МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Спеціальні розділи математики: Теорія ймовірностей: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л. Д. Ярощук. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 87 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 27.02.2020 р.)
за поданням Вченої ради Інженерно-хімічного факультету (протокол №1 від 27.01.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ПРАКТИКУМ

Укладач: *Ярощук Людмила Дем'янівна*, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний редактор: *Жученко А. І.,* завідувач кафедри «Автоматизація хімічних виробництв», доктор технічних наук, професор

Рецензент: *Сідоров Дмитро Едуардович*, к.т.н., доцент кафедри хімічного, полімерного і силікатного машинобудування інженерно-хімічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований навчальний посібник містить матеріал для проведення аудиторних практичних занять, формування домашніх завдань та самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей та основ математичної статистики, передбачених навчальним планом підготовки бакалаврів. Висвітлено елементарні події та їхні комбінації, комбінаторику, повторні випробування, закони розподілу ймовірностей та числові характеристики випадкових величин, основні положення дисперсійного аналізу. Кожний розділ складається з двох частин – основних визначень і формул та задач. Наведені розв'язання найбільш типових та складних задач, деякі з них розв'язані декількома методами. Тематика задач пов'язана переважно з автоматизацією технологічних процесів. Навчальний посібник має додатки з таблицями найбільш вживаних для зазначеної тематики функцій.

Призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» усіх форм навчання.

Перелік скорочень та позначень

АСК – автоматична система керування

АСК ТП – автоматизована система керування технологічними процесами

БРК – блок ручного керування

КВП і А – контрольно-вимірювальні прилади і автоматика

ТЗА – технічний засіб автоматизації

Закон розподілу ймовірностей випадкової величини – закон розподілу, розподіл

ВСТУП

Предмет кредитного модуля, передбаченого навчальним планом підготовки бакалаврів – базові поняття та математичні методи теорії автоматичного керування та теорії ймовірностей для дослідження та опису технологічних об’єктів і систем керування. У цьому навчальному посібнику розглянуто частину кредитного модуля, а саме теорію ймовірностей та основи математичної статистики.

У результаті вивчення кредитного модуля студент повинен отримати із зазначеного напрямку такі знання та уміння:

- ***знання:*** методик обробки та аналізу експериментальних даних; особливостей випадкових подій; властивостей випадкової величини та їх числових характеристик; основ дисперсійного аналізу;

- ***уміння:*** аналізувати технічний об’єкт як об’єкт моделювання; складати, ідентифікувати та розв’язувати математичні моделі у фахових дослідженнях; аналізувати вплив роботи система автоматичного управління на показники якості виробничого (технологічного) процесу.

Ці результати навчання базуються значною мірою на основі дослідження подій, які відбуваються у предметній області та розрахунку основних числових характеристик результатів вимірювань як випадкових величин.

Для виконання завдань кредитного модуля студент повинен працювати не тільки над теорією, а також і над задачами, які можуть мати місце в його майбутній фаховій діяльності. Крім того студентам буде цікаво і корисно розв’язувати задачі, пов’язані з навчальним процесом, спортом та іграми.

Посібник містить значну кількість задач, які викладач може використовувати для аудиторного навчання, для домашніх завдань та для самостійної роботи студентів. Список літератури дозволяє студентам поглибити теоретичні знання та набути навичок розв’язання задач різної складності та тематики.

Посібник складається з п’яти частин, які мають одну і ту саму структуру подання матеріалу: основні визначення та формули та перелік задач. Найбільш складні та типові задачі супроводжуються детальним розв’язанням.

1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ПОДІЇ. КОМБІНАЦІЇ ПОДІЙ

1.1. Основні визначення та формули

Частота події A – це кількість появ події A, N_A серед загальної кількості різних подій (дослідів), які відбулися, N.

Відносна частота (частість) події A, $W(A)$ – це відношення кількості появ події A, N_A до загальної кількості подій N:

$$W(A) = N_A / N; \quad (0 \le W(A) \le 1). \tag{1.1}$$

Накопичена (кумулятивна) частота N_A^{Cum} є сумою випробувань, у яких випадкова величина набула значень не більших ніж поточне x.

Накопичена (кумулятивна) відносна частота W_A^{Cum} – це відношення накопиченої частоти до загальної кількості подій N:

$$W_A^{Cum} = N_A^{Cum} / N \tag{1.2}$$

Імовірність $P(A)$ випадкової події A – це очікувана частка появи події від загальної кількості різних подій, які можуть відбутися, N, $(0 \le P(A) \le 1)$.

Імовірність суми двох подій $A \cup B$ (A+B):

- сумісних

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.3}$$

- несумісних

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.4}$$

Імовірність довільної кількості попарно несумісних подій:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_N) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i). \tag{1.5}$$

Сума ймовірностей протилежних подій, $A \cup \overline{A}$:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{1.6}$$

Сума ймовірностей повної групи несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_N$:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_N) = 1.$$

Імовірність добутку залежних подій $A \cap B$ (чи $A \cdot B$)

$$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B) \qquad (1.7)$$

де $P_B(A)$ – **умовна ймовірність** появи події A, тобто імовірність появи події A за умови, що подія B уже відбулася.

Імовірність добутку незалежних подій $A \cap B$ (чи $A \cdot B$)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (1.8)$$

Імовірність спільної появи довільної кількості (L) взаємно **незалежних подій**:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_L) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_L).$$

Формула повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P_{B_i}(A) \cdot P(B_i). \qquad (1.9)$$

Її застосовують тоді, коли поява події A залежить від подій певної повної системи подій $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, ..., B_K\}$.

Формула Баєса (англ. *Thomas Bayes*, укр. Бейз, Баєс, Байєс, Бейєс) дозволяє визначити умовну ймовірність того факту, що разом із подією A здійснилася подія B_i *з* повної системи подій **B**:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \qquad (1.10)$$

1.2. Задачі

Задача 1.1. На перевірку подано 12 регуляторів: 9 відповідають технічним вимогам, 3 – ні. Яка ймовірність того, що перший відібраний регулятор виявиться бракованим?

Задача 1.2. У цеху КВП і А за результатами 1-го кварталу були отримані такі дані про виконані ремонти ТЗА:

- січень: 14 мостів,13 логометрів,
- лютий: 12 мостів, 5 логометрів,
- березень: 4 мости, 2 логометри.

Яка в подальшому ймовірність поломки моста, а яка логометра?

Задача 1.3. Досліджували температуру розчину на виході змішувача. Результати досліджень у табл.1.1.

Треба виконати розрахунок відносних, накопичених та накопичених відносних частот появи кожного значення температури.

Таблиця 1.1. Результати підрахунку частинок золота у певній зоні.

Температура розчину	Кількість спостережень (частота)	Накопичена частота	Відносна частота	Накопичена відносна частота
21	10	0+10=10	0,0383	0,0383
28	16	10+16=26	0,0613	0,0996
29	18			
32	21			
34	20			
37	15			
39	12			
41	9			
	Σ = 261		Σ =	

Задача 1.4. Є партія дифманометрів, які відрізняються класами точності (див. табл. 1.2). Визначити ймовірність того, що вибраний з партії дифманометр має клас точності 2,5.

Табл.1.2. Розподіл дифманометрів за класами точності

Кількість дифманометрів	Клас точності
120	2,5
40	2,0
30	1,5
10	1,0

Задача 1.5. Є партія дифманометрів з розподілом за класом точності (див. табл.1.2).

Треба визначити ймовірність події – «*взяти дифманометр з класом точності меншим за* 2,5».

Задача 1.6. У кожному випробуванні два студенти підкидають по гральній кістці (кубику). Побудувати простори елементарних подій для двох кісток:

- випадкова подія A – «*сума двох чисел на верхніх гранях кісток кратна 4*»;
- випадкова подія B – «*сума двох чисел на верхніх гранях кісток кратна 3*».

Знайти загальну кількість усіх елементарних подій у таких випробуваннях.

З'ясувати, чи сумісні події A та B і обчислити $P(A{\cdot}B)$ у разі сумісності.

Розв'язання. Загальна кількість елементарних подій при підкиданні двох кісток $N = 6{\cdot}6 = 36$.

Простір елементарних подій для випадкової події A:

1+3, 3+1; 2+2; 2+6, 6+2; 3+5, 5+3; 4+4; 6+6;

$$P(A) = 9/36 = 0{,}25.$$

Простір елементарних подій для випадкової події B:

$$1+2,\ 2+1;\ \ 1+5,\ 5+1;\ \ 2+4,\ 4+2;\ \ 3+3;\ \ 3+6,\ 6+3;\ \ 4+5,\ 5+4;\ \ 6+6;$$

$$P(B) = 12/36 = 0{,}33.$$

Сумісними є тільки дві події: A: «6+6» та B: «6+6», отже, бажана подія – їх збіг, може статися один раз. Інші елементарні події з наведених просторів подій A та B несумісні, тому формулу добутку ймовірності застосовувати не будемо. Ймовірність появи двох подій «A: 6+6» та «B: 6+6» визначимо так

$$P(A{\cdot}B) = (1/6){\cdot}(1/6) \cong 0{,}028.$$

Задача 1.7. Цехом КВП і А підприємства була отримана партія пневматичних блоків ручного керування для систем автоматизації. Перевірка показала, що 5 зі 150 БРК виявилися непрацездатними. Визначити ймовірність того, що блок, взятий навмання для контролю, виявиться: а) непрацездатним; б) працездатним.

Задача 1.8. Студент чекає на трамвай маршруту 10 або 5 біля зупинки трамваїв маршрутів 1, 5, 9, 10. Маючи на увазі, що трамваї всіх маршрутів з'являються в середньому однаково часто, знайти ймовірність того, що перший трамвай, який під'їде до зупинки, буде потрібного маршруту.

Задача 1.9. На виробництві поліізобутилену шляхом статистичних досліджень з'ясували, що порушення роботи автоматичних систем керування відбуваються через такі причини (у середньому на кожну сотню аварій):

- 46 – через поломки датчиків (первинних перетворювачів);
- 5 – через поломки нормувальних перетворювачів;
- 4 – через поломки перетворювачів виду енергії;
- 8 – через поломки регуляторів ;

- 14 – через поломки регулювальних органів та виконавчих механізмів;
- 12 – через порушення ліній комутації.

Решта поломок відбувається через всілякі інші причини. Визначити ймовірність зупинки через решту причин.

Розв'язання. Порушення роботи АСК через окрему причину – це подія, позначимо ці події як A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 (A_7 – всі інші) відповідно. Будемо вважати, що перелічені події несумісні і складають повну систему подій. Тому можна записати

$$P\left(\sum_{i=1}^{7} P(A_i)\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) = 1.$$

$P(A_1) = 46/100 = 0{,}46$; $P(A_2) = 5/100 = 0{,}05$; $P(A_3) = 4/100 = 0{,}04$;

$P(A_4) = 8/100 = 0{,}08$; $P(A_5) = 14/100 = 0{,}14$; $P(A_6) = 12/100 = 0{,}12$.

$$P(A_7) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{6} P(A_i)\right) = 1 - 0{,}46 - 0{,}05 - 0{,}04 - 0{,}08 - 0{,}14 - 0{,}12 =$$

$= 1 - 0{,}89 = 0{,}11$.

Задача 1.10. Для підготовки конкурсу стартапів для студентських дослідницьких робіт провели розіграш призів у лотерею. Надрукували 8000 лотерейних білетів, поширили 7250 білетів. Організатори підготували 200 грошових виграшів, 220 книжок і 1 смартфон. Яка ймовірність виграти книжку?

Задача 1.11. За умови задачі 1.10 визначити, яка ймовірність отримати будь-який виграш?

Задача 1.12. Імовірність того, що стрілець влучить у 10 очок, дорівнює 0,05, у 9 очок – 0,1; у 8 – 0,3; у 7 або менше – 0,55. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець набере не менше 8 очок.

Задача 1.13. Для самостійного вивчення теми, присвяченій визначенню характеристик автоматичних систем керування, запропоновано 25 підручників: 8 мають приклади з використанням *MathCAD,* 7 − з *MatLab*, 5 містять приклади на алгоритмічних мовах, ще 5 зовсім не розглядають прикладів комп'ютерного дослідження систем. Яка ймовірність першому студенту отримати підручник з прикладами комп'ютерного розрахунку, якщо з назви підручників неможливо визначити наявність таких прикладів ?

Задача 1.14. Імовірності влучити в ціль при стрільбі першого спортсмена зі студентської команди P_1 = 0,85, другого P_2 = 0,90, третього P_3 = 0,95. Знайти ймовірність попадання в ціль при одночасній стрільбі студентів:

а) хоча б одного спортсмена;

б) двох спортсменів;

в) усіх трьох спортсменів.

Розв'язання. Нехай подія A – «*попадання в ціль першого спортсмена*», P_1 = 0,85; B – «*попадання в ціль другого спортсмена*», P_2 = 0,90; подія C – «*попадання в ціль третього спортсмена*», P_3 = 0,95. Імовірність попадання в ціль кожного зі спортсменів не залежить від результату стрільби його колег, тобто події A, B та C незалежні. Ці події сумісні.

а) Шукана подія D_1 – це сума трьох сумісних подій A, B, C, тому запишемо

$$P(D_1) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$
$$= 0,85+0,90 + 0,95 - 0,85\cdot0,90 - 0,85\cdot0,95 - 0,90\cdot0,95 + 0,85\cdot0,90\cdot0,95 = 0,99925.$$

Другий шлях розв'язання. Розглянемо протилежні події, тоді

$$P(\overline{A}) = 0,15; P(\overline{B}) = 0,10; P(\overline{C}) = 0,05.$$

$$P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0,15\cdot 0,10\cdot 0,05 = 0,00075.$$

$$P(D_1) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - 0,00075 = 0,99925.$$

б) Шукана подія D_2, вона може бути наступною комбінацією елементарних подій A, B, C:

$$D_2 = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C;$$

$$P(D_2) = P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) =$$

$= 0{,}85 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}05 + 0{,}85 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}95 = 0{,}03825 + 0{,}08075 +$
$+ 0{,}12825 = 0{,}24725.$

в) Шукана подія D_3 – це добуток трьох сумісних подій A, B, C, тому $P(D_3)$ визначимо так:

$$P(D_3) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}85 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}95 = 0{,}72675.$$

Задача 1.15. Оператор АСК ТП відслідковує перебіг технологічних процесів у трьох однакових апаратах. Імовірність того, що впродовж години процес не порушиться, складає для 1-го апарата – 0,9, для 2-го - 0,8, для 3-го - 0,85. Знайти ймовірність того, що впродовж будь-якої години параметри процесу у жодному з апаратів не вийдуть за припустимі межі.

Задача 1.16. За умови задачі 1.15 знайти ймовірність того, що хоча б один з трьох процесів не буде порушений в продовж години. Розв'яжемо задачу через протилежні події та через суму подій.

Розв'язання. Розглянемо протилежні події, тобто $\overline{B}_1$ - «*і – й апарат працює з порушеннями*». Імовірність того, що

- «1 - *й апарат працює з порушеннями*» (подія $\overline{B}_1$), дорівнює

$$P(\overline{B}_1) = 1 - P(B_1) = 0{,}1;$$

- «2 - *й апарат працює з порушеннями*» (подія $\overline{B}_2$), дорівнює

$$P(\overline{B}_2) = 1 - P(B_2) = 0{,}2;$$

- «3 - *й апарат працює з порушеннями*» (подія $\overline{B}_3$), дорівнює

$$P(\overline{B}_3) = 1 - P(B_3) = 0{,}15.$$

Імовірність того, що «*будуть порушення процесів у всіх трьох апаратах*», $\overline{B}$ є добутком вищезазначених подій, $\overline{B}=\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3$, і складає:

$$P(\overline{B})=P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)=0{,}003.$$

Події «*будуть порушення процесів у всіх трьох апаратах*» та «*хоча б один з трьох апаратів працює нормально*» протилежні, отже $P(B)+P(\overline{B})=1.$ Тому знайдемо шукану $P(B)$ за виразом $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}003=0{,}997.$

Якщо ймовірність події така велика, то подію можна вважати практично вірогідною. Це означає,що майже завжди впродовж години хоча б один апарат працює нормально.

Другий шлях розв'язання. Розглянемо суму подій.

$P(B_1+B_2+B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) - P(B_1B_2) - P(B_1B_3) - P(B_2B_3) +$

$+ P(B_1B_2B_3) = 0{,}997.$

Цей шлях може бути реалізований і так:

$P(B)=P_1\overline{P}_2\overline{P}_3+P_2\overline{P}_1\overline{P}_3+P_3\overline{P}_1\overline{P}_2+P_1P_2\overline{P}_3+P_1P_3\overline{P}_2+P_2P_3\overline{P}_1+P_1P_2P_3=$

$=0{,}997.$

Задача 1.17. У двох нових версіях математичного процесора МП1 та МП2 доопрацьовано відповідно 81% та 37% окремих модулів. Випадковим чином вибирають для перевірки по одному модулю кожної з версій. Яка ймовірність наступних подій:

1) хоча б один з модулів має помилки;

2) обидва модулі мають помилки;

3) один модуль доопрацьований, а інший має помилки?

Розв'язання. Позначимо A_1 – подію отримання доопрацьованого модуля з версії МП1, а A_2 – з версії МП2. Ймовірності відповідних подій запишемо так

$$P(A_1) = 0{,}81;\ \ P(A_2) = 0{,}37.$$

1) Визначимо ймовірність протилежної події $\overline{A}$ – «обидва модулі доопрацьовані»:

$$P(\overline{A}) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}81 \cdot 0{,}37 \approx 0{,}3 \ .$$

Розрахуємо ймовірність шуканої події

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 \approx 0{,}7 \ .$$

2) Визначимо ймовірності протилежних подій A_1 та A_2:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19; \ P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}37 = 0{,}63$$

Розрахуємо ймовірність шуканої події *B*

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0{,}19 \cdot 0{,}63 \approx 0{,}12 \ .$$

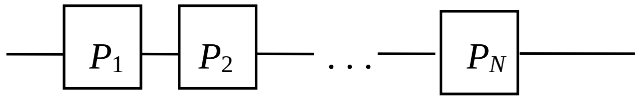
3) Позначимо шукану подію літерою *C*. Її можна розглядати як комбінацію вищезазначених елементарних подій: $C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$. Тоді шукана ймовірність наступна:

$$P(C) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}81 \cdot 0{,}63 + 0{,}19 \cdot 0{,}37 \approx 0{,}58 \ .$$

Задача 1.18. Яке значення повинна мати ймовірність виходу з ладу П – регулятора в АСК в кожному із незалежних експериментів, якщо відомо, що при проведенні досліджень роботи 3-х таких регуляторів імовірність виходу з ладу хоча б одного з них становить 0,999?

Задача 1.19. На дослідницькому стенді випробовують 4 прилади. Імовірність того, що впродовж години відмовить будь-який окремий прилад становить 0,004. Ця ймовірність однакова для всіх приладів. Знайти ймовірність того, що впродовж години відмовить хоча б один з приладів.

Задача 1.20. Електрична схема містить N послідовно з'єднаних блоків.



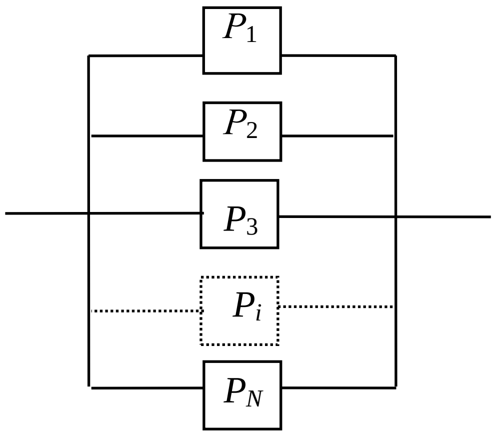
Імовірність безвідмовної роботи в продовж часу T (надійність) кожного блока дорівнює $P_1, P_2 ,\ldots , P_N$.

Вважаючи вихід з ладу різних блоків незалежними сумісними подіями, знайти ймовірність безвідмовної роботи всієї схеми.

Розв'язання. Подія A – «*схема працює*», вона відбудеться тоді, коли усі блоки працюватимуть одночасно. Це добуток подій A_i – «*працює окремий і – й блок*», отже

$$P(A) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_N.$$

Задача 1.21. Розглянемо паралельно з'єднані блоки. Вважаючи вихід з ладу різних блоків незалежними сумісними подіями, знайти ймовірність безвідмовної роботи всієї схеми.



Розв'язання. Подія A – «*схема працює*». Ця подія має місце тоді, коли працює хоча б один з її блоків. Використаємо ідею протилежної події $\overline{A}$ – «*схема вийшла з ладу*». Це – добуток подій $\overline{A_i}$ («*і – й блок вийшов з ладу*»):

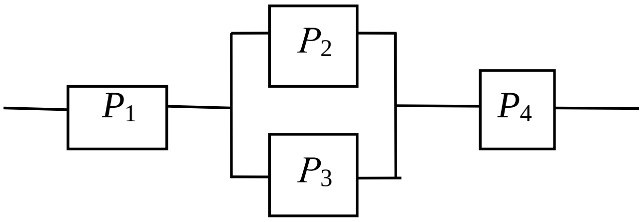
Отже,

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_N ,$$

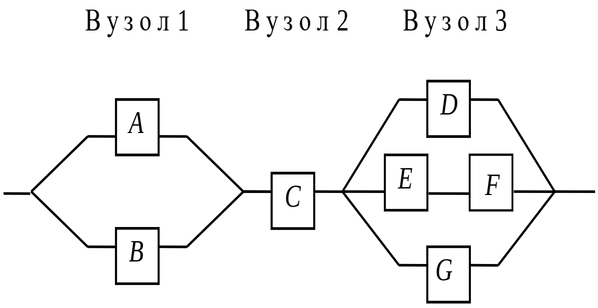
$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_N) = (1 - P_1)(1 - P_2) \cdots (1 - P_N) ,$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = (1 - P_1)(1 - P_2) \cdots (1 - P_N) .$$

Задача 1.22. Визначити ймовірність виходу з ладу схеми наступної структури:



Задача 1.23. Пристрій складається з трьох вузлів:



Визначити ймовірність виходу з ладу схеми вказаної структури.

Імовірності безвідмовної роботи елементів цих вузлів такі:

$P(A)$=0,8; $P(B)$=0,7; $P(C)$=0,95; $P(D)$=0,85; $P(E)$=0,9; $P(F)$=0,7; $P(G)$ = 0,9.

Задача 1.24. Імовірність якісно виконаного одного ремонту пристрою по вимірюванню водневого показника продукції (pH) становить 0,99. Знайти ймовірність того, що після 60 ремонтів вимірювачів pH хоча б один з цих приладів не буде відповідати вимогам.

Задача 1.25. Нехай імовірність придбання у спеціалізованій фірмі потрібного за усіма характеристиками технічного засобу автоматизації дорівнює 0,8. Будемо вважати, наявність пристроїв автоматизації в окремих фірмах – це події незалежні. Треба знайти ймовірність того, що необхідний ТЗА буде придбаний після перегляду сайтів:

а) трьох фірм;

б) п’яти фірм.

Розв’язання. Визначимо закупівлю ТЗА як подію A, а ймовірність цієї події в i – й фірмі позначимо $P_i(A)$. Згідно з умовою $P_i(A)$ = 0,8. Імовірність протилежної події $\overline{A}$ визначимо так

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 .$$

а) ймовірність того, що необхідний ТЗА буде придбаний після перегляду сайтів трьох фірм, дорівнює:

$$P(\overline{A}) = P_1(\overline{A}) \cdot P_2(\overline{A}) \cdot P_3(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008 .$$

Протилежна шукана подія – ТЗА придбають хоча б в одній из трьох фірм

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992 .$$

б) ймовірність того, що необхідний ТЗА буде придбаний після перегляду сайтів п’яти фірм, дорівнює:

$$P(\overline{A}) = P_1(\overline{A}) \cdot P_2(\overline{A}) \cdot P_3(\overline{A}) \cdot P_4(\overline{A}) \cdot P_5(\overline{A}) = 0{,}2^5 = 0{,}00032 .$$

Протилежна шукана подія – ТЗА придбають хоча б в одній з п’яти фірм

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}00032 \approx 1 .$$

З результатів видно, що при достатньо високій $P_i(A)$ = 0,8 можна обмежитись дослідженням менш широкого кола фірм.

Задача 1.26. Імовірність отримати вчасно потрібний комплект ТЗА у фірми Ф1 можна оцінити у 85%. Вважаючи, що така ж імовірність отримати комплект у інших фірм країни (за результатами тривалого спостереження вони практично однакові), треба визначити ймовірності виконання замовлення двома та трьома фірмами.

Задача 1.27. Студенти «розігрують» місця виробничої практики. Серед направлень є 7 на виробництво добрив, 4 на виробництво поліетиленової плівки, 3 на виробництво біоетанолу. Окреме випробування полягає в тому, що певний студент навмання виймає направлення на практику і не повертає його назад навіть тоді, коли місце практики його не влаштовує. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні витягнуто направлення на виробництво добрив, потім − плівки, а потім − біоетанолу.

Розв'язання. Нехай подія A – «*на перший раз витягнути направлення на виробництво добрив*», B – «*на другий раз витягнути направлення на виробництво плівки*», C – «*на третій раз витягнути направлення на виробництво біоетанолу*».

Імовірність події A наступна:

$$P(A) = 7/(7 + 4 + 3) = 7/14.$$

Імовірність події B у другому випробуванні (коли першою була A) наступна:

$$P_A(B) = 4/(14 - 1) = 4/13.$$

Імовірність події C за умови, що попередніми були A та B наступна:

$$P_{AB}(C) = 3/(14 - 2) = 3/12.$$

Шукана ймовірність така

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)\,P_{AB}(C) = (7/14)(4/13)(3/12) = 84/2184 \approx 0,038.$$

Задача 1.28. У слюсаря КВП і А є 5 пневматичних задавачів тиску та 10 пневматичних реле (пневмореле). Слюсар навмання взяв один пристрій, а потім інший. Знайти ймовірність того, що першим він узяв задавач тиску, а потім другим – пневмореле.

Задача 1.29. Грані кубика заклеєні папером: грані з цифрами 1, 2, 3 – білим, а 4, 5, 6 – чорним. Визначити ймовірність наступних подій:

- у результаті випробування на верхній грані кубика випаде чорна грань з парною цифрою;

- у результаті випробування на верхній грані кубика випаде біла грань з парною цифрою.

Задача 1.30. Для участі у конкурсі наукових студентських робіт визначили студентів двох кращих груп спеціальності: ЛА-11 та ЛА-21. У групі ЛА-11 навчається 27 студентів, з них 12 мають творчі здобутки, в ЛА-21 навчаються 20 студентів, з них 3 мають творчі здобутки. Випадковим розігруванням визначають навмання по одному студенту з кожної групи. Знайти ймовірність того, що обидва студенти не матимуть творчих здобутків.

Задача 1.31. Є дві партії магнітних пускачів (МП) для вмикання двигунів – від фірми Ф1 та фірми Ф2. Імовірність того, що МП, виготовлений фірмою Ф1, відповідає вимогам (стандартний), дорівнює 0,8, а фірмою Ф2 – 0,9. Знайти ймовірність того, що вибраний навмання МП (з будь-якої партії), буде стандартним.

Задача 1.32. У цеху КВП і А на стелажі розташовані 2 коробки, у яких знаходяться мікроконтролери, що пройшли ремонт працівниками змін 1 та 2 цього цеху. У коробці зміни 1 міститься 20 мікроконтролерів, з них 18 відремонтовані. У коробці зміни 2 є 10 мікроконтролерів, з них 9 відремонтовані. З другої коробки навмання переклали один контролер у першу коробку. Знайти ймовірність того, що вийнятий навмання з першої коробки контролер, буде відремонтованим.

Розв'язання. Подія A – «*з 1-ї коробки візьмуть відремонтований контролер*». З 2-ї коробки могли «*взяти відремонтований контролер*» (подія B_1) або «*несправний контролер*» (подія B_2).

Імовірність того, що з 2-ї коробки витягли відремонтований контролер становить

$$P(B_1) = 9/10.$$

Імовірність витягти несправний контролер така

$$P(B_2) = 1/10.$$

Умовна ймовірність того, що з першої коробки витягнуть відремонтований контролер за умови, що з 2-ї в 1-у переклали саме відремонтований контролер:

$$P_{B1}(A) = 19/21.$$

Умовна ймовірність того, що з першої коробки витягнуть відремонтований контролер, якщо переклали несправний:

$$P_{B2}(A) = 18/21.$$

Шукану повну ймовірність події A визначимо так

$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A) = 9/10·19/21+1/10·18/21 = 0,90.$

Задача 1.33. Підприємство для автоматизації виробничих процесів отримало три партії термопар: 20 виготовлено фірмою Ф1, 25 – фірмою Ф2, 5 – фірмою Ф3. Їх зберігають разом. Імовірність виготовлення фірмами бракованих термопар для цих фірм відповідно становить 0,02; 0,01; 0,05. Яка ймовірність комірнику взяти навмання браковану термопару?

Задача 1.34. На одній з дільниць збирання індукційних витратомірів використовують вузли одного призначення, виготовлені на трьох станках з числовим програмним керуванням (СЧПК). З першого СЧПК за складеним планом надходить 50% вузлів, з другого − 30%, з третього − 20%.

Якщо на дільницю збирання витратомірів надходить вузол, виготовлений на 1-у станку, то ймовірність отримання придатного витратоміра дорівнює 0,98. Для продукції другого та третього станків відповідні ймовірності становлять 0,95 та 0,8. Визначити ймовірності наступних подій:

а) вузол, який сходить з конвеєра, придатний;

б) придатний вузол виготовлено на другому станку.

Розв'язання. Нехай подія A – «*виготовлення придатного витратоміра на дільниці*», події B_1, B_2, B_3 – «*виготовлення вузлів на 1-у, 2-у та 3-у станку*» відповідно.

Запишемо ймовірності подій множини $\boldsymbol{B}$:

$$P(B_1) = 0{,}5; \quad P(B_2) = 0{,}3; \quad P(B_3) = 0{,}2.$$

Запишемо умовні ймовірності виготовлення придатних вузлів з різних СЧПК:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}98; \quad P_{B_2}(A) = 0{,}95; \quad P_{B_3}(A) = 0{,}8.$$

Визначимо шукану ймовірність події A :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= 0{,}5\cdot0{,}98+0{,}3\cdot0{,}95+0{,}2\cdot0{,}8 = 0{,}49+0{,}285+0{,}16 = 0{,}935.$$

Розрахуємо ймовірність того, що придатний вузол, виготовлено на другому станку.

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}935} = 0{,}305.$$

Задача 1.35. Слюсар цеху КВП і А отримав 3 коробки запасних деталей для ремонту приладів. У одній коробці знаходилися деталі, виготовлені заводом №1, у двох коробках – деталі, виготовлені заводом №2.

Імовірність того, що деталь завода №1 стандартна дорівнює 0,8, а завода №2 – 0,9. Збиральник навмання взяв деталь з однієї з коробок. Знайти ймовірність того, що витягнута деталь стандартна.

Задача 1.36. Керівництвом цеху КВП і А заводу проведена вибіркова первірка стану технічних засобів автоматизації у трьох виробничих відділеннях. Виявлено, що у першому відділенні з 20 перевірених одиниць ТЗА тільки 15 пройшли плановий профілактичний огляд, у другому відділенні з 30 одиниць ТЗА пройшли огляд 24, у третьому відділенні з 10 одиниць ТЗА пройшли огляд 6. Знайти ймовірність того, що довільно вибраний ТЗА вчасно пройшов плановий профілактичний огляд.

Задача 1.37. На складі фірми по реалізації ТЗА знаходяться реле температури від трьох виробників, які за ціною і характеристиками практично не відрізняються. Продукція розподілена так: 82% надійшло від першого виробника, 13% – від другого і 5% – від третього. Ймовірності появи бракованої продукції у виробників реле відповідно: $P_1 = 0{,}02$; $P_2 = 0{,}08$ та $P_3 = 0{,}05$. Яка ймовірність купити у цієї фірми одне браковане реле?

Задача 1.38. Одна група слюсарів КВП і А виконує 40% ремонтів термопар, а інша – 60%. За статистичними дослідженнями роботи цих фахівців з’ясовано, що мали вади 2 з 50 термопар відремонтованих першою групою, у другої групи показники 1 з 15. Треба розрахувати ймовірність того, що термопара після ремонту буде мати вади.

Задача 1.39. На ремонт надходять ТЗА з різних цехів. У середньому співвідношення між поломками у цих цехах наступне $k_1 : k_2 : k_3 : k_4 \approx 4:3:2:1$.

Електропневматичні перетворювачі (ЕПП) з'являються серед поламаних пристроїв відповідно з імовірностями $P_1 = 0{,}1$; $P_2 = 0{,}2$; $P_3 = 0{,}3$ та $P_4 = 0{,}4$. Вийнятий навмання для ремонту пристрій виявився не ЕПП. Визначити ймовірність того, що призначений для ремонту ТЗА вийшов з ладу у цеху №2.

Задача 1.40. На звернення замовника щодо повернення грошей за один бракований ТЗА фірма-виробник відповідає згодою з імовірністю 0,65. Знайти ймовірність того, що фірма поверне замовникам гроші за 50 бракованих пристроїв.

2. КОМБІНАТОРИКА

2.1. Основні визначення та формули

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає дискретні об’єкти, їхні **перестановки**, **сполучення** та **розміщення**. В основі розрахунків комбінаторики лежать **правило множення** та **правило додавання**.

Нехай є множина, що містить N об'єктів. Їх можна по-різному розташувати (впорядкувати) відносно один одного.

Перестановками називають різноманітні послідовності з усіх N об'єктів. Загальну кількість, P_N усіх можливих перестановок із N об'єктів обчислюють за формулою

$$P_N = N!, \tag{2.1}$$

де $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N$, при цьому вважають, що $0! = 1$.

<u>Приклад</u>. Множина має три об’єкти: **а**, **б**, **в**. Загальна кількість перестановок $P_N = N! = 3! = 6$. Можливі такі перестановки (запишемо без ком і пробілів): **абв, авб, бав, бва, ваб, вба**.

Розміщенням називають упорядковану послідовність з M об'єктів із множини з N об'єктів.

Загальну кількість таких різноманітних розміщень R_N^M обчислюють за формулою

$$R_N^M = \frac{N!}{(N-M)!} = N(N-1)...(N-M+1). \tag{2.2}$$

<u>Приклад</u>. Множина має 3-и об’єкта: **а**, **б**, **в**. Вивчимо для цієї множини розміщення з $M = 2$ об'єктів. Загальна кількість розміщень

$$R_N^M = \frac{N!}{(N-M)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$$

Можливі такі розміщення: **аб, ба, ав, ва, бв, вб**.

Сполученням (**комбінацією**) називають підмножину загальної множини з N об'єктів. У підмножинах з M об’єктів припустимі різні розташування об’єктів один відносно іншого.

Загальну кількість різноманітних сполучень із N по M об'єктів, C_N^M обчисляють за формулою

$$C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!}. \tag{2.3}$$

Приклад. Множина має 3-и об’єкти: **а**, **б**, **в**. Вивчимо сполучення по M = 2 об'єкти. Загальна кількість сполучень

$$C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Можливі такі комбінації: **а** з **б, а** з **в, б** з **в**.

Правило множення (головний принцип комбінаторики). Нехай є множина, яка містить об’єкти (елементи), що належать до K груп (за певними властивостями, наприклад, числовими значеннями). Якщо з цієї множини елементів елемент x_1 (елемент першої групи, k = 1) можна вибрати N_1 способами, елемент x_2 – N_2 способами, елемент x_K – N_K способами, то впорядковану сукупність (x_1, x_2, x_3,…,x_K) можна сформувати N_1 N_2 … N_K способами.

Правило додавання. Якщо дві дії, що виключають одна одну можуть виконуватися відповідно M або N способами, то виконати будь-яку з цих дій можна M + N способами.

2.2. Задачі

Задача 2.1. На стелажі знаходиться 10 повірених нормувальних перетворювачів та 15 таких, які треба терміново повірити. Повірені прилади не були відділені від інших. Розрахувати ймовірності наступних подій:

а) взяти зі стелажу навмання один повірений нормувальний перетворювач;

б) отримати всі повірені з трьох витягнутих перетворювачів;

в) отримати три повірені перетворювача з п'яти витягнутих навмання.

Задача 2.2. Визначити, у якому типі лотереї виграш більш імовірний. Розглядають два типи лотерей: вгадати 5 номерів із 36 та вгадати 6 номерів із 45?

Задача 2.3. Студент встановив пароль для роботи з комп'ютером, який складається з десяти цифр. При черговому вмиканні він забув одну цифру у паролі і почав його підбирати, натискаючи цифри від 0 до 9 навмання. Знайти ймовірність того, що перша набрана цифра правильна.

Задача 2.4. У ситуації, описаній у задачі 2.3, проблема полягає у тому, що студент забув 2 перші цифри пароля. Знайти ймовірність правильного набору 2 – х цифр для двох випадків: а) цифри у паролі різні; б) цифри у паролі можуть повторюватись.

Задача 2.5. Серед 10 запропонованих програмних засобів (пакетів програм) візуалізації перебігів процесів у технологічних апаратах (частини *SCADA*-систем) 7 вдало пройшли тестування. Розрахувати ймовірність того, що серед 6 навмання вибраних пакетів програм 4 можна передавати для експлуатації у виробничих умовах.

Розв'язання. Загальна кількість можливих подій − це кількість способів, якими можна відібрати 6 пакетів з 10, тобто

$$N = C_{10}^{6} = 210.$$

Шукана подія *A* відбувається тоді, коли з 6 відібраних пакетів тестування виявилося вдалим для 4. Кількість можливих подій *A* позначимо N_1, це кількість комбінацій по 4 з 7 пакетів:

$$N_1 = C_7^4 = 35.$$

Ще 2 пакети мали певні помилки, їх можна відібрати з інших непрацездатних пакетів N_2 способами

$$N_2 = C_{10-7}^{2} = C_3^2 = 3.$$

Загальна кількість сприятливих подій буде такою

$$N_1 \cdot N_2 = C_7^4 \cdot C_3^2 = 35 \cdot 3 = 105.$$

Шукана ймовірність

$$P(A) = N_1 N_2 / N = C_7^4 C_3^2 / C_{10}^6 = 105 / 210 = 0{,}5$$

Задача 2.6. Для ремонту пневматичних пристроїв надійшли нові реле від двох фірм-виробників ТЗА: фірм №1 та №2. Відомо, що якість продукції першої фірми вища. 12 реле надійшло від фірми №1, та 7 – від фірми №2, їх розклали в один контейнер. Розрахувати ймовірність того, що слюсар КВП і А витягне навмання вряд 5 реле, виготовлених фірмою №1.

Задача 2.7. У комплекті програмних засобів, запропонованих декількома фірмами, є 5 програм з інтелектуальною перевіркою вхідних даних на правдоподібність та з захистом від вірусів типу А і Б, 3 програми забезпечують тільки захист від вірусів типу А і Б, 2 програми не мають жодної із зазначених послуг. Запропоновано розіграш програм. Випадковим чином покупці відібрали 6 програм.

Треба знайти ймовірність наступної події – серед відібраних програм 4 пропонують усі зазначені послуги і 2 тільки захист від вірусів типу А і Б.

Розв'язання. Запишемо формулу для розрахунку шуканої події

$$P = \frac{N_{4,5} \cdot N_{2,3}}{N},$$

де $N_{4,5}$ – кількість способів вибрати 4 найбільш складні програми з 5 можливих; $N_{2,3}$ – кількість способів узяти 2 програми тільки з обома антивірусами з 3 можливих; N – кількість способів вибрати 6 програм із загальної кількості програм.

Загальна кількість програм N_{prog} = 5+3+2 = 10. Розрахуємо N так

$$N = C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

Визначимо $N_{4,5}$:

$$N_{4,5} = C_{5}^{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!} = 5.$$

Визначимо $N_{4,3}$:

$$N_{2,3} = C_{3}^{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Розрахуємо кінцевий результат

$$P = \frac{5 \cdot 3}{210} = \frac{15}{210} = 0{,}07.$$

Задача 2.8. Закуплена партія засобів контролю рівня рідин, зокрема 30 буйкових рівнемірів. Виявилося, що серед рівнемірів цього типу 10% браку. Випадковим чином з 30 цих рівнемірів тричі відбирають по 2 рівнеміри для використання в системах контролю та керування. Яка ймовірність того, що при кожному відбиранні діставали по одному бракованому виробу?

Задача 2.9. Слюсар цеху КВП і А відремонтував 15 технічних засобів автоматизації, 9 з них ще не мають позначки про ремонт (позначимо їх типом Т1), а 6 вже мають (позначимо типом Т2). Слюсар навмання бере два ТЗА і ставить на кожному ще й позначку про дату їх наступної повірки та повертає назад. Потім знову навмання відбирає три ТЗА. Визначити ймовірність того, що ці три ТЗА не мають ні відмітки про ремонт, ні відмітки про наступну повірку.

Задача 2.10. Серед запасних частин для ремонту виконавчого механізму є такі, що самі вже були в ремонті: один раз $N_1 = 2$ (кількість механізмів), два рази $N_2 = 5$, три рази $N_3 = 3$, чотири рази $N_4 = 4$. З цих запчастин випадковим чином відібрано $m = 6$. Визначити ймовірність того, що серед відібраних буде $n_1 = 1$ з одним ремонтом, $n_2 = 3$ з двома ремонтами, $n_3 = 1$ з трьома та $n_4 = 1$ з чотирма ремонтами.

Розв'язання. Загальна кількість вибраних запчастин

$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 2 +5 +3 +4 = 14.$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P = \frac{C_{N1}^{n1} C_{N2}^{n2} C_{N3}^{n3} C_{N4}^{n4}}{C_N^m} = \frac{C_2^1 C_5^3 C_3^1 C_4^1}{C_{14}^6} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4}{6006} \approx 0{,}04..$$

3. ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ

3.1. Основні визначення та формули

Повторні випробування. Нехай подію A досліджують у N незалежних випробуваннях з однаковими умовами проведення. Припустимо, що у кожному випробуванні ймовірність появи події A незмінна, позначимо її P, тобто P = const. Результатом кожного випробування можуть бути подія A, або протилежна їй подія $\overline{A}$ (*подія A не відбулася*). Ця остання подія відбувається з імовірністю $q = 1 - P$.

Якщо розглядати усі N випробувань як одне, то його результатом є добуток подій A та $\overline{A}$. Через незалежність окремих випробувань важливий не порядок подій, а кількість повторень події A. Кількість появ події A позначимо через K ($0 \le K \le N$). Імовірність появи події A точно K разів обчислюють за формулою **Бернуллі**:

$$P_K = C_N^K P^K q^{N-K} \tag{3.1}$$

Для розрахунку імовірностей для всіх значень K ($0 < K < N$) можна скористатися формулою, за допомогою якої P_K обчислюють за значеннями P_{K-1}:

$$P_K = \frac{N-K+1}{K} \cdot \frac{P}{q} \cdot P_{K-1}, \qquad K = 1,\ldots,N \tag{3.2}$$

Значення P_0 обчислюють за формулою (3.1), що при $K = 0$ приймає вигляд $P_0 = q^N$, а всі інші P_K – за формулою (3.2).

Найімовірнішу кількість подій A ($K_{\max}$) знаходять в інтервалі:

$$N \cdot P - q \le K_{\max} \le N \cdot P + P. \tag{3.3}$$

Формула Бернуллі забезпечує високу точність розрахунків, але при великих значеннях N і K обчислення стають занадто громіздкими. Тому використовують також наближені методи обчислення імовірності P_K.

Замість (3.1) можна використати розрахунки за теоремою **Муавра–Лапласа**:

$$P_K \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{N \cdot P \cdot q}} \tag{3.4}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{K - N \cdot P}{\sqrt{N \cdot P \cdot q}}.$

Функція φ(x) – парна (φ(– x) = φ(x)) і приймає тільки невід'ємні значення. Для неї складені таблиці (Додаток 1) та передбачені вбудовані функції у математичних процесорах (*MatLab*, *MathCAD*, *MS Excel*).

Оскільки функція симетрична відносно осі ординат, то таблиці складені тільки для додатних значень аргументу.

У тих випадках, коли ймовірність P реалізації події A наближається до нуля, то доцільно використовувати формулу **Пуассона**, згідно з якою:

$$P_K \approx \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \tag{3.5}$$

де $\lambda = NP$.

Для функції P_K формули (3.5) також складені таблиці (Додаток 2) та існують вбудовані функції.

Для визначення ймовірності того, що частота появи події A знаходиться у певному інтервалі, можна застосувати інтегральну теорему **Лапласа**, яка передбачає використання наступних формул:

$$P_K(a \le K \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \tag{3.6}$$

де $x_1 = \frac{a - N \cdot P}{\sqrt{N \cdot P \cdot q}}, \qquad x_2 = \frac{b - N \cdot P}{\sqrt{N \cdot P \cdot q}},$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{3.7}$$

$\Phi(x)$ є функцією Лапласа, інтегралом від функції $\varphi(x)$ [див. (3.4)]. Її значення розташовані в інтервалі [-0,5; 0,5], при цьому $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, $\Phi(\infty) = 0{,}5$. Функція непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Таблицю зі значеннями функції Лапласа наведено у Додатку 3.

Імовірність того, що відносна частота події *A*, *K*/*N* відрізняється від імовірності події *A*, тобто від *P* за абсолютною величиною менше ніж на певне ε > 0, визначають згідно з (3.6) за виразом:

$$P\left(\left|\frac{K}{N} - P\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{N}{Pq}}\right). \qquad (3.8)$$

3.2. Задачі

Задача 3.1. Нехай імовірність невчасно почати планову повірку одного ТЗА складає 0,03. Знайти найбільш імовірну кількість запізнілих повірок для 655 пристроїв.

Розв'язання. Позначимо загальну кількість випробувань (повірок) *N* = 655, а ймовірність невчасного початку однієї повірки *P* = 0,03. Найбільш імовірну кількість запізнень у цих випробуваннях позначимо K_{max}, її визначимо з (3.3), для даної задачі $q = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

Отже, діапазон, у якому може знаходитися значення K_{max}, наступний

$$655 \cdot 0{,}03 - 0{,}97 \le K_{\max} \le 655 \cdot 0{,}03 + 0{,}03;$$

$$19{,}65 - 0{,}97 \le K_{\max} \le 19{,}65 + 0{,}03;$$

$$18{,}68 \le K_{\max} \le 19{,}68.$$

Отже, K_{max} = 19.

Задача 3.2. З’ясовано, що працівники цеху КВП і А великого виробничого об’єднання з імовірністю 0,03 витрачають час, менший 30 хвилин на усунення недоліків у роботі термопар та термометрів опору. Визначити найбільш імовірну кількість ремонтів у названий термін, якщо впродовж року термопари та термометри опору виходили з ладу 485 разів.

Задача 3.3. Фірма–виробник ТЗА запропонувала користувачам обслуговувати куплені у неї ТЗА ще рік після гарантійного терміну за таких умов: післягарантійний термін обслуговування певної категорії ТЗА – один рік для 1000 одиниць, внесок за таке обслуговування 2,5 грн. за кожний ТЗА. У разі поломки ТЗА користувачу у післягарантійний період виплачують 180 грн. Яка ймовірність того, що до кінця року фірма–виготовник не зазнає втрат, якщо ймовірність виходу з ладу окремого ТЗА впродовж позагарантійного року складає 0,008. Задачу розв’язати за теоремами Пуассона, Муавра – Лапласа та Бернуллі.

Розв’язання. Визначимо, яка кількість поломок у післягарантійний термін зробить таку послугу неприбутковою. Внески за 1000 ТЗА по 2,5 грн. дадуть прибуток

$$1000 \cdot 2{,}5 \text{ грн.} = 2\,500 \text{ грн.}$$

Витрати залежать від кількості поломок ТЗА, наприклад, їх буде K, тоді вони становитимуть $180K$ грн. З цих міркувань послуга буде збитковою, якщо

$$2500 < K \cdot 180.$$

З нерівності випливає, що збитковість послуги буде при кількості поломок $K > 13{,}88$, округлюючи, $K \geq 14$.

Позначимо загальну кількість повторних випробувань, як $N = 1000$ (ТЗА), ймовірність виходу з ладу одного ТЗА, як $P = 0{,}008$.

За формулою Пуассона (3.5), враховуючи, що ймовірність окремої події *P* мала, визначимо ймовірність появи 14 поломок для 1000 ТЗА:

$$P_{14,1000} = \frac{\lambda^{14}}{14!} e^{-\lambda} = 0{,}017,$$

де $\lambda = N \cdot P = 1000 \cdot 0{,}008 = 8$.

Для порівняння використаємо теорему Муавра–Лапласа (3.4):

Підставимо умови задачі:

$$x = \frac{14 - 1000 \cdot 0{,}008}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}992}} = \frac{6}{2{,}82} = 2{,}13;$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2{,}13^2}{2}} = 0{,}0422;$$

$$P_{1000}(14) \cong \frac{0{,}0422}{2{,}82} = 0{,}015.$$

Використаємо формулу Бернуллі (3.1):

$$P_{1000}(14) = C_{1000}^{14} \cdot 0{,}008^{14} 0{,}992^{1000-14} = 0{,}017.$$

Результати, отримані трьома методами розрахунку, для умов задачі відрізняються не суттєво.

Задача 3.4. Імовірність того, що результат вимірювання в’язкості сировини на вході у реактор відповідає технічним вимогам становить 60%. Скільки треба зробити вимірювань, щоб найімовірніша кількість отримання потрібної сировини склала 80?

Задача 3.5. В умовах нестабільності властивостей сировини брак виготовлення паперової упаковки у середньому складає 10%. Скільки треба виготовити упаковок, щоб із імовірністю 0,95 кількість бракованих упаковок не перевищувала 12? Використати методи Муавра–Лапласа та Бернуллі.

Задача 3.6. У результаті досліджень з’ясовано, що 30% порушень технологічного процесу викликані поганою роботою вимірювачів тиску. Протягом місяця спостерігали у цілому 12 порушень процесу. Треба визначити найбільш ймовірну кількість порушень через роботу названих вимірювачів та визначити цю найбільшу ймовірність.

Задача 3.7. Імовірність витягти запитання, на яке знаєш відповідь, дорівнює 0,4. Взято 5 запитань. Знайти для них найбільш імовірну кількість запитань, на які знаєш відповіді, а також відповідну ймовірність.

Задача 3.8. Частка виробів вищого сорту становить 31%. Знайти найімовірнішу кількість виробів вищого сорту у випадково відібраній партії з 75 виробів. Визначити: а) імовірність найімовірнішої кількості; б) імовірність того, що виробів вищого сорту виявиться більше 30.

Розв’язання. Визначимо найімовірнішу кількість виробів вищого сорту, K_{max}:

$$N \cdot P - q \le K_{max} \le N \cdot P + P;$$

$$75 \cdot 0{,}31 - 0{,}69 \le K_{max} \le 75 \cdot 0{,}31 + 0{,}31;$$

$$22{,}56 \le K_{max} \le 23{,}56;$$

$$K_{max} = 23.$$

$$K_{max} = N \cdot P = 75 \cdot 0{,}31 \approx 23.$$

а) Визначимо ймовірність отримання такої кількості виробів вищого сорту:

$$P_N(K_{\max}) = C_N^{K_{\max}} \cdot P^{K_{\max}} \cdot q^{N-K_{\max}} = C_{75}^{23} \cdot 0{,}31^{23} \cdot 0{,}69^{52} = \frac{75!}{23!52!} \cdot 0{,}31^{23} \cdot 0{,}69^{52} = 0{,}099.$$

б) Визначимо ймовірність того, що виробів вищого сорту виявиться більше 30, для цього використаємо інтегральну теорему Лапласа:

Інтегральна теорема Лапласа (3.6) пропонує наступну формулу для визначення ймовірності $P_N(K_1,\ K_2)$ того, що подія G матиме місце в N випробуваннях не менше K_1 і не більше K_2 разів:

Оскільки інтеграл у цьому виразі не можна визначити через елементарні функції, то використовують функцію Лапласа, $\Phi(x)$ (3.7).

Використання $\Phi(x)$ дає можливість розрахувати $P_N(K_1,K_2)$ за виразом (3.6).

Згідно з умовою $K_1 = 0$, а $K_2 = 30$. Розрахуємо параметри a та b:

$$a = \frac{K_1 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}} = \frac{0 - 75 \cdot 0{,}31}{\sqrt{75 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}69}} = \frac{0 - 23{,}25}{\sqrt{16{,}04}} = -5{,}81;$$

$$b = \frac{K_2 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}} = \frac{30 - 75 \cdot 0{,}31}{\sqrt{75 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}69}} = \frac{6{,}75}{\sqrt{16{,}04}} = 1{,}69.$$

$$\Phi(a) \approx -0{,}5;\ \ \Phi(b) \approx 0{,}45;$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P_{75}(K > 30) = 1 - (P_{75}(0{,}30)) \approx 1 - [0{,}45 - (-0{,}5)] = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

Скористаємось теоремою Бернуллі:

$$P_{75}(K > 30) = \sum_{i=31}^{75} P_{75}(i) = \sum_{i=31}^{75} C_{75}^{i} \cdot P^{i} \cdot q^{75-i} = \sum_{i=31}^{75} C_{75}^{i} \cdot 0{,}31^{i} \cdot 0{,}69^{75-i} = 0{,}037.$$

Задача 3.9. Визначити найімовірнішу кількість сонячних днів протягом першої декади вересня, якщо за даними багаторічних спостережень відомо, що у вересні в середньому буває 11 похмурих днів. Визначити: а) імовірність найімовірнішої кількості сонячних днів; б) імовірність того, що сонячних днів буде не менше шести.

Задача 3.10. З автовокзалу відправилися автобуси в аеропорт. Ймовірність своєчасного прибуття кожного автобуса в аеропорт дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що а) обидва автобуси прибудуть вчасно; б) обидва автобуси запізняться; в) тільки один автобус прибуде вчасно.

Задача 3.11. Гральну кістку підкинули 100 разів. Знайти ймовірність того, що: а) 5 очок випадуть 50 разів; б) 6 очок випадуть не більше 50 разів.

Розв'язання. Нехай кількість випробувань N = 100; позначимо A = 5 подію «*випало 5 очок*», тоді $N_A(A = 5) = 50$; позначимо B = 6 подію «*випало 6 очок*», тоді $N_B(B = 6) \leq 50$. Розрахуємо ймовірності подій A = 5 та B = 6. Враховуючи те, що кістка має 6 граней, а ймовірності випадання їх можна прийняти однаковими, запишемо

$$P(A = 5) = P(B = 6) = 1/6 = 0,167.$$

а) Розрахуємо ймовірність події «*5 очок випадуть 50 разів із 100*» за формулою Бернуллі:

$$P_{100}(50) = C_{100}^{50} \cdot 0,167^{50} \cdot 0,833^{50} = 1,486 \cdot 10^{-14}.$$

б) Розрахуємо ймовірність події «6 очок випадуть не більше 50 разів із 100», $P(0, 50)$. Для цього використаємо інтегральну теорему Лапласа (3.6):

Згідно з умовою $K_1 = 0$, а $K_2 = 50$. Розрахуємо параметри a та b:

$$a = \frac{K_1 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}} = \frac{0 - 100 \cdot 0,167}{\sqrt{100 \cdot 0,167 \cdot 0,833}} = \frac{0 - 16,7}{\sqrt{13,91}} = -\frac{16,7}{3,73} = -4,48;$$

$$b = \frac{K_2 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0,167}{\sqrt{100 \cdot 0,167 \cdot 0,833}} = \frac{50 - 16,7}{3,73} = \frac{33,3}{3,73} = 8,93.$$

$\Phi(a) \approx -0,5$; $\Phi(b) \approx 0,5$;

Шукана ймовірність дорівнює

$P_{100}(0, 50) = 0,5 - (-0,5) = 1.$

Скористаємось теоремою Бернуллі:

$$P_{100}(K \le 50) = \sum_{i=0}^{50} P_{100}(i) = \sum_{i=0}^{50} C_{100}^{i} \cdot P^{i} \cdot q^{100-i} = \sum_{i=0}^{50} C_{100}^{i} \cdot 0{,}167^{i} \cdot 0{,}833^{100-i} = 1.$$

Задача 3.12. Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,05. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найімовірніша кількість нестандартних деталей в ній була 63. Знайти ймовірність того, що серед 100 деталей опиниться: а) 20 нестандартних; б) не більше 20 нестандартних.

Задача 3.12′. Розглянемо виготовлення стандартних деталей у задачі 3.12. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,95. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найімовірніша кількість стандартних деталей в ній була 63.

Задача 3.13. Відносна частота дрібних гранул у партії продукції складає 25%. Скільки гранул повинно бути в лабораторній пробі, щоб найімовірніша кількість дрібних гранул у ній становила 114? Визначити ймовірність того, що в пробі з 200 гранул виявляться дрібними: а) точно 100 гранул; б) дрібних гранул налічуватиметься від 100 до 200.

Розв'язання. Уведемо позначення: ймовірність появи дрібних гранул, P = 0,25; q = 1 – 0,25 = 0,75; найімовірніша кількість дрібних гранул у пробі, $K_{\max}$ = 114.

Визначимо кількість гранул у пробі, якій відповідає $K_{\max}$ = 114.

Визначимо N з подвійної нерівності

$$N \cdot 0{,}25 - 0{,}75 \le 114 \le N \cdot 0{,}25 + 0{,}25.$$

Складемо систему з двох нерівностей

$$\begin{cases} N \cdot 0{,}25 - 0{,}75 \le 114; \\ N \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \ge 114. \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \cdot 0{,}25 \le 114{,}75; \\ N \cdot 0{,}25 \ge 113{,}25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \le 459; \\ N \ge 453. \end{cases}$$

Тобто, за умови задачі запишемо $453 \le N \le 459$.

а) Визначимо ймовірність того, що в пробі з 200 гранул виявляться дрібними точно 100 гранул.

Шукану ймовірність позначимо $P_{200}(100)$.

$$P_{200}(100) = C_{200}^{100} \cdot 0{,}25^{100} \cdot 0{,}75^{100} = 1{,}81 \cdot 10^{-14}.$$

б) Визначимо ймовірність того, що в пробі з 200 гранул дрібних виявиться від 100 до 200.

Шукану ймовірність позначимо $P_{200}(100, 200)$.

Скористаємось інтегральною теоремою Лапласа:

Згідно з умовою $K_1 = 100$, а $K_2 = 200$. Розрахуємо параметри a та b:

$$a = \frac{K_1 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}} = \frac{100 - 200 \cdot 0{,}25}{\sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{100 - 50}{\sqrt{37{,}5}} = \frac{50}{6{,}12} = 8{,}17;$$

$$b = \frac{K_2 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}} = \frac{200 - 200 \cdot 0{,}25}{\sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{150}{6{,}12} = 24{,}51.$$

$\Phi(a) \approx 0{,}5$; $\Phi(b) \approx 0{,}5$;

Шукана ймовірність дорівнює

$P_{200}(100, 200) = 0{,}5 – 0{,}5 = 0$.

Задача 3.14. На верстаті виготовили 90 деталей. Чому дорівнює ймовірність виготовлення на цьому верстаті деталі 1-го сорту, якщо найімовірніша кількість таких деталей у партії дорівнює 82? Знайти ймовірність того, що в партії деталей 1-го сорту опиниться: а) точно 80; б) не менше 80.

Задача 3.15. Проведено статистичне дослідження виходу з ладу пристроїв для відбору проб для визначення гранулометричного складу добрив після гранулятора. Було проведено 50 досліджень. Ймовірність пошкодження пристроїв впродовж доби становила 60%. Розрахувати ймовірності наступних подій:

а) пошкоджень було від 30 до 40 з 50 досліджень;

б) пошкоджень було менше 30;

в) пошкоджень було більше 40.

Застосувати формулу Бернуллі та теорему Муавра–Лапласа.

Розв'язання. Використаємо формулу Бернуллі (3.1):

а) пошкоджень було від 30 до 40 з 50 досліджень:

$$P_{50}(30 \le K \le 40) = \sum_{i=30}^{40} P_{50}(i) = \sum_{i=30}^{40} C_{50}^{i} \cdot P^{i} \cdot q^{50-i} = \sum_{i=30}^{40} C_{50}^{i} \cdot 0{,}6^{i} \cdot 0{,}4^{50-i} = 0{,}56.$$

б) пошкоджень було менше 30:

$$P_{50}(K < 30) = \sum_{i=0}^{29} P_{50}(i) = \sum_{i=0}^{29} C_{50}^{i} \cdot P^{i} \cdot q^{50-i} = \sum_{i=0}^{29} C_{50}^{i} \cdot 0{,}6^{i} \cdot 0{,}4^{50-i} = 0{,}439.$$

в) пошкоджень було більше 40:

$$P_{50}(K > 40) = \sum_{i=41}^{50} P_{50}(i) = \sum_{i=41}^{50} C_{50}^{i} \cdot P^{i} \cdot q^{50-i} = \sum_{i=41}^{50} C_{50}^{i} \cdot 0{,}6^{i} \cdot 0{,}4^{50-i} = 0{,}0007.$$

Використаємо теорему Муавра–Лапласа (3.4).

а) пошкоджень було від 30 до 40 з 50 досліджень:

$$P_{50}(30 \le K \le 40) = \sum_{i=30}^{40} P_{50}(i) = 0{,}56;$$

б) пошкоджень було менше 30:

$$P_{50}(K < 30) = \sum_{i=0}^{29} P_{50}(i) = 0{,}439;$$

в) пошкоджень було більше 40:

$$P_{50}(K > 40) = \sum_{i=41}^{50} P_{50}(i) = 0{,}0012.$$

В обох методах суми ймовірностей подій дорівнюють одиниці, з огляду на те, що події складають повну систему подій.

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1. Основні визначення та формули

Законом розподілу випадкової величини називають відповідність між значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями.

Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у вигляді ***таблиці, багатокутника розподілу, функції розподілу*** **та** ***функції щільності розподілу***.

Таблиця розподілу має вигляд (L – кількість груп з різними значеннями X).

Таблиця 4.1. Розподіл ймовірностей величини X

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_L
P	P_1	P_2	P_3	…	P_i	…	P_L

При упорядкуванні таблиці звичайно формують варіаційний ряд, а саме розташовують дані в порядку зростання. Таким чином, у наведеній таблиці дотримані співвідношення $x_1 < x_2 < x_3 <\ldots< x_i < x_L$.

Ряд розподілу можна описати і графічно (рис. 4.1). По осі абсцис відкладають значення випадкової величини, а по осі ординат – відповідні їм імовірності, точки з'єднують відрізками прямих ліній. Отримана фігура називається *багатокутником розподілу*.

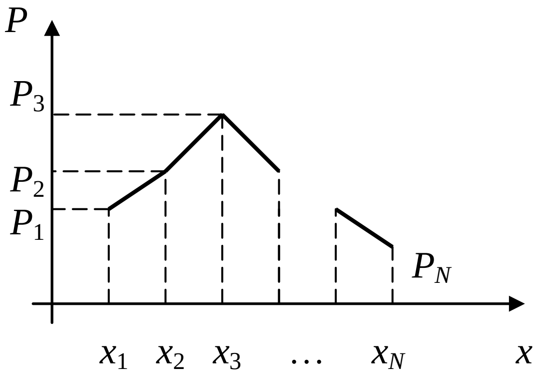


Рис.4.1. Багатокутник розподілу імовірностей X

Функція розподілу – це ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за фіксоване дійсне число x, тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Для дискретної випадкової величини X, яка може приймати значення x_1, x_2,... , x_N, функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \tag{4.1}$$

Нерівність $x_i < x$ означає, що підсумовування поширюється на всі ті значення x_i, які менше x.

Функція розподілу має стрибки у тих точках, у яких випадкова величина приймає значення, вказані у ряді розподілу. В інтервалах між цими значеннями функція $F(x)$ – стала величина. Сума всіх стрибків функції дорівнює одиниці.

Розрахуємо значення $F(x)$:

$$F(x_1) = P(X < x_1) = 0;$$

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = P_1;$$

$$F(x_3) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = P_1 + P_2;$$

....

$$F(x_N) = P(X < x_N) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_{N-1}) =$$
$$= P_1 + P_2 + ... + P_{N-1};$$

при $X > x_N$;

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_{N-1}) + P(X = x_N) =$$
$$= P_1 + P_2 + \ldots + P_{N-1} + P_N = 1.$$

Диференціальною функцією розподілу імовірностей $f(x)$ (або функцією **щільності розподілу ймовірностей)** є перша похідна від інтегральної функції $F(x)$, тобто $f(x) = F^{'}(x)$.

Функцію $f(x)$ не можна застосовувати для опису розподілу імовірностей дискретної випадкової величини.

Математичне сподівання визначає деяке середнє значення випадкової величини, навкруг якого зосереджені всі імовірні її значення. Тому математичне сподівання називають іноді **середнім значенням** випадкової величини. Цей параметр характеризує положення випадкової величини на числовій осі. Запишемо загальний вираз для розрахунку математичного сподівання

$$\mu_x = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_K P_K}{P_1 + P_2 + \ldots + P_K} = \frac{\sum_{i=1}^{K} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{K} P_i} = \sum_{i=1}^{K} x_i P, \tag{4.2}$$

де μ_X - математичне сподівання (середнє значення) змінної *X*; P_i – імовірність появи *i*-го значення змінної *X* (тобто x_i), *K* – кількість різних значень *X*.

Вирази, наведені в (4.2), застосовують в основному для дискретних величин або для обробки експериментальних даних, коли навіть неперервна величина подана таблицею, тобто окремими можливими її значеннями. Якщо закон розподілу можна подати у вигляді функції *f*(*x*), то математичне сподівання можна отримати з виразу

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{4.3}$$

До характеристик положення випадкової величини крім математичного сподівання належать мода, *Mo* та медіана, *Me*.

Модою дискретної випадкової величини є найбільш імовірне її значення.

Модою неперервної випадкової величини є таке її значення, при якому щільність розподілу має максимум.

Медіаною випадкової величини називають таке її значення, при якому справедлива рівність

$$P(X < Me) = P(X > Me),$$

тобто однаково ймовірні дві події: випадкова величина виявиться менше *Me* та більше *Me*. З геометричної точки зору медіана – це абсциса точки, у якій площа, що обмежена кривою функції розподілу, розділена навпіл.

До основних характеристик розсіювання значень випадкової величини належать **дисперсія** σ_x^2 та **середнє квадратичне (стандартне) відхилення** σ_x.

Для випадкових величин, поданих таблицею, дисперсію визначають за виразами:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{K} (x_i - \mu_x)^2 P_i; \qquad (4.4)$$

$$\sigma_x^2 = \mu_{x^2} - (\mu_x)^2. \qquad (4.5)$$

Для закону розподілу, який можна подати у вигляді функції *f*(*x*), дисперсію можна отримати наступним чином

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_x)^2 f(x) dx. \qquad (4.6)$$

Середнє квадратичне (стандартне) відхилення розраховують так

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}. \qquad (4.7)$$

Коефіцієнт асиметрії є характеристикою зкошеності розподілу, його визначають так:

- для випадкових величин, поданих таблицею,

$$A = \frac{\nu_{3,ц}}{\sigma_x^3} = \frac{\sum_{i=1}^{K}(x_i - \mu_x)^3 P_i}{\sigma_x^3}, \qquad (4.8)$$

- для величин, закон розподілу яких можна подати у вигляді функції $f(x)$,

$$A = \frac{\nu_{3,ц}}{\sigma_x^3} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x_i - \mu_x)^3 f(x)dx}{\sigma_x^3}. \qquad (4.9)$$

Ексцес є характеристикою гостровершинності розподілу, його розраховують так:

- для випадкових величин, поданих таблицею,

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{K}(x_i - \mu_x)^4 P_i}{\sigma_x^4} - 3, \qquad (4.10)$$

- для величин, закон розподілу яких можна подати у вигляді функції $f(x)$,

$$E = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x_i - \mu_x)^4 f(x)dx}{\sigma_x^4} - 3. \qquad (4.11)$$

4.2. Задачі

Задача 4.1. У результаті проведення експериментальних досліджень отримано дані, наведені у табл. 4.2 (непарні рядки – номери експериментів, парні – значення випадкової величини *X* в експерименті):

Таблиця 4.2. Експериментальні дані

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,1	2,3	2,5	2,7	2,5	2,7	2,9	2,4	2,4	2,6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2,6	2,2	2,3	2,5	2,1	2,5	2,5	2,4	2,5	2,8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2,4	2,3	2,6	2,6	2,3	2,5	2,3	2,2	2,4	2,3

За результатами експериментів треба виконати наступні завдання:

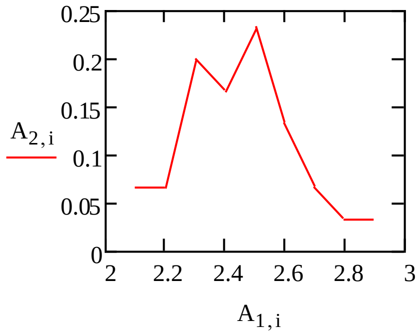
1) сформувати таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини;
2) побудувати багатокутник розподілу ймовірностей;
3) побудувати функцію розподілу ймовірностей;
4) визначити моду та медіану випадкової величини;
5) оцінити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

Розв'язання. 1) Таблиця розподілу ймовірностей *X* має вигляд (табл. 4.3).

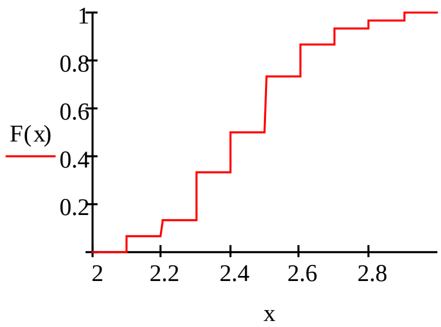
Таблиця 4.3. Таблиця розподілу ймовірностей випадкової величини *X*

x_i	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	**Σ**
N_i	2	2	6	5	7	4	2	1	1	**30**
W_i	0,067	0,067	0,200	0,167	0,233	0,133	0,067	0,033	0,033	**1**
P_i	0,067	0,067	0,200	0,167	0,233	0,133	0,067	0,033	0,033	**1**

2) Багатокутник розподілу має вигляд:



3) Функція розподілу матиме вигляд:



4) Мода випадкової величини X дорівнює найбільш імовірному її значенню, тобто Mo = 2,5. Імовірність її появи $P(X = 2{,}5) = 0{,}233$.

Медіана передбачає виконання співвідношення $P(X \le Me) = P(X \ge Me)$. Підрахувавши ймовірності, можна побачити, що $P(X \le 2{,}4) = 0{,}501$, а $P(X \ge 2{,}5) = 0{,}499$. Тобто, значення між 2,4 та 2,5 можна назвати медіаною.

5) Математичне сподівання розрахуємо за (4.2), а дисперсію – за (4.4):

$$\mu_x = 2{,}1 \cdot 0{,}067 + 2{,}2 \cdot 0{,}067 + 2{,}3 \cdot 0{,}200 + 2{,}4 \cdot 0{,}167 + 2{,}5 \cdot 0{,}233 + 2{,}6 \cdot 0{,}133 + {}$$
$$+ 2{,}7\ 0{,}067 + 2{,}8 \cdot 0{,}033 + 2{,}9 \cdot 0{,}033 = 2{,}446.$$

$$\sigma_x^2 = (2{,}1 - 2{,}446)^2 \cdot 0{,}067 + (2{,}2 - 2{,}446)^2 \cdot 0{,}067 + \ldots + (2{,}9 - 2{,}446)^2 \cdot 0{,}033 =$$
$$= 0{,}036.$$

Для задач 4.2 – 4.5. виконати завдання 1 – 5 попередньої задачі.

Задача 4.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,1	5,3	4,5	4,7	4,5	4,7	4,9	4,4	4,4	4,6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4,6	5,2	5,3	4,5	4,1	4,5	4,5	4,4	4,5	4,9
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4,4	5,3	4,6	4,6	5,3	4,5	5,3	5,2	4,4	5,3

Задача 4.3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,1	2,3	1,5	1,7	1,5	1,7	1,9	1,4	1,4	1,6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,6	2,2	2,3	1,5	1,1	1,5	1,5	1,4	1,5	1,9
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1,4	2,3	1,6	1,6	2,3	1,5	2,3	2,2	1,4	2,3

Задача 4.4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,1	2,3	2,5	2,7	2,5	2,7	2,9	2,4	2,4	2,6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2,6	2,2	2,3	2,5	2,1	2,5	2,5	2,4	2,5	2,8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2,4	2,3	2,6	2,6	2,3	2,5	2,3	2,2	2,4	2,3

Задача 4.5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,2	4,6	5,0	5,4	5,0	5,4	8	4,8	4,8	5,2
11	12	13	14	15	16	17	14	19	20
5,2	4,4	4,6	5,0	4,2	5,0	5,0	4,8	5,0	5,6
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4,8	4,6	5,2	5,2	4,6	5,0	4,6	4,4	4,8	4,6

Задача 4.6. Випадкова величина підпорядковується закону розподілу ймовірностей, поданому функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \infty < x < 0 \\ 0{,}05x,\ 0 \le x \le 20 \\ 1, x > 20 \end{cases}$$

Виконати наступні завдання:

1) визначити функцію щільності розподілу ймовірностей випадкової величини;

2) побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$;

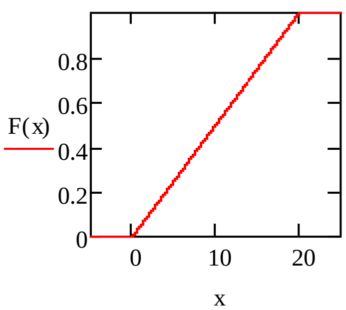
3) визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини;

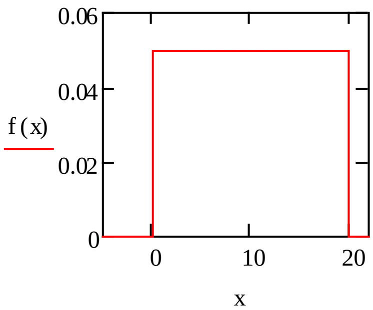
4) визначити моду та медіану випадкової величини.

Розв'язання.

1) $f1(x) := \frac{d}{dx}F(x)$ $\quad f(x) := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } -\infty < x < 0 \\ \frac{d}{dx}F(x) \text{ if } 0 \le x \le 20 \\ 0 \text{ if } x > 20 \end{vmatrix}$

2)





3) $\mu := \int_0^{20} x \cdot 0.05 dx = 10$ $\quad \sigma 2x := \int_0^{20} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx = 33.333$

4) Мода відсутня, оскільки усі значення X однаково ймовірні.

Медіана = (0 + 20)/2 = 10.

Для задач 4.7 – 4.13 виконати завдання 1 – 4 попередньої задачі.

Задача 4.7

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ 0{,}8x, & 2\le x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Задача 4.8

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0.02;\\ 0{,}3x^2, & 0{,}02\le x\le 1{,}826;\\ 1 & x>1{,}826.\end{cases}$$

Задача 4.9

$$F(x)=\frac{1}{3{,}5\sqrt{2\pi}}\int_{-55}^{x} e^{\frac{(x+47)^2}{2\cdot 12{,}25}}dx$$

Задача 4.10

$$F(x)=\frac{1}{3{,}5\sqrt{2\pi}}\int_{20}^{x} e^{\frac{(x-47)^2}{2\cdot 12{,}25}}dx$$

Задача 4.11

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-0{,}5x}, & 0\le x\le\infty.\end{cases}$$

Задача 4.12

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-2x}, & 0\le x\le\infty.\end{cases}$$

Задача 4.13.

X	0	1	2	…	10
$P_{10}(X)$	$C_{10}^{0}0{,}4^{0}0{,}6^{10}$	$C_{10}^{1}0{,}4^{1}0{,}6^{9}$	$C_{10}^{2}0{,}4^{2}0{,}6^{8}$	…	$C_{10}^{10}0{,}4^{10}0{,}6^{0}$

Задача 4.14. Випадкова величина підпорядковується закону розподілу ймовірностей, поданому функцією щільності розподілу $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{1}{8}x^2, & 0\le x\le 2{,}884; \\ 0, & x>2{,}884. \end{cases}$$

Виконати наступні завдання:

1) визначити функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$;

2) побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$;

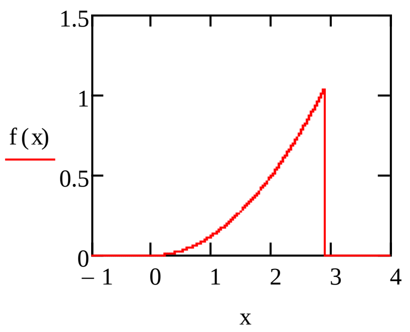
3) визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини;

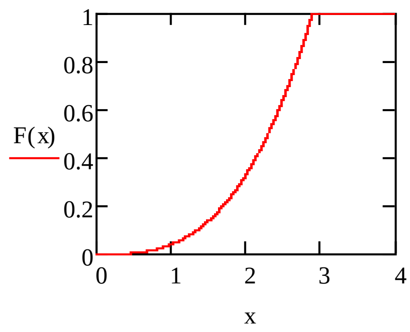
4) визначити моду та медіану випадкової величини.

Розв'язання.

1) $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{1}{24}x^3, & 0\le x\le 2{,}884; \\ 1, & x>2{,}884. \end{cases}$$

2)





$$\mu := \int_0^{2.884} x\cdot\frac{1}{8}x^2\,dx = 2.162 \qquad \sigma2 := \int_0^{2.884} (x-\mu)^2\frac{1}{8}x^2\,dx = 0.312$$

3)

4)Мода дорівнює Mo = 2,884. Медіану визначимо з виразу $x^3/24 = 0{,}5$:

$$Me=\sqrt[3]{12}=2{,}289\,.$$

Для задач 4.15 – 4.20 виконати завдання 1 – 4 попередньої задачі.

Задача 4.15

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 0{,}25, & 0\le x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Задача 4.16

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 0{,}5x, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Задача 4.17

$$f(x)=\frac{1}{0{,}8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-12)^2}{1{,}28}}$$

Задача 4.18

$$f(x)=\frac{1}{9\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-258)^2}{162}}$$

Задача 4.19

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 0{,}9e^{-0{,}9x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Задача 4.20

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2{,}5e^{-2{,}5x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Задача 4.21. Взяти участь в олімпіаді намагаються три студентські команди К1, К2 і К3. Перша досягне мети з імовірністю 0,94; друга – з імовірністю 0,98; третя – з імовірністю 0,9. Випадковою величиною *X* будемо вважати кількість цих команд, які будуть допущені до олімпіади. Визначити закон розподілу *X*, подати його у вигляді таблиці розподілу ймовірностей, багатокутника та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графіки з багатокутником та $F(x)$. Визначити математичне сподівання μ_x та дисперсію σ_x^2.

Розв'язання. Опишемо можливі події (несумісні події): – жодну команду не допустили до олімпіади; – допущено одну команду; – допущено дві команди; – допущено три команди.

Виконаємо розрахунок імовірностей кожної з зазначених подій:

$P(X_1 = 0) = 0.06 \cdot 0.02 \cdot 0.1 = 1.2 \times 10^{-4}$;

$P(X_2 = 1) = 0.94 \cdot 0.02 \cdot 0.1 + 0.06 \cdot 0.98 \cdot 0.1 + 0.06 \cdot 0.02 \cdot 0.9 = 8.84 \times 10^{-3}$

$P(X_3 = 2) = 0.94 \cdot 0.98 \cdot 0.1 + 0.94 \cdot 0.02 \cdot 0.9 + 0.06 \cdot 0.98 \cdot 0.9 = 0.162$

$P(X_4 = 3) = 0.94 \cdot 0.98 \cdot 0.9 = 0.829$

Перевірка : $0.00012 + 0.00884 + 0.162 + 0.829 = 1$.

Сформуємо таблицю розподілу:

X_i	0	1	2	3	
$P(X_i)$	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	$8{,}84 \cdot 10^{-3}$	0,162	0,829	$\Sigma = 1$

Подальші розрахунки виконати за формулами, наведеними при розв'язанні задачі 4.1.

Задача 4.22. Фірма по встановленню та обслуговуванню систем автоматизації співпрацює з трьома замовниками. Один з них займається хімічною промисловістю, другий – переробкою сільгосппродукції, третій кондиціюванням повітря. Відомо, що ймовірність налагодити систему автоматизації за час T у хімічній промисловості у середньому складає 75%; у сфері переробки – 80%; при кондиціюванні повітря – 90% (системи автоматизації одного типу). Розглядається випадкова величина – кількість систем автоматизації, що можуть бути налагоджені за час T. Визначити закон розподілу у вигляді таблиці розподілу ймовірностей, багатокутника та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графіки з багатокутником та $F(x)$. Визначити математичне сподівання μ_x та дисперсію σ_x^2.

Задача 4.23. Треба виконати повірку чотирьох лічильників води, що функціонують в різних умовах експлуатації. Ймовірності вчасно виконати повірку цих лічильників наступні: для першого 0,96; для другого – 0,92; для третього – 0,84; для четвертого – 0,88. Випадкова величина – кількість лічильників, які вчасно будуть повірені. Визначити закон розподілу у вигляді таблиці розподілу ймовірностей, багатокутника та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання μ_x та дисперсію σ_x^2.

Задача 4.24. Кожний з п’яти студентів готує наукову роботу на конкурс. Враховуючи різну глибину досліджень та актуальність робіт, імовірність вдало пройти перший тур конкурсу для першої роботи становить 0,75; для другої – 0,9; для третьої – 0,85; для четвертої – 0,70; для п’ятої – 0,85. Розглядається випадкова величина – кількість робіт, які пройдуть перший тур конкурсу. Визначити закон розподілу цієї випадкової величини у вигляді таблиці розподілу ймовірностей, багатокутника та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання μ_x та дисперсію σ_x^2.

Задача 4.25. Випадкова величина $Z1$ має закон розподілу, поданий у табл. 4.4, а величина $Z2$ – у табл. 4.5. Визначити закон розподілу випадкової величини $Z = Z1 + Z2$. Розрахувати математичне сподівання та дисперсію величини Z.

Таблиця 4.4. Закон розподілу ймовірностей $Z1$

Z1	1	2	4	5
Імовірність	0,1	0,3	0,4	0,2

Таблиця 4.5. Закон розподілу ймовірностей *Z*2

Z2	2	3	4
Імовірність	0,3	0,5	0,2

Розв'язання. Визначимо закон розподілу *Z*. Результати розрахунку наведемо у табл. 4.6.

Таблиця 4.6. Значення величини *Z* та визначення їх ймовірностей

Випадкові величини			Імовірність (*X*+*Y*)
*Z*1	*Z2*	*Z*	
1	2	3	$0,1 \cdot 0,3 = 0,03$
1	3	4	$0,1 \cdot 0,5 = 0,05$
1	4	5	$0,1 \cdot 0,2 = 0,02$
2	2	4	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
2	3	5	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$
2	4	6	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
4	2	6	$0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
4	3	7	$0,4 \cdot 0,5 = 0,2$
4	4	8	$0,4 \cdot 0,2 = 0,08$
5	2	7	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
5	3	8	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
5	4	9	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

У табл. 4.7 наведемо закон розподілу величини *Z*

Таблиця 4.7. Закон розподілу *Z* = *Z1* + *Z*2

Z	3	4	5	6	7	8	9	ΣP_{i}
Імовірність	0,03	0,14	0,17	0,18	0,26	0,18	0,04	1

Розрахуємо значення числових характеристик випадкових величин:

$$\mu_{z1} = \sum_{i=1}^{4} z1_i P_{z1i} = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}3;$$

$$\sigma_{z1}^2 = \sum_{i=1}^{4} (z1_i - \mu_{z1})^2 P_{z1i} = (1 - 3{,}3)^2 \cdot 0{,}1 + \ldots + (5 - 3{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}81;$$

$$\mu_{z2} = \sum_{i=1}^{3} z2_i P_{z2i} = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = 2{,}9;$$

$$\sigma_{z2}^2 = \sum_{i=1}^{3} (z2_i - \mu_{z2})^2 P_{z2i} = 0{,}49;$$

$$\mu_{z1+z2} = \sum_{i=1}^{7} (z1_i + z2_i)_i P_{(z1+я2)i} = 3 \cdot 0{,}03 + 4 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}17 + 6 \cdot 0{,}18 + 7 \cdot 0{,}26 +$$
$$+ 8 \cdot 0{,}18 + 9 \cdot 0{,}04 = 6{,}2;$$

$$\sigma_{z1+z2}^2 = \sum_{i=1}^{7} [(z1 + z2)_i - \mu_{z1+z2}]^2 P_{(z1+z2)i} = (3 - 6{,}2)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (9 - 6{,}2)^2 \cdot 0{,}04 = 2{,}30.$$

Задача 4.26. Розглядають випадкові величини *X* та *Y*. Закони їх розподілу відомі, подані у табличній формі (табл. 4.8 та 4.9). Треба визначити закон розподілу випадкової величини *X* + *Y* та розрахувати математичні сподівання та дисперсії усіх трьох величин. Перевірити, чи підтверджуються наступні властивості цих числових характеристик: μ(*X* + *Y*) = μ(*X*) + μ(*Y*); $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Розв'язання. Нехай випадкова величина *X* – кількість збоїв за місяць у програмному забезпеченні системи розподілення сировини А у паралельно працюючі технологічні нитки, випадкова величина *Y* – те саме для сировини Б. Збої – незалежні сумісні події.

Таблиця 4.8. Закон розподілу *X*

Кількість збоїв	3	4	5	6
Імовірність	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблиця 4.9. Закон розподілу *Y*

Кількість збоїв	2	3	4	5
Імовірність	0,5	0,2	0,2	0,1

Для задач 4.27 – 4.30 виконати завдання задач 4.26.

Задача 4.27.

Закон розподілу ймовірностей *Z*1

*Z*1	2	4	5	6
Імовірність	0,1	0,3	0,4	0,2

Закон розподілу ймовірностей *Z*2

*Z*2	1	3	4
Імовірність	0,3	0,5	0,2

Задача 4.28.

Закон розподілу ймовірностей *Z*1

*Z*1	1	3	4	5
Імовірність	0,1	0,3	0,4	0,2

Закон розподілу ймовірностей *Z*2

Z2	2	3	4
Імовірність	0,3	0,5	0,2

Задача 4.29.

Закон розподілу ймовірностей *Z*1

*Z*1	1	3	4	5
Імовірність	0,1	0,3	0,4	0,2

Закон розподілу ймовірностей Z2

Z2	1	2	4
Імовірність	0,3	0,5	0,2

Задача 4.30.

Закон розподілу ймовірностей *Z*1

*Z*1	1	2	3	5
Імовірність	0,1	0,3	0,4	0,2

Закон розподілу ймовірностей *Z*2

*Z*2	2	3	5
Імовірність	0,3	0,5	0,2

5. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

5.1. Основні визначення та формули

Якщо за вибіркою експериментальних даних досліджують вплив одного фактора на випадкову величину X, то мова йде про **однофакторний комплекс**. У тому випадку, коли враховують вплив двох факторів на X, то комплекс називають **двофакторним**.

У подальших дослідженнях передбачається, що фактори підпорядковуються нормальному розподілу.

5.1.1. Однофакторний комплекс

Розглянемо задачу, в якій треба з'ясувати, чи є однотипною продукція, що виготовляють в декількох паралельно працюючих апаратах з технологічними процесами одного типу.

За випадкову величину X вибирають один з факторів впливу на технологічний процес (вхідні змінні процесу). Фактором, що впливає на X, є різні апарати, позначимо їх кількість L.

Проведемо спостереження за роботою кожного апарата й одержимо L вибірок зі значеннями X. Вибірки в загальному випадку складаються з різної кількості елементів (N_1, N_2,..., N_L).

Сформуюємо з експериментальних даних таблицю спостережень (табл. 5.1).

Перевіримо, чи істотним є вплив типу апарата на вихідну змінну Y. Перевірку виконують в результаті порівняння групових і міжгрупових дисперсій за критерієм Фішера.

Якщо розбіжність між цими дисперсіями значна, то варто зробити висновок про те, що розходження між середніми значеннями вибірок обумовлено не тільки випадковими впливами, але і дією досліджуваного фактора.

Табл. 5.1. Таблиця даних для однофакторного комплексу

Кількість вибірок (апаратів)	Кількість елементів у вибірці					
	1	2	…	j	...	N_L
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1N1}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2N2}
…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{iNi}
…						…
L	x_{L1}	x_{L2}	…	x_{Lj}	…	x_{LNp}

Наведемо алгоритм обчислення та використання дисперсій.

Обчислимо середнє арифметичне елементів кожної вибірки:

$$M_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} x_{1j}}{N_1}; \qquad \mathrm{M_i} = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}}{N_i}; \qquad \mathrm{M_L} = \frac{\sum_{j=1}^{N_L} x_{Lj}}{N_L}.$$

Загальну середню арифметичну всіх L вибірок позначимо через M_x і визначимо так:

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^{L} M_i}{L}.$$

Знайдемо суму квадратів відхилень x_{ij} від M_x:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_x)^2 = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i+M_i-M_x)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i)^2 + \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(M_i-M_x)^2 + 2\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i)(M_i-M_x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Розглянемо останній вираз

$$2\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i)(M_i-M_x)=2\sum_{i=1}^{L}(M_i-M_x)\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i). \qquad (5.2)$$

Доданок $\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i)=0$ оскільки це – сума відхилень елементів однієї вибірки від їх середнього арифметичного. Тому і весь добуток у виразі (5.2) дорівнює нулю.

Розглянемося другий доданок у виразі для розрахунку Q_0.

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(M_i-M_x)^2=\sum_{i=1}^{L}(M_i-M_x)^2\cdot N_i.$$

При $N_1 = N_2 = ... = N_L = N$ можна записати

$$\sum_{i=1}^{L}(M_i-M_x)^2\cdot N_i = N\cdot\sum_{i=1}^{L}(M_i-M_x)^2\cdot$$

З урахуванням вище викладеного запишемо рівняння (5.1) наступним чином

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_x)^2}_{Q_0}=\underbrace{\sum_{i=1}^{L}(M_i-M_x)^2 N_i}_{Q_1}+\underbrace{\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-M_i)^2}_{Q_2}. \qquad (5.3)$$

Доданок Q_1 є сумою квадратів різниць між середніми значеннями окремих вибірок і загальним середнім усієї сукупності спостережень.

Ця сума називається сумою квадратів відхилень між групами і характеризує систематичну розбіжність між експериментальними вибірками. Величина Q_1 характеризує розсіювання за рахунок досліджуваного фактора.

Доданок Q_2 є сумою квадратів різниць між результатами окремих спостережень і середнім відповідної вибірки. Ця сума називається сумою квадратів відхилень усередині групи. Вона характеризує залишкове розсіювання випадкової величини в окремій вибірці.

Величина Q_0 – повна сума квадратів відхилень окремих спостережень від загальної середньої M_x.

Оцінимо дисперсії S_0^2, S_1^2, S_2^2. Для одержання незсунених оцінок дисперсій потрібно кожну суму квадратів розділити на кількість степенів вільності
NU_i (i = 0,1,2), тобто

$$S_0^2 = \frac{Q_0}{NU_0}; \quad S_1^2 = \frac{Q_1}{NU_1}; \quad S_2^2 = \frac{Q_2}{NU_2}.$$

Пригадаємо, що при обчисленні незсуненої оцінки дисперсії кількість степенів вільності дорівнює $N - 1$ (N – обсяг вибірки), тому що один степінь вільності губиться на визначення математичного сподівання (середнього арифметичного). Отже, кількість степенів вільності для загальної дисперсії Q_0 дорівнює

$$NU_0 = \sum_{i=1}^{L} N_i - 1,$$

якщо $N_1 = N_2 = ... = N_L = N$, то $NU_0 = L \cdot N - 1$.

Степінь вільності при оцінці дисперсії усередині групи визначається за виразом

$$NU_2 = \sum_{i=1}^{L} (N_i - 1) = \sum_{i=1}^{L} N_i - L,$$

оскільки використовують L співвідношень при обчисленні L групових середніх M_i. Якщо вибірки мають однаковий обсяг, то $NU_2 = N \cdot L - L = L(N-1)$.

Групові середні зосереджуються навкруг однієї загальної середньої, тому при оцінці міжгрупової дисперсії кількість степенів вільності визначають так

$$NU_1 = L - 1.$$

Підсумовуючи NU_1 і NU_2, одержимо NU_0:

$$NU_0 = L - 1 - \sum_{i=1}^{L} N_i - L = \sum_{i=1}^{L} N_i - 1,$$

Для вибірок одного обсягу NU_0 розраховують так:

$$NU_0 = L - 1 + L(N - 1) = L - 1 + LN - L = LN - 1.$$

Оцінки дисперсій для однакового обсягу вибірок розраховують за формулами:

$$S_0^2 = \frac{1}{LN-1}\sum_{i=1}^{L}\sum_{J=1}^{N}(x_{ij} - M_x)^2; \qquad \mathrm{S}_1^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L}(M_i - M_x)^2;$$

$$\mathrm{S}_2^2 = \frac{1}{L(N-1)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{J=1}^{N}(x_{ij} - M_i)^2. \tag{5.4}$$

За отриманими результатами розрахунків оцінок дисперсій можна перевірити також суттєвість розходжень між S_1^2 та S_2^2, використовуючи критерій Фішера (F – критерій). Його значення повинно бути більше 1, тому запишемо формули

- $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, якщо $S_1^2 > S_2^2$, (5.5)

- $F = \dfrac{S_2^2}{S_1^2}$ у противному випадку.

Якщо фактор справляє суттєвий вплив, то відношення дисперсій перевищить критичну межу, і вибірки варто вважати узятими з різних сукупностей (сукупностей із різним рівнем впливу фактора).

Статистика F підпорядковується розподілу з NU_1 і NU_2 степенями вільності (для S_1^2 та S_2^2, якщо $S_1^2 > S_2^2$). Критична межа визначається табличним значенням цього ж критерію Фішера, F_{tab}, на основі даних про степені вільності дисперсій та рівень значущості α (α – це ймовірність відхилення правильної гіпотези). Тому замість F_{tab} іноді пишуть $F_{NU_1, NU_2, \alpha}$.

Після визначення розрахункового та табличного значень критерію перевіряють умову $F \le F_{tab}$.

Якщо вона виконується, то можна вважати, що дисперсії однорідні (сумірні), тобто фактор не чинить суттєвого впливу.

У даній задачі це означає, що продукцію різних апаратів можна визнати однотипною.

Якщо умова $F \le F_{tab}$ не виконується, то можна вважати, що дисперсії суттєво відрізняються. Отже слід визнати суттєвим вплив досліджуваного фактора на *X*. Табличні (критичні) значення *F* – критерію при α=0,05 наведено у Додатку 4.

5.1.2. Двофакторний комплекс

Цей вид аналізу використовують тоді, коли треба оцінити вплив двох факторів на досліджувану випадкову величину (фактори *A* та *B*). Структура дисперсійного аналізу в цьому випадку така ж, яку було використано при однофакторному комплексі.

Розглянемо алгоритм дослідження на прикладі. Нехай є декілька однотипних технологічних апаратів і декілька партій сировини (сировина надходить, наприклад, від різних постачальників).

Потрібно оцінити, чи суттєво впливають особливості окремих апаратів та тип сировини на властивості готової продукції.

Позначимо через *A* фактор впливу типу апарату, через *B* – впливу типу сировини. Показник якості готової продукції позначимо через x_{ij} (i – номер апарату, j – номер партії сировини).

Сформуємо матрицю спостережень спочатку для ситуації, коли для кожної комбінації апарату і партії сировини є тільки одне спостереження (табл. 5.2). Нехай є *L* апаратів. У матриці спостережень їм відведено *L* рядків, їх називають рівнями фактора *A*.

Нехай є G партій сировини, кожній із них у матриці спостережень відповідає стовпчик, який називають рівнем фактора B.

Табл. 5.2. Таблиця спостережень для двофакторного комплексу

Апарати ($i=\overline{1,L}$)	Партії сировини ($j=\overline{1,G}$)						
	B_1	B_2		B_j		B_G	M_{Ai}
A_1	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1G}	M_{A1}
A_2	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2G}	M_{A2}
…	…	…		…		…	
A_i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{iG}	M_{Ai}
…	…	…		…		…	
A_L	x_{L1}	x_{L2}		x_{Lj}		x_{LG}	M_{AL}
M_{Bj}	M_{B1}	M_{B2}		M_{Bj}		M_{BG}	Mx

Розрахуємо середні значення по рядках, стовпчиках і для всієї матриці спостережень.

Уведемо позначення параметрів: M_{Ai}, M_{Bj} – середнє по i-у рядку та по j-у стовпчику; M_x – середнє для таблиці:

$$M_{Ai}=\frac{1}{G}\sum_{j=1}^{G}x_{ij};\quad M_{Bj}=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}x_{ij};\quad M_x=\frac{1}{L\cdot G}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{G}x_{ij}.$$

Основний вираз двофакторного аналізу має вигляд:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{G}(x_{ij}-M_x)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{G}(x_{ij}-M_{Ai}-M_{Bj}+M_x+M_{Ai}+M_{Bj}-M_x-M_x)^2 = \\ &= \underbrace{G\cdot\sum_{i=1}^{L}(M_{Ai}-M_x)^2}_{Q1} + \underbrace{L\cdot\sum_{j=1}^{G}(M_{Bj}-M_x)^2}_{Q2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{G}(x_{ij}-M_{Ai}-M_{Bj}+M_x)^2}_{Q3}. \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Доданок $Q1$ є сумою квадратів різниць між середніми по рядках і загальним середнім. Він характеризує залежність досліджуваної випадкової величини від фактору *A*.

Доданок $Q2$ – це сума квадратів різниць між середніми по стовпчиках і середнім для таблиці. Він характеризує залежність досліджуваної випадкової величини від фактору *B*.

Доданок $Q3$ – так звана залишкова сума квадратів, яка характеризує вплив не врахованих чинників.

Суму $Q0$ називають загальною (повною) сумою квадратів відхилень окремих результатів експериментів від середнього для таблиці.

Розрахунок вибіркових дисперсій наступний:

$$S_0^2 = \frac{Q_0}{LG-1} = \frac{1}{LG-1}\sum_{i=1}^{L}\sum_{J=1}^{G}(x_{ij} - M_x)^2; \qquad S_1^2 = \frac{Q_1}{L-1} = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L}(M_{Ai} - M_x)^2;$$

$$S_2^2 = \frac{Q_2}{G-1} = \frac{1}{G-1}\sum_{j=1}^{G}(M_{Bj} - M_x)^2;$$

$$S_3^2 = \frac{Q_3}{(L-1)(G-1)} = \frac{1}{(L-1)(G-1)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{G}(x_{ij} - M_{Ai} - M_{Bj} + M_x)^2. \tag{5.7}$$

Для з'ясування значущості впливу факторів *A* та *B* на досліджувану випадкову величину порівнюють дисперсії для S_1^2 та S_2^2 із залишковою дисперсією S_3^2 за допомогою критерію Фішера:

$$F_A = \frac{S_1^2}{S_3^2}\left\{\frac{L-1}{(L-1)(G-1)}\right\}; \quad F_B = \frac{S_1^2}{S_3^2}\left\{\frac{L-1}{(L-1)(G-1)}\right\}. \tag{5.8}$$

У фігурних дужках останніх двох виразів через дріб зазначені степені вільності дисперсій чисельника та знаменника відповідно.

Якщо виконуються вимоги $F_A < F_{tab}$ і $F_B < F_{tab}$, то впливи факторів (тобто властивостей апаратів і родовищ сировини) на показник готової продукції можна вважати не суттєвим.

5.2. Задачі

Задача 5.1. Потрібно з'ясувати, чи залежить міцність виробів від особливостей технологічного обладнання (технологічних апаратів).

Номер апарату	Міцність				
1	200	140	170	145	165
2	190	150	210	150	150
3	230	190	200	190	200
4	150	170	150	170	180

Розв′язування. Кількість вибірок (апаратів): L = 4, кількість елементів у кожній вибірці: N = 5.

Середнє арифметичне значення міцності в кожній i-й партії:

$$M_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij};$$

$$M_1 = \frac{200+140+170+145+165}{5} = 164;\ M_2 = 170;\ M_3 = 202;\ M_4 = 164.$$

Середнє арифметичне значення міцності в усіх вибірках:

$$M_x = \frac{1}{LN}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j}^{N} x_{ij} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} M_i = \frac{3500}{20} = \frac{164+170+202+164}{4} = 175.$$

Сума квадратів відхилень між групами з $NU_1 = L-1$:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{4}(M_i - M_x)^2 \cdot N_i = 5\sum_{i=1}^{4}(M_i - M_x)^2 = 5[(164-175)^2 +$$

$$+(170-175)^2 + (202-175)^2 + (164-175)^2] = 5\cdot 996 = 4980;$$

$$NU_1 = 4-1 = 3.$$

Сума квадратів відхилень у середині груп з $NU_2 = L(N-1)$:

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}\left(x_{ij} - M_i\right)^2 = [(200-164)^2 + (140-164)^2 +$$

$$+(170-164)^2 + ... + (170-164)^2 + (180-164)^2] = 7270;$$

$$NU_2 = 4(5-1) = 16.$$

Повна сума квадратів: Q_0 з $NU_0 = LN - 1$:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}\left(x_{ij} - M_x\right) = [(200-175)^2 + (140-175)^2 + (170-175)^2 +$$

$$+(145-175)^2 + (165-175)^2 + (190-175)^2 + (150-175)^2 +$$

$$+(210-175)^2 + (150-175)^2 + (150-175)^2 + (230-175)^2 + ... +$$

$$+(180-175)^2 = 12250;$$

$$NU_0 = 4 \cdot 5 - 1 = 20 - 1 = 19.$$

Наведемо результати розрахунків.

Компоненти дисперсії	Сума квадратів	Кількість степенів вільності	Значення
Міжгрупова, S_1^2	4980	3	1660,0
У середині групи, S_2^2	7270	16	454,4
Повна, S_0^2	12250	19	644,7

Оскільки $S_1^2 > S_2^2$, то для розрахункового значення критерію Фішера використаємо наступну формулу

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1660}{454{,}4} = 3{,}65.$$

Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$. Табличне значення критерію Фішера при $NU_1 = 3$, $NU_2 = 16$ та $\alpha = 0{,}01$ становить $F_{3,16,0.01} = 9.01$.

Умова $F \le F_{3,16,0.01}$ виконується, тому можна визнати несуттєвість відмінності між міцністю продукції, яка виготовляється у різних апаратах.

Задача 5.2. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливу температури сушильного агенту на вході сушарки на вологість продукції.

Температура	Вологість			
T_1	180	190	201	200
T_2	157	160	150	155
T_3	195	185	180	190
T_4	215	210	210	220

Задача 5.3. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливу сировини від різних фірм-постачальників на кислотність продукції.

Номер постачальника	pH продукції			
1	1	2	1	2
2	2	3	3	2
3	4	4	4	5
4	5	6	7	6

Задача 5.4. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливу роботи різних грохотів на концентрацію пилоподібної фракції у сипкому продукті.

Номер грохота	$C_{пил.фракц.}$ (%)			
1	2	1	1	2
2	2	2	3	3
3	5	4	4	4
4	6	7	6	5

Задача 5.5. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливу витрати сировини на вході апарату на густину продукту.

Витрата сировини	Густина продукту			
G_1	201	200	190	180
G_2	150	155	160	157
G_3	180	190	185	195
G_4	210	220	210	215

Задача 5.6. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливу типу сировини на її дисперсність.

Тип сировини	Дисперсність сировини			
1	14	13	14	12
2	22	24	21	20
3	17	16	15	15
4	18	16	17	16

Задача 5.7. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливу конструкції апарата на в'язкість продукції.

№ апарату	В'язкість			
1	12	14	13	14
2	20	21	24	22
3	15	15	16	17
4	16	17	16	18

Задача 5.8. Оцінити вплив факторів *A* та *B* на випадкову величину *X*.

Фактор *A* – курс, на якому навчаються студенти, він має два рівня (4-й та 5-й курси), фактор *B* – час проведення пари, він має три рівні (1-а, 2-а та 3-я пари). Величина *X* – кількість відсутніх студентів на заняттях за тиждень. Подамо матрицю спостережень.

A	*B*			
	B_1	B_2	B_3	M^*_{Ai}
A_1	1	2	3	2
A_2	5	6	10	7
M^*_{Bj}	3	4	6,5	4,5

Розв'язання. Кількість досліджуваних курсів: $L = 2$, кількість пар: $G = 3$.

Середнє по A_1: $M^*_{A1} = (1+2+3)/3 = 2$.

Середнє по B_1: $M^*_{B1} = (1+5)/2 = 3$.

Середнє для таблиці: $(M^*_{A1} + M^*_{A2})/2 = (2+7)/2 = 4{,}5$

або $(M^*_{B1} + M^*_{B2} + M^*_{B3})/3 = (3+4+6{,}5)/3 = 4{,}5$.

Суми квадратів:

$$Q_1 = V\sum_{i=1}^{R}\left(M_{i*} - M_x\right)^2 = 3\left[(2-4{,}5)^2 + (7-4{,}5)^2\right] = 3\left[(-2{,}5)^2 + 2{,}5^2\right] = 37{,}5;$$

$$Q_2 = R\sum_{j=1}^{V}\left(M_{*j} - M_x\right)^2 = 2\left[(3-4{,}5)^2 + (4-4{,}5)^2 + (6{,}5-4{,}5)^2\right] = 13;$$

$$Q_3 = (1-2-3+4{,}5)^2 + (2-2+4+4{,}5)^2 + (3-2-6{,}5+4{,}5)^2 +$$

$$+ (5-7-3+4{,}5)^2 + (6-7-4+4{,}5)^2 + (10-7-6{,}5+4{,}5)^2 = 3;$$

$$Q_0 = 37{,}5 + 13{,}0 + 3{,}0 = 53{,}5 .$$

Оцінки дисперсій:

$$S_1^2 = \frac{37{,}5}{1} = 37{,}5; \quad S_2^2 = \frac{13}{2} = 6{,}5; \quad S_3^2 = \frac{3}{1 \cdot 2} = 1{,}5.$$

Розрахункові значення критерію Фішера для факторів *A* та *B*:

$$F_A = \frac{S_1^2}{S_3^2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{37{,}5}{1{,}5} = 25; \qquad F_B = \frac{S_2^2}{S_3^2}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{6{,}5}{1{,}5} = 4{,}3.$$

Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Критичні значення критеріїв наступні:

$$F_{1,2,0.05} = 18{,}51; \quad \mathrm{F}_{2,2,0.05} = 19{,}0.$$

Оскільки $F_A > F_{1,2,0.05}$, то вважаємо, що нульова гіпотеза для фактора *A* не підтверджується, отже вплив цього фактора на досліджувану випадкову величину можна визнати суттєвим.

При $F_B < F_{2,2,0.05}$ нульову гіпотезу не відкидаємо, вважаємо вплив фактора *B* на випадкову величину несуттєвим.

Задача 5.9. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливів витрати та температури сировини на вологість продукції.

Витрата сировини	Температура сировини			
	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4
G_1	1	2	1	4
G_2	2	6	7	5
G_3	5	9	8	7

Задача 5.10. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливів типу сировини та типу апарата на концентрацію корисної речовини у продукції.

Тип сировини	Тип апарату			
	1	2	3	4
1	10	20	40	10
2	20	60	50	70
3	50	90	70	80

Задача 5.11. Засобами дисперсійного аналізу визначити суттєвість впливів типу сировини та типу апарата на кислотність продукції.

Тип апарату	Тип сировини			
	1	2	3	4
1	1,5	3,0	1,5	6,0
2	3,0	9,0	10,5	7,5
3	7,5	13,5	12,0	10,5

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1986. – 79 с.
2. Бублик Г.Ф. Фізичні процеси в прикладах і системах. - К.: Либідь, 1997. – 199 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 2003. – 249 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. шк., 2003. – 398 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1981. – 446с.
8. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.
9. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики. - М.: Финансы и статистика, 2001. – 480 с.
10. Жученко А.І., Ярощук Л.Д. Спеціальні розділи математики для дослідження комп’ютерних систем: Навч. посіб.-К.:ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2002. – 208с.
11. Завдання для самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей і методичні вказівки щодо їхнього виконання. Частина 1 / Уклад.: Т.М. Петрук. – Львів: Видавничий центр Львівського інституту економіки і туризму, 2007. − 45 с.
12. Коваленко И.Н.,Гнеденко Б.В. Теория вероятностей. - К.: Высш.шк.,1990. – 327 с.

13. Курс лекцій з дисципліни «Статистика». Частина 1. Теорія статистики / Сторожук В.П., Кустовська О.В., Ткач Є.І., Шост І.М. та ін. – Тернопіль: Економічна думка, 2006. – 224 с.
14. Математическая статистика / Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А., Решетникова И.О. – М.: Высш. шк., 1981. – 368 с.
15. Методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» / Уклад.: М. І. Самойленко. − Х.: ХНАМГ (Харк. нац. акад. міск. госп-ва), 2011. – 56 с.
16. Новікова Л.В., Котляр Б.Д., Бичков В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: Техніка, 1996. – 184с.
17. Решебник. Методические указания по самостоятельной работе студентов по курсу «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы» / Состав. А. А. Засядко, А. В. Петров. – Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. технич. ун-та, 2003. – 56 с.
18. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.-метод. пособие / Состав. Е.Л. Панкратов. − Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 46 с.
19. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: Навч. посібник / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: НМК, 1991. – 252с.
20. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. / О.Б. Жильцов. – К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.
21. Теорія ймовірностей у задачах автоматизації виробництва: Навчально – методичний посібник з курсу «Спеціальні розділи математики» / Уклад.: А.І. Жученко, В.В. Миленький, Л.Д. Ярощук. − К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 70 с.
22. Четыркин Е.М., Калихман И.Л. Вероятность и статистика. - М.: Финансы и статистика, 1982. - 319 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця Д.1. Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	2712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2974	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0655	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продовження табл. Д.1.

2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця Д.2. Значення функції Пуассона: $P(K)=\dfrac{\lambda^{K}}{K!}e^{-\lambda}\ (\times 10^{-4})$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0050	0076
4	0153	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0003	0033	0090	0194	0347
16						0001	0014	0045	0109	0217
17							0006	0021	0058	0128
18							0002	0009	0029	0071
19							0001	0004	0014	0037
20								0002	0006	0019
21								0001	0003	0009
22									0001	0004
23										0002
24										0001,6

Додаток 3

Таблиця Д.3. Значення функції Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Ф *(x)*	*x*	Ф*(x)*	*x*	Ф *(x)*	*x*	Ф *(x)*
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,31	0,4050
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,32	0,4065
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,33	0,4080
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,34	0,4100
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,35	0,4115
0,05	0,0199	0,50	0,1^15	0,95	0,3289	1,36	0,4130
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,37	0,4145
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,38	0,4160
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,39	0,4175
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,40	0,4190
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,41	0,4205
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,42	0,4220
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,43	0,4235
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,44	0,4250
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,45	0,4265
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,46	0,4280
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,47	0,4290
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,48	0,4305
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,49	0,4320
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,50	0,4330
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,51	0,4345
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,52	0,4355
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,53	0,4370
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,54	0,4380
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,55	0,4395
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,56	0,4405
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,57	0,4420
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,58	0,4430
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,59	0,4440
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,60	0,4450
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,61	0,4465
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,62	0,4475
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,63	0,4485
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,64	0,4495
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,65	0,4505
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,66	0,4515
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,67	0,4525
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,68	0,4535
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,69	0,4545
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,70	0,4555
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,71	0,4565

Продовження табл. Д.3

x	Φ (*x*)	*x*	Φ (*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,51	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

Додаток 4

Табл. Д.4. Критичні точки *F* – розподілу Фішера при α =5%

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**161,4476**	**199,5**	**215,7073**	**224,5832**	**230,1619**	**233,986**	**236,7684**	**238,8827**	**240,5433**	**241,8817**
2	**18,5128**	**19**	**19,1643**	**19,2468**	**19,2964**	**19,3295**	**19,3532**	**19,371**	**19,3848**	**19,3959**
3	**10,128**	**9,5521**	**9,2766**	**9,1172**	**9,0135**	**8,9406**	**8,8867**	**8,8452**	**8,8123**	**8,7855**
4	**7,7086**	**6,9443**	**6,5914**	**6,3882**	**6,2561**	**6,1631**	**6,0942**	**6,041**	**5,9988**	**5,9644**
5	**6,6079**	**5,7861**	**5,4095**	**5,1922**	**5,0503**	**4,9503**	**4,8759**	**4,8183**	**4,7725**	**4,7351**
6	**5,9874**	**5,1433**	**4,7571**	**4,5337**	**4,3874**	**4,2839**	**4,2067**	**4,1468**	**4,099**	**4,06**
7	**5,5914**	**4,7374**	**4,3468**	**4,1203**	**3,9715**	**3,866**	**3,787**	**3,7257**	**3,6767**	**3,6365**
8	**5,3177**	**4,459**	**4,0662**	**3,8379**	**3,6875**	**3,5806**	**3,5005**	**3,4381**	**3,3881**	**3,3472**
9	**5,1174**	**4,2565**	**3,8625**	**3,6331**	**3,4817**	**3,3738**	**3,2927**	**3,2296**	**3,1789**	**3,1373**
10	**4,9646**	**4,1028**	**3,7083**	**3,478**	**3,3258**	**3,2172**	**3,1355**	**3,0717**	**3,0204**	**2,9782**
11	**4,8443**	**3,9823**	**3,5874**	**3,3567**	**3,2039**	**3,0946**	**3,0123**	**2,948**	**2,8962**	**2,8536**
12	**4,7472**	**3,8853**	**3,4903**	**3,2592**	**3,1059**	**2,9961**	**2,9134**	**2,8486**	**2,7964**	**2,7534**
13	**4,6672**	**3,8056**	**3,4105**	**3,1791**	**3,0254**	**2,9153**	**2,8321**	**2,7669**	**2,7144**	**2,671**
14	**4,6001**	**3,7389**	**3,3439**	**3,1122**	**2,9582**	**2,8477**	**2,7642**	**2,6987**	**2,6458**	**2,6022**
15	**4,5431**	**3,6823**	**3,2874**	**3,0556**	**2,9013**	**2,7905**	**2,7066**	**2,6408**	**2,5876**	**2,5437**
16	**4,494**	**3,6337**	**3,2389**	**3,0069**	**2,8524**	**2,7413**	**2,6572**	**2,5911**	**2,5377**	**2,4935**
17	**4,4513**	**3,5915**	**3,1968**	**2,9647**	**2,81**	**2,6987**	**2,6143**	**2,548**	**2,4943**	**2,4499**
18	**4,4139**	**3,5546**	**3,1599**	**2,9277**	**2,7729**	**2,6613**	**2,5767**	**2,5102**	**2,4563**	**2,4117**
19	**4,3807**	**3,5219**	**3,1274**	**2,8951**	**2,7401**	**2,6283**	**2,5435**	**2,4768**	**2,4227**	**2,3779**
20	**4,3512**	**3,4928**	**3,0984**	**2,8661**	**2,7109**	**2,599**	**2,514**	**2,4471**	**2,3928**	**2,3479**
21	**4,3248**	**3,4668**	**3,0725**	**2,8401**	**2,6848**	**2,5727**	**2,4876**	**2,4205**	**2,366**	**2,321**
22	**4,3009**	**3,4434**	**3,0491**	**2,8167**	**2,6613**	**2,5491**	**2,4638**	**2,3965**	**2,3419**	**2,2967**
23	**4,2793**	**3,4221**	**3,028**	**2,7955**	**2,64**	**2,5277**	**2,4422**	**2,3748**	**2,3201**	**2,2747**
24	**4,2597**	**3,4028**	**3,0088**	**2,7763**	**2,6207**	**2,5082**	**2,4226**	**2,3551**	**2,3002**	**2,2547**
25	**4,2417**	**3,3852**	**2,9912**	**2,7587**	**2,603**	**2,4904**	**2,4047**	**2,3371**	**2,2821**	**2,2365**
26	**4,2252**	**3,369**	**2,9752**	**2,7426**	**2,5868**	**2,4741**	**2,3883**	**2,3205**	**2,2655**	**2,2197**
27	**4,21**	**3,3541**	**2,9604**	**2,7278**	**2,5719**	**2,4591**	**2,3732**	**2,3053**	**2,2501**	**2,2043**
28	**4,196**	**3,3404**	**2,9467**	**2,7141**	**2,5581**	**2,4453**	**2,3593**	**2,2913**	**2,236**	**2,19**
29	**4,183**	**3,3277**	**2,934**	**2,7014**	**2,5454**	**2,4324**	**2,3463**	**2,2783**	**2,2229**	**2,1768**
30	**4,1709**	**3,3158**	**2,9223**	**2,6896**	**2,5336**	**2,4205**	**2,3343**	**2,2662**	**2,2107**	**2,1646**
40	**4,0847**	**3,2317**	**2,8387**	**2,606**	**2,4495**	**2,3359**	**2,249**	**2,1802**	**2,124**	**2,0772**
50	**4,0343**	**3,1826**	**2,79**	**2,5572**	**2,4004**	**2,2864**	**2,1992**	**2,1299**	**2,0734**	**2,0261**
60	**4,0012**	**3,1504**	**2,7581**	**2,5252**	**2,3683**	**2,2541**	**2,1665**	**2,097**	**2,0401**	**1,9926**
70	**3,9778**	**3,1277**	**2,7355**	**2,5027**	**2,3456**	**2,2312**	**2,1435**	**2,0737**	**2,0166**	**1,9689**
80	**3,9604**	**3,1108**	**2,7188**	**2,4859**	**2,3287**	**2,2142**	**2,1263**	**2,0564**	**1,9991**	**1,9512**
90	**3,9469**	**3,0977**	**2,7058**	**2,4729**	**2,3157**	**2,2011**	**2,1131**	**2,043**	**1,9856**	**1,9376**
100	**3,9361**	**3,0873**	**2,6955**	**2,4626**	**2,3053**	**2,1906**	**2,1025**	**2,0323**	**1,9748**	**1,9267**
110	**3,9274**	**3,0788**	**2,6871**	**2,4542**	**2,2969**	**2,1821**	**2,0939**	**2,0236**	**1,9661**	**1,9178**
120	**3,9201**	**3,0718**	**2,6802**	**2,4472**	**2,2899**	**2,175**	**2,0868**	**2,0164**	**1,9588**	**1,9105**
∞	**3,8415**	**2,9957**	**2,6049**	**2,3719**	**2,2141**	**2,0986**	**2,0096**	**1,9384**	**1,8799**	**1,8307**

Продовження табл. Д.4

ν_2	ν_1									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**242,9835**	**243,906**	**244,6898**	**245,364**	**245,9499**	**246,4639**	**246,9184**	**247,3232**	**247,6861**	**248,0131**
2	**19,405**	**19,4125**	**19,4189**	**19,4244**	**19,4291**	**19,4333**	**19,437**	**19,4402**	**19,4431**	**19,4458**
3	**8,7633**	**8,7446**	**8,7287**	**8,7149**	**8,7029**	**8,6923**	**8,6829**	**8,6745**	**8,667**	**8,6602**
4	**5,9358**	**5,9117**	**5,8911**	**5,8733**	**5,8578**	**5,8441**	**5,832**	**5,8211**	**5,8114**	**5,8025**
5	**4,704**	**4,6777**	**4,6552**	**4,6358**	**4,6188**	**4,6038**	**4,5904**	**4,5785**	**4,5678**	**4,5581**
6	**4,0274**	**3,9999**	**3,9764**	**3,9559**	**3,9381**	**3,9223**	**3,9083**	**3,8957**	**3,8844**	**3,8742**
7	**3,603**	**3,5747**	**3,5503**	**3,5292**	**3,5107**	**3,4944**	**3,4799**	**3,4669**	**3,4551**	**3,4445**
8	**3,313**	**3,2839**	**3,259**	**3,2374**	**3,2184**	**3,2016**	**3,1867**	**3,1733**	**3,1613**	**3,1503**
9	**3,1025**	**3,0729**	**3,0475**	**3,0255**	**3,0061**	**2,989**	**2,9737**	**2,96**	**2,9477**	**2,9365**
10	**2,943**	**2,913**	**2,8872**	**2,8647**	**2,845**	**2,8276**	**2,812**	**2,798**	**2,7854**	**2,774**
11	**2,8179**	**2,7876**	**2,7614**	**2,7386**	**2,7186**	**2,7009**	**2,6851**	**2,6709**	**2,6581**	**2,6464**
12	**2,7173**	**2,6866**	**2,6602**	**2,6371**	**2,6169**	**2,5989**	**2,5828**	**2,5684**	**2,5554**	**2,5436**
13	**2,6347**	**2,6037**	**2,5769**	**2,5536**	**2,5331**	**2,5149**	**2,4987**	**2,4841**	**2,4709**	**2,4589**
14	**2,5655**	**2,5342**	**2,5073**	**2,4837**	**2,463**	**2,4446**	**2,4282**	**2,4134**	**2,4**	**2,3879**
15	**2,5068**	**2,4753**	**2,4481**	**2,4244**	**2,4034**	**2,3849**	**2,3683**	**2,3533**	**2,3398**	**2,3275**
16	**2,4564**	**2,4247**	**2,3973**	**2,3733**	**2,3522**	**2,3335**	**2,3167**	**2,3016**	**2,288**	**2,2756**
17	**2,4126**	**2,3807**	**2,3531**	**2,329**	**2,3077**	**2,2888**	**2,2719**	**2,2567**	**2,2429**	**2,2304**
18	**2,3742**	**2,3421**	**2,3143**	**2,29**	**2,2686**	**2,2496**	**2,2325**	**2,2172**	**2,2033**	**2,1906**
19	**2,3402**	**2,308**	**2,28**	**2,2556**	**2,2341**	**2,2149**	**2,1977**	**2,1823**	**2,1683**	**2,1555**
20	**2,31**	**2,2776**	**2,2495**	**2,225**	**2,2033**	**2,184**	**2,1667**	**2,1511**	**2,137**	**2,1242**
21	**2,2829**	**2,2504**	**2,2222**	**2,1975**	**2,1757**	**2,1563**	**2,1389**	**2,1232**	**2,109**	**2,096**
22	**2,2585**	**2,2258**	**2,1975**	**2,1727**	**2,1508**	**2,1313**	**2,1138**	**2,098**	**2,0837**	**2,0707**
23	**2,2364**	**2,2036**	**2,1752**	**2,1502**	**2,1282**	**2,1086**	**2,091**	**2,0751**	**2,0608**	**2,0476**
24	**2,2163**	**2,1834**	**2,1548**	**2,1298**	**2,1077**	**2,088**	**2,0703**	**2,0543**	**2,0399**	**2,0267**
25	**2,1979**	**2,1649**	**2,1362**	**2,1111**	**2,0889**	**2,0691**	**2,0513**	**2,0353**	**2,0207**	**2,0075**
26	**2,1811**	**2,1479**	**2,1192**	**2,0939**	**2,0716**	**2,0518**	**2,0339**	**2,0178**	**2,0032**	**1,9898**
27	**2,1655**	**2,1323**	**2,1035**	**2,0781**	**2,0558**	**2,0358**	**2,0179**	**2,0017**	**1,987**	**1,9736**
28	**2,1512**	**2,1179**	**2,0889**	**2,0635**	**2,0411**	**2,021**	**2,003**	**1,9868**	**1,972**	**1,9586**
29	**2,1379**	**2,1045**	**2,0755**	**2,05**	**2,0275**	**2,0073**	**1,9893**	**1,973**	**1,9581**	**1,9446**
30	**2,1256**	**2,0921**	**2,063**	**2,0374**	**2,0148**	**1,9946**	**1,9765**	**1,9601**	**1,9452**	**1,9317**
40	**2,0376**	**2,0035**	**1,9738**	**1,9476**	**1,9245**	**1,9037**	**1,8851**	**1,8682**	**1,8529**	**1,8389**
50	**1,9861**	**1,9515**	**1,9214**	**1,8949**	**1,8714**	**1,8503**	**1,8313**	**1,8141**	**1,7985**	**1,7841**
60	**1,9522**	**1,9174**	**1,887**	**1,8602**	**1,8364**	**1,8151**	**1,7959**	**1,7784**	**1,7625**	**1,748**
70	**1,9283**	**1,8932**	**1,8627**	**1,8357**	**1,8117**	**1,7902**	**1,7708**	**1,7531**	**1,7371**	**1,7223**
80	**1,9105**	**1,8753**	**1,8445**	**1,8174**	**1,7932**	**1,7716**	**1,752**	**1,7342**	**1,718**	**1,7032**
90	**1,8967**	**1,8613**	**1,8305**	**1,8032**	**1,7789**	**1,7571**	**1,7375**	**1,7196**	**1,7033**	**1,6883**
100	**1,8857**	**1,8503**	**1,8193**	**1,7919**	**1,7675**	**1,7456**	**1,7259**	**1,7079**	**1,6915**	**1,6764**
110	**1,8767**	**1,8412**	**1,8101**	**1,7827**	**1,7582**	**1,7363**	**1,7164**	**1,6984**	**1,6819**	**1,6667**
120	**1,8693**	**1,8337**	**1,8026**	**1,775**	**1,7505**	**1,7285**	**1,7085**	**1,6904**	**1,6739**	**1,6587**
∞	**1,7887**	**1,7522**	**1,7202**	**1,6918**	**1,6664**	**1,6435**	**1,6228**	**1,6039**	**1,5865**	**1,5705**

Продовження табл. Д.4

ν_2	ν_1									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	**248,3094**	**248,5791**	**248,8256**	**249,0518**	**249,2601**	**249,4525**	**249,6309**	**249,7966**	**249,951**	**250,0951**
2	**19,4481**	**19,4503**	**19,4523**	**19,4541**	**19,4558**	**19,4573**	**19,4587**	**19,46**	**19,4613**	**19,4624**
3	**8,654**	**8,6484**	**8,6432**	**8,6385**	**8,6341**	**8,6301**	**8,6263**	**8,6229**	**8,6196**	**8,6166**
4	**5,7945**	**5,7872**	**5,7805**	**5,7744**	**5,7687**	**5,7635**	**5,7586**	**5,7541**	**5,7498**	**5,7459**
5	**4,5493**	**4,5413**	**4,5339**	**4,5272**	**4,5209**	**4,5151**	**4,5097**	**4,5047**	**4,5001**	**4,4957**
6	**3,8649**	**3,8564**	**3,8486**	**3,8415**	**3,8348**	**3,8287**	**3,823**	**3,8177**	**3,8128**	**3,8082**
7	**3,4349**	**3,426**	**3,4179**	**3,4105**	**3,4036**	**3,3972**	**3,3913**	**3,3858**	**3,3806**	**3,3758**
8	**3,1404**	**3,1313**	**3,1229**	**3,1152**	**3,1081**	**3,1015**	**3,0954**	**3,0897**	**3,0844**	**3,0794**
9	**2,9263**	**2,9169**	**2,9084**	**2,9005**	**2,8932**	**2,8864**	**2,8801**	**2,8743**	**2,8688**	**2,8637**
10	**2,7636**	**2,7541**	**2,7453**	**2,7372**	**2,7298**	**2,7229**	**2,7164**	**2,7104**	**2,7048**	**2,6996**
11	**2,6358**	**2,6261**	**2,6172**	**2,609**	**2,6014**	**2,5943**	**2,5877**	**2,5816**	**2,5759**	**2,5705**
12	**2,5328**	**2,5229**	**2,5139**	**2,5055**	**2,4977**	**2,4905**	**2,4838**	**2,4776**	**2,4718**	**2,4663**
13	**2,4479**	**2,4379**	**2,4287**	**2,4202**	**2,4123**	**2,405**	**2,3982**	**2,3918**	**2,3859**	**2,3803**
14	**2,3768**	**2,3667**	**2,3573**	**2,3487**	**2,3407**	**2,3333**	**2,3264**	**2,3199**	**2,3139**	**2,3082**
15	**2,3163**	**2,306**	**2,2966**	**2,2878**	**2,2797**	**2,2722**	**2,2652**	**2,2587**	**2,2525**	**2,2468**
16	**2,2642**	**2,2538**	**2,2443**	**2,2354**	**2,2272**	**2,2196**	**2,2125**	**2,2059**	**2,1997**	**2,1938**
17	**2,2189**	**2,2084**	**2,1987**	**2,1898**	**2,1815**	**2,1738**	**2,1666**	**2,1599**	**2,1536**	**2,1477**
18	**2,1791**	**2,1685**	**2,1587**	**2,1497**	**2,1413**	**2,1335**	**2,1262**	**2,1195**	**2,1131**	**2,1071**
19	**2,1438**	**2,1331**	**2,1233**	**2,1141**	**2,1057**	**2,0978**	**2,0905**	**2,0836**	**2,0772**	**2,0712**
20	**2,1124**	**2,1016**	**2,0917**	**2,0825**	**2,0739**	**2,066**	**2,0586**	**2,0517**	**2,0452**	**2,0391**
21	**2,0842**	**2,0733**	**2,0633**	**2,054**	**2,0454**	**2,0374**	**2,0299**	**2,0229**	**2,0164**	**2,0102**
22	**2,0587**	**2,0478**	**2,0377**	**2,0283**	**2,0196**	**2,0116**	**2,004**	**1,997**	**1,9904**	**1,9842**
23	**2,0356**	**2,0246**	**2,0144**	**2,005**	**1,9963**	**1,9881**	**1,9805**	**1,9734**	**1,9668**	**1,9605**
24	**2,0146**	**2,0035**	**1,9932**	**1,9838**	**1,975**	**1,9668**	**1,9591**	**1,952**	**1,9453**	**1,939**
25	**1,9953**	**1,9842**	**1,9738**	**1,9643**	**1,9554**	**1,9472**	**1,9395**	**1,9323**	**1,9255**	**1,9192**
26	**1,9776**	**1,9664**	**1,956**	**1,9464**	**1,9375**	**1,9292**	**1,9215**	**1,9142**	**1,9074**	**1,901**
27	**1,9613**	**1,95**	**1,9396**	**1,9299**	**1,921**	**1,9126**	**1,9048**	**1,8975**	**1,8907**	**1,8842**
28	**1,9462**	**1,9349**	**1,9244**	**1,9147**	**1,9057**	**1,8973**	**1,8894**	**1,8821**	**1,8752**	**1,8687**
29	**1,9322**	**1,9208**	**1,9103**	**1,9005**	**1,8915**	**1,883**	**1,8751**	**1,8677**	**1,8608**	**1,8543**
30	**1,9192**	**1,9077**	**1,8972**	**1,8874**	**1,8782**	**1,8698**	**1,8618**	**1,8544**	**1,8474**	**1,8409**
40	**1,826**	**1,8141**	**1,8031**	**1,7929**	**1,7835**	**1,7746**	**1,7663**	**1,7586**	**1,7513**	**1,7444**
50	**1,7709**	**1,7588**	**1,7475**	**1,7371**	**1,7273**	**1,7183**	**1,7097**	**1,7017**	**1,6942**	**1,6872**
60	**1,7346**	**1,7222**	**1,7108**	**1,7001**	**1,6902**	**1,6809**	**1,6722**	**1,6641**	**1,6564**	**1,6491**
70	**1,7088**	**1,6962**	**1,6846**	**1,6738**	**1,6638**	**1,6543**	**1,6455**	**1,6372**	**1,6294**	**1,622**
80	**1,6895**	**1,6768**	**1,6651**	**1,6542**	**1,644**	**1,6345**	**1,6255**	**1,6171**	**1,6092**	**1,6017**
90	**1,6745**	**1,6618**	**1,6499**	**1,6389**	**1,6286**	**1,619**	**1,61**	**1,6015**	**1,5935**	**1,5859**
100	**1,6626**	**1,6497**	**1,6378**	**1,6267**	**1,6163**	**1,6067**	**1,5976**	**1,589**	**1,5809**	**1,5733**
110	**1,6528**	**1,6399**	**1,6279**	**1,6167**	**1,6063**	**1,5966**	**1,5874**	**1,5788**	**1,5706**	**1,563**
120	**1,6447**	**1,6317**	**1,6197**	**1,6084**	**1,598**	**1,5881**	**1,5789**	**1,5703**	**1,5621**	**1,5543**
∞	**1,5558**	**1,542**	**1,5292**	**1,5173**	**1,5061**	**1,4956**	**1,4857**	**1,4763**	**1,4675**	**1,4591**

Продовження табл. Д.4

ν_2	ν_1									
	40	50	60	70	80	90	100	110	120	∞
1	**251,1432**	**251,7742**	**252,1957**	**252,4973**	**252,7237**	**252,9**	**253,0411**	**253,1566**	**253,2529**	**254,3143**
2	**19,4707**	**19,4757**	**19,4791**	**19,4814**	**19,4832**	**19,4846**	**19,4857**	**19,4866**	**19,4874**	**19,4957**
3	**8,5944**	**8,581**	**8,572**	**8,5656**	**8,5607**	**8,5569**	**8,5539**	**8,5514**	**8,5494**	**8,5265**
4	**5,717**	**5,6995**	**5,6877**	**5,6793**	**5,673**	**5,668**	**5,6641**	**5,6608**	**5,6581**	**5,6281**
5	**4,4638**	**4,4444**	**4,4314**	**4,422**	**4,415**	**4,4095**	**4,4051**	**4,4015**	**4,3985**	**4,365**
6	**3,7743**	**3,7537**	**3,7398**	**3,7298**	**3,7223**	**3,7164**	**3,7117**	**3,7079**	**3,7047**	**3,6689**
7	**3,3404**	**3,3189**	**3,3043**	**3,2939**	**3,286**	**3,2798**	**3,2749**	**3,2708**	**3,2674**	**3,2298**
8	**3,0428**	**3,0204**	**3,0053**	**2,9944**	**2,9862**	**2,9798**	**2,9747**	**2,9705**	**2,9669**	**2,9276**
9	**2,8259**	**2,8028**	**2,7872**	**2,776**	**2,7675**	**2,7609**	**2,7556**	**2,7512**	**2,7475**	**2,7067**
10	**2,6609**	**2,6371**	**2,6211**	**2,6095**	**2,6008**	**2,5939**	**2,5884**	**2,5839**	**2,5801**	**2,5379**
11	**2,5309**	**2,5066**	**2,4901**	**2,4782**	**2,4692**	**2,4622**	**2,4566**	**2,4519**	**2,448**	**2,4045**
12	**2,4259**	**2,401**	**2,3842**	**2,372**	**2,3628**	**2,3556**	**2,3498**	**2,345**	**2,341**	**2,2962**
13	**2,3392**	**2,3138**	**2,2966**	**2,2841**	**2,2747**	**2,2673**	**2,2614**	**2,2565**	**2,2524**	**2,2064**
14	**2,2664**	**2,2405**	**2,2229**	**2,2102**	**2,2006**	**2,1931**	**2,187**	**2,182**	**2,1778**	**2,1307**
15	**2,2043**	**2,178**	**2,1601**	**2,1472**	**2,1373**	**2,1296**	**2,1234**	**2,1183**	**2,1141**	**2,0659**
16	**2,1507**	**2,124**	**2,1058**	**2,0926**	**2,0826**	**2,0748**	**2,0685**	**2,0633**	**2,0589**	**2,0096**
17	**2,104**	**2,0769**	**2,0584**	**2,045**	**2,0348**	**2,0268**	**2,0204**	**2,0151**	**2,0107**	**1,9604**
18	**2,0629**	**2,0354**	**2,0166**	**2,003**	**1,9927**	**1,9846**	**1,978**	**1,9726**	**1,9681**	**1,9168**
19	**2,0264**	**1,9986**	**1,9795**	**1,9657**	**1,9552**	**1,947**	**1,9403**	**1,9348**	**1,9302**	**1,878**
20	**1,9938**	**1,9656**	**1,9464**	**1,9323**	**1,9217**	**1,9133**	**1,9066**	**1,901**	**1,8963**	**1,8432**
21	**1,9645**	**1,936**	**1,9165**	**1,9023**	**1,8915**	**1,883**	**1,8761**	**1,8705**	**1,8657**	**1,8117**
22	**1,938**	**1,9092**	**1,8894**	**1,8751**	**1,8641**	**1,8555**	**1,8486**	**1,8428**	**1,838**	**1,7831**
23	**1,9139**	**1,8848**	**1,8648**	**1,8503**	**1,8392**	**1,8305**	**1,8234**	**1,8176**	**1,8128**	**1,757**
24	**1,892**	**1,8625**	**1,8424**	**1,8276**	**1,8164**	**1,8076**	**1,8005**	**1,7946**	**1,7896**	**1,7331**
25	**1,8718**	**1,8421**	**1,8217**	**1,8069**	**1,7955**	**1,7866**	**1,7794**	**1,7734**	**1,7684**	**1,711**
26	**1,8533**	**1,8233**	**1,8027**	**1,7877**	**1,7762**	**1,7672**	**1,7599**	**1,7539**	**1,7488**	**1,6906**
27	**1,8361**	**1,8059**	**1,7851**	**1,77**	**1,7584**	**1,7493**	**1,7419**	**1,7358**	**1,7306**	**1,6717**
28	**1,8203**	**1,7898**	**1,7689**	**1,7535**	**1,7418**	**1,7326**	**1,7251**	**1,719**	**1,7138**	**1,6541**
29	**1,8055**	**1,7748**	**1,7537**	**1,7382**	**1,7264**	**1,7171**	**1,7096**	**1,7033**	**1,6981**	**1,6377**
30	**1,7918**	**1,7609**	**1,7396**	**1,724**	**1,7121**	**1,7027**	**1,695**	**1,6887**	**1,6835**	**1,6223**
40	**1,6928**	**1,66**	**1,6373**	**1,6205**	**1,6077**	**1,5975**	**1,5892**	**1,5824**	**1,5766**	**1,5089**
50	**1,6337**	**1,5995**	**1,5757**	**1,558**	**1,5445**	**1,5337**	**1,5249**	**1,5176**	**1,5115**	**1,4383**
60	**1,5943**	**1,559**	**1,5343**	**1,516**	**1,5019**	**1,4906**	**1,4814**	**1,4737**	**1,4673**	**1,3893**
70	**1,5661**	**1,53**	**1,5046**	**1,4857**	**1,4711**	**1,4594**	**1,4498**	**1,4419**	**1,4351**	**1,3529**
80	**1,5449**	**1,5081**	**1,4821**	**1,4628**	**1,4477**	**1,4357**	**1,4259**	**1,4176**	**1,4107**	**1,3247**
90	**1,5284**	**1,491**	**1,4645**	**1,4448**	**1,4294**	**1,4171**	**1,407**	**1,3985**	**1,3914**	**1,302**
100	**1,5151**	**1,4772**	**1,4504**	**1,4303**	**1,4146**	**1,402**	**1,3917**	**1,3831**	**1,3757**	**1,2832**
110	**1,5043**	**1,466**	**1,4388**	**1,4183**	**1,4024**	**1,3896**	**1,3791**	**1,3703**	**1,3628**	**1,2674**
120	**1,4952**	**1,4565**	**1,429**	**1,4083**	**1,3922**	**1,3792**	**1,3685**	**1,3595**	**1,3519**	**1,2539**
∞	**1,394**	**1,3501**	**1,318**	**1,2933**	**1,2735**	**1,2572**	**1,2434**	**1,2317**	**1,2214**	**1,0033**

ЗМІСТ