези плоских перетинів і відомостями про волокна приймаємо:

$$\varepsilon_{11} = xy = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} y, \quad (4.4.2)$$

де  $x$ - кривизна,  $w$ - прогин,  $y$ - відстань від нейтральної осі до шару волокон, що розглядається.

Рівняння стану стрижня з нелінійно – гістерезисного матеріалу у випадку (4.4.2) приймає вигляд:

$$\sigma_{11} = E \left[ 1 - (a_k - \alpha_k I^k) \left| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} y \right|^{k-1} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} y, \quad (4.4.3)$$

Згинаючий момент в довільному перетині стрижня буде дорівнювати

$$M_u = \int \int_{(F)} \sigma_{11} y dF = EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left[ 1 - (a_k - \alpha_k I^k) \left| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} y \right|^{k-1} \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \right], \quad (4.4.4)$$

з рівняння (4.4.4) запис по модулю  $\left| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} y \right|^{k-1}$  застосовується тільки тоді, коли для апроксимації симетричної відносно початку координат петлі гістерезису наряду з непарними степенями деформації застосовують і парні. Відстань  $y$  береться також по модулю, щоб відповідні осьові моменти інерції непарних степенів не перетворилися на нуль.

Враховуючи, що при чистому згині

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{l},$$

І прирівнюючи згинаючий момент до моменту сил інерції вантажу, отримаємо диференційне рівняння вільних затухаючих коливань вантажу (змін кута в часі) з врахуванням нелінійно – гістерезисної поведінки стрижня:

$$J_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + EJ_x \frac{\theta}{l} = \varepsilon E (a_k + \alpha_k I^k) J_x^{(k)} \left| \frac{\theta}{l} \right|^{k-1} \frac{\theta}{l}, \quad (4.4.5)$$

Вважаючи відхилення від закону Гука незначними, виділяємо в правій частині (4.4.5) малий параметр  $\varepsilon$ .

Рівняння (4.4.5) має вигляд рівняння (4.4.5). Тому його рішення по методу Крилова- Боголюбова – Митропольського буде таким самим:

$$\theta = a \cos \cos(\omega t + \vartheta) \quad (4.4.6)$$

$$\frac{da}{dt} = -\alpha_k \frac{EJ_x^{(k)}}{2\pi\omega J_m} R_k \left( \frac{a}{l} \right)^k, \quad (4.4.7)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \alpha_k \frac{EJ_x^{(k)}}{2\pi\omega J_m a} R_k \left( \frac{a}{l} \right)^k, \quad (4.4.8)$$

$$\omega^2 = \frac{EJ_x}{J_m l}, \quad (4.4.9)$$

вираз для узагальненого логарифмічного декременту через амплітуду  $a$  кута повороту  $\theta$  вантажу буде також аналогічним:

$$\delta = \alpha_k \frac{J_x^{(k)}}{J_x} R_k \left( \frac{a}{l} \right)^{k-1}. \quad (4.4.10)$$

Максимальне напруження згідно закону Гука (з точністю до  $\varepsilon$ ) при згині дорівнює

$$\sigma_{11}^* = \frac{EJ_x}{W_x} \frac{a}{l} = \frac{Eha}{2l}, \quad (4.4.11)$$

з врахуванням (4.4.11) формула (4.4.10) представляється наступним чином:

$$\delta = \alpha_k \frac{J_x^{(k)}}{J_x} R_k \left( \frac{2\sigma_{11}^*}{Eh} \right)^{k-1}, \quad (4.4.12)$$

Вираз для декременту частоти через амплітуду коливань чи через амплітуду напружень отримаємо з (4.4.10) або (4.4.12) шляхом заміни гістерезисних коефіцієнтів  $\alpha_k$  на синфазні  $a_k$ .

При суто згинних коливаннях можна також отримати близький до однорідного одновісний напружений стан, якщо жорстко закріпити між вантажами стрижень тонкостінного двотаврового перерізу чи два пластинчатих стержня, що розташовані симетрично відносно нейтрального шару.

Осьові моменти інерції відносно нейтральної осі для такого перерізу дорівнюють

$$J_x^{(k)} = 2bd \left( \frac{h}{2} \right)^{k+1}, \quad (4.4.13)$$

$$J_x = J_x^{(1)} = \frac{bdh^2}{2}, \quad (4.4.14)$$

$$\frac{J_x^{(k)}}{J_x} = \left( \frac{h}{2} \right)^{k-1}, \quad (4.4.15)$$

Зміною напруження по товщині  $d$  полки можна знехтувати і усюди вважати рівним значенню (4.4.3), якщо туди підставити  $y = \frac{h}{2}$ . Вирази для логарифмічного декременту (дійсного) в цьому випадку будуть наступними:

$$\delta = \alpha_k R_k \left( \frac{ah}{2l} \right)^{k-1}, \quad (4.4.16)$$

$$\delta = \alpha_k R_k \left( \frac{\sigma_{11}^*}{E} \right)^{k-1}, \quad (4.4.17)$$

#### 4.5. Вільні поздовжні коливання вантажу на невагомому стрижні

Вантаж масою  $m$  підвищено на невагомому стрижні з нелінійно – гістерезисного матеріалу. Довжина стрижня  $l$ , площа поперечного перерізу  $F$ .

Осьова сила  $N$  в довільному перерізі стрижня при коливаннях відносно положення рівноваги дорівнює

$$N = \sigma_{11} F = EF \left[ 1 - (a_k - \alpha_k I^k) \varepsilon_{11}^{k-1} \right] \varepsilon_{11}. \quad (4.5.1)$$

Так як стрижень – невагомий, то його відносна деформація дорівнює

$$\varepsilon_{11} = \frac{u}{l}, \quad (4.5.2)$$

де  $u$  - вертикальне переміщення вантажу. З цієї ж причини на стрижень буде діяти тільки сила інерції вантажу

$$-m \frac{d^2 u}{dt^2}. \quad (4.5.3)$$

Прирівнюючи згідно принципу Д'Аламбера осьову силу (4.5.1) і силу інерції (4.5.3), отримаємо рівняння вільних коливань вантажу на стрижні.

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + EF \frac{u}{l} = \varepsilon EF (a_k - \alpha_k I^k) \left| \frac{u}{l} \right|^{k-1} \frac{u}{l}. \quad (4.5.4)$$

Так як відхилення від закону Гука в правій частині (4.5.4) є незначним виділимо малий параметр  $\varepsilon$ .

Рішення цього рівняння аналогічно рішенням рівнянь (4.3.5), (4.4.5):

$$u = a \cos \cos(\omega t + \vartheta), \quad (4.5.5)$$

$$\frac{da}{dt} = -\alpha_k \frac{EF}{2\pi m \omega} R_k \left( \frac{a}{l} \right)^k, \quad (4.5.6)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \alpha_k \frac{EF}{2\pi m \omega a} R_k \left( \frac{a}{l} \right)^k. \quad (4.5.7)$$

Вираз для логарифмічного декременту (дійсного) знаходимо з рівняння (4.5.6):

$$\delta = \alpha_k R_k \left( \frac{a}{l} \right)^{k-1}. \quad (4.5.8)$$

Амплітудне значення напружень, що виникли в результаті поздовжніх коливань, дорівнює з точністю до  $\varepsilon$ :

$$\sigma_{11}^* = \frac{N}{F} = \frac{EF}{F} \frac{a}{l} = \frac{Ea}{l},$$

звідки:

$$\frac{a}{l} = \frac{\sigma_{11}^*}{E}. \quad (4.5.9)$$

Підстановка співвідношення (4.5.9) в (4.5.8) дає вираз логарифмічного декременту через амплітудне значення напруження:

$$\delta = \alpha_k R_k \left( \frac{\sigma_{11}^*}{E} \right)^{k-1}. \quad (4.5.10)$$

Формули для декременту частоти, як вже було зазначено, отримуються заміною в (4.5.8), (4.5.10) гістерезисних коефіцієнтів на синфазні.

#### 4.6. Згинні коливання консольної балки під дією масивного вантажу

Доповнюючи рівність гістерезисними членами, отримаємо наступну формулу для кривизни при циклічному згині нелінійно – гістерезисної балки:

$$x = \frac{M}{EJ_x} \left[ 1 + \left( A_k + \mathcal{A}_k \mathcal{J}^k \right) \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \left( \frac{M}{EJ_x} \right)^{k-1} \right], \quad (4.6.1)$$

Приймаємо  $x = y''$  та врахуємо, що згинаючий момент в довільному перерізі консольної балки від зосередженої на вільному кінці сили  $P$  дорівнює  $M = Pz$ . Тоді в результаті інтегрування диференційного рівняння (4.6.1) і використання граничних умов консольного закріплення знайдемо рівняння зігнутої вісі нелінійно – гістерезисної балки. З цього рівняння визначаємо прогин на вільному кінці балки :



$$w = \frac{P}{C_w} \left[ 1 + (A_k + \mathcal{A}_k \mathcal{J}^k) \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \frac{3^k}{(k+2)l^{2(k-1)}} \left( \frac{P}{C_w} \right)^{k-1} \right], \quad (4.6.2)$$

Перетворення даної формули з використанням теореми про відхилення від закону Гука призведе до наступного виразу для зосередженої сили:

$$P = C_w w \left[ 1 - (a_k - \alpha_k I^k) \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \frac{3^k}{(k+2)l^{2(k-1)}} w^{k-1} \right], \quad (4.6.3)$$

$$C_w = \frac{3EJ_x}{l^3}.$$

Згідно теореми про повні відхилення залежність між коефіцієнтами формули (4.6.3) і зворотною по відношенню до неї формули (4.6.2) має вигляд:

$$(a_k - \alpha_k I^k) w^k = (A_k + \mathcal{A}_k \mathcal{J}^k) \left( \frac{P}{C_w} \right)^k. \quad (4.6.4)$$

Розділивши обидві частини формули (4.6.3) на  $w$ , отримаємо вираз для коефіцієнта жорсткості:

$$C(w) = C_w \left[ 1 - (a_k + \alpha_k I^k) \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \frac{3^k}{(k+2)l^{2(k-1)}} w^{k-1} \right].$$

І переконаємось, що він має нелінійно – гістерезисну структуру.

Припустимо, що закріплений на невагомій нелінійно – гістерезисній консольній балці вантаж масою  $m$  здійснює вільні поперечні коливання. В цьому випадку сила інерції вантажу дорівнює  $P = -m\ddot{w}$ . Підставляючи у відповідності до принципу Д'Аламбера значення цієї сили у співвідношення (4.6.3), отримаємо диференціальне рівняння вільних згинних коливань вантажу на консольній балці:

$$m\ddot{w} + C_w w = \varepsilon C_w \frac{3}{k+2} \left( \frac{3}{l^2} \right)^{k-1} \frac{J_x^{(k)}}{J_x} (a_k + \alpha_k I^k) w^k. \quad (4.6.5)$$

Рівняння (4.4.5) має стандартний вид. Унаслідок цього його рішення отримаємо методом, що був описаний раніше:

$$\omega = a \cos \cos(\omega t + \vartheta) = a \cos \cos \psi, \quad (4.6.6)$$

$$\frac{da}{dt} = -\alpha_k \frac{3}{k+2} C_w \left( \frac{3}{l^2} \right)^{k-1} \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \frac{R_k a^k}{2\pi m \omega}, \quad (4.6.7)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \alpha_k \frac{3}{k+2} C_w \left( \frac{3}{l^2} \right)^{k-1} \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \frac{R_k a^{k-1}}{2\pi m \omega}, \quad (4.6.8)$$

$$\omega^2 = \frac{C_w}{m} = \frac{3EJ_x}{ml^3}, \quad (4.6.9)$$

З (4.6.7) знаходимо вираз для логарифмічного декременту:

$$\delta = \alpha_k \frac{3}{k+2} \left( \frac{3}{l^2} \right)^{k-1} \frac{J_x^{(k)}}{J_x} R_k a^{k-1}. \quad (4.6.10)$$

Наведені рішення про вільні коливання нелінійно – гістерезисних тіл служать основою для експериментального визначення коефіцієнтів відхилення від закону Гука.

Так, в зразку круглого (суцільного чи трубчастого) перерізу з масивним вантажем на кінці збуджуються резонансні коливання. Після збудження вимикається і зразок здійснює вільні затухаючі коливання, вібропрограми яких реєструються. З вібропрограм визначаються амплітуди та обраховуються відповідні значення логарифмічного декременту. Потім за допомогою метода найменших квадратів на підставі експериментальних даних визначаються коефіцієнти гістерезисних відхилень  $\delta$  по формулі (4.3.11) чи (4.3.16). При цьому варто брати коефіцієнти з такими індексами, для яких вже були знайдені коефіцієнти синфазних відхилень, так як поліном гістерезисних відхилень повинен бути тієї ж степені, як поліном синфазних відхилень. Аналогічно в трубчастому зразку збуджуються поздовжні коливання і експериментально визначаються коефіцієнти гістерезисних відхилень.

Наряду з визначенням гістерезисних коефіцієнтів при вільних коливаннях можна знаходити за допомогою формул виду (4.3.17) та (4.3.19) і синфазні коефіцієнти, якщо на вібропрограмах достатньо точно зафіксовано зміну частоти коливань (періоду) із зміною амплітуди коливань.

#### 4.7. Порівняння результатів врахування внутрішнього тертя при коливаннях за допомогою теорій нелінійно – гістерезисного та пружно – пластичних тіл

Рівняння (4.6.4) вільних поздовжніх коливань вантажу на невагомому нелінійно – гістерезисному стрижні можна записати інакше, розбиваючи напружено – деформований стан на гідростатичну та девіаторну частини.

Враховуючи те, що при одновісному напруженому стані нелінійно – гістерезисного тіла середня деформація та інтенсивність деформації зсуву відповідно дорівнюють:

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\mu(\varepsilon_{11})}{3} \varepsilon_{11} = \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_{11} - \varepsilon(\dots), \quad (4.7.1)$$

$$\gamma_u = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[ 1 + \mu(\varepsilon_{11}) \right] \varepsilon_{11} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + \mu) \varepsilon_{11} + \varepsilon(\dots), \quad (4.7.2)$$

де відносне видовження обрховується за формулою (4.5.2).

З рівняння стану знайдемо (з точністю до  $\varepsilon_{11}$ ):

$$\sigma_{11} = \frac{E}{3} \frac{u}{l} \left[ 1 - (b_k + \beta_k I^k) \left| \frac{1-2\mu}{3} \frac{u}{l} \right|^{k-1} \right] + \frac{2E}{3} \frac{u}{l} \left[ 1 - (\alpha_k + \delta_k I^k) \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + \mu) \frac{u}{l} \right|^{k-1} \right]. \quad (4.7.3)$$

Тоді за допомогою викладок, прийдемо до рівняння вільних коливань вантажу в такому вигляді

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + EF \frac{u}{l} = \varepsilon EF \left[ (b_k + \beta_k I^k) \left( \frac{1-2\mu}{3} \right)^{k-1} \left| \frac{u}{l} \right|^{k-1} \frac{u}{l} + (\alpha_k + \delta_k I^k) \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + \mu) \right)^{k-1} \left| \frac{u}{l} \right|^{k-1} \frac{u}{l} \right]. \quad (4.7.4)$$

Це рівняння є тотожним рівнянню (4.5.4). Його рішення в першому наближенні наступне:

$$u = a \cos \cos(\omega t + \vartheta) = a \cos \cos \psi, \quad (4.7.5)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{EF}{2\pi m\omega} \left[ \frac{1}{3} \beta_k R_k \left( \frac{1-2\mu}{3} \right)^{k-1} \left( \frac{a}{l} \right)^k + \frac{2}{3} \delta_k R_k \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} (1+\mu) \right)^{k-1} \left( \frac{a}{l} \right)^k \right], \quad (4.7.6)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{EF}{2\pi m\omega a} \left[ \frac{1}{3} b_k R_k \left( \frac{1-2\mu}{3} \right)^{k-1} \left( \frac{a}{l} \right)^k + \frac{2}{3} d_k R_k \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} (1+\mu) \right)^{k-1} \left( \frac{a}{l} \right)^k \right]. \quad (4.7.7)$$

Співвідношення (4.6.6) перетворюється в формулу для логарифмічного декременту при поздовжніх коливаннях вантажу:

$$\delta = \frac{1}{3} \beta_k R_k \left( \frac{1-2\mu}{3} \right)^{k-1} \left( \frac{a}{l} \right)^{k-1} + \frac{2}{3} \delta_k R_k \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} (1+\mu) \right)^{k-1} \left( \frac{a}{l} \right)^{k-1}. \quad (4.7.8)$$

За допомогою (4.4.9) легко можна перейти до напружень. Обраховуючи по цій формулі логарифмічний декремент при  $\beta_k = 0$  (нехтуючи відхиленнями в гідростатичній частині напружено – деформованого стану), ми отримаємо його занижене значення в порівнянні з дійсним. Таке положення буде і в випадку згинних коливань. Тому при однаковій інтенсивності дотичних напружень обчислений декремент при крутних коливаннях буде більше, ніж при поздовжніх коливаннях. До цього висновку можна дійти інакше, нехтування незначними відхиленнями від закону Гука в гідростатичній частині напруженого стану призводить до наступної структури формули для декременту

$$\delta = \frac{\Delta W}{2(W_g + W_\phi)}, \quad (4.7.9)$$

яка при рівних значеннях інтенсивності ( $i$ , відповідно, однакових  $W_\phi$  та  $\Delta W_\phi$ ) дає менше значення декременту у випадку, що складається з гідростатичної та девіаторної частин напруженого стану, ніж у випадку чистого зсуву. Унаслідок цього порівнювати демпфуючу здатність матеріалу при різноманітних видах напруженого стану на підставі тільки однакової інтенсивності дотичних напружень не можна. А це значить, що теорія пружно – пластичного тіла не досить точно описує внутрішнє тертя в матеріалі. Для точного опису явищ внутрішнього тертя необхідно враховувати відхилення  $i$  в гідростатичній

частині напруженого стану і вводити «єдину» функцію середнього напруження наряду з «єдиною» функцією інтенсивності напружень. Тоді формула для логарифмічного декременту прийме більш повний вид.

Теорія нелінійно – гістерезисного тіла ґрунтується як раз на двох таких «єдиних» кривих і тому точніше опише внутрішнє тертя в матеріалі, а також у випадку відсутності (або нехтуванні) відхилень в гідростатичній частині напруженого стану буде співпадати з теорією пружно – пластичного тіла.

Згідно з теорією нелінійно – гістерезисного тіла логарифмічний декремент для усіх видів однорідних напружених станів (дійсний декремент) буде однаковим тільки при однакових інтенсивностях і середніх напруженнях. У випадку неоднорідних напружених станів узагальнений логарифмічний декремент залежить від форми перерізів, виду напруженого стану і т. ін., унаслідок чого співставлення декрементів більш складне.

Так, порівняння формули (4.4.10) з рівністю (4.3.12) дає відношення логарифмічного декременту (дійсного) поздовжніх коливань до логарифмічного декременту (узагальненого) згинних коливань:

$$\frac{\delta_{\text{позд.}}}{\delta_{\text{зг.}}} = \frac{\alpha_k R_k \left( \frac{\sigma_{11}^*}{E} \right)^{k-1}}{\alpha_k R_k \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \left( \frac{2\sigma_{11}^*}{Eh} \right)^{k-1}}. \quad (4.7.10)$$

Якщо поліном відхилень складається не з  $k$  членів, а з одного з фіксованим індексом  $k$ , то співвідношення (4.7.10) спрощується:

$$\frac{\delta_{\text{позд.}}}{\delta_{\text{зг.}}} = \frac{J_x^{(k)}}{J_x} \left( \frac{h}{2} \right)^{k-1}. \quad (4.7.11)$$

З останньої формули для прямокутного і круглого перерізу отримуємо відповідно:

$$\frac{\delta_{\text{позд.}}}{\delta_{\text{зг.}}} = \frac{k+2}{3}, \quad (4.7.12)$$

$$\frac{\delta_{\text{позд.}}}{\delta_{\text{зг.}}} = \frac{(k+3)\pi}{4R_k}, \quad (4.7.13)$$

де  $R_k$  - число.

Наприклад, при  $k = 2, 3, 5$  для прямокутного перерізу відношення (4.7.12) і для круглого відношення (4.7.13) відповідно дорівнюють:

$$1,44; 1,67; 2,33 \quad (4.7.14)$$

$$1,47; 2,00; 3,20 \quad (4.7.15)$$

Формула (4.7.12) була отримана раніше з енергетичних міркувань Новіковим Н. В. І експериментально знайдено, що відношення  $\frac{\delta_{повзд.}}{\delta_{зг.}}$  у випадку прямокутного перерізу стрижня дорівнює 2,37 при  $\sigma_{11}^* = 40 \text{ МПа}$  і 2,54 при  $\sigma_{11}^* = 160 \text{ МПа}$ .

Обрахований по цим співвідношенням згідно (4.7.12) параметр петлі гістерезису  $k=5$ , а не 2, як було прийнято раніше.

Ряди відношень декрементів (4.7.14), (4.7.15) показують, що при однакових амплітудах напружень узагальнений декремент залежить від виду напруженого стану, форми перерізу, степеня нелінійності. З цієї причини узагальнений декремент не можна вважати характеристикою дійсної демпфуючої властивості матеріалу що влаштовує, а перерахунок узагальненого декременту в дійсний важкий, У зв'язку з цим найбільш підходящими для характеристики внутрішнього тертя є коефіцієнти гістерезисних відхилень.

#### 4.8. Поперечні коливання пружно – пластичного стрижня

Нехтуючи усіма складовими напружень через їх малість, крім передбачених лінійною теорією, приходимо до можливості використання гіпотези плоских перетинів і співвідношень технічної теорії згину. Зокрема приймаємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y, \quad (4.8.1)$$

Що для пружно – пластичного стрижня ( $a_k = \alpha_k$ ) дає вираз згинаючого моменту в довільному перерізі стрижня

$$M = \int \int_{(F)} \sigma_{11} y dF = EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a_k (1 + I^k) EJ_x^{(k)} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^k, \quad (4.8.2)$$

де

$v(x, t)$  - Прогин

$J_x, J_x^{(k)}$  - Геометричні характеристики

Підставимо вираз (4.8.2) в рівняння динамічної рівноваги елемента стрижня, що згинається

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q(z) \cos \cos pt, \quad (4.8.3)$$

Отримуємо рівняння вимушених поперечних коливань пружно – пластичного стрижня:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varepsilon a_k (1 + I^k) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EJ_x^{(k)} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^k \right] + \varepsilon q(z) \cos \cos pt, \quad (4.8.4)$$

Розглянемо малі резонансні коливання, коли величина пластичної деформації не перевищує пружної та відхилення від закону Гука можна вважати пропорційними малому параметру  $\varepsilon$ . При резонансних коливаннях збуджуюча сила також пропорційна параметру  $\varepsilon$ .

При частоті збуджуючої сили  $p$ , близької до деякої резонансної частоти  $\omega_r$ , асимптотично рішення рівняння (4) шукаємо у вигляді:

$$v(z, t) = a V_r \cos \cos \psi + \varepsilon U_1(z, a, pt, \varepsilon t) + \dots \quad (4.8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta, \varepsilon t) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta, \varepsilon t) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_r - p + \varepsilon B_1(a, \vartheta, \varepsilon t) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta, \varepsilon t) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.8.6)$$

де  $\psi = pt + \vartheta$  – повна фаза,  $a$  – амплітуда,  $V_r$  –  $r$ -ая форма коливань (без врахування 103е лінійності), що відповідає власній частоті  $\omega_r$ ;  $\varepsilon t$  – повільний час.

Підставимо (4.8.5), (4.8.6) в (4.8.4) і розкладемо в ряд Тейлора праву частину (4.8.4) в околі незбуреного рішення  $v_0 = aV_r(z)\cos\cos\psi$ .

Прирівнюючи в отриманій рівності коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , прийдемо до системи рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dy^2} \left( EJ_x \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right) - \rho F \omega_r^2 V_r = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ_x \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right) + \rho F \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \psi} \omega_r + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} \omega_r^2 \right) + \\ & + \rho F \left\{ \left[ (\omega_r - p) \frac{\partial A_1}{\partial v} - 2a\omega_r B_1 \right] V_r \cos\cos\psi - \left[ (\omega_r - p) \frac{\partial B_1}{\partial v} + 2a\omega_r A_1 \right] V_r \sin\sin\psi \right\} = \\ & = \Phi_0(z, \psi, \varepsilon t) + q(z) \cos\cos pt \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ_x \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \right) + \rho F \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t \partial \psi} \omega_r + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi^2} \omega_r^2 \right) + \\ & + \rho F \left\{ \begin{aligned} & [(\omega_r - p) \frac{\partial A_2}{\partial v} - 2a\omega_r B_2] V_r \cos\psi - \\ & - [(\omega_r - p) \frac{\partial B_2}{\partial v} + 2a\omega_r A_2] V_r \sin\psi + \\ & + \left( \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial v} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon t} - aB_1^2 \right) V_r \cos\psi - \\ & - \left( 2A_1 B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial v} B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \varepsilon t} \right) V_r \sin\psi \end{aligned} \right\} = \\ & = \Phi_1(z, \psi, \varepsilon t), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= a^k (\cos^k \cos^k \psi + \sin^k \sin^k \psi) \frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ_x^{(k)} \left( \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right)^k \right], \\ \Phi_1 &= ka^{k-1} a_k (\cos^{k-1} \cos^{k-1} \psi + \sin^{k-1} \sin^{k-1} \psi) \\ & \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ_x^{(k)} \left( \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right)^{k-1} \right] \frac{d^2 U_1}{dz^2} + 2 \frac{d}{dx} \left[ EI_x^{(k)} \left( \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right)^{k-1} \right] \frac{d^3 U_1}{dz^3} + EJ_x^{(k)} \left( \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right)^{k-1} \frac{d^4 U_1}{dz^4} \right\} \end{aligned}$$



$$-\rho F \left( \begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial t} A_1 + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \psi} A_1 \omega_r + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \psi} B_1 + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} B_1 \omega_r + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial (\varepsilon t) \partial t} \omega_r + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial (\varepsilon t) \partial t} + \\ & + \frac{\partial U_1}{\partial \psi} (\omega_r - p) \frac{\partial B_1}{\partial v} + \frac{\partial U_1}{\partial a} (\omega_r - p) \frac{\partial A_1}{\partial v} + \frac{\partial U_1}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial (\varepsilon t)} \end{aligned} \right).$$

Рівняння (4.8.7) тотожно задовольняє фундаментальній функції  $V_r$ , що розглядається в рішенні (4.8.5), тому що з співвідношення виду (4.8.7) і відповідних граничних умов визначаються всі фундаментальні функції  $V_m$ , (зокрема  $V_r$ ), ортогональні з вагою  $\rho F(z)$ :

$$\int_0^l \rho F(z) V_m(z) V_n(z) dz = \begin{cases} 0, n \neq m \\ N_m, n = m \end{cases} \quad (4.8.12)$$

Ліва частина рівності (4.8.8) є періодичною функцією аргументу  $\psi$  і може бути розкладена в ряд Фур'є, а по змінній  $z$  розкладається в ряд фундаментальних функцій. Кількість членів вказаних рядів буде скінченою унаслідок обмеженої кількості членів в рівнянні стану.

Таким чином, функція  $\Phi_0(z, \psi, \varepsilon t)$  є подвійною сумою:

$$\Phi_0 = \rho F a^k V_m(z) \left[ g_{kmn}^{(\varepsilon t)} \cos \cos n\psi + h_{kmn}^{(\varepsilon t)} \sin \sin n\psi \right], \quad (4.8.13)$$

де

$$g_{kmn} = \frac{1}{\pi N_m a^k} \int_0^l \int_0^{2\pi} \Phi_0 V_m \cos \cos n\psi dz d\psi, \quad (4.8.14)$$

$$h_{kmn} = \frac{1}{\pi N_m a^k} \int_0^l \int_0^{2\pi} \Phi_0 V_m \sin \sin n\psi dz d\psi. \quad (4.8.15)$$

Останній доданок в рівнянні (4.8.8) представляється рядом:

$$q \cos \cos pt = \rho F q_m V_m(z) \cos \cos pt, \quad (4.8.16)$$

де

$$q_m = \frac{1}{N_m} \int_0^l q(z) V_m(z) dz. \quad (4.8.17)$$

Невідому функцію  $U_1(z, \psi, \varepsilon t)$  шукаємо також у вигляді ряду:

$$U_1 = a^k V_m(z) \left[ G_{kmn} \cos \cos n\psi + H_{kmn} \sin \sin n\psi \right] + Q_m V_m(z) \cos \cos pt. \quad (4.8.18)$$

Підставимо вирази (4.8.13), (4.8.16), (4.8.18) в співвідношення (4.8.8) і прирівнявши коефіцієнти при однакових фундаментальних функціях і гармоніках, знайдемо коефіцієнти  $G_{kmn}, H_{kmn}, Q_m$  шуканої функції. Щоб не допустити резонансних членів в (4.8.8), знайдемо коефіцієнти першого наближення  $A_1, B_1$  з рівнянь

$$\pi N_r \left[ (\omega_r - p) \frac{\partial A_1}{\partial \nu} - 2a\omega_r B_1 \right] = \chi_1 + \pi b_r \cos \cos \nu, \quad (4.8.19)$$

$$-\pi N_r \left[ (\omega_r - p) a \frac{\partial B_1}{\partial \nu} + 2\omega_r B_1 \right] = \chi_2 + \pi b_r \sin \sin \nu, \quad (4.8.20)$$

в цьому випадку кінцевий вираз для  $U_1$  прийме вид:

$$U_1 = a^k V_m(z) \frac{g_{kmn} \cos \cos n\nu + h_{kmn} \sin \sin n\nu}{\omega_m^2 - (n\omega_r)^2} + \frac{q_m}{\omega_m^2 - p^2} V_m(z) \cos \cos pt, \quad (4.8.21)$$

(при  $m=r, n \neq 1$  в першій сумі та  $m \neq r$  в другій), а коефіцієнти  $A_1, B_1$  дорівнюють:

$$A_1 = -\frac{\chi_2}{2\pi\omega_r N_r} - \frac{b_r}{N_r(\omega_r + p)} \sin \sin \nu, \quad (4.8.22)$$

$$B_1 = -\frac{\chi_1}{2\pi\omega_r N_r a} - \frac{b_r}{N_r a(\omega_r + p)} \cos \cos \nu, \quad (4.8.23)$$

де

$$\chi_1 = a^k g_{kr1} \pi N_r = \int_0^l \int_0^{2\pi} \Phi_0 V_r \cos \cos \psi dz d\psi, \quad (4.8.24)$$

$$\chi_2 = a^k h_{kr1} \pi N_r = \int_0^l \int_0^{2\pi} \Phi_0 V_r \sin \sin \psi dz d\psi, \quad (4.8.25)$$

$$b_r = q_r N_r, \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

Якщо  $k$  - непарне ціле число, то:

$$g_{kmn} = (-1)^{\varepsilon} h_{kmn} = a_k \frac{Q_k(r, m)}{2^{k-1}} \left( \frac{k}{k-n} \right), \quad (4.8.26)$$

$$Q_k(r, m) = \frac{1}{N_m} \int_0^l \frac{d^2}{dz^2} \left[ E J_x^{(k)} \left( \frac{d^2 V_r}{dz^2} \right)^k \right] V_m dz,$$

$$\binom{k}{\frac{k-n}{2}} - \text{Число сполучень з } k \text{ по } \frac{k-n}{2}; n=k, n=k-2, \dots, n=1.$$

буде мати наступний вид:

$$Q_k(r, m) = (-1)^\varepsilon \frac{EJ_x^{(k)}}{\rho F} \frac{m^2 r^{2k} k!^{2k+2}}{2^{k-1}} \binom{k}{\frac{kr-m}{2r}},$$

де

$$\varepsilon = \frac{2k-n-1}{2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2kr-m-r}{2r},$$

$$m = kr, (k-2)r, (k-4)r, \dots, r.$$

Застосовуючи аналогічну методику з співвідношення (4.8.9) визначаємо функції  $A_2, B_2, U_2$  другого наближення.

Як вже зазначалося, застосована методика побудови асимптотичних рішень дозволяє оцінити вплив відхилень від закону Гука не тільки на амплітуду та частоту коливання, але й на форму коливань. Для кількісної оцінки впливу нелінійно – гістерезисної поведінки матеріалу на характеристики коливного руху розглянемо конкретну задачу про згинні коливання шарнірно – опертої балки прямокутного поперечного перерізу.

Розміри балки:

Матеріал : Сталь ЭИ434,  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $\gamma = 7,85$

Коефіцієнти відхилення  $a_3 = \alpha_3 = 0,597 \cdot 10^5$

Інтенсивність розподіленого по осі балки навантаження :  $q = 0,6$  кг/мм.

Розглянемо резонансні коливання , близькі до першої форми

коливання ( $r=1, \omega_r = \omega_1 = p$ ) .

Визначаємо:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = 72 \cdot 10^4 \text{ мм}^4, \quad J_x^{(3)} = \frac{bh^5}{80} = 388 \cdot 10^6 \text{ мм}^6,$$

$$\rho F = 192 \cdot 10^{-8} \frac{\kappa \mathcal{Z} \cdot c^2}{\text{мм}^2}, \quad V_m = \sin \sin m \frac{\pi}{l} z$$

$$\omega_m^2 = \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{EJ_x}{\rho F} \quad V_1 = \sin \sin \frac{\pi}{l} z$$

В даному прикладі  $EJ_x = \text{const}, r=1, k=3$ . Тому рішення рівняння (4.8.4) згідно (4.8.5), (4.8.6) (4.8.21)-(4.8.26) в першому наближенні приймає вид:

$$v(z, t) = a \sin \frac{\pi}{l} z \cos \cos \psi - 0,424 \cdot 10^{-7} a_3 a^3$$

$$\left[ \left( 3 \sin \frac{\pi}{l} z + \sin \frac{3\pi}{l} z \right) (\cos 3 \cos 3\psi - \sin 3\psi) + \right. \\ \left. + 2,70 \sin \frac{3\pi}{l} z (\cos \cos \psi + \sin 3\psi) \right] + 0,0546 \frac{\sin \frac{\pi}{l} z}{m(m^4 - 1)} \cos pt.$$

$$(m = 3, 5, 7, \dots). \quad (4.8.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -132 \cdot 10^{-6} a_3 a^3 - \frac{4 \cdot 10^5}{\omega + p} \sin \nu, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - p - 132 \cdot 10^{-6} a_3 a^2 - \frac{4 \cdot 10^5}{(\omega + p)a} \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.28)$$

У випадку циклічно стабільного ізотропного матеріалу ( $a_3 = \text{const}$ ) з рівняння (4.8.28), приймаючи  $\frac{da}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} = 0$ , легко знайдемо амплітуду і фазу коливань:

$$a = 3,09 \text{ мм}, \nu = -0,5\pi.$$

Знайденій амплітуді відповідає напруження

$$\sigma_{11} = 166,714 \text{ МПа}.$$

Як слідує з (4.8.27), зміна основної форми коливань  $\left( \sin \frac{\pi}{l} z \right)$  внаслідок нелінійно-гістерезисної поведінки матеріалу відбувається в основному за рахунок третьої форми  $\sin \frac{3\pi}{l} z$  та першої  $\sin \frac{\pi}{l} z$ , що відповідає третій гармоніці (другий член в правій частині (4.8.27)).

Ця зміна незначна і в даному випадку не перевищує  $0,0058a$ .

На рис. 4.8.1 показана основна форма коливань (зверху) та найбільш суттєве збурення цієї форми (знизу).

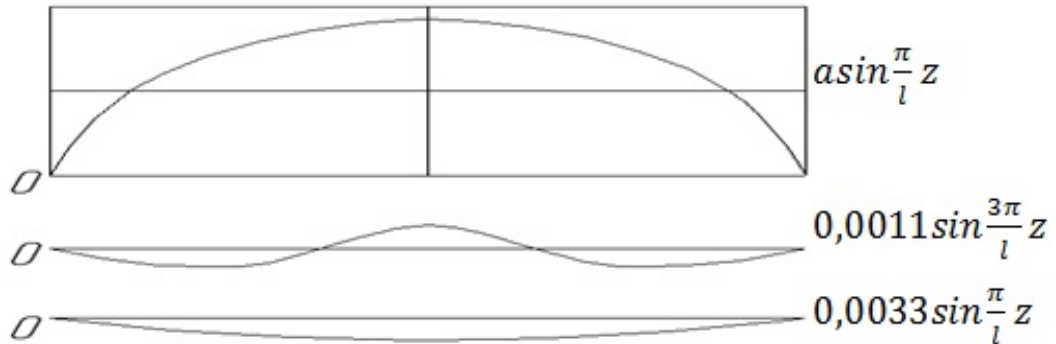


Рис.4.8.1 Зміна форми нелінійних коливань

#### 4.9. Коливання тягара, закріпленого ексцентрично на круглому стрижні з урахуванням внутрішнього тертя в стрижні

Завдяки тому, що центр ваги  $C$  тягара знаходиться на відстані  $x_c$  від осі стрижня (рис.4.9.1), поперечні коливання тягара обов'язково супроводитимуться крутильними коливаннями. Такими ж складними поперечно-крутильними коливаннями будуть і коливання стрижня.

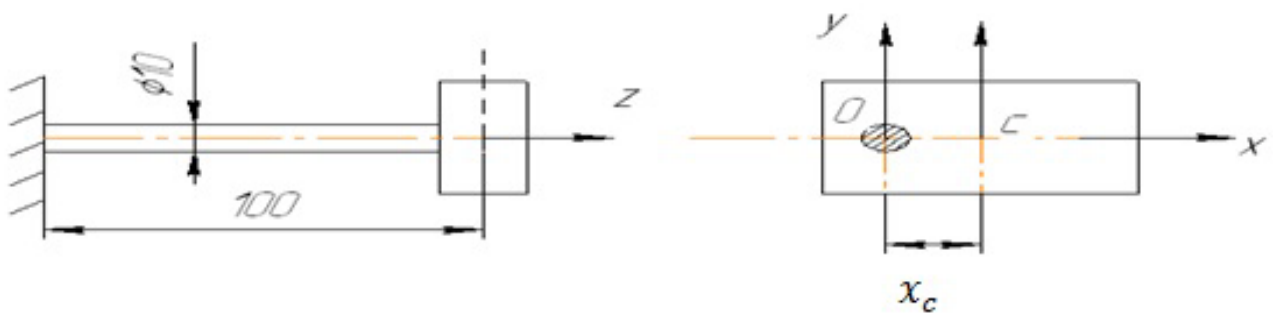


Рис.4.9.1

Нехай маса тягара значно більша маси стрижня, тоді останньою можна знехтувати. Враховуючи сили інерції вертикальних переміщень та тангенціальні сили інерції крутильних переміщень тягара, моменти сил інерції, а також відповідні сили пружності, дістанемо на основі принципу Д'аламбера

систему диференціальних рівнянь вільних поперечно-крутильних коливань тягача на стрижні:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + mx_c\ddot{\theta} + c_y y &= 0, \\ I\ddot{\theta} + mx_c\ddot{y} + c_\theta \theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.9.1)$$

де  $m$  - маса тягача;  $I$  - момент інерції маси тягача відносно осі стрижня;  $y$  - вертикальне переміщення тягача;  $\theta$  - кут закручування тягача відносно осі  $z$  стрижня;  $c_y, c_\theta$  - згинна та крутильна жорсткості, які для консольного стрижня (рис.4.9.1) дорівнюватимуть  $c_y = \frac{3EJ_x}{l^3}, c_\theta = \frac{GJ_p}{l}$ ;  $E$  - модуль Юнга;  $G$  - модуль зсуву;  $J_x$  - момент інерції перерізу відносно осі  $J_p$  - полярний момент інерції перерізу;  $l$  - довжина стрижня.

Частинний розв'язок системи (4.9.1) має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= A \cos(\omega t + \psi) \\ \theta(t) &= B \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.2)$$

Тут сталі  $A, B$  - відповідно амплітуда поперечних і крутильних переміщень тягача,  $\psi$  - фаза коливань.

Підставляючи (4.9.2) в систему (4.9.1) та позначаючи  $\frac{c_y}{m} = \omega_y^2, \frac{c_\theta}{I} = \omega_\theta^2$ ,

дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} -A\omega^2 - Bx_c\omega^2 + A\omega_y^2 &= 0 \\ -BI_m\omega^2 - Amx_c\omega^2 + BI_m\omega_\theta^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.3)$$

При наявності коливань  $A \neq 0, B \neq 0$ , а тому детермінант системи (4.9.3) дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega_y^2 - \omega^2 - \omega^2 x_c \\ -\frac{mx_c}{I} \omega^2 \omega_\theta^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.9.4)$$

Звідси знаходимо два значення частоти вільних поперечно-крутильних коливань тягача:  $\omega_1$  - частота першого типу коливань і  $\omega_2$  - частота другого типу коливань.

З системи (4.9.3) можна визначити відношення амплітуд  $\beta = \frac{B}{A}$  (4.9.5).

При першому типі коливань  $\beta > 0$ , оскільки  $\omega_1^2 < \omega_y^2$ ; при другому типі коливань  $\beta < 0$ , оскільки  $\omega_2^2 > \omega_\theta^2$ .

Розглянемо вимушені резонансні коливання тягара під впливом сили  $P \cos pt$ , прикладеної в центрі ваги  $C$ . У випадку резонансних коливань варто враховувати також і дисипативні сили.

Додаючи до правої частини системи (4.9.1) збурюючі навантаження та нелінійні сили тертя, дістанемо систему диференціальних рівнянь вимушених коливань вантажу:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + mx_c\ddot{\theta} + c_y y &= \varepsilon [f_1(y) + P \cos pt] \\ I\ddot{\theta} + mx_c\ddot{y} + c_\theta \theta &= \varepsilon [f_2(\theta) + Px_c \cos pt] \end{aligned} \right\} \quad (4.9.6)$$

Сили внутрішнього розсіяння енергії  $f_1(y), f_2(\theta)$  значно менші сил інерції та сил пружності. Збурюючі навантаження, необхідні для підтримання резонансних коливань, теж малі. Тому праву частину рівнянь (4.9.6) можна вважати пропорційною малому параметру  $\varepsilon$ .

Систему нелінійних рівнянь (4.9.6) будемо розв'язувати за допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки.

Частинний розв'язок цієї системи в першому наближенні буде мати такий же вигляд, як розв'язок (4.9.2) однорідної системи, тобто:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= A \cos(pt + \psi) \\ \theta(t) &= \beta A \cos(pt + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.7)$$

Але в розв'язку (4.9.7) амплітуда  $A$  та фаза  $\psi$  вже не є сталими, а залежать від часу  $t$  і повинні задовольняти рівняння першого наближення

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \varepsilon A_1(A, \psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - p + \varepsilon B_1(A, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (4.9.8)$$

Стала визначається за формулою (4.9.5).

Функції  $\varepsilon A_1$  та  $\varepsilon B_1$  легко знайти з рівнянь гармонічного балансу:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi AM \omega \varepsilon B_1 - \pi M (\omega - p) \frac{\partial \varepsilon A_1}{\partial \psi} + A_0 \pi \cos \psi + \lambda_1 &= 0 \\ 2\pi M \omega \varepsilon A_1 + \pi MA (\omega - p) \frac{\partial \varepsilon B_1}{\partial \psi} + A_0 \pi \sin \psi + \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9.9)$$

$$A_0 = P(1 + \beta x_c),$$

$$M = m + 2mx_c \beta + \beta^2 I,$$

$$x_1 = \int_0^{2\pi} [f_{10}(y) + \beta f_{20}(\theta) \cos \tau d\tau],$$

$$x_2 = \int_0^{2\pi} [f_{10}(y) + \beta f_{20}(\theta) \sin \tau d\tau], \quad (4.9.10)$$

$$\tau = pt + \psi,$$

$f_{10}(y), f_{20}(\theta)$  – Функції  $f_1(y), f_2(\theta)$  у першому наближенні.

Частинний розв'язок системи (4.9.9) буде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1 &= \frac{x_2}{2\pi M \omega} - \frac{A_0}{M(\omega + p)} \sin \psi \\ \varepsilon B_1 &= -\frac{x_1}{2\pi AM \omega} - \frac{A_0}{AM(\omega + p)} \cos \psi \end{aligned} \right\}$$

З урахуванням якого рівняння (4.9.8) перепишемо в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{x_2}{2\pi M \omega} - \frac{A_0}{M(\omega + p)} \sin \psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - p - \frac{x_1}{2\pi AM \omega} - \frac{A_0}{AM(\omega + p)} \cos \psi \end{aligned} \right\}, \quad (4.9.11)$$

У випадку стаціонарних коливань, коли  $\frac{dA}{dt} = 0, \frac{d\psi}{dt} = 0$ , останні рівняння

наберуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{\omega^2} &= 1 - \frac{A_0}{M \omega^2 A} \left[ \cos \psi - \frac{x_1}{x_2} \sin \psi \right] \\ \sin \psi &= -\frac{x_2}{\pi A_0} \end{aligned} \right\}. \quad (4.9.12)$$



Розв'язки (4.9.7), (4.9.11) та (4.9.7), (4.9.12) з урахуванням (4.9.5) дають можливість проаналізувати відповідно нестационарні та стаціонарні поперечно-крутильні коливання поблизу резонансу.

Внутрішнє тертя в матеріалі стрижня при поперечних та крутильних коливаннях врахуємо за допомогою відомих функціоналів Г. С. Писаренка:

$$\left. \begin{aligned} f_{10}(y) &= \pm \frac{E\nu_{np} A^n}{n} \left[ (1 \pm \cos \tau)^n - 2^{n-1} \right] \\ f_{20}(\theta) &= \pm \frac{G\eta_{np} B^k}{k} \left[ (1 \pm \cos \tau)^n - 2^{k-1} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.9.13)$$

$$\nu_{np} = \nu \int_0^l \left( \frac{d^2 Y}{dz^2} \right)^{n+1} dz \iint_{(F)} \xi^{n+1} dF,$$

$$\eta_{np} = \eta \int_0^l \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^{k+1} dz \iint_{(F)} r^{k+1} dF,$$

$n, \nu, k, \eta$  - Геометричні параметри петлі гістерезису при згині та крученні стрижня;  $Y, \Phi$  - функція прогинів і функція кутів закручування стрижня;  $\xi$  - відстань від площадки  $dF$  до нейтральної осі поперечного перерізу;  $r$  - відстань від площадки  $dF$  до центра ваги перерізу;  $A$  - амплітуда поперечних переміщень;  $B$  - амплітуда крутильних переміщень.

Відомо, що для сталених стрижнів  $n = k = 2, 0$ . Тоді у випадку круглого стержня останні з формул (4.9.10) набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A^2 \left[ \frac{9\pi E d^5}{80l^5} \nu + |\beta| \beta^2 \frac{G\pi^2 d^5}{80l^2} \eta \right] \\ x_2 &= A^2 \left[ \frac{3E d^5}{20l^5} \nu + |\beta| \beta^2 \frac{G\pi d^5}{60l^2} \eta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.9.14)$$

Розглянемо приклад на побудову резонансних кривих при таких вихідних даних:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}; m = 431 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{см}}$$

$$I = 463 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2; x_c = 2 \text{ см}; l = 10 \text{ см}; d = 1 \text{ см}; P = 0,0366 \text{ кг};$$

$$n = k = 2; \nu = 32, 2; \eta = 14, 9; p = \omega.$$

З рівняння (4.9.4) знаходимо частоти двох типів поперечно-крутильних коливань:

$$\omega_1 = 757 \frac{1}{c}, \omega_2 = 1793 \frac{1}{c}.$$

Для першого типу коливань  $\omega_1 = 757 \left( \frac{1}{c} \right)$  знаходимо з системи (4.9.3)

відношення амплітуд  $\beta = \frac{B}{A} = 0,0952$ .

Рівняння резонансних кривих (4.9.12), (4.9.5) поперечно-крутильних коливань першого типу будуть такі:

$$\left( \frac{p}{\omega_1} \right)^2 = 1 - \frac{1,192 \cdot 10^{-4}}{A} (\cos \psi - 2,35 \sin \psi), \quad (4.9.15)$$

$$\sin \psi = -745,8 A^2,$$

$$\frac{B}{A} = 0,0952.$$

Ці криві показані на рис.4.9.2

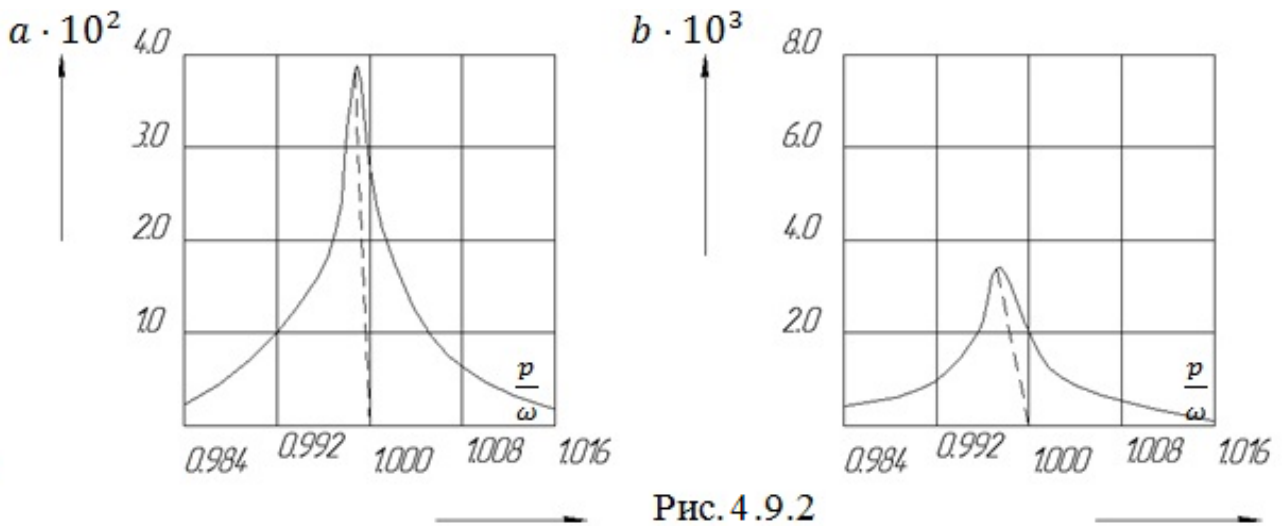


Рис. 4.9.2

#### 4.10. Експериментальна перевірка застосування теорій нелінійно-гістерезисного тіла для врахування розсіяння енергії при механічних коливаннях

Круглий консольний зразок з масивним вантажем, що ексцентрично закріплений на вільному кінці, здійснює затухаючі коливання. Маса вантажу  $m$  значно більша за масу зразка. Тому остання не враховується. При неспівпадінні центра ваги вантажу з віссю зразка вантаж в основному буде мати дві степені вільності.

Переміщуючись з прискоренням, наприклад, вниз по осі  $y$ , вантаж буде в той же час закручуватись за годинникову стрілку (перший тип поперечно-крутильних коливань) чи проти годинникової стрілки (другий тип поперечно-крутильних коливань) навколо осі.

Переміщуючись вгору при першому типі коливань вантаж закручується проти годинникової стрілки (рис.4.10.1), а при другому – за годинникову стрілку (рис.4.10.2).

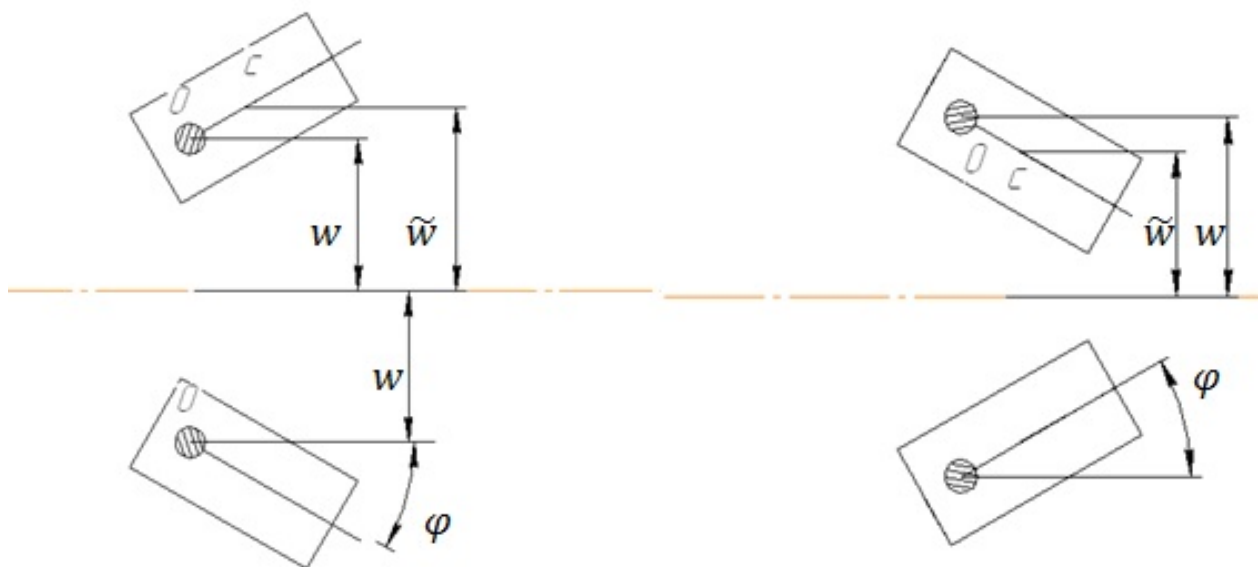


Рис.4.10.1 Перший тип згинно-крутильних коливань

Рис.4.10.2 Другий тип згинно-крутильних коливань

При цьому виникають лінійні сили інерції вантажу  $P = -m\ddot{w} - m\chi_c \ddot{\phi}$  (перший доданок – сила інерції від переміщення вантажу по осі  $y$ , друге – дотична сила інерції від обертання вантажу на кут  $\phi$ ), а також моменти відносно осі  $oz$  сил інерції вантажу

$M_0 = -J_m \ddot{\phi} - m\chi_c \ddot{w}$ . Від цих навантажень в довільному перерізі зразка виникнуть внутрішні зусилля (напруження).

Використовуючи представлення про волокна та гіпотезу плоских перетинів, врахуємо передбачені лінійною теорією напруження:

$$\sigma_{33} = 3K \left[ 1 - \varepsilon (b_k + \beta_k I^k) \varepsilon_0^{k-1} \right] \varepsilon_0 + 2G \left[ 1 - \varepsilon (d_k + \delta_k I^k) \gamma_u^{k-1} \right] (\varepsilon_{33} - \varepsilon_0), \quad (4.10.1)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{z\phi} = G \left[ 1 - \varepsilon (d_k + \delta_k I^k) \gamma_u^{k-1} \right] 2\varepsilon_{12}, \quad (4.10.2)$$

де  $\sigma_{33}$  - нормальне напруження згину;

$\sigma_{12}$  - дотичне крутильне напруження в поперечному перерізі зразка.

Інші компоненти тензора напружень дорівнюють нулю.

Малий параметр  $\varepsilon$  в (4.10.1), (4.10.2) вказує на малість відповідних відхилень від закону Гука.

Середнє напруження по визначенню та по закону стану відповідно дорівнює:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{33}}{3} = 3K \left[ 1 - \varepsilon (b_k + \beta_k I^k) \varepsilon_0^{k-1} \right] \varepsilon_0,$$

звідки знаходимо:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{33}}{9K} \left[ 1 - \varepsilon (b_k + \beta_k I^k) \varepsilon_0^{k-1} \right].$$

Підстановка цього співвідношення в (4.10.1) дає:

$$\sigma_{33} = \frac{9\tilde{K}_0 \tilde{G}_0}{3\tilde{K}_0 + \tilde{G}_0}. \quad (4.10.3)$$

Розкладаючи вираз (4.10.3) в ряд Тейлора по степеням  $\varepsilon(b_k + \beta_k I^k)\varepsilon_0^{k-1}$  та  $\varepsilon(d_k + \delta_k I^k)\gamma_u^{k-1}$  в околі нуля, враховуючи при цьому відомі з теорії пружності співвідношення

$$\frac{9KG}{3K + G} = E; \quad 3K + G = \frac{3E}{2(1-2\mu)(1+\mu)},$$

отримаємо:

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33} - \varepsilon E \left[ \frac{1-2\mu}{3}(b_k + \beta_k I^k)\varepsilon_0^{k-1} + \frac{2(1+\mu)}{3}(d_k + \delta_k I^k)\gamma_u^{k-1} \right] \varepsilon_{33} + \varepsilon^2(..). \quad (4.10.4)$$

Тензор деформації буде мати наступні компоненти:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon y = \varepsilon \rho \sin \nu, \quad (4.10.5)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\tilde{\mu} \varepsilon_{33}, \quad (4.10.6)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\rho \varphi}{2l} = \rho \frac{\theta}{2},$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0. \quad (4.10.7)$$

де  $\varkappa_0$  - кривизна осьової лінії зразка на закріпленому кінці,  $\rho, \nu, z$  - циліндричні координати точок перерізу зразка радіуса  $r, \varphi$  - повний кут закручування,  $y$  - відстань від нейтральної осі перерізу до розглядуваного шара волокон,  $l$  - довжина зразка,  $\tilde{\mu}$  - змінний коефіцієнт Пуасона з врахуванням нелінійно-гістерезисної поведінки матеріалу.

Використовуючи (4.10.5) - (4.10.7) та асимптотичне представлення коефіцієнта Пуасона  $\tilde{\mu}$ , знайдемо середню деформацію та інтенсивність деформації зсуву:

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\tilde{\mu}}{3} \varepsilon_{33} = \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_{33} + \varepsilon \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{9} \left\{ \begin{aligned} & (b_k + \beta_k I^k) \left( \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_{11} \right)^{k-1} - \\ & - (d_k + \delta_k I^k) \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} (1+\mu) \varepsilon_{11} \right]^{k-1} \end{aligned} \right\} + \varepsilon^2(...), \quad (4.10.8)$$

$$\gamma_u = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(1 + \mu\right)^2 \varepsilon_{33}^2 + 3\varepsilon_{12}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(1 + \mu)^2 \varepsilon_{33}^2 + 3\varepsilon_{12}^2} + \varepsilon(\dots). \quad (4.10.9)$$

Підстановка співвідношень (4.10.8), (4.10.9) в (4.10.2), (4.10.4) дає залежності між напруженнями та деформаціями в зразку при зв'язаних згинно-крутильних коливаннях. Зокрема, при  $k = 3$  ці залежності з точністю до мають вигляд:

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33} \left[ \begin{aligned} &1 - \varepsilon(b_3 + \beta_3 I^3) \left( \frac{1 - 2\mu}{3} \right)^3 \varepsilon_{33}^2 - \\ & - \varepsilon(d_3 + \delta_3 I^3) \frac{2(1 + \mu)}{3} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \left[ (1 + \mu)^2 \varepsilon_{33}^2 + 3\varepsilon_{12}^2 \right] \end{aligned} \right], \quad (4.10.10)$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \left[ 1 - \varepsilon(d_3 + \delta_3 I^3) \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \left[ (1 + \mu)^2 \varepsilon_{33}^2 + 3\varepsilon_{12}^2 \right] \right]. \quad (4.10.11)$$

Інколи замість (4.10.10) та (4.10.11) використовують рівняння стану суто згинних і суто крутильних коливань без врахування їх взаємного впливу (без переходу до інтенсивності деформацій):

$$\tilde{\sigma}_{33} = E \left[ 1 - \varepsilon(a_3 + \alpha_3 I^3) \varepsilon_{33}^2 \right] \varepsilon_{33}, \quad (4.10.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{12} = G \left[ 1 - \varepsilon(\tilde{d}_3 + \tilde{\delta}_3 I^3) \gamma^2 \right] \gamma. \quad (4.10.13)$$

$$(b_3 + \beta_3 I^3) \left( \frac{1 - 2\mu}{3} \right)^3 + \frac{d_3 + \delta_3 I^3}{\sqrt{2}} \left( \frac{2\sqrt{2}(1 + \mu)}{3} \right)^3 = a_3 + \alpha_3 I^3,$$

Порівняємо формули (4.10.10) та (4.10.12). Отримаємо:

$$\sigma_{33} = \tilde{\sigma}_{33} - \varepsilon \frac{16}{9} (1 + \mu) E (d_3 + \delta_3 I^3) \varepsilon_{33} \varepsilon_{12}^2. \quad (4.10.14)$$

Враховуючи, що кут зсуву  $\gamma = 2\varepsilon_{12}$ , а коефіцієнти відхилень в законах стану (4.10.11) та (4.10.13) зв'язані співвідношеннями

$$\tilde{d}_3 = d_3 \frac{2}{3}, \tilde{\delta}_3 = \delta_3 \frac{2}{3},$$

Знайдемо залежність між  $\sigma_{12}$  та  $\tilde{\sigma}_{12}$ :

$$\sigma_{12} = \tilde{\sigma}_{12} - \varepsilon \frac{16}{9} (1 + \mu) G (d_3 + \delta_3 I^3) \varepsilon_{33}^2 \varepsilon_{12}. \quad (4.10.15)$$

З формул (4.10.14), (4.10.15) слідує, що напруження при зв'язаних згинно-крутильних коливаннях (4.10.10), (4.10.11) відрізняються від тих же напружень (4.10.12), (4.10.13), але обрахованих роздільно без врахування взаємного впливу (без залучення поняття інтенсивності деформації зсуву та середнього напруження) на величини, що виражені другими доданками в правих частинах співвідношень (4.10.14), (4.10.15).

З метою полегшення виділення в диференційних рівняннях коливань членів, що виникли в результаті пов'язаності згинних та крутильних коливань, замість рівняння (4.10.10) використовуємо співвідношення (4.10.14) з врахуванням (4.10.12).

Тоді згинаючий момент в довільному перерізі зразка буде дорівнювати:

$$M = \iint_{(F)} \sigma_{33} y dF = EJ_x \kappa \left[ 1 - \varepsilon (a_3 + \alpha_3 I^3) \frac{J_x^{(3)}}{J_x} \kappa^2 - \varepsilon \frac{4}{9} (1 + \mu) (d_3 + \delta_3 I^3) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_x} \theta^2 \right]. \quad (4.10.16)$$

Тут використані формули (4.10.5), (4.10.7) та вирази відстані  $y$  в полярних координатах:  $y = \rho \sin \nu$ .

Геометричні характеристики, що входять в співвідношення (4.10.16). В даному випадку для зразка круглого перерізу вони дорівнюють:

$$J_x^{(1)} = J_x = \frac{\pi r^4}{4}, J_x^{(3)} = \frac{\pi r^6}{8}, \quad (4.10.17)$$

$$J_{px}^{(3)} = \iint_{(F)} \sigma_{12} y^2 \rho^2 dF = \frac{\pi r^6}{6}. \quad (4.10.18)$$

Крутний момент в довільному перерізі обчислюємо, використовуючи (4.10.11), де легко виділяється член, що вказує на зв'язність коливань.

В результаті при врахуванні (4.10.5), (4.10.7) отримаємо:

$$M_{кр.} = \iint_{(F)} \sigma_{12} \rho dF = GJ_p \theta - \varepsilon \frac{2}{3} GJ_p^3 (d_3 + \delta_3 I^3) \theta^3 - \varepsilon \frac{8}{9} (1 + \mu) GJ_{px}^{(3)} (d_3 + \delta_3 I^3) \kappa^2 \theta, \quad (4.10.19)$$

де  $J_{px}^{(3)}$  дорівнює (4.10.18), а  $J_p^3$  дорівнює:  $J_p^3 = \frac{\pi r^6}{3}$ . (4.10.20)

Вирішуючи рівняння (4.10.16) та (4.10.17) відносно  $\kappa$  та  $\theta$  згідно з методикою, в якій використовують теореми про відхилення, отримаємо відповідно:

$$\kappa = \frac{M}{EJ_x} \left[ 1 + \varepsilon (A_3 + \mathcal{A}_3 \mathcal{J}^3) \frac{J_x^{(3)}}{J_x} \left( \frac{M}{EJ_x} \right)^2 + \varepsilon (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{4}{9} (1 + \mu) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_x} \left( \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \right)^2 \right], \quad (4.10.21)$$

$$\theta = \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \left[ 1 + \varepsilon \frac{2}{3} (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{J_p^{(3)}}{J_p} \left( \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \right)^2 + \varepsilon \frac{8}{9} (1 + \mu) (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_x} \left( \frac{M}{EJ_x} \right)^2 \right], \quad (4.10.22)$$

Де коефіцієнти пов'язані з відповідними коефіцієнтами рівнянь (4.10.16), (4.10.19) наступними співвідношеннями:

$$(A_3 + \mathcal{A}_3 \mathcal{J}^3) \left( \frac{M}{EJ_x} \right)^2 = (a_3 + \alpha_3 I^3) \kappa^3, (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{M}{EJ_x} \left( \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \right)^2 = J_p^3 (d_3 + \delta_3 I^3) \kappa \theta^2, \\ (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \left( \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \right)^2 = (d_3 + \delta_3 I^3) \theta^3, (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \left( \frac{M}{EJ_x} \right)^2 = (d_3 + \delta_3 I^3) \theta \kappa^2.$$

Проінтегруємо рівняння (4.10.21), приймаємо  $\kappa = \ddot{y}$ ,  $M = Pz$  та враховуючи граничні умови консольного закріплення стрижня ( $\dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, z = 0$ ). В результаті отримаємо рівняння зігнутої осі балки консольного нелінійно-гістерезисного стрижня під дією зосередженої сили  $P$ , ексцентрично розташованої на кінці стрижня. Із рівняння отримаємо, зокрема, прогин  $w$  вільного кінця стрижня:

$$w = \frac{P}{C_w} \left[ 1 + \varepsilon (A_3 + \mathcal{A}_3 \mathcal{J}^3) \frac{27}{5l^4} \frac{J_x^{(3)}}{J_x} \left( \frac{P}{C_w} \right)^2 + \varepsilon (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{4}{9} (1 + \mu) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_x} \left( \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \right)^2 \right], \quad (4.10.23)$$



$$C_w = \frac{3EJ_x}{l^3}.$$

Звернення формули (4.10.23) за допомогою теореми про відхилення від закону Гука дає вираз для зосередженої сили:

$$P = C_w w \left[ 1 - \varepsilon (a_3 + \alpha_3 I^3) \frac{27}{5l^4} \frac{J_x^{(3)}}{J_x} w^2 - \varepsilon (d_3 + \delta_3 I^3) \frac{4}{9} (1 + \mu) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_x} \left( \frac{\varphi}{l} \right)^2 \right]. \quad (4.10.24)$$

Розглядаючи вираз (4.10.24), переконаємося, що коефіцієнт жорсткості  $\frac{P}{w}$  у випадку ексцентричного розташування сили на кінці нелінійно-гістерезисної балки буде залежати нелінійно не тільки від прогину  $w$ , але й від кута повороту  $\varphi$ . Помножимо (4.10.24) на  $z$  і результат підставимо замість  $M$  в (4.10.21), отримаємо з врахуванням рівності  $C_w = \frac{3EJ_x}{l^3}$  наступний вираз для кривизни:

$$\kappa = \frac{3w}{l^3} z + \varepsilon(\dots).$$

Використовуючи співвідношення  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$  (4.10.16), (4.10.25) і приймаючи  $M_{кр.} = M_0$  ( $M_0$  - момент на вільному кінці стрижня), проінтегруємо рівняння (4.10.22). За допомогою граничної умови консольного закріплення ( $z = l, \varphi = 0$ ) знайдемо постійну інтегрування, а після обрахуємо кут повороту  $\varphi$  кінцевого перерізу стрижня (вантаж):

$$\varphi = \frac{M_0}{C_\varphi} \left[ 1 + \varepsilon \frac{2}{3} (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{J_p^{(3)}}{J_p} \frac{1}{l^2} \left( \frac{M_0}{C_\varphi} \right)^2 + \varepsilon \frac{8}{3} (1 + \mu) (D_3 + \Delta_3 \mathcal{J}^3) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_p} \frac{1}{l^4} w^2 \right]. \quad (4.10.26)$$

$$M_0 = C_\varphi \varphi \left[ 1 - \varepsilon \frac{2}{3} \frac{J_p^{(3)}}{J_p} (d_3 + \delta_3 I^3) \left( \frac{\varphi}{l} \right)^2 - \varepsilon \frac{8}{3} (1 + \mu) \frac{J_{px}^{(3)}}{J_p} (d_3 + \delta_3 I^3) \frac{1}{l^4} w^2 \right], \quad (4.10.27)$$

де  $C_\varphi = \frac{GJ_p}{l}$  - крутильна жорсткість консольного пружного стрижня ( $\varepsilon = 0$ ).

Як видно з формули (4.10.27), коефіцієнт  $\frac{M_0}{\varphi}$  крутильної жорсткості нелінійно-гістерезисного стрижня ( $\varepsilon \neq 0$ ) буде нелінійно залежати від кутового переміщення  $\varphi$ , а у випадку що розглядається ексцентричного положення кінцевого вантажу ( $J_{px}^{(3)} \neq 0$ ) крім того і від лінійного переміщення вантажу  $w$ . Ліві частини співвідношень (4.10.24) та (4.10.27) є реакціями нелінійно-гістерезисного стрижня на згинно-крутильні переміщення вантажу (внутрішніми зусиллями, приведеними до кінцевого перетину).

Підставляючи в праві частини вказаних співвідношень по принципу Д'Аламбера сили інерції від згинно-крутильних коливань вантажу

$$P = -m\ddot{w} - mx_c\ddot{\varphi},$$

$$M_0 = -J_m\ddot{\varphi} - mx_c\ddot{w},$$

і враховуючи рівності  $C_w = \frac{3EJ_x}{l^3}$ ,  $C_\varphi = \frac{GJ_p}{l}$ , отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{w} + mx_c\ddot{\varphi} + C_w w &= \varepsilon \frac{81}{5} \frac{EJ_x^{(3)}}{l^7} (a_3 + \alpha_3 I^3) w^3 + \varepsilon \frac{4}{3} (1 + \mu) \frac{EJ_{px}^{(3)}}{l^5} (d_3 + \delta_3 I^3) w \varphi^2, \\ J_m\ddot{\varphi} + mx_c\ddot{w} + C_\varphi \varphi &= \varepsilon \frac{2}{3} \frac{GJ_p^{(3)}}{l^3} (d_3 + \delta_3 I^3) \varphi^3 + \varepsilon \frac{8}{3} (1 + \mu) \frac{GJ_{px}^{(3)}}{l^5} (d_3 + \delta_3 I^3) w^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.28)$$

Це рівняння вільних згинно-крутильних коливань вантажу ексцентрично закріпленого на кінці консольно круглого стрижня (зразка), з врахуванням нелінійно-гістерезисної поведінки матеріалу стрижня.

Останні члени рівняння (4.10.28), пропорційні полярно-осьовому моменту інерції третього порядку  $J_{px}^{(3)}$ , показують, що зв'язок між лінійним переміщенням  $w$  вантажу і кутовим  $\varphi$  здійснюється не тільки через інерційні члени лівої частини рівнянь, але й через відхилення від закону Гука (члени правої частини), точніше через координати  $w, \varphi$ .

При  $\varepsilon = 0$  з (4.10.28) отримуємо не збуджену систему рівнянь вільних коливань вантажу без врахування відхилень від закону Гука:

$$m\ddot{w} + mx_c\ddot{\varphi} + C_w w = 0, \quad (4.10.29)$$

$$J_m\ddot{\varphi} + mx_c\ddot{w} + C_\varphi \varphi = 0, \quad (4.10.30)$$

( $x_c$  - відстань між центром ваги вантажу та віссю стрижня).

Система (4.10.29), (4.10.30) може бути переписана інакше:

$$\ddot{w} + x_c\ddot{\varphi} + \omega_w^2 w = 0, \quad (4.10.31)$$

$$J_m\ddot{\varphi} + mx_c\ddot{w} + J_m\omega_\varphi^2 \varphi = 0, \quad (4.10.32)$$

$$\omega_w^2 = \frac{3EJ_x}{ml^3} = \frac{C_w}{m}, \quad (4.10.33)$$

$$\omega_\varphi^2 = \frac{GJ_p}{J_m l} = \frac{C_\varphi}{J_m}, \quad (4.10.34)$$

$\omega_w$  - частота суто згинних коливань вантажу;

$\omega_\varphi$  - частота суто крутильних коливань.

Рішення системи (4.10.31), (4.10.32) шукаємо у вигляді:

$$w = a \cos(\omega t + \nu), \quad (4.10.35)$$

$$\varphi = b \cos(\omega t + \nu). \quad (4.10.36)$$

Підставляючи (4.10.35), (4.10.36) в (4.10.31), (4.10.32), отримаємо:

$$-a\omega^2 - bx_c\omega^2 + a\omega_w^2 = 0, \quad (4.10.37)$$

$$-bJ_m\omega^2 - amx_c\omega^2 + bJ_m\omega_\varphi^2 = 0. \quad (4.10.38)$$

Поскільки рівний нулю детермінант системи, а саме

$$\begin{vmatrix} \omega_w^2 - \omega^2 & -\omega^2 x_c \\ -mx_c \omega^2 & J_m(\omega_\varphi^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.10.39)$$

Звідки знаходимо два додатних корені: частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$ .

При цьому:

$$\omega_1^2 < \omega_w^2, \quad (4.10.40)$$

$$\omega_2^2 > \omega_\varphi^2. \quad (4.10.41)$$

При згинно-крутильних коливаннях першого типу (з частотою  $\omega_1$ ), як видно з рівняння (4.10.37), переміщення  $w$  (прогин) та кут закручування  $\varphi$  мають однакові знаки (рис. 4.10.1), так як  $\omega_1^2 < \omega_w^2$ . Поперечні коливання посилюються супроводжуваними їх крутильними (оцінюємо загальне переміщення центра ваги вантажу).

При згинно-крутильних коливаннях другого типу (з частотою  $\omega_2$ ), як видно з рівняння (4.10.38), переміщення  $w$  та  $\varphi$  мають протилежні знаки (рис.4.10.2), так як  $\omega_2^2 > \omega_\varphi^2$ . Згинні коливання послаблюються крутильними.

Можна сказати, що  $\omega_1$  - частота згинно-крутильних коливань з переважанням згину,  $\omega_2$  - частота згинно-крутильних коливань переважанням кручення. З рівнянь (4.10.37), (4.10.38) згідно з обрахованою частотою  $\omega_1$  чи  $\omega_2$  знаходяться нормальні форми коливань (відношення амплітуд  $\beta = \frac{b}{a}$ ). Для першого типу коливань  $\omega_1$  це відношення додатнє  $\beta^{(1)} > 0$ , для другого типу  $\omega_2$  - від'ємне  $\beta^{(2)} < 0$ .

Рішення збудженої системи (4.10.28), відповідне частотному режиму, наприклад, з частотою  $\omega_2$ , буде наступним:

$$w = a \cos \omega_2 t + \nu = a \cos \psi, \quad (4.10.42)$$

$$\varphi = \beta^{(2)} a \cos \omega_2 t + \nu = b \cos \psi, \quad (4.10.43)$$

Де амплітуда  $a$  та повна фаза  $\psi$  визначаються з рівнянь першого наближення, але з приведеними коефіцієнтами.

Враховуючи, що в даному випадку  $\beta_1^{(2)} = 0, \beta_2^{(2)} = \beta^{(2)} = \beta$ , знайдемо приведену масу та приведену функцію нелінійно-гістерезисної поведінки матеріалу:

$$M = m + 2m\chi_c\beta + J_m\beta^2, \quad (4.10.44)$$

$$f_0 = f_{0w} + \beta f_{0\varphi} = a^3 (\mathcal{P}_3 \cos^3 \psi + \mathcal{Q}_3 \sin^3 \psi), \quad (4.10.45)$$

де  $f_{ow}$  - права частина першого рівняння (4.10.28) після підстановки в нього виду рішень (4.10.35),  $f_{op}$  - права частина другого рівняння (4.10.28) після підстановки в нього (4.10.36). Приведенні коефіцієнт  $\mathcal{P}_3$  синфазних та коефіцієнт  $Q_3$  гістерезисних відхилень дорівнюють:

$$\mathcal{P}_3 = \frac{81 EJ^{(3)}_x}{5 l^7} a_3 + d_3 \left[ \frac{4 EJ^{(3)}_{px}}{3 l^5} (1 + \mu) \beta^2 + \frac{2 GJ^{(3)}_p}{3 l^3} \beta^4 + \frac{8}{3} (1 + \mu) \frac{GJ^{(3)}_{px}}{l^5} \beta^2 \right], \quad (4.10.46)$$

$$Q_3 = \frac{81 EJ^{(3)}_x}{5 l^7} \alpha_3 + \delta_3 \left[ \frac{4 EJ^{(3)}_{px}}{3 l^5} (1 + \mu) \beta^2 + \frac{2 GJ^{(3)}_p}{3 l^3} \beta^4 + \frac{8}{3} (1 + \mu) \frac{GJ^{(3)}_{px}}{l^5} \beta^2 \right]. \quad (4.10.47)$$

З врахуванням знайдених приведених параметрів рівняння першого наближення приймуть вид:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{3}{8} \frac{Q_3}{M \omega_2} a^3, \quad (4.10.48)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_2 - \frac{3}{8} \frac{\mathcal{P}_3}{M \omega_2} a^2, \quad (4.10.49)$$

Звідки знайдемо вираз для логарифмічного декременту згинно-крутильних коливань:

$$\delta = \frac{3}{4} \pi \frac{Q_3}{M \omega_2^2} a^2. \quad (4.10.50)$$

З (4.10.49) отримуємо формулу для частоти згинно-крутильних коливань:

$$\omega_e = \omega_2 - \frac{3}{8} \frac{\mathcal{P}_3}{M \omega_2} a^2. \quad (4.10.51)$$

При відсутності інерційного ( $x_c = 0$ ) та координатного ( $J^{(3)}_{px} = 0$ ) зв'язків система (4.10.28) розпадається на два незалежних рівняння. Рішення другого з них отримуємо з загального рішення, при  $k=3$ , що відповідає розглядуваному випадку.

Логарифмічний декремент роздільних крутильних коливань знайдемо при  $k=3$ .

Результат наступний:

$$\delta_{кр.} = \frac{\pi}{3} \delta_3 \left( \frac{br}{l} \right)^2. \quad (4.10.52)$$

Рішення першого рівняння (рівняння роздільних згинних коливань вантажу) отримаємо аналогічно.

Зокрема для логарифмічного декременту отримаємо вираз:

$$\delta_{зг.} = \alpha_3 \frac{81}{40} \frac{\pi^2 r^2}{l^4} a^2. \quad (4.10.53)$$

Для експериментальної перевірки застосовності теорії нелінійно-гістерезисного тіла при складному напруженому стані була виготовлена серія однакових циліндричних зразків (з різних матеріалів) довжиною  $l = 10$  см та діаметром  $2r = 1$  см. Константи, наприклад, сталейних зразків:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \mu = 0,28.$$

$$\text{Вантаж має вагу } m = 431 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{см}}, \text{ момент інерції } J_m = 293 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\text{при } x_c = 0 \text{ та } J_m = 403 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{с}^2} \text{ при } x_c = 1,6 \text{ см}.$$

Вантаж розміри якого показані на рисунку, закріплюється симетрично (рис.4.10.3) чи ексцентрично (рис.4.10.4).

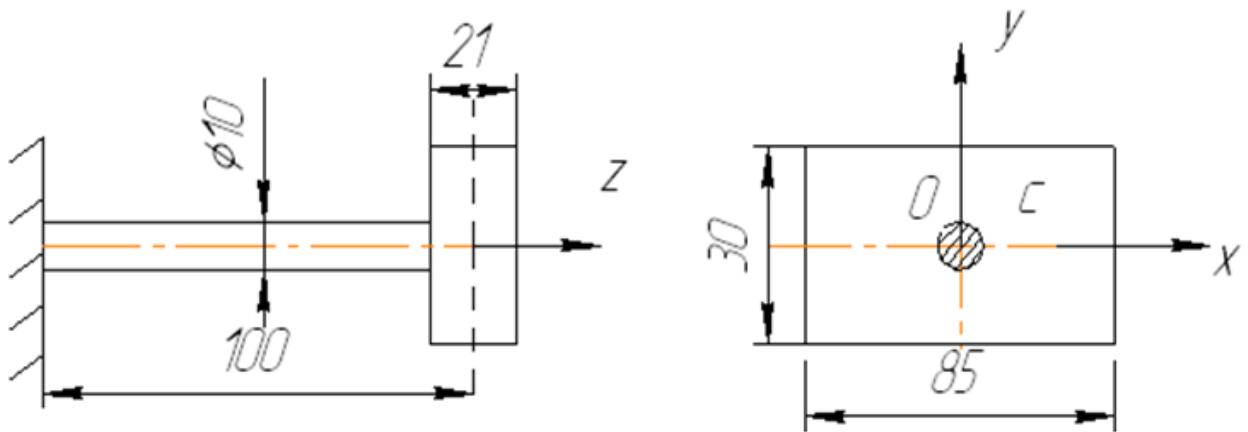


Рис.4.10.3 Зразок з вантажем на кінці

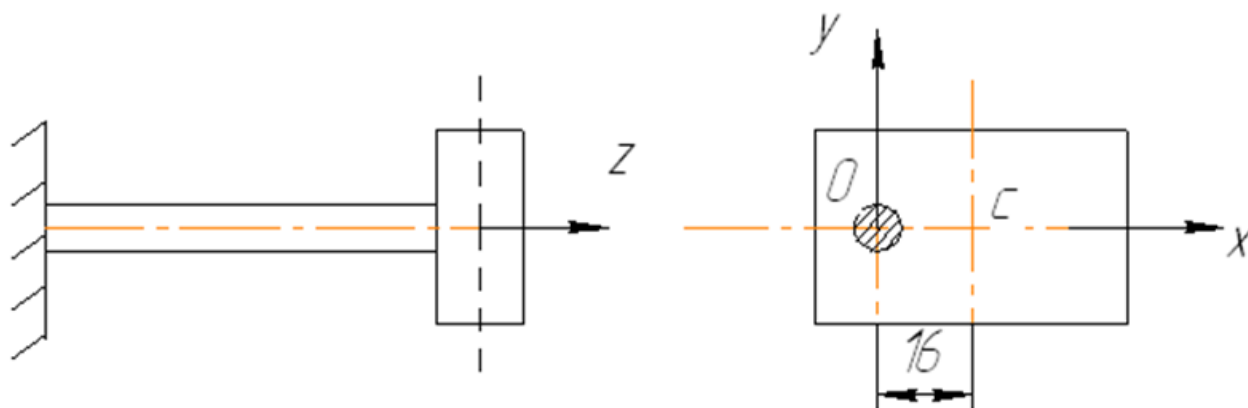


Рис.4.10.4 Зразок з ексцентрично розташованим вантажем на кінці

В першому випадку вантаж міг здійснювати роздільні згинні або крутильні коливання, в другому випадку – два типи згинно-крутильних коливань. Досліджуваний зразок закріплювався в плиті за допомогою спеціального зажиму. Електромагнітом збуджувались резонансні коливання деякого типу. Амплітуди доводилися до розрахункових значень, вказаних в табл.1.

Після цього за допомогою контактора осцилографа збудження вимкалося і зразок здійснював вільні затухаючі коливання. Запис вібропрограм проводилася тіньовим методом за допомогою фотооптичного датчика на осцилографі. Обробка отриманих вібропрограм давала значення логарифмічного декременту затухання.

Знайдені значення логарифмічного декременту при роздільних згинних ( $\delta_{зг.} = 6,17a^2$ ) та крутильних ( $\delta_{кр.} = 26b^2$ ) затухаючих коливаннях апроксимувалась відповідно до формул (4.10.53), (4.10.52), при цьому отримано:

$$\alpha_3 = 1,23 \cdot 10^4, \delta_3 = 0,989 \cdot 10^4.$$

З рівняння (4.10.39) визначені частоти згинно-крутильних коливань:

$$\omega_1 = 780 \frac{1}{с}, \omega_2 = 1725 \frac{1}{с}.$$

Відношення амплітуди кутового до амплітуди лінійного переміщень вантажу для другого типу коливань ( $\omega_2 = 1725$ ) згідно (4.10.37) дорівнює:

$$\beta = \frac{b}{a} = 0,49 \frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

Геометричні характеристики круглого зразка обчислюємо за формулами (4.10.17), (4.10.18), (4.10.20):

$$J_x = 0,049 \text{см}^4; J_p^{(1)} = J_p = 0,098 \text{см}^4.$$

$$J_x^{(3)} = 0,00615 \text{см}^6; J_p^{(3)} = 0,0164 \text{см}^6;$$

$$J_{px}^{(3)} = 0,0082 \text{см}^6.$$

Зведені характеристики (4.10.44) та (4.10.47) дорівнюють:

$$M = 711 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{см}},$$

$$Q_3 = 6312 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}.$$

Тоді згідно (4.10.50) логарифмічний декремент у випадку другого типу згинно-крутильних коливань прийме вид:

$$\delta = 7,00 a^2.$$

Йому відповідає експериментальне значення:

$$\delta = 7,31 a^2.$$

Розходження між експериментальним та теоретичним значенням при однакових амплітудах коливань дорівнює близько 4,2%.

Якщо знехтувати в (4.10.47) членами з  $J_{px}^{(3)}$ , що рівнозначно використанню рівнянь стану (4.10.12), (4.10.13) замість (4.10.10), (4.10.11), то декремент виразиться формулою:

$$\delta = 5,61 a^2.$$

Розходження з експериментом в останньому випадку збільшиться (близько 23%).

Таким чином, теорія нелінійно-гістерезисного тіла досить задовільно описує поведінку матеріалу при механічних коливаннях.



Варто зазначити, що незалежно від виду дії (кутової чи лінійної) на вантаж, в системі виникали коливання, що відповідають даній частоті збудження (табл.4.10.1).

Табл.4.10.1

Зразок	Частота (Гц)		Вид коливань	a, См.	b, Рад.	$\sigma_{\max}$	$\tau_{\max}$
	Розрах.	Експер.					
<b>№1</b> $x_c = 0$	131	134	Згинні	0,05	0	1470	0
	223	227	Крутильні	0	0,0225	0	785
<b>№2</b> $x_c = 1,6\text{см}$	124	128	Згинно-крутильні (1-й тип)	0,045	0,002	1350	160
	276	314	Згинно-крутильні (2-й тип)	0,045	0,0225	1350	900

Виникнення в експериментальній системі з двома степенями вільності коливань з одною частотою та загальним декрементом затухання підтверджує принцип одночасності Боголюбова М. М., введений в теорію коливань з апіорних міркувань.

Покажемо, що побудова асимптотичним методом на основі принципу одночасності рішення відповідає поняттю про логарифмічний декремент як про питома розсіяння енергії.

Для цього спочатку розглянемо праву частину рівняння (4.10.48). Вона пропорційна логарифмічному декременту (4.10.50).

З (4.10.37) та (4.10.38) отримаємо вираз для квадрату частоти сумісних коливань системи з врахуванням визначень (4.10.33), (4.10.34).

$$\omega^2 = \frac{a\omega_w^2}{a + bx_c} = \frac{C_w a}{m(a + bx_c)}, \quad (4.10.54)$$

$$\omega^2 = \frac{bJ_m \omega_\phi^2}{mx_c a + J_m b} = \frac{C_\phi b}{mx_c a + J_m b}. \quad (3.10.55)$$

Знаменник в виразі (4.10.50) з врахуванням (4.10.44) та (4.10.54) змінимо наступним чином:

$$M \omega^2 a = (m + 2mx_c \beta + J_m \beta^2) \frac{C_w a^2}{m(a + bx_c)} = C_w a + \frac{C_w a^2 (mx_c + \beta J_m)}{m(a + bx_c)}. \quad (4.10.56)$$

Враховуючи, що ліві частини (4.10.54) та (4.10.55) при одно частотному режимі що розглядається тотожні одне одному, прирівнюємо один до одного і праві частини. В результаті знайдемо:

$$\frac{C_w a (mx_c + J_m)}{m(a + bx_c)} = C_\phi b.$$

Використовуючи останнє співвідношення перепишемо рівність (4.10.56) інакше:

$$M \omega^2 a = C_w a + C_\phi b \beta. \quad (4.10.57)$$

Множення обох частин на  $a$  дає:

$$M \omega^2 a^2 = C_w a^2 + C_\phi b^2. \quad (4.10.58)$$

А це є амплітудним значенням подвоєної потенційної енергії, до того ж перший доданок дає енергію від лінійного переміщення, а другий – від кутового.

Що ж стосується чисельника в формулі (4.10.50)  $\frac{3}{4} \pi Q_3 a^2$ , то він отриманий у відповідності до низки формул (4.10.45), так:

$$\frac{3}{4} \pi Q_3 a^3 = \oint f_{0w} \sin \psi d\psi + \oint f_{0\phi} \beta \sin \psi d\psi.$$

Після множення на  $a$  остання рівність перепишеться з врахуванням (4.10.42), (4.10.43) наступним чином:

$$\frac{3}{4} \pi Q_3 a^4 = \oint f_{0w} dw + \oint f_{0\phi} d\phi.$$

А це є сума робіт, що затрачені на незворотню деформацію (перший доданок – на згинну, другий – на крутильну).

Отже, права частина рівняння першого наближення (4.10.48) є відношення розсіяної енергії системи по всім степеням вільності в одночастотном режимі коливань до амплітудного значення сумарної потенційної енергії, помноженого на  $\frac{\omega a}{2\pi}$ .

Аналогічним чином показується, що другий доданок правої частини рівняння (4.10.49) є відношенням реактивної роботи деформації за цикл до амплітудного значення потенційної енергії деформації. А це означає, що коефіцієнти  $A1, B1$  рівнянь першого наближення та у випадку систем рівнянь при одно частотному режимі коливань можна отримати, зіставляючи вирази звичайної роботи системи на її переміщеннях чи реактивної роботи за цикл.

#### **4.11. Вібрації при різанні металів та методи їх встановлення**

При обробці деталей на металорізальних верстатах можуть виникнути вимушені коливання та автоколивання. Ті та інші збільшують навантаження на верстат, на інструмент, привівши їх до передчасного зносу, зменшують продуктивність, а також погіршують якість оброблюваної поверхні.

Коливання у верстатах – це коливання в системах з багатьма степенями вільності. Однак, для спрощення складності система приводиться по методу Релея до системи з однією степеню вільності (з найменшими частотами).

Найбільш часто зустрічаються наступні види збуджуючих сил.

1. періодичне збудження від сусідніх верстатів, цехового та вуличного транспорту, що передається на даний верстат через ґрунт чи перекриття поверхів. Частота цього збудження невелика (декілька десятків Герц).

2. Відцентрова сила від обертаючих неврівноважених мас верстата чи оброблюваних деталей (шків, патрони і та ін.). Частота збудження у Гц дорівнює числу обертів за секунду.

3. Періодичне збудження внаслідок дефекту передач верстату чи приводу (зшивка ременів, пульсація гидкості у гідроприводі, неточність нарізки чи збирання шестерень та т.і.). Частота збудження різна, але легко підраховується.

4. Збудження від переривчастого характеру різання (послідовного включення в роботу зубців фрези, утворення та зриви «наростів», хвилястість оброблюваної поверхні і т.і.).

Дуже часто немає перерахованих вище періодичних збуджень, а коливання все не виникають, як тільки починається процес різання та припиняється при відводі різця.

Тут причиною вібрації є зміна величини сили різання, яке становиться періодичним тільки в результаті періодичної зміни товщини стружки при випадково виниклих коливаннях. Такі коливання називаються автоколиваннями. Початок теорії коливань при різання металів поклали роботи радянських вчених Н.А. Дроздова, А.І. Каширіна, А.П. Соколовського. Подальшому розвитку цієї роботи присвячені роботи І. Тлустого, В.А. Кудінова, М.Є. Ельясберга.

Тепер звісні вже наступні причини автоколивань:

1. Перемінне тертя між стружкою та передньою гранню різця, а також між оброблюваною деталлю та задньою гранню різця (теорія А.І. Каширіна).

2. Неоднозначність сили різання при поглибленні різця у метал та при відштовхненні, коли різець зустрічається з вже зміцненим шаром металу (теорія А.П. Соколовського).

3. Змінність сили різання внаслідок періодичного змінення товщини стружки при обробці хвилястої поверхні (теорія А.П. Соколовського, І. Тлустого).

4. Зв'язаність вертикальних та горизонтальних коливань вершини різця відносно оброблюваної деталі (координатний принцип Тлустого - Кудінова).

5. Запізнення (відставання) сили різання  $P_z$  і сили тертя  $P_y$  від змінення у товщини зрізу при виниклих якимось чином коливаннях (теорія, В.А. Кудінова).

Для усунення вимушених коливань, що визвано першою причиною, необхідно ізолювати верстат від ґрунту чи перекриття за допомогою спеціальних опор чи резинових килимів (останні підкладаються під залізобетонний фундамент).

Встановлення верстатів на віброізолюючих опорах (замість застосування раніш масивних залізобетонних фундаментів) скорочує крім того затрати на монтаж та перестановку верстатів, зменшують динамічні навантаження верстатів на перекриття.

Експериментальний науково-дослідний інститут метало ріжучих верстатів (ЕНІМВ) рекомендує для без фундаментальної встановлення верстатів гумовометалеві опори 08-30 і 08-31 (див. рис.4.11.1). Опора 08-31 має і гідравлічний демпфер. Одна така опора витримує навантаження 0,3 – 4,0 т.

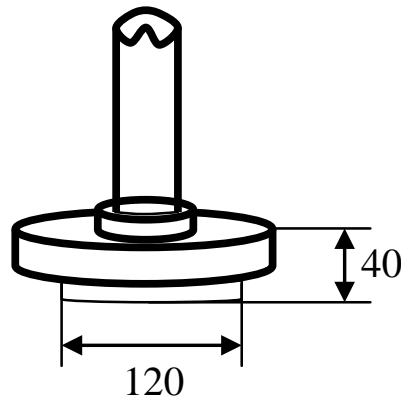


Рис. 4.11.1

Щоб усунути вимушені коливання другого виду, необхідно відбалансувати обертові частини.

Якщо усунути дефекти у передачі та приводі, то не буде вимушених коливань по третій причині.

У всіх випадках, коли у передачі не можна усунути збуджуючі сили (у тому числі четвертий вид збуджень), необхідно відбудуватися від резонансу (підвисити власну частоту системи, збільшити її жорсткість).

Для усунення можливих автоколивань необхідно підібрати визначені режими різання, засновуючись на експериментальних чи розрахункових даних.

З практики відомо, наприклад, що зі збільшенням швидкості різання інтенсивність коливань спочатку зростає, досягає максимуму при  $v = 80 \div 150$  м/хв., а потім убиває. Зі збільшенням ширини зрізу (глибина різання при поздовжньому обточуванні) інтенсивність вібрацій зростає. При збільшенні товщини стружки (подачі) інтенсивність коливань декілька зменшується.

#### **4.12 Первинні автоколювання при різанні металів (теорія А.П. Соколовського)**

При прямокутному вільному різанні (рис.4.12.1) сила різання  $P$  може бути розкладена на дві складові: горизонтальну  $P_y$  та вертикальну  $P_z$ .

Складова  $P_y$  направлена по нормалі, а  $P_z$  по дотичній до оброблюваної поверхні, експериментально встановлено, що сила різання змінюється в залежності від зміни товщини зрізу нелінійно і неоднорідно,

Останнє (неоднозначність) приводить при колюваннях до утворення петлі гістерезису (рис.4.12.2). Одному і тому ж прирощенню. “ $y$ ” товщини зрізу відповідають різні прирощення сили різання при врзанні і відштовхуванні. При врзанні різець поглиблюється у свіжий метал і тому сила різання менша. При відштовхуванні різець зустрічається з вже зміцненим металом і тому сила різання більша при однаковому прирощенні товщини зрізу. Соколовський обмежився розглядом коливань різця відносно оброблюваної деталі тільки у горизонтальному напрямку, отримавши систему з однією степеню вільності. Неоднозначність динамічної характеристики різання (зсув фаз між силою різання і переміщенням  $y$ ) виражають за допомогою членів, залежних від відношення  $\frac{\dot{y}}{v}$ .

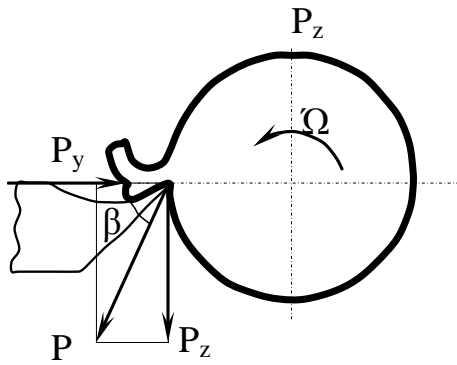


Рис. 4.12.1 Прямокутне вільне різання

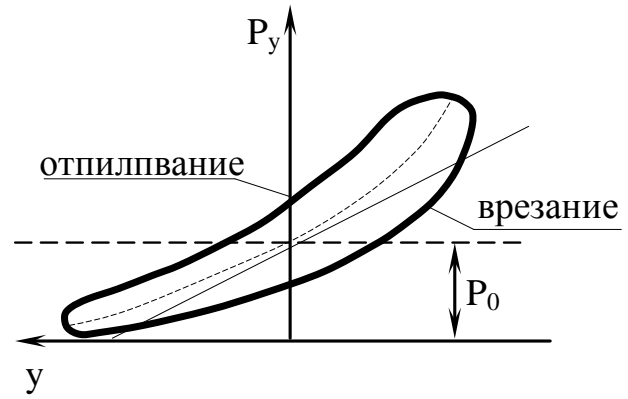


Рис.4.12.2. Утворення петлі гістерезису

Горизонтальна складова представляється як:

$$p_y = P_0 - ry + \alpha_1 B \frac{\dot{y}}{v} + \alpha_2 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2 - \alpha_3 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3, \quad (4.12.1)$$

де  $p_0$  - значення сили різання при відсутності вібрацій різця (спокійне різання),  $Y$  - відносне зміщення між різцем і деталлю по горизонталі,  $r$  - коефіцієнт жорсткості різання (коефіцієнт глибини різання), рівний  $r = kB$  ( $k$  - питома сила різання  $k = 200 \text{ кг/мм}^2$  для сталі),  $B$  - ширина зрізу в мм,  $v$  швидкість різання.

Постійні  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  визначаються за методом середніх чи найменших квадратів по експериментальній діаграмі  $P_y - y$  (рис.4.12.2).

Так як  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  позитивні, то член  $\alpha_1 B \frac{\dot{y}}{v}$  відповідає відмінному тертю, а член  $\alpha_3 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3$  позитивному тертю.

Член  $\alpha_2 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2$  при усередненні за період пропадає та відражає лише несиметричність діаграми  $P_y - y$  (рис. 4.12.3) відносно початку координат.

Якщо у (4.12.1) врахувати тільки від'ємне тертя ( $\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 = 0$ ), то петлі гістерезисну будуть мати обхід проти годинникової стрілки, а площа її буде дорівнювати вносимій в коливальну систему координат.

При врахуванні тільки позитивного тертя ( $\alpha_3 \neq 0, \alpha_1 = 0$ ) обхід петлі буде за годинниковою стрілкою, а площа її дорівнює розсіяній системою Сумарна

петля енергії за цикл. залежить від величин від'ємного та позитивного тертя і може мати обхід проти годинникової стрілки чи за годинниковою стрілкою. У приватному випадку петля вироджується у лінію (площа дорівнює нулю), що відповідає спокійному різанню.

На різець діє сила різання (4.11.1), сила пружності (відновлююча сила)  $R = P_0 + cy$ , сила в'язкого тертя  $\alpha\dot{y}$ . Додаючи згідно принципу Д'Аламбера сили інерції супорта та різця  $M\ddot{y}$ , отримаємо рівняння руху вершини різця (рис.4.12.3).

$$M\ddot{y} + P_0 + cy - P_0 + \alpha\dot{y} + \gamma y - \alpha_1 B \frac{\dot{y}}{v} - \alpha_2 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + \alpha_3 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 = 0$$

Чи рівняння коливань відносно положення при стійкому різанні:

$$M\ddot{y} + (c + \gamma)y + \alpha\dot{y} - \alpha_1 B \frac{\dot{y}}{v} - \alpha_2 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + \alpha_3 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 = 0 \quad (4.12.2)$$

де  $M$  - приведена до вершини різця маса супорту з різцем,  $C$  - коефіцієнт жорсткості різця з супортом,  $\alpha$  - коефіцієнт еквівалентного в'язкого тертя у системі супорту.

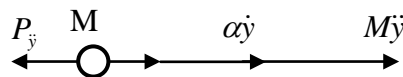


Рис.4.12.3 Сили інерції супорта та різця

Наближене рішення нелінійного рівняння (4.11.2) шукаємо у вигляді:

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) = a \sin \psi \quad (4.12.3)$$

Для визначення невідомих постійних  $a$ ,  $\omega$  застосовуємо метод енергетичного балансу і метод Галеркіна.

Застосування вказаних двох прийомів водночас відповідає методу гармонійного балансу.

Підставимо (4.12.3) у (4.12.2), а потому помножимо раз на  $a \sin \psi d\psi$  та проінтегруємо від 0 до  $2\pi$

Отримаємо відповідно:

$$-Ma^2\omega^2\pi + (c + \gamma)a^2\pi,$$



$$\begin{aligned}
& (\alpha - \frac{\alpha_1 B}{v}) \pi a^2 \omega + \alpha_3 \frac{B}{v^3} a^4 \omega^3 \frac{3}{4} \pi = 0, \\
& (\text{так як } \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{3}{4} \pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = 0), \\
& \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 \psi d\psi = 0 \\
& \omega^2 = \frac{c + \gamma}{M}, \tag{4.12.4}
\end{aligned}$$

звідки

$$a = \frac{2}{\sqrt{3\alpha_3}} \frac{v}{\omega} \sqrt{\alpha_1 - \frac{v\alpha}{B}}, \tag{4.12.5}$$

Фаза  $\varphi$  залежить від початкових умов і може бути рівною  $\varphi = 0$ .

Рівняння (4.12.4) дає частоту автоколивань різця, а формула (4.12.5) – амплітуду коливань різця у горизонтальному напрямку.

Аналізуючи формулу (4.12.5), приходимо до наступних висновків:

1. При збільшенні швидкості різання  $v$  амплітуда коливань спочатку швидко росте до значення швидкості  $v = \frac{2}{3} \frac{\alpha_1}{\alpha} B$ . Подальше збільшення швидкості приводить до зменшення амплітуди коливань: при  $\alpha_1 - \frac{a\alpha}{B} \leq 0$ , тобто при  $v \geq \frac{\alpha_1}{\alpha} B$  коливання не виникають.

2. Збільшення частоти приводить до зменшення амплітуди коливань (а частота залежить від жорсткості системи).

3. Збільшення ширини зрізу  $B$  приведе до збільшення амплітуди коливань.

4. Коефіцієнт еквівалентного в'язкого тертя  $\alpha$  чинять вплив на амплітуду коливань, зменшуючи її, причому при  $\alpha > \frac{\alpha_1}{v} B$ .

Користуючись цією умовою  $\frac{B}{v} \leq \frac{\alpha}{\alpha_1}$  можна побудувати область стійкості процесу різання (відсутні автоколивання різця, (рис.4.12.4).

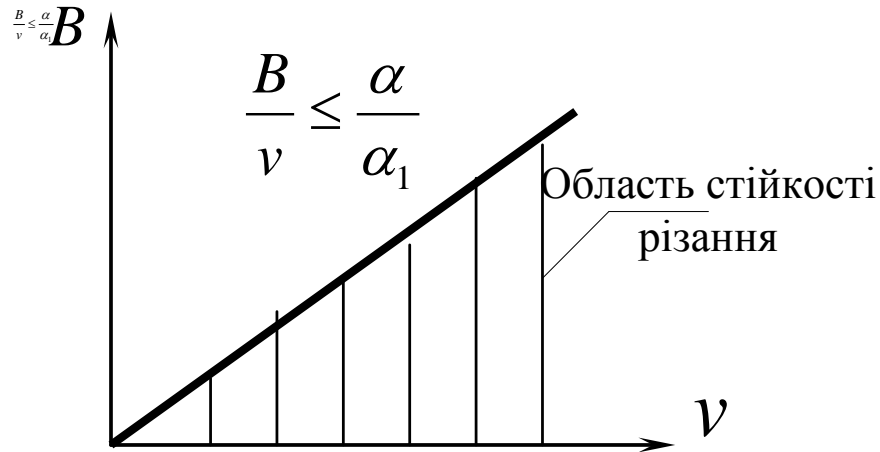


Рис.4.12.4. Область стійкості процесу різання

При швидкості різання  $v$  та ширині зрізу  $B$ , відповідних координатам заштрихованої області, не буде вібрацій різця тільки від причин, врахованих теорією Соколовського.

#### 4.13 Вторинні автоколивання (обробка поверхні, на якій маютьсЯ сліди вібрацій)

Обмежимося розглядом коливань у напрямках осі  $y$  (перпендикулярна до оброблюваної поверхні).

При проході різця по хвилястій поверхні (зі слідами вібрацій від попереднього проходу різця) миттєва зміна товщини зрізу буде дорівнювати:

$$y - y_0, \quad (4.13.1)$$

де  $y$  - відхилення різця відносно середнього положення (спокійне різання) при вторинному проході,  $y_0$  - висота гребня хвилі від попереднього проходу (рис.4.13.1).

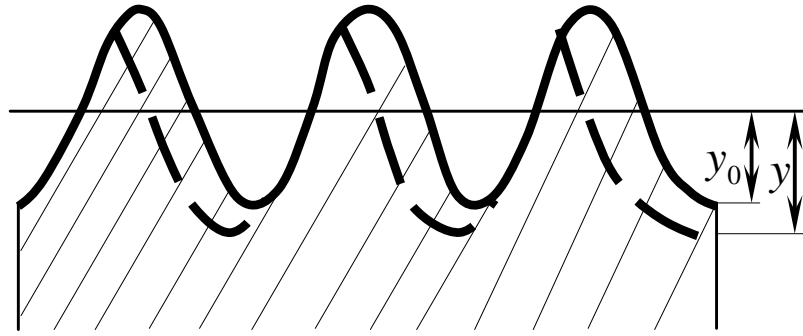


Рис.4.13.1

Враховуючи те, що сила різання змінюється за законом (4.12.1) в залежності від зміни товщини зрізу, знайдемо:

$$P_y = P_0 - \gamma(y - y_0) + \alpha_y B \frac{\dot{y}}{v} + \alpha_2 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2 - \alpha_3 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 \quad (4.13.2)$$

З (4.12.5) бачимо, що будуть діяти сили первинного збудження  $\gamma y$  і вторинного  $\gamma_0$ .

Додаючи до (4.12.5) ще сили пружності, сили тертя  $\alpha \dot{y}$  та сили інерції, отримаємо після спрощення рівняння вторинних автоколивань дорівнює:

$$M\ddot{y} + (c + \gamma)y + \alpha\dot{y} - \alpha_1 B \frac{\dot{y}}{v} - \alpha_2 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + \alpha_3 B \left( \frac{\dot{y}}{v} \right)^3 - \gamma y = 0 \quad (4.13.3)$$

В.С. Амосов отримав експериментально діаграму  $P_y - y$  (рис.4.13.2) при вторинних автоколиваннях. Площина петлі дорівнює енергії, вносимо в коливальну систему. Підраховано, що ця енергія більша, ніж при первинних автоколиваннях (коли поверхня без води). Причому при вторинних автоколиваннях 85 % енергії дає вторинне збудження.

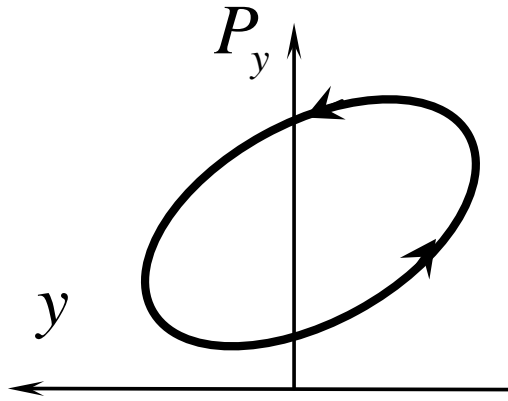


Рис.4.13.2

Коливання будуть розкочуватися до визначеної амплітуди, обмеженою тертям.

Для спрощення рахуємо після деякого числа переходів хвилястість поверхні рівномірною. Ордината поверхні змінюється відносно рівномірного середнього руху різця по гармонійному закону:

$$y_0 = a_0 \sin \omega_0 t \quad (4.13.4)$$

де  $a_0$  - амплітуда рівномірної хвилястості. Тоді з врахуванням (4.13.4) рівняння можна розглядати як рівняння вимушених коливань у якому член  $\gamma y_0 = \gamma \cdot a_0 \sin \omega_0 t$  - обурююча сила з частотою  $\omega_0$ :

$$M\ddot{y} + (c + \gamma)y + \alpha\dot{y} - cB\frac{\dot{y}}{v} - \alpha_2 B\left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^2 + \alpha_3 B\left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^3 - \gamma y = \gamma a_0 \sin \omega_0 t. \quad (4.13.5)$$

Приватне рішення нелінійного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = a \sin(\omega_0 t + \vartheta) / \quad (4.13.6)$$

Обмежимося випадком встановившихся резонансних коливань, коли амплітуда не змінюється у наступному проході різця, тобто  $a = a_0$  зсув фаз при точному резонансі  $\vartheta = \frac{\pi}{\varphi}$ .

Тоді (4.13.6) з врахуванням  $\vartheta = \frac{\pi}{\varphi}$  приймає вигляд:

$$y = a_0 \cos \omega_0 t \quad (4.13.7)$$

Підставляючи (4.13.7) у (4.13.5), помножив раз  $\cos \omega_0 t d(\omega_0 t)$ , а другий на  $\sin \omega_0 t d(\omega_0 t)$  та інтегруючи з 0 до  $\pi$ , отримаємо:

$$-Ma\omega_0^2\pi + (c + \gamma)a\pi = 0 \qquad (\alpha - \alpha_1 B \frac{\dot{\gamma}}{v})\omega a\pi + \alpha_3 B \left(\frac{\omega a}{v}\right)^3 \frac{3}{4}\pi = \gamma\alpha_0\pi,$$

звідки:

$$\omega^2 = \frac{c + \gamma}{M}, \quad (4.13.8)$$

звідки

$$a = \frac{2}{\sqrt{3\alpha_3}} \frac{v}{\omega} \sqrt{\alpha_1 + \frac{\gamma v}{B\omega} - \frac{v\alpha}{B}}, \quad (4.13.9)$$

Отже, частота встановившихся коливань при обробці хвилястої поверхні дорівнює власній частоті системи.

Зсув фаз між коливаннями на двох послідовних проходах різця дорівнює  $\frac{\pi}{2}$  (хвилі на поверхні між сусідніми проходами зсунути на  $\frac{1}{4}$  хвилі).

У підкореному виразі формули (4.13.9) перший доданок відражає первинне збудження коливань, другий – вторинне збудження, третій – еквівалентне тертя у системі. Відрізняється формула (4.13.9) від формули (4.13.5) тільки наявністю другого доданку у підкореному виразі.

З формули (4.13.9) бачимо, що не виникнуть автоколивання при різанні, якщо підкорений вираз від'ємний, тобто:

$$\alpha_1 + \frac{\gamma v}{B\omega} - \frac{\alpha v}{B} \leq 0 \quad (4.13.10)$$

чи

$$\gamma \leq \omega(\alpha - \frac{\alpha_1 B}{v}). \quad (4.13.11)$$

Тут та у попередньому параграфі  $\gamma$  – проекція коефіцієнту жорсткості різання на горизонтальну вісь, тобто:

$$\gamma = \ddot{\gamma} \cos \beta \quad \gamma = kB \cos \beta. \quad (4.13.12)$$

Умову відсутності вторинних коливань (4.13.11) з врахуванням (4.13.3) перепишемо так:

$$B \leq \frac{\alpha \omega}{k \cos \beta + \frac{\alpha_1 \omega}{v}}$$

чи

$$B \leq \frac{\alpha \omega v}{k \cos \beta \cdot v + \alpha_1 \omega}. \quad (4.13.13)$$

Відносно перемінних режиму різання  $B$  та  $v$  рівняння (4.13.13) – рівняння рівносторонньої гіперболи з асимптотами, що паралельні осям координат (рис.4.13.3).

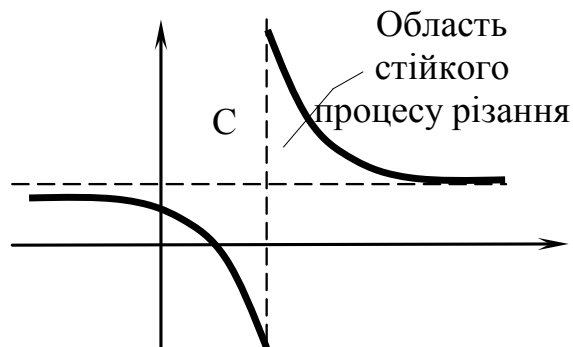


Рис.4.13.3

#### 4.14 Автоколивання при різанні з нестійким наростом

При обробці багатьох пластичних металів різанням на передній поверхні інструменту виникає нарост (рис.4.14.1).

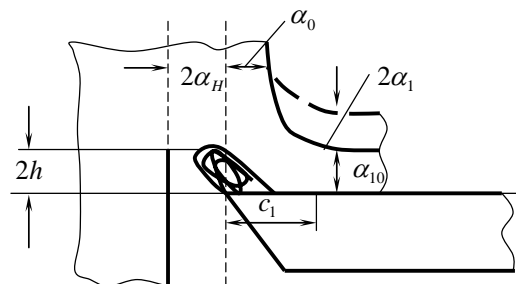


Рис.4.14.1

Утворений сильно деформованим та зміцненим металом нарост, що виступає різець збільшує товщину зрізу  $2a_n$  (нарост робить як різець).

Залежність між  $a$  і  $h$  представлена на рис.4.14.2.

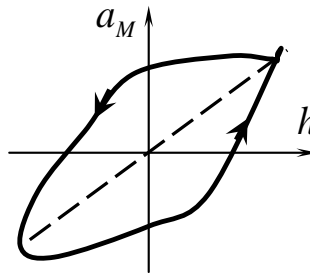


Рис.4.14.2

Будемо рахувати для спрощення пружну систему різця та деталі абсолютно жорсткою (відсутні коливання пружної системи). Тоді зміни товщини зрізу  $\alpha_0$  відбувається за рахунок виступаючої частини наросту  $2a_n$ . Зміна товщини зрізу приводять до зміни товщини стружки  $2a_1$ . Збільшення товщини стружки веде до збільшення розміру наросту і, отже, величина  $2a_n$ . При деякій висоті  $2h$  наріст зривається та процес повторюється. Частота зрізу наросту дорівнює частоті коливань системи.

Площина петлі гістерезису (рис.4.14.2) характеризує енергію, що затрачується на підтримку автоколивань при різанні з нестійким наростом.

#### **4.15. Вимушені нелінійні коливання крісла водія при їх кінематичному збудженні з урахуванням частотно-незалежного тертя**

При русі транспортного засобу на крісло водія, а відповідно і на самого водія, діє вібрація. Занадто інтенсивна або занадто тривала вібрація, що сприймається живим організмом, може йому нашкодити. Явища, які виникають в організмі під дією як загальної, так і локальної (місцевої) вібрації, досить складні. Чисто механічний ефект потрясіння викликає реакції нервової, ендокринної, серцево-судинної та інших систем організму. Тому розробка ефективних методів розрахунку на коливання крісла водія є актуальною задачею.

Крісло водія розглядається як механічна система з жорсткою кубічною характеристикою відновлювальної сили і кубічним частотно-незалежним тертям при його гармонічному кінематичному збудженні (рис. 4.15.1).

Розрахункова модель представлена на рис. 4.15.2.

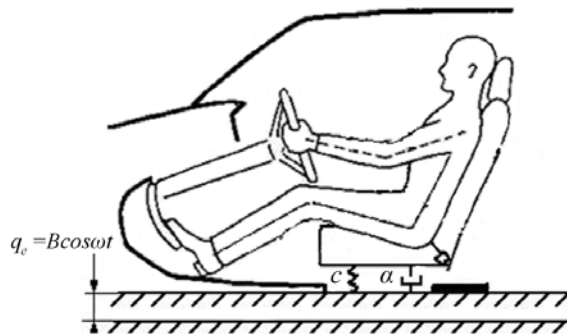


Рис.4.15.1. Крісло з водієм, як  
коливальна система

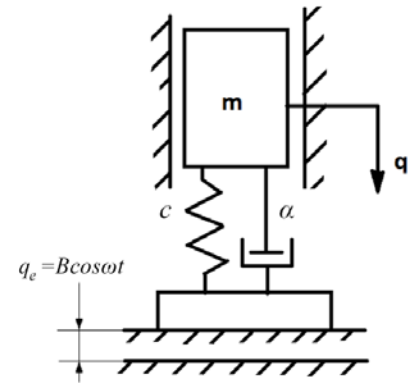


Рис.4.15.2. Модель  
кінематичного збудження

Запишемо рівняння вимушених коливань для даної механічної системи.  
Рух об'єкта визначається рівнянням

$$a(\ddot{q}^e + \dot{q}^r) + c q^r + \alpha_3 (q^r)^3 + \alpha_3 (I \dot{q}^r)^3 = 0 \quad (4.15.1)$$

де  $a$  – коефіцієнт інерції,  $c$  – коефіцієнт жорсткості,  $\alpha_3$ ,  $a_3$  – коефіцієнти синфазного і гістерезисного відхилення від закону Гука,  $I$  – коректувальний множник, який дорівнює  $\frac{1}{\omega_0^2}$  ( $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$  – квадрат власної колової частоти),  $q^e$  – переносний рух,  $q^r$  – відносний рух.

Вважаємо, що переносний рух змінюється за гармонійним законом

$$q^e = B \cos \omega t$$

де  $B$  – амплітуда кінематичного збудження,

$\omega$  – частота цього збудження.

Перепишемо рівняння (4.15.1) наступним чином

$$\ddot{q}^r + \omega_0^2 q^r + \gamma (q^r)^3 + (I \dot{q}^r)^3 = -\ddot{q}^e, \quad (4.15.2)$$

або

$$\ddot{q}^r + \omega_0^2 q^r + \gamma (q^r)^3 + (I \dot{q}^r)^3 = B \omega^2 \cos \omega t, \quad (4.15.3)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ ,  $\gamma = \alpha_3 = \alpha_1$ .

Розв'язок шукаємо у вигляді:



$$q = A_r \cos \cos(\omega t - \varphi) = A_r \cos \psi, \quad (4.15.4)$$

Амплітуду і фазу в (4.15.4) визначаємо за методом гармонічного балансу [1], для цього підставимо розв'язок (4.15.4) в рівняння (4.15.3) та зберемо члени при  $\cos \psi$  та  $\sin \psi$ .

$$-A_r \omega^2 \cos \psi + \omega_0^2 A_r \cos \psi + \gamma A_r^3 \cos^3 \psi - (IA_r)^3 \omega^3 \sin^3 \psi = \omega^2 B \cos \omega t \quad (4.15.5)$$

З урахуванням, що:

$$\cos^3 \psi = \frac{1}{4}(3 \cos \psi + \cos 3\psi),$$

$$\sin^3 \psi = \frac{1}{4}(3 \sin \psi + \sin 3\psi),$$

$$\cos \omega t = \cos \cos(\psi + \varphi) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi$$

рівняння (4.15.5) запишеться

$$\begin{aligned} & -A_r \omega^2 \cos \psi + \omega_0^2 A_r \cos \psi + \gamma A_r^3 \frac{3}{4} \cos \psi + A_r^3 \frac{1}{4} \cos 3\psi - \\ & -\gamma \frac{A_r^3 \omega^3}{\omega_0^3} \frac{3}{4} \sin \psi + \gamma \frac{A_r^3 \omega^3}{\omega_0^3} \frac{1}{4} \sin 3\psi = B \omega^2 (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi), \end{aligned} \quad (4.15.6)$$

Зібравши згідно методу гармонічного балансу члени при  $\cos \psi$  та  $\sin \psi$  отримаємо відповідно баланс реактивних та активних сил.

$$A_r (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \gamma A_r^3 = B \omega^2 \cos \varphi, \quad (4.15.7)$$

$$\frac{3}{4} \gamma A_r^3 = B \omega^2 \sin \varphi, \quad (4.15.8)$$

Для визначення амплітуди возведемо рівняння (4.15.7) та (4.15.8) до квадрату та просумуємо

$$\left[ A_r (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \gamma A_r^3 \right]^2 = B^2 \omega^4 \cos^2 \omega t \quad (4.15.9)$$

$$\left( \frac{3}{4} \gamma A_r^3 \right)^2 = B^2 \omega^4 \sin^2 \omega t, \quad (4.15.10)$$

$$\left[ A_r (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \gamma A_r^3 \right]^2 + \left( \frac{3}{4} \gamma A_r^3 \right)^2 = B^2 \omega^4 \quad (4.15.11)$$

Звідки маємо:

$$A_r^2 \left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma A_r^2 \right)^2 = B^2 \omega^4 - \left( \frac{3}{4} \gamma A_r^3 \right)^2 \quad (4.15.12)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{4} \gamma A_r^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma A_r^2} \quad (4.15.13)$$

Підставивши рівняння (4.15.10) в (4.15.9) отримаємо:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{B \omega^2}{A_r \omega_0^2} (\cos \varphi - \sin \varphi), \quad (4.15.14)$$

$$\sin \varphi = \frac{3}{4} \frac{\gamma A_r^3}{B \omega^2} \quad (4.15.15)$$

З рівняння (4.15.15) при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  знаходимо максимально можливу амплітуду

$$A_r = \sqrt[3]{\frac{4B\omega^2}{3\gamma}}$$

В якості прикладу розглянемо наступну задачу. Автомобіль рухається по трасі з укладених бетонних плит. За рахунок того, що стики плит не співпадають по вертикалі виникає кінематичне збудження вимушених коливань автомобіля та крісла водія.

Виберемо наступні параметри:

$$a = m = 100 \text{ кг}; c = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; a_2 = a_3 = 0.0049; B = 2 \text{ см}; \omega = 50 \text{ с}^{-1}.$$

$$A_r = \sqrt[3]{\frac{4B\omega^2}{3\gamma}} = 0.02388 \text{ м.}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\gamma A_r^3 = 0$$

2 – енергетична лінія

$$B^2 \omega^4 - \left( \frac{3}{4} \gamma A_r^3 \right)^2 = 0$$

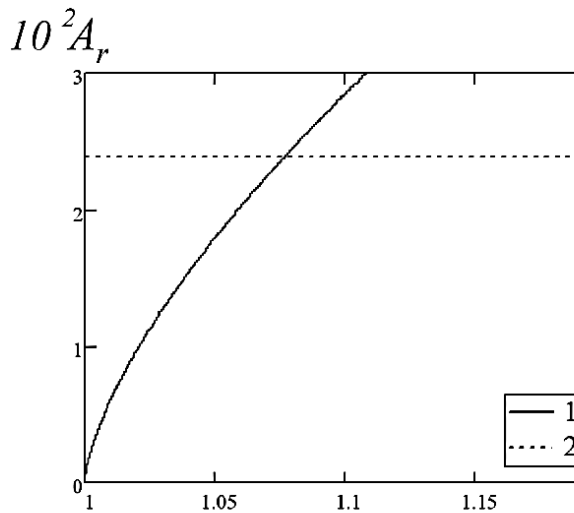


Рис.4.15.3. Графічне

зображення амплітуди коливаний:

1 – скелетна крива

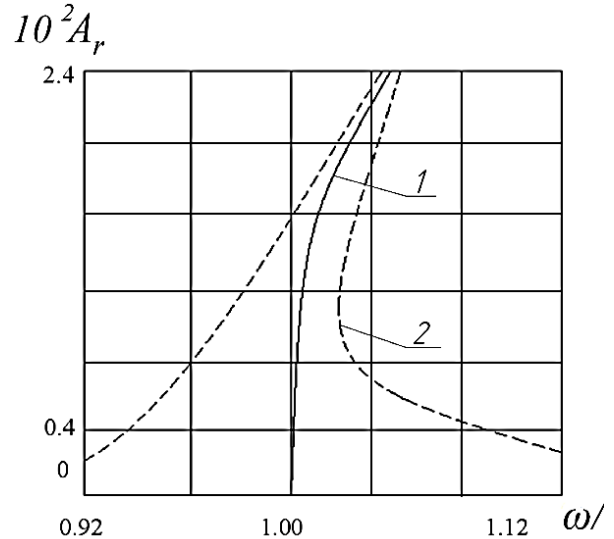


Рис.4.15.4. Амплітудно-

частотна характеристика

1 – скелетна крива, 2 – АЧХ

Висновки:

З аналізу отриманих рівнянь витікає:

1. Амплітуди коливаний в нелінійній системі завжди обмежені, незважаючи на відсутність тертя.
2. При «точному» резонансі ( $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ ) амплітуда не є найбільшою величиною.
3. В нелінійній системі основну роль в обмеженні амплітуди коливаний відіграє не лінійність характеристик відновлювальної сили.
4. Розсіяння енергії визначає максимально можливу амплітуду коливаний.

**Середні значення логарифмічного декременту коливань у випадку  
внутрішнього частотно – незалежного тертя**

Матеріал	$E \cdot 10^{-5} \text{ МПа}$	$G \cdot 10^{-5} \text{ МПа}$	$\Lambda = \pi \alpha_1$		
			Поздовжні коливання	Крутильні коливання	Згинні коливання
Сталі перлітного класу					
Ст 2	2,0	0,8	0,0038	0,00415	0,0155
Ст 3	2,0	-	0,00863	-	-
Сталь У7А	-	0,8	-	0,03075	-
Сталь У8	2,0	-	-	-	0,0097
Сталь 10	2,06	0,8	0,0112	0,00693	0,00408
Сталь45	2,03	0,8	0,039	-	-
ЕІ 415	2,1	-	-	-	0,0183
ШХ 9	2,195	0,85	0,0039	0,0788	-
Сталі мартенситно – феритного класу					
Сталь УХ13	2,1	0,85	-	0,0145	-
Сталь Д1-5	1,85	-	-	-	0,0327
Нержавіючі, жаростійкі і жароміцні сталі аустенітного класу					
1Х18Н9Т	2,0	0,77	-	0,00443	0,00805
ЕІ 612	2,0	-	0,00428	0,00233	0,00212
Жаростійкі і жароміцні сплави					
ЖС6К	2,17	-	-	-	0,001025
ЕІ 861	2,23	-	-	-	0,0033
ЕІ 437Б	1,98	0,76	-	0,000333	0,00665
Тугоплавкі метали					
Вольфрам	3,98	-	-	-	0,00678
Молібден	3,195	-	-	-	0,00866
Ніобій	1,05	-	-	-	0,00866
Алюміній і його сплави					
Алюміній	0,694-	0,27	-	0,00116	0,0692

	0,733				
Сплав АЛ9	0,725	0,27	-	0,00289	0,00722
Сплав Д16М	0,717	0,27	-	0,00203	0,00482
<i>Магній і його сплави</i>					
Магній	0,377	-	-	-	0,281
Сплав МЛ5	0,44	0,17	-	0,00332	0,00555
Сплав МА1	0,4	-	-	-	0,0803
<i>Титан і його сплави</i>					
Титан	1,05-1,1	0,4-0,45	-	-	0,00010
Сплав ВТ4	1,209	0,466	-	0,0317	0,00037
<i>Мідь та її сплави</i>					
Червона мідь	1,15	-	-	-	0,35
Латунь Л62	1,17	0,48	-	0,00115	0,00264
Бронза Ж9-4	1,16	0,49	-	0,00334	0,00150
<i>Інші метали</i>					
Армко-залізо	2,17	0,85	0,00627	0,0117	0,01875
Сірий ливарний чавун	-	0,54	-	0,167	-
Цинк	1,0	-	-	-	0,1892
Нікель	-	-	-	0,050	-
<i>Неметалічні матеріали</i>					
Текстоліт	0,08	-	-	-	0,05475
Гетинакс	0,08	-	-	-	0,0441
Склопластик	0,1-0,2	-	-	-	0,1158
Оргскло(плексигг лаз)	0,028	-	-	-	0,227
Пластмаса АГ-4	0,03	-	-	-	0,035
Пластмаса ЕК-2	0,02	-	-	-	0,0657
Термопласт ЛКФ-1	0,0296	-	-	-	0,1587
Капрон	0,0105-0,07	-	-	-	0,0335
Вініпласт	0,03-0,04	-	-	-	0,0474

Склотекстоліт ВФТ	0,12-0,28	-	-	-	0,0775
Сосна	-	550	-	0,071	-
Бук	-	650	-	0,0767	-
Корок	-	-	-	0,019	-
Гума	-	-	-	0,12	-
Бетон	-	-	-	0,13	-
Цегла	0,03	-	-	0,11	-

## Додаток 2

**Значення інтегралів, які зустрічаються при визначенні дисперсії  
випадкової функції за її спектральною щільністю**

Шуканий інтеграл має вигляд

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{|A(i\omega)|^2} d\omega,$$

де  $A(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n$ ;  $G(i\omega) = b_0(i\omega)^{2n-2} + b_1(i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$ .

При  $n = 1, 2, 3, 4$  значення цього інтеграла дорівнює відповідно

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{|a_0 i\omega + a_1|^2} d\omega = \frac{b_0}{2a_0 a_1};$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0(i\omega)^2 + b_1}{|a_0(i\omega)^2 + a_1 i\omega + a_2|^2} d\omega = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1};$$

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0(i\omega)^4 + b_1(i\omega)^2 + b_2}{|a_0(i\omega)^3 + a_1(i\omega)^2 + a_2 i\omega + a_3|^2} d\omega = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)};$$

$$J_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0(i\omega)^6 + b_1(i\omega)^4 + b_2(i\omega)^2 + b_3}{|a_0(i\omega)^4 + a_1(i\omega)^3 + a_2(i\omega)^2 + a_3 i\omega + a_4|^2} d\omega =$$

$$= \frac{b_0(-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}.$$

**Значення параметрів  $k_l L = \lambda_l$  і коефіцієнтів  $B_l$ ,  $C_l$  і  $D_l$  балочних функцій  
при  $A_l = 1$**

Умови закріпленн я	$L$	$\lambda_l$	$B_l$	$C_l$	$D_l$
Обидва краї балки шарнірно закріплені	1	3,142	0	0	0
	2	6,283	0	0	0
	3	9,425	0	0	0
	4	12,566	0	0	0
	5	15,708	0	0	0
Обидва краї балки жорстко закріплені	1	4,730	-1,0178	-1	1,0178
	2	7,853	-0,999223	-1	0,999223
	3	10,996	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	-1	0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	-1	1,0000001
Обидва краї балки вільні	1	4,730	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	1	-1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	1	-1,0000001
Лівий край шарнірно, а правий жорстко закріплені	1	3,927	0	0,027875	0
	2	7,069	0	-0,0012041	0
	3	10,210	0	0,0000520	0
	4	13,352	0	-0,0000022	0
	5	16,494	0	0,0000001	0
Консольна балка	1	1,875	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	-1,0000015	-1	1,0000015

**Деякі тригонометричні формули, що зустрічаються в розрахунках**

1.  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$
2.  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
3.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$
4.  $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
5.  $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
6.  $\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}(\sin \alpha + \sin 3\alpha)$
7.  $\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}(\cos \alpha - \cos 3\alpha)$
8.  $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
9.  $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
10.  $\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{8}(2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$
11.  $\sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha = \frac{1}{8}(2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$
12.  $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha)$
13.  $\sin^5 \alpha = \frac{1}{16}(\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha)$
14.  $\cos^5 \alpha = \frac{1}{16}(\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha)$
15.  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
16.  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
17.  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
18.  $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$



### Список літератури

1. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.
2. Методические указания к курсовому проектированию по дисциплине «Теория колебаний» для студентов специальности «Динамика и прочность машин» / Сост. Н.В. Василенко, А.Е. Бабенко, Е.Е. Онищенко. – Киев: КПИ, 1987. – 52 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т.3.-М.: Машиностроение, 1978.-352с.
4. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уинвер У. Колебания в инженерном деле.-М.: Машиностроение, 1985.-472с.
5. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний.-М.: Высш. шк., 1980.-408с.
6. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем.-М.: Наука, 1979.-336с.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.-М.: Наука, 1974.-504с.
8. Василенко Н. В. Теория колебаний.-К.: Вища шк., 1992.-430с.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний.-Л.: Наука, 1968.-650с.
10. Яблонский А. А., Корейко С. С. Курс теории колебаний.-М.: Высш. шк., 1975-248с.
11. Вибрации в технике: Справочник в шести томах. Т. 1. Колебания линейных систем.-М.; Машиностроение, 1978.-352с.
12. Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний.-М., Высш. шк., 1979.-368с.