

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. І. СІКОРСЬКОГО»

Ігор ПАРХОМЕЙ, Наталія ЦЬОПА

Основи теорії інформаційних процесів

Частина 2

Системи обробки сигналів

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються за
спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології»,
спеціалізацією «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *ТОЛЮПА Сергій*, д.т.н., професор, професор кафедри кібербезпеки та захисту інформації Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

ДРУЖИНИН Володимир, д.т.н., професор, професор кафедри радіофізики і електроніки Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *БАТРАК Євгеній*, канд. техн. наук

Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 18.06.2020 р.) за поданням Вченої ради інституту/факультету (протокол № 8 від 10.03.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ПАРХОМЕЙ Ігор, д-р техн. наук, проф.
ЦЬОПА Наталія, канд. техн. наук, доц.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ.

Частина 2. Системи обробки сигналів

Основи теорії інформаційних процесів. Частина 2. Системи обробки сигналів [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», спеціалізації «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем» / Ігор ПАРХОМЕЙ, Наталія ЦЬОПА,; КПП ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,63 Мбайт). – Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 169 с.

Посібник «Основи теорії інформаційних процесів. Частина 2. Системи обробки сигналів» складається з двох розділів. Перший розділ містить теоретичні відомості щодо принципів представлення та обробки сигналів, фільтрації, методів синтезу аналогових та цифрових фільтрів, їх структурної організації та ефектів квантування.

У другому розділі наведені комп'ютерні практикуми, які допоможуть студентам ознайомитись з основними принципами та методами обробки сигналів та здійснити їх комп'ютерне моделювання.

Рекомендовано для студентів, які навчаються за спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології».

ПЕРЕДМОВА

У системі навчальних дисциплін кредитний модуль Основи теорії інформаційних процесів складають основу фахової підготовки бакалаврів, що навчаються за спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології», зокрема друга частина кредитного модулю Системи обробки інформації вивчається студентами на 2 курсі. Однак дана тематика недостатньо висвітлена в українській літературі, особливо в підручниках та навчальних посібниках. Разом з тим враховуючи тенденції розвитку сучасних комп'ютерних, вимірювальних та систем зв'язку, відставання у цій галузі знань для сучасного інженера є недоступним. З огляду на даний підручник є актуальним.

Вивчення курсу ґрунтується на теоретичних та практичних знаннях з теоретичних основ електротехніки, теорії кодування, прикладного аналізу даних, систем та мереж передачі даних та інших навчальних дисциплін.

Метою дисципліни Системи обробки сигналів є надання студентам необхідних понять і трактувань з теорії інформації та інформаційних технологій, а також теоретичних знань і практичних навичок з перетворення та цифрової обробки сигналів, які подаються у часовій та частотних областях. Отримавши такі знання, майбутній фахівець зможе кваліфіковано обирати область перетворення і оброблення сигналів, їх моделі і алгоритми перетворення з урахуванням напрямку їх використання.

Завдання підручника – навчити студентів правильно застосовувати теоретичні знання з обробки сигналів на практиці, кваліфіковано та грамотно використовувати нові форми та методи подання сигналів у різних областях з метою отримання повної деко реляції сигналів і, в результаті, одержання нових якісних характеристик у процесі розроблення сучасних інформаційних систем.

З М І С Т

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСОВИ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

1.1. Основи аналізу сигналів. Фізичні сигнали та їх характеристики	6
1.1.1 Функціональна схема системи зв'язку	6
1.1.2. Класифікація сигналів.	9
1.1.3 Енергія та потужність сигналів	12
1.1.4 Ряд Фур'є.	13
1.1.5 Поточний і миттєвий спектри	21
1.1.6 Фур'є-аналіз неінтегруємих сигналів	21
1.1.7 Кореляційний аналіз	23
1.1.8 Взаємно кореляційна функція	24
1.1.9 Комплексна огибаюча	25
1.1.10 Аналогові, дискретні та цифрові сигнали	26
1.1.11 Аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення	27
1.1.12 Дискретизація та квантування аналогових сигналів	29
1.1.3 Квантування дискретних сигналів	32
1.1.14 Частота Найквіста	34
1.1.15 Спектр дискретного сигналу	35
1.2. Аналогові системи обробки сигналів	41
1.2.1 Класифікація систем та їх основні характеристики	41
1.2.2 Взаємна кореляція між входом та виходом	45
1.2.3 Способи опису лінійних систем	47
1.2.4 Розрахунок імпульсної характеристики	49
1.2.5 Стійкість лінійних систем	50
1.2.6 Простір станів	51
1.2.7 Аналогові фільтри	52
1.3. Дискретні системи обробки сигналів	55
1.3.1 Дискретні системи: класифікація та характеристики	55
1.3.2 Лінійні стаціонарні дискретні системи	58
1.3.3 Властивості лінійних стаціонарних дискретних систем	61
1.3.4 Дискретні (цифрові) фільтри	67
1.3.5 Введення в цифрові фільтри	68
1.3.6 Класифікація цифрових фільтрів	69
1.3.7 Основні форми реалізації структури ЦФ	74
1.3.7 Частотні характеристики фільтрів	77

1.3.8 Порівняльний аналіз типів ЦФ	79
1.3.9 Класифікація цифрових фільтрів за призначенням	80
1.3.10 Дискретне перетворення Фур'є	82
1.3.11 Відновлення неперервного сигналу за допомогою ДПФ	86
1.3.12 Алгоритм швидкого перетворення Фур'є	89
1.3.13 ШПФ з проріджуванням за часом	89
1.3.14 ШПФ з проріджуванням за частотою	91
1.3.15 Взаємозв'язок ДПФ та фільтрації	94
1.4. Цифрові системи обробки сигналів	98
1.4.1 Формат представлення даних	98
1.4.2 Процес квантування	102
1.4.3 Шум аналого-цифрового перетворення	106
1.4.4 Ефекти квантування в цифрових системах	108
РОЗДІЛ 2. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ	113
2.1. Комп'ютерний практикум №1.	113
2.1.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума	113
2.1.2. Завдання на комп'ютерний практикум	117
2.1.3. Методика виконання	120
Запитання до комп'ютерного практикуму	122
2.2. Комп'ютерний практикум №2.	123
2.2.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума	123
2.2.2. Завдання на комп'ютерний практикум.	132
2.2.3. Методика виконання	133
Запитання до комп'ютерного практикуму	136
2.3. Комп'ютерний практикум №3.	137
2.3.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума	137
2.3.2. Завдання на комп'ютерний практикум	148
2.3.3. Методика виконання	150
Запитання до комп'ютерного практикуму	154
2.4. Комп'ютерний практикум №4.	155
2.4.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума.	155
2.4.2. Завдання на комп'ютерний практикум	165
2.4.3. Методика виконання	165
Запитання до комп'ютерного практикуму	168
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	169

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСОВИ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

1.1. Основи аналізу сигналів. Фізичні сигнали та їх характеристики

1.1.1 Функціональна схема системи зв'язку

Будь-яка система зв'язку є система передачі. Об'єктом передачі є повідомлення. Повідомлення містить у собі інформацію, яку необхідно передати від відправника (джерела повідомлень) до одержувача інформації.

Загальний вид функціональної схеми системи зв'язку зображений на рис.1.1, а на рис.1.2 - функціональна схема системи передачі дискретних повідомлень. Повідомлення передаються по каналу зв'язку за допомогою сигналів. У системі електричного зв'язку сигнал представляє собою деяке електричне коливання, що відображає передане повідомлення.

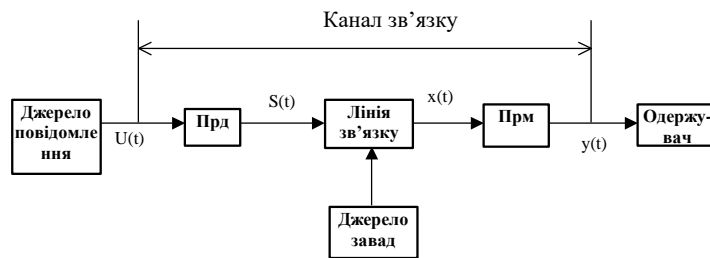


Рис. 1.1. Функціональна схема системи зв'язку

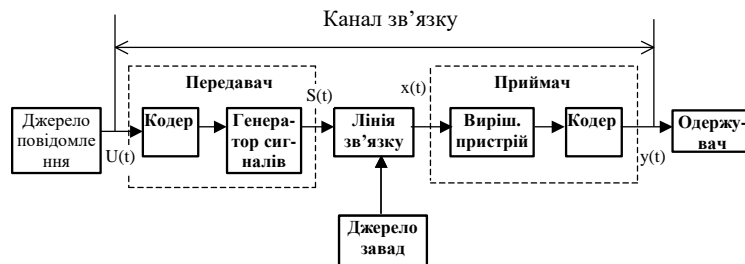


Рис. 1.2. Функціональна схема системи передачі дискретних повідомлень

Під сигналом розуміють фізичний процес, за допомогою якого відбувається перенесення в просторі та часі відомостей про досліджуваний об'єкт або фізичне явище. Принципова відмінність сигналу від повідомлення полягає в тому, що сигнал є часовий процес поширення символів в просторі, а повідомлення – статична просторова комбінація символів.

Повідомлення і відповідні їм сигнали бувають дискретними і безперервними. Дискретне повідомлення являє собою послідовність

окремих елементів. Фізична природа цих елементів може бути будь-яка. Сигнал у цьому випадку також являє собою дискретну послідовність окремих елементів, що відповідають елементам переданого повідомлення.

Безперервне повідомлення - це деяка фізична величина (звуковий тиск, температура і т.п.) приймаюча будь-які значення в заданому інтервалі. Повідомлення U за допомогою датчиків перетворюється в безупинно змінюючу величину $U(t)$ - відеосигнал (Рис.1.3).

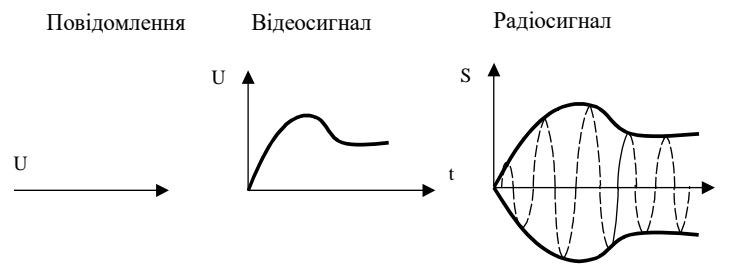


Рис. 1.3. Повідомлення, відеосигнал, радіосигнал

Таким чином, повідомлення $U(t)$, що надходить від джерела у передавачі, обробляється певним чином і формується сигнал $S(t)$, зручний для передачі по лінії зв'язку. У телефонії, наприклад, ця операція зводиться просто до перетворення звукового тиску в пропорційно змінюючий електричний струм мікрофона. У телеграфії здійснюється кодування, в результаті якого послідовність елементів повідомлення (букв, цифр) перетворюється в послідовність кодових символів (0, 1).

На вхід приймача надходять сигнали $x(t) = f(S, W)$, пошкоджені завадами $W(t)$. Приймач обробляє прийняті сигнали $x(t)$ за визначеними правилами і відновлює по них передане повідомлення $U(t)$.

Каналом зв'язку називається сукупність технічних засобів, що служать для передачі повідомлень від джерела до одержувача. Цими засобами є передавач, приймач і лінія зв'язку.

Розрізняють наступні системи зв'язку:

- дискретні (системи телеграфного зв'язку, передачі даних і т.п.);
- безперервні (радіомовлення, телефонія і т.п.)
- змішані (системи ІКМ, коли безперервне повідомлення передається дискретними сигналами);
- багатоканальні, що забезпечують взаємно незалежну передачу декількох повідомлень по одному каналу зв'язку.

Описом конкретного сигналу може бути деяка функція часу $s(t)$. Хоча це і не обов'язково. Наприклад в системах оптичної обробки інформації сигнал описується залежністю інтенсивності світла від просторових координат. Фізична природа сигналу може бути досить різною: напруга, рідше струм та ін.

Визначивши так чи інакше функцію $s(t)$ ми визначаємо і сигнал. Однак такий повний опис сигналу потрібно не завжди.

Для рішення ряду питань досить більш загального опису у виді декількох узагальнених, параметрів, що характеризують основні властивості сигналу, подібно тому, як це робиться в системах транспортування. Указуючи габарити і вагу, ми характеризуємо основні властивості предмету з погляду умов його транспортування; інші властивості предмету (наприклад, колір, запах і т.п.) з цього погляду є несуттєвими.

Сигнал є також об'єкт транспортування, а техніка зв'язку, власне кажучи, техніка транспортування (передачі) сигналів по каналу зв'язку. Тому доцільно визначити параметри сигналу, що є основними, з погляду його передачі. Такими параметрами є тривалість сигналу, його динамічний діапазон і ширина спектру.

Будь-який сигнал, розглянутий як часовий процес, має початок і кінець. Тому тривалість сигналу T є природним його параметром, що визначається інтервал часу, у межах якого сигнал існує.

Характеристиками сигналу, усередині інтервалу його існування, є динамічний діапазон і швидкість зміни сигналу.

Динамічний діапазон визначається як відношення найбільшої миттєвої потужності сигналу до найменшої. Динамічний діапазон мови диктора, наприклад, дорівнює 25-30 дБ., невеликого вокального ансамблю 45-55 дБ., симфонічного оркестру 65-75 дБ.

У реальних системах завжди мають місце завади. Для задовільної передачі потрібно, щоб найменша потужність сигналу перевищувала потужність завад. Відношення сигналу до завади характеризує відносний рівень сигналу.

Звичайно визначається логарифм цього відношення, що називається перевищенням сигналу над завадою.

$$D_c = \frac{P_{\max}}{P_{\min}} \text{ або } D_c = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_{\min}} \quad (1.1)$$

Це перевищення і приймається як другий параметр сигналу.

Третім параметром є ширина спектра сигналу F_c . Ця величина дає представлення про швидкість зміни сигналу усередині інтервалу його існування.

У техніці у зв'язку спектр сигналу часто свідомо обмежується. Це обумовлено тим, що апаратура і лінія зв'язку має обмежену смугу частот. Обмеження спектра здійснюється виходячи з припустимих перекручень сигналу. Наприклад, при телефонному зв'язку потрібно виконати дві умови, щоб мова була розбірлива і кореспонденти могли впізнати один одного по голосу. Для виконання цих умов спектр мовного сигналу можна обмежити смугою 300 - 3400 Гц.

Передача більш широкого спектра мови в цьому випадку недоцільно, тому що це веде до технічних ускладнень і збільшення витрат. Ширина спектра телеграфного сигналу залежить від швидкості передачі і звичайно приймається рівною $F \approx 1,5V$, де (V - швидкість телеграфування в бодах, що визначає кількість переданих телеграфних посилок за одиницю часу. Так при телетайпній передачі $V = 50$ Бод і $F = 75$ Гц.

Обсягом сигналу називають добуток трьох основних параметрів сигналу $V_c = T_c D_c F_c$

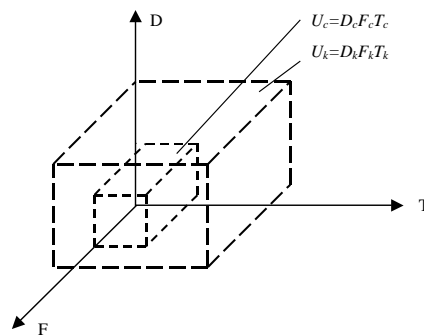


Рис. 1.4. Геометричне представлення об'ємів сигналу та каналу

1.1.2 Класифікація сигналів

Прості і складні сигнали. Простим сигналом називають сигнал, що відповідає одній елементарній посилці. Наприклад, при передачі дискретної інформації простому сигналу відповідає сигнал кодового символу в комбінації (рис.1.5, а)

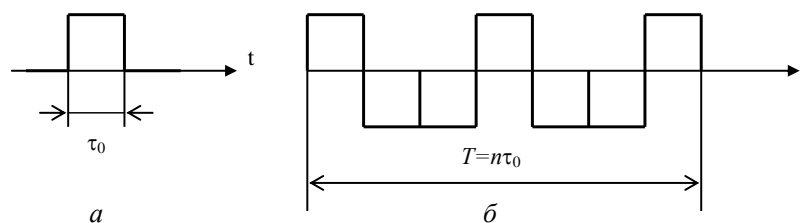


Рис. 1.5. а) Простий сигнал, б) складний сигнал

Сигнал, що представляє собою сукупність елементарних посилок, називається складеним або складним (рис.1.5 б).

За характером зміни значень сигналів їх ділять на:

- не випадкові (регулярні), коли з повною вірогідністю можна визначити значення сигналу при будь-якому значенні його аргументу. Такі сигнали ще називають детермінованими – його значення є визначеним в будь-який момент часу

- випадкові (нерегулярні), для яких можна визначити значення тільки з певною ймовірністю для тих чи інших значень аргументу. В останньому випадку змістовно це можна пояснити як вплив різних випадкових факторів на формування значень сигналів.

Сигнали з обмеженою енергією. Для таких сигналів $s(t)$ виконується співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty. \quad (1.2)$$

Багато важливих співвідношень теорії сигналів отримано виходячи з того, що енергіє сигналу, який аналізується є кінцевою. Якщо дана умова не виконується, то необхідно змінювати підхід до вирішення задачі або застосовувати апарат узагальнених функцій.

За періодичністю сигнали поділяють:

- періодичні - сигнал, що повторюється через певні проміжки часу, для періодичного сигналу з періодом T виконується співвідношення

$$s(t + nT) = s(t) \text{ при будь-якому } t, \quad (1.3)$$

де n – будь-яке ціле число, T – період повторення.

Якщо величина T є періодом сигналу $s(t)$, то періодом для нього будуть і кратні йому значення: $2T, 3T$, та ін.

Величина обернена періоду – частота повторення сигналу: $f = 1/T$ ($1/c=Гц$). Це, так звана, циклічна частота, яка задає число коливань (повних обертів) у одиницю часу – секунду.

Також часто застосовується поняття кругової частоти $\omega = 2\pi f$, вона вимірюється в радіанах на секунду (рад/с) і задає величину кута у одиницю часу.

Періодичні коливання задаються на інтервалі $-\infty \leq t \leq \infty$, оскільки як би воно мало початок або кінець, то в даних точках відбувалось порушення періодичності.

- неперіодичні – сигнали що задовольняють умові $s(t + nT) \neq s(t)$ на інтервалі $-\infty \leq t \leq \infty$. Такий сигнал представляється функцією на кінцевому $t_1 \leq t \leq t_2$ або напів нескінченному інтервалі $t_1 \leq t \leq \infty$.

Окремо розглядають так звані еталонні сигнали (рис.1.6):

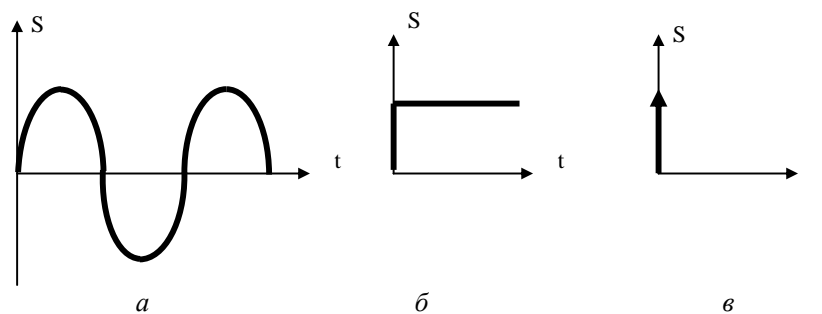


Рис. 1.6. Еталонні сигнали: а – гармонічний;
б – одинично-східцевий; в – дельта-функція

1. Гармонічний сигнал, який в загальному вигляді можна записати

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(2\pi f t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.4)$$

Гармонічний сигнал повністю визначається трьома числовими параметрами: амплітудою A , частотою ω і початковою фазою φ .

2. Одиничний імпульс, дельта-функція або функція Дірака – являє собою нескінченно вузький імпульс з нескінченною амплітудою, що розташовани при нульовому значенні аргументу функції. Площу імпульсу при цьому дорівнює одиниці.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.5)$$

Сигнал у вигляді дельта-функції неможливо реалізувати фізично, однак ця функція відіграє важливу роль в теоретичному аналізі сигналів та систем.

Однією з важливих властивостей дельта-функції є так звана фільтруюча властивість: якщо дана функція присутня під інтегралом в якості множника, то результат інтегрування буде дорівнювати значенню іншого підінтегрального виразу в тій точці, де зосереджений дельта-імпульс:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (1.6)$$

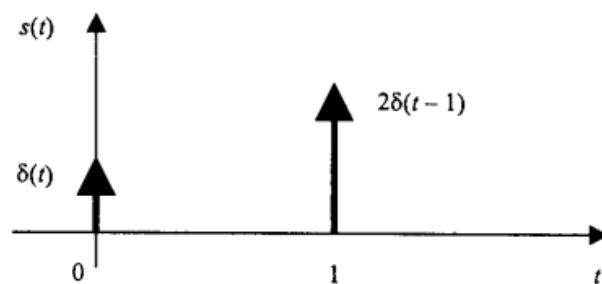


Рис. 1.7. Графік сигналу $s(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$

3. Функція включення, одинично-східцева функція або функція Хевісайда – дорівнює нулю для від'ємних значень аргумента і одиниці – для додатніх. При нульовому значенні аргументу функція вважається або невизначеною або рівною $1/2$.

$$1(t) \text{ або } \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

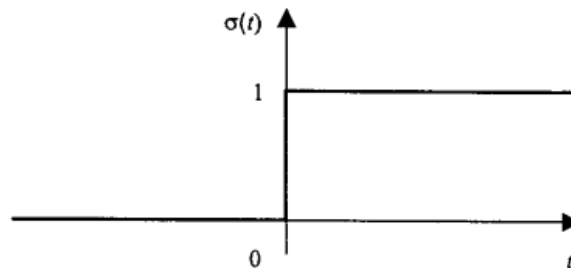


Рис. 1.8. Функція одиничного стрибка

Одинично-східцева функція використовується при створенні математичних моделей сигналів, що мають кінцеву тривалість. Наприклад формування прямокутного імпульсу з амплітудою A та тривалістю T :

$$s(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - T)). \quad (1.8)$$

Дельта-функція – це похідна від одинично-східцевої функції. Таким чином, якщо вважати одиничну функцію виразом деякого сигналу, то дельта-функція сигнал не виражає а є характеристикою швидкості його зміни. Саме тому вони мають різну розмірність: якщо одинична функція – безрозмірна, то $\delta(t)$ - має розмірність $1/c$.

1.1.3 Енергія та потужність сигналів

Основними енергетичними характеристиками сигналу, що розглядається як функція часу є:

- миттєва потужність (*instantaneous power*) $p(t)$;
- енергія E ;
- середня потужність $P_{\text{ср}}$.

визначені на певному інтервалі часу $t_a < t < t_b$.

1. Миттєва потужність сигналу $s(t)$ визначають як

$$p(t) = s^2(t). \quad (1.9)$$

Якщо $s(t)$ – це напруга або струм, то миттєва потужність – це потужність, що виділяється при опорі в 1 Ом.

Миттєва потужність не є адитивною величиною, тобто миттєва потужність суми сигналів ніколи не дорівнює сумі миттєвих потужностей цих сигналів оскільки:

$$\left[s_1(t) + s_2(t) \right]^2 \neq s_1^2(t) + s_2^2(t). \quad (1.10)$$

2. Енергія сигналу в інтервалі, що виділяється за час T називають величину

$$E = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.11)$$

3. Середня потужність (average power) за заданий проміжок часу визначають як

$$P_{\text{ст}} = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.12)$$

Енергія сигналу може бути кінцевою або нескінчену. Будь-який сигнал кінцевої тривалості буде мати кінцеву енергію (якщо лише він не містить дельту-функцію). А будь-який періодичний сигнал, навпаки, має нескінченну енергію.

Якщо енергія сигналу нескінченна, тобто сигнал задається в інтервалі $-\infty \leq t \leq \infty$, тоді середня потужність визначається за виразом

$$P_{\text{ст}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.13)$$

Квадратний корінь з середньої потужності дає середньоквадратичне значення сигналу (*root mean square, RMS*).

$$\sigma_s = \sqrt{P_{\text{ст}}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}. \quad (1.14)$$

На відміну від миттєвої потужності, середня потужність та енергія суми сигналів можуть бути адитивними. Це можливо за умови ортогональності сигналів.

1.1.4 Ряд Фур'є

Кожна періодична функція може бути подана за допомогою ряду з тригонометричними функціями. При цьому вони подаються у вигляді суми

гармонічних функцій або комплексних експонент з частотами, що утворюють арифметичну прогресію.

Для того щоб таке перетворення існувало, частина сигналу тривалістю в один період повинна задовольняти умовам Діріхле*:

- не повинно існувати розривів другого роду;
- число розривів першого роду повинно бути скінченим;
- число екстремумів повинно бути кінцевим.

Синусно-косинусна форма ряду Фур'є

В цьому випадку ряд Фур'є подається в наступному вигляді:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_1 k t + b_k \sin \omega_1 k t) \quad (1.5)$$

де $\omega_1 = 2\pi / T$ - кругова частота, що відповідає періоду повторення сигналу T .

Гармонічні коливання, що входять до складу періодичної функції $s(t)$, створюють гармонічну послідовність, коли частоти усіх складових кратні частоті $f_1 = \frac{1}{T}$.

Ці окремі складові називаються гармоніками, а коливання з частотою f_1 - першою (основною) гармонікою ($k=1$), а з частотою $2f_1 = \frac{2}{T}$ - другою гармонікою ($k=2$) і т.д.

Коефіцієнти ряду a_k і b_k розраховуються за формулами і зветься коефіцієнтами Фур'є для функції $s(t)$:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt. \quad (1.6)$$

Коефіцієнт a_0 зветься постійною складовою і є подвійним середнім значенням функції на заданому інтервалі, обчислюючись за формулою

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt. \quad (1.7)$$

Скориставшись формулами тригонометричних перетворень ряд Фур'є можна привести до виду

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k). \quad (1.8)$$

де A_k – амплітуда, φ_k – початкова фаза.

Якщо $s(t) = s(-t)$ (функція парна), то $b_k = 0$, $A_k = a_k$.

Якщо $s(t) = -s(-t)$ (функція непарна), то $a_k = 0$, $A_k = b_k$.

Якщо $s(t)$ – парна функція, фаза може приймати значення від 0 до π , якщо ж $s(t)$ – функція непарна, то можливі значення для фази дорівнюють $\pm\pi/2$.

Комплексна форма Фур'є.

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (1.9)$$

Зв'язок комплексних коефіцієнтів та амплітуди A_k та фази φ_k :

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \\ A_k &= 2|\dot{C}_k|, \quad \varphi_k = \arg(\dot{C}_k). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зв'язок комплексних коефіцієнтів з коефіцієнтами a_k і b_k :

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2}, \\ a_k &= 2\operatorname{Re}(\dot{C}_k), \quad b_k = -2\operatorname{Im}(\dot{C}_k). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Звідси можна отримати формулу для безпосереднього розрахунку коефіцієнту \dot{C}_k ряду Фур'є в комплексній формі:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{(-jk\omega_1 t)} dt. \quad (1.12)$$

Якщо $s(t)$ – парна функція, коефіцієнти ряду \dot{C}_k будуть лише дійсними, а якщо $s(t)$ – непарна функція, коефіцієнти ряду будуть уявними.

Сукупність амплітудних гармонік ряду Фур'є називають амплітудним спектром, а сукупність їх фаз – фазовим спектром.

Перетворення Фур'є.

Є інструментом спектрального аналізу для неперіодичних сигналів. Зазначимо, що його також можна застосовувати до періодичних сигналів, але це потребуватиме застосування узагальнених функцій.

Нехай задано періодичну послідовність імпульсів довільного виду. Сформуємо для нього ряд Фур'є. Після цього, не змінюючи форму одиничних імпульсів, збільшимо період їх повтору і знову розрахуємо ряд

Фур'є. Формула $\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{(-jk\omega_1 t)} dt$. для розрахунку ряду показує, що

ми будемо розраховувати той самий інтеграл, але для більш тісніше розташованих гармонік $\omega_k = k\omega_1$. Зміна границь інтегралів ніяк не впливає – оскільки на збільшеному просторі сигнал буде мати нульові значення. Єдина зміна буде полягати в зменшенні загального рівня гармонік із-за поділу результату інтегрування на збільшений період T .

Отже зі збільшенням періоду імпульсів гармоніки будуть розташовуватись ближче одна до одної по частоті, а загальний рівень спектральних складових буде зменшуватись. При цьому вид самого інтегралу змінюватись не буде.

І якщо $T \rightarrow \infty$ гармоніки спектру будуть щільно займати всю частотну вісь, а їх амплітуди упадуть до 0 (стануть нескінченно малими). Однак взаємне співвідношення між рівнями гармонік залишиться без змін і буде визначатись все тим же інтегралом.

Тому при спектральному аналізі неперіодичних сигналів формула для розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є модифікується наступним чином:

- частота перестає бути дискретно зміною і стає неперервним параметром перетворення;
- множник $1/T$ стає не потрібним і виключається з рівняння;
- результатом розрахунку замість нумерованих коефіцієнтів ряду C_k є функція частоти $S(\omega)$ – спектральна функція сигналу $s(t)$. Ще її називають спектральна щільність.

В результаті ми отримуємо пряме перетворення Фур'є:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.13)$$

Якщо ж підставити даний вираз в формулу самого ряду Фур'є отримаємо зворотне перетворення Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (1.14)$$

Щоб можливо було застосувати перетворення Фур'є необхідно, щоб виконувались наступні вимоги:

- повинні виконуватись умови Діріхле;
- сигнал повинен бути абсолютно інтегрованим. Тобто інтеграл від його модуля повинен бути кінцевою величиною:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty. \quad (1.15)$$

В загальному випадку функція $\dot{S}(\omega)$ - є комплексною. Її дійсну та уявну частини визначають як

$$\operatorname{Re}[\dot{S}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt, \quad -\operatorname{Im}[\dot{S}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (1.16)$$

Якщо $s(t)$ – парна функція, то як у випадку ряду Фур’є, спектр буде дійсним (і відповідно буде парною функцією). Якщо ж навпаки, $s(t)$ – непарна функція, то спектральна функція буде чисто уявною і непарною.

Спектр амплітуд

$$|\dot{S}(\omega)| = \sqrt{\{\operatorname{Re}[\dot{S}(\omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[\dot{S}(\omega)]\}^2}, \quad (1.17)$$

Спектр фаз

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im}[\dot{S}(\omega)]}{\operatorname{Re}[\dot{S}(\omega)]} \right). \quad (1.18)$$

Отже перетворення Фур’є ставить у відповідність сигналу, що задається у часі, його спектральну функцію. При цьому відбувається перехід від часової області до частотної. Перетворення Фур’є є взаємно-однозначним, тому представлений сигнал в частотній області містить стільки ж інформації, що й вихідний сигнал, що задається в просторі часу.

Властивості перетворення Фур’є

1. Лінійність – спектр суми дорівнює сумі спектрів, або лінійна комбінація сигналів має спектр у вигляді такої ж комбінації (з тими ж коефіцієнтами) лінійної комбінації їх спектральних функцій.

Якщо $s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, то $\dot{S}(\omega) = \alpha \dot{F}(\omega) + \beta \dot{G}(\omega)$.

2. Затримка. Нехай $s(t) = f(t - \tau)$, де τ – час затримки.

$$\text{Тоді } \dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} = \dot{F}(\omega) e^{-j\omega\tau}.$$

Таким чином, амплітудний спектр не змінюється (оскільки модуль комплексної експоненти дорівнює 1). Фазовий спектр отримує додатковий доданок $-\omega\tau$, що лінійно залежить від частоти.

3. Зміна масштабу вісі часу. Якщо змінити тривалість сигналу $f(t)$, при цьому зберігаючи його форму, тоді новий сигнал $s(t)$ буде

$$s(t) = f(at). \quad (1.19)$$

При $|a| > 1$ сигнал стискається, при $|a| < 1$ – розтягується. Якщо $a < 0$ додатково відбувається дзеркальне відображення сигналу відносно вертикальної осі.

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\frac{\omega}{a}(at)} d(at) = \frac{1}{a} \dot{F}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.20)$$

Отже, змінюючи довжину сигналу – змінюється ширина спектру в протилежний бік (аргумент t на a множиться, а ω – ділиться) в поєднанні зі збільшенням (при розтягуванні $|a| < 1$) або зменшенні (при стисненні $|a| > 1$) рівня спектральних складових.

При

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= -\frac{1}{a} \dot{F}\left(\frac{\omega}{a}\right), & a < 0; \\ \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{|a|} \dot{F}\left(\frac{\omega}{a}\right), & a \neq 0; \\ \dot{S}(\omega) &= \dot{F}(-\omega) = \dot{F}^*(-\omega), & a = -1. \end{aligned}$$

Чим коротший імпульс, тим ширше його спектр, зокрема безмежно короткий імпульс має безмежно протяжний спектр з рівномірною щільністю.

4. Диференціювання сигналу.

$$s(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (1.21)$$

Застосуємо до цього виразу перетворення Фур'є

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\dot{F}(\omega) e^{-j\omega\varepsilon} - \dot{F}(\omega)}{\varepsilon} = \\ &= \dot{F}(\omega) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-j\omega\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = j\omega \dot{F}(\omega). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Спектр похідної отримуємо шляхом множення вихідного сигналу на $j\omega$ – *оператор диференціювання сигналу в частотній області*. Таким чином, при диференціюванні низькі частоти слабшають, а високі – підсилюються. Фазовий спектр сигналу зсувається на 90 для додатних частот і на -90 для від'ємних.

5. Інтегрування сигналу.

В загальному випадку результат інтегрування сигналу містить додатковий доданок у вигляді дельта-функції на нульовій частоті. Множник перед дельта-функцією пропорційний постійній складовій сигналу:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega} + \pi \dot{F}(0) \delta(\omega). \quad (1.23)$$

Таким чином, при інтегрування вихідного сигналу високі частоти слабшають, а низькі – підсилюються. Фазовий спектр сигналу зміщується на -90 для додатних частот і на 90 для від’ємних. Множник $(1/j\omega)$ – оператор інтегрування в частотній області.

6. Спектр згортки сигналів.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt'. \quad (1.24)$$

Отримаємо для даного виразу перетворення Фур’є

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t') e^{-j\omega(t-t')} dt (t-t') dt' = \\ &= \dot{F}(\omega) \dot{G}(\omega). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Таким чином спектр згортки дорівнює добутку спектрів.

7. Спектр добутку сигналів.

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t) g(t), \\ \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \right) g(t) e^{-j\omega t} dt \\ \text{тоді} \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j(\omega-\omega')t} dt d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') \dot{G}(\omega-\omega') d\omega'. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Спектр добутку сигналів представляє собою згортку спектрів, додатково помножену на вираз $[1/(2\pi)]$.

8. Множення сигналу на гармонічну функцію.

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{j\omega_0 t + j\varphi_0} + e^{-j\omega_0 t - j\varphi_0}}{2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\varphi_0} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\varphi_0} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \dot{F}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \dot{F}(\omega+\omega_0). \end{aligned} \quad (1.27)$$

В цьому випадку спектр розпадається на дві складові вдвічі меншого рівня, що зміщені на ω_0 вправо ($\omega - \omega_0$) та в ліво ($\omega + \omega_0$) по осі частот. Окрім того біля кожного доданку також є множник, що враховує початкову фазу гармонічного коливання.

Зв'язок перетворення Фур'є та коефіцієнтів ряду Фур'є.

Між спектральною функцією $\dot{S}(\omega)$ одиничного імпульсу і коефіцієнтами C_k ряду Фур'є для періодичної послідовності таких імпульсів існує зв'язок, що виражається наступним виразом

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \dot{S}\left(\frac{2\pi k}{T}\right). \quad (1.28)$$

1.1.5 Поточний і миттєвий спектри

Згідно з основним визначенням перетворення Фур'є комплексний спектр функції $s(t)$ вираховується по формулі:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.29)$$

Отже, для знаходження спектра необхідно виконати інтегрування функції $s(t)$ у часі в необмежених границях і якщо функція $s(t)$ задана та відома на всій безмежній протяжності осі часу, це не створює складності. Але якщо функція $sy(t)$ є відображенням деякого реального фізичного процесу, що є об'єктом спостереження, то відомості про функцію $s(t)$ отримуються в результаті відповідних вимірювань. Тому інтегрування можна виконувати не в безмежних границях, як це вимагається в, а лише до якогось певного моменту t .

Оскільки в принципі відносно функції $y(t)$ розглядаються вже зафіксовані значення, то інтегрування можна виконувати і від $-\infty$ до поточного часу t . У такому разі означення спектра матиме вигляд:

$$\dot{S}_t(\omega, t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (1.30)$$

де $S_t(\omega, t)$ - функція не тільки частоти але й часу і називається поточним спектром.

У реальних умовах саме спостереження (чи сам процес) може фактично починатися у деякий момент t_0 , що передує поточному моменту t . У цьому випадку момент t_0 можна прийняти за початок відліку часу і поточний спектр визначається таким чином:

$$\dot{S}_t(\omega, t) = \int_{t_0}^t s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.31)$$

Враховуючи той факт, що спектр сигналу є по суті його частковим поданням або, інакше кажучи, його частотною моделлю, то поняття поточного спектру є зв'язуючим ланцюжком між частотним і часовим описом сигналу.

Наступним поняттям із тієї ж таки категорії є поняття миттєвого спектра. Найпростіше означенням миттєвого спектра має такий вигляд

$$\dot{S}_T(\omega, t) = \int_{t-T}^t s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.32)$$

тобто миттєвий спектр – це спектр частини процесу з тривалістю T , що безпосередньо передуює даному моменту t .

Переписавши співвідношення як

$$\dot{S}_T(\omega, t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{t-T} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.33)$$

приходимо до висновку, що миттєвий спектр є різницею двох поточних спектрів чи, інакше кажучи, приростом, що отримує поточний спектр за проміжок часу T .

1.1.6 Фур'є-аналіз неінтегруємих сигналів

В певних випадках можна застосувати перетворення Фур'є для сигналів, які не задовольняють цим умовам Діріхле та абсолютному інтегруванні.

Дельта-функція.

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (1.34)$$

Спектр дельта-функції представляє собою константу, тобто є рівномірним в нескінченій смузі частот. Дельт-імпульс має нескінченно малу тривалість, а його спектр – нескінченно широкий.

Постійний у часі сигнал (константа).

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \delta(\omega). \quad (1.35)$$

В цьому випадку також добре простежується обернена пропорційність між довжиною сигналу та шириною його спектру: нескінченно протяжний сигнал має нескінченно вузький спектр.

Одинична-східцева функція.

Дана функція являє собою інтеграл від дельта-функції, тому

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-j\omega t} dt = \pi \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}. \quad (1.36)$$

Гармонічний сигнал.

Розрахуємо спектр гармонічного сигналу загального виду

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi). \\ \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{e^{j\omega_0 t + j\varphi_0} + e^{-j\omega_0 t - j\varphi_0}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{j\varphi_0} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= A\pi e^{j\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Результатом даного перетворення є пара дельта-функцій, що розташовані на частотах плюс-мінус ω_0 . Множником при цих функціях є амплітуда та початкова фаза (тобто комплексна амплітуда) гармонічного сигналу.

Довільний періодичний сигнал.

Даний сигнал можна представити у вигляді ряду Фур'є:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}. \quad (1.38)$$

Спектральна функція такого сигналу є набір дельта-функцій, що розташовані на частотах гармонік ряду Фур'є:

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \dot{C}_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (1.39)$$

Множники при дельта-функції рівні відповідним коефіцієнтам ряду Фур'є \dot{C}_k , помноженому на 2π .

1.1.7 Кореляційний аналіз

Наряду зі спектральним, кореляційний аналіз відіграє значну роль в теорії сигналів. Суть даного аналізу, полягає в кількісному вимірі ступеня подібності різних сигналів. Для цього вводяться поняття кореляційних функцій.

Кореляційна функція (КФ; *correlation function CF*) детермінованого сигналу з кінцевою енергією є інтегралом (в межах нескінченості) від добутку двох копій сигналу, зміщених один відносно одного на час τ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (1.40)$$

КФ характеризує ступінь схожості між сигналом та його зміщеної копії – чим більше значення кореляційної функції, тим більша схожість.

Властивості КФ:

1. Значення КФ при $\tau = 0$ дорівнює енергії сигналу.
2. КФ – є парною функцією свого аргументу τ : $B_s(\tau) = B_s(-\tau)$.
3. Значення КФ при $\tau = 0$ є максимально можливим зазначенням $B_s(\tau) \leq B_s(0)$.
4. Зі збільшенням абсолютного значення τ КФ сигнал з кінцевою енергією згасає: $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0$.
5. Якщо сигнал $s(t)$ не містить дельту-функцію, його КФ не може мати розривів, тобто обов'язково має бути неперервною функцією.
6. Якщо сигнал подано у вигляді напруги, то розмірність його КФ $V^2 \cdot s$.

У випадку періодичного сигналу (або будь-якого сигналу з нескінченною енергією) КФ розраховують, усереднюючи добуток зміщених копій в межах одного періоду:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (1.41)$$

Властивості таких КФ дещо змінюється.

1. Значення при $\tau = 0$ дорівнює не енергії, а середній потужності сигналу.
2. Властивість парності зберігається $B_s(\tau) = B_s(-\tau)$.
3. Значення КФ при $\tau = 0$ залишається максимально можливим.
4. КФ періодичного сигналу є періодична функція з тим самим періодом, що і сам сигнал: $B_s(\tau + T) = B_s(\tau)$.

5. Якщо сигнал не містить дельта-функції, його КФ буде неперервною функцією.

6. Розмірність КФ періодичного сигналу – квадрат розмірності самого сигналу (якщо сигнал напруга - V^2).

1.1.8 Взаємно кореляційна функція

Якщо КФ показує ступінь подібності між двома зміщеними копіями одного й того ж сигналу, то взаємно кореляційна функція (ВКФ cross-correlation function CCF) дозволяє встановити аналогічну величину для двох різних зміщених сигналів.

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt. \quad (1.42)$$

Властивості ВКФ:

1. $|B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, де E_1 та E_2 – енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.
2. $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$ тобто зміна знаку τ рівносильна перестановці сигналів
3. Значення ВКФ при $\tau = 0$ нічим не відрізняється, максимум може бути розташований в будь-якому місці вісі τ .
4. Зі збільшенням абсолютного значення τ ВКФ сигналів з кінцевою енергією затухає $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_{12}(\tau) = 0$.

5. Якщо сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ не містять в собі дельта-функцій, їх ВКФ не може мати розривів (тобто має бути неперервною функцією).

Для періодичних сигналів поняття ВКФ зазвичай не застосовується, хоча воно може бути введене у випадку якщо $s_1(t)$ і $s_2(t)$ мають однакові періоди.

Зв'язок між КФ і спектром сигналів.

Оскільки як КФ так і спектри є інтегральними перетвореннями сигналів то між ними існує певний зв'язок. А так як ВКФ є залежністю від часу τ її до неї можна застосувати перетворення Фур'є (ПФ).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t - \tau) dt = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Отже ВКФ пов'язана з ПФ так званим взаємним спектром сигналів.

Взаємний спектр $\dot{S}_{12}(\omega)$ для сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$ представляє добуток їх спектральних функцій, до одної з яких застосовано комплексне спряження.

$$\dot{S}_{12}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \quad (1.44)$$

Звідси: якщо спектри сигналів не перекриваються, то їх взаємний спектр дорівнює нулю на всіх частотах, а отже, їх ВКФ дорівнює нулю при будь-якому зміщенні τ . Таким чином, сигнали, спектри яких не перекриваються не підлягають кореляції.

Прийнявши $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, отримаємо аналогічний результат:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t-\tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) dt = \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Таким чином, КФ сигналу пов'язана з перетворенням Фур'є з квадратом модуля спектральної функції або з енергетичним спектром сигналу.

Отже КФ сигналу не залежить від його фазового спектру. Відповідно, сигнали, амплітудні спектри яких однакові, а фазові – розрізняються, будуть мати однакову КФ. З цього витікає, що знаючи КФ неможливо відновити вихідний сигнал.

Співвідношення що дозволяє визначити енергію сигналу як в часовій так і частотній області (*рівність Парсеваля*)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.46)$$

Середня потужність за період

$$P_{\text{cp}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_k|^2. \quad (1.47)$$

1.1.9 Комплексна огибающая

В різних системах передачі часто застосовують вузькосмуговий сигнал, спектр якого зосереджений навколо деякої частоти ω_0 . При аналізі

таких сигналів зручно застосовувати поняття комплексної огибаючої, амплітудної огибаючої та фазової функції сигналу.

Розглянемо сигнал, представлений у вигляді коливань з частотою ω_0 , в якого змінюється в часі як амплітуда, так і початкова фаза:

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (1.48)$$

Множник $A(t)$ – називається амплітудною огибаючою, а початкова фаза $\varphi(t)$ – фазовою функцією сигналу $s(t)$. Весь аргумент функції \cos називають повною фазою сигналу $\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$.

Даний сигнал можна представити у вигляді дійсної частини комплексної функції

$$s(t) = \operatorname{Re} \left(A(t) \exp \left(j \left(\omega_0 t + \varphi(t) \right) \right) \right). \quad (1.49)$$

В комплексному виразі, що знаходиться під функцією Re , можна виділити два множники: $\exp(j\omega_0 t)$ – не модульоване несуче коливання яке швидко змінюється, та $A(t) \exp(j\varphi(t))$ – коливання, що змінюється як правило значно повільніше і містить інформацію про амплітудну огибаючу та початкову фазу одночасно. Цей другий множник і називається – комплексною огибаючою сигналу

$$\dot{A}_m(t) = A(t) \exp(j\varphi(t)). \quad (1.50)$$

1.1.10 Аналогові, дискретні та цифрові сигнали

Вихідні фізичні сигнали завжди є неперервною функцією часу.

Послідовність чисел, що представляють сигнал при цифровій обробці, є дискретним рядом (discrete series) і не може повністю відповідати аналоговому сигналу. Числа, що складають послідовність являють собою значення сигналу в окремі (дискретні) моменти часу і називаються відліками сигналу (*samples*).

Як правил, відліки беруться через рівні проміжки часу T , що називається періодом дискретизації (або інтервалом, шагом дискретизації – *sampl time*). Величина обернена періоду дискретизації – частота дискретизації (*sampling frequency*), їй відповідає кругова дискретизації: $\omega_d = 2\pi/T$.

Зрозуміло, що в загальному представленні сигналу набором дискретних відліків призводить до втрати інформації, так як ми нічого не знаємо про поведінку сигналу в проміжках між відліками. Однак існує клас

аналогових сигналів, для яких втрати інформації не відбувається і які можуть бути точно відновлені при значенні дискретних відліків.

Процес перетворення аналогового сигналу в послідовність відліків називається – дискретизацією (*sampling*), а результат такого перетворення – дискретним сигналом.

При обробці сигналу в обчислювальних пристроях його відліки представляють у вигляді двійкових чисел, що має обмежене число розрядів. В результаті цього відліки можуть приймати лише скінчену множину значень, а значить, при представленні сигналу неминуче відбувається його округлення. Процес перетворення відліків сигналу в числа називається – квантуванням за рівнем (*quantization*), а виникаюча при цьому помилка округлення – помилками (або шумами) квантування (*quantization error (noise)*).

Сигнал дискретний у часі, але неквантований за рівнем, називається дискретним (*discrete-time*) сигналом. Сигнал, дискретний у часі і квантований за рівнем називається цифровим (*digital*) сигналом. Сигнали, квантовані за рівне, але неперервні у часі, на практиці зустрічаються рідко. Різницю між аналоговим, дискретним та цифровим сигналами приведено на рис. 1.9.

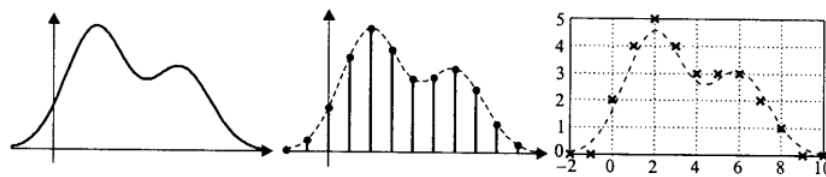


Рис. 1.9. Аналоговий, дискретний та цифровий сигнал

Обчислювані пристрої, призначені для обробки сигналів, можуть оперувати лише цифровими сигналами. Існують також пристрої, що побудовані в основному на базі аналогової схемотехніки, яка працює з дискретними сигналами, що представлені у вигляді імпульсів різної амплітуди та довжини. Щоб підкреслити відсутність квантування за рівнями, такі пристрої іноді називають дискретно-аналоговими.

1.1.11 Аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення

Загальне уявлення про принцип обробки аналогового сигналу можна отримати зі структурної схеми (рис. 1.10).



Рис. 1.10. Структурна схема обробки аналогового сигналу

Як правило перед здійсненням реального аналого-цифрового перетворення аналоговий сигнал проходить через кола нормалізації, які виконують функції підсилення, послаблення та фільтрації. Для придушення небажаних сигналів поза смугою пропускання та запобігання накладанню спектрів необхідний ФНЧ/ПФ.

АЦП неперервно дискретизує сигнал із частотою, яка дорівнює частоті дискретизації – f_d , та видає новий відлік цифровому процесу обробки сигналів (ЦПОС) із такою самою частотою. Для забезпечення роботи в режимі реального часу ЦПОС повинен закінчити усі обчислення в межах інтервалу дискретизації $1/f_d$, та передати вихідний відлік на ЦАП до надходження наступного відліку з АЦП.

ЦАП потрібний, коли дані необхідно перетворити назад у аналоговий сигнал. Тоді, після нього, для усунення небажаних ВЧ-гармонік необхідно застосовувати ФНЧ.

Існує кілька способів відновлення безперервного сигналу. У найпростішому випадку ЦАП, одержавши новий керуючий сигнал від ЕОМ фіксує його протягом періоду T до появи наступного значення вхідного сигналу:

$$u(t) = u[k], k \leq t \leq (k+1)T. \quad (1.51)$$

Такий елемент називається екстраполятором нульового порядку (*zero-order hold, ZOH*) або фіксатором, його робота наведена на рис. 1.11.

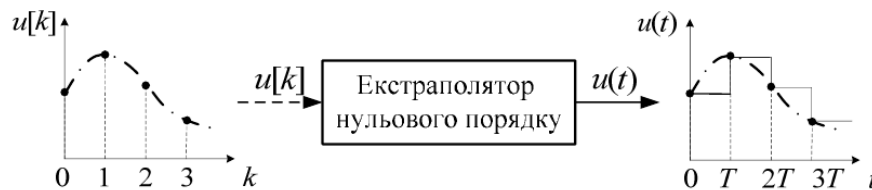


Рис.1.11. Екстраполятор нульового порядку

Передаточну функцію екстраполятора нульового порядку визначають:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (1.52)$$

Цей спосіб відновлення даних легко реалізується в ЦАП і найбільш часто використовується на практиці.

Іноді використовують екстраполятор першого порядку (*first-order hold, FOH*), що виконує лінійну екстраполяцію на основі двох попередніх значень дискретного сигналу (рис. 1.12).

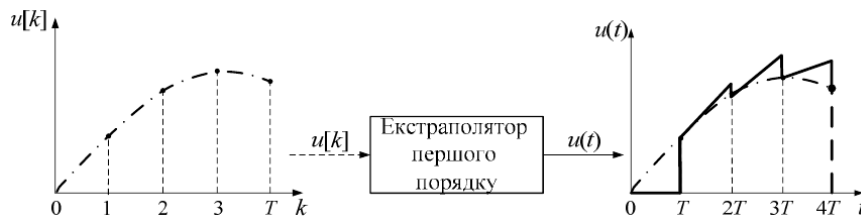


Рис. 1.12. Екстраполятор першого порядку

Безперервний сигнал на інтервалі $kT < t < (k+1)T$ відновлюється за законом лінійної екстраполяції

$$u(t) = u[k] + \frac{t - kT}{T} (u[k] - u[k-1]). \quad (1.53)$$

Передаточна функція екстраполятора першого порядку

$$H_1(s) = \left(\frac{1 - s^{-TS}}{s} \right) \frac{Ts + 1}{T}. \quad (1.54)$$

Існують й інші, менш розповсюджені на практиці, методи відновлення безперервного сигналу з дискретного.

1.1.12 Дискретизація та квантування аналогових сигналів

Аналогово-цифрове перетворення сигналу здійснюється в два етапи: дискретизація за часом та квантування за рівнем.

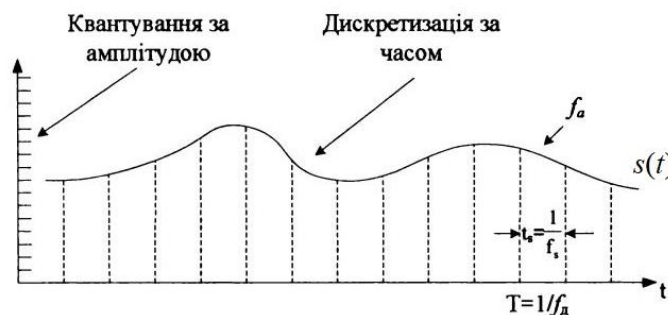


Рис. 1.13. Аналогово-цифрове перетворення

Дискретизація за часом – це процедура зняття миттєвих значень сигналу $s(t)$ через рівні проміжки часу T . Очевидно, що чим частіше брати відліки, тобто чим менший період дискретизації T , тим точніше послідовність відліків $s[nT]$ відобразить вихідний сигнал $s(t)$.

Оскільки період дискретизації обернена величина до частоти дискретизації $T = 1/f_d$, чим менше T , тим вище f_d . З іншого боку чим вища частота дискретизації, тим важче обчислювачу виконувати кількість операцій над відліками в темпі їхнього надходження на переробку і тим складнішою повинна бути його будова.

Отже, точність представлення сигналу вимагає збільшення f_d , а прагнення зробити обчислювач якомога простішим приводить до бажання її понизити. Якщо брати відліки дуже рідко, то у випадку швидкозмінного сигналу вони не міститимуть інформації, достатньої для його ідентифікації. Швидкість зміни сигналу характеризується верхньою частотою його спектра. Тому існує обмеження на мінімальне значення f_d – для повного відновлення неперервного сигналу за його відліками $s[nT]$ необхідно і достатньо, щоб частота дискретизації f_d була, принаймні удвічі більшою від найвищої частоти F у спектрі сигналу $s(t)$, який передається, тобто:

$$f_d \geq 2F, \quad T \leq 1/2F. \quad (1.55)$$

Отже, якщо сигнал не обмежений за спектром (верхня частота F прямує до нескінченності), то мінімального допустима величина інтервалу дискретизації прагнучиме до нуля. Звідси можна зробити важливий висновок – без втрати інформації дискретними відліками можуть бути представлені лише обмежені за спектром аналогові сигнали. Якраз тому в системах цифрової обробки сигналів перед виконанням дискретизації сигналу його спектр обмежують до частоти $F = f_v$ застосуванням фільтра низьких частот, який називається ще антиелейзинговим фільтром.

Явище елейзінгу полягає у виникненні спотворень сигналу за рахунок накладання спектра у разі невдалого вибору частоти дискретизації. Дискретизація в часі призводить до появи періодичних копій спектра сигналу. За надто малої частоти дискретизації ці копії перекриваються, що спричиняє спотворення сигналу під час його відновлення. Гармоніки сигналу з частотами, вищими від частоти дискретизації, відображаються в частоти, нижчі від цієї частоти, створюючи завади. Гранична частота дискретизації $f_d = 2F$, за якої перекриття ще не відбуваються, називається ще частотою Найквіста.

У спектрі будь-якого скінченного сигналу є такі вищі складові, які, починаючи з деякої верхньої частоти f_v , мають незначні амплітуди і тому ними можна знехтувати без істотного спотворення самого сигналу. Значення f_v визначається конкретним типом сигналу та розв'язуваної задачі. Наприклад, для стандартного телефонного сигналу $f_v = 3,4$ кГц, а мінімальна стандартна частота його дискретизації $f_d = 8$ кГц.

Антиелейзинговий фільтр формує аналоговий сигнал зі значного придушеними верхніми частотними складовими у смузі затримки, починаючи з частоти $F = f_v$. Це дає підставу вважати сигнал практично

обмеженими за частотою і таким, що не зазнає ефекту накладання при частоті дискретизації, не меншій за $2F$. Дискретизація з частотою Найквіста називається граничною дискретизацією. Сигнал, дискретизований із $f_d > 2F$, називається передискретизованим сигналом. Незважаючи на те, що в цьому випадку одержується надлишкова кількість відліків, інколи така техніка необхідна, особливо під час аналізу сигналів з виділенням якихось ознак.

Якщо крок дискретизації постійний, то дискретизація називається рівномірною, у протилежному випадку – нерівномірною. У разі нерівномірної дискретизації крок «підлаштовується» під швидкість зміни сигналу, збільшуючись на гладких, малоінформативних ділянках. Виникає необхідність в зберіганні значення інтервалу дискретизації між кожного парою відліків, тому нерівномірну дискретизацію рідко використовують на практиці.

Аналогом дискретизації для цифрового сигналу слугує операція проріджування. Суть її полягає в тому, що за певними правилами можна без втрати інформації «викидати» деякі члени послідовності, тобто проріджувати цифровий сигнал. Операція проріджування називається ще децимацією (дециматор). Зворотна їй операція відновлення сигналу називається інтерполяцією (інтерполятор). Децимація позначається стрілкою, напруженою вниз - \downarrow , а інтерполяція – стрілкою спрямованою до гори - \uparrow . Поряд із стрілкою стоїть коефіцієнт децимації (інтерполяції). Наприклад, запис $\downarrow 2$ означає, що з послідовності вилучається кожний другий відлік; запис - $\uparrow 2$ означає вставлення нуля між сусідніми відліками. Дециматор й інтерполятор є лінійними системами.

Квантування полягає в заміні будь-якого значення відліку одним із кінцевої множини дозволених значень або рівнів квантування.

Квантування виконують з метою формування послідовності чисел $s[nT] = s[n]$, поданих у двійковому коді. Для цього весь діапазон змін величини відліків ділиться на деяку кількість дискретних рівнів і кожному відліку за певними правилами присвоюється значення одного з двох найближчих рівнів квантування, між якими розміщений цей відлік. Різниця між сусідніми квантованими значеннями визначає крок квантування, а різницю між фактичним і квантованим значенням називають помилкою квантування ε . Максимальне значення цієї помилки дорівнює половині кроку квантування. На підставі потрібного значення помилки квантування вибирають кількість рівнів квантування. Що більше рівнів квантування, то менша помилка.

Оскільки цілі числа (рівні квантування) розташовані через однакові інтервали, то говорять про рівномірне квантування. Відомо, що середня помилка рівного мірного квантувача випадкового сигналу дорівнює $\Delta^2/12$, де Δ – крок квантувача. Отже, у випадку операції заокруглення середня помилка дорівнює $1/12$. За рівномірного квантування випадкового сигналу

співвідношення сигнал/шум на виході кантувача приблизно дорівнює $6N$ дБ, де N – кількість бітів, які використовуються для кодування одного відліку. Наприклад, ц 12-ти розрядного АЦП відношення сигнал/шуму може дорівнювати 72 дБ.

Кількість рівнів квантування визначається розрядністю АЦП. Так, АЦП на три розряди може мати лише вісім рівні квантування ($k = 2^3$), а мінімальне і максимальне значення відліків дорівнюють відповідно $0 \leftrightarrow 000$ та $7 \leftrightarrow 111$. Отже, що більша розрядність АЦП, то точніше поданий відлік, однак складнішим і дорожчим є АЦП, який необхідний для розв'язання поставленої задачі.

Помилка квантування на виході ідеального рівномірного кантувача має рівномірний спектр від 0 до частоти, що дорівнює половині частотну чутливість.

Помилка квантування може призводити до певних проблем. Так, помилка квантування корельовано з сигналом, наприклад, музичним, дає відчуття «брудного» звуку під час прослуховування. Для надання помилці випадковішого характеру до вихідного аналогового сигналу можна додати деяку кількість високочастотного шуму. Цей метод називається дизерацією, а відповідний кантувач – дизеризованим. Енергія помилки в разі використання цього методу дещо зростає, але помилка стає декорельованою із сигналом, що у деяких випадках покращує якість звучання. Найефективніший, але трудомісткий метод деко реляції помилки квантування називається дизеризацією з відніманням. Його суть така: спочатку генеруються і запам'ятовують послідовність псевдовипадкових чисел; потім її пропускають через АЦП і складають за аналоговим сигналом. На виході АЦП запам'ятовані випадкові числа віднімаються від оцифрованого сигналу.

Зменшити помилку квантування можна, збільшивши кількість рівнів квантування. Однак, це не завжди можливо. Разом з тим, у техніці широко застосовують компандери – пристрої, які здійснюють стиснення динамічного діапазону аналогового сигналу перед квантувачем (компандування) і його розширення після кантувача (експандування). Використання компандерів дає змогу зменшити помилки квантування.

1.1.3 Квантування дискретних сигналів

Останнім часом під квантуванням часто розуміють процес перетворення сигналів із дискретною шкалою значень також на цифрові сигнали, діапазон значень яких є меншим. Особливо важливе значення таке перетворення має для стиснення сигналів, тобто зменшення розмірності їх цифрового опису. Під час цього аналоговий сигнал спочатку перетворюється на цифровий за допомогою квантування із достатньо великою кількістю рівнів, яке виконує АЦП, а потім цей сигнал

«стискається» в системі ЦОС. Стиснення досягається за рахунок двох речей. По-перше, цифрові значення відліків реальних сигналів виявляються корельованими. Так, коефіцієнт кореляції сусідніх відліків мови приблизно дорівнює 0,9. Ця кореляція може застосовуватись, наприклад, у диференційних системах кодування або в системах стиснення з прогнозуванням. По-друге, при стисненні використовуються властивості людського слуху (зору), який подібний на фільтр, що пропускає певні частоти (та типи спотворень) і затримає інші. Завдяки цим властивостям часто спостерігається ефект розбіжності між суб'єктивно спостережуваною якістю сигналу та об'єктивно виміряною мірою спотворення.

Вибір міри спотворення є одним із найважливіших при проектуванні кантувача. Найчастіше використовують середньоквадратичну помилку, яка виражається в зручній математичній формі і багато в чому відображає властивості чуттєвого сприйняття.

Інколи квантування безпосереднього сигналу не настільки ефективне, як квантування його перетвореної версії. Причиною цього є те, що, за належного вибору перетворення, його коефіцієнти можуть виявитися декорельованими. Зазвичай використовують ортогональні перетворення, наприклад, Фур'є, дискретне косинус не, вейлет-перетворення. Найчастіше кодування з перетвореннями застосовують для стиснення зображень.

Під час побудови алгоритму стиснення існують дві можливості: аналізувати і квантувати кожний відлік сигналу окремо або разом з іншими відліками, об'єднуючи їх у вектор. Відповідно розрізняють скалярне та векторне квантування.

Скалярний кантувач, характеризується двома параметрами: кількістю рівнів квантування та кроком квантування. Найпростішим видом скалярного кантувача є рівномірний кантувач.

У результаті квантування, яке здійснюється АЦП, у канал зв'язку передається послідовність двійкових чисел. Кількість таких чисел визначається частотою дискретизації, а швидкість C їх передавання в каналі залежить ще і від розрядності b представлення чисел:

$$C = bf_d, \quad (1.56)$$

і під час передавання по каналу, наприклад, мовного сигналу за стандартних $b=12$, $f_d = 8000$ Гц отримуємо $C = 96000$ біт/с, що перешкоджає використанню стандартних телефонних каналів.

У таких випадках використовують векторне квантування. У послідовності, яка кодується, визначають L блоків по k відліків у кожному за умови, що ці відліки не сильно відрізняються один від одного. Згадані k відліки можуть бути відображені із заданою похибкою своїм представником u . Такі блоки називають кластерами, а представника \geq -го

кластера у \geq -центроїдом. Тоді кожний відлік $x[n]$, який належить \geq -му кластеру, замінюється на відповідний центроїд. і в канал зв'язку передається лише номер кластера (центроїда). Під час передавання та прийому необхідно мати множину із L центроїдів, яка називається кодовою книгою, а параметр L – розміром кодової книги. Типові розміри кодових книг у мовних технологіях – 256, 512, 1024, 2048 центроїдів (кластерів). Нехай, наприклад, $L = 1024 = 2^{10}$. Це означає, що кодова книга містить 1024 центроїдів розмірністю $k = 10$ кожний. Тобто замість набору із десяти параметрів (на передавання яких необхідно було б відвести близько 40 бітів) передається лише номер кластера (а тому і номер центроїда), якому належить цей набір. на що необхідно всього 10 бітів, тобто забезпечується стиснення сигналу в 4 рази.

На практиці коефіцієнт стиснення може бути значно більшим, що визначається співвідношенням:

$$K_{CT} = b/R, \quad R = \log_2 L/k \quad (1.57)$$

де b – розрядність одного відліку k – вимірного вектора; R – кількість бітів, які затрачаються на передавання одного відліку.

1.1.14 Частота Найквіста

Гармонічний сигнал може бути адекватно представлений дискретними відліками, якщо його частота не перевищує половини частоти дискретизації (це частота називається частотою Найквіста *Nyquist frequency*) – $f_N = f_d/2 = 1/(2T)$; $\omega_N = \omega_d/2 = \pi/T$.

Походження цього обмеження пояснює рис 1.14.

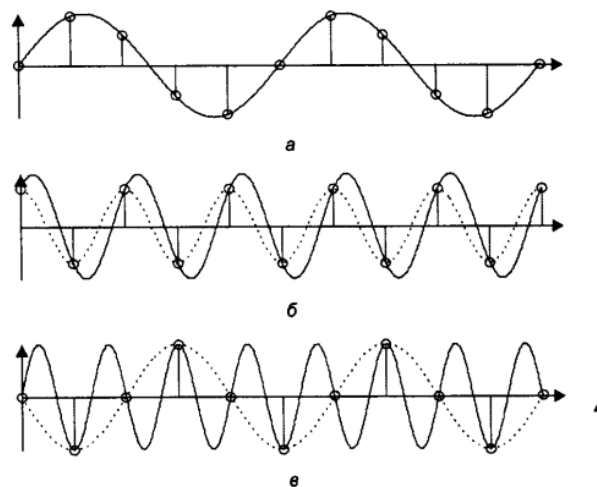


Рис. 1.14. Дискретизація гармонічних сигналів з різною частотою

Залежно від співвідношення між частотою гармонічного сигналу, що дискретизується, і частотою Найквіста можливі три випадки.

1. Якщо частота гармонічного сигналу менша частоти Найквіста, дискретні відліки дозволяють правильно відновити аналоговий сигнал (рисунок 1.14, а).

2. Якщо частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дозволяють відновити аналоговий гармонічний сигнал з тією же частотою, але амплітуда і фаза відновленого сигналу (він показаний пунктирною лінією) можуть бути спотворені (рисунок 1.14, б). У найгіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть виявитися рівними нулю.

3. Якщо частота гармонічного сигналу більша частоти Найквіста, то відновлений по дискретним відлікам аналоговий сигнал (як і в попередньому випадку, він показаний пунктирною лінією) буде також гармонічним, але з іншою частотою (рисунок 1.14, в). Цей ефект зветься появою помилкових частот – елайзинг (*aliasing*).

1.1.15 Спектр дискретного сигналу

Перетворення Фур'є дозволяє визначити спектральну щільність сигналу, який представляє собою функцію (як правило часу, або просторових координат). Дискретний сигнал же являє собою послідовність чисел, тому для аналізу його спектру звичайними (аналоговими) засобами необхідно поставити у відповідність цій послідовності деяку функцію.

Традиційно в якості такої відповідності відліки представляють у вигляді дельта-функції з відповідними множниками та затримками. Для послідовності підрахунків $\{x(k)\}$ отримаємо наступний сигнал:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t-k). \quad (1.58)$$

Перетворення Фур'є лінійне, спектр дельта-функції дорівнює одиниці, а затримка сигналу в часі призводить до множення спектра на комплексну експоненту. Це дозволяє записати спектр сигналу у вигляді:

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k}. \quad (1.59)$$

Дана формула дозволяє визначити спектральну функцію за відомими відліками $x(k)$.

З цієї формули видно головну властивість спектру будь-якого дискретного сигналу: спектр є періодичним, і його період в даному

випадку дорівнює 2π (тобто круговій частоті дискретизації, оскільки складаючи сигнал із дельта-функцій інтервал між ними дорівнює одному, що дає $\omega_d = 2\pi$):

$$\dot{S}(\omega \pm 2\pi) = \dot{S}(\omega). \quad (1.60)$$

Розмірність спектральної функції дискретного сигналу: вона співпадає з розмірністю відліків. Це пов'язано з тим, що дельта-функція часу, із яких складається сигнал має розмірність частоти.

Нехай $x(k)$ є відліками аналогового сигналу $s(t)$, що взятий з періодом T :

$$x(k) = s(kT). \quad (1.61)$$

Дискретизований сигнал у вигляді послідовності дельта-функцій

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \delta(t - kT). \quad (1.62)$$

Оскільки функція $\delta(t - kT)$ дорівнює нулю скрізь, окрім моменту $t = kT$, можна замінити константу $s(kT)$ на вихідний неперервний сигнал $s(t)$:

$$s_d(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (1.63)$$

Сума що входить до даного виразу є періодичним сигналом, а тому може бути представлена у вигляді ряду Фур'є.

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T}. \quad (1.64)$$

В інтервал інтегрування $(-T/2, T/2)$ потрапляє лише одна дельта-функція, що відповідає $k=0$.

Періодична послідовність дельта-функцій може бути представлена у виді комплексного ряду Фур'є:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t}. \quad (1.65)$$

Тоді $s_d(t) = \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega_n t}.$

Множення сигналу на $\exp(j\omega nT)$ відповідає зміщенню спектральної функції на ωn тому спектр дискретизованого сигналу можна записати наступним чином:

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right). \quad (1.66)$$

Таким чином, спектр дискретизованого сигналу являє собою нескінченний ряд зміщених копій спектру вихідного неперервного сигналу $s(t)$.

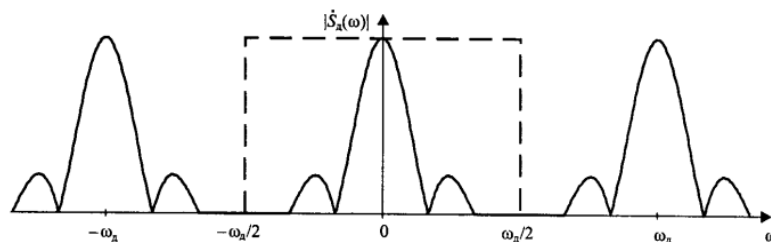


Рис. 1.15. Спектр дискретизованого сигналу

Відстань по частоті між сусідніми копіями спектру дорівнює частоті дискретизації $\omega_d = 2\pi/T$.

Характери спектра дискретизованого сигналу ще раз демонструє частотно-часову дуальність перетворення Фур'є:

- періодичний сигнал \rightarrow дискретний спектр;
- періодичний спектр \rightarrow дискретний сигнал.

Отже з'єднати відліки $\{x(k)\}$ для отримання аналогового сигналу можна будь-яким чином. В кожному випадку аналоговий сигнал буде мати свій спектр. Однак результат сумування зміщених копій спектрів завжди буде одним і тим самим оскільки визначається лише значення дискретних відліків $\{x(k)\} = \{s(kT)\}$ та виразом $\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k}$.

Рисунок наглядно демонструє і спосіб відновлення неперервного сигналу за дискретними відліками. Для цього необхідно пропустити дискретний сигнал через ідеальний фільтр нижніх частот (ФНЧ) з частотою зрізу, що дорівнює половині частоти дискретизації. АЧХ такого фільтру показаний на рисунку пунктиром.

Точне відновлення сигналу можливе, якщо зміщені копії спектру не перекриваються. Для цього необхідно, щоб частота дискретизації як мінімум в два рази перевищувала верхню межу частоти в спектрі сигналу.

Спектральне представлення дискретного сигналу дозволяє пояснити появу помилкових частот (*aliasing*). Нехай дискретизації піддається гармонічний сигнал з частотою ω_0 , що перевищує частоту Найквісту, але меншою за частоту дискретизацію.

Спектр такого сигналу показаний на рисунку зверху.

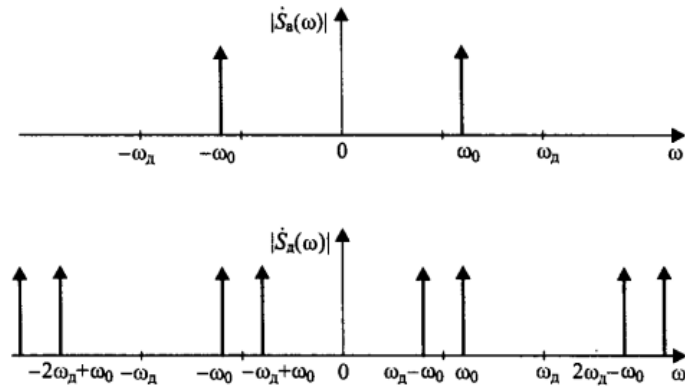


Рис. 1.16. Спектри аналогового (верхній) і дискретизованого (нижній) синусоїди з частотою, що перевищує частоту Найквісту.

Зміщені копії спектру, що виникають при дискретизації, створюють спектральні складові з частотою $\omega_d - \omega_0$, які потрапляють в полосу відновлення (від нуля до частоти Найквіста). Спектри, що виникають після дискретизації гармонічних сигналів з частотами ω_0 та $\omega_d - \omega_0$ виявляються ідентичними.

У випадку довільного сигналу, якщо умова $\omega_d > 2\omega_v$ не виконується, зміщені копії спектру будуть накладатись один на одного, що призведе до неминучого спотворення при відновленні неперервного сигналу (рис. 1.17).

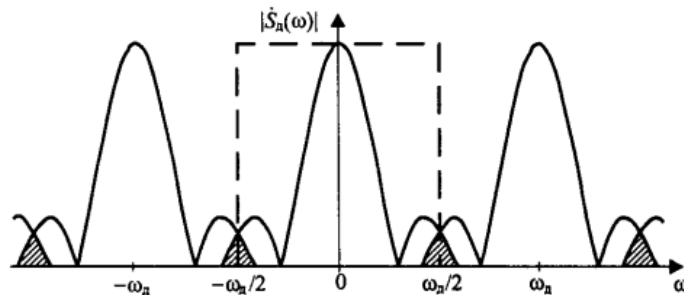


Рис. 1.17. Ефект накладання зміщених копій спектру при $\omega_d < 2\omega_v$

Такі спотворення викликані тим, що спектральні складові сигналу з частотами що перевищують частоту Найквіста, не можуть бути відновлені правильно – замість цього вони викликають накладання «хвостів» сусідніх зміщених копій спектрів і появи помилкових частот.

Якщо сигнал який необхідно піддати дискретизації може містити спектральні складові, що перевищують частоту Найквіста, корисно попередньо пропустити його через ФНЧ з частотою зрізу, що дорівнює частоті Найквіста.

При цьому все одно будуть втрачені високочастотні складові – зберегти їх можна лише шляхом підвищення частоти дискретизації. Однак в цьому випадку завдяки відсутності накладених «хвостів» не

відбуватиметься поява помилкових частот і діапазон частот $0 \dots \omega_d/2$ буде представлений в дискретному сигналі без спотворень.

Вплив форми дискретизуючих імпульсів.

Нехай замість дельта-функції сигнал подається у вигляді імпульсів $s_0(t)$ довільної форми:

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) s_0(t - kT). \quad (1.67)$$

Тоді спектр такого сигналу буде

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{\dot{S}_0(\omega)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right). \quad (1.68)$$

де $\dot{S}_0(\omega)$ - спектр імпульсу $s_0(t)$.

Якщо $s_0(t)$ представляє собою прямокутний імпульс з одиничною амплітудою та тривалістю, що дорівнює періоду дискретизації, тоді дискретний сигнал буде приймати ступінчасту форму.

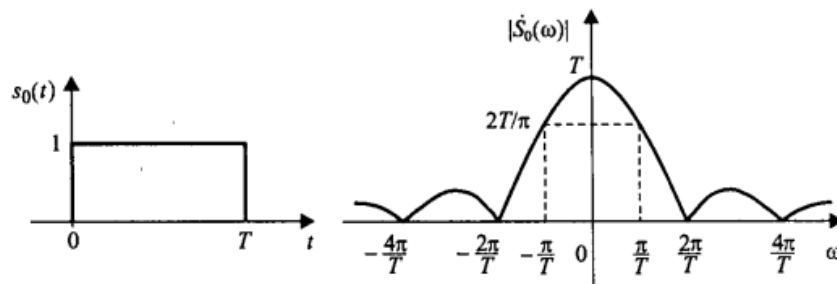


Рис. 1.18. Прямокутний дискретизуючий імпульс (зліва) та його амплітудний спектр (справа)

Спотворення спектру при цьому буде

$$\dot{S}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) e^{-j\omega t} dt = T \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} e^{-j\omega T / 2}. \quad (1.69)$$

Спад амплітудного спектру на частоті Найквіста, дорівнює π/T , і становить:

$$\frac{|\dot{S}_0(\pi / T)|}{|\dot{S}_0(0)|} = \frac{\sin(\pi / 2)}{\pi / 2} \approx 0,637 \approx -3,9 \text{ дБ}.$$

Теорема Котельнікова. Спектр дискретизованого сигналу представляє собою суму зміщених копій спектру вихідного сигналу, при цьому шаг зміщення дорівнює частоті дискретизації ω_d . Якщо в спектрі аналогового сигналу не містяться складові з частотами, що перевищують частоту Найквіста ($\omega_d/2$), то зміщені копії спектру не будуть перекриватись. В цьому випадку використання ідеального ФНЧ з прямокутною АЧХ дозволяє виділити вихідну копію спектру, що зосереджена в межах нульової частоти, і таким чином, точно відновити вихідний аналоговий сигнал.

АЧХ ідеального ФНЧ наведена на рисунку.

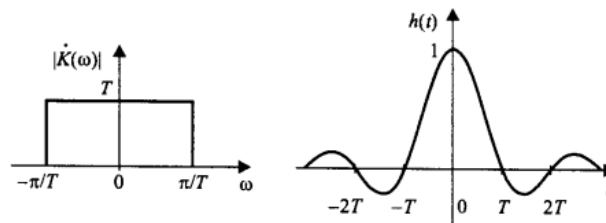


Рис. 1.19. Амплітудно-частотна (зліва) та імпульсна (справа) характеристики ідеального відновлюючого фільтра

Коефіцієнт передачі в смузі пропускання дорівнює T , а не одиниці. Імпульсна характеристика фільтра буде дорівнювати

$$h(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}}. \quad (1.70)$$

Дискретизований сигнал, що представлений як сума дельта-функцій, при проходженні через ФНЧ на виході буде представляти собою суму зміщених і помножених на відліки сигналу копій імпульсних характеристик ідеального ФНЧ.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\pi \frac{t-kT}{T}}, \quad \text{де} \quad \varphi_k(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\pi \frac{t-kT}{T}} \quad - \quad \text{базис}$$

Котельнікова.

Теорема Котельнікова (теорема Найквіста, теорема дискретизації):

будь-який сигнал $s(t)$, спектр якого не містить складових з частотами вище деякого значення $\omega_b = 2\pi f_b$, може бути без інформаційних втрат представлений своїми дискретними відліками $\{s(kT)\}$, що взяті з інтервалом T , і що задовольняє наступний вираз

$$T \leq \frac{1}{2f_b} = \frac{\pi}{\omega_b}. \quad (1.71)$$

1.2 Аналогові системи обробки сигналів

1.2.1 Класифікація систем та їх основні характеристики

Системи, які використовуються для обробки сигналів, мають різні фізичні характеристики і їх можна класифікувати за різними принципами.

Важливою класифікаційною ознакою є лінійність або не лінійність системи.

Лінійними називають системи, для яких виконується принцип суперпозиції: реакція на суму сигналів рівна сумі реакцій на ці сигнали, що подаються на вхід окремо один від одного. Системи, для яких умова суперпозиції не виконується, називаються *нелінійними*.

Наступним критерієм за яким класифікують системи є те, чи постійні їх характеристики в часі. Якщо довільна затримка сигналу, що подається на вхід системи призводить до такої самої затримки вихідного сигналу, не змінюючи його форми, система називається стаціонарною або системою з постійними параметрами. В іншому випадку системи називаються не стаціонарними, параметричною або системами зі змінними параметрами.

Відповідно до двох способів класифікації системи поділяють на чотири класи: лінійні стаціонарні, лінійні не стаціонарні, нелінійні стаціонарні та нелінійні нестаціонарні.

Характеристики лінійних стаціонарних систем.

Для таких систем з постійними параметрами справедливий принцип суперпозиції та стаціонарності.

Лінійність та стаціонарність дозволяє легко знайти реакцію системи на будь-який вхідний сигнал, знаючи всього одну функцію – реакцію системи на подану на вхід дельта-функцію. Ця реакція називається імпульсною характеристикою системи і позначається $h(t)$.

Будь-який сигнал можна представити у вигляді згортки самого себе з дельта-функцією:

$$s_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t') \delta(t - t') dt'. \quad (1.72)$$

Лінійна системи перетворює відносно часу t всі функції, що входять в даний вираз. Вхідний сигнал $s_{\text{вх}}(t)$ при цьому перетворюється у вихідний сигнал $s_{\text{вих}}(t)$, а дельта функція $\delta(t-t')$ – в імпульсну характеристику $h(t-t')$. Функція $s_{\text{вх}}(t')$ від t не залежить і тому залишається без змін. В результаті отримаємо формулу, яка показує, що вихідний сигнал лінійної системи з постійними характеристиками дорівнює згортці вихідного сигналу на імпульсну характеристику системи:

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t') h(t-t') dt'. \quad (1.73)$$

Таким чином нескінченно малий «шматочок» вхідного сигналу $s_{\text{вх}}(t')$ шириною dt' утворює на виході відгук, що представляє собою імпульсну характеристику, помножену на $s_{\text{вх}}(t')dt'$ і затриману на час, що дорівнює $(t-t')$, тобто $s_{\text{вх}}(t')h(t-t')dt'$. Щоб отримати значення вихідного сигналу в момент часу t , необхідно помножити внески від усіх цих нескінчених шматочків, тобто виконати інтегрування за (t') (рис. 1.20).

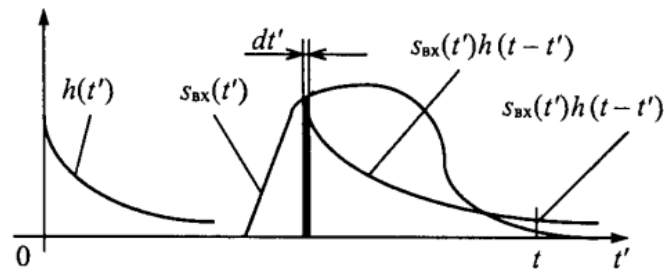


Рис. 1.20. Інтегрування сигналу за часом

Перехідною характеристикою називають реакцію системи на подану на вхід одинично-східцеву функцію. Позначається вона як $g(t)$. Оскільки дельта-функція – це похідна від одинично-східцевої, імпульсна і перехідна характеристики пов'язані одна з одною диференціюванням та інтегруванням:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'. \quad (1.74)$$

Умова фізичної реалізації.

Будь-яка фізична реалізація системи володіє властивістю причинності – вихідна реакція не може з'явитись раніше вхідного сигналу. Тому для фізично реалізуємої системи імпульсна та перехідна характеристики повинні дорівнювати нулю при $t < 0$.

Комплексний коефіцієнт передачі.

Вихідний сигнал лінійної системи представляє собою згортку вхідного сигналу та імпульсної характеристики. Перетворення Фур'є від згортки дає добуток спектрів згорнутих сигналів, так, що в частотній області проходження сигналу через лінійну систему можна описати виразом:

$$\dot{S}_{\text{вих}}(\omega) = \dot{S}_{\text{вх}}(\omega) \dot{K}(\omega). \quad (1.75)$$

Тут $\dot{K}(\omega)$ - перетворення Фур'є імпульсної характеристики системи:

$$\dot{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.76)$$

Ця функція називається комплексним коефіцієнтом передачі системи, а її модуль та фаза – відповідно амплітудно-частотною (АЧХ) та фазово-частотною (ФЧХ) характеристиками системи.

Значення $\dot{K}(\omega)$ показує, як змінюється при проходженні через систему комплексна амплітуда синусоїди з частотою ω . АЧХ показує, в скільки разів змінюється амплітуда синусоїди, а ФЧХ – яким буде отриманий нею фазовий зсув.

Коефіцієнт передачі за потужністю.

Потужність гармонічного сигналу пропорційний квадрату його амплітуди і не залежить від фази. Тому коефіцієнт передачі за потужністю дорівнює квадрату модулю комплексного коефіцієнта передачі, тобто квадрату АЧХ:

$$\dot{K}_{\text{пот}}(\omega) = \dot{K}(\omega) \dot{K}^*(\omega) = |\dot{K}(\omega)|^2. \quad (1.77)$$

Фазова та групова затримка.

При перетворенні сигналу лінійними системами розрізняють два види затримки.

Фазова затримка (*phase delay*) на частоті ω – це затримка гармонічного колювання з частотою ω , що проходить через систему. Значення фазової затримки дорівнює фазовому зсуву, що вносить система, поділеному на частоту гармонічного колювання, зі зворотнім знаком:

$$\tau_{\phi}(\omega) = -\frac{\varphi_K(\omega)}{\omega}. \quad (1.78)$$

Групова затримка (*group delay*) на частоті ω – це затримка огинаючої вузкосмугового сигналу зі середньою частотою ω . Групова затримка дорівнює похідній від ФЧХ системи зі зворотнім знаком:

$$\tau_{\text{гр}}(\omega) = -\frac{d\varphi_K(\omega)}{d\omega}. \quad (1.79)$$

Спільний спектр вихідного та вхідного сигналу.

Взаємний спектр вихідного і вхідного сигналів лінійної системи легко знайти, згадавши зв'язок між кореляційною функцією та спектрами сигналів:

$$\dot{S}_{\text{вих_вх}}(\omega) = \dot{S}_{\text{вих}}(\omega) \dot{S}_{\text{вх}}^*(\omega) = \dot{S}_{\text{вх}}(\omega) \dot{K}(\omega) \dot{S}_{\text{вх}}^*(\omega) = |\dot{S}_{\text{вх}}(\omega)|^2 \dot{K}(\omega). \quad (1.80)$$

Звідси слідує, що комплексний коефіцієнт передачі системи дорівнює відношенню взаємного спектру вихідного і вхідного сигналів до енергетичного спектру вхідного сигналу:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{S}_{\text{вих_вх}}(\omega)}{|\dot{S}_{\text{вх}}(\omega)|^2}. \quad (1.81)$$

1.2.2 Взаємна кореляція між входом та виходом

ВКФ вихідного та вхідного сигналів лінійної системи представляє собою згортку КФ вхідного сигналу з імпульсною характеристикою системи.

$$B_{\text{вих_вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{вх}}(\tau') h(\tau - \tau') d\tau'. \quad (1.82)$$

Перетворення випадкового процесу в лінійних системах.

Кожна окрема реалізація випадкового процесу є детермінованим сигналом, і її перетворення лінійною системою аналізується відповідно до формул, що розглядались раніше. Однак, необхідно також дослідити статистичні характеристики випадкового процесу. Отже розглянемо стаціонарний випадковий процес з нульовим математичним сподіванням.

Спектральна щільність потужності.

Оскільки спектром випадкового процесу є спектр його потужності, від перетворюється в лінійній системі пропорційно коефіцієнту передачі за потужністю:

$$W_{\text{вих}}(\omega) = W_{\text{вх}}(\omega) K_{\text{пот}}(\omega) = W_{\text{вх}}(\omega) |\dot{K}(\omega)|^2. \quad (1.83)$$

Кореляційна функція.

Відповідно до теореми Вінера-Хініча, кореляційна функція випадкового процесу пов'язані з його спектром перетворенням Фур'є. Якщо застосувати перетворення Фур'є до попередньої формули то отримаємо згортку:

$$R_{\text{вих}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{вх}}(\tau') B_h(\tau - \tau') d\tau'. \quad (1.84)$$

$B_h(\tau)$ – результат зворотного перетворення Фур'є від коефіцієнта передачі за потужністю $|K(\omega)|^2$.

$$B_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t - \tau) dt. \quad (1.85)$$

Дисперсія.

Дисперсія випадкового процесу дорівнює значенню його кореляційної функції при $\tau=0$. Тоді

$$D_{\text{вих}} = R_{\text{вих}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{вх}}(\tau') B_h(\tau') d\tau'. \quad (1.86)$$

Дисперсія в частотній області можна знайти за виразом:

$$D_{\text{вих}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вх}}(\omega) |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.87)$$

Щільність ймовірності.

В загальному випадку щільність ймовірності випадкового процесу на виході лінійної системи не піддається розрахунку звичайними засобами. Виняток становить окремий випадок нормального випадкового процесу, оскільки нормальний розподіл залишається нормальним при будь-яких лінійних перетвореннях. Тому нормальний випадковий процес з нульовим середнім значенням після проходження через лінійну систему зберігає свою нормальність і нульове математичне сподівання, а його дисперсія може бути розрахована за однією з попередньо наведених формуль.

Якщо вхідний випадковий процес є білим шумом тоді розрахунки зпростуються:

$$\begin{aligned} W_{\text{вих}}(\omega) &= W_0 |\dot{K}(\omega)|^2, \\ R_{\text{вих}}(\tau) &= W_0 B_h(\tau) = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t - \tau) dt, \\ D_{\text{вих}} &= W_0 B_h(0) = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (1.88)$$

1.2.3 Способи опису лінійних систем

Зв'язок між вхідним та вихідним сигналами лінійної системи зі стаціонарними параметрами можна представити у вигляді диференціальних рівнянь (ДУ) наступного виду:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned} \quad (1.89)$$

де $x(t)$ – вхідний сигнал, $y(t)$ – вихідний сигнал, a_i та b_i – постійні коефіцієнти. Таким чином, система описується набором коефіцієнтів $\{a_i\}$ та $\{b_i\}$.

Необхідно щоб виконувалась умова нерівності $m \leq n$, тобто максимальна ступінь похідної вхідного сигналу не може перевищувати максимальний ступінь похідної вихідного сигналу. Це пов'язано з неможливістю реалізувати системи в яких ця умова не виконується. Значення n визначає порядок системи.

Якщо задати конкретний вид вхідного сигналу $x(t)$, отримаємо лінійну неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами. Рішення такого ДУ дає вихідний сигнал $y(t)$.

Функція передачі.

Якщо застосувати до двох частин ДУ перетворення Лапласа, можна отримати вираз для операторного коефіцієнта передачі або функції передачі системи (*transfer function*):

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (1.90)$$

a_i та b_i – постійні коефіцієнти, що i в ДУ.

Комплексний коефіцієнт передачі можна отримати із функції передачі замінивши оператор Лапласа $s=j\omega$:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + b_{m-2} (j\omega)^{m-2} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \quad (1.91)$$

Нулі та полюси.

Якщо розкласти чисельник та знаменник функції передачі на множники то можна отримати функцію передачі наступного виду (форма Боде):

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})(s - z_{m-2}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})(s - p_{n-2}) \dots (s - p_1)}. \quad (1.92)$$

$k = b_m/a_n$ – коефіцієнт передачі (gain), z_i – нулі функції передачі (zero), p_i – полюси функції передачі (pole). В точках нулів $H(z_i) = 0$, а в точках полюсів $H(p_i) \rightarrow \infty$.

В даному випадку система описується набором параметрів $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k .

Нулі та полюса функції передачі можуть бути як дійсними та і утворювати комплексно-спряжені пари. Коефіцієнт підсилення завжди є дійсним.

Приклад.

Нехай система описується функцією:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 8s^2 + 15s}$$

Знайдемо корні рівняння

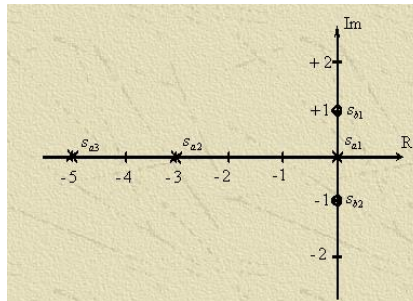
$$B(s) = s^2 + 1 = 0.$$

$$s_{b1} = +j, s_{b1} = -j.$$

Знайдемо полюси рівняння

$$A(s) = s^3 + 8s^2 + 15s = s(s^2 + 8s + 15) = 0.$$

$$s_{a1} = 0, s_{a2} = -3, s_{a3} = -5.$$



Ще однією формою перетворення дробово-раціональних функцій передачі є її представлення у вигляді суми простих дробів (форма Хевісайда). При відсутності кратних коренів у знаменнику таке представлення буде мати наступний вид:

$$H(s) = \frac{r_n}{(s - p_n)} + \frac{r_{n-1}}{(s - p_{n-1})} + \frac{r_{n-2}}{(s - p_{n-2})} + \dots + \frac{r_1}{(s - p_1)} + C_0. \quad (1.93)$$

p_i – полюси функції передачі системи, а числа r_i – вираховання. C_0 – ціла частина функції передачі, що не дорівнює нулю лише у випадку рівності ступеня поліномів чисельника та знаменника.

В цьому випадку система описується набором параметрів $\{r_i\}$, $\{p_i\}$, C_0 .

Полюси функції передачі можуть бути дійсними або складати комплексно-спряжені полюси. Вирахування, що відповідають комплексно-спряженим полюсам, також є комплексно-спряженими.

При наявності кратних полюсів функції передачі розкладання на прості дроби стає дещо складнішим. Кожний m -кратний полюс p_i дає m складових наступного виду:

$$\frac{r_{i1}}{(s - p_i)} + \frac{r_{i2}}{(s - p_i)^2} + \frac{r_{i3}}{(s - p_i)^3} + \dots + \frac{r_{im}}{(s - p_i)^m}. \quad (1.94)$$

Приклад:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

$$B(s) = s+1$$

$$A(s) = s^2+5s+6$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$s_{a1,a2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \begin{cases} s_{a1} = -2, \\ s_{a2} = -3. \end{cases}$$

Визначимо похідну від поліному знаменника

$$A'(s) = 2s+5.$$

Визначимо коефіцієнти розкладання, що відповідають номерам полюсів

$$r_1 = \frac{B(s_{a1})}{A'(s_{a1})} = \frac{(-2)+1}{2(-2)+5} = -1, \quad r_2 = \frac{B(s_{a2})}{A'(s_{a2})} = \frac{(-3)+1}{2(-3)+5} = 2,$$

Тоді

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}.$$

1.2.4 Розрахунок імпульсної характеристики

Представлення функції передачі у формі простих дробів дозволяє визначити імпульсну характеристику системи, оскільки кожна складова функції передачі виду $r_i/(s-p_i)$ відповідає складовій імпульсній характеристиці виду

$$r_i e^{p_i t}, \quad t \geq 0. \quad (1.95)$$

Пара комплексно-спряжених полюсів дають пару складових імпульсній характеристики у вигляді комплексно-спряжених експонент.

Сума таких складових представляє собою синусоїду з синусоїдою, що змінюється за експоненціальним законом:

$$\begin{aligned} r_i \exp(p_i t) + r_i^* \exp(p_i^* t) &= 2 \operatorname{Re} [r_i \exp(p_i t)] = \\ &= 2 \operatorname{Re} [|r_i| \exp(j \arg(r_i)) \exp(\operatorname{Re}(p_i) t) \exp(j \operatorname{Im}(p_i) t)] = \\ &= 2 |r_i| \exp(\operatorname{Re}(p_i) t) \cos(\operatorname{Im}(p_i) t + \arg(r_i)). \end{aligned} \quad (1.96)$$

де $\arg(r_i)$ – фаза комплексного числа r_i .

1.2.5 Стійкість лінійних систем

Система називається стійкою, якщо при нульовому вхідному сигналі вихідний сигнал затухає при будь-яких початкових умовах:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_{\text{вх}}(t) = 0 \quad \text{при} \quad s_{\text{вх}}(t) = 0. \quad (1.97)$$

Дана вимога рівносильна вимозі затухання імпульсній характеристики:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0. \quad (1.98)$$

Оскільки імпульсна характеристика системи в загальному випадку містить складові виду

$$r_i \frac{t^k}{k!} e^{p_i t}, \quad (1.99)$$

p_i – полюси функції передачі системи, r_i – вираховання, що відповідають і полюсу, k – цілі числа в діапазоні від нуля до значення, на одиницю менше кратності полюсу p_i .

Такі складові затухають при $t \rightarrow \infty$, якщо дійсна частина полюсу p_i є від'ємною:

$$\operatorname{Re}(p_i) < 0. \quad (1.100)$$

Звідси отримуємо загальну умову: лінійна система є стійкою тоді і тільки тоді, коли полюси її функції передачі лежать в лівій комплексній площині.

1.2.6 Простір станів

Ще одним способом опису лінійних систем є її представлення в просторі часу (*state space*). При цьому стан системи описується вектором стану $s(t)$, а власні коливання системи і її реакція на вхідний сигнал $x(t)$ характеризується наступним чином:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \mathbf{A}s(t) + \mathbf{B}x(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}s(t) + Dx(t). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Якщо розмірність вектору стану $s(t)$, дорівнює N ($s(t)$ – вектор-стовпець), а вхідний $x(t)$ та вихідний $y(t)$ сигнали є скалярними величинами, то розмірність параметрів в цих формулах буде наступною: \mathbf{A} – матриця $N \times N$, \mathbf{B} – стовпець $N \times 1$, \mathbf{C} – рядок $1 \times N$, D – скалярна величина. Якщо вхідний або/і вихідний сигнали є векторами, розмірність параметрів відповідним чином змінюються.

Описом системи в даному випадку є набір параметрів \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D .

Від представлення системи у просторі можна легко перейти до функції передачі. Якщо застосувати перетворення Лапласа до приведенного рівняння, а потім виразити з них операторний коефіцієнт передачі, отримаємо наступний вираз:

$$H(s) = D - \mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}. \quad (1.102)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця $N \times N$.

Зворотне перетворення виконується наступним чином. Перш за все, якщо степінь чисельника і знаменника функції передачі співпадають, з дробу виділяється ціла частина, яка стає значенням параметра D (якщо степінь чисельника менша за степінь знаменника, то $D=0$).

Далі дріб, що залишилась після цілої частини, ступінь чисельника якої (m) гарантовано менше ступеня знаменника (n), перетворюється в параметри \mathbf{A} , \mathbf{B} , та \mathbf{C} наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -a_{n-1}/a_n & -a_{n-2}/a_n & \cdots & -a_1/a_n & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= [0 \ \cdots \ 0 \ b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_1 \ b_0]. \end{aligned} \quad (1.103)$$

1.2.7 Аналогові фільтри

В аналоговій обробці сигналів під фільтрами розуміють пристрої для виділення бажаних компонентів спектру електричного сигналу та подавлення не бажаних.

В цифровій обробці сигналів під дискретними (цифровими) фільтрами розуміють програмні чи апаратні засоби для будь-якого оброблення дискретних сигналів, які (засоби) мають властивості лінійності та стаціонарності.

За формою графіку модуля комплексної частотної характеристики (за видом АЧХ) фільтри ділять на чотири основні типи:

1) фільтр нижніх частот (ФНЧ, *low-pass filter*) – пропускає частоти, менші деякої частоти зрізу ω_0 .

Такий фільтр має порівняно великий коефіцієнт передачі на частотах, які знаходяться в околі нульової частоти, і порівняно низький – на інших частотах. Тому такі фільтри зберігають незмінною величину спектральних складових вхідного сигналу на нижніх частотах; говорять, що ФНЧ пропускають низькочастотні сигнали та не пропускають високочастотні;

2) фільтр верхніх частот (ФВЧ, *high-pass filter*) – пропускає частоти, більші деякої частоти зрізу ω_0 . Такий фільтр має високий коефіцієнт передачі на частотах, які більше за ω_0 , і низький – на частотах від нуля до ω_0 . Отже вони пропускають без змін частину спектру вхідного сигналу, яка знаходиться на частотах від ω_0 до $+\infty$ і не пропускають складові спектру сигналу від 0 до ω_0 ;

3) смуговий фільтр (СФ, *band-pass filter*) – має великий коефіцієнт передачі лише в певній смузі частот між частотами ω_1 та ω_2 . Поза цим проміжком коефіцієнт передачі малий. Отже, на вихід такого фільтра пройдуть лише ті спектральні складові сигналу, які знаходяться в смузі пропускання фільтра, і не пройдуть ті, які лежать від 0 до ω_1 та від ω_2 до $+\infty$. Даний фільтр також характеризується середньою частотою $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ та шириною смуги пропускання $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$;

4) загороджувальний фільтр (ЗФ, режекторний фільтр, *band-stop filter*) – пропускає на вихід всі частоти, крім тих, що лежать в деякому діапазоні $\omega_1 \dots \omega_2$. Віна має великий коефіцієнт передачі поза проміжком частот від ω_1 до ω_2 . Якщо смуга затримки такого фільтра порівняно вузька, такий загороджувальний фільтр називають іноді фільтром-пробкою (*notch-filter*).

Ідеальна форма АЧХ фільтрів цих чотирьох типів наведена на рис. 1.21.

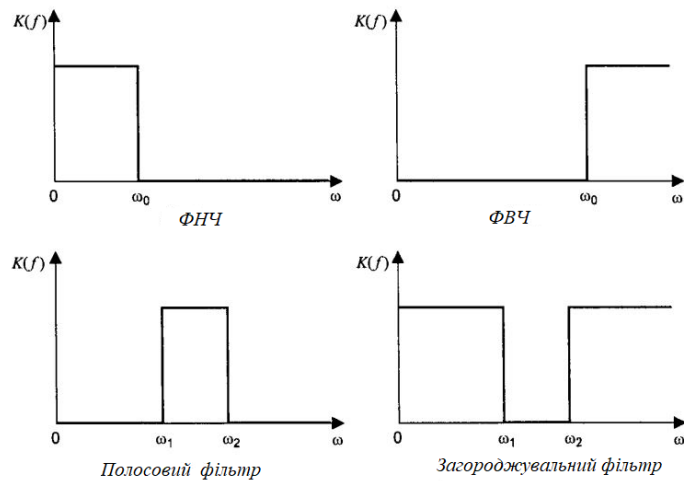


Рис. 1.21. Ідеальна форма АЧХ аналогових фільтрів

Проміжок частот, для яких коефіцієнт передачі фільтра є великим, називається смугою пропускання (СП, *passband*). Якщо спектральні складові вхідного сигналу фільтра потрапляють в смугу пропускання, то вони не зазнають ослаблення, проходять на вихід фільтра без змін та залишаються в спектрі вихідного сигналу.

Проміжок частот, для яких коефіцієнт передачі фільтра малий (для ідеального фільтра він дорівнює нулю), називається смугою затримки (СЗ, *stopband*). Якщо частина спектру сигналу потрапляє в смугу затримки, то ці складові зазнають значного ослаблення, і у вихідному сигналі фільтра вони присутні не будуть. В цьому випадку говорять, що ця частина спектру сигналу затримана фільтром.

В реальних фільтрах неможливо забезпечити різкий перехід між смугою пропускання та смугою затримки. Між цими двома смугами буде знаходитися частотний проміжок, на якому коефіцієнт передачі змінюється – перехідна смуга (ПС, *transition band*). АЧХ реальних фільтрів подано на рисунку 1.22.

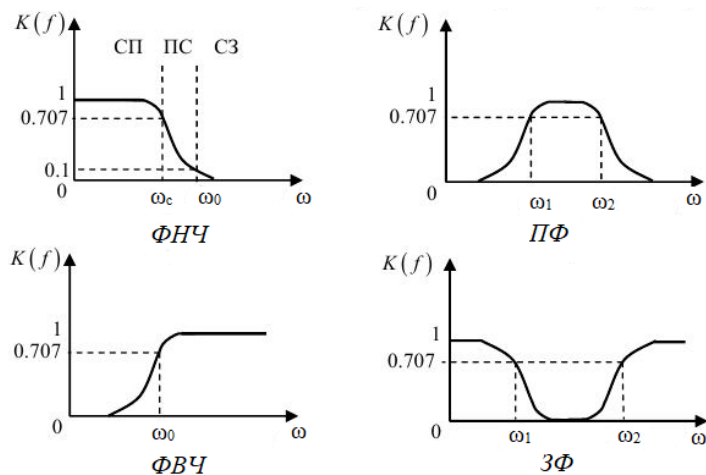


Рис. 1.21. Реальна форма АЧХ аналогових фільтрів

Видно, що зміна коефіцієнта передачі для таких фільтрів відбувається не раптово. Смуга пропускання реальних фільтрів визначається по-іншому: це смуга, в якій фільтр має достатньо великий коефіцієнт передачі. Вважається, що це смуга частот, для яких коефіцієнт передачі зменшується не менше, ніж в $\sqrt{2}$ разів.

На основі цього визначається *частота зрізу фільтра* – це та частота, на якій коефіцієнт передачі зменшується в $\sqrt{2}$ разів відносно максимального коефіцієнта передачі в смузі пропускання. Для випадку, коли коефіцієнт передачі фільтра вимірюється в децибелах, то частота зрізу визначається на рівні -3 дБ від максимального значення.

Оскільки ідеальна форма АЧХ не може бути фізично реалізовано, в теорії аналогових фільтрів розроблений ряд методів апроксимації прямокутних АЧХ.

За функцією апроксимації АЧХ фільтри розрізняються:

- фільтри Батерворта – головною перевагою яких є відсутність пульсацій в смузі пропускання, проте вони мають повільний спад АЧХ в смузі затримки, тому реалізувати високо вибіркові фільтри складно та дорого, оскільки потрібно забезпечити високий порядок фільтру;

- фільтр Чебишева першого та другого роду – мають значно крутіший спад АЧХ, проте мають пульсації в смузі пропускання (фільтри 1 роду) або в смузі затримки (фільтри 2 роду).

- еліптичні фільтри (фільтри Кауера) – мають найвищу крутість спаду АЧХ, проте є пульсації як в смузі пропускання, так і в смузі затримки з більш низькою ефективністю придушення в ній.

Також розрізняють фільтри Бесея (які мають гладку фазо-частотну характеристику), Лагранжа, Габора, Гауса тощо.

Окрім того розрахувавши ФНЧ, можна шляхом нескладних перетворень змінити частоту зрізу, перетворивши його у ФВЧ, ПФ або ЗФ із заданими параметрами. Тому розрахунок аналогового фільтру починається з розрахунку так званого фільтру-прототипу, що представляє собою ФНЧ з частотою зрізу, що дорівнює 1рад/с. В подальшому застосовуються функції перетворення частоти зрізу і перетворення типу фільтру.

1.3 Дискретні системи обробки сигналів

1.3.1 Дискретні системи: класифікація та характеристики

З точки зору математики система з дискретним часом визначається як перетворення, або оператор, що переводить вхідну послідовність (сигнал) $x[n]$ у вихідну послідовність $y[n]$ (відгук або реакцію системи), що можна представити як:

$$y[n] = T\{x[n]\}, \quad (1.104)$$

дане співвідношення – це правило за яким визначається значення реакції системи через відліки сигналу, що подається на її вхід (рис. 1.22). Необхідно зазначити, що відліки реакції системи з індексом n може залежати від усіх відліків вхідного сигналу $x[n]$.

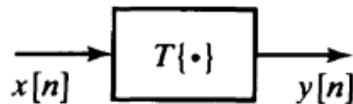


Рис. 1.22. Графічне представлення дискретної системи

Розглянемо приклади деяких простих систем.

Ідеальна система затримки (ІСЗ) визначається відповідно до виразу:

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (1.105)$$

де n_d – фіксоване натуральне число, що зветься затримкою. Іншими словами, ІСЗ зміщує вхідну послідовність вправо на n_d відліків. Якщо в даному виразі в якості n_d задати фіксоване від’ємне число, тоді система буде зміщувати вхідну послідовність вліво на $|n_d|$ відліків, що відповідає випередженню часу.

Ковзаюче середнє (СКС).

Загальна система ковзаючого середнього (СКС) має вигляд:

$$y[n] = \frac{\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]}{M_1 + M_2 + 1} = \frac{(x[n-M_1] + x[n-M_1-1] + \dots + x[n] + \dots + x[n-M_2])}{M_1 + M_2 + 1}.$$

Дана система розраховує n -й відлік вхідної послідовності як середнє арифметичне $(M_1 + M_2 + 1)$ відліків вхідної, що розташовані навколо n -го.

На рисунку 1.23 зображена послідовність як функція від змінної k та її відліки, що приймають участь у розрахунку вихідного відліку $y[n]$ при $n=7$, $M_1=0$ та $M_2=5$. Отриманий відлік $y[7]$ дорівнює $1/6$ суми всіх відліків, що

лежать між вертикальними пунктирними лініями. Для визначення $y[8]$ обидві пунктирні лінії необхідно змістити вправо на одну позицію.

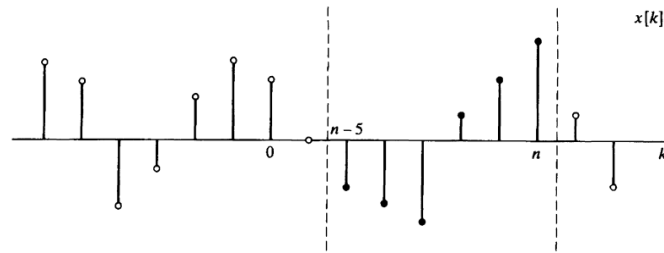


Рис. 1.23. Члени послідовності, що визначають ковзаюче середнє

Класи системи визначаються накладанням певних обмежень на властивості перетворення T .

Системи без пам'яті. Систему, n -й відлік $y[n]$ реакції якої при кожному n залежить лише від одного відліку (з тим самим індексом n) вхідного сигналу $x[n]$, називають системою без пам'яті.

Прикладом може бути система, в якій

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \forall n. \quad (1.106)$$

СІЗ відноситься до систем без пам'яті, лише якщо $n_d=0$. Зокрема, вважається, що СІЗ має «пам'ять» якщо n_d позитивне (затримка часу) або від'ємне (випередження часу). Система ковзаючого середнього не має пам'яті, лише коли $M_1=M_2=0$.

Клас *лінійних систем* визначаються за допомогою принципу суперпозиції. Якщо $y_1[n]$ та $y_2[n]$ – відгук системи на сигнали $x_1[n]$ та $x_2[n]$, то систему називають лінійною тоді і лише тоді, коли

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad \text{та} \quad T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\}, \quad (1.107)$$

де a – довільна константа. Перша властивість – це адитивність, а друга – однорідність. Ці дві властивості можна записати однією формулою відповідно до принципу суперпозиції:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}, \quad (1.108)$$

де a та b – довільні константи. Останнє співвідношення легко може бути переписано для декількох сигналів:

$$\text{якщо } x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \text{ то } y[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad (1.109)$$

де $y_k[n]$ – реакція системи на поданий сигнал $x_k[n]$.

Суматор. Система, що визначається рівнянням

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k], \quad (1.110)$$

називають суматором, оскільки значення її реакції в момент часу n дорівнює сумі всіх попередніх вхідних послідовностей аж до n -го.

До *стаціонарних* відносяться системи, для яких часовий зсув (або затримка) вхідної послідовності викликає відповідний зсув вихідної послідовності. Більш формально дане визначення можна представити так: нехай дискретна система визначається виразом $y[n] = T\{x[n]\}$, тоді вона називається стаціонарною, якщо для будь-якої вхідної послідовності $x[n]$ і довільного цілого числа n_0 виконується співвідношення

$$T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]. \quad (1.111)$$

Стаціонарну систему іноді ще називають системою інваріантною відносно зсуву.

Систему називають *детермінованою*, якщо члени вхідної послідовності з номером n_0 залежать лише від тих членів вхідної послідовності, номери яких не перевищують n_0 . Ця умова визначає той факт, що якщо $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq n_0$, то $y_1[n] = y_2[n]$ при $n \leq n_0$.

СІЗ детермінована при $n_d \geq 0$, і не є такою при $n_d < 0$. СКС детермінована, при $-M_1 \geq 0$ та $M_2 \geq 0$. В інших випадках вона не детермінована.

Права різницева система, визначається за правилом:

$$y[n] = x[n + 1] - x[n]. \quad (1.112)$$

Вона не є детермінованою, оскільки кожний із членів вихідної послідовності з номером n розраховується як за $x[n]$ так і за $x[n+1]$. Порушення детермінованості легко помітити, якщо взяти в якості вхідних послідовностей $x_1[n] = \delta[n-1]$ та $x_2[n] = 0$. Відповідні відгуки - $y_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ та $y_2[n] = 0$. Відмітимо, що при $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq 0$. Тому відповідно до визначення детермінованості, повинно виконуватись рівність $y_1[n] = y_2[n]$ для всіх $n \leq 0$, яке порушується при $n=0$.

Ліва різницева система визначається як

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]. \quad (1.113)$$

Кожний член вихідної послідовності такої системи залежить від члена з тим самим номером вхідної послідовності та одного попереднього. Тому вона є детермінованою.

Стійкість. Говорять, що система стійка, якщо і лише якщо її реакція на довільний обмежений за амплітудою сигнал є обмеженим. Послідовність $x[n]$ називається обмеженою, якщо знайдеться таке додатне число B_x , що

$$\forall n \quad |x[n]| \leq B_x < \infty. \quad (1.114)$$

Таким чином, для стійкої системи кожна обмежена послідовність має у відповідності таку ж додатну константу B_y , що

$$\forall n \quad |y[n]| \leq B_y < \infty. \quad (1.115)$$

Дані властивості, це властивості самої системи, а не вхідної послідовності. Інакше кажучи, для будь-якої системи, можуть існувати пари сигнал-відгук, що забезпечують виконання даної умови. Однак, наявність таких пар ще не визначає стійкість системи. Дана система буде стійкою лише в тому випадку, коли дану властивість будуть мати всі пари.

1.3.2 Лінійні стаціонарні дискретні системи

Клас лінійних систем визначаються за допомогою принципу суперпозиції. Враховуючи властивість лінійності та представлення загальної послідовності у вигляді лінійної комбінації зміщених імпульсів

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k], \quad (1.116)$$

можна замітити, що лінійна система повністю визначається своєю реакцією на зміщену імпульсну послідовність.

Нехай $h_k[n]$ – реакція системи на $\delta[n-k]$, тоді

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}. \quad (1.117)$$

Відповідно до принципу суперпозиції можна записати

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T \{ \delta[n-k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]. \quad (1.118)$$

Отже, реакція лінійної системи на довільну вхідну послідовність виражається у вигляді відгуків системи на сигнал $\delta[n-k]$.

Властивість стаціонарності визначає, що якщо $h[n]$ реакція системи на $\delta[n]$ (імпульсна характеристика системи), то її реакція на сигнал $\delta[n-k]$ дорівнює $h[n-k]$. Враховуючи це можна записати:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (1.119)$$

Лінійна стаціонарна система повністю визначається своєю імпульсною характеристикою $h[n]$ в тому розумінні, що при відомій послідовності $h[n]$ можна визначити відгук $y[n]$ на довільний поданий сигнал $x[n]$.

Якщо відліки послідовності $y[n]$ залежать від відліків $h[n]$ та $x[n]$ відповідно зазначеного виразу, тоді послідовність $y[n]$ називають дискретною згорткою послідовності $h[n]$ та $x[n]$.

Операція дискретної згортки утворює послідовність $y[n]$ по двом заданим послідовностям $h[n]$ та $x[n]$.

Зазначений вираз виражає кожний відлік вихідної послідовності через всі відліки вхідної послідовності та імпульсної характеристики.

Відліки вхідної послідовності з номером $n=k$, що представлені як $x[k]\delta[n-k]$, перетворюються системою у вихідну послідовність $x[k]\delta[n-k]$ для $-\infty < n < \infty$, і для кожного k ці послідовності комбінуються для формування абсолютно усіх вихідних послідовностей.

На рисунку 7.3. показана імпульсна характеристика, проста вхідна послідовність з трьома ненульовими відліками, індивідуальний відгук на кожний такий відлік та їх комбінації, що дають відгук системи. Більш конкретно, $x[n]$ можна представити у вигляді суми трьох послідовностей $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ та $x[3]\delta[n-3]$, що представляють три ненульових відліки послідовності $x[n]$. Послідовності $x[-2]h[n+2]$, $x[0]h[n]$ та $x[3]h[n-3]$ – відгуки системи на вхідні сигнали $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ та $x[3]\delta[n-3]$ відповідно. Після цього, реакцію системи на сигнал $x[n]$ отримуємо у вигляді суми цих індивідуальних відгуків.

Хоча дискретна згортка нагадує згортку функції для аналогових систем, що визначається за допомогою інтегралу, її не потрібно сприймати як апроксимацію інтегральної згортки. Остання згортка відіграє в основному теоретичну роль в неперервних системах, в той час як дискретна згортка, додатково до своєї теоретичної цінності, часто слугує для реалізації дискретних лінійних систем.

Розглядаючи вираз $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ як формулу, для визначення окремих відліків вихідної послідовності, можна замітити що $y[n]$ (тобто n -й

член вхідної послідовності) отримуємо в результаті множення вхідної послідовності (записаної як функція від k) на послідовність $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, а потім при кожному фіксованому n додаються всі добутки $x[k]h[n-k]$ з параметром k в якості параметру додавання. Отже, при згортці двох послідовностей для визначення n -го члена результату використовуються всі відліки послідовності.

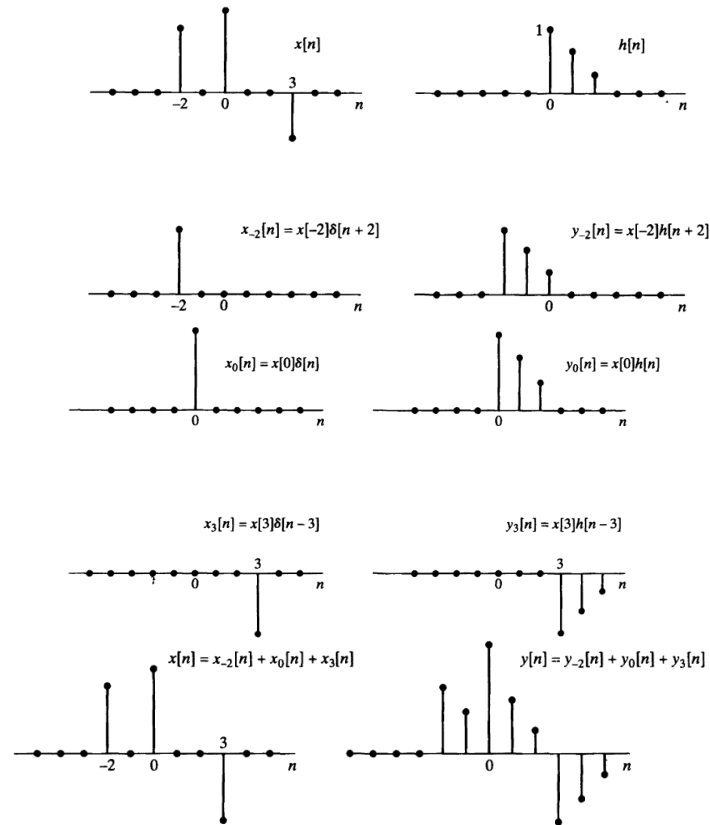


Рис. 1.24. Представлення вхідної послідовності лінійної стаціонарної системи у вигляді суперпозиції відгуків на індивідуальні відліки

Також необхідно відзначити що

$$h[n-k] = h[-(n-k)]. \quad (1.20)$$

Приклад.

Нехай $h[k]$ – послідовність, що зображена на рис. 1.25. а. Необхідно знайти

$$h[n-k] = h[-(n-k)].$$

Визначимо $h_1[k]$ як $h[-k]$ (рис. 1.25 б). Потім задамо $h_2[k]$ як послідовність $h_1[k]$, що затримана на n відліків по осі k , тобто $h_2[k] = h_1[k-n]$. На рис. 1.25 в зображена послідовність, яка отримана із послідовності рис. б зсувом на n відліків вправо. Спираючись на зв'язок між $h_1[k]$ та $h[k]$, можна показати, що $h_2[k] = h_1[k-n] = h[-(n-k)] = h[n-k]$, і таким чином, нижня послідовність рисунку є шуканим сигналом.

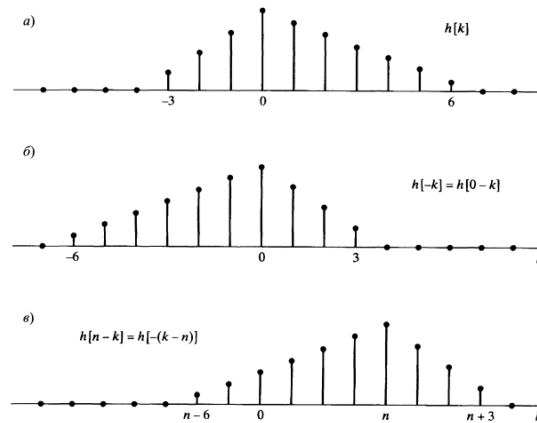


Рис. 1.25. Отримання послідовності $h[n-k]$:
 а) послідовність $h[k]$; б) послідовність $h[-k]$;
 в) послідовність $h[-(k-n)]$ при $n=4$

Із наведеного прикладу можна зробити висновок, що в загальному випадку послідовність $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, отримуються в два етапи:

- 1) дзеркальним відображенням послідовності $h[k]$ відносно нуля для отримання $h[-k]$;
- 2) зсувом відображеної послідовності вправо на n відліків.

Як вже зазначалось, для розрахунку згортки послідовність $x[k]$ та $h[n-k]$ перемножуються, а потім добутки додаються і отримується відлік $y[n]$ вихідної послідовності. Щоб знайти інший відлік згортки, початок відліку (нульовий момент часу) послідовності $h[-k]$ зсувається на нову позицію і процес повторюється. Дана процедура застосовується при числовій обробці відліків, отриманих при дискретизації сигналів так і при аналітичних розрахунках, коли відліки подаються у вигляді простої формули.

1.3.3 Властивості лінійних стаціонарних дискретних систем

Оскільки лінійні стаціонарні системи описуються згорткою, властивості цього класу системи визначаються дискретною згорткою. Отже, імпульсна характеристика конкретної системи містить всю необхідну інформацію.

1) Комутативна властивість:

$$x[n] \times h[n] = h[n] \times x[n]. \quad (1.21)$$

Комутативність можна довести, виконавши заміну параметру додавання. Більш точніше, якщо $m=n-k$, то

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] \times x[n], \quad (1.22)$$

і роль послідовності $x[n]$ та $h[k]$ змінилась. Таким чином, порядку послідовності у згортці не існує, тобто реакція системи не зміниться, якщо поміняти місцями вхідну послідовність та відгук системи на одиничний імпульс. Іншими словами, відгук системи на сигнал $x[n]$ при імпульсній характеристиці $h[k]$ буде такою ж, що і реакція на сигнал $h[n]$ при імпульсній характеристиці $x[n]$.

2) Властивість дистрибутивності відносно додавання:

$$x[n] \times (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] \times h_1[n] + x[n] \times h_2[n]. \quad (1.23)$$

При каскадному з'єднанні (послідовному) систем реакція першої системи подається на вхід другої, відгук другої – на вхід третьої та ін. Відгук останньої системи є реакцією на весь ланцюг системи. Дві лінійні стаціонарні системи, що підключені послідовно, утворюють одну лінійну стаціонарну систему, імпульсна характеристика якої буде співпадати зі згорткою імпульсних характеристик двох систем.

На верхньому блоці діаграми рисунка 7.5 реакція першої системи на $x[n]=\delta[n]$ дорівнює $h_1[n]$. Тому вихідна послідовність із другої системи (і за визначенням, імпульсна характеристика каскаду системи) повинна дорівнювати $h[n]=h_1[n] \times h_2[n]$.

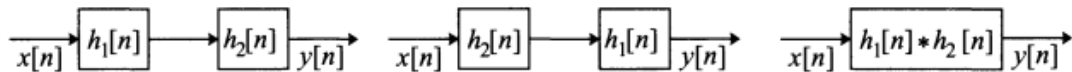


Рис. 1.26. Три лінійні стаціонарні системи з однією і тою ж імпульсною характеристикою

Як наслідок комутативності згортки імпульсної характеристики каскадної лінійної стаціонарної системи не залежить від порядку, в якому вони підключені одна до одної. Цей факт відображає рис. 7.5, де три системи мають одну і ту ж імпульсну характеристику.

При паралельному з'єднанні (рис. 1.27) системи мають загальний вхід, а їх вихідна послідовність додається та визначають реакцію всього з'єднання. Як впливає із дистрибутивності згортки, паралельне з'єднання двох лінійних стаціонарних систем можна замінити однією лінійною стаціонарною системою, чия імпульсна характеристика дорівнює сумі характеристик компонентів з'єднання, тобто $h[n]=h_1[n]+h_2[n]$.

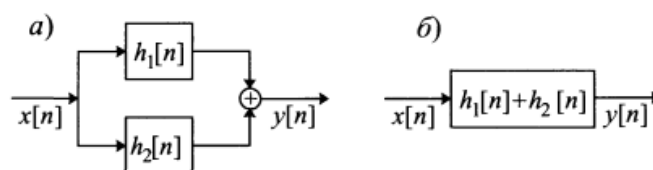


Рис. 1.27. Паралельне з'єднання лінійних стаціонарних систем (a);

система, еквівалентна системі а (б)

Стійкість та детермінованість надають додаткові властивості, і часто досить важливо знати, чи є певна лінійна система стійкою чи детермінованою. Нагадаємо, що стійкою системою називають систему з обмеженою реакцією на кожний обмежений вхідний сигнал. Лінійна стаціонарна система є стійкою тоді і лише тоді, коли її імпульсна характеристики – абсолютно підсумована послідовність, тобто

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (1.24)$$

Або

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n] x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| |x[n-k]|. \quad (1.25)$$

Якщо $x[n]$ обмежена, тоді знайдеться константа B_x , для якої

$$\forall k \quad |x[n]| \leq B_x. \quad (1.26)$$

Тому для всіх k буде справедливою нерівність $|x[n-k]| \leq B_x$, а отже тоді

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (1.27)$$

Отже, $y[n]$ – обмежена послідовність, якщо виконується умова $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Це дає достатню умову стійкості. Щоб довести необхідність даної умови, необхідно показати, що якщо $S = \infty$, то знайдеться обмежена вхідна послідовність, реакція системи на яку буде необмеженою. Такою є послідовність:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

де $h^*[n]$ – комплексно-спряжені відліки $h[n]$. Очевидно, послідовність $x[n]$ обмежена одиницею. Однак відвід вихідної послідовності при $n=0$ дорівнює

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = S. \quad (1.29)$$

Значить, якщо $S=\infty$, то існує необмежений відгук на обмежений сигнал, що доводить нестійкість системи в даному випадку.

Детермінована система визначається як система, відлік $y[n_0]$ реакції якої залежить лише від відліків $x[n]$ сигналу з $n \leq n_0$. Отже імпульсна характеристика детермінованої лінійної стаціонарної системи повинна задовольняти умові

$$h[n] = 0, \quad n < 0. \quad (1.30)$$

З цієї причини послідовність з нульовими членами $h[n]$ при $n < 0$ ще називають детермінованою, вважаючи, що вона є відгуком на одиничний імпульс детермінованої лінійної стаціонарної системи.

Знайдемо реакції розглянутих вище системи на одиничний імпульс.

Ідеальна система затримки:

$$h[n] = \delta[n - n_d], \quad (1.31)$$

де n_d – фіксоване натуральне число.

Ковзаюче середнє:

$$h[n] = \frac{\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]}{M_1 + M_2 + 1} = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (1.32)$$

Суматор

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u[n]. \quad (1.33)$$

Права різницева система

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]. \quad (1.34)$$

Ліва різницева система

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]. \quad (1.35)$$

Знаючи імпульсну характеристику даних стаціонарних систем можна перевірити їх на стійкість визначивши

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (1.36)$$

Зрозуміло, що для системи ідеальної затримки, ковазо чого середнього, правої та лівої різницевої систем вказана сума буде меншою за нескінченність, оскільки в цих випадках імпульсна характеристика має лише скінчене число ненульових відліків. Такі системи називають системами з *кінцевою імпульсною характеристикою* (КІХ-системи). Зрозуміло, що КІХ-системи будуть стійкими тоді і лише тоді, коли їх відгуки на одиничний імпульс є кінцевими за абсолютною величиною.

З іншого боку, суматор не є стійкою системою, оскільки:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] < \infty. \quad (1.37)$$

Імпульсна характеристика суматора необмежена по дальності. Суматор – приклад класу систем, котрий називають системами з *нескінченою імпульсною характеристикою* (НІХ-система або рос. БІХ-система). Прикладом стійкої НІХ-системи є така система, імпульсна характеристика якої має наступний вид $h[n] = a^n u[n]$ з $|a| < 1$. В такому випадку

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \quad (1.38)$$

Якщо $|a| < 1$, то формула суми членів нескінченної геометричної прогресії дає

$$S = \frac{1}{1 - |a|} < \infty. \quad (1.39)$$

Однак, якщо $|a| \geq 1$, то відповідно сума нескінченна і система не стійка.

Оскільки відгук системи ідеальної затримки має вид $y[n] = x[n - n_d]$, а її імпульсна характеристика дорівнює $h[n] = \delta[n - n_d]$, то

$$x[n] \times \delta[n - n_d] = \delta[n - n_d] \times x[n] = x[n - n_d]. \quad (1.40)$$

Іншими словами, згортка зміщена на n_d позицій одиничного імпульсу з сигналом $x[n]$ призводить до затримки сигналу на таке ж число n_d .

Оскільки затримка є однією з основних операцій при реалізації лінійних систем, даний результат можна застосувати при аналізі та спрощенні комплексів лінійних стаціонарних систем.

В якості прикладу розглянемо систему, яка складається з правої різницевої системи, що послідовно з'єднана з системою одиничної затримки (рис. 1.28 а).

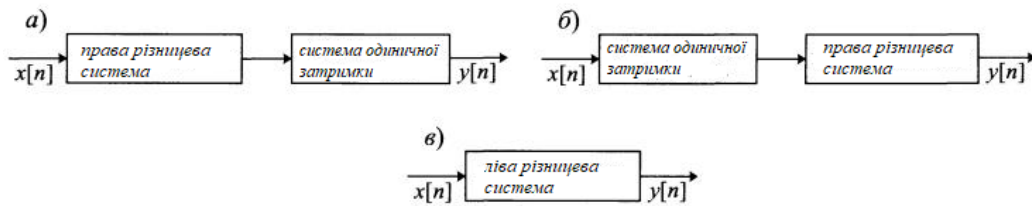


Рис. 1.28. Еквівалентні системи, що можна отримати одна з одної, завдяки комутативності згортки

Оскільки згортка є комутативною, порядок підключення систем в послідовному з'єднанні не важливий, оскільки системи є лінійними та стаціонарними. Отже, помінявши місцями систему одиничної затримки та праву різницеву систему можна отримати таку ж результуючу систему (рис. 7.7 б). Окрім того, імпульсна характеристика всієї системи буде співпадати зі згорткою імпульсних характеристик кожної складової її частин.

Тому

$$h[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) \times \delta[n-1] = \delta[n-1] \times (\delta[n+1] - \delta[n]) = \delta[n] - \delta[n-1].$$

З даного виразу видно, що $h[n]$ тотожна імпульсній характеристиці лівої різницевої системи, тобто системи, що зображені на рис. а і б можна замінити лівою різницевою системою, що показана на рис. 1.28 в.

Таким чином недетермінована права різницєва система, будучи послідовно з'єднаною з системою затримки, перетворюється в детерміновану систему. В загальному випадку не детерміновану КІХ-систему можна перетворити в детерміновану, якщо до неї приєднати досить велику затримку.

Ще один приклад каскаду системи, вводить поняття інверсної системи.

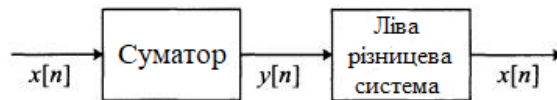


Рис. 1.29. Послідовне з'єднання суматора та лівої різницевої системи

Імпульсна характеристика даного каскаду визначається за правилом:

$$h[n] = u[n] \times (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]. \quad (1.41)$$

Тобто, послідовна комбінація суматора з лівою різницевою системою (в довільному порядку) дає систему, в якій імпульсна характеристика співпадає з одиничним імпульсом. Таким чином, вихід такої системи буде завжди співпадати зі входом, оскільки $x[n] \times \delta[n] = x[n]$. В цьому випадку дія лівої різницевої системи повністю компенсується (або інвертується) дією суматора. При цьому кажуть, що ліва різницева система – інверсна до суматора.

В загальному випадку, якщо імпульсна характеристика лінійної стаціонарної системи - $h[n]$, то її інверсна система, якщо вона існує, реагує на одиничний імпульс послідовністю $h_i[n]$, відповідно до співвідношення

$$h[n] \times h_i[n] = h_i[n] \times h[n] = \delta[n]. \quad (1.42)$$

Інверсні системи корисні у випадку, коли необхідно компенсувати ефект лінійної системи. В загальному випадку вирішити дане рівняння відносно $h_i[n]$ досить важко. Однак, застосувавши z -перетворення можна отримати прямий метод побудови інверсної системи.

1.3.4 Дискретні (цифрові) фільтри

Дискретний фільтр – це довільна система обробки дискретного сигналу, що має властивості лінійності та стаціонарності. Будь-який фільтр володіє певною частотною характеристикою. Щоб вона була не тривіальною, тобто щоб коефіцієнти передачі фільтру на різних частотах були різні, вихідний сигнал фільтру $y(n)$ повинен залежати від декількох відліків вхідного сигналу $x(n)$. Таким чином дискретний фільтр повинен мати пам'ять.

Взаємозв'язок між вхідним $x(n)$ і вихідним $y(n)$ дискретними сигналами визначається різницевою рівнянням:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) - \sum_{m=0}^{M-1} a_m y(n-m). \quad (1.43)$$

Тут межі сум N й M та величини $y(n)$ є коефіцієнтами (параметрами) фільтра, причому коефіцієнти a_m і b_k можуть бути як константами та (у більш загальному випадку) відліками функцій, що залежать від дискретного часу n .

Сигнали $x(n)$ і $y(n)$ можуть бути як дійсними, так і комплексними. Рівняння виду (9.1) можна розглядати як алгоритм обчислення $y(n)$, тобто алгоритм роботи ЦФ. Його реалізація у вигляді пристрою приведе до апаратного способу реалізації ЦФ, а програмування обраною мовою - до програмного способу реалізації ЦФ.

Для забезпечення лінійності та стаціонарності, операції що виконуються фільтром повинні обмежуватись лише додаванням та множенням на константу.

Оскільки в літературі, присвяченій методам і засобам цифрової обробки сигналів, звичайно оперують терміном «цифрова фільтрація», то незважаючи на те, що ефекти, пов'язані з квантуванням за рівнем, в даному модулі поки не розглядаються, надалі замість терміна «дискретний фільтр» будемо використовувати термін «цифровий фільтр».

1.3.5 Введення в цифрові фільтри

Під цифровим фільтром (ЦФ) позначають певну апаратну або програмну процедуру, реалізації алгоритму фільтрації. В ЦФ часто застосовують оцифрування аналогового сигналу або просто чисел, що зберігаються в пам'яті комп'ютера і представляють собою певні змінні.

Спрощену блок-схему ЦФ реального часу за аналоговими входом та виходом наведено на рис. 1.30.

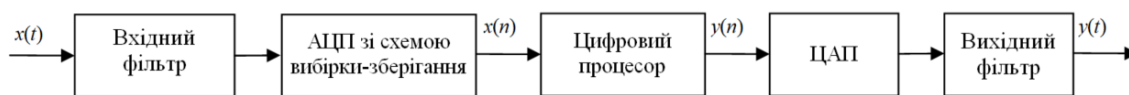


Рис. 1.30. Спрощена блок-схема ЦФ реального часу з аналоговим входним та вихідним сигналом

Періодично робиться вибірка певних значень вузькосмугового аналогового сигналу, яка потім конвертується в набір цифрових вибірок $x(n)$, $n=0,1,\dots$. Цифровий процесор виконує фільтрацію, відображаючи вхідну послідовність $x(n)$ у вихідну послідовність $y(n)$ відповідно до обчислювального алгоритму фільтру. ЦАП конвертує відфільтрований цифровим образом вихід в аналогове значення, яке потім проходить аналогову фільтрацію для згладжування та видалення небажаних високочастотних компонентів.

Важливу роль в цифровій обробці сигналів відіграє саме ЦФ. Порівняно з аналоговими фільтрами, вони переважають в багатьох областях (наприклад: стиснення даних, біомедична обробка сигналів, обробка мови, зображень, передача даних, цифрове аудіо тощо.), оскільки має ряд наступних переваг:

- ЦФ можуть мати характеристики, отримати які на аналогових фільтрах неможливо, наприклад дійсно лінійну фазову характеристику;
- на відміну від аналогових, продуктивність ЦФ не залежить від зміни середовища, наприклад від коливання температури;

- якщо фільтр розроблений на основі програмованого процесора, його частотна характеристика може налаштовуватись автоматично, тому такі процесори широко використовуються в адаптивних фільтрах;

- один ЦФ може оброблювати декілька вхідних сигналів або каналів без дублювання апаратних блоків;

- як відфільтровані, так і невідфільтровані дані можна зберігати для наступного використання;

- на практиці точність, яку можна отримати при використанні аналогового фільтру, обмежена; наприклад, затухання в смузі затримки неможна підняти вище 60-70 Дб (якщо використовувати стандартні аналогові компоненти). Точність ЦФ обмежена лише довжиною слова.

- ЦФ можуть застосовуватись при дуже низьких частотах, характерних, наприклад, для багатьох біомедичних додатків, де застосовувати аналогові фільтри не практично. Окрім того, дані фільтри можна використовувати у широкому діапазоні частот, для чого достатньо просто змінювати частоту дискретизації.

Однак, в порівнянні з аналоговими ЦФ мають і ряд недоліків:

- *обмежена швидкість*. Максимальна ширина смуги сигналів, які в реальному часі здатні опрацьовувати ЦФ значно вужча, ніж у аналогових фільтрів. В додатках реального часу процес перетворення «аналоговий-цифровий-аналоговий» вводить обмеження за швидкістю на продуктивність ЦФ. Найвищу частоту дискретизації, з якою може працювати фільтр, обмежує час конвертації АЦП та час встановлення сигналу ЦАП. Окрім того, швидкість роботи ЦФ залежить від швидкості роботи цифрового процесора та числа арифметичних операцій, які необхідно виконати в алгоритмі фільтрації, і збільшується, коли характеристики фільтру стають більш стиснутими.

- *вплив кінцевої розрядності*. ЦФ підлягають зашумленню АЦП, що виникає при квантуванні неперервного сигналу та шуму округлення, який вводиться при розрахунках. При застосуванні рекурсивних фільтрів високий порядок накопленого шуму округлення може призвести до нестійкості фільтру.

- *значний час розробки та впровадження*. Розробка та впровадження ЦФ, особливо впровадження апаратного забезпечення, можуть виконуватись набагато довше, ніж подібні процедури для аналогових фільтрів. Однак, одного разу розроблене апаратне або програмне забезпечення може використовуватись в інших задачах цифрової обробки сигналів з незначною модифікацією або і зовсім без неї.

1.3.6 Класифікація цифрових фільтрів

Цифрові фільтри прийнято поділяти на два класи: рекурсивні (РФ) та не рекурсивні (НРФ). Якщо в рівнянні 9.1. хоча б один коефіцієнт a_m

відмінний від нуля, то фільтр називається рекурсивним. Якщо ж у 9.1. всі коефіцієнти $a_m=0$, то фільтр, що реалізує такий алгоритм, називається не рекурсивним. Для нього рівняння 9.1 спрощується до наступного виду:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k). \quad (1.44)$$

Очевидно, що НЦФ являє собою систему без зворотного зв'язку, а РЦФ – систему зі зворотними зв'язками.

Розглянемо більш детально обидва класи ЦФ.

Нерекурсивні фільтри.

Перш за все слід відзначити, що в загальному випадку при розрахунку чергового вихідного відліку $y(n)$ використовується інформація двох типів: певна кількість відліків вхідного сигналу та певна кількість попередніх відліків вихідного сигналу. Зрозуміло, що хоча б один відлік вхідного сигналу повинен приймати участь при розрахунках, в іншому випадку вихідний сигнал не буде залежати від вхідного. На відміну від цього, попередні відліки вихідного сигналу можуть і не використовуватись, і рівняння фільтрації в цьому випадку прийме вигляд наведений у виразі 9.2.

Кількість попередніх відліків $(N-1)$, що використовуються при розрахунках, буде визначати порядок фільтру.

Структурна схема, реалізації алгоритму 1.44. наведена на рис. 1.31. Деяка кількість попередніх відліків вхідного сигналу зберігаються в комірці пам'яті, які утворюють дискретну лінію затримки. Ці відліки множаться на коефіцієнти b_k і додаються, формуючи вихідний відлік $y(n)$.

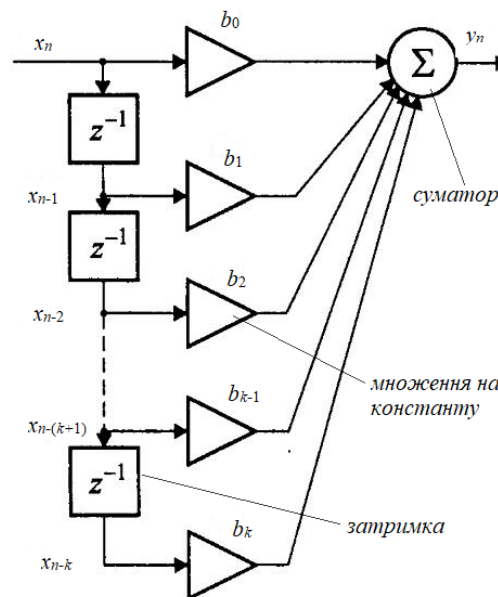


Рис. 1.31. Нерекурсивний фільтр

Відповідно до властивостей z -перетворення, затримка дискретної послідовності на один такт відповідає множенню її z -перетворення на z^{-1} . Тому елементи пам'яті, що здійснюють таку затримку, позначаються на структурній схемі як « z^{-1} ».

Оскільки при розрахунках не використовується попередній відлік вихідного сигналу, в схемі відсутній зворотний зв'язок. Тому такі фільтри називаються не рекурсивні (*nonrecursive*). Також застосовують термін «трансверсальний фільтр» (від англ. *transversal* - поперечний).

Системну функцію НРФ що відповідає рівнянню 9.2. можна представити у наступному вигляді

$$H_{\text{НРФ}}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}. \quad (1.45)$$

Імпульсна характеристика НРФ визначається досить легко. Якщо в рівняння 9.2. підставити одиничний імпульс $x_0(n)$ в якості вхідного сигналу отримаємо:

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_0(n-k). \quad (1.46)$$

Так як відлік $x_0(n-k)$ дорівнює нулю для всіх n , окрім $n=k$, коли цей відлік дорівнює одиниці, ми отримуємо досить простий результат:

$$h(n) = b_k, \quad (1.47)$$

тобто коефіцієнт b_k є відліками імпульсної характеристики фільтру. Це досить легко пояснити за допомогою рис. 1.31. При подачі на вхід системи одиничного імпульсу він буде переміщатись по лінії затримки, помножуючись на коефіцієнти b_0, b_1, b_2, \dots та проходить на вихід пристрою (адже всі інші вхідні сигнали суматора при цьому дорівнюють нулю). Очевидно, що в реальному пристрої лінія затримки містить скінченне число елементів, тому імпульсна характеристика НРФ також є скінченною за тривалістю. Це визначає ще одну назву таких фільтрів – *фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою* (КІХ-фільтри, *finite impulse response, FIR*)

У зв'язку з відсутністю зворотного зв'язку будь-який НРФ є стійким, оскільки якими б не були початкові умови (тобто відліки, що зберігаються в лінії затримки), при відсутності сигналу на вході ($x(n)=0$) вихідний сигнал (вільні коливання) не буде дорівнювати нулю протягом $(N-1)$ тактів, необхідних для очищення лінії затримки.

Простота аналізу та реалізації, а також наглядний зв'язок коефіцієнтів фільтру з відліками його імпульсної характеристики та абсолютна

стійкість призвели до того, що НРФ знайшли широке застосування на практиці. Однак, для отримання кращих частотних характеристик (наприклад, смугових фільтрів з високою прямокутною АЧХ) необхідні НРФ досить значного порядку – до декількох сотень і навіть тисяч.

Симетричний фільтр. Важливе значення має той факт, що НРФ дозволяють легко забезпечити лінійну ФЧХ, а значить, постійні (не залежні від частоти) групову та фазову затримки. Для цього необхідно лише симетрія імпульсної характеристики. Така симетрія може бути двох типів:

- парна симетрія (*even symmetry*): $b_k = b_{N-k}$ для всіх $k=0,1,\dots,N$;
- непарна симетрія (*odd symmetry*): $b_k = -b_{N-k}$ для всіх $k=0,1,\dots,N$.

Групова затримка для симетричних фільтрів не залежить від частоти і дорівнює $N/2$ відліків.

При парному N і непарній симетрії імпульсної характеристики, очевидно, її середній відлік буде дорівнювати нулю: $b_{N/2} = 0$. Окрім того, парність або непарність порядку фільтра і наявність того, або іншого типу симетрії накладають певні обмеження на коефіцієнти передачі фільтру на нульовій частоті та частоті Найквіста. Поєднання кратності фільтру та типу симетрії дає чотири типи симетричних фільтрів (табл. 9.1) разом з зазначеними обмеженнями на значення АЧХ. Наведені в таблиці номери типів часто використовуються у зарубіжній літературі.

Таблиця 1.1

Типи симетричних фільтрів

Тип	Порядок фільтру	Тип симетрії	$K(0)$	$K(\omega_d/2)$
I	парний	парний	будь-який	будь-який
II	непарний	парний	будь-який	0
III	парний	непарний	0	0
IV	непарний	непарний	0	будь-який

Рекурсивні фільтри.

Якщо рівняння фільтрації містить як вхідні, так і вихідні відліки, для реалізації такого фільтру в схему, що наведена на рис. 1.31. необхідно додати другу лінію затримки – для зберігання вихідних відліків $y(n-k)$. Отримана при цьому структура, наведена на рис. 1.32.

Оскільки при розрахунках використовуються попередні відліки вихідного сигналу, в схемі присутній зворотний зв'язок. Тому такі фільтри називають рекурсивними (*recursive*).

Кількість попередніх вхідних та вихідних відліків може не співпадати. В такому випадку порядок фільтру визначається максимальним із значень $(N-1)$ та $(M-1)$.

Системна функція РФ визначається за наступним виразом:

$$H_{\text{РФ}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}\right)}. \quad (1.48)$$

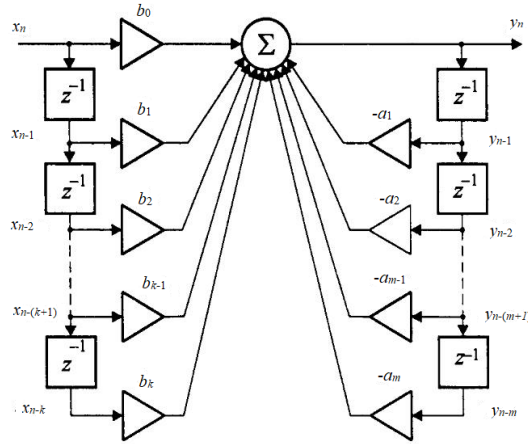


Рис.1.32. Рекурсивний фільтр, пряма реалізація

Імпульсна характеристика рекурсивного фільтру розраховується дещо складніше, ніж для не рекурсивного. При надходженні на вхід одиничного імпульсу він множиться на b_0 і проходить на вихід. Таким чином:

$$h(0) = b_0. \quad (1.49)$$

Далі вхідний одиничний імпульс потрапляє у вхідну лінію затримки, а вихідний відлік, рівний b_0 – у вихідну лінію затримки. В результаті другий відлік імпульсної характеристики буде формуватись наступним чином:

$$h(1) = b_0 + a_1 h(0) = b_1 + b_0 a_1. \quad (1.50)$$

Наступний відлік буде визначатись відповідно до виразу:

$$h(2) = b_2 + a_2 h(0) + a_1 h(1) = b_2 + b_0 a_2 + a_1 (b_1 + b_0 a_1) = b_2 + b_1 a_1 + b_0 a_2 + b_0 a_1^2.$$

Таким чином, по мірі того, як вихідна лінія затримки заповнюється відліками імпульсної характеристики, складність аналітичних формул швидко зростає.

Наявність в схемі зворотного зв'язку дозволяє отримати нескінченну імпульсну характеристику, тому РФ ще називають також фільтрами з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтри, рос. БИХ-филтры, англ. *infinite impulse response*, ІІР). Відповідно до цієї причини, РФ можуть бути нестійкими.

1.3.7 Основні форми реалізації структури ЦФ

Існує досить велике число різних форм реалізації рекурсивних і нерекурсивних ЦФ. Розглянемо найбільш поширені з них.

Структурна схема, що наведена на рис. 9.32. називається прямою формою реалізації РФ (*direct form I*) і не є єдиною можливою.

Пряма форма відповідає безпосередній реалізації різницевого рівняння 1.31 або передаточній функції 9.4.

Для неї:

- L_0 – число комірок (регістрів) оперативної пам'яті, необхідної для збереження коефіцієнтів фільтра: $L_0=N+M-2$;

L_n – число комірок постійної пам'яті, необхідної для збереження коефіцієнтів фільтра: $L_n=N+m-1$;

M – число множень, виконуваних при обчисленні одного відліку вихідного сигналу: $M=N+M-1$;

A – число алгебраїчних додавань двох доданків, які повинні бути виражені у фільтрі, для одержання одного відліку вихідного сигналу: $A=N+M-2$.

Розділивши суматор на схемі рис. 1.32. на два окремих – для рекурсивної та не рекурсивної частин фільтра (рис. 1.33. а), отримаємо два послідовно з'єднаних фільтри, один з яких є не рекурсивним, а інший – містить лише рекурсивну частину. Так як результат послідовного проходження сигналу через рід лінійних стаціонарних пристроїв не залежить від послідовності їх з'єднання, можемо поміняти місцями дві половинки нашого фільтра (рис. 1.33. б). Тепер залишається замінити те, що в обидві лінії затримки подається один і той же сигнал, а отже вони будуть мати однакові набори відліків. Це дозволить об'єднати лінії затримки. Отримана в результаті схема, зображена на рис. 9.5, називається канонічною формою реалізації рекурсивного фільтра (*canonic form* або *direct form II*).

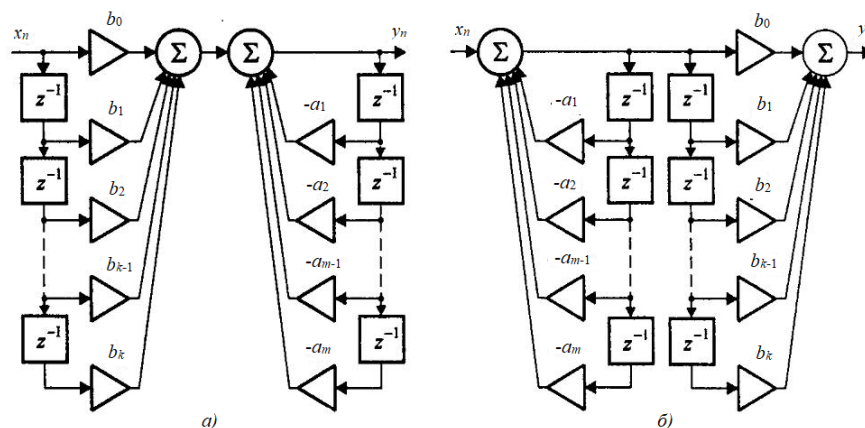


Рис. 1.33. Перестановка рекурсивної та нерекурсивної частин фільтра

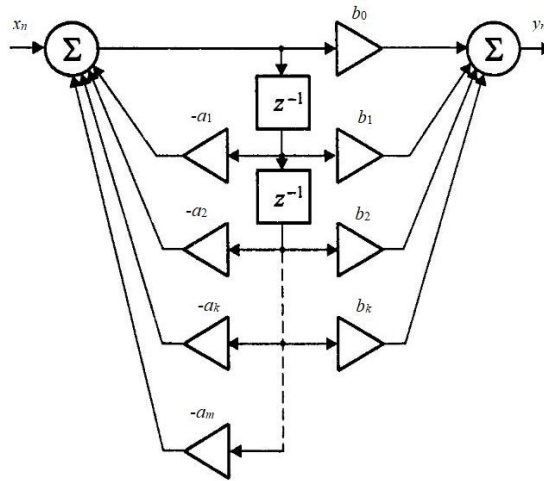


Рис. 1.34. Рекурсивний фільтр - канонічна реалізація

При канонічній реалізації застосовується загальна лінія затримки, що зменшує число необхідних комірок пам'яті. Однак при цьому абсолютні значення відліків, що проходять лінію затримки, можуть суттєво перевищувати амплітуду вхідного та вихідного сигналів. Це призводить до необхідності збільшувати розрядність представлення чисел в лінії затримки в порівнянні з розрядністю вхідного і вихідного сигналів, що ускладнює реалізацію пристрою.

При прямій реалізації в лініях затримки зберігаються безпосередні відліки вхідного та вихідного сигналів, тобто підвищення розрядності лінії затримки не потрібне. Єдиним елементом, що потребує підвищення розрядності, в даному випадку є суматор, і це враховується в архітектурі мікропроцесорів, що спеціально призначенні для обробки сигналів в реальному часі. Канонічна форма відповідає заміні 9.1. еквівалентної системою різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} v(n) = -\sum_{m=1}^{M-1} a_m v(n-m) + x(n); \\ y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k v(n-k). \end{cases} \quad (1.51)$$

При побудові послідовної (каскадної) форми (рис. 1.35.) застосовується спосіб представлення $H(z)$ у вигляді добутку типових ланок не вище другого порядку (бікватратних ланок):

$$H(z) = \prod_{k=1}^V \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}. \quad (1.52)$$

Біквadratна ланка стає універсальним блоком для побудови ЦФ будь-якого порядку. Реалізаційні характеристики цієї форми реалізації багато в чому залежать від числа біквadratних ланок.

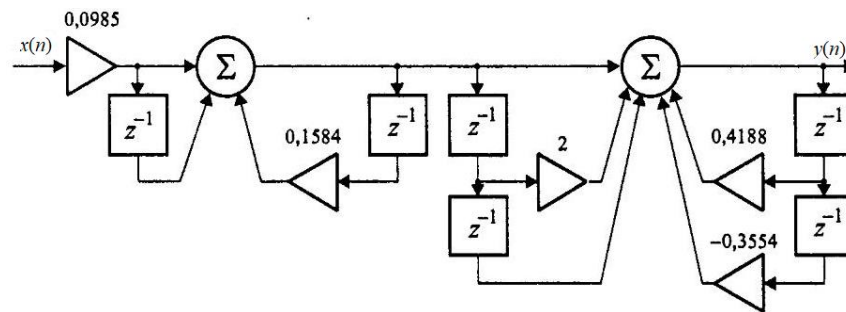


Рис. 1.35. Послідовна реалізація дискретного фільтра

Послідовна реалізація широко застосовується на практиці, оскільки вона дозволяє послабити небажані ефекти, пов'язані з помилками округлення.

Паралельна форма (рис. 1.36) ґрунтується на еквівалентному представленні $H(z)$ у вигляді суми типових ланок:

$$H(z) = \sum_{k=1}^V \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}}, \quad (1.53)$$

які можуть бути реалізовані у вигляді спрощеного біквadratного блоку при $\beta_k=0$. Реалізаційні характеристики тут також значним чином залежать від числа типових блоків.

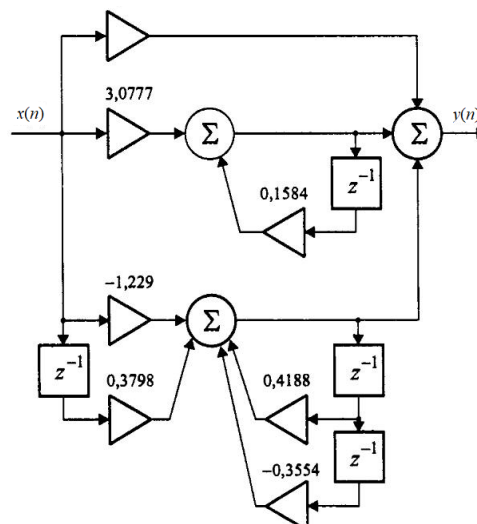


Рис. 1.36. Паралельна реалізація дискретного фільтра

Усі розглянуті форми реалізації ЦФ при тих самих вхідних даних і нескінченній розрядності представлення чисел у ЦФ дають абсолютно

однакові результати, тому що отримані шляхом еквівалентних математичних перетворень одного й того ж вихідного різницевого рівняння (9.1).

Однак, при обмеженій розрядності сітки представлення чисел, що завжди має місце в реальних ЦФ, ці форми приведуть до різних результатів, тому що відрізняються механізмом перетворення похибок округлення. Каскадна форма, як правило, забезпечує найменший рівень власних шумів фільтра.

1.3.7 Частотні характеристики фільтрів

Комплексні частотні характеристики являють собою функції частоти ω , що отримані в результаті підстановки $z = e^{j\omega T}$ у системні функції 9.3 та 9.4:

$$H_{\text{НРФ}}(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T}; \quad H_{\text{РФ}}(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T}}{\left(1 + \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-jm\omega T}\right)}. \quad (1.54)$$

Модуль комплексної частотної характеристики $|H(e^{j\omega T})|$ - АЧХ фільтра, визначає амплітуду вихідного сигналу стійкого фільтра в сталому режимі при вхідному сигналу.

$$x(n) = e^{j\omega T} = \cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T). \quad (1.55)$$

Аргумент комплексної частотної характеристики

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega T})], \quad (1.56)$$

ФЧХ – визначає фазу вихідного сигналу стійкого фільтра при вхідному сигналі.

Для рекурсивних і не рекурсивних фільтрів з дійсними коефіцієнтами справедливі наступні співвідношення для АЧХ та ФЧХ:

$$A_{\text{РФ}}(\omega) = |H_{\text{РФ}}(e^{j\omega T})| = \sqrt{\frac{\left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)\right]^2}{\left[\sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos(m\omega T)\right]^2 + \left[\sum_{m=0}^{M-1} a_m \sin(m\omega T)\right]^2}},$$

$$\varphi_{\text{РФ}}(\omega) = -\arctg\left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)}{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)}\right) + \arctg\left(\frac{\sum_{m=0}^{M-1} a_m \sin(m\omega T)}{\sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos(m\omega T)}\right).$$

$$A_{\text{НРФ}}(\omega) = |H_{\text{НРФ}}(e^{j\omega T})| = \sqrt{\left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T) \right]^2},$$

$$\varphi_{\text{НРФ}}(\omega) = -\arctg \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(k\omega T)}{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(k\omega T)} \right).$$

Крім АЧХ та ФЧХ для аналізу також застосовують груповий час затримки (ГЧЗ), що визначається так само як і для неперервних систем, і дорівнює часу затримки в сталому режимі вихідного сигналу фільтра щодо вхідного сигналу $x(n) = e^{jn\omega T}$.

Частотні характеристики містять усі параметри ЦФ і являють собою також спосіб їхнього опису в частотній області. При обробці за допомогою ЦФ аналогових сигналів з обмеженим частотним спектром у смузі $[-\omega_b; \omega_b]$, де ω_b – максимальна (верхня) частота спектра. Величина кроку дискретизації за часом вибирається з умови теореми Котельнікова $T \leq \frac{\pi}{\omega_b}$ і

характер частотних характеристик у діапазоні від 0 до $\frac{\pi}{T}$ цілком визначає зміну спектра аналогового сигналу, що отримується після цифро-аналогового перетворення вихідного сигналу ЦФ.

Частотні характеристики володіють рядом корисних для практики властивостями:

1) усі частотні характеристики являють собою періодичні функції частоти ω з періодом $\frac{2\pi}{T}$,

2) АЧХ і ГЧЗ являють собою парні функції частоти ω і їхні графіки симетричні відносно вісі ординат, а ФЧХ є непарною функцією ω і її графік асиметричний відносно цієї осі.

Із зазначених вище властивостей випливає, що вимоги до частотних характеристик при постійному T варто задавати лише на інтервалі $[0; \frac{\pi}{T}]$.

З метою спрощення порівняння частотних характеристик ЦФ із різними T застосовують нормування частоти. Існує два способи нормування. При першому способі вважають нормовану частоту $\omega' = \omega T$, тоді період частотних характеристик дорівнює 2π і вимоги до них задаються на інтервалі $[0; \pi]$.

При другому способі використовують нормовану частоту $w = \omega T / 2\pi$. У цьому випадку період частотних характеристик дорівнює 1 і вимоги до них задаються на інтервалі $[0; 0.5]$.

1.3.8 Порівняльний аналіз типів ЦФ

В залежності від імпульсної характеристики цифрові фільтри прийнято поділяти на два класи КІХ-фільтри та НІХ-фільтри. Як вже зазначалось, всі НРФ є КІХ-фільтрами, а майже всі РФ (за винятком тих, у яких системна функція може бути перетворена до виду 9.4) є НІХ-фільтрами.

Вибір між КІХ та БІХ-фільтрами залежить від відносних переваг обох фільтрів.

1. КІХ-фільтри можуть мати строго лінійну фазову характеристику. Відповідно, фільтр не вносить фазового спотворення в сигнал, що важливо в багатьох сферах, наприклад при передачі даних, біомедицині, цифровій аудіо обробці або обробці зображень. Фазова характеристика НІХ-фільтра нелінійна, особливо на краях смуг.

2. КІХ-фільтри завжди стійкі, гарантувати стійкість НІХ-фільтрів вдається не завжди.

3. Для реалізації фільтрів застосовується обмежена кількість бітів. Практичні наслідки цього (шум округлення та помилки квантування) менш істотні для КІХ-фільтрів, ніж для НІХ-фільтрів.

4. Щоб отримати кінцеву послідовність імпульсної характеристики за допомогою фільтрів з різкими зрізами характеристик, необхідно більше коефіцієнтів, ніж для отримання НІХ. Відповідно для реалізації необхідної амплітудної характеристики з КІХ необхідно більше розрахунків, ніж при реалізації НІХ. Однак, ефективність КІХ-реалізації можна значно підвищити, застосувавши швидке перетворення Фур'є та обробку при декількох швидкостях.

5. Аналогові фільтри легко перетворити в еквівалентні цифрові НІХ-фільтри, що задовольняють подібним вимогам. Для отримання КІХ-фільтрів таке перетворення неможливе, оскільки для них не існує аналогових прототипів. Однак, отримувати довільні частотні характеристики на КІХ-фільтрах легше.

6. НІХ-фільтри рекурентні. Це означає, що, пропустивши через фільтр один і той самий сигнал, але зі «зворотним ходом часу», можна отримати, різні результати. Якщо для мови часова анізотропія природня, то, наприклад, для зображень, вже ні. Тому НІХ-фільтри мають ряд обмежень на застосування.

Враховуючи вище зазначене, загальний принцип вибору між КІХ та НІХ можна сформулювати наступним чином:

- використовувати НІХ, якщо єдиною важливою вимогою є характеристика з різким зрізом і висока пропускну спроможність, оскільки НІХ-фільтри (особливо ті, в яких застосовується еліптичні характеристики) потребують меншого числа коефіцієнтів, а отже і розрахунків;

- застосовувати КІХ, якщо число коефіцієнтів фільтрів не дуже велике, в частності якщо необхідно, щоб фазові спотворення були відсутні або були малими. Окрім того, можна додати, що архітектура процесорів цифрової обробки сигналів більш пристосована до КІХ-фільтрації, й більш того, деякі з них спеціально розроблені для фільтрів даного типу.

1.3.9 Класифікація цифрових фільтрів за призначенням

З погляду призначення ЦФ усі вони умовно поділяються на два великі класи:

- 1) частотні фільтр;
- 2) функціональні фільтри.

Частотні фільтри призначені для цілеспрямованої зміни частотного спектра $X(e^{j\omega T})$ вхідного сигналу. Вихідними даними для проектування таких фільтрів є бажані частотні характеристики, що задаються. Реальні частотні характеристики ЦФ повинні бути досить близькими до бажаного. Ступінь близькості бажаних і реальної частотних характеристик визначається деякою кількісною мірою і може служити показником якості частотних фільтрів.

- До числа частотних фільтрів належать
- селективні (частотно-вибіркові) фільтри,
 - корегуючі фільтри
 - перетворювачі Гільберта.

У частотно-вибіркових фільтрах повністю приглушуються частотні складові у певній смузі частот, що називається смугою затримки, і зберігаються незмінними частотні складові в іншій смузі частот, що називається смугою пропускання. Між смугами пропускання і затримки можливий діапазон частот, характер поведінки складових у яких не залежить від вихідного сигналу (перехідна смуга).

За аналогією з аналоговими фільтрами, в залежності від положення зазначених смуг і їхньої кількості розрізняють наступні частотно-вибіркові фільтри:

- фільтри низьких частот (а);
- фільтри високих частот (б);
- смугові фільтри (в);
- режекторні фільтри (г).

Їх ідеальні АЧХ наведені на рис. 1.37.

За допомогою *корегуючих фільтрів* забезпечується задана зміна інтенсивності частотних складових визначеної смуги частот.

Перетворювачі Гільберта (ПГ) використовуються для одержання комплексного сигналу

$$u(n) = x(n) + jv(n), \quad (1.57)$$

спектр якого $U(e^{j\omega T})$ задовольняє умові:

$$U(e^{j\omega T}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega T}) & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi / T; \\ jX(e^{j\omega T}) & \text{при } \pi / T \leq \omega \leq 2\pi / T, \end{cases} \quad (1.58)$$

тобто для отримання сигналу $v(n)$ (і ти самим сигналу $u(n)$) достатньо пропустити $x(n)$ через ідеальний ПГ із комплексною ЧХ:

$$H(e^{j\omega T}) = \begin{cases} -j & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi / T; \\ j & \text{при } \pi / T \leq \omega \leq 2\pi / T. \end{cases} \quad (1.59)$$

Для ідеального ПГ дійсна частина комплексної частотної характеристики дорівнює 0, а уявна частина має вигляд:

$$\text{Im}[H(e^{j\omega T})] = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi / T; \\ 1 & \text{при } \pi / T \leq \omega \leq 2\pi / T. \end{cases} \quad (1.60)$$

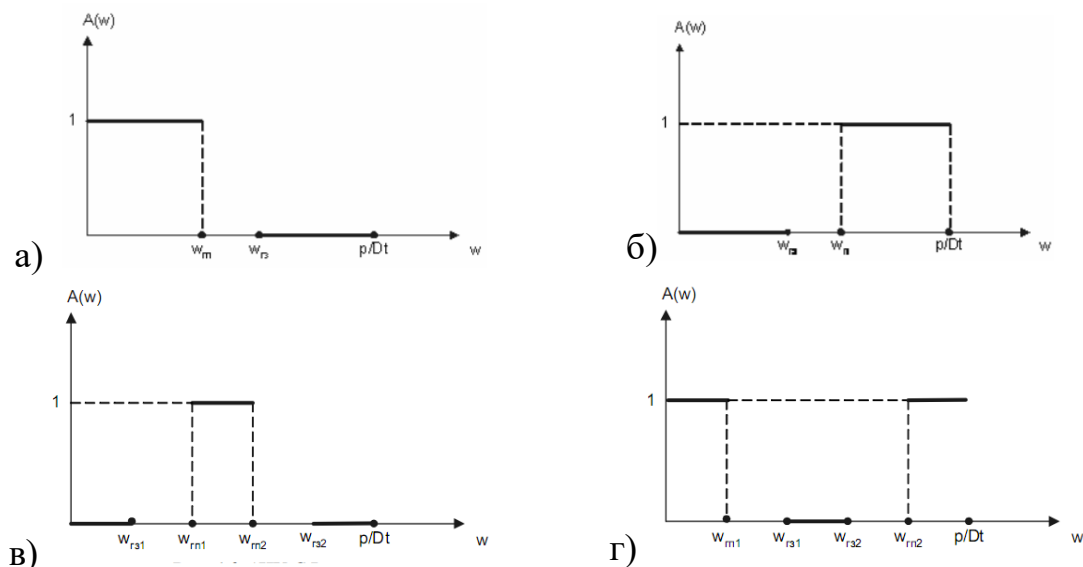


Рис. 1.37. Ідеальні АЧХ різних типів фільтрів

Функціональні фільтри використовуються для виконання більш складних операцій над сигналами, що на пряму можуть і не бути пов'язаними зі зміною частотного спектра вхідного сигналу. Вхідний сигнал у таких фільтрах, як правило, представляється у вигляді адитивної суміші корисного сигналу $u(n)$ і випадкового шуму $\xi(n)$ з відомою кореляційною функцією або функцією спектральної щільності потужності $S(\omega)$.

До функціональних фільтрів можна віднести

- фільтри узгодження, що оцінюють ступінь відповідності корисної складової вхідного сигналу деякому еталонному сигналові на фоні шумів;
- екстраполюючі фільтри, що обчислюють майбутнє значення корисного сигналу в умовах дії випадкових завад.

Оскільки повне придушення випадкових завад неможливе, то оцінки, що отримуються на виході функціональних фільтрів, носять статистичний характер. У якості їхньої кількісної міри зазвичай використовується дисперсія, що для стаціонарного шуму описується виразом

$$\sigma^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S(\omega) |A(\omega)| d\omega. \quad (1.61)$$

У випадку некорельованих завад (білого шуму) дисперсія оцінки виражається безпосередньо через імпульсну характеристику функціонального фільтра:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^{\infty} h^2(n), \quad (1.62)$$

де σ_n^2 - дисперсія вхідної завади $\xi(n)$. Дисперсія може використовуватись як показник якості функціональних фільтрів.

Функціональні фільтри також можуть бути виконані як у рекурсивному, так і не рекурсивному варіантах.

1.3.10 Дискретне перетворення Фур'є

При дискретизації аналогового сигналу його спектр стає періодичним з періодом повторення, що дорівнює частоті дискретизації. Однак одного цього співвідношення не достатньо для вирішення всіх практичних задач спектрального аналізу дискретних систем. *По-перше*, в якості вихідних даних в них виступають саме послідовності дискретних відліків, а не аналогові сигнали. *По-друге*, в більшості випадків, сигнал що аналізується є випадковим процесом, який потребує виконання певного усереднення при розрахунку спектру. Окрім того, в ряді випадків нам відома певна додаткова інформація про спектр сигналу, який ми аналізуємо, і таку інформацію нам бажано врахувати при спектральному аналізі.

Для роботи саме з дискретними сигналами було розроблене дискретне перетворення Фур'є (ДПФ, *Discrete Fourier Transform, DFT*) та алгоритм, що дозволяє прискорити розрахунки – швидке перетворення Фур'є (ШПФ).

ДПФ лежить в основі різних технологій спектрального аналізу, що призначенні для дослідження випадкових процесів. Справа в тому, що якщо сигнал, який аналізується представляє собою випадковий процес, то звичайний розрахунок ДПФ зазвичай не представляє собою особливого інтересу, оскільки в результаті ми отримаємо лише спектр одиної реалізації процесу. Тому для спектрального аналізу випадкових сигналів необхідно використовувати усереднений спектр. Такі методи, в яких застосовується лише інформація, яку отримано із самого вихідного сигналу, називають непараметричними (*nonparametric*).

Інший клас методів - передбачає наявності деякої статистичної моделі випадкового сигналу. Процес спектрального аналізу в даному випадку включає в себе визначення параметрів даної моделі, і тому такі методи називаються параметричними (*parametric*) або «модельний спектральний аналіз».

Нехай задано сигнал, що дискретизований через рівні проміжки часту T , і в результаті отримана дискретна послідовність $\{x(nT)\}=x(0), x(1), \dots, x[(N-1)T]$ із N вибірок, де n – номер вибірки ($n=0, \dots, N-1$). Значення $x(nT)$ буде дійсним лише тоді, коли воно представляє собою значення такого часового ряду, як спектр напруги. В такому випадку ДПФ послідовності $x(nT)$ можна визначити як послідовність комплексних значень $\{X(k\Omega)\}=X(0), X(\Omega), \dots, X[(N-1)\Omega]$ в частотній області, де Ω – частота першої гармоніки, яка задається як $\Omega=2\pi/(N-1)T \approx 2\pi/TN$ для $N \gg 1$.

Отже, $X(k\Omega)$ в загальному випадку має дійсні та уявні компоненти, так що для k -ї гармоніки

$$X(k) = \text{Re}(k) + i \text{Im}(k), \text{ та } |X(k)| = [\text{Re}^2(k) + \text{Im}^2(k)]^{1/2}, \quad (1.69)$$

а зсув фази $X(k)$

$$\phi(k) = \arctg[\text{Im}(k) / \text{Re}(k)], \quad (1.70)$$

де під $X(k)$ розуміють $X(k\Omega)$. Отже наведені рівняння аналогічні рівнянням для перетворення Фур'є.

N дійсних значень (в часовій області) перетворюються в N комплексних значень ДПФ (в частотній області). Значення ДПФ $X(k)$ задається як

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} [x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik\Omega nT}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.71)$$

де через F_D позначається ДПФ.

В даному рівнянні k – номер гармоніки компонента перетворення. При заміні $x(nT)=f(t)$, $k\Omega=\omega$ та $nT=t$ видно, дане рівняння переходить в перетворення Фур'є

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.72)$$

при $f(t)=0$ для $T<0$ та $t>(N-1)T$, так що можна сподіватись, що ці два вирази будуть мати загальні властивості. В той же час дані перетворення не є рівнозначними.

Таким чином, зробивши зазначені вище заміни і задавши $dt=T$, а також замінивши інтеграл сумою, отримаємо частоти гармонік $k f_s$, де $f_s=1/(N-1)T=2\pi/\Omega$,

$$F(i\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik\Omega nT} T \quad (1.73)$$

для $0 \leq t \leq (N-1)T$. Порівняємо рівняння 12.1 та 12.2, і отримаємо

$$F(i\omega) = TX(k),$$

звідки видно, що компоненти перетворення Фур'є пов'язані з компонентами ДПФ через інтервал дискретизації, і їх можна знайти, помноживши компоненти ДПФ на інтервал дискретизації.

На практиці $N \gg 1$, і часто застосовують наближення $\Omega=2\pi/TN$.

Часто виникає необхідність виконати дискретне перетворення із частотної області у часову. Це можна здійснити за допомогою зворотного дискретного перетворення Фур'є (ЗДПФ), яке визначається як

$$X(nT) = F_D^{-1}[x(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{ik\Omega nT}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.74)$$

де через F_D^{-1} позначається ЗДПФ.

Властивості дискретного перетворення Фур'є.

В загальному властивості ДПФ аналогічні властивостям неперервного перетворення Фур'є, однак дискретний характер сигналу, що аналізується привносить деяку специфіку.

1) *Лінійність*. ДПФ є лінійним, тобто якщо послідовності $\{x(k)\}$ та $\{y(k)\}$ з одним і тим же періодом N відповідають набори гармонік $\dot{X}(n)$ та $\dot{Y}(n)$, то послідовності $\{ax(k)+by(k)\}$ буде відповідати спектр $\{a\dot{X}(n)+b\dot{Y}(n)\}$.

2) *Затримка*. Якщо затримати вихідну послідовність на один такт ($y(k)=x(k-1)$), то спектр необхідно помножити на $\exp(-i2\pi n/N)$:

$$\dot{Y}(n) = \dot{X}(n) e^{-i \frac{2\pi n}{N}}. \quad (1.75)$$

Оскільки ми вважаємо послідовність $\{x(k)\}$ періодичною, отриманий зсув є циклічним: $y(0)=x(-1)=x(N-1)$.

3) *Симетрія*. Спектр дискретного періодичного сигналу є періодичним. Окрім того, зберігається і властивість симетрії, яким володіє спектр неперервного фізичного сигналу ($\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$). Тому

$$\dot{X}(N-n) = \dot{X}(-n) = \dot{X}^*(n). \quad (1.76)$$

Гармоніка з нульовим номером (постійна складова) представляє собою суму відліків послідовності на одному періоді:

$$\dot{X}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(k). \quad (1.77)$$

Якщо N парне, то амплітуда гармоніки з номером $N/2$ є сумою відліків з почергово змінними знаками:

$$\dot{X}(N/2) = x(0) - x(1) + \dots + x(N-2) - x(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^k x(k). \quad (1.78)$$

Відповідно до даної властивості спектр є «спряжено-симетричним» відносно $N/2$, тобто містить таку ж кількість інформації, що й сам сигнал. Й на справді, вихідна послідовність представляє собою набір із N дійсних чисел. Спектр же представляється набором із $N/2$ (друга половина взаємоднозначно зв'язана з першою) комплексних чисел, кожна із яких з інформаційної точки зору еквівалентна двом дійсним. Якщо ж вихідна послідовність $\{x(k)\}$ не є дійсною, симетрія спектру відсутня і N комплексним відлікам в часовій області відповідає N комплексних відліків в спектральній області.

4) *ДПФ добутку послідовностей*. Нехай задано дві послідовності відліків $\{x_1(k)\}$ та $\{x_2(k)\}$ однакової довжини N , розрахуємо результат їх по елементного множення:

$$y(k) = x_1(k) x_2(k). \quad (1.79)$$

Якщо застосувати до даного виразу пряме ДПФ, отримаємо наступний вираз:

$$\dot{Y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{X}_1(i) \dot{X}_2(n-i). \quad (1.80)$$

Даний вираз представляє собою *кругову згортку спектрів* $\dot{X}_1(i)$ та $\dot{X}_2(i)$. Отже, як і для неперервного перетворення Фур'є, спектр добутку є згорткою спектрів.

Таким чином, згортка в часовій області еквівалентна добутку в частотній, тоді як згортка в частотній області еквівалентна добутку в часовій.

Кругова згортка. Оскільки ми розглядаємо періодичну послідовність, то суму при розрахунку згортки такої послідовності необхідно виконувати по одному періоду. Таку операцію називають круговою згорткою.

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2((k-i) \bmod N). \quad (1.81)$$

де $(k-i) \bmod N$ означає визначення $(k-i)$ за модулем N , тобто визначення залишку від ділення $(k-i)$ на N .

1.3.11 Відновлення неперервного сигналу за допомогою ДПФ

ДПФ дозволяє легко відновити неперервний періодичний сигнал, що має обмежену смугу частоти. Для цього у формулі ЗДПФ необхідно замінити дискретний параметр (номер відліку k) на неперервний – нормований час t/T , де T – період дискретизації.

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \dot{X}(n) e^{i \frac{2\pi n t}{NT}}. \quad (1.82)$$

В даному виразі, діапазон індексів суми зміщений вниз на $N/2$ (при парному N ; при непарному N сума береться від $n=-(N-1)/2$ до $(N-1)/2$). Це необхідно, для того щоб отримати аналоговий сигнал, який займає смугу частот від 0 до π/T . Коефіцієнти з від'ємними значеннями, можуть бути отримані із співвідношення симетрії.

Результат відновлення неперервного періодичного сигналу за допомогою ДПФ співпадає з результатами, які можна отримати при застосування ряду Котельнікова. Однак застосування ДПФ в даному випадку більш вигідніше, оскільки ряд Котельнікова для періодичного сигналу містить нескінченне число складових, а даний вираз – скінченне.

Матриця ДПФ. ДПФ є лінійним перетворенням, що трансформує вектор часових відліків у вектор такої ж довжини, який містить

спектральні відліки. Таке перетворення можна реалізувати як добуток деякої квадратної матриці на вхідний вектор-стовпець:

$$y = Ax, \quad (1.83)$$

де A - матриця перетворення. Для ДПФ дана матриця буде мати наступний вигляд:

$$A_{DFT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{N}} & e^{-i\frac{4\pi}{N}} & e^{-i\frac{6\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{N}} & e^{-i\frac{8\pi}{N}} & e^{-i\frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{N}(N-1)} & e^{-i\frac{12\pi}{N}(N-1)} & e^{-i\frac{18\pi}{N}(N-1)} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}. \quad (1.84)$$

Загальна формула для елемента матриці, що розташований в n -му стовпці m -ї строки, буде мати наступний вигляд:

$$A_{DFT}(m, n) = \exp\left(-i2\pi \frac{(m-1)(n-1)}{N}\right), \quad 1 \leq m \leq N, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (1.85)$$

Даний метод потребує великої кількості обчислень, тому на практиці замість нього застосовується швидкі алгоритми.

Зв'язок ДПФ та спектру дискретного сигналу.

Маючи один і той же скінчений набір чисел, можна отримати або спектральну функцію даного дискретного сигналу або його ДПФ.

Якщо порівняти вирази для знаходження спектру дискретного сигналу та ДПФ, можна зрозуміти що ДПФ представляє собою звичайні дискретні відліки спектральної функції дискретного сигналу, що відповідають частотам $\omega_n = \omega_d n/N$:

$$\dot{X}(n) = \dot{S}\left(\frac{2\pi n}{NT}\right) = \dot{S}\left(\omega_d \frac{n}{N}\right). \quad (1.86)$$

Тому значення ДПФ ще іноді називають спектральними відліками.

Із наведеного співвідношення випливає ще один висновок: якщо додати до кінцевого набору відліків деяку кількість нулів, спектральна функція дискретного сигналу – не зміниться, однак ДПФ дасть більшу

кількість спектральних відліків, що відповідають частотам, більш тісно розташованими в інтервалі від 0 до ω_0 .

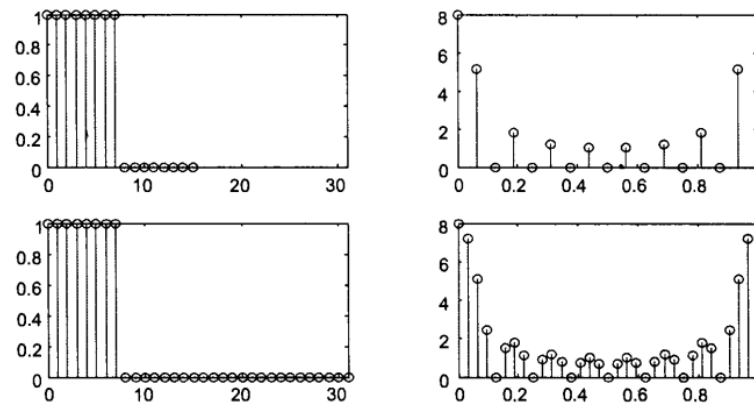


Рис. 1.38. Підвищення спектрального розширення ДПФ при доповненні сигналу нулями: зверху – вихідний сигнал і модуль його ДПФ; знизу – сигнал, доповнений 16 нулями і модуль його ДПФ

З рис. 1.38. видно, що після збільшення довжини сигнал в двічі за рахунок додавання нульових відліків результат ДПФ став містити в двоє більше значень, що відповідають в два рази частішому розташуванню частот.

Складність при розрахунках ДПФ.

Для розрахунку одного коефіцієнта ДПФ необхідно виконати N комплексних множень та додавань. Так для 8-точечного ДПФ розписана послідовність $X(k)$ буде мати вид

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-i \frac{k 2\pi n}{8}}, \quad k = 0, \dots, 7,$$

проведемо заміну $k 2\pi / 8 = K$, тоді

$$X(k) = x(0)e^{-iK0} + x(1)e^{-iK1} + x(2)e^{-iK2} + x(3)e^{-iK3} + x(4)e^{-iK4} + \\ + x(5)e^{-iK5} + x(6)e^{-iK6} + x(7)e^{-iK7} + x(8)e^{-iK8}, \quad k = 0, \dots, 7.$$

Таким чином права сторона буде містити 8 членів. Розрахунок кожного члену включає операцію множення всього комплексно-експоненційного множника на інший множник, який може бути або дійсним, або комплексним. Потім всі ці добутки додаються. Таким чином, для розрахунку заданої величини необхідно виконати 8 операцій комплексного множення та сім операцій комплексного додавання. Для N -точечного ДПФ їх число буде становити відповідно N та $(N-1)$. Окрім того необхідно розрахувати 8 компонентів гармонік ($k=0, \dots, 7$). Для N -точечного

ДПФ це число дорівнює N . Відповідно, для розрахунку 8-точечного ДПФ необхідно виконати $8^2=64$ операцій комплексного множення та $8 \times 7=56$ операцій комплексного додавання. Для N -точечного ДПФ ці числа будуть дорівнювати N^2 та $N(N+1)$. Якщо $N=1024$, то знадобиться приблизно один мільйон операцій комплексного множення і один мільйон операцій комплексного додавання. Зрозуміло, що це число необхідно зменшувати.

1.3.12 Алгоритм швидкого перетворення Фур'є

Якщо N є простим числом і може бути розкладеним на множники, процес розрахунку можна скоротити, розділивши набір відліків, що аналізується на частини, розрахувати їх ДПФ та об'єднати результати. Такий спосіб розрахунку ДПФ називається швидким перетворенням Фур'є (*Fast Fourier Transform, FFT*) і широко застосовується на практиці.

При реалізації ШПФ можливо декілька варіантів організації розрахунків залежно від способу ділення послідовності відліків на частини (проріджування за часом або за частотою) і від того, на скільки фрагментів відбувається розбиття послідовності на кожному кроці.

1.3.13 ШПФ з проріджуванням за часом

Розглянемо ідею ШПФ з проріджуванням за часом (*decimation in time, DIT*) на прикладі поділу набору відліків навпіл.

Нехай N – парне число. Виділимо дві складові, що відповідають елементам вихідної послідовності з парними і непарними номерами:

$$\dot{X}(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) e^{-i \frac{2\pi 2mn}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) e^{-i \frac{2\pi (2m+1)n}{N}}. \quad (1.87)$$

Позначемо $y(m)=x(2m)$ та $z(m)=x(2m+1)$ та винесемо із другої суми спільний множник $e^{-i2\pi n/N}$:

$$\dot{X}(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} y(m) e^{-i \frac{2\pi mn}{N/2}} + e^{-i \frac{2\pi n}{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} z(m) e^{-i \frac{2\pi mn}{N/2}}. \quad (1.88)$$

Дві суми в даному виразі представляють собою ДПФ послідовностей $\{y(m)\}$ – відліки з парними номерами та $\{z(m)\}$ – відліки з непарними номерами. Кожне з цих ДПФ має розмірність $N/2$. Таким чином,

$$\dot{X}(n) = \dot{Y}(n) + e^{-i \frac{2\pi n}{N}} \dot{Z}(n), \quad (1.89)$$

де $\dot{Y}(n)$ та $\dot{Z}(n)$ - ДПФ відповідно послідовності відліків з парними та непарними номерами:

$$\dot{Y}(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} y(m) e^{-i \frac{2\pi mn}{N/2}}; \quad \dot{Z}(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} z(m) e^{-i \frac{2\pi mn}{N/2}}. \quad (1.90)$$

Оскільки ДПФ розмірності $N/2$ дає лише $N/2$ спектральних коефіцієнтів, безпосередньо формули 12.7 можна застосовувати лише при $0 \leq n \leq N/2$. Для інших n ($N/2 \leq n < N$) слід використати періодичність спектру дискретного сигналу, і відповідно періодичність результатів ДПФ:

$$\dot{Y}\left(n + \frac{N}{2}\right) = \dot{Y}(n), \quad \dot{Z}\left(n + \frac{N}{2}\right) = \dot{Z}(n). \quad (1.91)$$

Процес розрахунку 8-точечного ДПФ шляхом розбиття його на два 4-точечних ДПФ представлено на рис. 1.39.

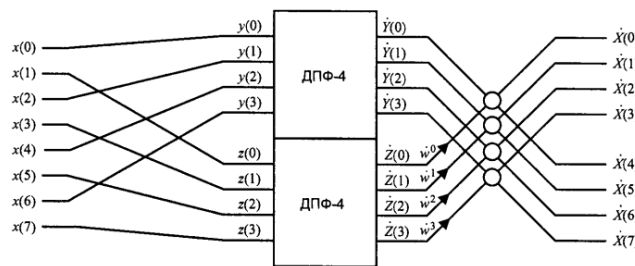


Рис. 1.39. Розрахунок 8-точечного ДПФ за допомогою 4-точечного ДПФ

Кожний блок, що реалізує об'єднання двох ДПФ, має два вхідних і два вихідних сигнали. Один із вхідних сигналів множиться на комплексну експоненту w^k , після чого додається до другого вхідного сигналу і віднімається з нього, формуючи таким чином два вихідні сигнали. Це відповідає реалізації формул 1.40. Дана операція отримала назву «метелик».

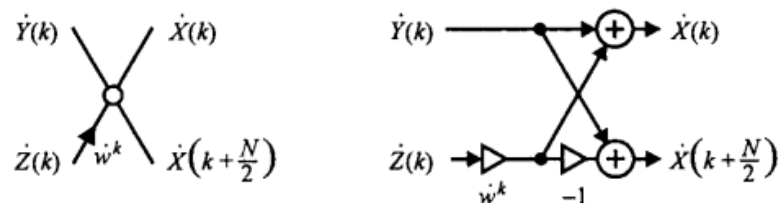


Рис. 1.40. Умовне позначення «метелика» БПФ з проріджуванням за часом (зліва) та її структурна схема (справа)

Оцінімо кількість операцій, необхідних для розрахунку ДПФ вказаним способом. Кожне із двох ДПФ половинної розмірності потребує $N^2/4$ операцій. Окрім того, при розрахунку кінцевого результату кожний

спектральний коефіцієнт $\dot{Z}(n)$ множиться на експоненційний комплексний множник. Це додає ще $N/2$ операцій. Отже виходить $2N^2/4 + N/2 = N(N+1)/2 = 8(8+1)/2 = 36$, що майже вдвічі менше, ніж при розрахунку ДПФ прямим способом.

Якщо $N/2$ також є парним числом (тобто якщо N ділиться на 4), можна продовжити описану процедуру, представивши результат через 4 ДПФ розмірності $N/4$. Це дозволить ще більше скоротити число необхідних операцій.

Найбільший ступінь прискорення розрахунків можна досягти при $N=2^k$, в цьому випадку ділення послідовності на дві частини можна продовжити до тих пір, доки не отримаємо двоелементні послідовності, ДПФ яких розраховуються взагалі без застосування операцій множення (достатньо визначити суму та різницю двох відліків). Число необхідних при цьому пар операцій «множення-додавання» можна оцінити як $M\log_2(N)$. Таким чином, розрахункові витрати в порівнянні з безпосереднім використанням ДПФ зменшаться в $M\log_2(N)$ раз.

1.3.14 ШПФ з проріджуванням за частотою

Вирази для знаходження прямого і зворотного ДПФ відрізняються лише знаком в показнику експоненти та множником перед сумою. Тому можна отримати ще один варіант алгоритму ШПФ, виконавши перетворення, що наведене на схемі 12.2 в зворотному порядку. Такий спосіб розрахунку називається проріджування за частотою (*decimation in frequency, DIF*).

Розділимо вихідну послідовність $\{x(k)\}$ на дві послідовні половини (як і в попередньому випадку N має бути парним числом):

$$\dot{X}(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m) e^{-i \frac{2\pi mn}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x\left(m + \frac{N}{2}\right) e^{-i \frac{2\pi \left(m + \frac{N}{2}\right) n}{N}}. \quad (1.92)$$

Із другого доданку можна виділити множник

$$e^{-i \frac{2\pi \left(\frac{n}{2}\right) n}{N}} = e^{-i \pi n} = (-1)^n. \quad (1.93)$$

Цей множник дорівнює 1 або -1 залежно від парності номеру спектрального відліку, що розраховується, тому будемо розглядати парні та непарні n окремо. Після визначення множника ± 1 комплексні експоненти в обох сумах стають однаковими, тому виносимо їх за дужки, об'єднавши дві суми:

$$\begin{aligned}\dot{X}(2k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} \left[x(m) + x\left(m + \frac{N}{2}\right) \right] e^{-i\frac{2\pi mk}{N/2}}, \\ \dot{X}(2k+1) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} \left[x(m) - x\left(m + \frac{N}{2}\right) \right] e^{-i\frac{2\pi mk}{N/2}} e^{-i\frac{2\pi m}{N}}.\end{aligned}\quad (1.94)$$

Вказані в даних виразах суми представляють собою ДПФ сум та різниць половин вихідної послідовності, при цьому різниця перед розрахунком ДПФ множиться на комплексні експоненти $\exp(-i2\pi m/N)$. Кожний із двох ДПФ, що застосовується тут має розмірність $N/2$.

Отже при проріджування за частотою розрахунки організовуються наступним чином:

1) Із вихідної послідовності $\{x(k)\}$ довжиною N отримують дві послідовності $\{y(m)\}$ та $\{z(m)\}$ довжиною $N/2$ відповідно до наступних виразів:

$$\begin{aligned}y(m) &= x(m) + x\left(m + \frac{N}{2}\right), \\ z(m) &= \left(x(m) - x\left(m + \frac{N}{2}\right) \right) e^{-i\frac{2\pi m}{N}}.\end{aligned}\quad (1.95)$$

2) ДПФ послідовності $\{y(m)\}$ дає спектральні відліки з парними номерами, ДПФ послідовності $\{z(m)\}$ – з непарними:

$$\begin{aligned}\dot{X}(2k) &= \dot{Y}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} y(m) e^{-i\frac{2\pi km}{N/2}}, \\ \dot{X}(2k+1) &= \dot{Z}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} z(m) e^{-i\frac{2\pi km}{N/2}}.\end{aligned}\quad (1.96)$$

Процес розрахунку 8-точечного ДПФ шляхом розбиття його на два 4-точечні ДПФ з прорідженням за частотою наведен на рис. 1.41.

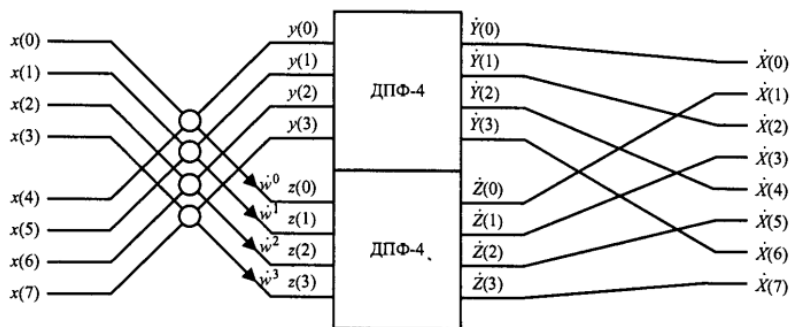


Рис. 1.41. Розрахунок 8-точечного ДПФ за допомогою двох 4-х точечних ДПФ шляхом проріджування за частотою

Оскільки комплексний експоненційний множник в даному алгоритмі застосовується до результату розрахунку двох сигналів, «метелик» ШПФ з проріджуванням за частотою має дещо іншу структурну схему (рис. 1.42).

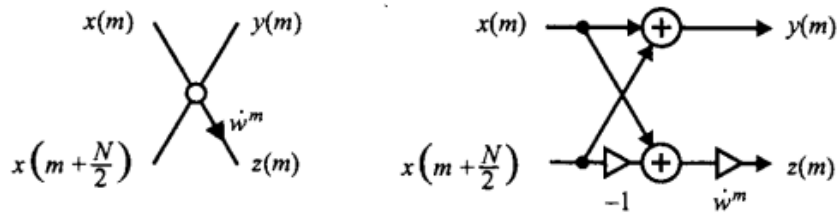


Рис. 1.42. – Умовне позначення «метелик» ШПФ з проріджуванням за частотою (зліва) та її структурна схема (справа)

Для отримання алгоритму зворотного ШПФ достатньо поміняти в наведених формулах знак в показниках комплексних експонентів та додати на виході (або на вході) ділення на два.

В загальному різниця між алгоритмами часової та частотної деменції незначна. Кількість операцій комплексного множення, що необхідні для виконання кожного алгоритму, однакова.

Основа алгоритмів ШПФ. В назві алгоритмів ШПФ можна зустріти слово «RADIX» (основа – в математичному розумінні). Число, яке йде за ним, означає число фрагментів, на які розбивається сигнал на кожному етапі проріджування.

В алгоритмах «RADIX-2» розмір послідовності, що аналізується повинен дорівнювати ступеню двійки, а її ділення виконується доки не буде отримано двоелементну послідовність. Розрахунок їх ДПФ не потребує операції множення – два спектральних відліки представляють собою суму і різницю відліків часових:

$$\dot{X}(0) = x(0) + x(1),$$

$$\dot{X}(1) = x(0) - x(1).$$

В алгоритмах «RADIX-4» кількість відліків сигналу повинна бути рівною степеню 4, при кожному проріджуванні сигнал ділиться на 4 фрагменти, а остання стадія поділу є чотирьохелементна послідовність. При розрахунку їх ДПФ множення виконується лише на $\pm i$, а таке множення зводиться до взаємної перестановки дійсної та уявної частин комплексного числа зі зміною знака однієї із них:

$$\dot{X}(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3),$$

$$\dot{X}(1) = x(0) - ix(1) - x(2) + ix(3),$$

$$\dot{X}(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3),$$

$$\dot{X}(3) = x(0) + ix(1) - x(2) - ix(3).$$

Застосування основи 4 дозволяє суттєво зменшити число виконаних множень.

Найбільше прискорення розрахунків завдяки ШПФ досягається при довжині вектора, який дорівнює степеню двійки. При розкладанні довжини вектора на інші множники прискорення також можливе, хоча і не таке відчутне. Якщо довжина вектора – просте число, розрахунок спектра може бути виконаний лише за прямим виразом ДПФ.

Таким чином:

- ШПФ не є наближеним алгоритмом, при відсутності похибок у розрахунках він дасть точно такий же результат, що і пряма формула ДПФ. Прискорення досягається виключно за рахунок оптимальної організації розрахунків;

- застосування ШПФ має сенс, якщо число елементів в послідовності, що аналізується є степенем числа 2;

- алгоритм ШПФ призначений для одночасного розрахунку всіх спектральних відліків $\dot{X}(n)$. Якщо ж необхідно отримати ці відліки лише для деяких n , можна виявитись більш прийнятнішим застосування прямого ДПФ.

1.3.15 Взаємозв'язок ДПФ та фільтрації

Зв'язок між ДПФ та фільтрацією – двосторонній: ДПФ можна представити як обробку сигналу набором фільтрів, а дискретну фільтрацію можна організувати за допомогою ШПФ, що дозволяє значно зменшити число розрахункових операцій.

ДПФ як дискретна фільтрація.

ДПФ можна трактувати як обробку сигналу фільтром з відповідною імпульсною характеристикою (ІХ).

Дану ІХ можна отримати, якщо відмітити, що $\exp(i2\pi n)=1$ при цілочисельному n , з урахуванням цього записати формулу прямого ДПФ у вигляді

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{i2\pi \frac{n}{N}(N-k)}. \quad (1.97)$$

Перетворена таким чином формула ДПФ представляє собою дискретну згортку, тобто N -й відлік результатів обробки вхідного сигналу $x(k)$ фільтром, ІХ якого дорівнює

$$h_n = e^{i2\pi \frac{n}{N}(N-k)}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.98)$$

Зрозуміло, ІХ для кожного частотного відліку ДПФ своя, саме тому в її позначенні використовується індекс n .

Визначимо частотну характеристику такого фільтра.

Функція передачі фільтра буде визначатись наступним рівнянням:

$$H_n(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{i2\pi \frac{n}{N}} z^{-1}}. \quad (1.99)$$

Для розрахунку частотної характеристики використаємо заміну $z = e^{i\omega T}$:

$$\dot{K}(\omega) = H_n(e^{i\omega T}) = \frac{1 - e^{-i\omega NT}}{1 - e^{i2\pi \frac{n}{N}} e^{-i\omega T}}. \quad (1.100)$$

АЧХ такого фільтра після нескладних тригонометричних перетворень можна записати наступним чином:

$$K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = \frac{\left| \sin \frac{\omega NT}{2} \right|}{\left| \sin \frac{1}{2} \left(\omega T - \frac{2\pi n}{N} \right) \right|} = \frac{\left| \sin \left(\pi N \frac{\omega - \omega_n}{\omega_d} \right) \right|}{\left| \sin \left(\pi \frac{\omega - \omega_n}{\omega_d} \right) \right|}, \quad \omega_n = \frac{n}{N} \omega_d. \quad (1.111)$$

Функція передачі окремого кагалу ДПФ $H_n(z)$ відповідає рекурсивному фільтру N -го порядку. Тому розрахунок окремих спектральних відліків можна реалізувати за допомогою такого фільтра. Якщо необхідно розрахувати лише деякі відліки ДПФ, даний алгоритм може виявитись більш придатним, ніж ШПФ, який принципово орієнтований на отримання всіх спектральних відліків.

Дискретна фільтрація за допомогою ДПФ.

Досліджуючи властивості ДПФ, було зазначено, що множення дискретних спектрів відповідає круговій згортці періодичної послідовності, в той час як вихідний сигнал дискретного фільтра представляє собою лінійну згортку послідовності скінченної довжини – вхідного сигналу та ІХ. Однак за допомогою ДПФ можна отримати лінійну згортку, для цього необхідно додати до кожної послідовності, що згортається, нульові відліки в кількості, не менше, ніж довжина другої послідовності мінус одиниця. Довжини двох послідовностей після цього мають стати однаковими і рівними як мінімум довжині лінійної згортки вихідних послідовностей. Кругова згортка таких доповнених нулями послідовностей співпадає з лінійною згорткою вихідних послідовностей.

Приклад: Нехай згортається послідовність, яка складається з 4 елементів:

Вихідні дані: x_1 :

1	2	4	8
---	---	---	---

 x_2 :

2	3	4	5
---	---	---	---

Розрахунок лінійної згортки

<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(0) = 1 \cdot 2 = 2$
<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$
<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18$
<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(3) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41$
<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(4) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 50$
<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(5) = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52$
<div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>8</div></div>	$y(6) = 8 \cdot 5 = 40$

Результат
 $y(k)$:

2	7	18	41	50	52	40
---	---	----	----	----	----	----

Розрахунок кругової згортки

<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>	1	2	4	8	2	5	4	3	$y(0) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 52$
1	2	4	8						
2	5	4	3						
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td></tr></table>	1	2	4	8	3	2	5	4	$y(1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 59$
1	2	4	8						
3	2	5	4						
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	1	2	4	8	4	3	2	5	$y(2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 58$
1	2	4	8						
4	3	2	5						
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	2	4	8	5	4	3	2	$y(3) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41$
1	2	4	8						
5	4	3	2						

Результат
 $y(k)$:

52	59	58	41
----	----	----	----

Результати розрахунків двох згорток, як видно, досить різні. Однак, якщо доповнити кожен із послідовностей трьома нулями, щоб їх довжини стали рівні 7 (це довжина їх лінійної згортки), і розрахувати кругову згортку ще раз, то отримаємо результат лінійної згортки.

Вихідні дані:

x_1 :

1	2	4	8	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

 x_2 :

2	3	4	5	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Розрахунок кругової згортки

1	2	4	8	0	0	0
2	0	0	0	5	4	3

$$y(0) = 1 \cdot 2 = 2$$

1	2	4	8	0	0	0
3	2	0	0	0	5	4

$$y(1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

1	2	4	8	0	0	0
4	3	2	0	0	0	5

$$y(2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18$$

1	2	4	8	0	0	0
5	4	3	2	0	0	0

$$y(3) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41$$

1	2	4	8	0	0	0
0	5	4	3	2	0	0

$$y(4) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 50$$

1	2	4	8	0	0	0
0	0	5	4	3	2	0

$$y(5) = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52$$

1	2	4	8	0	0	0
0	0	0	5	4	3	2

$$y(6) = 8 \cdot 5 = 40$$
$$y(7) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 16 \cdot 1 = 55$$

Результат
 $y(k)$:

2	7	18	41	50	52	40
---	---	----	----	----	----	----

Оскільки ДПФ лінійної згортки дорівнює добутку ДПФ послідовностей, що згортаються, можна отримати наступний алгоритм фільтрації в частотній області.

1. Послідовність відліків вхідного сигналу та імпульсної характеристики фільтра доповнюються нулями так, щоб довжини послідовностей стали рівними і не меншими, ніж сума довжин вихідних послідовностей мінус один.

2. Розраховують ДПФ доповнених нулями послідовностей.
3. Розраховані ДПФ поелементно перемножуються.
4. Розраховується зворотнє ДПФ від результатів множення.

Кількість нулів, що додаються до послідовності, може бути більшою мінімально необхідної – при цьому лише з'являється відповідне число крайових нулів у розрахованій згортці. Таким чином, завжди можна обрати кількість нулів такою, щоб отримана послідовність була рівною степеню двійки та використати ефективний алгоритм ШПФ.

Недоліком такого метода фільтрації є те, що вхідний сигнал обробляється одразу весь, тобто розрахунки можна почати лише після закінчення вхідного сигналу. Однак на практиці в більшості випадках необхідно обробляти відліки вхідного сигналу по мірі їх надходження.

Можливим рішенням проблеми є блочна, або секційна, обробка вхідного сигналу. При цьому послідовність вхідних відліків ділиться на блоки (секції) заданого розміру, і ці блоки піддаються фільтрації в частотній області окремо один від одного. При виборі розміру блока необхідно реалізувати компроміс між кількістю операцій (чим більший розмір блока, тим ефективніше використовується алгоритм ШПФ) та затримкою вихідного сигналу (чим менше розмір блоку, тим менша затримка).

В загальному випадку, фільтрація організовується наступним чином.

1. Вхідний сигнал розбивається на блоки довжиною N відліків.
2. Кожний блок фільтрується незалежно. Довжина вихідного сигналу становить $N+M-1$ відліків, де M – довжина ІХ фільтра.
3. Блоки вихідного сигналу об'єднуються, при цьому їх крайні $M-1$ відліків перекриваються та додаються.

Даний алгоритм називається метод перекриття та додавання (*overlap-add*). Другий можливий варіант – перекриття з накопиченням (*overlap-save*). При цьому вхідний сигнал розбивається на блоки, що перекриваються на краях на $M-1$ відліків, а у вихідному сигналі для кожного блока відкидається крайні «хвости» по $M-1$ відліків з кожної сторони. Після цього вихідні блоки об'єднуються без перекриття.

1.4. Цифрові системи обробки сигналів

Цифрова система обробки сигналів – це дискретна система, яка описується різницеvim рівнянням і реалізована програмним шляхом на цифрових сигнальних процесорах або ж апаратним шляхом у вигляді спеціалізованого цифрового обчислювача.

Для представлення коефіцієнтів системи (коефіцієнти різницевого рівняння або системної функції) та відліків сигналу, що опрацьовується, в цифровій системі використовуються елементи пам'яті (реєстри, комірки пам'яті), розрядність яких скінчена. Операційні пристрої (суматори, помножувачі) також мають обмежену розрядність.

Відповідно, коефіцієнти системи та відліки сигналу представляються з обмеженою точністю. Обмеженість розрядності елементів пам'яті та операційних пристроїв системи приводять до операції квантування.

Квантування – це нелінійна операція. Її введення в алгоритм обробки сигналу викликає появу помилок при його реалізації. Сукупність цих помилок називають помилками (шумами) квантування.

1.4.1 Формат представлення даних

Як уже відзначалося, дискретний сигнал являє собою послідовність відліків (чисел), що можуть приймати довільні значення в деякому певному діапазоні.

А цифровий сигнал – це квантований за рівнями дискретний сигнал, тобто квантована послідовність відліків, які можуть приймати лише скінчений ряд дискретних по величині значень – рівнів квантування.

Значення відліків цифрового сигналу представляються числами в обраній системі числення. Як правило, в пристроях цифрової обробки сигналів числа представляються в двійковій системі числення.

В системах цифрової обробки сигналів використовуються дві форми представлення дробових чисел:

- з фіксованою точкою (*fixed point*);
- з плаваючою точкою (*floating point*).

В доповнення до цих двох форм існує декілька способів представлення від'ємних чисел.

Представлення від'ємних чисел. Для представлення знаку числа зазвичай використовують старший двійковий розряд, при цьому можливим є декілька способів:

- *прямий код*: 0 в старшому розряді відповідає додатнім числам, 1 – від'ємним. Інші розряди представляють модуль числа. В такому коді зручно виконувати операції множення (модулі числа множаться, а знак розряду додаються за модулем два), але не зручно реалізовувати

додавання. Окрім того, проблеми виникають через наявність двох представлень нуля – «додатного» та «від’ємного»;

- *додатковий код*: 0 в старшому розряді відповідає додатному числу, 1 – від’ємному. Невід’ємні числа представляються без яких-небудь особливостей, а для перетворення додатного числа в рівне йому за модулем від’ємне необхідно інвертувати всі розряди двійкового представлення (включаючи знаковий) і до отриманого двійкового числа додати одиницю. В додатковому коді зручно виконувати операції додавання;

- *зворотний код*: 0 в старшому розряді відповідає додатним числам, 1 – від’ємним. Невід’ємні числа представляються без яких-небудь особливостей, а перетворення додатного числа в рівне йому за модулем від’ємне виконується шляхом простої інверсії всіх розрядів двійкового представлення (включаючи знаковий);

- *зміщений код*: трактування знакового розряду в даному випадку протилежна попередньому варіанту – 1 означає додатне число, а 0 – від’ємне. Представлення чисел отримуємо шляхом додавання до них константи (2^N-1) , де N – число двійкових розрядів (не враховуючи знаковий).

В таблиці 14.1. приведені варіанти пояснюються на прикладі 8-розрядних цілих чисел.

Таблиця 1.2

Способи представлення чисел зі знаком

Беззнакові значення	Двійкове представлення	Значення зі знаком			
		Прямий код	Додатковий код	Зворотний код	Зміщений код
0	00000000	0	0	0	-127
1	00000001	1	1	1	-126
...
126	01111110	126	126	126	-1
127	01111111	127	127	127	0
128	10000000	-0	-128	-127	1
129	10000001	-1	-127	-126	2
...
254	11111110	-126	-2	-1	127
255	11111111	-127	-1	-0	128

Найбільше використання для представлення цілих чисел та чисел з фіксованою точною набув додатковий код. Прямий код використовують для представлення мантиси, а зміщений код – для представлення порядку чисел у форматі з плаваючою точкою.

Формат із фіксованою точкою. Даний формат означає, що в двійковому представленні дробового числа для зберігання цілої та дробової частин відведено фіксоване число розрядів. Тобто, точка, що розділяє цілу та дробову частини в двійковому представленні числа, знаходиться на фіксованому місці.

Часто формат з фіксованою точкою позначають парою чисел: $M.N$. В більшості випадків M - позначає число розрядів цілої частини числа (включаючи знак), а N - число розрядів дробової частини.

Символьне значення формату, в якому представлене двійкове число A має вигляд 2^n , де n - кількість розрядів числа A .

7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
Знак	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}

Діапазон абсолютних значень чисел A в форматі з фіксованою точкою становить $0 \leq |A| \leq 1 - 2^{-n}$.

При математичних операціях результат може вийти за верхню межу діапазону $|A| \geq 1$ і тим самим викликати суттєву похибку. Для усунення переповнення в системах ЦОС з фіксованою точкою вводиться масштабування даних, при цьому всі математичні операції виконуються з числами A , за абсолютним значенням меншими за одиницю.

Для кодування чисел з фіксованою точкою застосовують два основні способи: прямий та додатковий.

Прямий код числа A формується по наступному правилу. В знаковий розряд записується нуль (для додатніх чисел) та одиниця (для від'ємних), значущі розряди відповідають дробовій частині числа. Після старшого знакового розряду логічно фіксується точка, яка відокремлює цілу частину від дробової. Це правило має вигляд:

$$[A]_{np} = \begin{cases} 0, a_1, a_2, \dots, a_n & \text{при } A \geq 0; \\ 1, a_1, a_2, \dots, a_n & \text{при } A < 0. \end{cases}$$

Додатковий код більш часто використовується в системах ЦОС. Для формату з фіксованою точкою додатковий формується з наступним правилом:

$$[A]_{дод} = \begin{cases} 0, a_1, a_2, \dots, a_n & \text{при } A \geq 0; \\ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n & \text{при } A < 0. \end{cases}$$

Перевагами формату з фіксованою точкою є рівномірне квантування та простота реалізації арифметичних операцій, головним недоліком - обмежений динамічний діапазон. Динамічним діапазоном називають

відношення між самим великим і самим малим значеннями за модулем (але такими, що відрізняються від нуля) чисел, які можуть бути представленні за допомогою даного формату. Для формату з фіксованою точкою це відношення рівне $(2^{M-1}-1)$.

Формат із плаваючою точкою. Числа у форматі з плаваючою точкою представляються у вигляді

$$x = f \cdot 2^e, \quad (1.112)$$

де f – мантиса (*mantissa*), число з знаком, представлене у форматі з фіксованою точкою, 2 – основа системи числення, e – порядок (*exponent*).

Оскільки в експонентній формі запису чисел присутні два параметри, таке представлення виявляється неоднозначним. Так $2 = 2 \cdot 2^0 = 2 \cdot 2^1 = 1/2 \cdot 2^2 = \dots$

Щоб усунути дану неоднозначність, прийнято обмежувати діапазон допустимих значень мантиси, наприклад, так: $0,5 \leq |f| < 1$, або $1 \leq |f| < 2$. Процедура приведення мантиси до допустимого діапазону називається *нормалізацією*, а експонентна форма запису числа, що задовольняє вказаним обмеженням – *нормалізованою експонентною формою*.

Для представлення від'ємних чисел необхідно забезпечити можливість представлення від'ємних значень мантиси. Як правило, для цього застосовують прямий код, тобто модуль мантиси та знаковий біт зберігають незалежно.

Застосування строго нормалізованої мантиси робить неможливим представлення нульового значення у форматі з плаваючою точкою. Тому використовують спеціальну домовленість про те, що число, що містить нулі у всіх розрядах мантиси і порядку, вважається нулем. Знаковий розряд при цьому може мати будь-яке значення. Таким чином, існує два представлення нуля – «додатній нуль» та «від'ємний нуль».

Щоб застосування даної домовленості для представлення нуля не призвело до виникнення «дірки» в наборі представлення чисел, нульове представлення порядку повинно відповідати не нульовому, а мінімально можливому (тобто від'ємному) його значенню. Тому для представлення порядку чисел з плаваючою точкою застосовують зміщений код.

Отже для представлення нульового значення у форматі з плаваючою точкою мантиса повинна бути денормалізованою. Однак, якщо використовувати денормалізовану мантису лише для представлення нуля, малі за модулем числа, які представляються в даному форматі, виявляються розташованими нерівномірно – навколо нуля з'являється «мертва зона», розмір якої суттєво перевищує відстань між найближчими до нуля числами.

Щоб вирішити дану проблему і зробити розташування представлення чисел в околиці нуля рівномірним, застосовують наступну домовленість про денормалізацію: *якщо всі розряди порядку мають нульові значення, то*

величина порядку збільшується на одиницю, а мантиса вважається денормалізованою, тобто такою, що містить в неявному старшому біті нуль, а не одиницю.

Це дозволяє розширити можливість представлення малих за модулем чисел. Фактично в даному випадку збільшується діапазон можливих від'ємних порядків за рахунок скорочення числа значущих цифр мантиси.

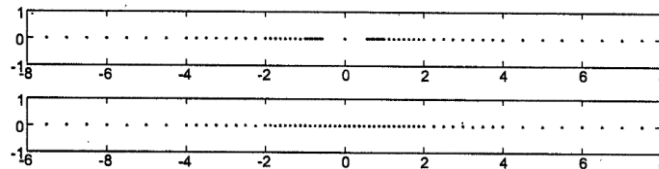


Рис. 1.43. Числа представлені в 6-бітовому форматі з плаваючою точкою без застосування (зверху) та із застосуванням (знизу) домовленості про денормалізацію мантиси для малих чисел

Формат з плаваючою точкою, за рахунок експонентного представлення чисел має суттєво більший динамічний діапазон, ніж формат з фіксованою точкою при однаковій довжині слова. Однак, при цьому виникає нерівномірність квантування та підвищена складність реалізації арифметичних операцій.

1.4.2 Процес квантування

Як вже зазначалось раніше квантування – це процес перетворення дійсних значень відліків сигналу в двійкові числа, що мають скінченну числову розрядність.

І як було відмічено раніше при представленні відліків дискретного сигналу у вигляді чисел з обмеженою розрядністю відбувається їх округлення. Різниця між вихідним та округленим значеннями називається шумом квантування.

На рис. 1.44 представлений процес квантування гармонічного сигналу $s(t)$, результат його квантування $s_k(t)$, та шум, що виникає при цьому $e(t)=s(t)-s_k(t)$. Очевидно, що значення шуму квантування будуть лежати в межах:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e(t) \leq \frac{\Delta}{2}, \quad (1.113)$$

де Δ – відстань між сусідніми рівнями квантування, тобто різниця між найближчими значеннями квантованого сигналу.

В більшості випадках можна вважати $e(t)$ випадковим процесом, що має рівномірне розподілення ймовірності в зазначених межах. Такий випадковий процес має нульову середнє значення та дисперсію, що дорівнює $\Delta^2/12$.

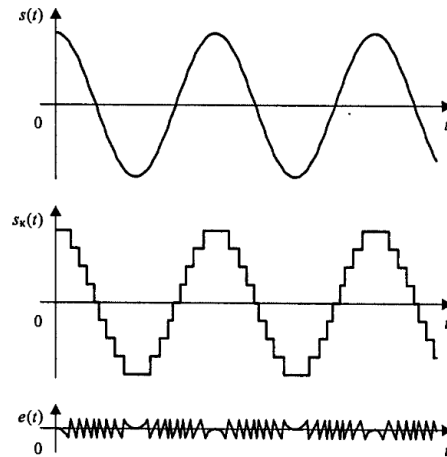


Рис. 1.44. Процес квантування гармонічного сигналу

Після дискретизації шум квантування представляє собою послідовність чисел $e(kt)$, що утворює дискретний випадковий процес. В багатьох випадках відліки даної послідовності можна вважати некорельованими один з одним.

Процедура квантування може здійснюватись двома способами: за допомогою округлення або урізання.

При округленні числа A до b значущих розрядів вихідне k -розрядне число заміняється на найближче b -розрядне.

При урізанні k -розрядного числа до b значущих розрядів $k > b$ молодші розряди вихідного числа урізаються. На рис. 1.45. наведена відповідні характеристики похибок квантування при округленні та урізанні.

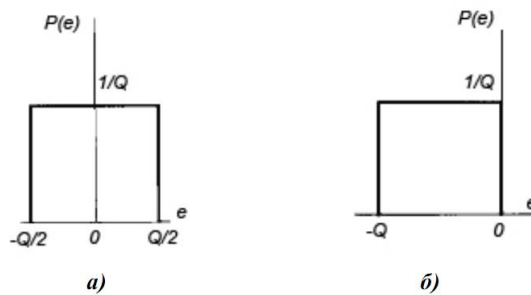


Рис. 1.45. Щільність ймовірностей похибок квантування при округленні (а) та при урізанні (б)

Нерівномірне квантування. Рівномірне квантування, яке розглядалось до цього, гарантує, що розмах квантування не буде перевищувати величину кроку квантування. Однак якщо, необхідно виконати мінімізацію середньоквадратичного значення шуму квантування, оптимальний набір рівнів квантування буде залежати від статистичних властивостей сигналу, а саме від щільності ймовірності його миттєвих значень.

В цьому випадку зрозуміло, що рівні квантування повинні розташовуватись щільніше один до одного в областях тих значень, в яких сигнал приймає з більшою ймовірністю.

Ідея нерівномірного квантування в загальному випадку формулюється наступним чином: діапазон можливих значень сигналів ділиться на N зон квантування $a_0 \dots a_1, a_1 \dots a_2, \dots, a_{N-1} \dots a_N$. Зонам квантування відповідають квантова ні значення $b_k \in [a_{k-1}, a_k]$. Якщо вхідний сигнал потрапляє в діапазон $[a_{k-1}, a_k]$, його квантоване значення приймається рівним b_k .

Отже, нехай сигнал має щільність ймовірності $p(x)$ і необхідно виконати його N -рівневе квантування так, щоб зробити нульовим середнє значення і мінімізувати дисперсію шуму квантування. Середнє значення похибки квантування e буде дорівнювати:

$$\bar{e} = \bar{x} - \sum_{k=1}^{a_k} b_k P_k, \quad (1.114)$$

де \bar{x} - математичне сподівання сигналу x , P_k - вірогідність потрапляння сигналу в k -у зону квантування.

Середній квадрат помилки розраховується як

$$\bar{e}^2 = \bar{x}^2 - 2 \sum_{k=1}^N b_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} x p(x) dx + \sum_{k=1}^N b_k^2 \int_{a_{k-1}}^{a_k} p(x) dx. \quad (1.115)$$

Прирівнявши до нуля часткові похідні цього виразу по a_k та b_k отримаємо наступне співвідношення для оптимальних параметрів квантування:

$$b_k = \frac{\int_{a_{k-1}}^{a_k} x p(x) dx}{\int_{a_{k-1}}^{a_k} p(x) dx}, \quad a_k = \frac{b_{k-1} + b_k}{2}. \quad (1.116)$$

Дані формули при відомій щільності ймовірності $p(x)$ дають систему нелінійних рівнянь відносно a_k та b_k . Аналітичне рішення цієї системи навіть для нескладних функцій $p(x)$ виявляється досить складним і його в більшості випадків приходить шукати чисельними методами.

Якщо формула для щільності ймовірності сигналу невідома, але є «типовий» набір його відліків, можна провести оптимізацію параметрів квантування за цим тестовим набором.

Нерівномірне квантування застосовується, наприклад, в сучасних цифрових телефонних мережах. Малі значення мовного сигналу більш ймовірні, ніж великі, тому використовується нелінійне перетворення сигналу, коли діапазон значень, при рівномірному квантуванні, що представляється 12 двійковими розрядами (4096 рівнів), квантується на

256 (8 двійкових розрядів) нерівномірно розташованих рівнів. Залежність рівнів квантування від їх номерів є кусково-лінійною апроксимацією експонентного закону. В цифрових каналах зв'язку передаються 8-розрядні номери рівнів квантування, а при ЦАП вони конвертується в 12-розрядні значення відповідних їм рівнів сигналу.

Моделі процесу квантування. Джерелами помилок квантування при ЦОС є:

- аналогово-цифрові перетворення, при яких квантуються вхідні дискретні сигнали;
- множення цифрових сигналів, результатом чого є округлення або урізання;
- квантування коефіцієнтів цифрової системи.

Нелінійна модель процесу квантування показана на рис. 1.46, а, де $d(n)$ – вхідний сигнал (дискретний або k -розрядний цифровий); $p(n)$ – квантований сигнал (b -розрядний цифровий, $b > k$).

Спрощена лінійна модель процесу квантування представлена на рис 1.46, б, де $e(n) = F\{d(n)\} - d(n)$ – адитивний дискретний сигнал, що представляє собою шум квантування.

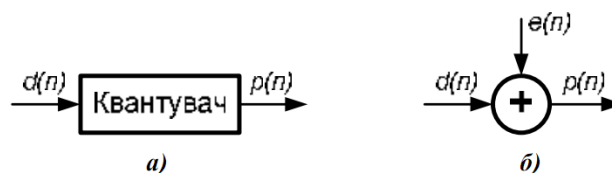


Рис. 1.46. Моделі процесу квантування: нелінійна (а) та лінійна (б)

Гіпотези про властивості квантування.

Для сигналу помилки квантування $e(n)$ вводяться наступні припущення:

1) послідовність $e(n)$ є стаціонарним і ергодичним дискретним випадковим процесом (стаціонарний процес володіє властивістю ергодичності, якщо середнє за часом випадкового процесу співпадає з середнім за множиною реалізацій випадкового процесу);

2) розподіл ймовірності помилок є рівномірним за діапазоном помилок квантування (рис. 14.3).

3) будь-які два відліки послідовності $e(n)$ є некорельованими між собою, тобто послідовність $e(n)$ є випадковим процесом типу «білий шум»;

4) послідовність $e(n)$ некорельована з квантованою послідовністю $d(n)$.

Введення даних припущень дозволяє спростити аналіз ефектів квантування сигналів в цифрових системах.

1.4.3 Шум аналого-цифрового перетворення

На практиці вхідний сигнал цифрової системи формується в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП), який виконує дискретизацію та квантування значущих розрядів вхідного аналогового сигналу. Помилка квантування вхідного сигналу, яка при цьому з'являється, називають шумом АЦП.

Лінійна модель процесу квантування в АЦП. Для приблизного опису нелінійної операції квантування вхідного сигналу при аналізі цифрових систем використовується лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу (див. рисунок 1.47).

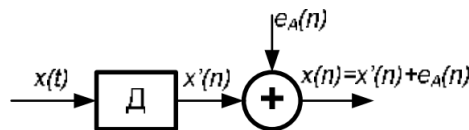


Рис. 1.47. Лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу

Дискретизатор Д перетворює аналоговий сигнал $x(t)$ в послідовність, до якої додається шум АЦП, який враховує помилку квантування $e_A(n)$ при формуванні b_A значущих розрядів цифрової послідовності. Чим більша розрядність АЦП тим менший його шум, а сам пристрій стає складнішим та дорожчим. Вихідний сигнал лінійної моделі – квантований (цифровий) сигнал $x(n)$.

Ймовірнісні оцінки (математичне сподівання m_A та дисперсія σ_A^2) шуму АЦП $e_A(n)$:

$$m_A = E[e_A(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n) p_A(e) de_A(n); \quad (1.117)$$

$$\sigma_A^2 = E[(e_A(n) - m_A)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^2(n) p_A(e) de_A(n) = E[e_A^2(n)] - m_A^2,$$

де $p_A(e)$ - щільність розподілу ймовірності шуму квантування, $E[\cdot]$ - оператор математичного сподівання.

Шум АЦП, приведений до виходу цифрової системи. Розглянемо цифрову систему (цифровий фільтр) з системною функцією $H(z)$ та імпульсною характеристикою $h(n)$. Будемо вважати, що коефіцієнти системи та арифметичні операції, які виконуються в ній, реалізуються точно. Лінійна модель оцінки шуму АЦП, приведеного до виходу цифрового фільтра, показано на рисунку 1.46.

На цьому рисунку $x'(n)$ – відліки вхідного дискретного сигналу, $e_A(n)$ – шум АЦП, $x(n)$ – квантований сигнал, $y'(n)$ – складова вихідного сигналу,

$e_{\text{Авих}}(n)$ – вихідний шум обумовлений квантуванням вхідного сигналу (шум АЦП, приведений до виходу ЦФ).

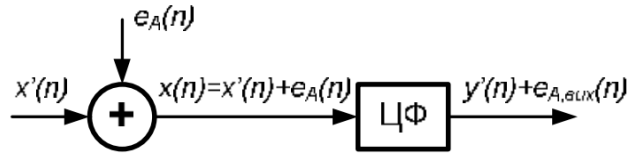


Рис. 1.48. Модель оцінки шуму АЦП, приведенного до виходу ЦФ

Для цифрового фільтру, робота якого описується згорткою

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m), \quad (1.118)$$

шум АЦП на виході описується виразом

$$e_{\text{Авих}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m). \quad (1.119)$$

Враховуючи, що математичне сподівання вхідного шуму квантування $m_A=0$, а його дисперсія $\sigma_A^2 = q_A^2/12$, отримаємо ймовірнісні оцінки (математичне сподівання та дисперсію) вихідного шуму $e_{\text{Авих}}(n)$, обумовленого квантуванням вхідного сигналу:

$$\begin{aligned} m_{\text{Авих}} &= E[e_{\text{Авих}}] = E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[e_A(n-m)] = 0; \\ \sigma_{\text{Авих}}^2 &= E\left[\left(e_{\text{Авих}}(n) - m_{\text{Авих}}\right)^2\right] = \frac{q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m). \end{aligned} \quad (1.120)$$

де q – крок квантування.

Потужність вихідного шуму визначається наступним чином:

$$P_{\text{Авих}} = 10\lg(\sigma_{\text{Авих}}^2) = 10\lg(\sigma_A^2) + 10\lg\left(\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)\right); \quad (1.121)$$

Детермінована оцінка (абсолютна межа) вихідного шуму $e_{\text{Авих}}(n)$ з урахуванням отриманих співвідношень має вигляд:

$$E_{\text{Авих}} = \frac{q_A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|. \quad (1.122)$$

Таким чином, можна зробити висновок, що абсолютна межа помилки квантування вихідного сигналу залежить від імпульсної характеристики системи та не залежить від статичних характеристик вхідного сигналу.

1.4.4 Ефекти квантування в цифрових системах

Для спрощення аналізу ефектів квантування в цифрових системах припускається, що помилки в вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, та помилки, викликані квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одна від одної.

Враховуючи припущення, можна розглядати вказані складові вихідного шуму також незалежно одне від одного. Відокремлений розгляд є корисним також для того, щоб оцінити вклад в повний вихідний шум кожної складової.

Власний шум цифрової системи. Це вихідний шум квантування, зумовлений округленням результатів множення.

Аналіз власних шумів в цифровій системі набагато складніше, ніж аналіз ефектів квантування вхідного сигналу. Річ у тім, що при аналізі власних шумів необхідно знати:

- точки системи, в яких виконуються операції квантування;
- оцінки (математичне сподівання, дисперсію, абсолютну межу) шумових сигналів, які генеруються власними джерелами;
- структуру системи (шлях, який проходить кожний шумовий сигнал від свого джерела шуму до виходу системи);
- архітектуру та параметри цифрового пристрою.

Власний шум та його оцінки знаходяться в три етапи:

1) Складається модель цифрової системи, яка враховує шуми квантування в тих точках системи, в яких виконується операція квантування.

2) Знаходяться реакції системи на кожний шумовий сигнал (складові власного шуму).

3) На основі отриманих складових формується власний шум цифрової системи, знаходяться його ймовірності та детерміновані оцінки.

Лінійна модель цифрової системи. Основними джерелами шуму квантування в цифрових системах є помножувачі.

Дійсно операція множення значень послідовності $x(n)$ з значущими розрядами b_y на коефіцієнт a з тією ж розрядністю дає значення $ax(n)$, яке має точне значення з $2b_y$ значущими розрядами. Проте розрахункове значення повинно бути представлене послідовністю значень з b_y значущими розрядами (округлене або урізане). Таким чином при формуванні результатів з'являються помилки квантування, викликані скороченням кількості розрядів.

Лінійна модель помножувача показана на рисунку 1.49. Модель помножувача з кінцевим числом розрядів представлена у вигляді послідовного з'єднання ідеального помножувача та суматора, на вхід якого подається помилка квантування $e_y(n)$. На виході моделі формується послідовність вантажних значень розрахунку з b_y значущими розрядами.

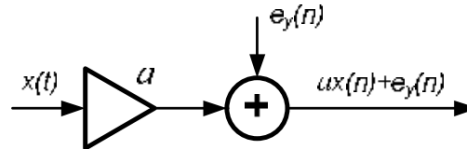


Рис. 1.49. Лінійна модель помножувача

Вважається, що припущення про властивості помилок квантування, викладені у вигляді гіпотез раніше, діють і у випадку шумового сигналу $e_y(n)$. Тоді, при використанні округлення, маємо наступні характеристики шуму квантування на виході помножувача:

- математичне сподівання $m_y=0$;
- дисперсія: $\sigma_y^2 = \frac{q_y^2}{12}$, де крок квантування - $q_y = 2^{-b_y}$.
- абсолютна межа: $E_y = \max_n |e_y(n)| \leq q_y/2 = 2^{-b_y}$.

Знаходження власного шуму. Складові власного шуму – це реакція цифрової системи на шумові сигнали від кожного джерела шуму. На основі властивості лінійної цифрової системи помилка квантування на виході системи (власний шум) знаходиться, як суперпозиція помилок $e_{yi \text{ ван}}(n)$, $i=1,2,\dots,L$, зумовлених всіма L джерелами квантування, тобто:

$$e_{y \text{ вих}}(n) = \sum_{i=1}^L e_{yi \text{ вих}}(n). \quad (1.123)$$

При цьому i -та складова вихідного сигналу помилки (власного шуму) $e_{yi \text{ ван}}(n)$, викликана i -им джерелом шуму, знаходиться за допомогою імпульсної характеристики $h_i(m)$ частини системи від точки прикладення i -го джерела шуму до виходу системи за формулою згортки:

$$e_{yi \text{ вих}}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} h_i(m) e_{yi}(n-m). \quad (1.124)$$

Відповідно до цього виразу, власний шум системи розраховується як сума (суперпозиція) всіх шумових складових, отриманих в результаті аналізу проходження шумів квантування від точок їх появи до виходу цифрової системи.

Ймовірні та детерміновані оцінки власного шуму системи визначаються наступним чином:

- математичне сподівання $m_{y_{\text{вих}}} = \sum_{i=1}^L m_{y_{i\text{вих}}} = 0$;
- дисперсія $\sigma_{y_{\text{вих}}}^2 = \sum_{i=1}^L \sigma_{y_{i\text{вих}}}^2 = \frac{q_y^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} h_i^2(m)$;
- абсолютна межа $E_{y_{\text{вих}}} = \sum_{i=1}^L E_{y_{i\text{вих}}} \leq \frac{q_y}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|$.

Слід відзначити, що чим більше помножувачів містить цифрова система, тим більший її власний шум. Таким чином, власний шум системи залежить від форми реалізації системи. На практиці доцільно використовувати таку форму реалізації, яка б генерувала менший власний шум, тобто містила в собі меншу кількість помножувачів.

Загальний вихідний шум цифрової системи.

Помилки у вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, та помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одна від одної. На основі цього припущення повний вихідний шум системи, зумовлений квантуванням вхідного сигналу та квантуванням результатів арифметичних операцій помножувача, знаходиться як сума відповідних помилок:

$$e_{\text{вих}}(n) = e_{\text{Авих}}(n) + e_{\text{Увих}}(n), \quad (1.125)$$

$e_{\text{Авих}}(n)$ - шум квантування вхідного сигналу (шум АЦП), приведений до виходу АЦП; $e_{\text{Увих}}(n)$ - власний шум системи.

Шумові сигнали, зумовлені квантуванням в певній точці системи, являються стаціонарними випадковими процесами типу «білий шум», вони некорельовані з вантажем ним сигналом, а будь-які два джерела шуму утворюють некорельовані шуми. Тоді з урахуванням лінійності моделі системи отримаємо оцінки повного вихідного шуму системи:

- математичне сподівання буде визначатись як сума математичного сподівання шуму АЦП та математичного сподівання власного шуму системи:

$$m_{\text{вих}} = m_{\text{Авих}} + m_{\text{Увих}}; \quad (1.126)$$

- дисперсія – як сума дисперсії шуму АЦП та дисперсії власного шуму системи:

$$\sigma_{\text{вих}}^2 = \sigma_{\text{Авих}}^2 + \sigma_{\text{Увих}}^2; \quad (1.127)$$

- абсолютна межа

$$E_{\text{вих}} = \max_n |\varepsilon_{\text{вих}}(n)| = E_{\text{Авих}} + E_{\text{Увих}}. \quad (1.128)$$

Ефекти переповнення в суматорах. Вище були розглянуті ефекти квантування цифрових сигналів в цифрових системах та отримані оцінки дисперсії (потужності) повного вихідного шуму та її складових: $\sigma_{\text{Авих}}^2$ - дисперсії шуму АЦП та $\sigma_{Y\text{вих}}^2$ - дисперсії власного шуму системи. Таким чином, корисний сигнал на виході системи присутній на фоні шумів. Розглянемо шумові характеристики системи, а також методи масштабування сигналів, які дозволяють покращити вказані характеристики та завадити появі ефектів переповнення в суматорах системи.

Динамічний діапазон цифрової системи. Важливою характеристикою цифрової системи виступає відношення сигнал/шум. Відношенням сигнал/шум R - називається відношення потужності $P_{\text{с.вих.}}$ - вихідного сигналу системи до потужності $P_{\text{ш.вих.}}$ - шуму квантування на виході системи

$$R = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{с.вих.}}}{P_{\text{ш.вих.}}} \right). \quad (1.129)$$

Пороговим відношенням сигнал/шум R_n називається відношення мінімальної потужності вихідного сигналу системи до потужності шуму на виході системи:

$$R_n = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{с.мін.вих.}}}{P_{\text{ш.вих.}}} \right). \quad (1.130)$$

Мінімальна потужність вихідного сигналу має місце при мінімальному рівні $a_{\text{мін}}$ вхідного сигналу.

Динамічним діапазоном D цифрової системи називається відношення максимальної амплітуди $a_{D.\text{max}}$ до мінімальної амплітуди $a_{D.\text{мін.}}$ вхідного сигналу, при якій забезпечується певне відношення R_D сигнал/шум на виході системи:

$$D = 20 \lg \left(\frac{a_{D.\text{max}}}{a_{D.\text{мін.}}} \right); \quad (1.131)$$

при

$$R_D = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{сD.мін.вих.}}}{P_{\text{ш.вих.}}} \right), \quad (1.132)$$

де $P_{\text{сD.мін.вих.}}$ - потужність вихідного сигналу на нижній межі динамічного діапазону (при амплітуді вхідного сигналу, рівній $a_{D.\text{мін.}}$).

Динамічний діапазон слід контролювати введенням коефіцієнтів масштабування.

Коефіцієнти масштабування. При сумуванні чисел з фіксованою точкою помилки квантування не виникає, якщо регістр має розрядність не

меншу ніж розрядність доданків. Але при сумуванні чисел можливе переповнення, яке означає, що результат арифметичних операцій виходить за межі допустимого діапазону представлення чисел. В цьому випадку результат сумування істотно змінюється. Щоб не допустити цього переповнення в суматорах вводиться масштабування сигналів з використанням коефіцієнтів масштабування.

Масштабування сигналів можна виконувати різними способами:

1. *Масштабування сигналів з використанням імпульсної характеристики.*

Якщо імпульсна характеристика системи рівна $h_i(n)$, то вихідний сигнал системи можна знайти за формулою

$$y_i(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_i(m)x(n-m). \quad (1.133)$$

2. *Масштабування сигналів за максимумом.*

Даний спосіб використовується для систем невисокого порядку. Максимальне значення амплітудно-частотної характеристики системи повинне задовольняти вимозі:

$$\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})| > 1. \quad (1.134)$$

Масштабуванню піддається вхідний сигнал системи. При цьому коефіцієнт масштабування розраховується за формулою:

$$\gamma_i = \frac{1}{\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|}. \quad (1.135)$$

на лінійність самої системи, лише змінює її частотні та часові хар

Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи. При реалізації цифрової системи значення її коефіцієнтів квантуються, оскільки вони представляють обмежену кількість розрядів. Зміна коефіцієнтів призводить до більшої чи меншої зміни значень нулів чи полюсів системної функції та до зміни частотних характеристик системи.

Важливо підкреслити, що операція квантування коефіцієнтів, нелінійна по своїй природі, не впливає на характеристики. Іншими словами, виконав операцію квантування коефіцієнтів, переходимо від лінійної системи до іншої з характеристиками, які відрізняються від характеристик вихідної системи. Таким чином, квантування призводить до появи помилок АЧХ:

$$\nabla A(\omega) = A(\omega) - \bar{A}(\omega), \quad (1.136)$$

де $A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ - АЧХ системи з неквантованими коефіцієнтами;
 $\bar{A}(\omega)$ - АЧХ системи з квантованими коефіцієнтами.

Слід відзначити, що при синтезі необхідно знаходити коефіцієнти системної функції таким чином, щоб не тільки ідеальні частотні та часові характеристики вихідної системи, а й її характеристики з квантованими коефіцієнтами задовольняли заданим вимогам. Для оцінки впливу операцій квантування коефіцієнтів на параметри системи використовуються функції чутливості. Функція чутливості виступає в ролі коефіцієнта пропорційності в співвідношенні, зв'язуючи відносні зміни величини k -го коефіцієнта з відносною зміною певного параметра системи.

Граничні цикли роботи цифрової системи. При аналізі ефектів квантування, були зроблені певні припущення відносно властивостей моделей помилок квантування, які вносяться в сигнали. По-перше, було прийнято, що відліки шуму квантування не корельовано між собою, а також некорельовані з відліками вхідного сигналу. По-друге, при опрацюванні сигналу в цифровій системі не відбувається переповнення регістрів. Проте ці інші припущення можуть бути порушеними. В рекурсивних цифрових системах це призводить до появи специфічних ефектів, які отримали назву граничних циклів. Розрізняють 2 види граничних циклів:

- граничні цикли низького рівня, пов'язані з квантуванням відліків сигналу, що обробляється;
- граничні цикли високого рівня, пов'язані з переповненням регістрів суматорів;

Граничними циклами низького рівня називаються постійні або періодичні сигнали, які можуть виникати в рекурсивних системах при відсутності дії та нульових початкових умовах в системі. Поява цих сигналів зумовлена помилками округлення при квантуванні сигналів на виходах помножувачів.

Граничні циклами високого рівня можуть виникати в рекурсивних системах, якщо при складанні відліків сигналів в регістрі відбувається переповнення. В цьому випадку система набуває суттєвої нелінійності, у вихідному сигналі з'являються значні помилки, тобто система фактично є недієздатною. В більшості випадків при переповненні регістрів вихідний сигнал системи приймає вид періодичного коливання з граничними значеннями амплітуди, рівному одиниці. Часто граничні цикли високого рівня називають «коливанням переповнення». В зв'язку з цим необхідно приймати спеціальні заходи для усунення переповнення регістрів суматорів, пов'язані з масштабування сигналів.

Р О З Д І Л 2

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

2.1. Комп'ютерний практикум №1

Тема: Основи аналізу сигналів. Дослідження властивостей різних типів сигналів та їх спектрів.

Мета роботи:

1. Провести дослідження та порівняльний аналіз властивостей аналогових, дискретних та цифрових форм представлення сигналів.
2. Дослідити процес дискретизації та квантування сигналів, а також процес відновлення сигналів.
3. Дослідити зв'язок між часовим та спектральним представленнями різних форм сигналів.

2.1.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума

Вихідний фізичний сигнал $s(t)$ є безперервною функцією часу. Такі сигнали, що визначені в усі моменти часу, називаються аналоговими (*analog*).

Послідовність чисел, що представляє сигнал при цифровій обробці, є дискретним рядом (*discrete series*) і не може цілком відповідати аналоговому сигналові. Числа, що складають послідовність, є значеннями сигналу в окремі (дискретні) моменти часу і називаються відліками сигналу (*samples*). Як правило, відліки беруться через рівні проміжки часу T , названі періодом дискретизації (або інтервалом, кроком дискретизації – *sample time*).

Величина, зворотна періодові дискретизації, називається частотою дискретизації (*sampling frequency*): $f_d = 1/T$, ($1/c = \text{Гц}$). Це, так звана, циклічна частота, яка задає число коливань (повних обертів) у одиницю часу – секунду.

Відповідна їй кругова частота визначається як $\omega_d = 2\pi f$, вона вимірюється в радіанах на секунду (рад/с) і задає величину кута у одиницю часу.

В загальному випадку представлення сигналу набором дискретних відліків призводить до втрати інформації, тому що не відомо як саме поводить себе сигнал в проміжках між відліками. Проте при забезпеченні виконання умов теореми Котельникова такої втрати інформації не відбудеться й аналогові сигнали можуть бути точно відновлені за значеннями своїх дискретних відліків.

Процес перетворення аналогового сигналу в послідовність відліків називається дискретизацією (*sampling*), а результат перетворення – дискретним сигналом.

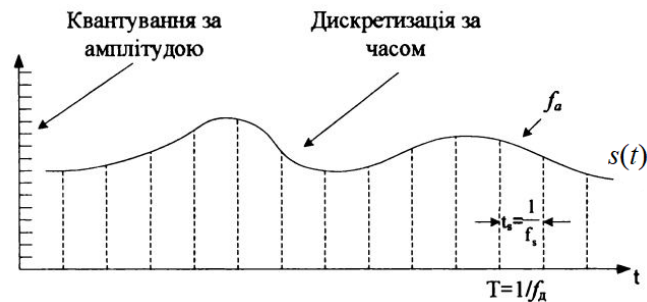


Рис. 2.1. Дискретизація та квантування неперервного сигналу $s(t)$

При обробці сигналу в обчислювальних пристроях його відліки представляються у вигляді двійкових чисел, що мають обмежене число розрядів. В наслідок цього, відліки можуть приймати лише кінцеву множину значень і, отже, при представленні сигналу неминуче відбувається його округлення. Процес перетворення відліків сигналу в числа називається квантуванням за рівнем (*quantization*), а виникаючі при цьому помилки округлення - помилками (або шумами) квантування (*quantization error, quantization noise*).

Сигнал, дискретний у часі, але не квантований за рівнем, називається дискретним (*discrete-time*) сигналом. Сигнал, дискретний у часі і квантований за рівнем, називають цифровим (*digital*) сигналом. Сигнали, квантованні за рівнем, але безперервні в часі, на практиці зустрічаються рідко. Різницю між аналоговими, дискретними і цифровими сигналами ілюструє рис.1.2.

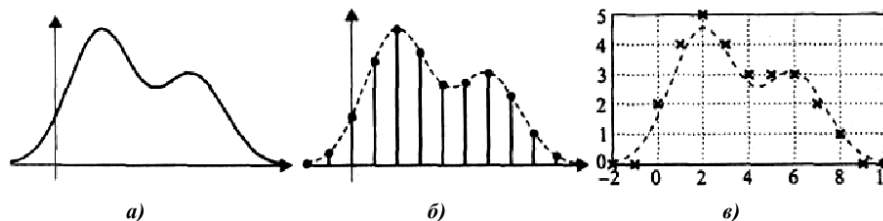


Рис. 2.2. Аналоговий (а), дискретний (б) і цифровий сигнали

Операції дискретизації та квантування виконує аналого-цифровий перетворювач (АЦП, *Analog-to-Digital Converter, ADC*), операції перетворення цифрового сигналу в аналоговий – цифро аналоговий перетворювач (ЦАП *Digital-to-Analog Converter, DAC*). За аналогією з функціями існують різні способи задавання послідовностей (цифрового сигналу): аналітичний, графічний, табличний та комбінація цих способів.

АЦП здійснюється в два етапи: дискретизація за часом та квантування за рівнем (рис.1). Узагалі ці два процеси - дискретизація і квантування - є незалежними одна від одної, але вони, як правило, виконуються усередині

однієї мікросхеми. Вихідним сигналом АЦП є послідовність чисел, що надходить у цифровий процесор ЦП, що виконує необхідну обробку. Процесор здійснює різні математичні операції над вхідними відліками; раніше отримані відліки і проміжні результати можуть зберігатися в пам'яті процесора для використання в наступних обчисленнях. Результатом роботи процесора є нова послідовність чисел, що представляють собою відліки вихідного сигналу.

Аналоговий вихідний сигнал $s_{\text{вих}}(t)$ відновлюється за цією послідовністю чисел за допомогою ЦАП. Напряга на виході ЦАП має східчасту форму (рис.1.3), при необхідності вона може бути перетворена в плавно змінний вихідний сигнал за допомогою фільтра Φ , який виконує функцію згладжування.

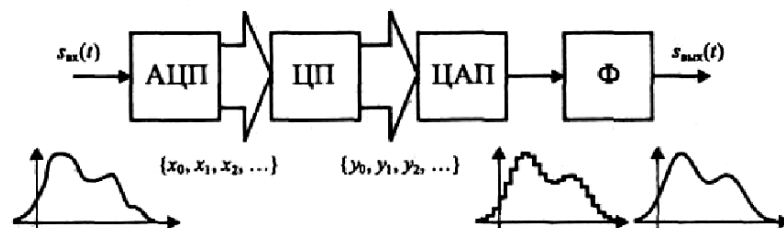


Рис.2.3. Структурна схема системи цифрової обробки аналогових сигналів

Частота Найквіста.

Відповідно до теореми Котельнікова, гармонічний сигнал може бути адекватно представлений дискретними відліками, якщо його частота не перевищує половини частоти дискретизації (ця частота називається частотою Найквіста (*Nyquist frequency*)):

$$f_N = \frac{f_d}{2} = \frac{1}{2T}. \quad (2.1)$$

Реалізація цього обмеження демонструє рис.1.4.

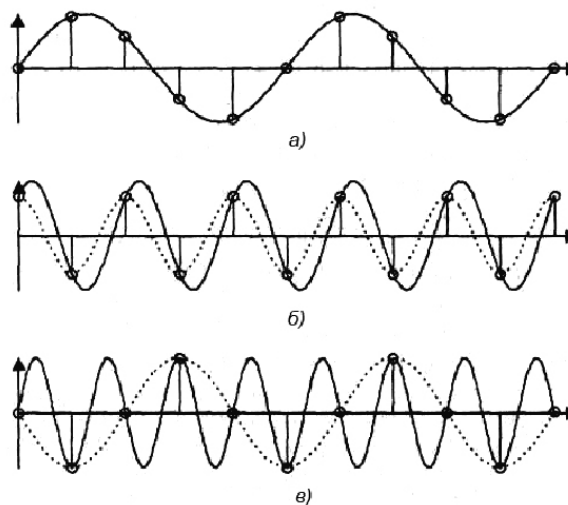


Рис. 2.4. Дискретизація гармонічних сигналів з різною частотою

Залежно від співвідношення між частотою гармонічного сигналу, що дискретизується, і частотою Найквіста можливі три випадки.

1. Якщо частота гармонічного сигналу менша частоти Найквіста, дискретні відліки дозволяють правильно відновити аналоговий сигнал (рисунок 1.4, а).

2. Якщо частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дозволяють відновити аналоговий гармонічний сигнал з тією же частотою, але амплітуда і фаза відновленого сигналу (він показаний пунктирною лінією) можуть бути спотворені (рисунок 1.4, б). У найгіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть виявитися рівними нулю.

3. Якщо частота гармонічного сигналу більша частоти Найквіста, то відновлений по дискретним відлікам аналоговий сигнал (як і в попередньому випадку, він показаний пунктирною лінією) буде також гармонічним, але з іншою частотою (рисунок 1.4, в). Цей ефект зветься появою помилкових частот – елайзинг (aliasing).

Отже, якщо сигнал не обмежений за спектром (верхня частота F прямує до нескінченості), то мінімально допустима величина інтервалу дискретизації прагнучиме до нуля. Звідси можна зробити висновок – без втрати інформації дискретними відліками можуть бути представлені лише обмежені за спектром аналогові сигнали. Саме тому в системах обробки сигналів перед виконанням дискретизації сигналу його спектр обмежують до частоти $F = f_b$ застосуванням фільтра низьких частот, який називається антиелейзинговим фільтром.

Відновлення аналогових сигналів за дискретними відліками.

При виконанні умов, обумовлених теоремою відліків (теоремою Котельникова), операції дискретизації і відновлення взаємно обернені.

Відповідно до цієї теореми, якщо аналоговий сигнал $s_a(t)$ має фінітний (обмежений частотою Найквіста $\omega_0 = 2\pi f_N$) спектр, тобто такий, що $X_a(j\omega) = 0$ при $\omega > \omega_0$ (див. рисунок 1.5,а), то такий сигнал можна однозначно представити послідовністю вибірок $x(n)$, взятих з періодом дискретизації $T = 2\pi\omega_d$, де $\omega_d = 2\pi f_d \geq 2\omega_0$ на основі ряду Котельникова.

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \frac{\sin[\omega_0(t - nT)]}{\omega_0(t - nT)}. \quad (2.2)$$

Фактично сигнал $s_a(t)$ можна отримати, якщо пропустити послідовність $x(n)$ через ідеальний аналоговий фільтр нижніх частот з частотою зрізу $\omega_s = \pi/T$ і за АЧХ $|K(j\omega)| = T$ у смузі пропускання.

Спектр послідовності $x(n)$, отриманий в результаті дискретизації з частотою

$\omega_d = (2\pi)/T$ аналогового сигналу $s_a(t)$, і спектр $S_a(j\omega)$ пов'язані співвідношенням

$$S(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a[j(\omega + k\omega_d)]. \quad (2.3)$$

тобто спектр дискретної послідовності $x(n)$ дорівнює з точністю множника $1/T$ сумі спектрів відповідного аналогового сигналу $s_a(t)$, зміщених по осі частот на всі можливі значення частоти, кратні частоті дискретизації ω_d .

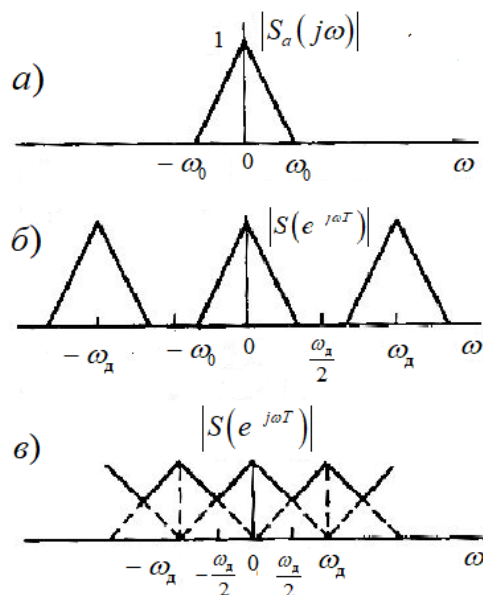


Рис.2.5. Модуль спектрів аналогового (а) і дискретних сигналів при виконанні (б) та не виконанні (в) умови теореми Котельнікова

На рис. 1.5. (б та в) наведене умовне зображення модуля спектра $S(e^{j\omega T})$ дискретного сигналу $x(n)$ відповідно для випадків $\omega_d > 2\omega_0$ та $\omega_d < 2\omega_0$. У першому випадку (при виконанні теореми Котельнікова) спектр дискретного сигналу збігається на інтервалі $|\omega| \leq \omega_0$ зі спектром аналогового сигналу. А в другому випадку (при невиконанні умови теореми) має місце явище накладення спектрів, при якому спектр дискретизованого сигналу не співпадає на інтервалі $|\omega| \leq \omega_0$ із вихідним спектром аналогового сигналу.

2.1.2. Завдання на комп'ютерний практикум.

1. За допомогою мови програмування та засобів візуалізації *Mathcad* у відповідності із варіантом завдання (таб. 1.1) здійснити:

1.1. Побудову аналогового сигналу та його дискретної та квантованої (цифрової) форми при різних значеннях кількості дискретних відліків N (періоду дискретизації) та кількості рівнів квантування L (розрядність цифрового коду).

1.2. Відновлення неперервної форми сигналу за відліками дискретизованого і квантованого сигналів на основі рядів Котельнікова та оцінити величину похибок відновлення.

1.3. Обчислити спектри аналогового і дискретного сигналів та здійснити дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) дискретної та квантованої послідовностей, побудувати графіки амплітудних складових спектрів та ДПФ.

2. Проаналізувати отримані результати:

2.1. Різницю між аналоговою, дискретною та цифровою формами представлення сигналів.

2.2. Залежність якості відновлення неперервного сигналу з послідовностей від частоти (періоду) дискретизації та кількості рівнів квантування.

2.3. Взаємозв'язок між спектрами аналогових і дискретних сигналів та дискретним перетворенням Фур'є.

2.4. Динаміку зміни часового та спектрального представлення дискретного та відновленого неперервного сигналів в залежності від степені виконання умов теореми Котельникова.

3. Зробити висновки.

Таблиця 2.1.

Вихідні дані

Варіант завдання	Сигнал $y_a(t)$	Тривалість сигналу, τ	Кількість відділів N	Кількість відділів L
1	$\begin{cases} 1 - \frac{\tau}{2} \left t - \frac{\tau}{2} \right , & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	1	5; 12	7; 13
2	$\begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \left[\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	2	4; 11	6; 14
3	$\begin{cases} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\}^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	3	4; 13	7; 12
4	$\begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \left[\frac{2\pi}{\tau} t \right] + 0.08 \cos \left[\frac{4\pi}{\tau} t \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	4	4; 10	6; 15
5	$\begin{cases} \exp \left[-\frac{5}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	5	5; 13	5; 13

6	$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-0.25\cos\frac{2\pi}{\tau}t\right), & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	6	5; 10	6; 10
7	$\begin{cases} 0.54\cos\left[\frac{2\pi}{\tau}t\right]+0.46\cos\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	7	4; 10	6; 15
8	$\begin{cases} \left\{\cos\left[\frac{\pi}{\tau}t\right]\right\}^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	8	5; 10	5; 15
9	$\begin{cases} 0.8-0.05\cos\left[\frac{\pi}{\tau}t\right]+0.08\cos\left[\frac{2\pi}{\tau}t\right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	9	6; 12	8; 15
10	$\begin{cases} 0.46\cos\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	5	6; 10	10; 15
11	$\begin{cases} \exp\left[-\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	6	6; 12	8; 16
12	$\begin{cases} \cos\left[\frac{2\pi}{\tau}t\right]+\cos\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	5	5; 10	5; 15
13	$\begin{cases} 0.5\exp\left[-\frac{5}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]^2, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	4	4; 12	6; 10
14	$\begin{cases} 0.5-0.5\cos\left[\frac{2\pi}{\tau}t\right]+0.8\cos\left[\frac{4\pi}{\tau}t\right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	8	8; 12	8; 14
15	$\begin{cases} \left(1-0.25\cos\frac{2\pi}{\tau}t\right), & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{при іншому } t. \end{cases}$	10	5; 12	5; 10

2.1.3. Методика виконання.

Аналітичний запис аналогового сигналу, що досліджується.

$$y_a(t) := \begin{cases} 0.5 \cdot \left(1 + \cos \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau} \right) \right) & \text{if } (t \geq 0) \cdot (t \leq \tau) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Параметри сигналу:

$\tau = 3$ - тривалість сигналу

Дискретизація і квантування сигналу.

$N = 9$ - кількість дискретних відліків

$L = 8$ - кількість рівнів квантування

$T_d := \frac{\tau}{N - 1}$ - період дискретизації

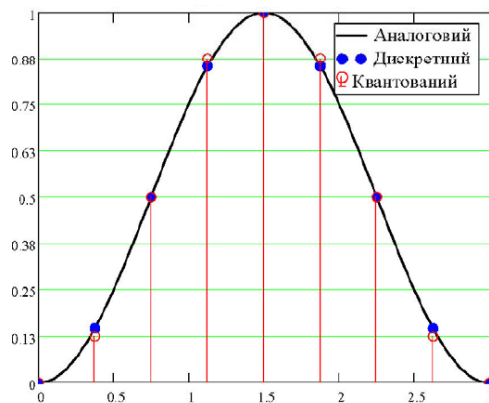
$\omega_d := \frac{2 \cdot \pi}{T}$ - кругова частота дискретизації

$n := 0 .. N - 1$

$y_{d_n} := y_a(n \cdot T)$ - формування вектору відліків дискретного сигналу

$y_{k_n} := \frac{1}{L} \cdot \text{floor}(L \cdot y_a(n \cdot T) + 0.5)$ - формування вектору відліків квантованого (цифрового) сигналу

Часове представлення сигналу



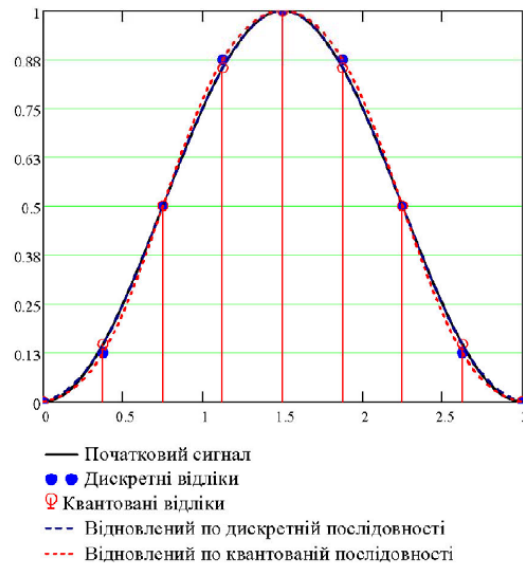
Відновлення неперервного сигналу за відліками (теорема Котельнікова)

$\text{sinc}(t) := \text{if} \left(t = 0, 1, \frac{\sin(t)}{t} \right)$ - функція виду $\sin(x)/x$

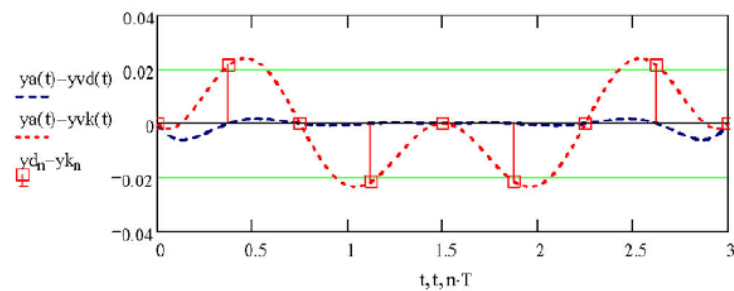
$y_{vd}(t) := \sum_n \left[y_{d_n} \cdot \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \cdot (t - n \cdot T) \right] \right]$ - відновлення по дискретним відлікам

$y_{vk}(t) := \sum_n \left[y_{k_n} \cdot \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \cdot (t - n \cdot T) \right] \right]$ - відновлення по квантованим відлікам

Початковий та відновлений сигнал



Похібка відновлення



Спектральне представлення аналогових і дискретних сигналів.
 Дискретне перетворення Фур'є дискретного і квантового сигналів.

$$Ya(w) := \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\tau} ya(t) \cdot e^{-i \cdot w \cdot t} dt \right) \quad \text{- обчислення спектру аналогового сигналу (пряме інтегральне перетворення Фур'є)}$$

$$Yd(w) := \frac{1}{N-1} \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(yd_n \cdot e^{-i \cdot w \cdot n \cdot T} \right) \right] \quad \text{- обчислення спектру дискретного сигналу (пряме перетворення Фур'є дискретної функції)}$$

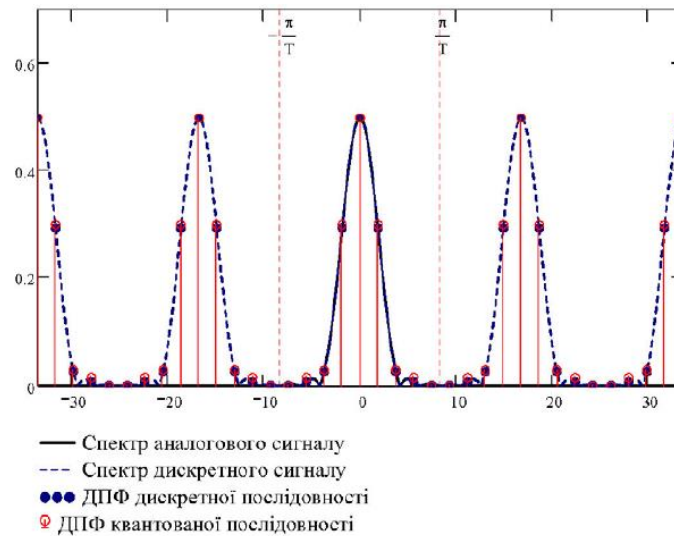
$$k := -3 \cdot (N-1) .. 3 \cdot (N-1)$$

$$Ydd(k) := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(yd_n \cdot e^{-i \cdot k \cdot n \cdot \frac{Wd}{N} \cdot T} \right) \quad \text{- обчислення прямого дискретного перетворення Фур'є (ДПФ)}$$

$$Ykd(k) := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(yk_n \cdot e^{-i \cdot k \cdot n \cdot \frac{Wd}{N} \cdot T} \right) \quad \text{- обчислення прямого дискретного перетворення Фур'є (ДПФ)}$$

$$w := -2 \cdot Wd, -2 \cdot Wd + \frac{Wd}{100} .. 2 \cdot Wd$$

Спектральне представлення сигналів (амплітудні складові)



Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Вихідні дані для виконання роботи відповідно до варіанту.
3. Графічні результати виконання роботи (часове представлення різних форм сигналів, відновлення сигналів та їх похибки, амплітудні спектри сигналів та ДПФ), отримані при різних вихідних даних.
4. Висновки

Запитання до комп'ютерного практикуму.

1. Основні форми представлення сигналів та їх характеристики.
2. Які перетворення мають місце в системах обробки сигналів?
3. Дискретизація у часі.
4. Із яких умов обирається частота (період) дискретизації аналогових сигналів?
5. Квантування за рівнем.
6. Залежність величини похибки квантування від кількості рівнів квантування.
7. Відновлення сигналів за дискретною послідовністю.
8. Зв'язок між спектрами аналогових і дискретних сигналів.
9. Основні властивості спектрів дискретних сигналів
10. Різниця між перетворенням Фур'є дискретних сигналів та дискретним перетворенням Фур'є.

2.2. Комп'ютерний практикум №2

Тема: Аналогові системи. Розрахунок аналогових фільтрів прототипів.

Мета роботи:

1. Дослідити методи апроксимації прямокутних АЧХ фільтрів.
2. Набути практичні навички розрахунку та аналізу аналогових фільтрів прототипів.

2.2.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума.

Мета фільтрації полягає в усуненні завад, що містяться у сигналі, або у виділенні окремих складових сигналу, які відповідають тим чи іншим властивостям досліджуваного процесу. У принципі, для найбільш простого варіанту фільтрації сигналу достатньо провести пряме перетворення Фур'є сигналу, виконати необхідні дії зі спектральним представленням, наприклад помножити сигнал на певну функцію, що характеризує фільтр і виконати зворотне перетворення Фур'є. Проте така послідовність дій є досить затратною за програмними та апаратними ресурсами, тому найчастіше використовують спеціальні алгоритми та пристрої (аналогові та цифрові фільтри). За допомогою останніх у сигналі виділяють/послаблюють певні частоти з метою покращити відношення сигнал/шум.

За видом АЧХ фільтри ділять на чотири основні типи:

1) фільтр нижніх частот (ФНЧ, *low-pass filter*) – пропускає частоти, менші деякої частоти зрізу ω_0 . Такий фільтр має порівняно великий коефіцієнт передачі на частотах, які знаходяться в околі нульової частоти, і порівняно низький – на інших частотах. Тому такі фільтри зберігають незмінною величину спектральних складових вхідного сигналу на нижніх частотах; говорять, що ФНЧ пропускають низькочастотні сигнали та не пропускають високочастотні;

2) фільтр верхніх частот (ФВЧ, *high-pass filter*) – пропускає частоти, більші деякої частоти зрізу ω_0 . Такий фільтр має високий коефіцієнт передачі на частотах, які більше за ω_0 , і низький – на частотах від нуля до ω_0 . Отже вони пропускають без змін частину спектру вхідного сигналу, яка знаходиться на частотах від ω_0 до $+\infty$ і не пропускають складові спектру сигналу від 0 до ω_0 ;

3) смуговий фільтр (СФ, *band-pass filter*) – має великий коефіцієнт передачі лише в певній смузі частот між частотами ω_1 та ω_2 . Поза цим проміжком коефіцієнт передачі малий. Отже, на вихід такого фільтра пройдуть лише ті спектральні складові сигналу, які знаходяться в смузі пропускання фільтра, і не пройдуть ті, які лежать від 0 до ω_1 та від ω_2 до $+\infty$;

4) загороджувальний фільтр (ЗФ, режекторний фільтр, *band-stop filter*) – пропускає на вихід всі частоти, крім тих, що лежать в деякому діапазоні $\omega_1 \dots \omega_2$. Вона має великий коефіцієнт передачі поза проміжком частот від ω_1 до ω_2 . Якщо смуга затримки такого фільтра порівняно вузька, такий загороджувальний фільтр називають іноді фільтром-пробкою (*notch-filter*).

Проміжок частот, для яких коефіцієнт передачі фільтра є великим, називається смугою пропускання (СП, *passband*). Якщо спектральні складові вхідного сигналу фільтра потрапляють в смугу пропускання, то вони не зазнають ослаблення, проходять на вихід фільтра без змін та залишаються в спектрі вихідного сигналу.

Проміжок частот, для яких коефіцієнт передачі фільтра малий (для ідеального фільтра він дорівнює нулю), називається смугою затримки (СЗ, *stopband*). Якщо частина спектру сигналу потрапляє в смугу затримки, то ці складові зазнають значного ослаблення, і у вихідному сигналі фільтра вони присутні не будуть. В цьому випадку говорять, що ця частина спектру сигналу затримана фільтром.

В реальних фільтрах неможливо забезпечити різкий перехід між смугою пропускання та смугою затримки. Між цими двома смугами буде знаходитися частотний проміжок, на якому коефіцієнт передачі змінюється – *перехідна смуга* (ПС, *transition band*). АЧХ реальних фільтрів подано на рисунку 2.6.

Оскільки ідеальна форма АЧХ не може бути фізично реалізовано, в теорії аналогових фільтрів розроблений ряд методів апроксимації прямокутних АЧХ.

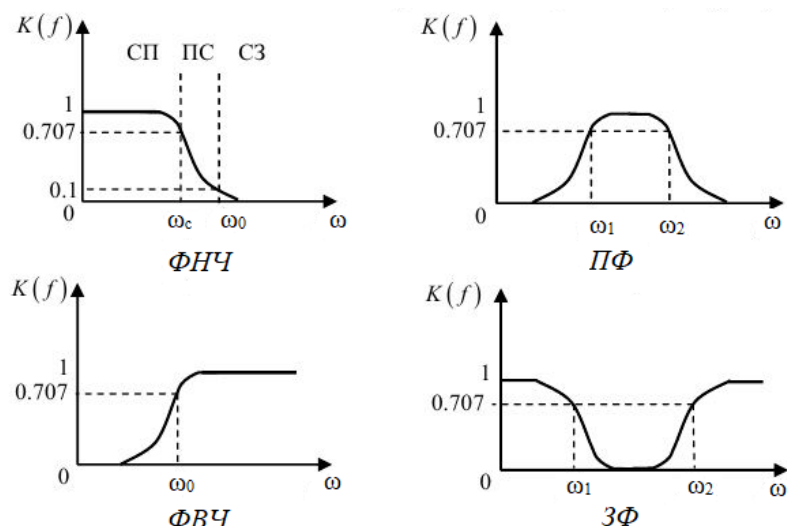


Рис.2.6. АЧХ фільтрів

За функцією апроксимації АЧХ фільтри розрізняються:

- *фільтри Батерворта* – головною перевагою яких є відсутність пульсацій в смузі пропускання, проте вони мають повільний спад АЧХ в

смузі затримки, тому реалізувати високо вибіркові фільтри складно та дорого, оскільки потрібно забезпечити високий порядок фільтру;

- *фільтр Чебишева першого та другого роду* – мають значно крутіший спад АЧХ, проте мають пульсації в смузі пропускання (фільтри 1 роду) або в смузі затримки (фільтри 2 роду).

- *еліптичні фільтри (фільтри Кауера)* – мають найвищу крутість спаду АЧХ, проте є пульсації як в смузі пропускання, так і в смузі затримки з більш низькою ефективністю придушення в ній.

Окрім того розраховавши ФНЧ, можна шляхом нескладних перетворень змінити частоту зрізу, перетворивши його у ФВЧ, ПФ або ЗФ із заданими параметрами. Тому розрахунок аналогового фільтру починається з розрахунку так званого фільтру-прототипу, що представляє собою ФНЧ з частотою зрізу, що дорівнює 1 рад/с. В подальшому застосовуються функції перетворення частоти зрізу і перетворення типу фільтру.

Розрахунок аналогового нормованого ФНЧ Баттерворта.

Розрахунок передаточної характеристики $H(s)$ ФНЧ Баттеворта за заданими параметрами квадрату АЧХ $|H(j\omega)|^2$, що наведені на рис. 2.7.

Основні співвідношення, що поєднують параметри апроксимації АЧХ:

$$G_p^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2}, \quad G_s^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_s^2};$$

$$R_p = 10 \lg \left(\frac{1}{G_p^2} \right) = 10 \lg (1 + \varepsilon_p^2) \text{ [дБ]}; \quad R_s = 10 \lg \left(\frac{1}{G_s^2} \right) = 10 \lg (1 + \varepsilon_s^2) \text{ [дБ]}; \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{0.1R_p} - 1}, \quad \varepsilon_s = \sqrt{10^{0.1R_s} - 1}.$$

Вихідними даними для розрахунку нормованого ФНЧ Баттерворта є: частота зрізу $\omega_p=1$ рад/с, перехідна смуга, що задається частотою ω_s , допустиме спотворення в смузі пропускання R_p (дБ) і необхідне придушення в смузі затримки R_s (дБ).

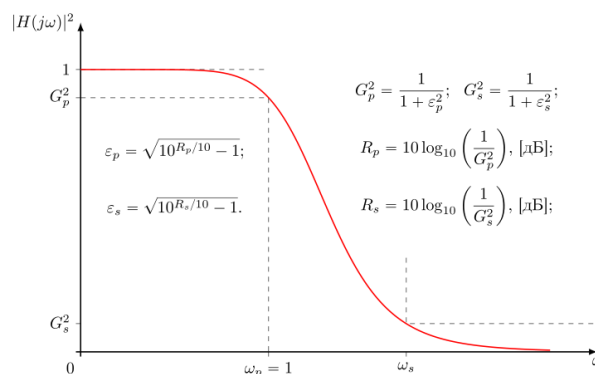


Рис.2.7. Квадрат АЧХ аналогового нормованого ФНЧ Баттерворта

Апроксимація квадрата АЧХ $|H(j\omega)|^2$ ФНЧ Баттерворта представлена у вигляді:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \omega^{2n}}. \quad (2.5)$$

Порядок фільтру Баттерворта розраховується із рівняння:

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}, \quad \ln\left(\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n\right) = \ln\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}\right) \rightarrow n = \frac{\ln(\varepsilon_s / \varepsilon_p)}{\ln(\omega_s / \omega_p)}. \quad (2.6)$$

Вихідними даними для розрахунку нормованого ФНЧ Баттерворта є: частота зрізу $\omega_p=1$ рад/с, перехідна смуга, що задається частотою ω_s , допустиме спотворення в смузі пропускання R_p (дБ) і необхідне придушення в смузі затримки R_s (дБ).

Функція передачі аналогового нормованого ФНЧ Баттерворта.

Для отримання стійкого та фізично реалізуємого фільтру необхідно, щоб всі нулі та полюси були розташовані в лівій на півплощині комплексної площини, або на уявній вісі $j\omega$. Тоді для розрахунку функції передачі $H(s)$ фільтра Баттерворта необхідно із всіх полюсів квадрату її модуля $|H(s)|^2$ вибрати лише ті, що лежать в лівій півплощині. Всі полюси розташовані в лівій на півплощині можуть бути записані як для парного так і непарного порядку n :

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon_p}} \cdot \exp\left(j \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta_k\right), \quad \theta_k = k\theta - \frac{\theta}{2} = \frac{2k-1}{2n} \cdot \pi, \quad n=1\dots n. \quad (2.7)$$

Або у тригонометричному вигляді

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon_p}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_k\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta_k\right) \right) = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon_p}} (-\sin(\theta_k) + j \cos(\theta_k)). \quad (2.8)$$

Таким чином ми задали всі полюси функції передачі $H(s)$ нормованого ФНЧ Баттерворта порядку n , що розташовані в лівій напівплощині комплексної площини s . Тоді передаточна функція даного фільтру знаходиться за наступним виразом:

$$H(s) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - p_k}.$$

Всі полюси передаточної функції фільтру Баттерворта парного порядку (рис. 2.3) представляють собою комплексно-спряжені пари, а у фільтрі непарного порядку – є один дійсний полюс. Тоді можна представити передаточну функцію нормованого ФНЧ Баттерворта за допомогою біквдратної форми для будь-якого цілого $n=2L+r$ (де r може приймати значення 0 або 1):

$$H(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^r \prod_{k=1}^L (s^2 + 2\alpha \sin(\theta_n) s + \alpha^2)} \quad (2.9)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon_p}}, \quad \theta_n = \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad n = 2L + r.$$

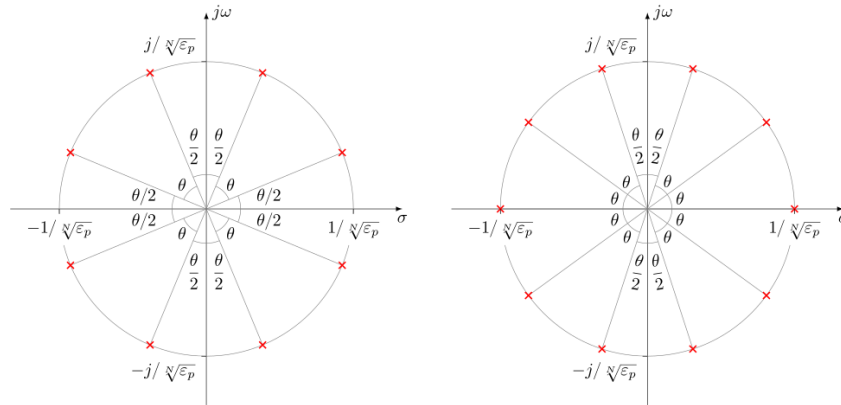


Рис. 2.8. Розташування полюсів $|H(s)|^2$ ФНЧ Баттерворта при $n=4$ (зліва) та $n=5$ (справа)

Коефіцієнт передачі фільтра Баттерворта на нульовій частоті G_0 дорівнює:

$$G_0 = \frac{1}{\alpha^r \prod_{k=1}^L \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^{2L+r}} = \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{(1/\sqrt[n]{\varepsilon_p})^n} = \varepsilon_p. \quad (2.10)$$

Для нормування коефіцієнтів передачі на нульовій частоті $H(0)=1$ необхідно передаточну функцію нормованого ФНЧ Баттерворта 2.6 поділити на 2.7. Тоді

$$H(s) = \frac{1}{\varepsilon_p (s + \alpha)^r \prod_{k=1}^L (s^2 + 2\alpha \sin(\theta_n) s + \alpha^2)} \quad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon_p}}, \quad \theta_n = \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad n = 2L + r.$$

Розрахунок аналогового нормованого ФНЧ Чебишева першого роду.

Основні співвідношення, що пов'язують параметри апроксимації АЧХ такі ж самі як і для ФНЧ Баттерворта (див. формули 2.4). Апроксимація квадрату АЧХ нормованого ФНЧ Чебишева першого роду представлена у вигляді (рис. 2.6):

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \cdot T_n^2(\omega)}, \\ T_n(\omega) &= \cos(n \arccos(\omega)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

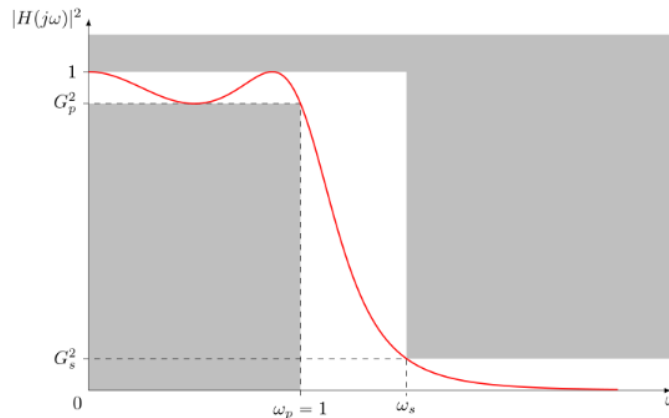


Рис.2.9. Квадрат АЧХ аналогового нормованого ФНЧ Чебишева першого роду

Порядок нормованого ФНЧ Чебишева першого роду розраховується за виразом:

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^n = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \rightarrow n = \frac{\operatorname{arch}(\varepsilon_s / \varepsilon_p)}{\operatorname{arch}(\omega_s / \omega_p)}. \quad (2.13)$$

де $\operatorname{arch}(\bullet)$ – арккосинус гіперболічний.

Передаточна характеристика фільтру Чебишева першого роду.

Для отримання передаточної характеристики $H(s)$ фізично реалізуемого фільтру необхідно, щоб нулі та полюси розташовувались в лівій на півплощині s . Тоді із всіх полюсів квадрату модуля передаточної функції $|H(s)|^2$ ФНЧ Чебишева першого роду необхідно вибрати лише ті, в яких $\sigma_k < 0$, тоді всі полюси p_k нормованого фільтру можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} p_k &= \sigma_k + j\omega_k; \\ \sigma_k &= -\sin(a_k) \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n} \operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\varepsilon_p} \right) \right); \quad \omega_k = \cos(\alpha_k) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{n} \operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\varepsilon_p} \right) \right); \\ a_k &= \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k=1 \dots n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Передаточна характеристика $H(s)$ нормованого ФНЧ Чебишева першого роду буде мати вид:

$$H(s) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - p_k}.$$

Для отримання передаточної характеристики $H(s)$ нормованого ФНЧ першого роду за допомогою біквдратної форми у випадку непарного порядку n при $k=(n+1)/2$ отримаємо $\alpha_k=\pi/2$ некрратний дійсний полюс (рис. 2.5). Інші полюси будуть комплексно-спряженими.

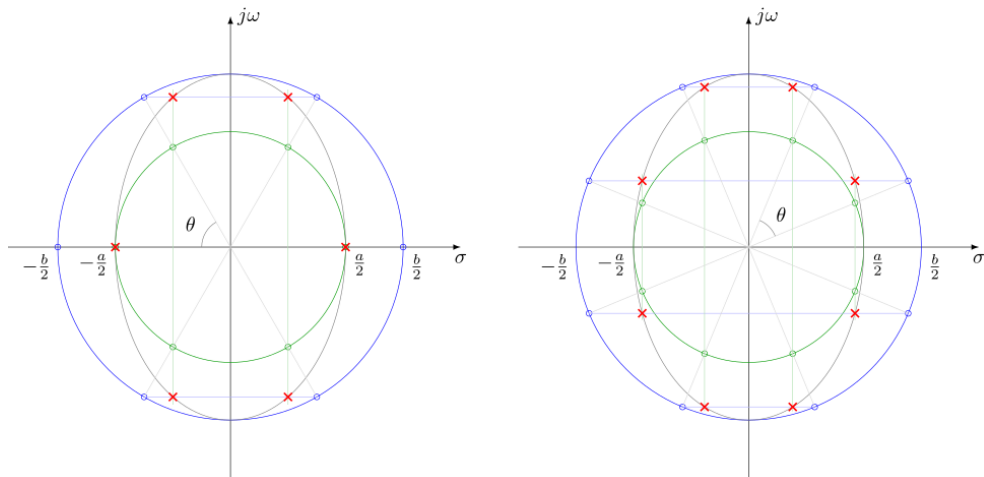


Рис. 2.10. Розташування полюсів $|H(s)|^2$ ФНЧ Чебишева першого роду при $n=3$ (зліва) та $n=4$ (справа)

Коефіцієнт передачі на нульовій частоті фільтру при $s=0$ дорівнює:

$$H(0) = \frac{1}{(-\sigma_0)^r \prod_{k=1}^L (\sigma_k^2 + \omega_k^2)}. \quad (2.15)$$

Окрім того при нормуванні необхідно врахувати, що при непарних значеннях фільтру, поліном Чебишева $T_n(0)=0$ відповідно $|H(j0)|^2=1$ відповідно до 2.9, а при парних значеннях фільтру, поліном Чебишева $T_n(0)=1$ і відповідно $|H(j0)|^2=1/(1+\epsilon_p^2)=G_p^2$.

Таким чином, при парному значенні фільтру n , його коефіцієнт передачі на нульовій частоті повинен бути менше одиниці і дорівнювати $|H(j0)|=G_p$. З урахуванням цього, передаточна функція нормованого ФНЧ Чебишева першого роду для будь-якого $n=2L+r$ (де r може приймати значення 0 або 1) має наступний вид:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{G_p^{1-r} (-\sigma_0)^r \prod_{k=1}^L (\sigma_k^2 + \omega_k^2)}{(s - \sigma_0)^r \prod_{k=1}^L (s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \omega_k^2)}; \\
\sigma_k &= -\sin(\alpha_k) \operatorname{sh}(\beta); \quad \sigma_0 = -\operatorname{sh}(\beta); \\
\omega_k &= \cos(\alpha_k) \operatorname{ch}(\beta); \quad \alpha_k = \frac{2k-1}{2n} \pi; \quad k = 1 \dots L; \\
\beta &= \frac{1}{n} \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

де $\operatorname{sh}(\bullet)$, $\operatorname{ch}(\bullet)$, $\operatorname{arsh}(\bullet)$ – гіперболічні синус, косинус та арксинус відповідно.

Розрахунок аналогового нормованого ФНЧ Чебишева другого роду.

Основні співвідношення, що пов'язують параметри апроксимації АЧХ такі ж самі як і для ФНЧ Баттерворта (див. формули 2.1).

Апроксимація квадрату АЧХ нормованого ФНЧ Чебишева першого роду представлена у вигляді (рис. 2.5):

$$\begin{aligned}
|H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_s^2}{T_n^2(1/\omega)}} = \frac{T_n^2(1/\omega)}{T_n^2(1/\omega) + \varepsilon_s^2}; \\
T_n(\omega) &= \cos(n \arccos(\omega)).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

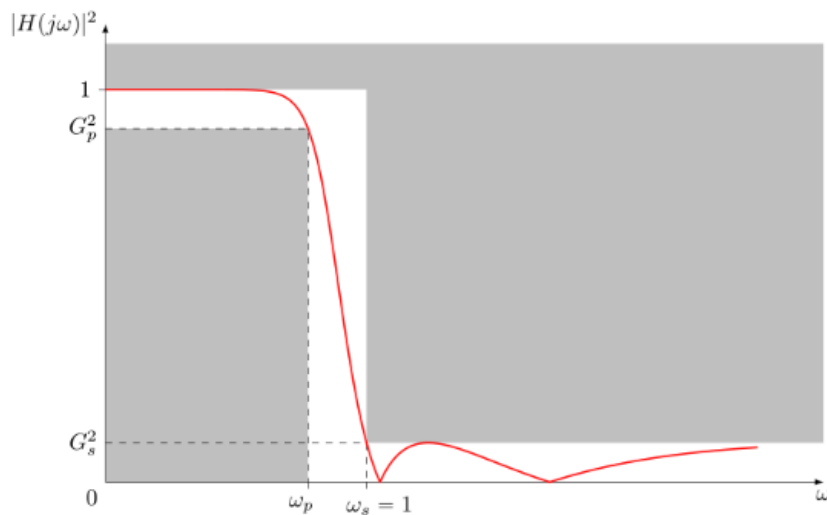


Рис.2.11. Квадрат АЧХ аналогового нормованого ФНЧ Чебишева другого роду

Порядок нормованого ФНЧ Чебишева другого роду розраховується відповідно до формули 2.10.

Передаточна характеристика фільтру Чебишева другого роду.

Для отримання передаточної характеристики $H(s)$ фізично реалізуємого фільтру необхідно, щоб нулі та полюси розташовувались в лівій на півплощині s , або на уявній вісі $j\omega$. При цьому нулі та полюси на уявній вісі повинні бути простими. Тоді із $2n$ нулів z_k квадрату модуля функції передачі ФНЧ Чебишева другого роду необхідно вибрати n довільних нулів кратністю 1, а із полюсів $|H(s)|^2$ необхідно вибрати лише ті, у яких $\sigma_k < 0$, тоді всі полюси нормованого фільтру можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} p_k &= \sigma_k + j\omega_k \quad k = 1 \dots 2n; \\ \sigma_k &= \frac{-\sin(\alpha_k) \operatorname{sh}(\beta)}{\cos^2(\alpha_k) \operatorname{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_k) \operatorname{sh}^2(\beta)}; \\ \omega_k &= \frac{\cos(\alpha_k) \operatorname{ch}(\beta)}{\cos^2(\alpha_k) \operatorname{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_k) \operatorname{sh}^2(\beta)}; \\ a_k &= \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \beta = \frac{1}{n} \operatorname{arsh}(\varepsilon_s). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Передаточна характеристика $H(s)$ може бути записана у вигляді

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^n (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}.$$

Для отримання передаточної характеристики $H(s)$ нормованого ФНЧ другого роду за допомогою біквдратної форми у випадку непарного порядку n при $k=(n+1)/2$ отримаємо $\alpha_k = \pi/2$ некрatний дійсний полюс (рис. 2.7) $\sigma_0 = -1 \operatorname{sh}(\beta)$. При інших значеннях k полюси будуть комплексно-спряжені. Тоді для будь-якого $n=2L+r$, де r може приймати значення 0 та 1 передаточну функцію $H(s)$ нормованого ФНЧ Чебишева другого роду можна представити через біквдратну форму:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\prod_{k=1}^L (s + j / \cos(\alpha_k))(s - j / \cos(\alpha_k))}{G_0 (s - \sigma_0)^r \prod_{k=1}^L (s - \sigma_k + j\omega_k)(s - \sigma_k - j\omega_k)} = \\ &= \frac{\prod_{k=1}^L (s^2 + 1 / \cos^2(\alpha_k))}{G_0 (s - \sigma_0)^r \prod_{k=1}^L (s - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \omega_k^2)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \frac{-\sin(\alpha_k) \operatorname{sh}(\beta)}{\cos^2(\alpha_k) \operatorname{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_k) \operatorname{sh}^2(\beta)}; \\
\omega_k &= \frac{\cos(\alpha_k) \operatorname{ch}(\beta)}{\cos^2(\alpha_k) \operatorname{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_k) \operatorname{sh}^2(\beta)}; \\
\alpha_k &= \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \beta = \frac{1}{n}, \quad k = 1 \dots L; \\
\sigma_0 &= -\frac{1}{\operatorname{sh}(\beta)}.
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

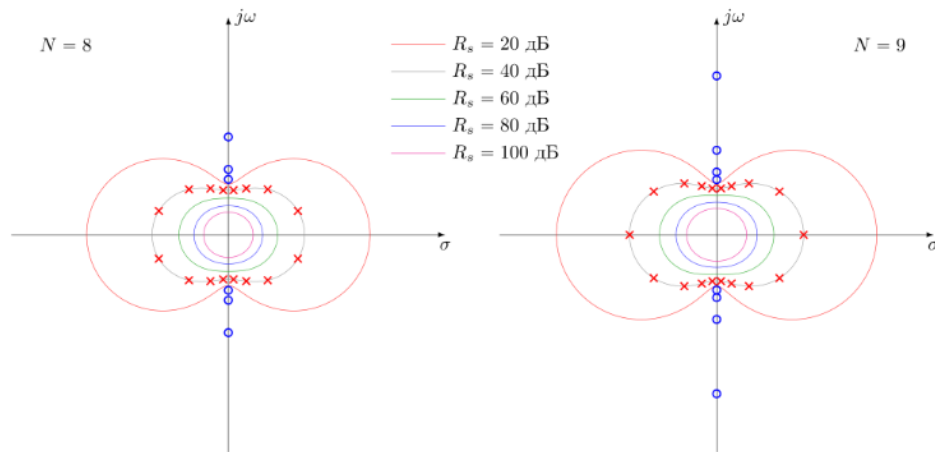


Рис. 2.12. Розташування полюсів $|H(s)|^2$ ФНЧ Чебишева другого роду при $n=8$ (зліва) та $n=9$ (справа)

Нормований коефіцієнт передачі G_0 на нульовій частоті фільтру при $s=0$ дорівнює:

$$G_0 = \frac{\prod_{k=1}^L (1 / \cos^2(\alpha_k))}{(-\sigma_0)^r \prod_{k=1}^L (\sigma_k^2 + \omega_k^2)}.
\tag{2.21}$$

2.2.2. Завдання на комп'ютерний практикум.

1. За допомогою мови програмування та засобів візуалізації Mathcad у відповідності із варіантом завдання (таб. 2.1) здійснити:

1.1. Розрахунок вихідних параметрів для отримання передаточної характеристики нормованого ФНЧ.

1.2. Визначити передаточну характеристику $H(s)$ заданого ФНЧ.

1.3. Побудувати графіки АЧХ, ФЧХ, групової затримки та імпульсну характеристику для розрахованого ФНЧ.

2. Проаналізувати отримані результати.

3. Зробити висновки.

Таблиця 2.2.

Вихідні дані

Варіант завдання	Спосіб апроксимації	R_p , дБ	R_s , дБ	ω_p , рад/с	ω_s , рад/с
1	за Баттервортом	1	30	1	2
2	за Чебишевим першого роду	1,5	30	1	5
3	за Чебишевим другого роду	2	30	0,5	1
4	за Баттервортом	1	35	1	3
5	за Чебишевим першого роду	1,5	35	1	4
6	за Чебишевим другого роду	2	35	0,8	1
7	за Баттервортом	1	40	1	4
8	за Чебишевим першого роду	1,5	40	1	3
9	за Чебишевим другого роду	2	40	0,6	1
10	за Баттервортом	1	45	1	1,5
11	за Чебишевим першого роду	1,5	45	1	1,5
12	за Чебишевим другого роду	2	45	0,7	1
13	за Баттервортом	1	50	1	2,5
14	за Чебишевим першого роду	1,5	50	1	3,5
15	за Чебишевим другого роду	2	50	0,55	1

2.2.3. Методика виконання.

Приклад розрахунку аналогового нормованого ФНЧ Баттерворта

Вихідні данні:

$$R_p = 1\text{дБ}; \quad R_s = 30\text{дБ}; \quad \omega_p = 1\text{рад/с}; \quad \omega_s = 5\text{рад/с}.$$

- 1) Розрахувати всі необхідні параметри виходячи з виразу 2.1:

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} = 0.50885; \quad \varepsilon_s = \sqrt{10^{R_s/10} - 1} = 31.60696$$

- 2) Розрахувати порядок фільтру відповідно до 2.3

$$n = \frac{\ln(\varepsilon_s / \varepsilon_p)}{\ln(\omega_s / \omega_p)} = \frac{1.79317}{0.69897} = 2.56545 \approx 3.$$

- 3) Розрахувати передаточну характеристику відповідно до виразу 2.8. При цьому
- $N=3=2L+r$
- , отже
- $L=1$
- ,
- $r=1$
- .

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon_p}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0.50885}} = 1.252574.$$

Оскільки в нас $L=1$ маємо одне значення θ_n :

$$\theta_1 = \frac{2k-1}{2n} \pi = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 3} \pi = \frac{\pi}{6}, \quad \sin(\theta_1) = 0.5.$$

Передаточну характеристику можна записати:

$$H(s) = \frac{1}{0,50885(s+1.252574)(s^2+1.252574s+1.252574^2)} =$$

$$= \frac{1.96522}{1.96522+3.1379s+2.50515s^2+s^3}.$$

4) Побудувати АЧХ $|H(j\omega)|$, ФЧХ, групову затримку $\tau(\omega)$ та імпульсну характеристики $h(t)$ розрахованого фільтру Баттерворта.

Приклад розрахунку аналогового нормованого ФНЧ Чебишева першого роду

Вихідні данні:

$$R_p = 1.5\text{дБ}; \quad R_s = 35\text{дБ}; \quad \omega_p = 1\text{рад/с}; \quad \omega_s = 2\text{рад/с}.$$

1) Розрахувати всі необхідні параметри виходячи з виразу 2.1:

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{0.15} - 1} = 0.64229; \quad \varepsilon_s = \sqrt{10^{3.5} - 1} = 56.25; \quad G_p = \sqrt{1/(1+0.64229^2)} = 0.84140.$$

2) Розрахувати порядок фільтру відповідно до 2.10

$$n = \frac{\text{arch}(56.225/0.64229)}{\text{arch}(2)} = 3.9221 \approx 4.$$

3) Розрахувати передаточну характеристику відповідно до виразу 2.13.
Порядок фільтру $N=4=2L+r$, отже $L=2$, $r=0$.

$$\beta = \frac{1}{4} \text{arch}\left(\frac{1}{0.64229}\right) = 0.30648.$$

Параметр α_k , де k приймає значення 1 та 2 дорівнюють:

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 4} \pi = \frac{\pi}{8}; \quad \alpha_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 4} \pi = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\sigma_1 = -\sin(\alpha_1) \text{sh}(\beta) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{sh}(0.30648) = -0.11913;$$

$$\sigma_2 = -\sin(\alpha_2) \text{sh}(\beta) = -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \text{sh}(0.30648) = -0.28761;$$

$$\omega_1 = \cos(\alpha_1) \text{ch}(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ch}(0.30648) = 0.96761;$$

$$\omega_2 = \cos(\alpha_2) \text{ch}(\beta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \text{ch}(0.30648) = 0.4008;$$

$$\sigma_1^2 + \omega_1^2 = (-0.11913)^2 + 0.96761^2 = 0.95046;$$

$$\sigma_2^2 + \omega_2^2 = (-0.28761)^2 + 0.4008^2 = 0.24336.$$

Оскільки $r=0$, то розраховувати параметр σ_0 не потрібно.
Передаточну характеристику можна записати:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{G_p (\sigma_1^2 + \omega_1^2) (\sigma_2^2 + \omega_2^2)}{(s^2 - 2\sigma_1 s + \sigma_1^2 + \omega_1^2) (s^2 - 2\sigma_2 s + \sigma_2^2 + \omega_2^2)} = \\
 &= \frac{0.84140 \cdot 0.95046 \cdot 0.24336}{(s^2 - 2 \cdot 0.11913s + 0.95046) (s^2 - 2 \cdot 0.28761s + 0.24336)} = \\
 &= \frac{0.19462}{s^4 + 0.813475s^3 + 1.330871s^2 + 0.604702s + 0.231301}.
 \end{aligned}$$

4) Побудувати АЧХ $|H(j\omega)|$, ФЧХ, групову затримку $\tau(\omega)$ та імпульсну характеристики $h(t)$ розрахованого фільтру Чебишева першого роду.

Приклад розрахунку аналогового нормованого ФНЧ Чебишева другого роду

Вихідні данні:

$$R_p = 2\text{дБ}; \quad R_s = 50\text{дБ}; \quad \omega_p = 0.48\text{рад/с}; \quad \omega_s = 1\text{рад/с}.$$

1) Розрахувати всі необхідні параметри виходячи з виразу 2.1:

$$\varepsilon_p = \sqrt{10^{0.2} - 1} = 0.76478; \quad \varepsilon_s = \sqrt{10^3 - 1} = 316.226.$$

2) Розрахувати порядок фільтру відповідно до 2.10

$$n = \frac{\text{arch}(316.226 / 0.76478)}{\text{arch}(1 / 0.48)} = 4.925 \approx 5.$$

3) Розрахувати передаточну характеристику відповідно до виразу 2.16. Порядок фільтру $N=5=2L+r$, отже $L=2$, $r=1$.

$$\beta = \frac{1}{5} \text{arch}(316.226) = 1.29.$$

Параметр α_k , де k приймає значення 1 та 2 дорівнюють:

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 5} \pi = \frac{\pi}{10}; \quad \alpha_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 5} \pi = \frac{3\pi}{10}.$$

$$\sigma_1 = \frac{-\sin(\alpha_1) \text{sh}(\beta)}{\cos^2(\alpha_1) \text{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_1) \text{sh}^2(\beta)} = -0.139;$$

$$\sigma_2 = \frac{-\sin(\alpha_2) \text{sh}(\beta)}{\cos^2(\alpha_2) \text{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_2) \text{sh}^2(\beta)} = -0.429;$$

$$\omega_1 = \frac{\cos(\alpha_1) \text{ch}(\beta)}{\cos^2(\alpha_1) \text{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_1) \text{sh}^2(\beta)} = 0.4992;$$

$$\omega_2 = \frac{\cos(\alpha_2) \text{ch}(\beta)}{\cos^2(\alpha_2) \text{ch}^2(\beta) + \sin^2(\alpha_2) \text{sh}^2(\beta)} = 0.3631;$$

$$\sigma_1^2 + \omega_1^2 = (-0.139)^2 + 0.4992^2 = 0.269;$$

$$\sigma_2^2 + \omega_2^2 = (-0.429)^2 + 0.3631^2 = 0.316.$$

Оскільки $r=1$, необхідно розраховувати некротний дійсний полюс σ_0 :

$$\sigma_0 = -\frac{1}{\text{sh}(\beta)} = -0.596.$$

Розрахувати нормований коефіцієнт передачі G_0 відповідно до 2.17

$$G_0 = \frac{1.1056 \cdot 2.8944}{0.596 \cdot 0.269 \cdot 0.316} = 63.245.$$

Розрахувати передаточну характеристику фільтра $H(s)$:

$$H(s) = \frac{1}{63.245} \cdot \frac{(s^2 + 1.1056)(s^2 + 2.8944)}{(s + 0.596)(s^2 + 2 \cdot 0.139s + 0.269)(s^2 + 2 \cdot 0.429s + 0.316)} =$$

$$= \frac{0.0506 + 0.0632s^2 + 0.0158s^4}{0.0506 + 0.275s + 0.81s^2 + 1.501s^3 + 1.799s^4 + s^5}.$$

4) Побудувати АЧХ $|H(j\omega)|$, ФЧХ, групову затримку $\tau(\omega)$ та імпульсну характеристики $h(t)$ розрахованого фільтра Чебишева другого роду.

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Вихідні дані для виконання роботи відповідно до варіанту.
3. Графічні результати виконання роботи (АЧХ, ФЧХ, групової затримки та імпульсну характеристику для розрахованого ФНЧ).
4. Висновки

Запитання до комп'ютерного практикуму.

1. Класифікація фільтрів за формою АЧХ та за способом апроксимації.
2. Який фільтр називається фільтром нижніх частот?
3. Що таке частота зрізу для ФНЧ, смуга пропускання, затримки?
4. Ідеальна та реальна АЧХ для ФНЧ.
5. Апроксимація за Баттервордом. АЧХ та ФЧХ.
6. Апроксимація за Чебишевим. АЧХ та ФЧХ.
7. Які обмеження накладаються на реальну АЧХ ФНЧ в смузі пропускання?
8. Які обмеження накладаються на реальну АЧХ ФНЧ в смузі затримки?

2.3. Комп'ютерний практикум №3

Тема: Дискретні системи. Дослідження лінійних дискретних систем (ЛДС).

Мета роботи:

1. Провести дослідження часових та частотних характеристик ЛДС (нерекурсивних та рекурсивних дискретних фільтрів). Дослідити реакцію ЛДС на вхідні сигнали.

2. Набути практичних навичок розрахунку та аналізу дискретних фільтрів.

2.3.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума.

Мета фільтрації полягає в усуненні завад, що містяться у сигналі, або у виділенні окремих складових сигналу, які відповідають тим чи іншим властивостям досліджуваного процесу. У принципі, для найбільш простого варіанту фільтрації сигналу достатньо провести пряме перетворення Фур'є сигналу, виконати необхідні дії із спектральним представленням, наприклад помножити сигнал на певну функцію, що характеризує фільтр і виконати зворотне перетворення Фур'є. Проте така послідовність дій є досить затратною за програмними та апаратними ресурсами, тому частіше використовують спеціальні алгоритми і пристрої - цифрові фільтри (ЦФ). Оскільки в літературі, присвяченій методам і засобам цифрової обробки сигналів, звичайно оперують терміном «цифрова фільтрація», то незважаючи на те, що ефекти, пов'язані з квантуванням за рівнем, практично не розглядаються, замість терміна «дискретний фільтр» будемо використовувати термін «цифровий фільтр».

За допомогою останніх у сигналі виділяють, послаблюються певні частоти з метою покращання відношення сигнал/шум. Крім цього, ЦФ широко використовують як структурні елементи пристроїв та систем обробки сигналів.

Взагалі, ЦФ - це довільна система обробки дискретного сигналу, що володіє властивостями лінійності і стаціонарності. Будь-який фільтр володіє певною частотною характеристикою. Щоб вона була нетривіальною, тобто щоб коефіцієнт передачі фільтра на різних частотах був різним, вихідний сигнал фільтра $y(t_k)$ повинний залежати від декількох відліків вхідного сигналу $x(t_k)$. Таким чином, дискретний фільтр повинний мати пам'ять.

При цифровій фільтрації у лінійних стаціонарних фільтрах можна проводити над даними операції сумування, множенням на константу та

затримкою сигналу на 1 такт. Фізично здійсненні ЦФ, які працюють в реальному масштабі часу, для формування вихідного сигналу в i -й дискретний момент часу можуть використовувати такі дані:

1) значення вхідного сигналу в момент i -го відліку, а також певне число попередніх вхідних відліків $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$;

2) певне число попередніх відліків вихідного сигналу $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$

Максимальне із чисел m та n визначають порядок ЦФ.

У такому випадку на виході будь-якого стаціонарного лінійного фільтра сигнал буде визначатись рівнянням:

$$y(t_k) + a_1 y(t_{k-1}) + \dots + a_n y(t_{k-n}) = b_0 x(t_k) + b_1 x(t_{k-1}) + \dots + b_m x(t_{k-m}) \quad (2.22)$$

або

$$y(t_k) = b_0 x(t_k) + b_1 x(t_{k-1}) + \dots + b_m x(t_{k-m}) - a_1 y(t_{k-1}) - \dots - a_n y(t_{k-n}) \quad (2.23)$$

де a_i та b_j – дійсні коефіцієнти. Таке рівняння називається різницеvim.

Структура різницевого рівняння схожа на структуру диференціального рівняння аналогової лінійної системи, тільки замість операції диференціювання у формулі фігурують затримки дискретних послідовностей. Цим визначається і спільність підходів до опису аналогових і дискретних систем. Однак досить істотним є те, що в дискретній системі не існує яких-небудь принципових обмежень на співвідношення між m і n – кількостями вхідних і вихідних відліків.

В загальному вигляді зв'язок між вхідними $x(m)$ і вихідними $y(n)$ дискретними сигналами для ЦФ можна описати за допомогою наступного рівняння:

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x(t_{k-m+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(t_{k-n+i}), \quad (2.24)$$

де межі сум n та m і величини a_i та b_j є параметрами (коефіцієнтами фільтра).

Сигнали $x(m)$ та $y(n)$ можуть бути як дійсними, так і комплексними. Різницеve рівняння виду (3.3) можна розглядати як алгоритм обчислення $y(n)$, тобто алгоритм роботи ЦФ. Його реалізація у вигляді пристрою приведе до апаратного способу реалізації ЦФ, а програмування обраною мовою – до програмного способу реалізації ЦФ.

ЦФ прийнято поділяти на два класи: рекурсивні (РФ) і нерекурсивні (НРФ). Якщо в рівняння (3.3) хоча б один коефіцієнт a_i відмінний від нуля, то фільтр називається рекурсивним. Якщо ж у (3.3) усі коефіцієнти a_i рівні

0 (тобто попередні вихідні відліки не використовуються), то фільтр, що реалізує такий алгоритм, називається *нерекурсивним*. Для нього різницеве рівняння (3.3) спрощується

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x(t_{k-m}). \quad (2.25)$$

Очевидно, що НЦФ являє собою систему без зворотного зв'язку, а РЦФ – систему зі зворотним зв'язком.

Передавальні (системні) функції ЦФ.

Для Фур'є аналізу визначимо $y(t)$ та $x(t)$ на проміжках $(t_k, t_k + \Delta t)$ значеннями $y(t_k)$ та $x(t_k)$ відповідно, і для однозначності при зворотному перетворенні Фур'є під $s(t_k)$ будемо вважати границю: $s(t_k) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} s(t_k + \alpha)$.

В результаті перетворення Фур'є вхідного та вихідного сигналу, отримаємо алгебраїчне рівняння відносно $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) + a_1 Y(\omega) e^{-j\omega\Delta t} + \dots + a_n Y(\omega) e^{-j\omega n\Delta t} = b_0 X(\omega) + b_1 X(\omega) e^{-j\omega\Delta t} + \dots + b_m X(\omega) e^{-j\omega m\Delta t} \quad (2.26)$$

Тепер можна представити передавальну функцію ЦФ у звичайній формі

$$W(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega\Delta t} + \dots + b_m e^{-j\omega m\Delta t}}{1 + a_1 e^{-j\omega\Delta t} + \dots + a_n e^{-j\omega n\Delta t}} \quad (2.27)$$

Амплітудно-частотна характеристика фільтра є періодичною функцією, але практично вона має сенс лише в інтервалі частот від 0 до $\omega = \pi/\Delta t$ так як на верхній частоті цього інтервалу кожному періоду дискретизованого гармонійного сигналу відповідають лише два відліки. Відзначимо, що передавальна функція ЦФ у загальному випадку є трансцендентною функцією частоти і не виражається у вигляді відношення двох поліномів.

Виконавши заміну $z = e^{-j\omega\Delta t}$ можна отримати передавальну функцію у вигляді

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.28)$$

Такий запис передавальної функції називають системною функцією фільтра. Також системну функцію фільтра можна отримати без прив'язки до перетворення Фур'є і згаданих вище додаткових припущень, якщо використати апарат z -перетворення. У такому випадку системна функція цифрового фільтра буде відношенням z -перетворень вихідного і вхідного сигналів і вона все одно буде рівна наведеному вище виразу.

Імпульсна характеристика фільтра.

Важливою характеристикою фільтра є його імпульсна характеристика - сигнал на виході фільтра при подачі на його вхід сигналу подібного на дельта-функцію. Для цифрових фільтрів такою функцією буде 1 значення у момент часу $t=0$.

Розглянемо зв'язок між імпульсною характеристикою і передавальною функцією фільтра. Довизначимо як і раніше $h(t)$ та $x(t)$ на проміжках $(t_k, t_k + \Delta t)$ значеннями $h(t_k)$ і $x(t_k)$ відповідно і проведемо перетворення Фур'є вхідного і вихідного сигналу.

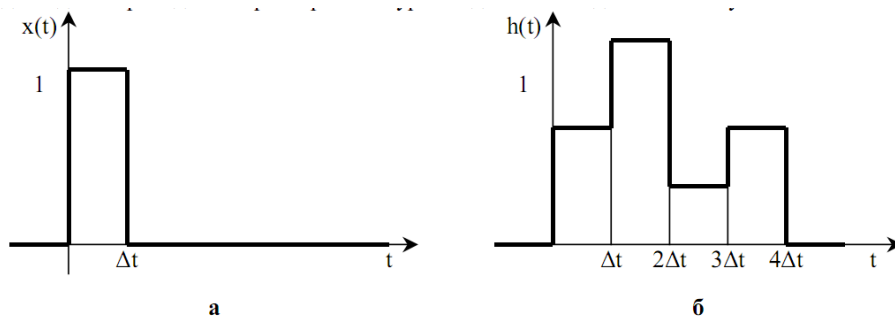


Рис. 2.13. Вихідний та вхідний сигнал фільтра при побудові ІХ

Позначимо спектральну щільність сигналу $q(t)$, зображеного на рис. 2.13 а через $Q(\omega)$, тоді сигнал $x(t)$ теж має спектральну щільність

$$X(\omega)=Q(\omega).$$

З іншого боку вихідний сигнал фільтра $H(\omega)$ є ступінчатою функцією, тобто представляється у вигляді

$$H(t)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k q(t-\Delta tk), \quad (2.29)$$

і є суперпозицією сигналів $q(t)$, зміщених на інтервалі Δt_k і помножений на значення сигналу у точках t_k у сенсі $h(t_k) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} h(t_k + \alpha)$, тому його спектральна щільність може бути представлена у вигляді:

$$H(\omega) = \sum_k h_k Q(\omega) e^{-j\omega \Delta t_k}. \quad (2.30)$$

Враховуючи визначення передавальної функції отримаємо інший запис:

$$W(j\omega) = \sum_k h_k e^{-j\omega \Delta t_k}. \quad (2.31)$$

Отже передавальна функція цифрового фільтра може завжди бути визначена за допомогою відомої імпульсної характеристики. Позначимо $z = e^{j\omega \Delta t}$ і перепишемо вираз передавальної функції у вигляді системної функції

$$H(z) = \sum_k h_k z^k \quad (3.32)$$

Отже системна функція фільтра може бути отримана як z -перетворення імпульсної характеристики фільтра.

Класифікація фільтрів за імпульсною характеристикою.

За тривалістю імпульсної характеристики фільтри розділяють на фільтри із кінечною імпульсною характеристикою - КІХ-фільтри (*FIR-filter - finite impulse response filter*).

Якщо ж імпульсна характеристика не стає тотожно рівною нулю (хоча і загасає в часі), протягом скінченного інтервалу, то такі фільтри називають НІХ - фільтрами (*IIR-filter - interminable impulse response filter*).

Можна показати, що фільтри із скінченою імпульсною характеристикою аргіогі стійкі і можуть бути побудовані без використання зворотних зв'язків. З іншого боку фільтри із нескінченною імпульсною характеристикою більш подібні на аналогові кола і звичайно організуються у виді схеми (алгоритму) із зворотнім зв'язком. Вони зазвичай потребують меншого обсягу пам'яті для збереження проміжних даних, простіші у реалізації, проте алгоритм побудови НІХ-фільтрів може давати нестійкі реалізації, котрі не можна використати на практиці.

Нерекурсивні дискретні фільтри.

Фільтр в якому при формуванні вихідного сигналу беруть участь лише скінченна множина вхідних відліків називають нерекурсивним або трансверсальним.

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m}, \quad (2.33)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – послідовність коефіцієнтів.

Застосувавши z -перетворення отримаємо:

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) X(z). \quad (2.34)$$

Звідки можна визначити системну функцію

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{z^m}. \quad (2.35)$$

$H(z)$ – дробово-раціональна функція z , що має m -кратних полюсів при $z=0$ та m нулів, координати яких залежать від коефіцієнтів фільтра.

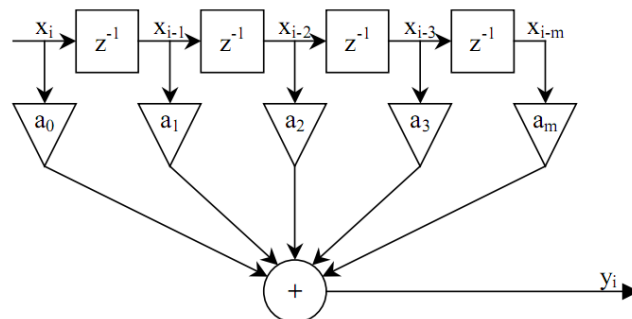


Рис. 2.14. Структура НРФ

Основними елементами фільтра служать блоки затримки відлікових значень на один інтервал дискретизації (прямокутники з символами z^{-1}), а також масштабні блоки, що виконують в цифровій формі операції множення на відповідні коефіцієнти. З виходів масштабних блоків сигнали надходять в суматор, де, складаючись, утворюють відлік вихідного сигналу.

Імпульсна характеристика НРФ.

Легко помітити, що при подачі на вхід сигналу $(1, 0, 0, \dots, 0)$ на виході фільтра будуть отримані значення

$$\{h_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}, \quad (2.36)$$

а далі, h_k стане тотожно рівною 0.

З іншого боку враховуючі затримки у часі вхідного і вихідного сигналів можна записати передавальну функцію фільтра у вигляді

$$W(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta t} + a_2 e^{-2j\omega\Delta t} + \dots + a_m e^{-mj\omega\Delta t} \quad (2.37)$$

Рекурсивні дискретні фільтри (РФ).

В загальному випадку при формуванні значень вихідних відліків використовується попереднє значення як вхідних так і вихідних відліків.

$$y_i = (a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m}) + (b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + b_3 y_{i-3} + \dots + b_n y_{i-n}) \quad (2.38)$$

Оскільки y_i залежить від значення y_i у попередній момент часу, такий фільтр називають рекурсивним.

Виконавши z -перетворення сигналу отримаємо

$$Y = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) + \dots + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) + b_3 z^{-2} Y(z) + \dots \quad (2.39)$$

звідки системна функція

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3} - \dots - b_n z^{-n}} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_m z^{n-m}}{z^n - b_1 z^{n-1} - b_2 z^{n-2} - b_3 z^{n-3} - \dots - b_n}. \quad (2.40)$$

Отже системна функція має на комплексній площині n полюсів, котрі відповідають кореням характеристичного рівняння $z^n - b_1 z^{n-1} - b_2 z^{n-2} - b_3 z^{n-3} - \dots - b_n = 0$. Одночасно передавальна функція фільтра дорівнює:

$$H(j\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega\Delta t n} + a_1 e^{j\omega\Delta t(n-1)} + a_2 e^{j\omega\Delta t(n-2)} + \dots + a_m e^{j\omega\Delta t(n-m)}}{e^{j\omega\Delta t n} - b_1 e^{j\omega\Delta t(n-1)} - b_2 e^{j\omega\Delta t(n-2)} - b_3 e^{j\omega\Delta t(n-3)} - \dots - b_n} \quad (2.41)$$

Реалізацію даного фільтра наведена на рис. 2.15.

Дана структурна схема може бути також накреслена у вигляді як наведено на рис. 2.16. Така реалізація потребує меншої кількості запам'ятовуючих елементів.

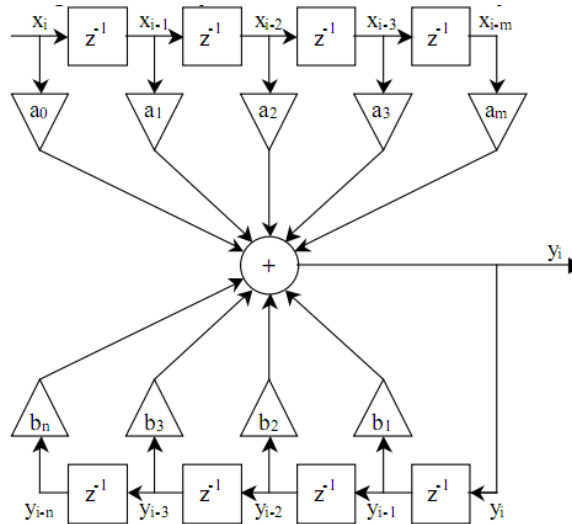


Рис. 2.15. Структура РФ

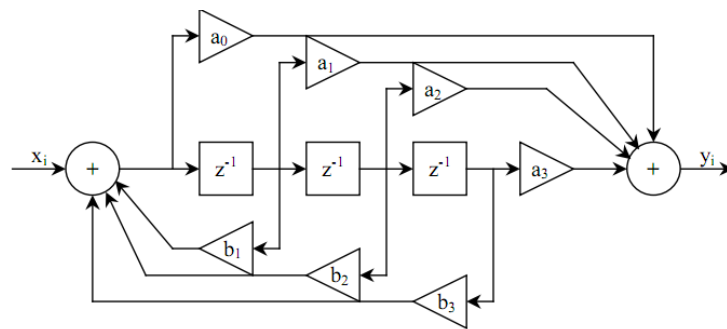


Рис. 2.16. Канонічна структура РФ

Стійкість РФ.

Рекурсивний фільтр є системою із зворотнім зв'язком і як інші системи із зворотними зв'язками він може стати нестійким. Вільні коливання у такому фільтрі будуть розв'язком різницевого рівняння

$$y_i = b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + b_3 y_{i-3} + \dots + b_n y_{i-n}. \quad (3.42)$$

Розв'язок такого рівняння природно шукати у формі

$$y_i = \sum_k C_k \alpha_k^i, \quad (3.43)$$

із невідомими коефіцієнтами C_k та основою степеня α_k .

Підставивши 3.18 у рівняння і винісши за дужки C_k отримаємо:

$$y_i = \sum_k C_k (\alpha_k^i - b_1 \alpha_k^{i-1} - b_2 \alpha_k^{i-2} - b_3 \alpha_k^{i-3} - \dots - b_n \alpha_k^{i-n}) = 0 \quad (3.44)$$

розділивши рівняння на α_k^{i-n} отримаємо характеристичне рівняння

$$Q(\alpha_k) = \alpha_k^n - b_1 \alpha_k^{n-1} - b_2 \alpha_k^{n-2} - b_3 \alpha_k^{n-3} - \dots - b_n = 0 \quad (3.45)$$

Зрозуміло, що корені даного рівняння $|\alpha_k| < 1$ то $\alpha_k^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і отже перехідний процес у ЦФ затухає, у випадку коли $|\alpha_k| > 1$ то $\alpha_k^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ і ЦФ не є стійким. Нестійкий фільтр можна застосовувати лише в якості блока в системах охоплених додатковими зворотними зв'язками.

Синтез цифрових фільтрів.

Задача синтезу цифрових фільтрів досить складна і полягає у визначенні коефіцієнтів і вигляду цифрового фільтру. Нажаль, принципово не можливо створити цифровий фільтр частотна характеристика котрого повністю співпадає із частотною характеристикою аналогового кола. Причина цього в тому що частотна характеристика цифрового фільтра є періодичною. Проте у більшості випадків є потреба, щоб цифровий фільтр був "подібний" до аналогового лише у діапазоні частот від 0 до $\omega_d/2$.

Найчастіше використовують наступні *методи синтезу*

- 1) синтез на основі скінченої імпульсної характеристики,
- 2) синтез на основі заданої імпульсної перехідної функції аналогового фільтру-прототипу. Зміст такого синтезу полягає у більш-менш точному визначенні значень імпульсної перехідної функції аналогового фільтра-прототипу і побудові на основі отриманої імпульсної характеристики відповідного фільтра-аналога.

- 3) синтез цифрового фільтра на основі фільтра-прототипу із використанням білінійного перетворення

- 4) прямий синтез цифрового фільтра на основі заданих вимог до частотної характеристики.

При прямому синтезі можливі різні постановки задачі.

- 1) Задається «коридор АЧХ» і, виходячи з коридору і обраного способу апроксимації ідеального ФНЧ, розраховується порядок фільтра і, власне, сам фільтр.

2) Задається порядок фільтра N і деякі найбільш важливі параметри «коридору АЧХ», наприклад придушення в смузі загородження і частота зрізу, а інші параметри не обмежують. Наприклад не накладають обмеження на перехідну смугу фільтра. Ця постановка задачі розрахунку фільтра знайшла найбільше поширення.

3) Задається бажана АЧХ фільтра і, можливо, вимоги до ФЧХ у заданому діапазоні частот, наприклад, що фільтр має у робочому діапазоні частот (або при усіх частотах) групову затримку заданого рівня.

Синтез цифрового фільтра на основі скінченної імпульсної характеристики.

У випадку скінченної імпульсної характеристики задача синтезу фільтра зводиться до задачі побудови трансверсального ЦФ, що був описаний вище із системною функцією виду:

$$H(z) = \frac{h_0 z^m + h_1 z^{m-1} + h_2 z^{m-2} + \dots + h_m}{z^m}, \quad (3.46)$$

де h_n – значення сигналу на виході у момент часу $t=n\Delta t$.

При цьому порядок фільтра повністю визначається тривалістю перехідного процесу на виході фільтра при подачі на вхід імпульсного сигналу.

Синтез цифрового фільтра на основі нескінченної імпульсної характеристики фільтра характеристики $h(n)$ можливий у тому випадку, коли можна виписати z -перетворення для $h(n)$ у вигляді відношення двох поліномів від z .

Синтез цифрового фільтра на основі аналогового фільтра-прототипу. Найбільш простим варіантом синтезу є синтез на основі аналогового фільтра-прототипу. Нехай $W(j\omega)$ – комплексна передавальна функція деякого аналогового фільтра, яку необхідно наблизити. Так як при цифровій обробці у лінійних фільтрах доступні лише операції множення на константу, зсуву на крок за часом і сумування, для представлення $W(j\omega)$ необхідно так перетворити функцію, щоб вона наближалась виразом, який є відношенням двох поліномів від $z = e^{j\omega\Delta t}$ на інтервалі 0 до $\omega_d/2$.

Звідки випливає що для перетворення передавальної функції фільтра-прототипу у передавальну функцію необхідно замість ω підставити $\omega = \frac{1}{j\Delta t} \ln(z)$. Проте підстановка у передавальну функцію даного виразу

перетворює дробово-раціональну функцію частоти у трансцендентну функцію від z , що у загальному не виражається як відношення двох поліномів і не може бути легко перетворена у структурні схеми ЦФ.

Для наближеного обчислення $\ln(\cdot)$ досить часто використовують розклад наступного виду ($|x| < 1$):

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad (3.47)$$

Для спрощення обмежимося лише першою степеню x і запишемо $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx 2x$.

Так як у нашому випадку $\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = z$, легко можна показати, що $x = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, отже $\ln(z) \approx 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$. Тепер можна легко сформулювати вираз для заміни ω у фільтрі-прототипі:

$$s \approx \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1}. \quad (3.48)$$

Дане наближення називається білінійним перетворенням. Можна аналогічним методом будувати і більш точні наближення отримуючи більше членів у розкладі $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, однак у більшості випадків достатньо першого наближення.

Тепер розглянемо як змінюються характерні частоти фільтра після виконання такої заміни. Позначимо характерні частоти аналогового цифрового фільтра через ω_a , а їх образ для цифрового фільтра через ω_c . Так як $z = e^{j\omega_c \Delta t}$ можна записати:

$$\omega_c = \frac{2}{\Delta t} \arctg\left(\omega_a \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (3.49)$$

Для фільтрів верхніх та нижніх частот порядок $H(z)$ дорівнює порядку $H(s)$. Наприклад, якщо функція $H(z)$ виведена із функції $H(s)$ аналогового фільтра 2-го порядку, то і $H(z)$ також буде описувати систему другого порядку. Для смугових та загороджувальних фільтрів порядок $H(z)$ буде вдвічі більшим за порядок $H(s)$.

2.3.2. Завдання на комп'ютерний практикум.

1. За допомогою мови програмування та засобів візуалізації *Mathcad* у відповідності із варіантом завдання (таб. 3.1 та 3.2):

1.1. побудувати імпульсну та частотні (АЧХ та ФЧХ) характеристики нерекурсивного дискретного фільтра при різних значеннях порядку фільтра N ;

1.2. розрахувати за допомогою дискретної згортки реакції нерекурсивного фільтра на заданий вхідний вплив та побудувати графіки вхідних і вихідних сигналів;

1.3. розрахувати системну функцію та обчислити на основі її зворотного z -перетворення імпульсну характеристику рекурсивного фільтра.

1.4. побудувати АЧХ та ФЧХ рекурсивного дискретного фільтра.

1.5. провести моделювання реакції рекурсивного фільтра на вхідний сигнал із застосуванням z -перетворення.

2. На основі передавальної функції отриманого аналогового фільтра-прототипа (комп. пр. 2) за допомогою білінійного перетворення побудувати ЦФ. Крок за часом Δt вважати величиною, що залежить від реалізації. Порівняти АЧХ та ФЧХ аналогового фільтра та отриманого на його основі ЦФ.

3. Зробити висновки.

Таблиця 2.3

Вихідні дані для розрахунку НРФ

№	Імпульсна х-ка $h(nT)$	Тривалість імпульсної х-ки, τ	Параметр β	Порядок фільтра N	Вхідний сигнал $x(nT)$	Параметр α
1	$h(nT) = e^{-\left(\beta \frac{nT - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right)^2}$	5	2	5; 15	$x(nT) = nT \alpha^{-nT}$	1.5
2		4	2.5	4; 13		2
3		3	3	6; 19		2.5
4		2	3.5	4; 11		3
5		1	4	5; 17		3.5
6		6	4.5	7; 14		1.5
7		5	4	8; 18		2
8		4	3.5	5; 16		2.5
9		3	2	6; 12		3
10		2	2.5	4; 15		3.5
11		1	3	7; 19		1.5
12		7	4.5	8; 16		2
13		6	2	5; 12		2.5
14		5	3	4; 18		3
15		4	4.5	8; 15		3.5

Таблиця 2.4

Вихідні дані для розрахунку РФ

№	Системна функція $H(z)$	Коефіцієнт a_m	Коефіцієнт b_k	Період д-ції T	Вхідний сигнал $x(nT)$	Параметр α
1	$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}}$ $N = 3; M = 3$	[1; -0.3; -0.5]	[0.5; -1; 1]	1	$x(nT) = nT \alpha^{-nT}$	1.5
2		[1; -0.4; -0.8]	[0.7; -2; 1]			2
3		[1; -0.2; -0.7]	[0.8; -1; 2]			2.5
4		[1; -0.1; -0.9]	[0.4; -3; 2]			3
5		[1; -0.5; -0.4]	[0.2; -2; 2]			3.5
6		[1; -0.3; -0.5]	[0.5; -1; 1]	1.5		3.5
7		[1; -0.4; -0.8]	[0.7; -2; 1]			3
8		[1; -0.2; -0.7]	[0.8; -1; 2]			2.5
9		[1; -0.1; -0.9]	[0.4; -3; 2]			2
10		[1; -0.5; -0.4]	[0.2; -2; 2]			1.5
11		[1; -0.3; -0.5]	[0.5; -1; 1]	0.5		2
12		[1; -0.4; -0.8]	[0.7; -2; 1]			2.5
13		[1; -0.2; -0.7]	[0.8; -1; 2]			1.5
14		[1; -0.1; -0.9]	[0.4; -3; 2]			3.5
15		[1; -0.5; -0.4]	[0.2; -2; 2]			3

Розрахунок НРФ. Часові і частотні характеристики не рекурсивного дискретного фільтра.

$N = 15$ - порядок нерекурсивного дискретного фільтра

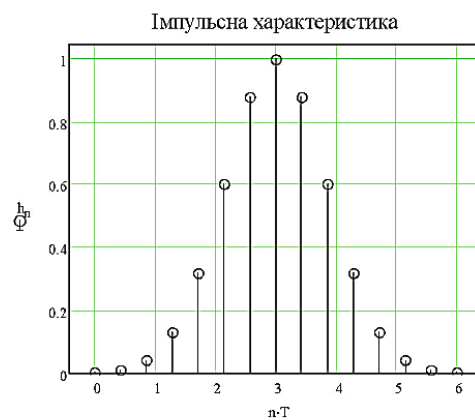
$\tau = 6$ - тривалість імпульсної характеристики

$T := \frac{\tau}{N-1}$ - період дискретизації

$Fd := \frac{1}{T}$ - лінійна частота дискретизації

$n := 0..N-1$

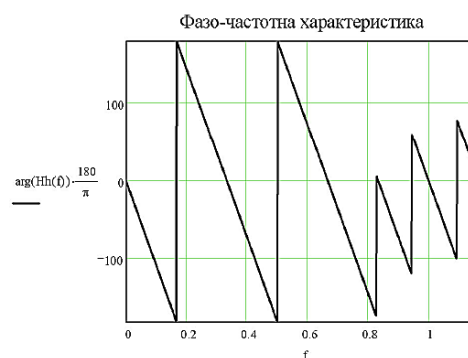
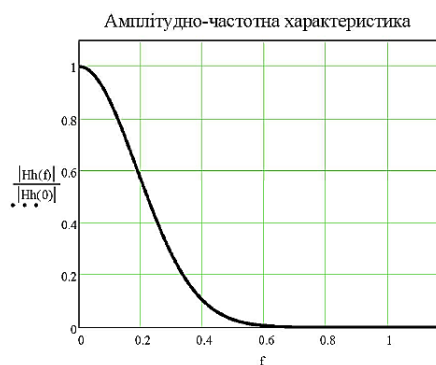
$h_n := e^{-\left(\beta \cdot \frac{n \cdot T - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right)^2}$ - формування вектору відліків імпульсної характеристики $\beta := 5$ - параметр імпульсної характеристики



$H(z) := \sum_{k=0}^{N-1} (h_k \cdot z^{-k})$ - системна функція нерекурсивного дискретного фільтра

$Hh(f) := \sum_{k=0}^{N-1} (h_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot T})$ - частотна характеристика нерекурсивного дискретного фільтра

$f := 0, \frac{Fd}{1000} .. \frac{Fd}{2}$ - діапазон побудови частотних характеристик $[0; Fd/2]$



Моделювання реакції не рекурсивного фільтра на вхідний сигнал із застосуванням дискретної згортки.

Формування вхідного сигналу нерекурсивного дискретного фільтра

$N_{in} := 10$ - кількість відліків вхідного сигналу

$j := 0..N_{in} - 1$

$x_j := j \cdot T \cdot \alpha^{-j}$ - формування відліків вхідного сигналу $\alpha = 1.5$ - параметр вхідного сигналу

$Norm(a, b) := \begin{cases} \text{for } i \in \text{length}(a) .. \text{length}(b) - 1 & \text{if } \text{length}(b) > \text{length}(a) \\ a_i \leftarrow 0 \end{cases}$ - функція, що застосовується для вирівнювання довжини вектора вхідного сигналу і імпульсної характеристики

$xN := Norm(x, h)$ $hN := Norm(h, x)$ - вхідний сигнал і імпульсна характеристика однакової довжини

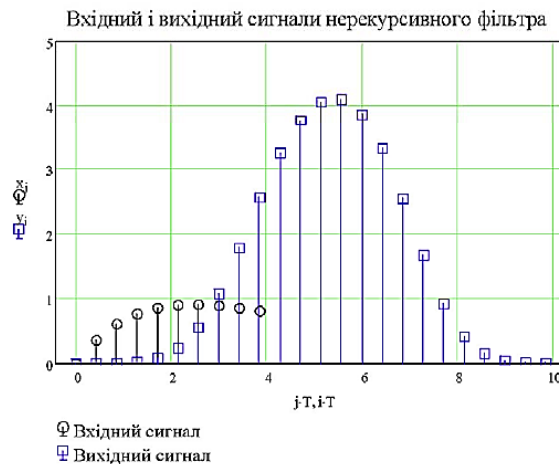
Обчислення згортки між вхідним сигналом і імпульсною характеристикою нерекурсивного фільтра

$zgortka(k, x, h) := \sum_{m=0}^k \left(\text{if}(m - \text{length}(x) < 0, h_m, 0) \cdot \text{if}(k - m - \text{length}(h) < 0, x_{k-m}, 0) \right)$ - функція дискретної згортки

$N_{out} := \text{length}(h) + \text{length}(x) - 1$ - обчислення тривалості вихідного сигналу

$i := 0..N_{out} - 1$

$y_i := zgortka(i, xN, hN)$ - обчислення значення відліків вихідного сигналу



Розрахунку РФ.

$$H(z) := \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (b_k \cdot z^{-k})}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} (a_m \cdot z^{-m})}$$

- системна функція рекурсивного дискретного фільтра в загальному вигляді

$N = 3$ - порядок нерекурсивної частини дискретного фільтра

$M = 3$ - порядок рекурсивної частини дискретного фільтра

$$b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ - коефіцієнти нерекурсивної частини фільтра} \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3 \\ -0.5 \end{pmatrix} \text{ - коефіцієнти рекурсивної частини фільтра}$$

$$H(z) \rightarrow \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 - \frac{3}{10}z - \frac{1}{2}z^2}$$

- системна функція рекурсивного дискретного фільтра, що моделюється

Імпульсна характеристика рекурсивного фільтра.

$T := 1$ - період дискретизації $\Delta(n) := \delta(n \cdot T, 0)$ - дискретна дельта функція

$F_d := \frac{1}{T}$ - лінійна частота дискретизації

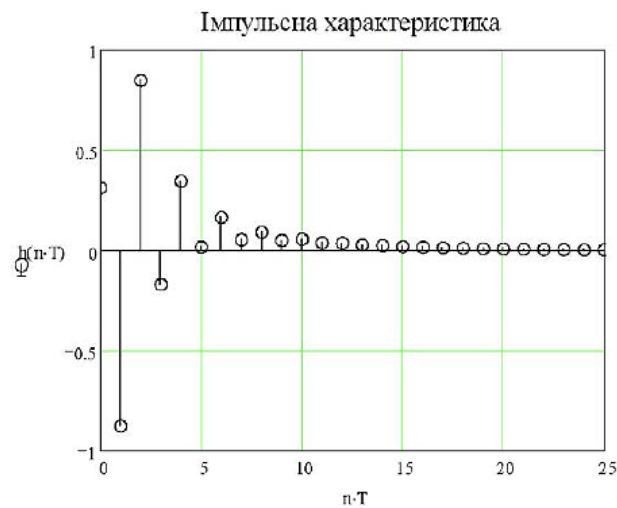
Обчислення імпульсної характеристики на основі зворотнього Z-перетворення системної функції рекурсивного фільтра

Символьне зворотнє Z-перетворення (із округленням) системної функції дискретного фільтра:

$$H(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, z} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow .12e-2 \cdot \frac{(-.17e4) \cdot \Delta(n) \cdot 12.^n \cdot 18.^n + .26e3 \cdot 10.^n \cdot 18.^n + .17e4 \cdot (-10.)^n \cdot 12.^n}{12.^n \cdot 18.^n}$$

Визначення функції, що задає імпульсну характеристику рекурсивного дискретного фільтра (на основі раніше розрахованої формули):

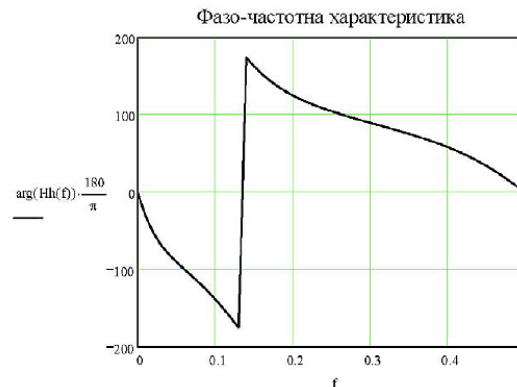
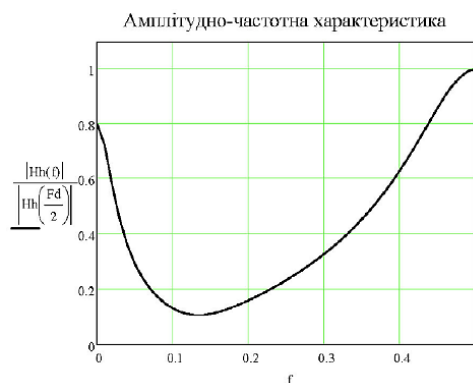
$$h(n) := .12e-2 \cdot \frac{(-.17e4) \cdot \Delta(n) \cdot 12.^n \cdot 18.^n + .26e3 \cdot 10.^n \cdot 18.^n + .17e4 \cdot (-10.)^n \cdot 12.^n}{12.^n \cdot 18.^n}$$



Частотні характеристики рекурсивного фільтра.

$$Hh(f) := \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (b_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot T})}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} (a_m \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot m \cdot T})} \quad \text{- частотна характеристика рекурсивного дискретного фільтра}$$

$f := 0, \frac{F_d}{100} \dots \frac{F_d}{2}$ - діапазон побудови частотних характеристик $[0; F_d/2]$



Моделювання реакції рекурсивного фільтра на вхідний сигнал із застосуванням z-перетворення.

$x(n) := n \cdot T \cdot \alpha^{-n \cdot T}$ - аналітичний запис вхідного дискретного сигналу $\alpha = 3$ - параметр сигналу рекурсивного фільтра

$x(n) \xrightarrow{\text{ztrans}, n} 3 \cdot \frac{z}{(3 \cdot z - 1)^2}$ - символічне Z-перетворення вхідного сигналу

$X(z) := 3 \cdot \frac{z}{(3 \cdot z - 1)^2}$ - Z-образ вхідного сигналу

$Y(z) := \Pi(z) \cdot X(z)$ - обчислення Z-образу вихідного сигналу як добутка системної функції і Z-образу вхідного сигналу

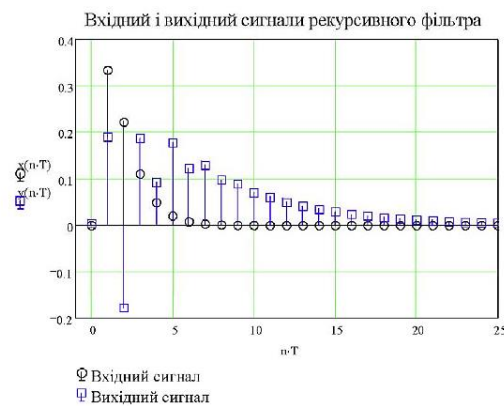
Символьне обернене Z-перетворення вихідного сигналу (із округленням):

$$Y(z) \xrightarrow[\text{float}, 2]{\text{invztrans}, z} \rightarrow .14e-4 \cdot \frac{.32e5 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 12^n - .38e5 \cdot (-10) \cdot 12^n + .63e4 \cdot 33 \cdot 12^n \cdot 18 \cdot 12^n - .11e6 \cdot 33 \cdot 12^n \cdot 18 \cdot 12^n}{12 \cdot 18 \cdot 12^n}$$

Часове представлення вхідного дискретного сигналу рекурсивного фільтра:

$$y(n) := .14e-4 \cdot \frac{.32e5 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 12^n - .38e5 \cdot (-10) \cdot 12^n + .63e4 \cdot 33 \cdot 12^n \cdot 18 \cdot 12^n - .11e6 \cdot 33 \cdot 12^n \cdot 18 \cdot 12^n}{12 \cdot 18 \cdot 12^n}$$

$n := 0 .. 30$



Метод білінійного z-перетворення.

Метод білінійного перетворення включає два окремих перетворення.

По-перше, нормована аналогова передаточна функції масштабується (в частотній області) в результаті заміни аргументу s :

$$s = \frac{s}{\omega'_p},$$

де $\omega'_p = \text{ktg} \left(\frac{\omega_p T}{2} \right)$, $k = \frac{2}{T}$, ω_p – частота зрізу фільтра.

По-друге, застосовується білінійне z-перетворення, при якому s в новій передаточній функції замінюється величиною

$$s = k \frac{z-1}{z+1}.$$

Приклад. Нехай задано аналоговий фільтр

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Нехай ЦФ повинен мати частоту зрізу ω_p тоді $H(s)$ необхідно масштабувати наступним чином:

$$\omega'_p = k \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_p T}{2} \right)$$

Отримаємо наступну передаточну функцію:

$$H'(s) = H(s) \Big|_{s = s / \omega'_p} = \frac{1}{s / k \operatorname{tg} (\omega_p T / 2) + 1}.$$

На наступному етапі проводимо заміну

$$H(z) = H'(s) \Big|_{s = k(z-1)/(z+1)} = \frac{1}{k(z-1)/(z+1) / k \operatorname{tg} (\omega_p T / 2) + 1}$$

Для підвищення ефективності розрахунків два перетворення можна об'єднати в одне:

$$s = c \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_p T}{2} \right) \frac{z-1}{z+1}.$$

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Вихідні дані для виконання роботи відповідно до варіанту.
3. Графічні результати виконання роботи (часові та частотні характеристики, вхідні та вихідні сигнали дискретних фільтрів), отримані при різних вихідних даних.
4. Висновки та аналіз отриманих результатів

2.3.4. Запитання до комп'ютерного практикуму.

1. Які основні операції реалізуються в дискретній системі?
2. За якими характеристиками класифікуються ЦФ.
3. Системна (передатна) функція ЦФ.
4. Як пов'язані імпульсна характеристика та системна функція ЦФ?
5. Як пов'язані частотна характеристика та системна функція ЦФ?
6. Основні методи побудови ЦФ.
7. Основні методи синтезу ЦФ.

2.4. Комп'ютерний практикум №4

Тема: Цифрові системи. Дослідження помилок квантування при АЦП.

Мета роботи:

1. Дослідити залежності помилок квантування при АЦП від амплітуди та частоти вхідного сигналу.
2. Набути практичних навичок розрахунку та дослідження помилок квантування при АЦП.

2.4.1. Короткі теоретичні відомості за темою практикума.

При аналогово-цифровому перетворенні аналогових сигналів (АС) за допомогою імпульсно-кодової модуляції (ІКМ) головними операціями є дискретизація та квантування. Дискретизація виконується за допомогою амплітудно-імпульсної модуляції (АІМ), при якій АС перетворюється в дискретну послідовність коротких вибірок додатної та від'ємної полярності $U_d(j)$, що чергуються з частотою дискретизації f_s . Відповідно до теореми Котельнікова ця частота повинна хоча б вдвічі, перевищувати максимальну частоту спектру вхідного сигналу F_{\max}

$$f_s > 2 F_{\max} \quad (2.50)$$

АІМ сигнал є періодичними лише за умови, що відношення частоти дискретизації f_s до частоти сигналу F може бути представлене у вигляді співвідношення простих чисел y та x .

Якщо коефіцієнт

$$k = \frac{f_s}{F} = \frac{T_F}{T_s} = \frac{y}{x} > 2 \quad (2.51)$$

є цілим числом ($x=1$), це означає, що в період АС T_F потрапляє ціле число періодів частоти дискретизації T_s , і в цьому випадку частоти f_s та F називаються кратними. Якщо $x > 1$, це означає, що в x періодів АС потрапляє ціле число періодів частоти дискретизації, і частоти називаються субкратними, а число x визначає порядок субкратності. Відношення частот f_s та F може в значній мірі визначати ступінь помилок квантування при АЦП.

Так для частоти дискретизації $f_s=48$ кГц кратними будуть частоти: 16, 12, 8, ... кГц, оскільки для них $x=1$ і $k=3/1, 4/1, 6/1...$ Для субкратних частот $x=2,3,4,...$ Це означає, що ціле число періодів частоти дискретизації потрапляє в 2,3,4... періоди АС. Відповідно ми отримуємо субкратні частоти 2,3,4... порядку. На рис. 4.1. наведені приклади АІМ сигнали у випадку кратних та субкратних частот.

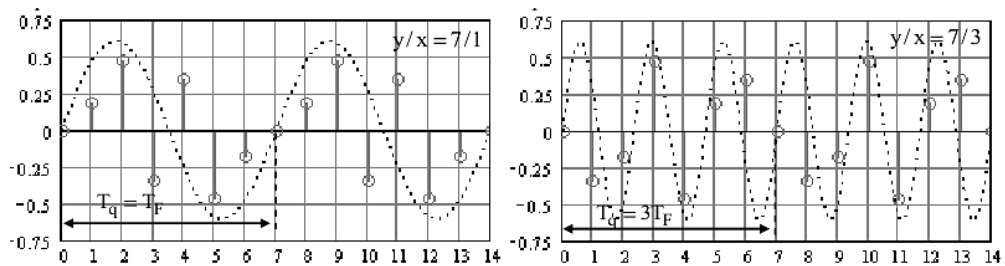


Рис. 2.17. AIM сигнали при $y=7$ (непарне), $x=1$ та $x=3$

При амплітудно-імпульсній модуляції кратні або субкратні частоти f_s та F не відіграють принципової ролі, оскільки спектр AIM не залежить від співвідношення цих частот. Однак, квантування AIM сигналу – це нелінійний процес і при цьому відношення частот f_s та F може суттєво впливати на спектр помилок квантування і, відповідно, на вихідний цифровий сигнал.

При дискретизації та квантуванні формули для розрахунків представляють у вигляді функції дискретного часу i тоді АС синусоїдної форми буде представлятись у вигляді

$$U(i) = A \sin(\Delta \varphi i), \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{k}, \quad (2.52)$$

де $\Delta \varphi$ – зміна фази синусоїдного сигналу між вибірками, A – нормалізована на крок квантування q амплітуда АС (в квантах)

$$A = \frac{A_m}{q}, \quad i = 0, 1/h, \dots, y, \quad (2.53)$$

h – число точок відліків на інтервалі між вибірками.

Дискретний сигнал задається лише в моменти вибірки, тому він розраховується у відповідності до наступного виразу:

$$U_d(j) = A \sin(\Delta \varphi j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, y.$$

Квантування – це округлення послідовності вибірки АС до найближчого значення у двійковій формі (рис. 2.18). При ІКМ така операція виконується за допомогою лінійного квантувача, який називають *Mid-Tread (MT)*. Він має передаточну функцію у формі «сходинок» з однаковою довжиною сходинки та, обов'язково, непарне число рівнів квантування $N_{q \max}$.

В квантувачах *MT* доки пікове значення вхідного сигналу не перевищує поріг, що дорівнює 0,5 кроку квантування, вихідний сигнал дорівнює нулю (рис. 4.19). Функція вихідного сигналу квантувача може бути представлена у наступному виді:

$$U_q(j) = \text{floor}[A \sin(\Delta \varphi j) + 0.5],$$

де $\text{floor}(\cdot)$ – функція, що дорівнює цілому значенню числа в дужках.

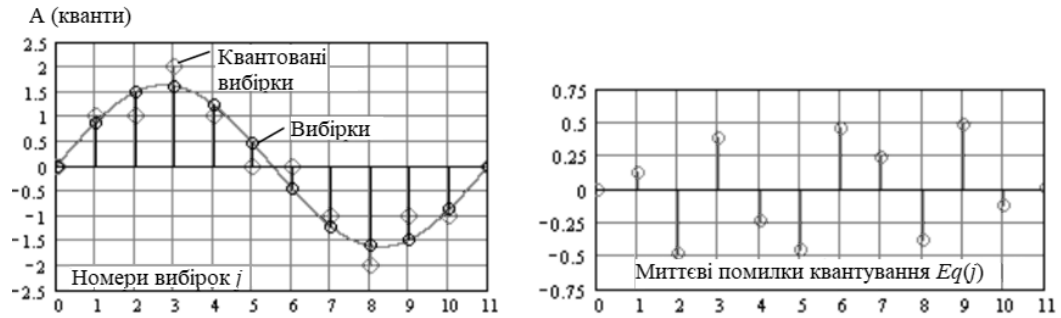


Рис. 2.18. Дискретизація та квантування на кратних частотах.

Помилка квантування.

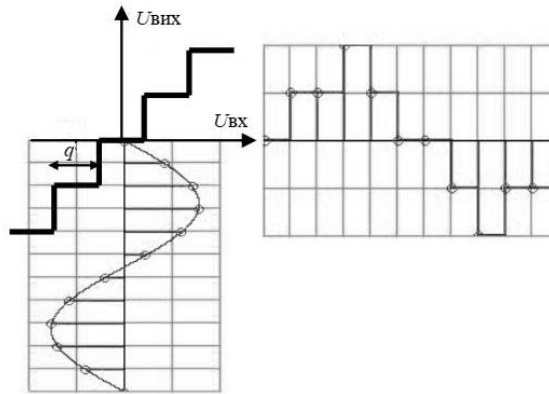


Рис. 2.19. Передаточна функція квантувача *Mid-Tread*

Максимальне число рівнів квантування шкали для кожної полярності АС $N_{q \max}$ залежить від числа розрядів кодового слова n

$$N_{q \max} = 2^{n-1}, \quad n > 1.$$

Чим більше значення n , тим на більше число рівнів буде розбиватись шкала і тим з більшою швидкістю відбувається АЦП. Якщо задано мале число рівнів квантування $N_{q \max}$, то необхідна кількість розрядів у кодовому слові розраховується відповідно до виразу:

$$n = \log_2(N_{q \max}).$$

Шаг квантування q шкали (в одиницях виміру напруги: мВ, мкВ) визначається максимально допустимою амплітудою вихідного сигналу $A_{m \max}$ та максимальним числом рівнів шкали квантування

$$q = \frac{A_{m \max}}{N_{q \max}}.$$

Вхідна напруга квантувача не повинна перевищувати значення $A_{m \max}$, в іншому випадку виникає пере загрузка на вході і виникає відсічення (зверху та знизу) у вихідному сигналі ІКМ демодулятора та сильні спотворення сигналу.

Шуми квантування при АЦП. Дискретну помилку квантування $E_q(j)$ можна представити як різницю між вихідним $U_q(j)$ та вхідним $U_d(j)$ сигналами квантувача в моменти вибірки j (рис. 4.18)

$$E_q(j) = U_q(j) - U_d(j),$$

і відповідно

$$E_q(j) = \text{floor}[A \sin(\Delta \varphi j) + 0.5] - A \sin(\Delta \varphi j).$$

Зрозуміло, що величина даних помилок, не може перевищувати половини кроку квантування.

В ІКМ демодуляторі відновлюються квантова ні вибірки у вигляді додатних та від'ємних дискретних значень $U_d(j)$. Для підвищення рівня вихідного АС виконується інтерполяція даної послідовності вибірок.

Найбільш частіше застосовують інтерполяцію нульового порядку, при якій запам'ятовуються значення вибірок $U_d(j)$ на час від однієї вибірки до іншої. В результаті на виході ІКМ демодулятора формується неперервний за часом сигнал $U_q(i)$ у вигляді сходинки (рис. 2.20).

Математична реалізація процесу інтерполяції виконується функцією $\text{floor}(\cdot)$ у відповідності до наступного рівняння

$$U_d(i) = A \sin(\Delta \varphi \cdot \text{floor}(i)),$$

$$U_q(i) = \text{floor}[A \sin(\Delta \varphi \cdot \text{floor}(i)) + 0.5].$$

Разом із квантованим сигналом інтерполуюся і помилка квантування, що виникає при АЦП. Вони стають неперервною функцією часу. Розрахункове співвідношення для помилки квантування на виході демодулятора приймається

$$E_q(i) = U_d(i) - U_q(i),$$

$$U_d(i) = A \sin(\Delta \varphi \cdot \text{floor}(i)).$$

В результаті операції дискретизації виникає запізнення за часом квантованого сигналу на виході ІКМ демодулятора $U_q(i)$ по відношенню до вхідного сигналу ІКМ модулятора $U(i)$ на один період частоти

дискретизації. Це створює між ними фазовий зсув, що визначається наступним рівнянням

$$\varphi = \frac{\pi}{k}.$$

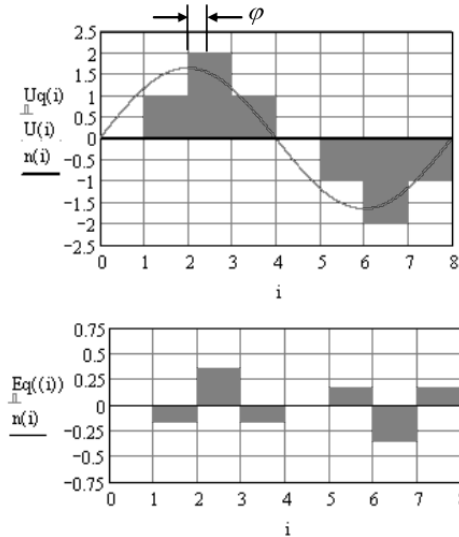


Рис. 2.20. Квантований сигнал та помилка квантування на виході ІКМ демодулятора

Цей фазовий зсув тим більший, чим вище частота АС, і на частоті Найквіста він досягає значення $\pi/2$.

Ефективне значення помилки квантування на кратних та субкратних частотах визначається відповідними рівняннями

$$E_{qef_k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^k E_q^2(i)}{kh}}, \quad E_{qef_s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^k E_q^2(i)}{yh}}.$$

На практиці часто приймають, що на вхід ІКМ модулятора діє випадковий сигнал. Тоді помилка квантування стає шумом з рівномірним розподілом на частотах від 0 до частоти Найквіста. В цьому випадку розподіл щільності ймовірності миттєвих помилок квантування $P_D(e_n)$ є рівномірним у межах кванта.

$$-\frac{q}{2} \leq e_n \leq \frac{q}{2} \text{ та } P_D(e_n) = \frac{1}{q},$$

а ефективне значення шуму квантування визначається за виразом

$$E_n = \sqrt{\int_{-q/2}^{q/2} e_n^2 \cdot P_D(e_n) d(e_n)} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Отримане значення 0,289 кванта можна використовувати для порівняння з ефективними значеннями детермінованих помилок квантування.

Отже, ефективне значення шуму квантування від рівня АС не залежить. Навпаки, ефективне значення детермінованих помилок квантування на кратних та субкратних частотах може змінюватись в межах від 0 до 0,45 кванта в залежності від рівня АС і значення коефіцієнта k . Як видно з рис. 4.5, на низьких частотах (значення k - велике) ефективне значення детермінованих помилок квантування мало відрізняються від ефективного значення шуму квантування E_n і флюктуюють відносно нього, флуктуації зменшуються зі збільшенням рівня АС. На високих частотах (значення k - мале) значення E_{qef} змінюються в межах від 0 до 0,35 кванта. Воно рівне нулю при A кратному кроку квантування, і максимальне при A рівному 0.5, 1.5, 2.5...кванта.

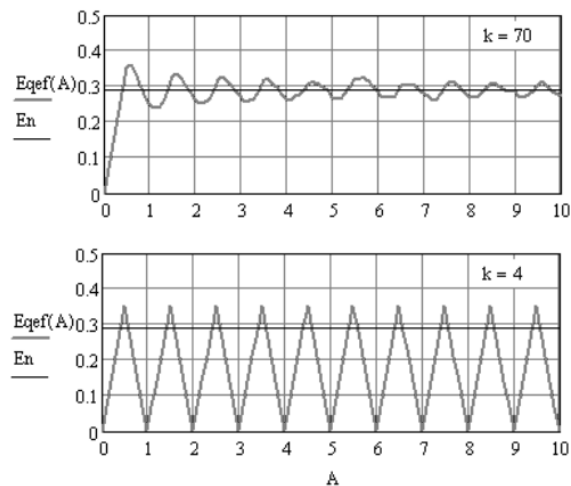


Рис. 2.21. Залежність $E_{qef}=\varphi(A)$

В якості міри оцінки спотворень при квантуванні можна використовувати коефіцієнт спотворення, що визначається як відношення ефективного значення детермінованих помилок квантування до ефективного значення сигналу, що квантується

$$K_g(A) = \frac{E_{qef} \sqrt{2}}{A} 100\%.$$

Даний коефіцієнт досягає значення 100% при $A \leq 0,5$ кванта, та спочатку повільно, а потім швидко зменшується зі збільшенням амплітуди АС (рис. 4.6). У випадку випадкових помилок квантування коефіцієнт спотворення квантування визначається виразом

$$K_n(A) = \frac{E_n}{A} 100\% .$$

На відміну від $K_g(A)$ залежність $K_n(A)$ має плавний характер.

Оскільки, функція помилок квантування суттєво залежить від коефіцієнта k їх доводиться аналізувати окремо на високих, середніх та низьких частотах.

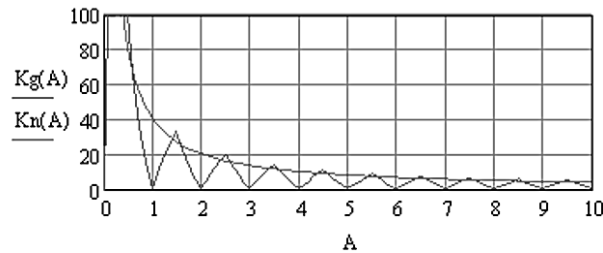


Рис.2.22. Залежності $K_g(A)$ та $K_n(A)$ від амплітуди АС

Квантування на низьких частотах.

На низьких частотах АС, коли значення k велике, при перевищенні амплітуди АС синусоїдної форми значення 0,5 кванту квантований сигнал набуває форми вузьких імпульсів, а спотворення набуває значення 100% (рис. 2.23). Зі збільшенням амплітуди АС ширина цих імпульсів спочатку збільшується, а потім сигнал набуває форми сходинок, і чим більше амплітуда АС, тим більше число сходинок. Однак, максимальне число сходинок не може перевищувати число вибірки на період АС.

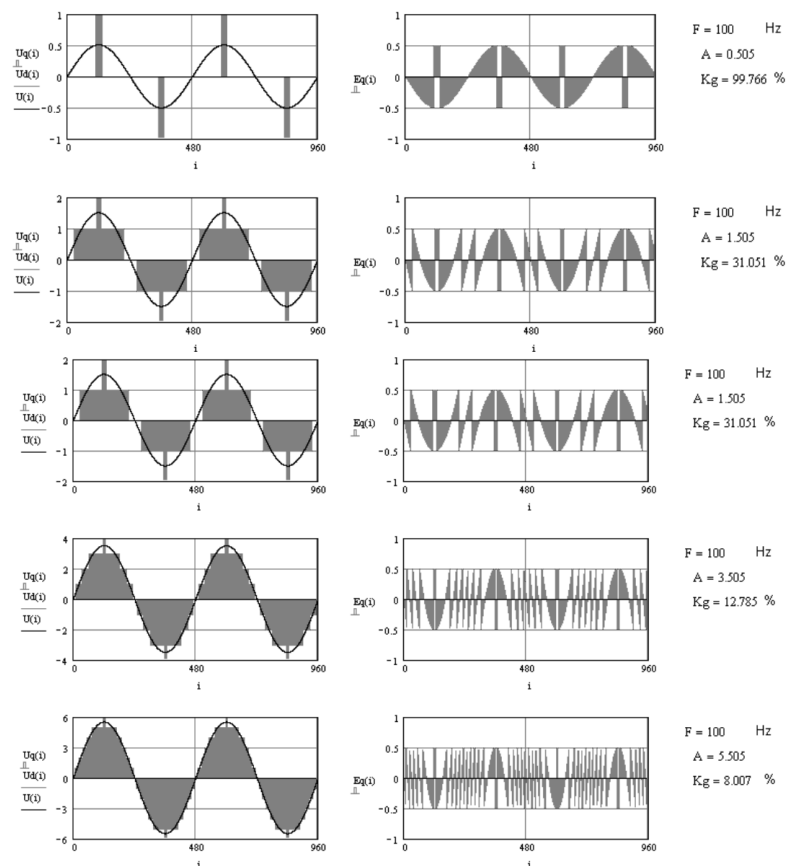


Рис. 2.23. Квантування на кратних частотах та помилки квантування при $k=480$

Коефіцієнт спотворення монотонно зменшується зі збільшенням амплітуди АС. Форма сигналу помилки квантування в межах періоду АС має вид детермінованої послідовності майже пилоподібних імпульсів з розмахом, що дорівнює кроку квантування, незалежно від амплітуди АС A . Тривалість, форма та частота повторення імпульсів змінюються в межах періоду, так як вони залежать від крутизни синусоїдного вхідного сигналу функції часу. Період повторення помилок квантування швидко зменшується зі збільшенням A . Це означає, що ширина спектру гармонік помилок квантування лінійно пов'язана з амплітудою АС.

Квантування на середніх частотах.

На середніх частотах залежність форми квантованих сигналів та коефіцієнта спотворення від амплітуди АС майже така сама як і на низьких частотах (рис. 2.23), оскільки число вибірок на період АС ще досить велике ($k=96$).

Однак, вже помітно, що зі збільшенням рівня АС сигнал помилки квантування наближається до шуму квантування.

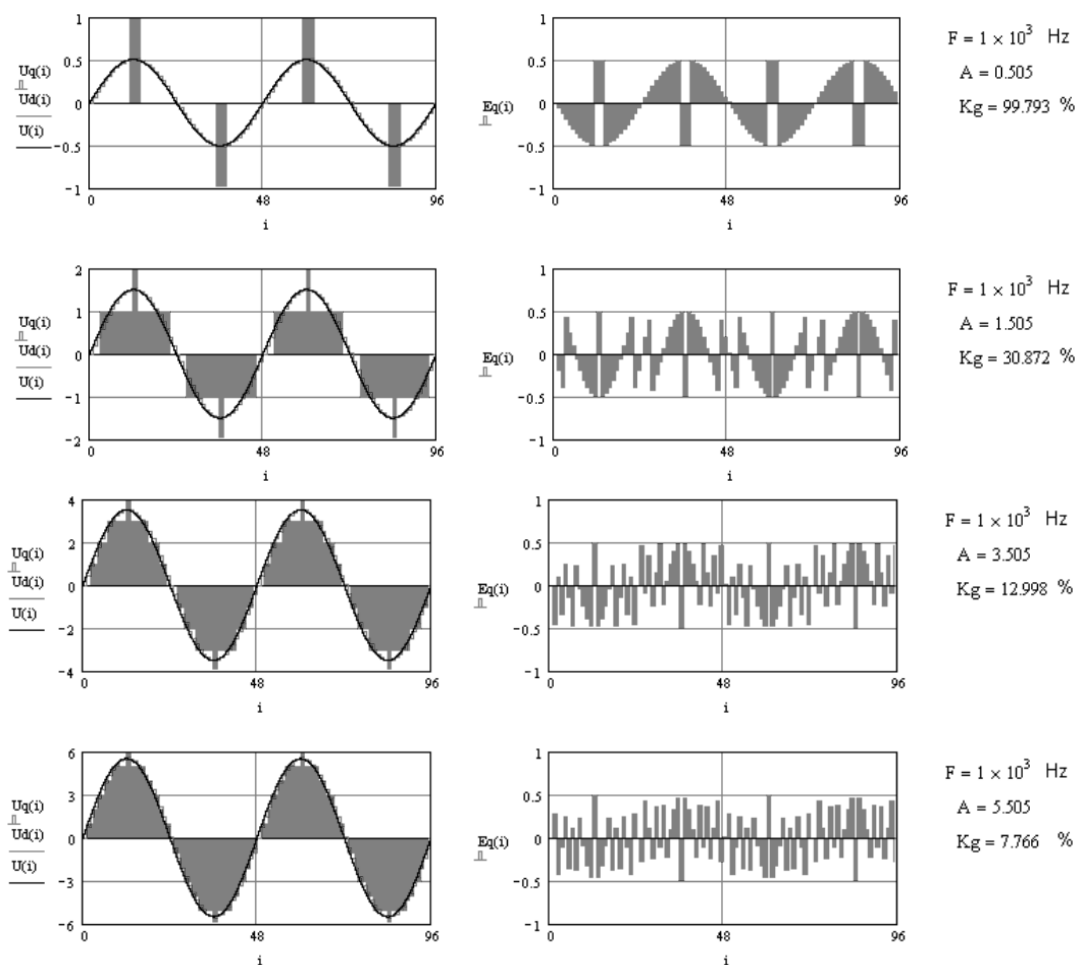


Рис. 2.24. Квантування на кратних частотах та помилка квантування при $k=48$

Квантування на високих частотах.

На високих частотах ($k < 6$) квантований сигнал представляє собою послідовність прямокутних імпульсів незалежно від амплітуди АС (рис. 2.24). Це пояснюється тим, що число сходинок сигналу залежить від числа вибірок. Залежність коефіцієнта спотворення від амплітуди АС майже така сама як і на середніх та низьких частотах.

Сигнал помилок квантування на високих частотах АС також представляє собою послідовність прямокутних імпульсів з амплітудою 0,5 кванта.

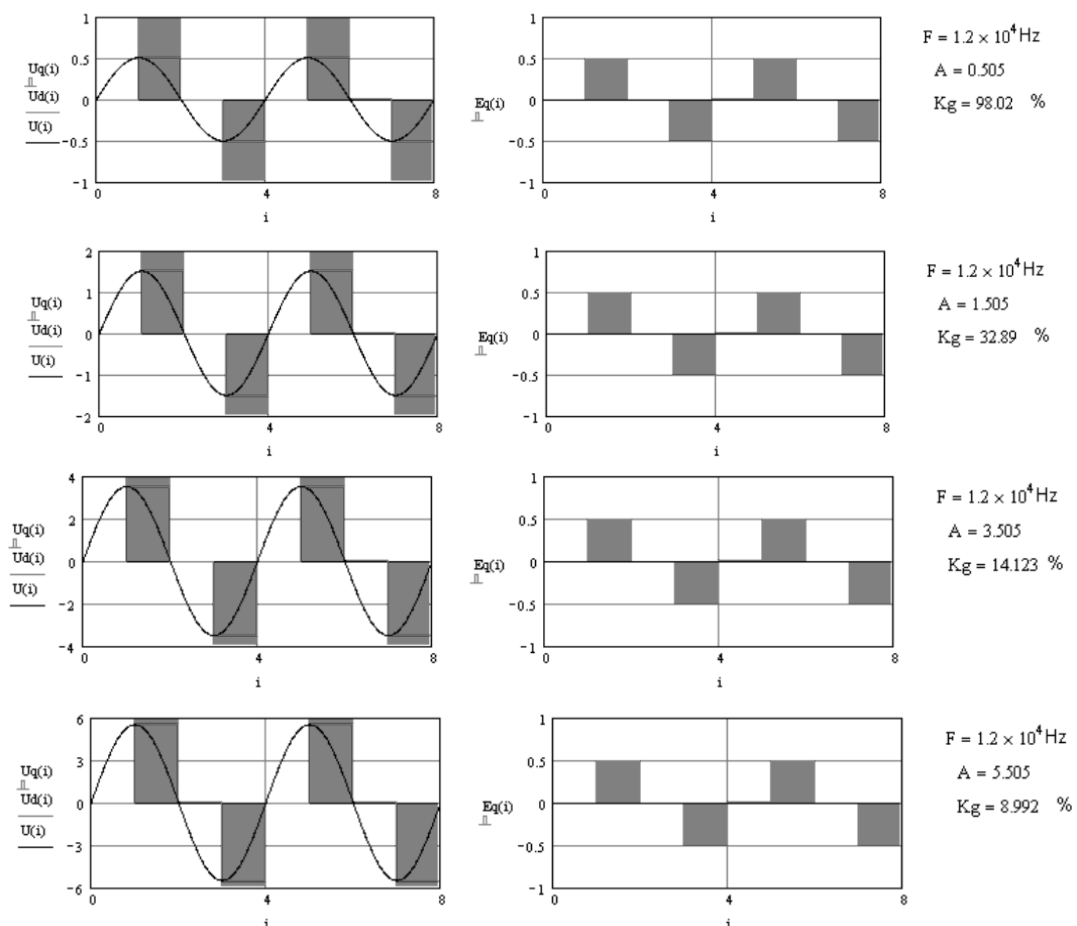


Рис. 2.25. Квантування на кратних частотах та помилка квантування при $k=4$

Залежність спотворень квантування від частоти АС.

При збільшенні частоти АС синусоїдної форми вище від 1000 Гц починається суттєво зменшуватись число вибірок на період АС і при $k > 10$ квантований сигнал набуває вигляду прямокутних імпульсів (рис. 2.260). При цьому немає видимої закономірності у змінні коефіцієнта спотворення. Зі збільшенням частоти АС сигнал помилки квантування

поступово стає більш детермінованим і з квазі-випадкової послідовності імпульсів перетворюється на П-імпульси.

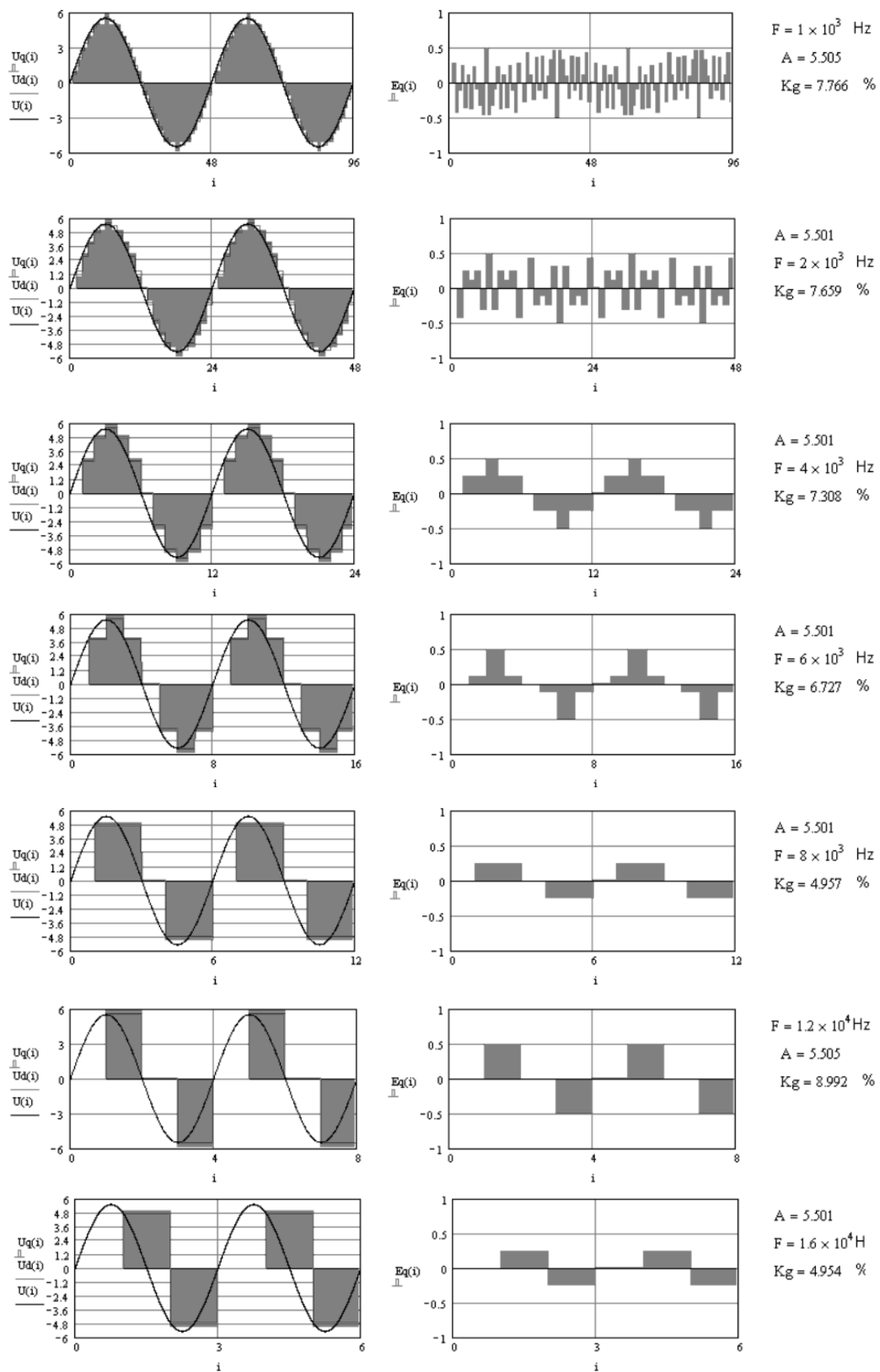


Рис. 2.25. Залежність спотворення при АЦП від частоти АС

2.4.2. Завдання на комп'ютерний практикум.

1. За допомогою мови програмування та засобів візуалізації *Mathcad* у відповідності із варіантом завдання (таб. 4.1):

1.1. дослідити залежність спотворення квантування від амплітуди на кратних частотах;

1.2. дослідити залежність спотворення квантування від амплітуди на кратних та субкратних частотах;

1.3. дослідити залежність ефективного значення помилки квантування від амплітуди АС на кратних та субкратних частотах;

2. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

Таблиця 2.5

Вихідні дані

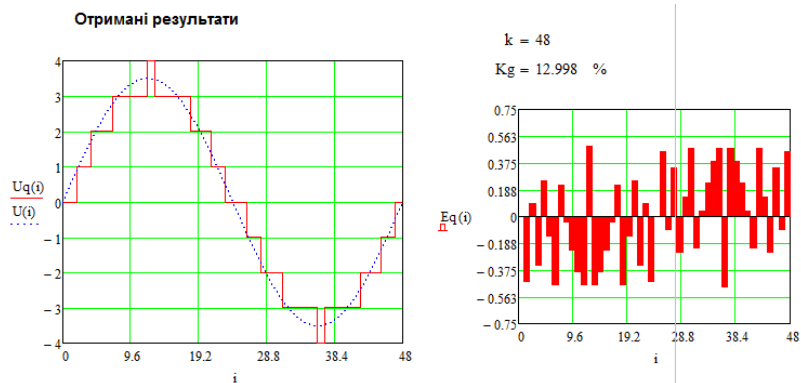
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Частота д-ції f	82000	64000	24000	32000	48000	56000	48000	32000	24000	56000	32000	48000	24000	64000	82000
Частота АС F	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7

2.4.3. Методика виконання.

Дослідження залежності спотворень квантування від амплітуди на кратних частотах.

Вихідні параметри:

$$\begin{aligned}
 &F := 1000 \quad - \text{частота сигналу} \\
 &f := 48000 \quad - \text{частота дискретизації} \\
 &A := 3.505 \quad - \text{амплітуда сигналу, в квантах} \\
 &k := \frac{f}{F} \quad - \text{коефіцієнт кратності частот } F \text{ та } f \\
 &D := \text{round}(A) \quad h := 1000 \\
 &a := 2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot k^{-1} \quad i := 0, h^{-1} \dots k \\
 &U(i) := A \cdot \sin(a \cdot i) \quad - \text{аналоговий вихідний сигнал} \\
 &B(i) := \text{floor}(i + h^{-1}) \\
 &U_d(i) := A \cdot \sin(a \cdot B(i)) \\
 &U_q(i) := \text{floor}(A \cdot \sin(a \cdot B(i)) + 0.5) \quad - \text{квантований сигнал} \\
 &E_q(i) := U_q(i) - U_d(i) \quad - \text{помилка квантування, як функція дискретного часу} \\
 &E_{qef} := \sqrt{\frac{\sum_i E_q(i)^2}{h \cdot k}} \\
 &K_g := \frac{E_{qef} \cdot 100 \cdot \sqrt{2}}{A} \quad - \text{коефіцієнт спотворення квантованого сигналу}
 \end{aligned}$$



На заданій частоті АС виконайте розрахунки при декількох значеннях амплітуди АС в межах від 0,505 до 5 квант. Результати занесіть в таблицю.

Відповідно до варіанту задайте одну із високих кратних частот АС ($k < 6$). На заданій частоті повторіть розрахунки.

Відповідно до варіанту задайте одну із низьких кратних частот АС ($k > 200$). На цій частоті виконайте розрахунки як для попередніх випадків.

Сформулюйте висновки відносно спотворення форми квантованого сигналу в залежності від амплітуди та частоти АС.

Частота, Гц	Амплітуда	0,505	1,505	2,505	3,505	5,505
	Kg, %					
	Kg, %					
	Kg, %					

Дослідження спотворень квантування від амплітуди АС на кратних та субкратних частотах

$$y := 4 \quad x := 1 \quad f := 48000$$

$$k := \frac{y}{x} \quad h := 100$$

$$A_{\max} := 10$$

$$A := 0, 0.1 \dots A_{\max}$$

$$a := 2 \cdot x \cdot \pi \cdot y^{-1} \quad i := 0, h^{-1} \dots y$$

$$B(i) := \text{floor}(i + h^{-1}) \quad F := \frac{f}{k}$$

$$Eq(i, A) := \text{floor}(A \cdot \sin(a \cdot \text{floor}(B(i))) + 0.5) - A \cdot \sin(a \cdot \text{floor}(B(i)))$$

$$En := \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$Eqef(A) := \sqrt{\frac{\sum_i Eq(i, A)^2}{h \cdot y}}$$

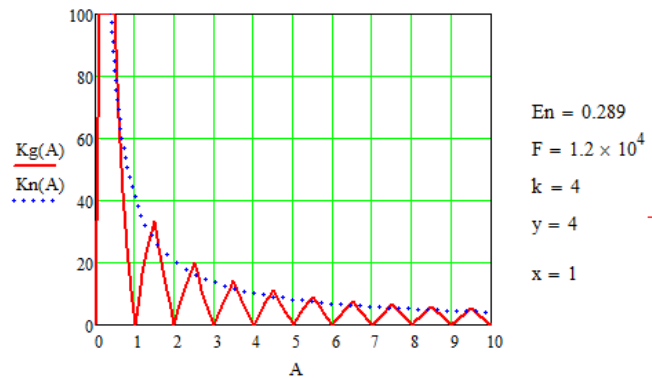
- ефективне значення помилки квантування, як функції амплітуди АС

$$Kg(A) := \frac{Eqef(A) \cdot 100 \cdot \sqrt{2}}{A}$$

- коефіцієнт спотворення квантованого сигналу як функція детермінованого АС

$$Kn(A) := \frac{En \cdot 100 \cdot \sqrt{2}}{A}$$

- коефіцієнт спотворення квантованого сигналу як функція амплітуди шумового АС



Кратні частоти ($x=1$). Виконайте розрахунки при значенні $y=4, 6, 10$ та 30.

Субкратні частоти ($x=2$). Виконайте розрахунки при значенні $y=11, 21$ та 41.

Сформулюйте висновки про зміну амплітудної залежності коефіцієнта спотворення при детермінованому та випадковому АС.

Дослідження залежності ефективного значення помилок квантування від амплітуди АС на кратних та субкратних частотах

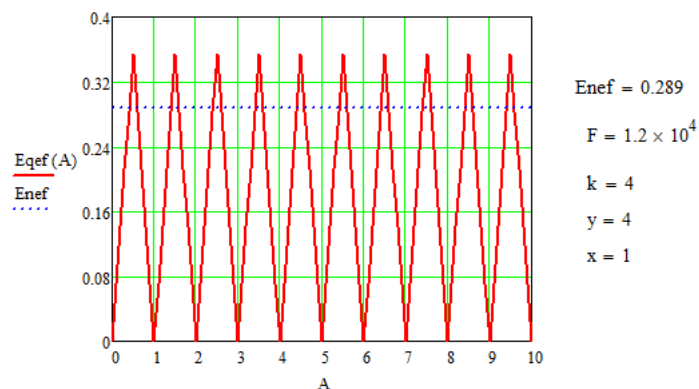
```

v := 4   x := 1   f := 48000
k := y/x  h := 100
Amax := 10
A := 0, 0.1 .. Amax

a := 2 * x * pi * y^-1   i := 0, h^-1 .. y
B(i) := floor(i + h^-1)   F := f * x/y
Eq(i, A) := floor(A * sin(a * floor(B(i)))) + 0.5 - A * sin(a * floor(B(i)))

```

$$E_{gef}(A) := \sqrt{\frac{\sum_i E_q(i, A)^2}{h \cdot y}} \quad E_{nef} := \frac{1}{\sqrt{12}}$$



Кратні частоти ($x=1$). Виконайте розрахунки при значенні $y=4, 6, 10$ та 30.

Субкратні частоти ($x=2$). Виконайте розрахунки при значенні $y=11, 21$ та 41.

Сформулюйте висновки про зміну амплітудної залежності ефективного значення помилки квантування.

Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Вихідні дані для виконання роботи відповідно до варіанту.
3. Функціональна схема досліджень.
4. Графічні результати виконання роботи отримані при різних вихідних даних.
5. Висновки та аналіз отриманих результатів

Запитання до комп'ютерного практикуму.

1. Дайте визначення поняттю коефіцієнт кратності.
2. Сформулюйте поняття «кратні та субкратні» частоти
3. Дайте визначення помилки квантування, чому дорівнює її максимальне значення.
4. Інтерполятор нульового порядку, де i для чого він використовується?
5. Яку форму має сигнали помилок квантування на високих частотах, як вона змінюється зі зміною рівня АС.
6. Яку форму має сигнали помилок квантування на низьких частотах, як вона змінюється зі зміною рівня АС.
7. Чому дорівнює ефективне значення помилки квантування шумового сигналу.
8. Як залежить ефективне значення помилки квантування синусоїдного сигналу від його амплітуди та коефіцієнта кратності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание.: Пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. - 992 с.
2. Бабак В.П., Хандлецький В.С., Шрюфер Е. Обробка сигналів: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 392 с.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2000. – 448 с.
4. Бахурин С. Аналоговые и цифровые фильтры. / С.Бахурин. – электронный ресурс, точка доступа - <http://ru.dsplib.org/>.
5. Белодедов М.В. Методы проектирования цифровых фильтров: учеб. пособ. Волгоград: и-во волгоградского у-та, 2004. – 60 с.
6. Бондарев В.Н., Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. пособие для вузов. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. – 398 с.
7. Вологодин Э.И. Стандарты и системы цифровой звукозаписи. Конспект лекций. СПб., ГУТ, 2008. – 141 с.
8. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: В 2 ч. Ч. 1. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. – 199 с.
9. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
10. Лем Г. Аналоговые и цифровые фильтры / Лем Г. - М., Мир, 1982. – 592 с.
11. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М: Техносфера, 2007. – 856 с.
12. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: -М.: Мир, 1978. – 848 с.
13. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2007. – 751 с.
14. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – М: BVH, 2008. – 816 с.
15. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. / А. Й. Наконечний, Р. А. Наконечний, В. А. Павлиш. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 368 с.
16. Цифровая обработка сигналов. Электронный ресурс, точка доступа - <https://exponenta.ru/news/cifrovaya-obrabotka-signalov>
17. Mathcad 8-12 для студентов. / Дьяконов В.П. – М.: СОЛОН-Пресс. 2005. – 632 с.