

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**САПЕГІН ОЛЕКСАНДР МИКОЛАЙОВИЧ**

УДК 629.7:517.9

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ І АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ**  
**ПАРАМЕТРІВ ОРІЄНТАЦІЇ ДЛЯ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ**  
**НАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ**

05.11.03 – Гіроскопи та навігаційні системи  
Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ О. М. Сапегін

Науковий керівник

Аврутов Вадим Вікторович, кандидат технічних наук, доцент

Київ – 2021

## АНОТАЦІЯ

Сапегін О.М. Вдосконалення методів і алгоритмів визначення параметрів орієнтації для безплатформної інерціальної навігаційної системи. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 05.11.03 «Гіроскопи і навігаційні системи». – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2021.

У дисертації отримані такі нові наукові результати:

1. Вперше обґрунтовано і розроблено інформаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації, що містить процедури просторового калібрування блоку інерціальних вимірювачів та початкової виставки системи, а також чисельне інтегрування матричного кінематичного рівняння Пуассона з використанням сигналів реальних інерціальних вимірювальних модулів.

2. Вдосконалено математичну модель, що аналітично описує величини дрейфу похибки методу чисельного інтегрування внаслідок конічного руху основи від параметрів руху, кроку опитування чутливих елементів та порядку методу.

3. Вперше запропоновано та обґрунтовано метод компенсації алгоритмічних дрейфів безплатформної інерціальної системи орієнтації при конічному русі основи, що полягає у відніманні розрахованого аналітично значення алгоритмічного дрейфу системи від поточного значення нерухомого кута на кроці інтегрування.

Практичне значення результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що: розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення для проведення процедури просторового калібрування ІВМ безплатформних систем орієнтації і навігації; отримано інформаційну модель конічного дрейфу алгоритму чисельного інтегрування, що дозволяє проводити компенсацію похибки алгоритму БІСО;

розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення для проведення імітаційного моделювання роботи БІСО, що включає в себе калібрування вихідних сигналів ІВМ, проведення процедури початкової виставки системи та чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації об'єкту; підтверджена працездатність та ефективність розробленого програмного забезпечення на реальних сигналах прецизійних ІВМ.

У дисертаційній роботі показано, що сучасні засоби інерціальної орієнтації і навігації переживають зараз стрімкий ріст. Збільшення точності інерціальних вимірювачів, здешевлення чутливих елементів низької точності поряд із колосальним ростом швидкодії мікропроцесорної техніки призводять до значного розширення області застосувань безплатформних інерціальних систем. Це вимагає перегляду класичних підходів до методів і алгоритмів, що використовуються в інерціальній навігації.

Проведено детальне обґрунтування і дослідження методів калібрування інерціальних вимірювачів: акселерометрів і гіроскопів. Розроблено інформаційну модель вихідного сигналу датчиків, що враховує різноманітні інструментальні похибки стендового обладнання і чутливих елементів. На її основі створено імітаційну модель процедури калібрування та підтверджено високу точність методу просторового калібрування інерціально вимірювального модуля у порівнянні із відомими.

Розроблено імітаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації, що містить процедури моделювання кутового руху основи, чисельного інтегрування кінематичних рівнянь та блоку порівняння отриманих результатів. Це дало змогу провести дослідження точності алгоритмів чисельного інтегрування рівняння Пуассона у порівнянні з відомими і широко розповсюдженими методами Панова. Великий набір емпіричних даних дозволив вдосконалити математичну залежність алгоритмічного дрейфу системи орієнтації при кінчному русі основи. Ця формула дозволяє не лише прогнозувати точність алгоритмів інтегрування у залежності параметрів руху та характеристик методу, а й запропонувати методику компенсації цієї методичної

похибки: на кожному кроці інтегрування необхідно віднімати від значення нерухомого кута величину алгоритмічного дрейфу.

Побудовано інформаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації з використанням комплексу процедур, що забезпечують калібрування чутливих елементів просторовим методом, розрахунку початкових кінематичних параметрів орієнтації шляхом проведення початкової виставки за методом гірокомпасування та горизонтування та, нарешті, розрахунку кінематичних параметрів орієнтації об'єкту шляхом чисельного інтегрування методом Пікара кінематичного рівняння Пуассона. Розроблене алгоритмічно-програмне забезпечення підтвердило свою адекватність і точність при роботі з реальними сигналами прецизійних чутливих елементів.

**Ключові слова:** безплатформна інерціальна системи орієнтації, метод Пікара, рівняння Борца, рівняння Пуассона, калібрування.

Список основних публікацій здобувача:

1. Лазарев Ю.Ф. О точности численного интегрирования уравнения ориентации Пуассона методами Рунге-Кутты и Пикара / Ю.Ф. Лазарев, А.Н. Сапегин // Вісник Інженерної академії України. – 2015. – №3. – С. 133–139.
2. Аврутов В.В. Метод калібрування і корекції вихідних сигналів тривісного акселерометра / В.В. Аврутов, С.В. Головач, О.М. Сапегін, М.Ю. Хутко // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2016. – №1. – С. 92–98.
3. Сапегин А.Н. Программная модель безплатформенной системы ориентации на базе инерциального измерительного модуля MAX21105 / А.Н. Сапегин, Д.В. Бугаёв // Вісник Інженерної академії України. – 2016. – №1. – С. 119-122.
4. Сапегін О.М. Безплатформна інерціальна навігаційна система на основі динамічно настроєних гіроскопів / О.М. Сапегін, М.О. Романов, Д.В. Бугайов // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2016. – №6. – С. 94–100. DOI: 10.20535/1810-0546.2016.6.81064.
5. V.V. Avrutov, A.N. Sapegin, Z.S. Stefanishin, V.V. Tsisarzh. Calibration of Inertial Measurement Unit // International Applied Mechanics, Vol.53,



No.2, March, 2017. – pp.228–236 (Входить до Scopus). DOI: 10.1007/s10778-017-0808-4.

6. Сапегін О.М. Алгоритм безплатформної інерціальної системи орієнтації на лазерних гіроскопах / О.М. Сапегін, М.В. Норенко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2017. – №2. – С. 108–113. DOI: 10.20535/1810-0546.2017.2.96257.

7. Сапегін О.М. Мікромеханічний інклінометр / О.М. Сапегін, Г.Ю. Строкач // Вісник НТУУ «КПІ», Серія Приладобудування. – 2020. – Вип.59(1) – С.24–29. DOI: 10.20535/1970.59(1).2020.210007.

8. Avrutov V. Inertial Position Determination Under Vibration / V. Avrutov, S. Lakoza, L. Ryzhkov, O. Sapegin // Vibrations in Physical Systems, 2020, 31(2), 2020201, P: 1–10.

9. Lazarev Y. Precision quaternion based one step strapdown attitude algorithm / Y. Lazarev, V. Avrutov, P. Mironenko, S. Davydenko, O. Sapegin // Вісник НТУУ «КПІ», Серія Приладобудування. – 2020. – Вип.60(2) – С.5–15. DOI: 10.20535/1970.60(2).2020.221274.

10. Безплатформна система орієнтації: Свідоцтво №62912 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Півторак Д.О. – Зареєстровано 10.12.2015 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

11. Безплатформна система орієнтації на базі динамічно налагоджених гіроскопів: Свідоцтво №64219 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Романов М.О., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Романов М.О., Півторак Д.О. – Зареєстровано 26.02.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

12. Мікромеханічна безплатформна система орієнтації: Свідоцтво №64218 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 26.02.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

13. Інтегрування алгоритму орієнтації методом Рунге-Кутта: Свідоцтво №65194 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 5.05.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

14. Avrutov V. Strapdown Latitude and Longitude Finder / V. Avrutov, S. Lakoza, O. Sapegin / In. Prog. IEEE 6th International Conference on Methods and Systems of Navigation and Motion Control (MSNMC), 2020, P: 29–33. DOI: 10.1109/MSNMC50359.2020.9255597.

15. Sapegin O. Latitude Autonomous Determination on Fixed Base with Varied Attitude / O. Sapegin, S. Lakoza, V. Avrutov, D. Buhaiov // In. Prog. Int. Conf. of Young Professionals «GeoTerrace-2020», 2020, Dec.2020, Vol. 2020, P:1–5. DOI: 10.3390/s17092146.

16. Сапегін О.М. Актуальні проблеми у проектуванні алгоритмів сучасних безплатформових інерціальних навігаційних систем / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2015: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : 3б. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2015. – С.29–30.

17. Сапегін О.М. Проектування точних алгоритмів сучасних безплатформових інерціальних навігаційних систем / О.М. Сапегін // Восьма міжнар. наук.-практ. конф. «ІРТК-2015» : 3б. тез. – К.: НАУ, 2015. – С.51–53.

18. Сапегін О.М. Моделювання системи орієнтації на базі MAX21105 / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2016: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : 3б. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016. – С.23–24.

19. Сапегін О.М. Програмна модель системи орієнтації на базі MAX21105 / О.М. Сапегін, Д.В. Бугайов // Дев'ята міжнар. наук.-практ. конф. «ІРТК-2016» : 3б. тез. – К.: НАУ, 2016. – С.55–56.

20. Сапегін О.М. Програмна модель системи орієнтації на базі динамічно налагоджуваних гіроскопів / О.М. Сапегін, М.О. Романов // Дев'ята міжнар. наук.-практ. конф. «ІРТК-2016» : 3б. тез. – К.: НАУ, 2016. – С.57–58.

21. Сапегин А.Н. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на основе прецизионных микромеханических датчиков / А.Н. Сапегин,

М.В. Норенко // Мат. 9-й Межд. научно-техн. конф. «Приборостроение». Минск, 2016. Том 2. С. 120–122.

22. Сапегін О.М. Безплатформова інерціальна навігаційна система на динамічно налагоджених гіроскопах / О.М. Сапегін, О.С. Бельський // Друга Українська наук.-техн. конф. «Спеціальне приладобудування: стан і перспективи» Зб. тез. Київ, Україна –К.:КП СПБ «Арсенал» 2016.– С. 89–90.

23. Сапегін О.М. Програмне моделювання безплатформової системи орієнтації на лазерних гіроскопах / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2017: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : Зб. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – С.24–25.

24. Сапегин А.Н. Калибровка блока лазерных гироскопов на неподвижном основании / А.Н. Сапегин, В.М. Шелевер // Мат. 10-й Межд. научно-техн. конф. молодых ученых и студентов «Новые направления развития приборостроения». Минск – 2017 Том 2. С. 124.

25. Сапегін О.М. Конічний рух інерціального вимірювального модуля / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2018: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : Зб. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – С.25.

26. Строкач Г.Ю. Кутомір на основі акселерометру ADXL-335 / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Погляд у майбутнє приладобудування. Зб. тез доп. наук.-практ. конф. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – С.46–48.

27. Сапегін, О. М. Аналіз швидкодії алгоритмів безплатформених інерціальних систем орієнтації / Сапегін О. М., Яковенко В. А. // XIX Міжн. наук.-техн. конф. «Приладобудування: стан і перспективи», 13-14 травня 2020 р., Київ, Україна : Зб. мат. конф. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – С. 17–19.

28. Строкач Г.Ю. Фільтр Маджвіка в алгоритмі інклінометра / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Дванадцята міжн. наук.-практ. конф. «ІРТК-2020» Зб. тез. –К.:НАУ, 2020.– С.258–260.

29. Строкач Г.Ю. Кутомір на основі мікромеханічного інерціального вимірювального модуля / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Зб. пр. XIII наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених «Погляд у майбутнє

приладобудування», 13-14 травня 2020, К.: ПБФ, КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2020. С.67–70.

30. Строкач Г.Ю. Комплементарний фільтр для мікромеханічного інклінометру / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень: мат. міжнар. наук. конф. (Т. 1), К., Україна: МЦНД. – 2020. С 58 – 60.

## SUMMARY

Sapegin O.M. Improvement of methods and algorithms for determining attitude parameters for strapdown inertial navigation system. – Qualifying scientific work, the manuscript.

Thesis for a candidate degree (PhD) in specialty 05.11.03 "Gyroscopes and navigation systems". – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2021.

In the thesis the following new scientific results are received:

1. For the first time the information model of strapdown inertial orientation system is substantiated and developed, containing procedures of spatial calibration of inertial measurement unit and initial exhibition of system, and also numerical integration of matrix Poisson's kinematic equation with use of signals of real inertial measuring modules.

2. Improved mathematical model that analytically describes the values of the drift error of the method of numerical integration due to the base conning motion from the motion parameters, the step of sensitive elements and the order of the method.

3. For the first time the method of compensation of algorithmic drifts of non-platform inertial orientation system at conical motion of the base is offered and substantiated, which consists in subtraction of analytically calculated value of algorithmic drift of system from current value of fixed angle at integration step.

The practical significance of the results of the dissertation is that: developed algorithmic and software for the procedure of spatial calibration of IMU strapdown attitude and navigation systems; the information model of conning drift of the numerical integration algorithm is obtained, which allows to compensate the error of the SIAS algorithm; developed algorithmic and software for simulation of SIAS, which includes calibration of IMU output signals, the procedure of the initial exhibition of the system and numerical integration of kinematic equations of object orientation; confirmed the efficiency and effectiveness of the developed software on real signals of precision computers.

In the dissertation work it is shown that modern means of inertial orientation and navigation are experiencing rapid growth. Increasing the accuracy of inertial meters, cheaper low-precision sensing elements, along with a huge increase in the speed of microprocessor technology lead to a significant expansion of the scope of strapdown inertial systems. This requires a revision of the classical approaches to the methods and algorithms used in inertial navigation.

A detailed substantiation and study of methods for calibration of inertial meters: accelerometers and gyroscopes. An information model of the sensor output signal has been developed, which considers various instrumental errors of the bench equipment and sensitive elements. Based on it, a simulation model of the calibration procedure was created and the high accuracy of the method of spatial calibration of the inertial measuring unit in comparison with the known ones was confirmed.

A family of new Picard numerical integration methods for the Poisson kinematic equation up to and including the fourth order of accuracy has been developed. The developed methods use different types of output signal of gyroscopes: projections of angular velocity, or increment of quasi-coordinates at the survey step. Numerical integration methods are obtained for different order (up to and including the third) polynomial approximation of the output signal of gyroscopes.

A simulation model of a strapdown inertial attitude system has been developed, which contains procedures for modeling the angular motion of the base, numerical integration of kinematic equations and a block for comparing the obtained results. This made it possible to study the accuracy of the developed algorithms for numerical integration of the Poisson equation in comparison with the well-known and widely used Panov's methods. A large set of empirical data allowed to obtain the dependence of the algorithmic drift of the orientation system at the conical motion of the base. This formula allows not only to predict the accuracy of integration algorithms depending on the motion parameters and characteristics of the method, but also to propose a method of compensation for this methodological error.

An information model of a strapdown inertial attitude system using a set of procedures of IMU calibration by spatial method, calculation of initial kinematic parameters of attitude by conducting an initial exhibition by the method of

gyrocompassing and finally calculation of kinematic parameters of object attitude by numerical integration. The developed algorithmic software has confirmed its adequacy and accuracy while working with real signals of precision sensitive elements.

**Key words:** strapdown inertial attitude system, Picard's method, Bortz's equation, Poisson's equation, calibration.

# ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ .....	2
SUMMARY .....	9
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ .....	15
ВСТУП.....	16
РОЗДІЛ1. СУЧАСНИЙ СТАН ТА ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ АЛГОРИТМІЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ ТА НАВІГАЦІЇ .....	24
1.1 Загальна характеристика безплатформних інерціальних навігаційних систем .....	24
1.2 Чутливі елементи безплатформних інерціальних навігаційних системи..	29
1.3 Калібрування чутливих елементів безплатформної інерціальної системи орієнтації .....	35
1.4. Початкова виставка інерціальних систем.....	39
1.5 Кінематичні параметри орієнтації.....	40
1.6 Алгоритми чисельного інтегрування кінематичних рівнянь .....	43
1.7 Огляд виконаних раніше робіт за напрямком досліджень .....	46
1.8 Мета і задачі даних наукових досліджень .....	54
РОЗДІЛ 2. ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ МЕТОДУ КАЛІБРУВАННЯ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ БЕЗПЛАТФОРМНИХ ІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ	56
2.1 Методи калібрування інерціального вимірювального модуля.....	57
2.1.1 Калібрування блока осьових акселерометрів методом тестових поворотів .....	59
2.1.2 Калібрування блоку гіроскопів на одновісному поворотному стенді	62
2.1.3 Метод просторового калібрування блоку акселерометрів .....	64
2.1.4 Метод просторового калібрування блоку гіроскопів .....	67
2.2 Дослідження точності методів калібрування .....	69



2.2.1 Розробка імітаційної моделі калібрування акселерометрів.....	69
2.2.2 Дослідження точності калібрування акселерометрів .....	75
2.2.3 Розробка імітаційної моделі калібрування гіроскопів .....	88
2.2.4 Дослідження точності калібрування гіроскопів .....	94
Висновки по розділу 2 .....	108
<b>РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КІНЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ БЕЗПЛАТФОРМНИХ ІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ ..</b>	
3.1. Кінематичні рівняння орієнтації безплатформних інерціальних систем	110
3.1.1 Кінематичні параметри кутового положення тіла.....	110
3.1.2 Кінематичні рівняння орієнтації.....	115
3.3 Загальні методи інтегрування диференціальних рівнянь .....	117
3.4 Методи чисельного інтегрування Пікара .....	122
3.4.1 Алгоритми Пікара на основі кінематичного рівняння Ейлера.....	122
3.4.2 Методи Пікара для інтегрування кінематичного рівняння Пуассона .....	124
Висновки по розділу 3 .....	131
<b>РОЗДІЛ 4. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ .....</b>	
4.1. Розробка імітаційної моделі безплатформної інерціальної системи орієнтації .....	132
4.2. Методика дослідження похибок алгоритмів .....	133
4.3 Дослідження точності алгоритмів чисельного інтегрування .....	141
4.3.1 Аналіз точності методів Пікара для векторного рівняння Ейлера....	142
4.3.2 Аналіз точності розроблених методів Пікара для рівняння Пуассона .....	143
4.3 Уточнення моделі алгоритмічного дрейфу процедури чисельного інтегрування.....	147

Висновки по розділу 4 .....	156
РОЗДІЛ 5. СИНТЕЗ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ .....	157
5.1 Початкова виставка безплатформних систем .....	158
5.1.1 Базовий алгоритм грубої початкової виставки .....	158
5.1.2 Універсальний алгоритм грубої початкової виставки .....	162
5.1.3 Перевірка алгоритмів початкової виставки на адекватність .....	163
5.2 Розробка безплатформної інерціальної системи орієнтації.....	165
5.4 Програмне моделювання безплатформної інерціальної системи орієнтації .....	167
Висновки до розділу 5 .....	180
ВИСНОВКИ.....	181
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	184
ДОДАТОК А .....	197
ДОДАТОК Б.....	205
ДОДАТОК В .....	208
ДОДАТОК Г .....	212
ДОДАТОК Д.....	214
ДОДАТОК Є .....	218
ДОДАТОК Ж .....	223

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БІНС – безплатформна інерціальна навігаційна система;  
БІСО – безплатформна інерціальна система орієнтації;  
ВОГ – волоконно-оптичний гіроскоп;  
ДКШ – датчик кутової швидкості;  
ДНГ – динамічно налагоджений гіроскоп;  
ІВМ – інерціальний вимірювальний модуль;  
КЛГ – кільцевий лазерний гіроскоп;  
ММА – мікромеханічний акселерометр;  
ММГ – мікромеханічний гіроскоп;  
МНК – матриця напрямних косинусів;  
ОДГ – оптична ділильна головка;  
СК – система координат;  
СНС – супутникова навігаційна система;  
ХТГ – хвильовий твердотільний гіроскоп;  
ЧЕ – чутливий елемент;

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Для керування будь-яким рухомим об'єктом необхідна інформація про його поточне кутове положення у просторі та місцезнаходження. Задачі орієнтації та навігації, за рахунок використання сучасних технічних засобів, розв'язуються побудовою відповідних систем: радіо та супутникових, оптичних, оглядово-порівняльних, інерціальних та інших. Останні з них, інерціальні, мають одну суттєву перевагу перед іншими – повну автономність. Це дає змогу здійснювати керування рухомими об'єктами без будь-якого зв'язку із зовнішнім світом, що для виконання багатьох задач є вирішальним.

Постійне вдосконалення технології виробництва інерціальних вимірювачів, а також стрімке зростання швидкодії сучасної мікропроцесорної техніки призвели до широкого розповсюдження засобів інерціальної орієнтації і навігації. Безплатформні інерціальні системи використовуються для оцінки кутового положення об'єктів, у різноманітних системах стабілізації та керування. Зараз це можуть бути не лише класичні літаки, ракети, кораблі чи підводні човни, а й різноманітні безпілотні літальні апарати, маніпулятори, робототехнічні системи, тощо. Безплатформні системи являються гармонічним синтезом апаратного та алгоритмічно-програмного забезпечення. У якості чутливих елементів можуть використовуватися як недорогі мікромеханічні вимірювачі низької точності, так і прецизійні датчики кутової швидкості та акселерометри. Алгоритмічно-програмні комплекси будуються за класичною ідеологією безплатформної орієнтації та навігації, але часто можна спостерігати складні комплексовані системи, що ґрунтуються на використанні додаткових джерел інформації.

Розробки засобів інерціальної навігації розпочалися з кінця 50-х років ХХ століття переважно в СРСР та США. Такі вчені як О.Ю. Ішлінський, В.Н. Бранець, І.П. Шмиглевський, А.П. Панов, Д.В. Лебедев, А.І. Ткаченко, Paul G. Savage, John E. Bortz, Robin B. Miller та багато інших заклали основи та сформулювали основні підходи для інерціальної навігації. Разом із тим, при

аналізі їх робіт, видно, що автори мусили враховувати значні обмеження швидкодії тогочасних бортових обчислювачів та точність вимірювачів. Увесь синтез алгоритмічно-програмного забезпечення був спрямований на контроль швидкодії методів, як правило, у збиток точності.

Основний підхід синтезу алгоритмів орієнтації полягає у використанні параметрів Родріга–Гамільтона (кватерніона), що формують кінематичне рівняння орієнтації. Проте, приріст кватерніона на кроці інтегрування розраховується за приростом проміжного кінематичного параметру – вектору Ейлера. З одного боку, алгоритми інтегрування кінематичного рівняння з вектором Ейлера добре розроблені і забезпечують прийнятну точність для сучасних датчиків, проте сам цей вектор може вироджуватись при певних еволюціях траєкторії. Та й використання проміжних кінематичних параметрів ускладнює синтез алгоритмічно-програмного забезпечення інерціальних систем. Крім того, кутове положення об'єкту може бути описане двома однаковими кватерніонами з протилежними знаками, що може призвести до неоднозначності у визначенні орієнтації. Існує лише один кінематичний параметр, що здатен однозначно описати кутову орієнтації і не вироджується при будь-якому русі об'єкту – матриця напрямних косинусів.

Іншою проблемою визначення орієнтації є алгоритмічний дрейф усіх методів чисельного інтегрування під час, так званого, кінчного руху основи: гармонічної кутової хитавиці, чи вібрації основи навколо двох осей із зсувом фази коливань. Такий рух призводить до виникнення дрейфу кута, навколо якого основа нерухома. Переважна більшість алгоритмів чисельного інтегрування проектувалася для подолання саме цього кінчного дрейфу шляхом емпіричного підбору коефіцієнтів у формулах, як правило, за результатами імітаційного моделювання. Проте такий підхід призводить до виникнення додаткової методичної похибки при іншому русі основи.

Виникає потреба у розробці таких методів розрахунку кутової орієнтації об'єкту, що могли б забезпечувати простоту синтезу, однозначність та високу точність за довільного руху основи.

**Актуальність теми** полягає в обґрунтуванні та розробці нових високоточних алгоритмів безплатформних систем орієнтації шляхом впровадження нових методів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації на основі матриці напрямних косинусів та дослідженню їхнього алгоритмічного дрейфу у наслідок конічного руху основи.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційну роботу виконано в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» на кафедрі приладів і систем орієнтації і навігації відповідно до Постанови Кабінету міністрів України №942 від 07.09.2011 «Про затвердження переліку пріоритетних тематичних напрямків наукових досліджень і науково-технічних розробок на період до 2020 року», згідно Розпорядження Кабінету Міністрів України № 600-р від 30.08.2017 р. про Перелік критичних технологій у сфері виробництва озброєння та військової техніки наукового напрямку КПІ ім. Ігоря Сікорського «Розробка методів побудови і дослідження навігаційних приладів і систем на нових фізичних принципах та технологій їх застосування», а також у рамках науково-технічної роботи «Розробка алгоритмів початкової виставки і виставки у польоті безплатформової інерціальної навігаційної системи» (№489/6) у якій автор був виконавцем. Робота виконувалась відповідно до задач основного науково-технічного напрямку досліджень кафедри приладів і систем орієнтації і навігації.

**Мета і завдання дослідження.**

**Метою роботи є підвищення точності безплатформної інерціальної навігаційної системи шляхом розробки та впровадження нових високоточних методів визначення кінематичних параметрів орієнтації.**

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі основні задачі:

- на основі аналізу проблеми в літературних джерелах визначити актуальні методи калібрування інерціальних вимірювачів та визначення орієнтації об'єкту;
- обґрунтувати методи чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації;

- розробити імітаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації та провести моделювання з метою дослідження точності алгоритмів інтегрування;
- розробити інформаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації, що включає в себе блок калібрування вихідних сигналів інерціальних вимірювачів, процедуру початкової виставки системи та метод чисельного інтегрування кінематичного рівняння;
- провести експериментальне дослідження отриманих високоточних алгоритмів на реальних системах орієнтації;
- впровадити результати дослідження.

*Об'єктом дослідження* є процес визначення параметрів орієнтації безплатформною інерціальною навігаційною системою.

*Предметом дослідження* є методи і алгоритми калібрування чутливих елементів та чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації безплатформною інерціальною навігаційною системою.

*Методи дослідження.* Для вирішення поставлених задач використовувалися фундаментальні методи інерціальної навігації та теоретичної механіки. При дослідженні точності методів калібрування використовувалися методи найменших квадратів та теорії ймовірності. При дослідженні методів чисельного інтегрування використані методи поліноміальної інтерполяції. Імітаційне моделювання виконувалося у програмному середовищі Matlab.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Вперше обґрунтовано і розроблено інформаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації, що містить процедури просторового калібрування блоку інерціальних вимірювачів та початкової виставки системи, а також чисельне інтегрування матричного кінематичного рівняння Пуассона з використанням сигналів реальних інерціальних вимірювальних модулів.

2. Вдосконалено математичну модель, що аналітично описує величини дрейфу похибки методу чисельного інтегрування внаслідок конічного руху

основи від параметрів руху, кроку опитування чутливих елементів та порядку методу.

3. Вперше запропоновано та обґрунтовано метод компенсації алгоритмічних дрейфів безплатформної інерціальної системи орієнтації при кінчному русі основи, що полягає у відніманні розрахованого аналітично значення алгоритмічного дрейфу системи від поточного значення нерухомого кута на кроці інтегрування.

### **Практична цінність одержаних результатів.**

Практична цінність одержаних результатів полягає в тому, що:

1. Розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення для проведення процедури просторового калібрування ІВМ безплатформних систем орієнтації і навігації.

2. Отримано інформаційну модель кінчного дрейфу алгоритму чисельного інтегрування, що дозволяє проводити компенсацію похибки алгоритму БІСО.

3. Розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення для проведення імітаційного моделювання роботи БІСО, що включає в себе калібрування вихідних сигналів ІВМ, проведення процедури початкової виставки системи та чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації об'єкту.

4. Підтверджена працездатність та ефективність розробленого програмного забезпечення на реальних сигналах прецизійних ІВМ.

Розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення захищено авторськими свідоцтвами України на твір.

### **Впровадження результатів.**

Алгоритми чисельного інтегрування кватерніонного рівняння орієнтації об'єкту були використані при розробці програмного забезпечення безплатформної інерціальної навігаційної систем в рамках науково-технічної роботи «Розробка алгоритмів початкової виставки і виставки у польоті безплатформової інерціальної навігаційної системи» для КБ «Південне». Розроблений алгоритм чисельного інтегрування кінематичного рівняння Пуассона та досліджений метод просторового калібрування інерціального



вимірювального модуля було впроваджено в КП СПБ «Арсенал» (м. Київ) при синтезі програмного забезпечення для безплатформної інерціальної навігаційної системи та при проведенні калібрування її чутливих елементів. Отримане алгоритмічне та програмне забезпечення для безплатформної системи орієнтації було впроваджено на ТОВ «Гіротех» та АТ «Елміз» при модернізації безплатформних систем орієнтації і навігації. Алгоритмічне та програмне забезпечення використовується в навчальному процесі кафедри приладів і систем орієнтації і навігації Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при проектуванні алгоритмів інерціальних систем.

### **Особистий внесок здобувача.**

Автором розроблено програмне забезпечення для проведення імітаційного моделювання процедури калібрування прецизійних акселерометрів та гіроскопів. Проведено ретельне дослідження точності нового методу просторового калібрування.

Автором проаналізовано основні підходи при синтезі алгоритмів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації. Показано основні типи кінематичних параметрів, що використовуються в наш час та встановлено взаємозв'язки між ними, проаналізовано їх переваги і недоліки. Наведено основні кінематичні рівняння орієнтації, що використовуються зараз на практиці. Створено імітаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації для дослідження різноманітних алгоритмів інтегрування. У результаті було сформульовано методику, що дозволяє проводити порівняльний аналіз алгоритмів чисельного інтегрування різноманітних кінематичних рівнянь. На основі великої кількості емпіричних даних сформульовано залежність алгоритмічного дрейфу системи орієнтації за умови кінцевого руху основи. Використовуючи цю математичну модель сформульовано метод корекції алгоритмічного дрейфу.

Розроблено алгоритм безплатформної інерціальної системи орієнтації з використанням сигналів реальних високоточних лазерних гіроскопів та навігаційних акселерометрів вітчизняного виробництва.

У роботах, виконаних у співавторстві, особисто автором виконано: імітаційне моделювання скалярного [95] та просторового [97] методів калібрування інерціального вимірювального модуля; у роботі [92] обговорюється можливість калібрування прецизійних датчиків кутової швидкості на нерухомій основі; досліджено точність розроблених методів Рунге–Кутти і Пікара інтегрування кінематичних рівнянь Пуассона [103] та у кватерніонах [113] та отримано емпіричну залежність алгоритмічного дрейфу системи під час кінцевого руху основи; в чисельних роботах [101, 104–107, 114, 119–124, 130] представлено результати синтезу та імітаційного моделювання безплатформних систем орієнтації з використанням різноманітних методів чисельного інтегрування та вихідних сигналів датчиків кутової швидкості; робота [119] присвячена дослідженню алгоритмічного дрейфу системи орієнтації у ході кінцевого руху основи; у роботі [108] проведено аналіз швидкодії методів чисельного інтегрування Рунге–Кутти для кватерніонного кінематичного рівняння і матриці напрямних косинусів; роботи [101, 131–133] присвячено розширенню розглянутих алгоритмів безплатформних систем орієнтації та введенню корекції постійних дрейфів гіроскопів фільтром Маджвіка і комплементарним фільтром; у роботах [115–117] використовуються розроблені методи визначення поточної орієнтації об'єкту для розрахунку місцевих широти і довготи на нерухомій основі та у випадку вібрації; на програмне забезпечення було отримано авторські свідоцтва [118, 125–127].

### **Апробація результатів дисертації.**

Наукові та практичні результати досліджень обговорювалися на наступних конференціях, конгресах, з'їздах, семінарах, нарадах:

- XXIX conference Vibrations in Physical Systems, м. Познань, Польща, 2020 р.;
- IEEE 6th International Conference on Methods and Systems of Navigation and Motion Control, м. Київ, 2020 р.;
- International Conference of Young Professionals «GeoTerrace-2020», м. Львів;

- міжнародна науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”, м. Київ, 2015 – 2018 рр. та 2020 р;
- всеукраїнська науково-практична конференція «Погляд у майбутнє приладобудування», м. Київ 2019 та 2020 рр.
- міжнародна науково-практична конференція “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси”, м. Київ, 2015, 2016 2020 рр.;
- друга Всеукраїнська науково-технічній конференції «Спеціальне приладобудування: стан і перспективи», м. Київ 2016 р.;
- дев’ята міжнародна науково-технічній конференція «Приборостроение» м. Мінськ, Білорусь, 2016 р.;
- десята міжнародна науково-технічній конференція молодих вчених і студентів «Новые направления развития приборостроения» м. Мінськ, Білорусь, 2017 р.;
- міжнародна науково-практичній конференція «Теоретичні та прикладні аспекти радіотехніки, приладобудування і комп’ютерних технологій», м. Тернопіль, 2019 р.;
- міжнародна наукова конференція «Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень», м. Київ, 2020 р.

### **Публікації.**

За темою дисертації опубліковано 30 робіт, серед яких 9 статей у провідних фахових виданнях, з них 1 стаття у виданні країни ЄС та 8 статей у виданнях України, що входить до міжнародних наукометричних баз, 4 авторські свідоцтва України на твір, 17 тез доповідей міжнародних конференцій.

### **Структура і об’єм.**

Дисертація містить вступ, огляд стану проблеми і постановку задачі дослідження, 5 розділів, загальні висновки по роботі, список використаних джерел із 133 найменувань та 7 Додатків. Дисертаційна робота викладена на 227 сторінках, основний зміст роботи становить 196 сторінки друкованого тексту в тому числі 101 рисунок і 4 таблиці.

# **РОЗДІЛ1.**

## **СУЧАСНИЙ СТАН ТА ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ АЛГОРИТМІЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ ТА НАВІГАЦІЇ**

### ***1.1 Загальна характеристика безплатформних інерціальних навігаційних систем***

Інерціальні навігаційні системи (ІНС) є основою бортового навігаційного забезпечення транспортних засобів широкого призначення [1–4]. Вони є універсальним джерелом інформації про поточну орієнтацію, параметри руху та місцезнаходження рухомого об'єкта.

Розробки надійних навігаційних систем розпочалися в 60-х роках ХХ століття з побудови платформних інерціальних навігаційних систем [5]. За допомогою гіроскопічно стабілізованої платформи на борту об'єкта фізично моделювалася географічна система координат (СК). Акселерометри, встановлені на платформі, вимірювали проекції уявного прискорення на осі географічної СК. Після подвійного інтегрування сигналів акселерометрів, система видавала інформацію про приріст координат у географічній СК. Через недосконалість технології виробництва, а отже і недостатню точність чутливих елементів (ЧЕ), платформні системи швидко накопичували похибку, що не дозволяло їх використовувати тривалий час [2].

На сьогоднішній день світові тенденції розвитку інерціальної навігації пов'язані з практично повним переходом до ідеології безплатформних інерціальних навігаційних систем (БІНС) [1, 4–6].

Ключова особливість БІНС полягає у жорсткому закріпленні блоку інерціальних чутливих елементів у корпусі, що прив'язаний до осей об'єкта. При цьому географічна СК не моделюється фізично гіростабілізованою платформою, а розраховується аналітично, що вимагає більшої точності ЧЕ ніж в платформних системах незалежно від їх типу. Реальна електромеханічна платформа дозволяє

при кожному включенні системи провести калібрування ЧЕ, виконати її горизонтування і фізично встановити орієнтацію осей платформи шляхом подвійного гірокомпасування. В БІНС аналогічні процедури виконуються аналітично в рамках початкової виставки [2, 3, 7].

У порівнянні з платформними ІНС БІНС мають наступні переваги:

- вихідна інформація істотно не залежить від маневрування об'єкту;
- в 3-4 рази більша частоту вихідного сигналу;
- в 1,5-3 рази менший час початкової виставки;
- висока надійність (напрацювання на відмову платформних ІНС складає близько 1500 год, а для БІНС – 10000 год для лазерних і волоконно-оптичних гіроскопів);
- в 2-3 рази менші масо-габаритні параметри;
- в 10 разів менше енергоспоживання;
- нижча вартість [2];
- стійкість до вібраційних та ударних впливів [3].

Сучасні БІНС розрізняються за рівнем точності на системи низької, середньої і високої точності.

Системи низької точності використовуються, як правило, у системах стабілізації, наприклад, оптичних і антенних систем або в системах керування стійкістю рухомих об'єктів. Похибка визначення координат в таких системах варіюється в діапазоні від 5,5 км до 37 км за одну годину роботи [8]. Як чутливі елементи в системах низької точності використовуються в основному мікромеханічні гіроскопи (ММГ) та мікромеханічні акселерометри (ММА).

БІНС середньої і високої точності призначені для забезпечення автономної навігації. Похибки визначення координат у БІНС середньої точності складають від 1,85 км до 5,5 км за годину роботи, а високоточних – від 0,4 км до 1,85 км за годину роботи [8]. БІНС високої точності використовуються перш за все в задачах спеціального призначення.

Основною перевагою інерціальних систем у порівнянні з іншими системами позиціонування є їхня автономність та завадостійкість, проте вони не

позбавлені недоліків, головним з яких є накопичення похибки з часом. Цей недолік значно знижує точність системи. Для розв'язання цієї проблеми розроблюються спеціальні алгоритми, що компенсують похибки ЧЕ, проте вони мають синтезуватися індивідуально виходячи із складу ЧЕ БІНС [9].

З розвитком і розповсюдженням систем глобального позиціонування з'явилась можливість використання супутникової навігаційної інформації для визначення параметрів руху об'єктів. У наш час впровадження супутникових навігаційних систем (СНС) в інерціальні системи дозволяє значно підвищити точність визначення координат за рахунок отримання навігаційної інформації з супутників. Проте досвід використання СНС показав їх чисельні недоліки [10]: при втраті супутникового сигналу система втрачає працездатність, у зв'язку зі швидким накопиченням похибок інерціальних вимірювачів, крім того, використання технології спуфінгу може призвести до перехоплення керування об'єкту іншими користувачами.

Виходячи з переваг БІНС та СНС, сучасні навігаційні системи часто будуються на їхньому одночасному використанні. Системи, що включають в себе СНС та БІНС отримали назву інтегрованих систем [11]. У таких системах БІНС працює в режимі корекції від СНС. Серед інтегрованих навігаційних систем виділяються системи з низьким і високим рівнем інтеграції. У першому випадку, навігаційна інформація з СНС використовується для корекції приросту координат і лінійної швидкості, визначених БІНС. Високоінтегровані системи дозволяють корегувати дрейфи інерціальних вимірювачів та навігаційного алгоритму БІНС. Використання такої інтегрованої системи дозволяє значно знизити похибку і тим самим підвищити точність системи, при цьому при втраті супутникового сигналу система продовжує працювати в інерціальному режимі більш тривалий час.

Для наочності переваги і недоліки БІНС, СНС та інтегрованих систем наведені в табл. 1.1 з роботи [8].

Таблиця 1.1 Переваги і недоліки навігаційних систем

Тип системи	Переваги	Недоліки
БІНС	повна автономність; завадостійкість; інформація про орієнтацію;	накопичення похибок з часом; необхідність початкової виставки;
СНС	висока точність; не має накопичення похибок з часом;	складність визначення орієнтації, а отже неможливість роботи в автономному режимі; схильність до зовнішніх завад;
Інтегрована система	робота в автономному режимі; інформація про орієнтацію; висока точність;	при втраті супутникового сигналу можливий ріст похибок; короткочасна робота в інерціальному режимі;

Для роботи БІНС необхідно сформувати аналітичну платформу. Це певний математичний апарат, що дозволяє описати орієнтацію систем координат, зв'язаної з об'єктом відносно опорної (географічної) СК. В рамках БІНС цю задачу виконує підсистема, яку називають безплатформною інерціальною системою орієнтації (БІСО) [1]. Інформація про орієнтацію використовується як безпосередньо при керуванні рухом, так і для перепроєктування вектору прискорення з його подальшим подвійним інтегруванням для вирішення навігаційної задачі.

БІСО розраховує кінематичні параметри орієнтації зв'язаної СК. Це можуть бути кути орієнтації Ейлера–Крилова, матриця напрямних косинусів або різноманітні вектори орієнтації [1, 12–14]. Алгоритми БІСО використовують у якості вхідних величин проекції абсолютної кутової швидкості обертання зв'язаної СК, виміряні датчиками кутової швидкості (ДКШ) БІНС. На основі проєкцій кутової швидкості формуються кінематичні рівняння, які після інтегрування визначають поточну орієнтацію об'єкта відносно географічної СК. Крім того, сигнали датчиків кутової швидкості та акселерометрів БІНС

використовуються для отримання початкових значень параметрів кінематичних рівнянь – початкової виставки БІНС [15]. Принципову схему БІНС представлено у роботі [3].

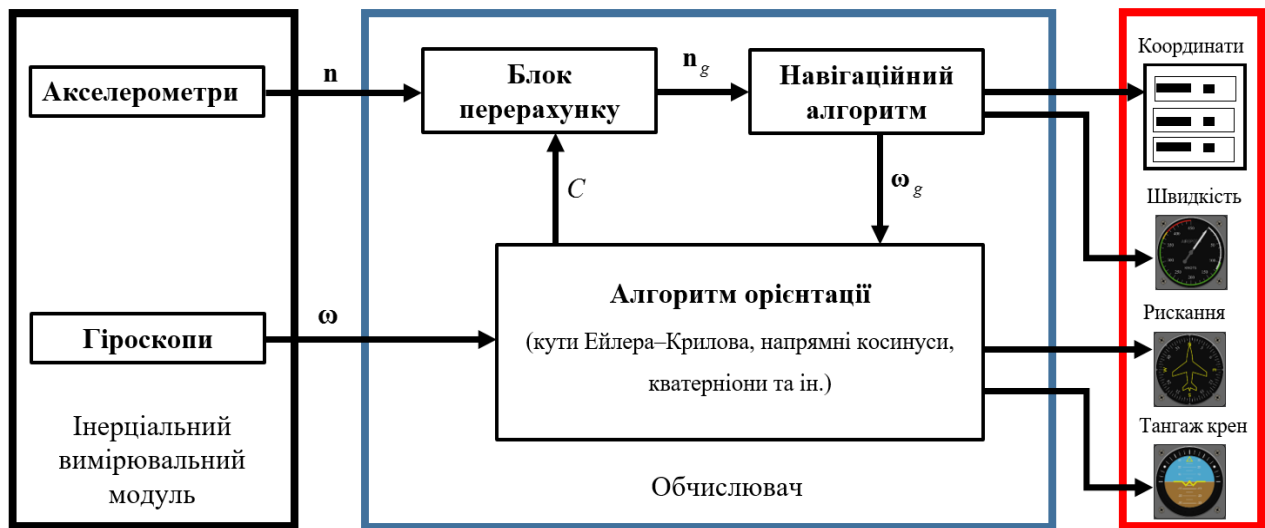


Рис.1.1 Безплатформна інерціальна навігаційна система

Інерціальний вимірювальний модуль (ІВМ) БІНС (рис.1.1) складається із тріади гіроскопів та акселерометрів. Сигнали з проєкціями абсолютної кутової швидкості руху основи  $\omega$ , виміряні гіроскопами, надходять до блоку Обчислювача. У ньому Алгоритму орієнтації (БІСО) розраховує поточну орієнтацію ІВМ, а отже і об'єкта відносно базової системи координат. На рис.1.1 для цього використовується матриця напрямних косинусів  $C$ . Ця інформація використовується у Блоку перерахунку для перепроєктування виміряних акселерометрами проєкцій уявного прискорення  $n$  у базову (географічну) СК. Навігаційний алгоритм здійснює подвійне інтегрування прискорення  $n_g$ . На виході БІНС маємо інформацію про координати об'єкта, його лінійну швидкість та кутове положення.

Точність БІСО в значній мірі впливає на точність навігаційної системи в цілому. Вона визначається інструментальними похибками інерціальних вимірювачів БІНС та методичними похибками алгоритмічного забезпечення [1, 3, 4, 16, 17].

У роботі [6] сформульовано основні вимоги до точності алгоритмів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь БІСО в межах 5% від сумарної



величини інструментальних похибок. Наприклад, для високоточних БІНС на кільцевих лазерних гіроскопах (КЛГ) величина алгоритмічного дрейфу не має перевищувати  $0,0001$  °/год. Для цього похибки математичного та програмно-алгоритмічного забезпечення, що використовуються на різних етапах роботи БІНС, мають бути, щонайменше, на порядок меншими допустимої алгоритмічної похибки [18].

## ***1.2 Чутливі елементи безплатформних інерціальних навігаційних системи***

До складу ІВМ БІНС, як правило, входять датчики кутової швидкості та акселерометри. У якості ДКШ БІНС можуть використовуватись гіроскопи, що працюють на різних фізичних принципах: поплавковий двоступеневий гіроскоп, динамічно настроєний гіроскоп, твердотільний хвильовий гіроскоп, оптичні та мікромеханічні гіроскопи. На точність БІСО впливають характеристики конкретного ДКШ: діапазон вимірювання, нестабільність зміщення нуля. Дані акселерометрів використовуються лише для початкової виставки системи та її корекції, тому мало впливають на точність БІСО.

### ***Поплавковий двоступеневий гіроскоп***

Гіроскопічні тахометри (гіротахометри) – це гіроскопічні прилади для вимірювання абсолютної кутової швидкості основи, які побудовані на основі поплавкового двоступеневого гіроскопа. Вони були одними із перших ДКШ, що почали використовуватись у БІНС [5, 10, 15]. При появі кутової швидкості, що проектується на вісь чутливості виникає гіроскопічний момент, що призводить до повороту гіромотора навколо вимірювальної осі. Цей кут повороту пропорційний величині кутової швидкості. Для зменшення порогу чутливості, гіродвигун двоступеневого датчика розміщують у герметичній камері, що занурена у спеціальну рідину. Це дозволяє розвантажити підшипники опор гірокамери та зменшити момент сил сухого тертя.

Як правило, використовуються компенсаційні датчики, з «електричною пружиною» — зворотнім зв'язком, — що створює момент, який рівний гіроскопічному. Напруга, що необхідна для формування моменту компенсації пропорційна величині проекції абсолютної кутової швидкості на вісь чутливості ДКШ.

Типові двоступеневі ДКШ мають діапазон вимірювання кутової швидкості в межах  $10^{-1} \dots 10^2$  градусів за секунду. Проте існують гіротахметри, що здатні вимірювати кутові швидкості, що мають порядок кутової швидкості обертання Землі ( $10^{-4} \dots 10^{-5}$  1/с) [1, 5, 19].

### *Динамічно настроєний гіроскоп*

Динамічно настроєні гіроскопи (ДНГ) є прикладом осциляторних чутливих елементів систем орієнтації та навігації. Ротор ДНГ виконується у вигляді кільця, що за допомогою внутрішнього торсіонного підвісу приєднується до двигуна. Принцип динамічного настроювання полягає у використанні динамічної жорсткості обертових елементів вібраційного гіроскопу з метою спрощення резонансного настроювання, або для компенсації статичної жорсткості елементів пружного підвісу гіроскопу [20].

ДНГ широко застосовуються у тих випадках, коли передбачаються високі кутові швидкості  $100 \dots 1000$  °/год руху об'єкту, високий діапазон перевантажень  $50 \dots 400$  g, необхідні невеликі розміри і маса, висока стабільність і низька вартість. У порівнянні з іншими гіроскопами ДНГ мають істотні переваги [1, 21, 22]:

- відносно стабільна повторюваність постійної складової дрейфу;
- висока надійність і тривалий термін служби, обмежений шарикопідшипниками, що застосовуються, або електронними елементами;
- низька вартість;
- низький рівень випадкового шуму;

Разом з тим необхідно відмітити недоліки ДНГ:

- чутливість до механічних резонансів на високих частотах і до вібрацій;

- наявність шуму на окремих гармоніках частоти власного обертання.

Типові ДНГ мають випадковий дрейф нуля порядку  $0,01 \dots 1 \text{ } ^\circ/\text{год}$ ;

### ***Твердотільний хвильовий гіроскоп***

Одним з перспективних датчиків кутової швидкості є твердотільний хвильовий гіроскоп (ТХГ).

Чутливим елементом такого гіроскопічного приладу є резонатор – тонка напівсферична, або циліндрична оболонка, закріплена на циліндричному стрижні. Резонатор виготовляється з матеріалів, що володіють високою ізотропією і добротністю (кварцового скла, синтетичного сапфіру). Головною перевагою хвильового твердотільного гіроскопа є простота конструкції і точність вимірювань. Так випадковий дрейф ТХГ становить  $0,001 - 0,01 \text{ } ^\circ/\text{год}$ . Досягнення високої точності вимагає, крім використання матеріалів зі стабільними характеристиками, високоточної і коректної математичної моделі залежності кута хвилі від повороту резонатора; використання надійних систем генерації, підтримки коливань резонатора, зчитування інформації; постійний контроль і корекція метрологічних характеристик приладу.

До недоліків відомих конструкцій гіроскопів можна віднести наступні [23, 24]:

- металізація зовнішньої і внутрішньої поверхонь значно знижує добротність резонатора;
- датчики на нижній або верхній основі знаходяться всередині напівсферичної поверхні резонатора, де амплітуда коливань резонатора значно менше, ніж амплітуда коливань кромки резонатора, що призводить до зниження точності вимірювань;
- постійна напруга на поверхні резонатора призводить до появи струмів витоку між електродами і, як наслідок, виникнення додаткових складових дрейфу гіроскопа;

### ***Волоконно-оптичний гіроскоп***

Принцип роботи волоконно-оптичного гіроскопа (ВОГ) заснований на ефекті Саньяка. Оптичне випромінювання від джерела, проходячи через Х-розділювач потрапляє на вхід інтегрально-оптичної схеми, розділяється на два промені, які розповсюджуються по волоконно-оптичному контуру у зустрічних напрямках. Якщо контур знаходиться в спокої, різниця фаз між променями відсутня ( $\Delta\varphi_s = 0$ ). При обертанні контуру щодо системи відліку виникає різниця фаз  $\Delta\varphi_s$ , пропорційна кутовій швидкості обертання ВОГ. Зміна різниці фаз призводить до зміни потужності випромінювання, що фіксується фотоприймачем.

При простоті принципу роботи приладу і його високій чутливості до кутової швидкості обертання, він в той же час надзвичайно чутливий до різних зовнішніх впливів, що призводить до виникнення паразитного сигналу і, як наслідок, до зниження точності вимірювань, тому проблема створення високоточних ВОГ досі залишається актуальною. Більш того, можна констатувати факт, що виробляти подібні пристрої здатні тільки високорозвинені країни. Разом із тим ВОГ являється одним із основних ДКШ для інерціальної навігації. Їхній випадковий дрейф становить 0,01 – 0,001 °/год [3, 5].

### ***Кільцевий лазерний гіроскоп***

Кільцевий лазерний гіроскоп, як і ВОГ, є найрозповсюдженішим датчиком кутової швидкості для інерціальної навігації [3, 5, 25].

Фізичний принцип роботи КЛГ також заснований на використанні ефекту Саньяка. Два промені генеруються в резонаторі лазерного гіроскопа і, якщо прилад обертається, то відбувається генерація хвиль різної частоти для різних напрямків через різну довжину резонатора для різних напрямків обходу, викликаної обертанням основи.

Резонатор лазерного гіроскопа може бути досить складним, але зазвичай це – кільцевий резонатор з трьома або чотирма дзеркалами. Резонатор може бути виконаний як моноблочна конструкція, або складатися з окремих елементів.

Часто резонатор виконується в формі трикутника або квадрата. Розмір гіроскопа варіюється від декількох сантиметрів до декількох метрів.

Два лазерних промені, що генеруються і підсилюються в порожнині гіроскопа, безперервно циркулюють по резонатору в протилежних напрямках. У лазерному гіроскопі створюється і підтримується стояча хвиля, а її вузли і пучності в ідеальному випадку пов'язані з інерціальною системою відліку. Таким чином, положення вузлів і пучностей не змінюється, якщо гіроскоп не обертається (в площині кільцевого контуру) відносно інерціальної системи відліку, а при повороті резонатора (корпусу гіроскопа) фотоприймачі вимірюють кут повороту, зчитуючи по інтерференційні смуги, що пробігають по ним [25].

Чутливість лазерного гіроскопа пропорційна площі поверхні, що обмежена променями лазера, і може починатися з  $15^\circ/\text{с}$  і навіть менше. Нестабільність зміщення нуля лазерних гіроскопів може становити від  $0,005^\circ/\text{год}$  до  $0,02^\circ/\text{год}$ .

Особливістю ВОГ та КЛГ є характер вихідного сигналу. У залежності від конфігурації, оптичні гіроскопи можуть видавати інформацію про проекцію кутової швидкості на вісь чутливості, або про приріст кута (квазікоординати) на інтервалі опитування датчика.

### *Мікромеханічні гіроскопи*

В останні роки мікромеханічні інерціальні датчики на основі технології мікроелектромеханічних систем (МЕМС) стають об'єктом все більш пильної уваги як з боку розробників інерціальних вимірювачів, так і з боку споживачів цієї продукції. Привабливими якостями цих приладів, що визначили їх унікально швидкий розвиток, є надзвичайно низька вартість, висока надійність і гранично малі габарити, що досягаються переважно за рахунок використання групових технологій мікроелектроніки, адаптованих до виготовлення мікромеханічних пристроїв [26].

Як правило, в якості датчика кутової швидкості недорогих систем орієнтації застосовуються мікромеханічні гіроскопи (ММГ). ММГ призначений для вимірювання кутової швидкості і являє собою інтегрований пристрій з

розмірами в декілька міліметрів, що складається з механічного чутливого елемента і електронних систем управління [27].

На даний момент всі відомі ММГ можна розбити на два типи: роторні і осциляторні вібраційні гіроскопи. В основу такого поділу покладено ознаку, що визначається характером первинного руху ЧЕ. Осциляторні вібраційні гіроскопи можна поділити на два види: гіроскопи з зосередженими і з розподіленими параметрами [20, 27].

Принцип роботи ММГ полягає у створенні відносно корпусу знакозмінного поступального або обертального руху ЧЕ по одному із ступенів свободи і вимірюванні переміщень по іншому ступеню свободи, які виникають під дією коріолісових сил або гіроскопічних моментів при наявності переносної кутової швидкості корпусу. В роботі [26] наведені типові характеристики ММГ згідно останніх публікацій виробників. Автор відмічає, що випадковий дрейф ММГ може становити  $0,001$  °/год, що ставить їх точність в один ряд із прецизійними ВОГ та КЛГ. Проте такий рівень точності можливий лише у виключних випадках і поки що недосяжний для більшості користувачів. Натомість більшість ММГ мають випадковий дрейф нуля від  $10000$  °/год до  $0,01$  °/год у залежності від рівня виконання і призначення.

Разом з перевагами ціни, габаритів і надійності, необхідно відзначити, що точність мікромеханічних датчиків поки не може повною мірою задовольнити всіх потреб. Виходячи з цього, використання тільки мікромеханічних датчиків не завжди можливо. Як правило створюються інтегровані системи, до складу яких входять блок інерціальних MEMS датчиків і приймач сигналу СНС.

### ***Перспективні ДКШ***

У теперішній час у лабораторіях провідних наукових центрів (Стенфордський університет, група Марка Касевича) розробляється наступне покоління гіроскопів на ефекті Саньяка – гіроскопи на хвилях матерії часток (хвилях де Бройля), атомів та конденсатів Боз-Ейнштейна, а також на квантових властивостях надплинних рідин, у яких лазерна і мікромеханічна техніка використовується як допоміжна складова. Чутливість датчиків на хвилях де

Бройля перевершує чутливість КЛГ і ВОГ на світлових хвилях на 9–11 порядків. Це дозволяє значно перевищити точність, що доступна КЛГ та ВОГ приблизно на 4 порядки з врахуванням шумів. Цей клас гіроскопів називають атомними інтерферометрами.

У роботі [28] наведено результати випробувань гіроскопа на ядерному магнітному резонансі, розробленого компанією Northrop Grumman. У результаті при фізичному об'ємі блоку ЧЕ усього  $10 \text{ см}^3$ , зміщення нуля склало  $0,01 \text{ }^\circ/\text{год}$ , випадковий дрейф  $0,001 \text{ }^\circ/\sqrt{\text{год}}$  та діапазон вимірюваної кутової швидкості обертання більше  $2500 \text{ }^\circ/\text{с}$ . При цьому відмічається повна нечутливість ядерних інтерферометрів до вібрації основи.

Згідно з результатами дослідження, проведеного у роботі [10] можна зробити висновок, що точність сучасних та перспективних ДКШ сягає значних величин і тенденції розвитку свідчать про її збільшення. Саме тому розрахункові алгоритми для інерціальної орієнтації і навігації мають проектуватися у відповідності зростаючій точності сучасних вимірювачів.

### ***1.3 Калібрування чутливих елементів безплатформної інерціальної системи орієнтації***

Чутливі елементи ІВМ БІСО мають індивідуальні характеристики: масштабний коефіцієнт, зміщення нуля, коефіцієнти перехресної чутливості та деякі інші. Крім того при встановленні ЧЕ можуть виникати інструментальні зміщення осей чутливості елементів відносно базових осей блоку. Для визначення параметрів ЧЕ, що формують математичну модель вихідних сигналів проводиться процедура калібрування.

Під калібруванням розуміють визначення коефіцієнтів математичної моделі похибок ЧЕ, необхідних для отримання вірних результатів вимірювання фізичних величин. Проте, перед вибором методики калібрування необхідно визначитись з моделлю, яка містить набір коефіцієнтів моделі похибок ЧЕ, що необхідна для забезпечення заданої точності вихідного сигналу в умовах руху

об'єкта. Похибка визначення калібрувальних коефіцієнтів не може бути вища за їх нестабільність. Розробка моделі похибок ЧЕ і методика визначення її коефіцієнтів тісно пов'язана і представляє собою єдину задачу [2, 29].

Для зниження еквівалентних дрейфів гіроскопів і похибок акселерометрів у процесі роботи системи до рівня нестабільності необхідно здійснювати алгоритмічну компенсацію відповідно до математичної моделі кожного типу датчика. До такої моделі висуваються наступні вимоги:

- вона має включати фактори, що об'єктивно впливають на похибку вимірювання (зміщення вимірювальних осей відносно корпусу системи при установці та в процесі експлуатації);
- модель має бути адекватною у визначеному вимірювальному діапазоні;
- параметри моделі мають спостерігатися у процесі оцінювання, а їх значення бути інваріантними до похибок методики визначення;
- модель має бути безперервною і гладкою функцією своїх змінних;
- модель повинна мати достатньо невисоку обчислювальну складність [30].

Рівень точності сучасних навігаційних систем в основному визначається похибками ЧЕ їх вимірювальних модулів у рамках стендових випробувань [31].

У сучасній літературі проблемі калібрування присвячені чисельні роботи у яких запропоновані різноманітні підходи та методи визначення калібрувальних параметрів [32, 33]. Більшість сучасних методів калібрування описано в роботах [33, 34]. В роботі [35] показано, що основними напрямками досліджень у калібруванні ЧЕ є: 1) дослідження калібрування методом вимірювання амплітуди і частоти переміщення; 2) дослідження калібрування у центрифугі; 3) дослідження гравітаційного калібрування.

З підвищенням вимог точності ускладнюється і модель похибок ЧЕ. В залежності від необхідної точності, кількості інерціальних вимірювачів, стендового обладнання і необхідного діапазону вимірювання математичні моделі похибок можуть сильно відрізнятися. Вони можуть враховувати



варіативність досліджуваних параметрів та їхню залежність від зовнішніх впливів.

У ході першого етапу калібрування визначаються детерміновані похибки ЧЕ, що описуються математичною моделлю, яка пов'язує вихідні сигнали датчиків з вимірюваним вхідним впливом. Експеримент, у цьому випадку, організовується таким чином, щоб виключити вплив інших факторів на вихідний сигнал.

Другий етап калібрування включає оцінку систематичних похибок гіроскопів та акселерометрів відносно їх відкаліброваних значень, що викликані такими зовнішніми факторами як: температура, магнітне поле, вібрації, похибки орієнтації осей чутливості датчиків, тощо. Похибки від температурного впливу на прецизійні інерціальні датчики можуть досягати, як показують дослідження, 30-40% і більше. Тому компенсації температурних дрейфів датчиків у БІНС навігаційного класу приділяється велика увага [36]. Другий етап не обов'язковий, якщо для зниження впливу зовнішніх факторів можна застосувати конструктивні рішення.

Калібрування можна поділити на два напрямки: калібрування на виробництві та калібрування на об'єктах в процесі роботи. Першочерговим і визначним для точності ЧЕ є калібрування на виробництві. Калібрування на діючих об'єктах в основному необхідне для уточнення паспортних калібрувальних параметрів шляхом врахування деяких з них, що можуть змінюватись від пуску до пуску і можуть бути розраховані без використання високоточного обладнання. Розроблена велика кількість різноманітних методів калібрування, але основними методами на виробництві є метод тестових і послідовних поворотів.

Найвідомішими лабораторними методами калібрування [37] є шестипозиційний метод – six-position method (SPM), модифікований (MSPM); багатопозиційний та модифікований багатопозиційний методи – multi-position method (MPM) та MMPM відповідно. Метод SPM дозволяє оцінити зміщення нуля датчиків і їх масштабні коефіцієнти за допомогою простих співвідношень. Для оцінки неортогональності вісей використовують MSPM. При цьому

вимірювання проводять в дев'яти положеннях датчиків з відомою кутовою орієнтацією, а оцінку параметрів отримують методом найменших квадратів. Недоліком обох методів є необхідність точно вимірювати орієнтацію ІВМ відносно осей зв'язаної СК. Цього недоліка позбавлені методи МРМ і ММРМ. Метод МРМ [38] ґрунтується на тому, що квадрат опорного впливу (прискорення вільного падіння для акселерометрів та кутова швидкість обертання Землі) інваріантний відносно орієнтації ІВМ та зв'язаної СК при відсутності зовнішніх впливів.

Кутова швидкість обертання Землі мала за величиною, тому може бути використана лише при калібруванні високоточних БІНС, у яких рівень шумів датчиків кутової швидкості нижчий величини вимірюваного сигналу. Для калібрування гіроскопів БІНС середнього і низького класів точності необхідно використовувати додатковий поворотний стіл, який може забезпечити стабільну кутову швидкість обертання. Цей метод калібрування називають модифікованим МРМ. Цей метод не потребує спеціальної установки ІВМ БІНС по осях локальної СК, що дозволяє його використання за межами спеціальних лабораторій. Для приладів середнього і низького класів точності калібрування акселерометрів проводиться методом ММРМ, а для гіроскопів розраховуються лише зміщення нулів шляхом осереднення показів датчиків. Метод калібрування ММРМ придатний для використання в реальних умовах роботи систем.

Необхідно зазначити, що калібрування ЧЕ прецизійних БІНС по прямим вимірюванням висуває жорсткі вимоги до стендового обладнання, оскільки точність визначення моделей похибок у цьому випадку обмежується інструментальними похибками вимірювального обладнання. Точність позиціонування сучасних прецизійних стендів знаходиться на рівні 3", неортогональність їх осей – на рівні 3–5", стабільність кутової швидкості – 0,0005%, чого недостатньо для забезпечення еквівалентного дрейфу на рівні 0,001 °/год. Відхилення вимірювальних осей гіроскопів має вирішальний вплив на точність вирішення задач орієнтації та навігації об'єктів [39].

Для калібрування інерційних датчиків навігаційного класу з необхідною точністю підходять в основному методи калібрування у гравітаційному полі. У

роботі [40] автор стверджує, що більшість представлених у літературі методів калібрування блоку акселерометрів використовують 24 положення вимірювального стенду відносно горизонтальної площини. Більшість представлених методів являються векторними, але в останній час все більше авторів звертають свою увагу на методи, у якості еталону яких використовується скалярна величина [41–43]. Скалярна величина зручна для калібрування блока векторних датчиків тим, що її величина не залежить від орієнтації ІВМ [34, 44].

Описані методи калібрування виконуються, як правило, з інерціальним вимірювальним модулем до установки на об'єкт. Процедура калібрування займає багато часу і є досить громіздкою. При встановленому на об'єкті ІВМ необхідно проводити додаткові калібрувальні процедури, що мають врахувати інструментальні похибки встановлення. Для цього зручно використовувати просторові методи калібрування. Ця задача має велику практичну цінність та актуальність.

#### ***1.4. Початкова виставка інерціальних систем***

Для роботи БІНС та БІСО необхідно визначити початкові умови системи: координати, кутову орієнтацію, тощо. Для визначення початкової орієнтації зв'язаної СК відносно базової проводиться процедура початкової виставки.

Виставку можна умовно поділити на початкову виставку та виставку при русі об'єкта. В інерціальній навігації, задачею початкової виставки є визначення кінематичного параметра (як правило, матриці напрямних косинусів) орієнтації. Аналітичні методи автономної початкової виставки ґрунтуються на використанні алгоритмів фізичного гірокомпасування та горизонтування платформних навігаційних систем [2, 15].

Процес початкової виставки можна поділити на грубий і точний. Груба виставка полягає у визначенні вертикалі місця (аналітичне горизонтування) і азимута (аналітичне гірокомпасування) [45]. Для горизонтування використовуються показання акселерометрів, а для гірокомпасування –

акселерометрів і гіроскопів. Так у роботі [46] приведено модифіковану модель похибок БІНС у псевдо-станах.

Точна виставка необхідна для визначення малих кутів між зв'язаною СК об'єкта і базовою, які розраховуються за інформацією від різних датчиків. Використання при цьому фільтра Калмана дозволяє отримати оцінки похибок кутової орієнтації, північної і східної складових швидкостей для їх урахування при виставці [41, 47–49].

Бортові навігаційні системи літальних апаратів потребують точної початкової виставки для високої вірогідності виконання поставленої задачі. Якщо час готовності БІНС не є критичним, то процедура початкової виставки і калібрування ЧЕ може бути виконана до вильоту, використовуючи базову навігаційну інформацію майданчика. Проте для систем, що вимагають високої швидкодії і малого часу готовності, суттєві затримки пуску неприпустимі. В цьому разі процедура початкової виставки має виконуватись вже після запуску об'єкту. Виставка у русі використовує дані ІВМ про прискорення та кутову швидкість разом із даними зовнішніх джерел (СНС, радіолокаційні системи, доплерівські вимірювачі швидкості, тощо). Різниця між оцінками вектору стану бортової БІНС і зовнішніх даних використовуються в навігаційному фільтрі Калмана для корекції похибок. При тривалому польоті ці похибки можна звести до допустимого рівня до запуску, коли точна виставка є необхідною [50].

### ***1.5 Кінематичні параметри орієнтації***

Алгоритм БІСО виконує чисельне інтегрування кінематичного параметра, що описує орієнтацію зв'язаної СК з метою визначення його поточного значення. Під орієнтацією розуміється кутове положення системи координат, пов'язаної з об'єктом відносно опорної (базової). При розробці математичної моделі БІСО, у якості опорної, може використовуватись інерціальна система координат, проте при проектуванні реальних систем використовують, як правило, географічну СК. Кінематичними параметрами орієнтації можуть бути кути Ейлера–Крилова, матриця напрямних косинусів (МНК) та векторні параметри [3, 20].

Вибір виду кінематичного рівняння не є однозначним. При синтезі алгоритмів БІСО необхідно враховувати їх переваги і недоліки.

Кути Ейлера–Крилова – це три кути послідовних поворотів навколо координатних осей системи координат. Обрані кути однозначно визначають кутове положення зв'язаної СК. Послідовність поворотів була запропонована академіком Криловим на основі відомої послідовності Ейлера. Перший поворот здійснюється навколо вертикальної осі у площині горизонту на кут рискання, другий визначає нахил повздовжньої осі до площини горизонту і називається кутом тангажа (деференту), третій кут повороту здійснюється навколо повздовжньої осі об'єкту і називається кутом крену [20]. Використання кутів Ейлера–Крилова дає найбільшу наочність при аналізі орієнтації об'єкту, але для реального застосування вони не підходять через вироджуваність при складних еволюціях об'єкту. Крім того, вони не дозволяють безпосередньо перепроєктовувати вектори.

Матриця напрямних косинусів універсальна для будь-якої кількості поворотів. Вона однозначно описує орієнтацію в опорній системі координат, тому може прямо використовуватись в алгоритмі БІНС при перепроєктуванні сигналів акселерометрів. Перші теоретичні розробки алгоритмів БІСО ґрунтувалися саме на використанні МНК [51–53]. Разом із тим, матриця має розмірність  $3 \times 3$ , що значно збільшує кількість математичних операцій, які має виконувати бортовий обчислювач. На практиці це може зіграти вирішальну роль при виборі кінематичного рівняння при проектуванні алгоритму БІСО, навіть при сучасному рівні розвитку мікропроцесорної техніки.

Векторні параметри орієнтації ґрунтуються на теоремі Ейлера, за якою довільне кутове положення однієї СК відносно іншої завжди можна подати як єдиний поворот початкової системи на певний кут навколо певно орієнтованої осі, завдяки якому ця система відліку збігатиметься з кінцевою [20, 54]. В залежності від способу подання вектору єдиного повороту розрізняють вектор Ейлера, параметри Родріґа–Гамільтона, вектор Гібса та ін.

З кінця 60-х років XX століття дослідники почали впроваджувати саме векторні параметри в алгоритми БІСО. В США роботи велися такими вченими

як Р. G. Savage, J. E. Bortz, J. E. Miller та ін. У СРСР над цією проблемою працювали А. П. Панов, Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко, В. Н. Бранець та І. П. Шмиглевський та інші вчені. Ці вчені заклали основу не тільки проектування алгоритмів БІСО, а і всієї інерціальної навігації в цілому.

У процесі їх досліджень було встановлено, що саме векторні кінематичні параметри найбільш зручні для алгоритмів БІСО. Їх ключовою перевагою над МНК стала значно менша кількість членів кінематичного рівняння. Ця обставина дозволила практичне втілення БІНС на тогочасних бортових обчислювачах. Найбільшого розповсюдження отримали рівняння Борца (вектор Ейлера) [53, 54] та параметри Родріга–Гамільтона [51, 52, 55–59]. Останній тип використовує алгебру кватерніонів і дозволяє будувати кінематичне рівняння лише з чотирьох параметрів. Найбільшу точність демонструє використання вектору Ейлера. Проте він може використовуватись лише як проміжний кінематичний параметр та описувати лише приріст вектору кінцевого повороту. На практиці його завжди доповнюють кватерніоном: розраховується кватерніон на початку кроку інтегрування, потім знаходиться приріст вектору Ейлера інтегруванням рівняння Борца, після чого вектор Ейлера перетворюють на параметри Родріга–Гамільтона і додають до початкового кватерніона [11]. Такий підхід зараз найбільш розповсюджений, проте він переобтяжений необхідністю постійного перетворення кінематичних параметрів. Не потрібно забувати і про можливість виродження вектору Ейлера при кутах повороту кратних  $\pi$ . Крім того, одній орієнтації об'єкта можуть відповідати два кватерніона  $Q$  та  $-Q$ , що може призвести до неоднозначності визначення орієнтації. Натомість, інтегрування рівняння Пуассона і знаходження матриці напрямних косинусів більш прозоре і чітке – не має необхідності введення додаткових кінематичних параметрів. Для сучасних мікропроцесорів не має такого великого значення кількість компонентів розрахункової матриці – чотири, чи дев'ять, тому матричне рівняння Пуассона є більш прийнятним.

## **1.6 Алгоритми чисельного інтегрування кінематичних рівнянь**

Кінематичні рівняння орієнтації незалежно від вибраних кінематичних параметрів мають диференціальну форму. Вони формуються за дискретним сигналами, що надходять з ДКШ ІВМ навігаційної системи. Для знаходження поточної орієнтації об'єкту необхідно організувати процедуру їх чисельного інтегрування. Вибір алгоритму інтегрування значно впливає на точність і швидкодію БІСО, тому під час проектування він потребує найбільшої уваги.

Чисельні методи інтегрування розроблювалися для задач, коли неможливо або складно, знайти аналітичний розв'язок диференціального рівняння. В рамках інерціальної навігації можна виділити два типи методів інтегрування: загальні і спеціальні.

Під загальними розуміються методи, які розроблено для розв'язання звичайних математичних та інженерних задач. Вони почали формуватися разом із виникненням диференціальної алгебри, ці методи добре описані в літературі і отримали широке розповсюдження при імітаційному програмному моделюванні. Так у підручнику [60] наведено основні методи чисельного інтегрування диференціальних рівнянь та сформульовані підходи до їхнього застосування. До одних з найпростіших загальних методів інтегрування, що широко використовуються в БІСО можна віднести методи прямокутників та трапецій. Ці методи першого та другого порядків попри невелику точність, мають високу швидкодію і дуже прості у реалізації. Переваги цих методів дозволили впровадити їх у сучасні інерціальні системи низької точності, що побудовані на МЕМС датчиках.

До загальних методів можна віднести і методи Рунге–Кутти, що фактично є стандартними процедурами інтегрування у системах математичного моделювання, наприклад у середовищі Matlab [1, 60]. Слід зазначити, що на початку досліджень по розробці алгоритмів БІСО у 60-х роках, алгоритми Рунге–Кутти вважалися цілком прийнятними і широко застосовувалися [61].

Розглянуті методи інтегрування є однокроковими – для розрахунку наступної точки використовується інформація лише про попередню. Однак методи другого і вище порядків вимагають розрахунку значення функції правих частин у кількох проміжних точках на одному кроці інтегрування. Це є досить нераціональним, оскільки, якщо процес інтегрування вже пройшов декілька кроків, то до послуг алгоритму є додаткова інформація, яка не вимагає ніяких обчислень – значення попередніх точок проінтегрованої функції. Через це були розроблені методи, які використовують цю додаткову інформацію про значення попередніх точок. Ці методи отримали назву багатокрокових. Ключовою особливістю багатокрокових методів є те, що за допомогою них неможливо розпочати процес інтегрування, тому що на початку відома лише одна точка, яка визначається початковими умовами системи, або розраховується у рамках процедури початкової виставки. Для того, щоб розпочати інтегрування кінематичного рівняння багатокроковими методами необхідно спочатку використати один з однокрокових методів Рунге–Кутти. Багатокрокові методи отримали також назву прогнозу–корекції. Алгоритм їх роботи складається з двох послідовних етапів. Спочатку на основі значень попередніх точок інтегрованого рівняння прогнозується значення наступної точки. На другому етапі здійснюється уточнення (корекція) цього значення за окремою формулою [60], [62].

Методи Рунге–Кутти і прогнозу–корекції не знайшли широкого розповсюдження в сучасній інерціальній навігації. Це можна пояснити з одного боку тим, що вони вимагають виконання великої кількості математичних операцій на одному кроці інтегрування, що ускладнювало їх впровадження раніше, а з іншого – розробкою спеціальних, адаптованих під інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації чисельних методів. Разом з тим, при розробці інерціальних систем орієнтації та навігації, дослідники можуть приділяти увагу іншим елементам алгоритму роботи. У такому випадку часто використовують загальнодоступні та інтегровані до програмних середовищ методи чисельного інтегрування. Сімейства методів Рунге–Кутти і прогнозу–корекції можна



використовувати як еталонні при оцінці точності нових розроблених методів інтегрування.

До спеціальних методів можна віднести методи, що проектуються для інтегрування виключно кінематичних параметрів у БІСО. Причому, при проектуванні цих алгоритмів можна враховувати індивідуальні особливості системи: характер вихідної інформації ДКШ, тип кінематичного параметру орієнтації, необхідної точності та швидкодії алгоритму. Основні підходи до синтезу спеціальних методів інтегрування були закладені у класичних роботах [12, 13, 16, 54, 63]. Як правило, вони ґрунтуються на використанні методу послідовних наближень Пікара [1]. Порядок методу визначається кількістю послідовних інтегралів Пікара, що враховуються при проектуванні алгоритму. Інтегрована функція апроксимується поліномами у ряд Тейлора, при цьому порядок полінома апроксимації визначає кількість кроків інтегрування.

Похибки розглянутих методів чисельного інтегрування мають подвійний характер:

- 1) похибка обмеження зумовлена тим, що із суми нескінченного ряду, в залежності від порядку методу, відкидають зайві члени;
- 2) похибка округлення залежить від точності розв'язання математичних операцій, що виконуються в рамках процедури інтегрування.

При зменшенні кроку інтегрування похибка обмеження також зменшується. Це відрізняє її від точності округлення, яка залежить від кількості математичних операцій. Внаслідок того, що при зменшенні кроку інтегрування кількість операцій, що виконуються за один цикл інтегрування збільшуються, то і похибки округлення пропорційно зростають зі зменшенням кроку інтегрування [60]. Це призводить до того, що крок інтегрування не можна значно збільшувати.

На практиці крок інтегрування  $H$  пов'язаний із кроком опитування ДКШ  $h$  як  $H = m \cdot h$ , де величина  $m$  є так званою «кроковістю» алгоритму. Кроковість не можна суттєво збільшувати, бо від неї залежить частота вихідної інформації з БІСО. Наприклад при використанні чотирикрокового алгоритму інтегрування, частота вихідної орієнтації об'єкту буде у чотири рази нижча за крок опитування

датчиків. Саме тому використання алгоритмів високої кроковості можливе лише при високій частоті опитування датчиків.

Доцільним є проектування високоточних алгоритмів інтегрування Пікара для визначеного кінематичного параметру орієнтації з необхідною частотою вихідної інформації.

### ***1.7 Огляд виконаних раніше робіт за напрямком досліджень***

Сучасний рівень розвитку науково-технічної бази призводить до широкого проникнення інерціальних датчиків та систем у всі сфери життя. Якщо раніше такі системи застосовувалися у таких закритих для пересічного користувача галузях як спеціальне приладобудування, морській, авіаційній та аерокосмічній техніці, то зараз ринок побутової електроніки починає вимагати сучасних, недорогих і точних інерціальних систем. Крім того, якщо раніше БІСО фактично була лише складовою навігаційних систем, то зараз все більшого розповсюдження набувають системи визначення поточної орієнтації об'єкта та курсовертикалі. Вони набувають все більш широкого розповсюдження у системах керування безпілотними літальними апаратами, автономними транспортними засобами, системах оцінки параметрів руху, а також у мультимедійних пристроях.

Часто спостерігається ситуація, коли при розробці інерціальної системи використовуються не оптимальні за швидкістю, або точністю алгоритми. Концентруючись на інших задачах, дослідники часто використовують високоточні методи інтегрування у системах, побудованих на грубих МЕМС датчиках, або навпаки використовують застарілі грубі методи у прецизійних БІНС [4]. Це вимагає проведення чисельних теоретичних та практичних досліджень по синтезу і підбору оптимальних алгоритмів БІСО.

Варто провести огляд виконаних раніше робіт, що пов'язані з розробкою алгоритмічного забезпечення безплатформових інерціальних систем орієнтації для детальної оцінки актуальності і важливості досліджень.

Великий інтерес представляє робота [25]. В ній описані склад та алгоритм функціонування сучасних прецизійних БІНС виробництва КП СПБ «Арсенал». Ця система демонструє високу точність на рівні кращих світових зразків. У якості ДКШ в ній застосовані лазерні гіроскопи власного виробництва. У якості алгоритму БІСО в системі КП СПБ «Арсенал» використовуються наробки А. П. Панова з його монографії [13], а саме двокроковий алгоритм Пікара четвертого порядку для інтегрування рівняння Борца.

Схема інтегрованої навігаційної системи ґрунтовно досліджена у роботах Г. І. Ємельянцева у співавторстві з А. П. Степановим. Їх монографія [11] містить вичерпну інформацію щодо проектування сильно- та слабоінтегрованих навігаційних систем. Демонструються математичні та програмно-алгоритмічні моделі інтегрованих БІНС. У якості алгоритму орієнтації в них пропонується використовувати інтегрування кватерніонного рівняння з використанням у якості проміжного кінематичного параметру вектор Ейлера. Практичні результати ходових випробувань систем, побудованих на запропонованих схемах, викладені у роботі [64]. Автори зосередили свою увагу на проблемі втрати сигналу з деяких супутників СНС у ході роботи навігаційної системи судна. Було проаналізована вихідна точність системи в залежності від кількості спостережних супутників та запропоновано алгоритм розрахунку фазових змінних, що дозволило досягти похибки визначення курсу в межах  $1-2^{\circ}$ . Було зазначено, що підвищення точності визначення курсу можна досягти включенням до складу ІВМ магнітометрів, або рознесенням на короткій базі антен СНС. Автори модернізували свою систему і результати випробувань привели в роботі [65]. Дослідження показали, що запропоновані кроки значно підвищили точність системи, яка залежить від величини аномалій магнітного поля Землі.

Системній оптимізації алгоритмічного та апаратного забезпечення БІНС високоманеврених об'єктів присвячена робота [66]. Алгоритм БІСО

ґрунтується на монографії А. П. Панова [13], а саме на інтегруванні кватерніонного рівняння орієнтації методом Пікара. Автори велику увагу приділяють правильному підбору обчислювального процесора в залежності від використаних ЧЕ та кроку інтегрування БІСО. Пропонується використання спеціального функціонально-орієнтованого процесора, що має бути розроблений виключно для розв'язання задач орієнтації та навігації. Запропонований підхід дозволяє ефективно проектувати апаратно-алгоритмічне забезпечення навігаційної системи.

У роботі [67] викладено типові підходи при проектуванні алгоритму БІНС: вибір системи координат, кінематичних параметрів орієнтації та методів їх чисельного інтегрування, розв'язання навігаційної задачі. Для алгоритму БІСО використано параметри Родріга–Гамільтона, які описані ще у роботі [12]. Програмне моделювання навігаційної системи показало її високу точність і стійкість, а також простоту в практичній реалізації.

Підвищенням точності БІСО, а саме визначенню кута крену при русі високоманеврених об'єктів присвячена робота [68]. Автори вказують на недостатню точність сучасних ММГ, що використовуються як датчики кутової швидкості ІВМ інерціальних систем. Пропонується встановити два додаткових мікромеханічні акселерометри, осі чутливості яких будуть перпендикулярні продольній осі об'єкту. Таким чином кутову швидкість крену пропонується розраховувати інтегруванням сигналів акселерометрів. Після цього формується алгоритм БІСО. У якості кінематичних параметрів орієнтації використані кватерніони повороту.

Робота [69] присвячена синтезу алгоритму орієнтації з використанням нового підходу до формування кватерніонного рівняння. Для зв'язку кватерніона орієнтації з чотиримірною кососиметричною матрицею проєкції кутових швидкостей використано формулу Келі. Отримане таким чином кінематичне рівняння інтегрується методом Пікара. Автори провели велику роботу по порівнянню точності отриманих алгоритмів з алгоритмами [13]. Так встановлено, що розроблені нові двокрокові алгоритми інтегрування четвертого порядку мають точність на рівні чотирикрокових алгоритмів четвертого порядку

Панова, проте об'єм необхідних розрахунків менший у два рази, а частота вихідної інформації у два рази більша.

Використання кватерніонів ускладнюється необхідністю їх постійного нормування на кожному кроці інтегрування. В одній із останніх своїх робіт [70] А. П. Панов пропонує у якості кінематичних параметрів БІСО використати пентаніони півповороту, що дозволяє позбавитись операції нормування кватерніона при тій же точності алгоритму.

Критичним для БІСО є, так званий, конічний рух основи. При ньому основа здійснює кутовий коливальний рух навколо двох осей підвісу. Зазвичай він викликається вібрацією, що діє на БІНС. Конічний рух призводить до алгоритмічного дрейфу БІСО – відбувається накопичення похибки по третьому куту, де відсутній будь-який рух. Саме на ньому і проводиться тестування алгоритмів орієнтації. Робота [71] присвячена аналізу алгоритмів орієнтації, наведених у роботі [59], при дії конічного руху на БІНС. Авторами пропонується досягти підвищення точності алгоритмів не за рахунок ускладнення їх структури, а збільшенням частоти дискретизації сигналів ЧЕ, а отже і зменшенням кроку інтегрування. У роботі [72] конічний рух описується у вигляді рухомих аксоїдів. Одержано залежності еталонного конічного руху для кватерніона та вектору Ейлера.

Фундаментальна робота Ю.А. Літмановича [73] дає ретроспективний огляд тогочасних засобів інерціальної орієнтації і навігації. Відмітимо, що велику увагу приділено корекції конічного дрейфу шляхом правильного підбору коефіцієнтів у алгоритмах інтегрування кінематичних рівнянь.

Існує велика кількість публікацій по інтегрованих мікромеханічних та супутниковим системам. Недостатня точність мікромеханічних ЧЕ в таких системах компенсується їх інтеграцією з СНС, як правило, на основі використання фільтру Калмана. Хоча інструментальні похибки в таких системах значно перевищують алгоритмічні, корисно простежити які алгоритми БІСО використовуються в них.

У роботі [74] розглядається математична модель інтегрованої БІНС. Авторами використовується кватерніонне кінематичне рівняння. Особливістю є

корекція алгоритму БІСО за рахунок оцінок фільтра Калмана. У якості процедури інтегрування був використаний найпростіший метод прямокутників.

Проблемі компенсації впливу кінчного руху на алгоритмічний дрейф БІСО присвячена робота [75]. В ній розглянуто модель руху об'єкта та його кутову швидкість при траєкторному та кінчному русі. Запропоновано алгоритм розрахунку орієнтації, що ґрунтується на використанні супутникової системи при оцінці кінчного руху. Представлені результати програмного моделювання системи за різних параметрів, що показують ефективність представленого підходу при проектуванні БІСО.

Кватерніонне кінематичне рівняння можна використовувати не тільки для формування алгоритму БІСО, а і для синтезу кватерніонного фільтра Калмана, як показано у роботах [76, 77]. Це виявилось актуальним при проектуванні малогабаритних безплатформних курсовертикалей. Робота [76] присвячена оптимізації розмірності фільтра Калмана, що використовується в алгоритмах курсовертикалей. Проаналізовано швидкодію отриманого фільтру. У роботі [77] запропоновано двокроковий геометрично-інтуїтивний коректуючий підхід. На відміну від використання кватерніонного кінематичного рівняння, він роз'єднує сигнали акселерометрів і магнітометрів. Відмітимо, що у роботі приведені результати лабораторних натурних випробувань інтегрованої системи, які показали дуже високу точність системи.

Використання матриці напрямних косинусів, або рівняння Пуассона, у якості кінематичного параметру орієнтації також широко розповсюджене.

Робота [78] присвячена програмному моделюванню інтегрованої БІНС у середовищі Matlab Simulink. Представлено математичну модель системи: визначено системи координат, наведено алгоритми БІСО, що спирається на інтегруванні рівняння Пуассона, та розв'язано навігаційну задачу. Інтегрування проводилося методом Рунге–Кутти четвертого порядку. У роботі використовуються змодельовані та реальні сигнали ЧЕ БІНС. Авторами проведено програмне моделювання системи при різному русі основи, отримані графіки похибок.

Проектування БІНС на основі мікромеханічних датчиків та фільтру Калмана описано у роботі [79]. Математична модель БІСО спирається на використання матриці напрямних косинусів у якості кінематичного параметра руху об'єкта.

У роботах [80] пропонується використовувати кути Ейлера у якості кінематичних параметрів. Дослідникам вдалось досить просто подолати проблему вироджуваності кута курсу (рискання): при формуванні обчислень до кута рискання додається чи віднімається значення тангажу в залежності від знаку кута рискання. Відповідні зміни вносяться в алгоритм фільтра Калмана. Запропонований метод було порівняно за кватерніонним рівнянням. Результати показали, що використання кутів Ейлера дозволило в значній мірі зменшити вплив магнітних збурень на точність визначення курсу системою.

Робота [81] присвячена розробці малогабаритної БІНС, що має стежити за переміщенням людини. Система монтується у взутті, тому має бути мініатюрною. Наведено математичну модель системи, представлено готовий макет та результати натурних випробувань. Алгоритм БІСО засновано на інтегруванні кватерніонного рівняння методом прямокутників.

Проблемі вироджуваності кутів Ейлера присвячена робота [82]. В ній досліджується проблема керування безпілотним літаком. Запропоновано алгоритм керування, що використовує кінематичні рівняння з кутами Ейлера. За результатами моделювання встановлено, що запропонований метод може бути застосований для визначення орієнтації безпілотного літака на практиці.

У роботі [83] описується новий підхід для алгоритмів орієнтації та навігації – використання функціонально-ітераційного інтегрування (iNavFilter). Він базується на новій структурі функціонального числового інтегрування полінома Чебишева. При чисельному інтегруванні функція, зазвичай, розкладається у ряд Тейлора, що інтегрується методом Пікара. В роботі запропоновано інтегрувати кватерніонне рівняння орієнтації та навігаційні рівняння, використовуючи апроксимацію кінематичного параметра орієнтації поліномом Чебишева. У якості алгоритму інтегрування використовуються класичний метод послідовних наближень Пікара. У роботі наведена математична модель запропонованого

iNavFilter та проведено програмне моделювання. Результати показують компенсування конічних дрейфів системи та її високу точність.

Подальші дослідження опубліковано разом з Ю.А. Літмановичем у роботі [84]: проведено порівняльний аналіз розробленого функціонально-ітеративного інтегрування та класичне розкладання у ряд Тейлора. Було розроблено математичні алгоритми і досліджено програмним моделюванням ці два підходи синтезу алгоритму чисельного інтегрування. У якості кінематичних параметрів використовувалися кватерніони, вектор єдиного повороту Ейлера та параметри Родріга–Гамільтона. Програмне моделювання проводилось при конічному русі основи з метою порівняння точності розроблених методів. В результаті авторами було зроблено висновок, що всі методи мають аналогічні порядки точності, проте функціонально-ітеративне інтегрування відзначається дещо більшою точністю і стійкістю.

Серія робіт [85–87] присвячена програмному моделюванню БІНС та БІСО у програмному середовищі Matlab Simulink. Імітаційна модель інерціальної системи моделює сигнал інерціальних вимірювачів та формує алгоритми орієнтації та навігації. Алгоритм БІСО у всіх роботах спирається на інтегруванні кватерніонного кінематичного рівняння стандартними засобами Matlab Simulink: методами Ейлера та Рунге–Кутти четвертого порядку.

У роботі [11] описано комплексний синтез алгоритмічно-програмного забезпечення, а також наведено чисельні результати як імітаційного моделювання, так і натурних випробувань високо інтегрованої навігаційної системи. Уваги заслуговує типовий підхід для реалізації алгоритму БІСО: використання кватерніона як параметру орієнтації об'єкта і інтегрування кінематичного рівняння Борца для знаходження приросту вектору єдиного повороту, що потім трансформується у кватерніон і додається до початкового. Таким чином вдається з високою точністю оцінити зміну орієнтації об'єкту і використати мінімальну кількість кінематичних параметрів.

Великий інтерес представляють вітчизняні і закордонні дисертаційні роботи в яких досліджуються інерціальні системи.



У роботі [88] вирішується задача навігації автономного підводного апарата, використовуючи БІНС інтегровану з гідроакустичною навігаційною системою. Алгоритм БІСО спирається на інтегрування рівняння Пуассона – знаходження матриці напрямних косинусів. Метод інтегрування не вказано.

Мікромеханічна курсовертикаль може використовуватись при оцінці параметрів руху людини, як показано у роботі [62]. У роботі розроблено алгоритм калманівської фільтрації кінематичних параметрів, а саме кватерніонів та матриць напрямних косинусів. Кінематичні рівняння інтегруються двокроковим методом прогнозу-корекції.

У роботі [89] розроблено алгоритми моделювання інтегрованої БІНС при вібрації основи. Велику увагу присвячена моделюванню ідеальних інерціальних датчиків, їх калібровці та процедурі початкової виставки. Наведено дослідження точності чисельних методів інтегрування кінематичного рівняння Пуассона при вібрації основи.

Робота [90] присвячена розробці методів підвищення точності БІНС високоманеврених об'єктів за рахунок використання надлишкової кількості акселерометрів. Автором запропоновано адаптивну схему алгоритму БІНС, коли в штатному режимі руху об'єкту використовуються класичний алгоритм БІНС, але при високій кутовій швидкості обертання він доповнюється алгоритмом надлишкової акселерометричної системи. Автор наводить математичну модель БІСО, що спирається на кватерніонні параметри орієнтації та їх інтегрування третього порядку із роботи [12].

Проаналізовані роботи за темою дослідження показали, що більшість з них ґрунтуються на використанні класичних методів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь: методів Панова четвертого порядку точності, методів Рунге–Кутти, прогнозу-корекції та прямокутників. При цьому не було запропоновано методів, що забезпечували б точність систем орієнтації при впровадженні більш точних інерціальних вимірювачів. Найбільш розповсюдженим підходом для оцінки кутового положення об'єкту стало використання кватерніонного рівняння орієнтації з розрахунком на кроці інтегрування значення приросту параметрів вектору Ейлера, що значно

ускладнює синтез і роботу алгоритмічно-програмного забезпечення БІСО та БІНС. При цьому вибір цих кінематичних параметрів переважно продиктований мінімальною кількістю їх елементів, тобто забезпеченням якомога більшої швидкодії БІСО. При цьому не враховується можлива неоднозначність визначення поточної орієнтації. Крім того, БІСО часто використовуються на високоманевренних об'єктах, що може призвести до виникнення кінцевого руху, який викликає появу небезпечного алгоритмічного дрейфу при інтегруванні кінематичних рівнянь. Сучасні засоби боротьби з цим дрейфом, такі як підвищення точності методів, чи емпіричних підбір коефіцієнтів алгоритму інтегрування не є оптимальними.

Таким чином актуальною задачею вдосконалення сучасних БІСО є впровадження нових методів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь, які давали б змогу однозначно і з високою точністю визначати орієнтацію об'єкту. В попередніх дослідженнях авторів за цим напрямом дана проблематика розкрита в недостатній мірі, тому представлена робота передбачає вдосконалення відомих методів за рахунок використання сучасних досягнень інформаційних технологій.

## ***1.8 Мета і задачі даних наукових досліджень***

Метою роботи є обґрунтування і вдосконалення методів та алгоритмів визначення кінематичних параметрів поточної орієнтації БІНС для високоманевренних об'єктів.

Досягнення поставленої мети передбачає вирішення наступних задач:

1. Проаналізувати сучасний стан розвитку інерціальних вимірювачів БІНС, методів їхнього калібрування, засобів визначення поточної орієнтації об'єкта та обґрунтувати шляхи їх вдосконалення для підвищення точності системи та спрощення синтезу методів та алгоритмічно-програмного забезпечення.

2. Провести імітаційне моделювання процедури калібрування акселерометрів та гіроскопів з метою обґрунтування найефективніших методів для їх реалізації у безплатформній інерціальній системі орієнтації.

4. Розробити імітаційну модель та провести дослідження точності методів інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації.

5. На основі результатів імітаційного моделювання провести дослідження алгоритмічного дрейфу безплатформної інерціальної системи орієнтації під час кінцевого руху основи та запропонувати методику його компенсації.

6. Розробити та обґрунтувати загальну структуру інформаційної моделі безплатформної інерціальної системи орієнтації, що включає виконання калібрування інерціальних вимірювачів, проведення початкової виставки системи з метою отримання початкових кінематичних параметрів та реалізації алгоритму чисельного інтегрування кінематичного рівняння.

7. Оцінити адекватність розроблених імітаційних моделей на основі експериментальних досліджень роботи безплатформної інерціальної системи орієнтації при різноманітному русі об'єкта з використанням сигналів реального ІВМ.

8. Впровадити результати дослідження.

Представлені в даній науково-дослідній роботі положення та результати, які виносяться на захист, відповідають формулі паспорту спеціальності 05.11.03 – гіроскопи та навігаційні системи за наступними пунктами:

- Розроблення, дослідження та оптимізація нових принципів, методів автономного визначення параметрів руху й орієнтації тіл, алгоритмів навігації.
- Дослідження та вдосконалення наявних методів, приладів, систем автономного вимірювання параметрів руху, орієнтації та навігації, комплексних навігаційних систем і гіроскопів.
- Розроблення та дослідження математичних моделей, систем моделювання, навігаційних приладів, систем та їх чутливих елементів.

## РОЗДІЛ 2.

### ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ МЕТОДУ КАЛІБРУВАННЯ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ БЕЗПЛАТФОРМНИХ ІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Розглянута на рис.1.1 схема БІНС вказує на суттєвий недолік дослідників: при проектуванні алгоритму роботи БІСО дуже рідко приділяють увагу підготовчому етапу. І справді, сигнал ІВМ мають бути якісно фільтрованими та пройти калібрування. Точність проведення калібрування прямо впливає на точність всієї безплатформної інерціальної системи.

Для удосконалення БІСО пропонується врахувати при її проектуванні процедуру калібрування сигналів інерціальних вимірювачів: датчиків кутової швидкості та акселерометрів.

ІВМ БІСО складається із тріади гіроскопів та акселерометрів. У загальному випадку ці ЧЕ мають вихідні сигнали, які позначимо у подальшому  $U_{\omega x}, U_{\omega y}, U_{\omega z}$  та  $U_{ax}, U_{ay}, U_{az}$ . Вони можуть бути в аналоговому (напруга) або цифровому (код аналого-цифрового перетворювача) вигляді. Після процедури калібрування сигнали ІВМ використовуються у процедурі початкової виставки для визначення початкових параметрів орієнтації. Ця інформація, разом із сигналами датчиків, надходить до алгоритму БІСО де формує початкові умови та кінематичні параметри орієнтації. Після чисельного інтегрування кінематичного рівняння на виході БІСО отримується інформація про поточну орієнтацію ІВМ, а, отже, і об'єкта відносно базової системи координат.

Для підвищення точності безплатформних систем необхідно проаналізувати існуючі методи калібрування ІВМ та вибрати найбільш ефективний.

## ***2.1 Методи калібрування інерціального вимірювального модуля***

Інерціальний вимірювальний модуль є основою інерціальних систем орієнтації та навігації. ІВМ БІСО складається із тріад акселерометрів та датчиків кутової швидкості, ортогонально закріплених відносно осей корпусу об'єкту. Для роботи із сигналами ІВМ, необхідно провести процедуру калібрування.

Як зазначалося вище, калібрування ІВМ можна здійснювати за двома підходами: векторним і скалярним.

Векторний підхід полягає у направленні вимірювальної осі ЧЕ інерціального датчика по напрямку дії відомого еталонного вектору. Фіксується кілька чітко визначених положень вимірювальної осі відносно еталону. Після проведення певних процедур встановлюється відповідність вихідного сигналу датчика вимірюваній величині в залежності від математичної моделі і проведеної процедури. У якості таких еталонних векторів, як правило, використовують вектор прискорення сили тяжіння для акселерометрів і відоме стале значення кутової швидкості для датчиків кутової швидкості. При цьому точність калібрування у значній мірі залежить від точності орієнтації вимірювальної осі ЧЕ у фіксованих контрольних положеннях [91] та від утримання стендом сталої кутової швидкості обертання [92]. Разом із тим лабораторні стенди, на яких проводиться калібрування, мають забезпечувати відповідну інструментальну точність орієнтації.

Скалярний підхід дозволяє відмовитись від використання векторної еталонної величини, проводити калібрування одночасно акселерометрів і ДКШ – усього ІВМ, а також значно знизити вимогу до точності орієнтації у контрольних положеннях [31, 93]. У якості еталону використовуються відомі з високою точністю величини прискорення сили тяжіння для акселерометрів і проекції кутової швидкості обертання Землі для прецизійних гіроскопів [92].

Методика скалярного калібрування представлена у роботі Ізмайлова [33]. Вона призначена для підвищення точності визначення коефіцієнтів

математичної моделі сигналу навігаційних акселерометрів при одночасному зменшенні вимог до випробувальних стендів. У роботах [31, 44] розглянуто основні особливості скалярного методу калібрування ІВМ. Зазначено, що цей метод не висуває жорстких вимог до кутової орієнтації лабораторного обладнання та ІВМ. Автор роботи [44] відмічає, що необхідно забезпечити високу точність вимірювання нормованих вихідних сигналів датчиків. У роботі [31] зазначено, що на точність скалярного калібрування впливає точність задання кутового положення стендом. Для подолання проблеми сингулярності, що виникає при роботі з матричними розрахунками, запропоновано перейти від розрахунків кутів Ейлера–Крилова до кватерніонів.

У роботах [34, 94–96] було показано ефективність розробленої методики не тільки для калібрування акселерометрів, але і для лазерних гіроскопів. Висока ефективність методики скалярного калібрування визначає інтерес до її застосування щодо інерціальних вимірювачів середньої і низької точності. Принципова математична модель акселерометрів середньої і низької точності не відрізняється від наведеної у роботі [33], але в цих датчиках присутні значні похибки перехресних зв'язків і порядки інших похибок можуть значно варіюватися.

Окрім векторного і скалярного методів калібрування було розроблено новий блочний, або просторовий метод калібрування акселерометрів та гіроскопів ІВМ, представлений у роботі [97].

Просторове калібрування проводиться шляхом обертання ІВМ у просторі одночасно навколо трьох осей. Для цього необхідно використовувати спеціальні поворотні стенди (рис.2.1) з двома та більше ступенями вільності.



Рис.2.1 Тривісний поворотний стенд Acutronic AC3347

Для оцінки точності розробленого методу просторового калібрування, порівняємо його з найбільш розповсюдженими векторними методами.

### ***2.1.1 Калібрування блока осьових акселерометрів методом тестових поворотів***

Типовим векторним методом калібрування акселерометрів є метод тестових поворотів [2]. При калібруванні акселерометрів у складі ІВМ, як правило, використовується оптична ділильна головка (ОДГ), яка дозволяє з високою точністю (порядку 5...10") обертати досліджуваний об'єкт навколо заданого положення. Для калібрування блоку акселерометрів методом тестових поворотів необхідно проводити вимірювання вихідних сигналів датчиків, повертаючи спочатку ІВМ, наприклад, навколо осі чутливості  $x$ , а потім встановити ІВМ на ОДГ таким чином, щоб обертання відбувалося навколо осі  $y$ .

Для калібрування блоку акселерометрів використаємо модель вихідного сигналу осьових акселерометрів у вигляді:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \\ B_{az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

де позначено  $U_{ax}, U_{ay}, U_{az}$  – вихідні сигнали акселерометрів,  $B_{ax}, B_{ay}, B_{az}$  – нульові сигнали,  $a_x, a_y, a_z$  – проекції уявного прискорення,  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$  – масштабні коефіцієнти, решта елементів матриці 3х3 – коефіцієнти перехресної чутливості,  $n_{ax}, n_{ay}, n_{az}$  – шуми вимірювань.

Для зменшення впливу шумів вимірювань вихідні сигнали осереднюються протягом 100 с. Це дозволяє відкинути в (2.1)  $n_{ax}, n_{ay}, n_{az}$ :

$$\begin{aligned} U_{ax} &= B_{ax} + k_{11}a_x + k_{12}a_y + k_{13}a_z; \\ U_{ay} &= B_{ay} + k_{21}a_x + k_{22}a_y + k_{23}a_z; \\ U_{az} &= B_{az} + k_{31}a_x + k_{32}a_y + k_{33}a_z. \end{aligned}$$

Для послідовності фіксованих положень блоку акселерометрів, отримаємо відповідні значення вихідних сигналів акселерометрів.

Спочатку розглянемо обертання блоку акселерометрів на кут  $90^\circ$  навколо осі  $x$ .

В першому положенні (рис.2.2) проекції уявного прискорення набудуть вигляду

$$a_x = 0; \quad a_y = 0; \quad a_z = g$$

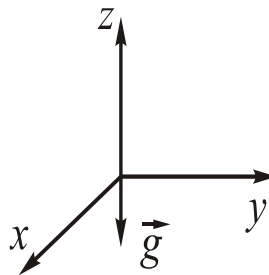


Рис.2.2 Перше положення

Підставивши ці значення проекцій уявного прискорення у рівняння (2.1) отримаємо:

$$U_{ax1} = B_{ax} + k_{13} \cdot g; \quad U_{ay1} = B_{ay} + k_{23} \cdot g; \quad U_{az1} = B_{az} + k_{33} \cdot g. \quad (2.2)$$

Надалі блок акселерометрів повертають ще три рази. Для кожного калібрувального положення отримують вихідні сигнали акселерометрів, аналогічні (2.2).



В подальшому необхідно встановити блок акселерометрів таким чином, щоб обертання відбувалося навколо осі  $y$ .

У п'ятому положенні (рис.2.3), проекції уявного прискорення набудуть вигляду

$$a_x = 0; \quad a_y = 0; \quad a_z = g$$

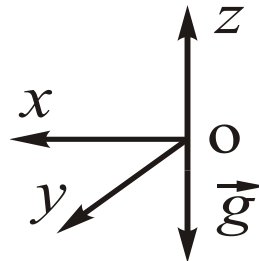


Рис. 2.3 П'яте положення

Підставивши ці значення проекцій уявного прискорення у рівняння (2.1) отримаємо:

$$U_{ax5} = B_{ax} + k_{13} \cdot g; \quad U_{ay5} = B_{ay} + k_{23} \cdot g; \quad U_{az5} = B_{az} + k_{33} \cdot g. \quad (2.3)$$

Далі виконуються ще три повороти на кут  $90^\circ$  відбувалося навколо осі  $y$ . При цьому отримуються ще три набори вихідних сигналів акселерометрів.

У результаті такої процедури калібрування отримуються вісім наборів вихідних сигналів акселерометрів для кожного з восьми положень ІВМ, як показано у табл.А.1. у Додатку А.

Використовуючи отримані вирази вихідних сигналів блоку акселерометрів з табл.А.1, розрахуємо необхідні параметри блока осьових акселерометрів:

$$B_{ax} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{axi}, \quad B_{ay} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{ayi}, \quad B_{az} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{azi},$$

$$k_{11} = \frac{1}{2g} (U_{ax6} - U_{ax8}), \quad k_{12} = \frac{1}{2g} (U_{ax4} - U_{ax2}), \quad k_{13} = \frac{1}{4g} (U_{ax3} + U_{ax7} - U_{ax1} - U_{ax5});$$

$$k_{21} = \frac{1}{2g} (U_{ay6} - U_{ay8}), \quad k_{22} = \frac{1}{2g} (U_{ay4} - U_{ay2}), \quad k_{23} = \frac{1}{4g} (U_{ay3} + U_{ay7} - U_{ay1} - U_{ay5}); \quad (2.4)$$

$$k_{31} = \frac{1}{2g} (U_{az6} - U_{az8}), \quad k_{32} = \frac{1}{2g} (U_{az4} - U_{az2}), \quad k_{33} = \frac{1}{4g} (U_{az3} + U_{az7} - U_{az1} - U_{az5}).$$

Отримані співвідношення (2.4) та математична модель вихідного сигналу акселерометрів (2.1) дозволяють провести калібрування блоку акселерометрів ІВМ.

### **2.1.2 Калібрування блоку гіроскопів на одновісному поворотному стенді**

При калібруванні блоку ДКШ векторним методом [2] ІВМ закріплюють на одновісному поворотному стенді таким чином, щоб вісь чутливості гіроскопа співпадала з вектором кутової швидкості обертання. Знімається вихідний сигнал кожного гіроскопа при різній орієнтації блоку та за різної швидкості обертання.

Вихідні сигнали блоку гіроскопів ДКШ у матричній формі представимо як:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega x} \\ U_{\omega y} \\ U_{\omega z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} \\ B_{\omega y} \\ B_{\omega z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{\omega x} \\ n_{\omega y} \\ n_{\omega z} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

де позначено  $U_{\omega x}, U_{\omega y}, U_{\omega z}$  – вихідні сигнали акселерометрів,  $B_{\omega x}, B_{\omega y}, B_{\omega z}$  – нульові сигнали,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекції кутової швидкості обертання основи,  $s_{11}, s_{22}, s_{33}$  – масштабні коефіцієнти кожного гіроскопа, решта елементів матриці  $3 \times 3$  – коефіцієнти перехресної чутливості,  $n_{\omega x}, n_{\omega y}, n_{\omega z}$  – шуми вимірювань.

Для зменшення впливу шумів вимірювань вихідні сигнали осереднюються протягом часу 100 с, тому шумами вимірювань  $n_{\omega x}, n_{\omega y}, n_{\omega z}$  в подальшому можна знехтувати.

Розглянемо випадок при обертанні стенду навколо осі  $x$  ( $\omega_{xi} \neq 0, \omega_{yi} = \omega_{zi} = 0$ ).

Підставляючи значення кутової швидкості стенда  $\omega_{x1}$  у вираз вихідних сигналів (2.5) для першого вимірювання отримаємо:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega x1} \\ U_{\omega y1} \\ U_{\omega z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} \\ B_{\omega y} \\ B_{\omega z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} \\ B_{\omega y} \\ B_{\omega z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}\omega_{x1} \\ s_{21}\omega_{x1} \\ s_{31}\omega_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{11} \\ B_{\omega y} & s_{21} \\ B_{\omega z} & s_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_{x1} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Якщо записати матричне рівняння (2.6) у звичайному вигляді, то отримаємо три алгебраїчні рівняння і шість невідомих:  $B_{\omega x}, B_{\omega y}, B_{\omega z}, s_{11}, s_{21}, s_{31}$ . Для розв'язання такої задачі необхідно мати ще три рівняння.

Підставляючи значення кутової швидкості  $\omega_{x2}$  у вираз вихідних сигналів (2.5) для другого вимірювання отримаємо:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega x2} \\ U_{\omega y2} \\ U_{\omega z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{11} \\ B_{\omega y} & s_{21} \\ B_{\omega z} & s_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_{x2} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Об'єднавши попередні рівняння (2.6) для кутової швидкості  $\omega_{x1}$  та поточні рівняння (2.7) для  $\omega_{x2}$ , отримаємо шість алгебраїчних рівнянь із шістьма невідомими. Однак, краще мати надлишкову кількість рівнянь, щоб можна було застосувати для їх більш точного розв'язання методом найменших квадратів. Для цього виконаємо  $n$  – вимірювань для  $\omega_{xn}$  значень кутової швидкості сенду:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega xn} \\ U_{\omega yn} \\ U_{\omega zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{11} \\ B_{\omega y} & s_{21} \\ B_{\omega z} & s_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_{xn} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Об'єднаємо отримані  $n$  – рівнянь вигляду (2.8) в одне матричне рівняння:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega x1} & U_{\omega x2} & \dots & U_{\omega xn} \\ U_{\omega y1} & U_{\omega y2} & \dots & U_{\omega yn} \\ U_{\omega z1} & U_{\omega z2} & \dots & U_{\omega zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{11} \\ B_{\omega y} & s_{21} \\ B_{\omega z} & s_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_{x1} & \omega_{x2} & \dots & \omega_{xn} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Отримане матричне рівняння можна записати у компактній формі:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_1, \quad (2.10)$$

де

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} U_{\omega x1} & U_{\omega x2} & \dots & U_{\omega xn} \\ U_{\omega y1} & U_{\omega y2} & \dots & U_{\omega yn} \\ U_{\omega z1} & U_{\omega z2} & \dots & U_{\omega zn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{11} \\ B_{\omega y} & s_{21} \\ B_{\omega z} & s_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_{x1} & \omega_{x2} & \dots & \omega_{xn} \end{bmatrix}.$$

Використовуючи матричний метод найменших квадратів, знайдемо невідомі параметри блоку гіроскопів:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T \cdot (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T)^{-1}. \quad (2.11)$$

Аналогічно розглядається обертання стенду навколо осей у  $(\omega_{xi} = \omega_{zi} = 0, \omega_{yi} \neq 0)$  та  $z (\omega_{xi} = \omega_{yi} = 0, \omega_{zi} \neq 0)$ .

У результаті, використовуючи метод найменших квадратів, отримаємо рівняння, аналогічні (2.11):

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A}_2^T \cdot (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2^T)^{-1}. \quad (2.12)$$

де

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} U_{\omega x n+1} & U_{\omega x n+2} & \dots & U_{\omega x 2n} \\ U_{\omega y n+1} & U_{\omega y n+2} & \dots & U_{\omega y 2n} \\ U_{\omega z n+1} & U_{\omega z n+2} & \dots & U_{\omega z 2n} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{12} \\ B_{\omega y} & s_{22} \\ B_{\omega z} & s_{32} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_{yn+1} & \omega_{yn+2} & \dots & \omega_{y2n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{A}_3^T \cdot (\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3^T)^{-1}. \quad (2.13)$$

де

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} U_{\omega x 2n+1} & U_{\omega x 2n+2} & \dots & U_{\omega x 3n} \\ U_{\omega y 2n+1} & U_{\omega y 2n+2} & \dots & U_{\omega y 3n} \\ U_{\omega z 2n+1} & U_{\omega z 2n+2} & \dots & U_{\omega z 3n} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{13} \\ B_{\omega y} & s_{23} \\ B_{\omega z} & s_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_{z2n+1} & \omega_{z2n+2} & \dots & \omega_{z3n} \end{bmatrix}$$

Очевидно, що формули (2.11), (2.12) і (2.13) також можна записати у загальному вигляді:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i^T \cdot (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i^T)^{-1}. \quad (2.14)$$

Таким чином, провівши серію з  $n$  вимірювань та виконуючи розрахунки за (2.14), можна знайти нульові сигнали гіроскопів  $B_{\omega x}, B_{\omega y}, B_{\omega z}$  та елементи матриці масштабних коефіцієнтів.

При знайдених калібрувальних параметрах гіроскопа  $\mathbf{X}_i$  можна, використовуючи модель вихідного сигналу датчиків (2.5), провести калібрування гіроскопів IBM.

### **2.1.3 Метод просторового калібрування блоку акселерометрів**

#### **Осьові акселерометри**

Використаємо математичну модель вихідного сигналу осьових акселерометрів (2.1). Калібрування буде виконуватись у полі Земного тяжіння.

Для зменшення впливу шумів датчиків запис сигналу буде здійснюватися протягом 100 с, що дозволить знехтувати членами  $n_{ax}, n_{ay}, n_{az}$ . Запишемо рівняння (2.1) окремо для кожного акселерометра і для кожного  $i$ -го тестового положення ІВМ:

$$\begin{aligned}U_{axi} &= B_{ax} + k_{11}a_{xi} + k_{12}a_{yi} + k_{13}a_{zi}; \\U_{ayi} &= B_{ay} + k_{21}a_{xi} + k_{22}a_{yi} + k_{23}a_{zi}; \\U_{azi} &= B_{az} + k_{31}a_{xi} + k_{32}a_{yi} + k_{33}a_{zi}.\end{aligned}$$

Проведемо серію з  $n$  тестів при одночасному повороті ІВМ на кути  $\alpha, \beta, \gamma$  навколо трьох осей стенду з певним кроком повороту.

Вихідний сигнал першого акселерометру при цьому буде:

$$\text{Перше вимірювання: } U_{ax1} = B_{ax} + k_{11}a_{x1} + k_{12}a_{y1} + k_{13}a_{z1};$$

$$\text{Друге вимірювання: } U_{ax2} = B_{ax} + k_{11}a_{x2} + k_{12}a_{y2} + k_{13}a_{z2};$$

.....

$$n\text{-те вимірювання: } U_{axn} = B_{ax} + k_{11}a_{xn} + k_{12}a_{yn} + k_{13}a_{zn}.$$

Отриману систему рівнянь представимо у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} U_{ax1} \\ U_{ax2} \\ \vdots \\ U_{axn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} \\ 1 & a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{xn} & a_{yn} & a_{zn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{ax} \\ k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{bmatrix}$$

Аналогічні рівняння отримуються одночасно і для решти двох акселерометрів блоку.

Об'єднаємо отримані матричні рівняння в одне рівняння калібрування:

$$\mathbf{U}_{a1} = \mathbf{G}_{n \times 4} \cdot \mathbf{X}_1, \quad (2.15)$$

де позначено

$$\mathbf{U}_{a1} = \begin{bmatrix} U_{ax1} & U_{ay1} & U_{az1} \\ U_{ax2} & U_{ay2} & U_{az2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{axn} & U_{ayn} & U_{azn} \end{bmatrix} - \text{матриця осереднених сигналів акселерометрів};$$

$$\mathbf{G}_{n \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} \\ 1 & a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{xn} & a_{yn} & a_{zn} \end{bmatrix} - \text{матриця проєкцій уявного прискорення};$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} B_{ax} & B_{ay} & B_{az} \\ k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} - \text{матриця калібрувальних коефіцієнтів акселерометрів.}$$

Розв'язуємо останнє матричне рівняння (2.15) методом найменших квадратів:

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = (\mathbf{G}_{n \times 4}^T \mathbf{G}_{n \times 4})^{-1} \mathbf{G}_{n \times 4}^T \mathbf{U}_{a1}. \quad (2.16)$$

Рівняння (2.16) дає змогу знайти необхідні калібрувальні коефіцієнти [97].

### Маятникові акселерометри

Вихідні сигнали блоку маятникових акселерометрів в полі сили тяжіння на нерухомій основі мають вигляд [97]:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \\ B_{az} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{1a} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{2a} \cdot \begin{bmatrix} a_x a_y \\ a_y a_z \\ a_x a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

де

$$\mathbf{M}_{1a} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} - \text{матриця масштабних коефіцієнтів};$$

$$\mathbf{M}_{2a} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів нерівножорсткості підвісів.}$$

Після проведення серії з  $n$  вимірювань і осереднення сигналів, матричне рівняння (2.17) можна привести до вигляду:

$$\mathbf{U}_{a2} = \mathbf{G}_{n \times 7} \cdot \mathbf{X}_2, \quad (2.18)$$

де

$$\mathbf{U}_{a2} = \begin{bmatrix} U_{ax1} & U_{ay1} & U_{az1} \\ U_{ax2} & U_{ay2} & U_{az2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{axn} & U_{ayn} & U_{azn} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} B_{ax} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ B_{ay} & k_{21} & k_{22} & k_{23} & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ B_{az} & k_{31} & k_{32} & k_{33} & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{G}_{n \times 7} = \begin{bmatrix} 1 & a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & a_{x1}a_{y1} & a_{y1}a_{z1} & a_{x1}a_{z1} \\ 1 & a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & a_{x2}a_{y2} & a_{y2}a_{z2} & a_{x2}a_{z2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{xn} & a_{yn} & a_{zn} & a_{xn}a_{yn} & a_{yn}a_{zn} & a_{xn}a_{zn} \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо рівняння (2.18) методом найменших квадратів:

$$\hat{\mathbf{X}}_2 = (\mathbf{G}_{n \times 7}^T \mathbf{G}_{n \times 7})^{-1} \mathbf{G}_{n \times 7}^T \mathbf{U}_{a2}. \quad (2.19)$$

Отримане рівняння (2.19) дозволяє отримати матрицю калібрувальних коефіцієнтів блоку маятникових акселерометрів просторовим методом. Використавши математичну модель вихідного сигналу маятникового акселерометра (2.17), можна провести калібрування.

#### **2.1.4 Метод просторового калібрування блоку гіроскопів**

Використаємо математичну модель вихідного сигналу гіроскопів (2.5).

Розглянемо просторове калібрування блоку гіроскопів при якому обертання ІВМ відбувається одночасно навколо декількох осей з певним кроком зростання кутових швидкостей стенду.

Після проведення серії з  $n$  вимірювань при обертанні ІВМ зі швидкостями  $\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}$  і після осереднення вихідних сигналів гіроскопів отримаємо наступне рівняння вихідних сигналів гіроскопів

$$\mathbf{U}_{\omega 3} = \boldsymbol{\omega}_{n \times 4} \cdot \mathbf{X}_3, \quad (2.20)$$

де

$$\mathbf{U}_{\omega 3} = \begin{bmatrix} U_{\omega x1} & U_{\omega y1} & U_{\omega z1} \\ U_{\omega x2} & U_{\omega y2} & U_{\omega z2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{\omega xn} & U_{\omega yn} & U_{\omega zn} \end{bmatrix} \text{ — матриця осереднених сигналів гіроскопів;}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{n \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ 1 & \omega_{x2} & \omega_{y2} & \omega_{z2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_{xn} & \omega_{yn} & \omega_{zn} \end{bmatrix} - \text{матриця проекцій кутової швидкості стенду};$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & B_{\omega z}^* \\ s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} - \text{матриця калібрувальних коефіцієнтів гіроскопів}.$$

На перший погляд структура (2.20) дуже схожа на рівняння (2.15). Відмінність полягає в тому, що матриця  $\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}$  складається з проекцій кутової швидкості, а  $\mathbf{G}_{n \times 4}$  – з проекцій уявного прискорення. Однак, якщо при калібруванні акселерометрів задавалася послідовність поворотів основи без будь-яких обмежень, то у випадку калібрування гіроскопів необхідно забезпечити умову:  $\text{rank } \boldsymbol{\omega}_{n \times 4} = 4$ .

Її можна виконати, наприклад, задавши нелінійну залежність трьох останніх стовпчиків матриці  $\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}$ , що легко виконується на сучасних поворотних стендах.

Дійсно, згідно теореми Кронекера–Капеллі, якщо ранг матриці  $\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}$  рівний рангу розширеної матриці, що складена з  $\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}$  та матриці правих частин  $\mathbf{U}_{\omega 3}$

$$\text{rank } \boldsymbol{\omega}_{n \times 4} = \text{rank } [\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}, \mathbf{U}_{\omega 3}],$$

то система рівнянь буде мати розв’язок.

Це підтверджує, що нелінійна залежність трьох останніх стовпців матриці  $\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}$ ,  $\text{rank } \boldsymbol{\omega}_{n \times 4} = 4$  та  $\text{rank } [\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}, \mathbf{U}_{\omega 3}] = 4$ .

Таким чином, отримана умова калібрування: для того, щоб існував розв’язок рівняння калібрування, необхідно забезпечити рівність ранга основної матриці калібрування її порядку, або числу стовпців.

Розв’язуючи отримане матричне рівняння (2.20) методом найменших квадратів, отримаємо [97]

$$\hat{\mathbf{X}}_3 = (\boldsymbol{\omega}_{n \times 4}^T \boldsymbol{\omega}_{n \times 4})^{-1} \boldsymbol{\omega}_{n \times 4}^T \mathbf{U}_{\omega 3}. \quad (2.21)$$



Рівняння (2.21) дає змогу знайти калібрувальні параметри блоку гіроскопів та провести їх калібрування за (2.5).

## ***2.2 Дослідження точності методів калібрування***

### ***2.2.1 Розробка імітаційної моделі калібрування акселерометрів***

Калібрування акселерометрів методом тестових поворотів є широко розповсюдженим через свою простоту і точність. Для оцінки якості нових методів просторового калібрування доцільно провести імітаційне моделювання процесу калібрування методом тестових поворотів та встановити його точність.

Для проведення дослідження було складено програмний алгоритм обох процедур калібрування акселерометрів у середовищі Matlab (Додаток А). У ньому моделюється рух ОДГ або поворотного стенду, формуються відповідні проекції уявного прискорення, що визначають невідкалібрований вихідний сигнал акселерометрів, проводиться процедура калібрування одним з методів та оцінюються похибки.

Для перевірки адекватності розробленої імітаційної моделі припустимо, що відсутні будь-які інструментальні похибки тестового обладнання та акселерометрів. У такому випадку на точність процедури мають впливати лише методичні фактори та похибки машинного обчислення. Очевидно, якщо визначена похибка досліджуваного методу калібрування буде в межах розрахункових можливостей середовища Matlab, то імітаційна модель працює адекватно.

### **Перевірка адекватності моделі калібрування блоку акселерометрів методом тестових поворотів**

Припустимо, що акселерометри закріплені на платформі ОДГ. Їх осі чутливості співпадають з осями платформи. Нехай поворотна платформа, разом із закріпленим на ній ІВМ, обертається спочатку навколо осі  $x$  на кут  $\beta$  з кроком

$90^0$ , а потім навколо осі  $y$  на кут  $\gamma$  з кроком  $90^0$ , як показано на рис.2.4. Кут повороту задається без похибки. У кожному положенні ІВМ утримується протягом 100 с задля компенсації шумів датчиків.

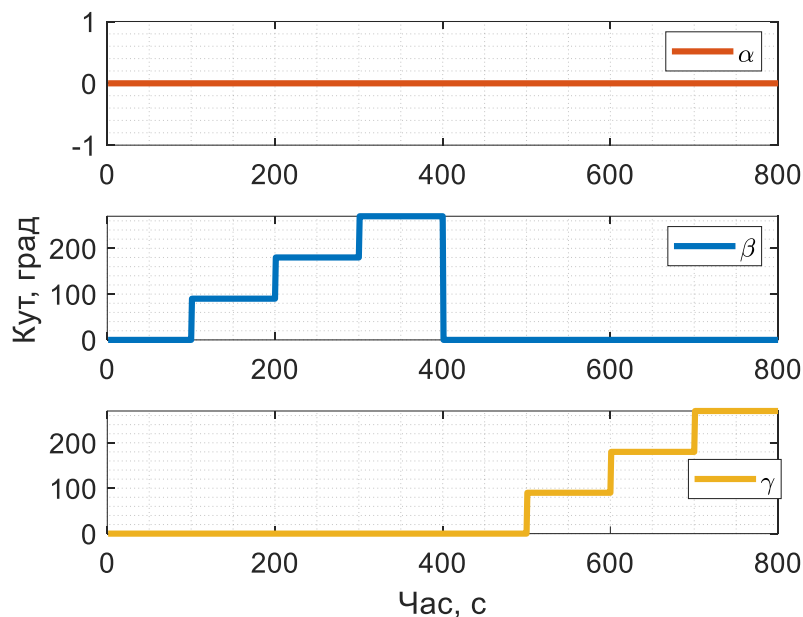


Рис.2.4 Кути повороту ОДГ

При такому повороті платформи, проекції уявного прискорення у кожному положенні будуть мати наступний вигляд (рис.2.5).

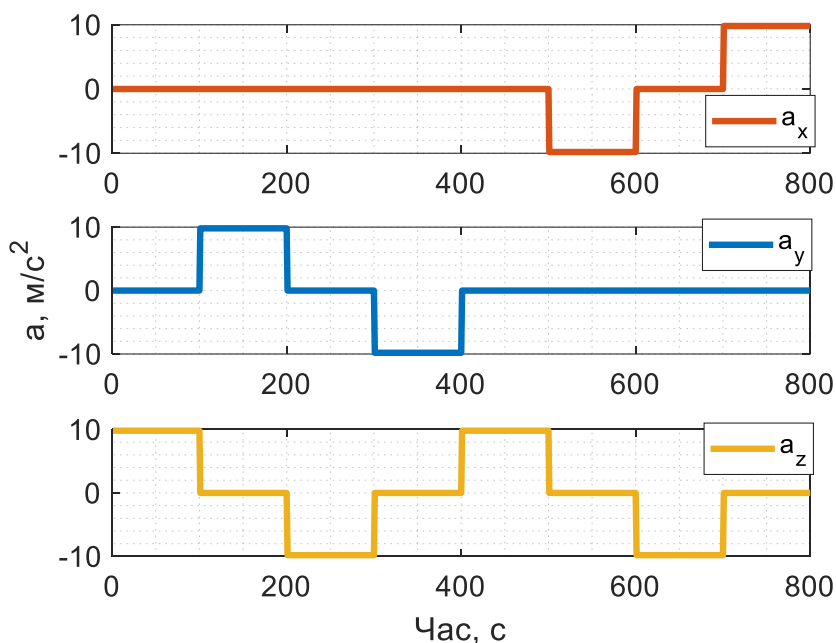


Рис.2.5 Проекції уявного прискорення в осях ОДГ

Виходячи з аналізу конструкцій та характеристик відомих ІВМ, виберемо параметри досліджуваного блоку акселерометрів наступними: нульовий сигнал

$$\begin{bmatrix} B_{ax} & B_{ay} & B_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 2,5 & 2,5 \end{bmatrix} B \text{ та матриці масштабних коефіцієнтів}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,01 & -0,01 \\ -0,01 & 1,00 & 0,01 \\ 0,01 & -0,01 & 1,00 \end{bmatrix} B/g.$$

У такому випадку вихідний сигнал акселерометрів буде мати наступний вигляд (рис.2.6):

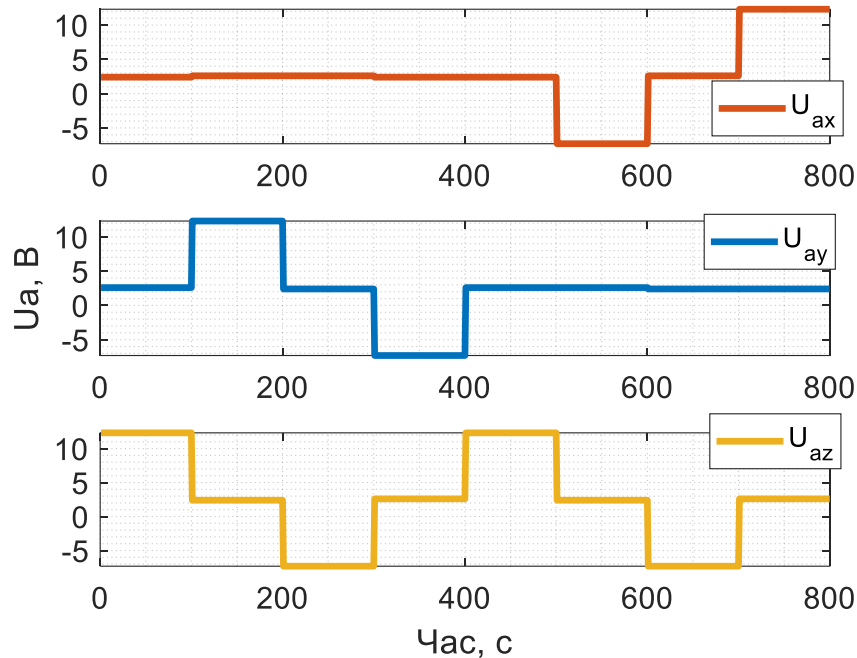


Рис.2.6 Сигнал акселерометрів IBM

Знаючи кути повороту ОДГ та вихідний сигнал датчиків, можна за Табл.2.1 та формулами (2.4) визначити значення калібрувальних коефіцієнтів акселерометрів:

$$\begin{bmatrix} B_{ax} & B_{ay} & B_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,50 & 2,50 & 2,50 \end{bmatrix} B, \text{ та}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,01 & -0,01 \\ -0,01 & 1,00 & 0,01 \\ 0,01 & -0,01 & 1,00 \end{bmatrix} B/g, \text{ що повністю збігається із заданими.}$$

Знаючи зміщення нулів та калібрувальні коефіцієнти акселерометрів, можна відкалібрувати вихідний сигнал. Різниця між відкаліброваним сигналом акселерометрів та значеннями проєкцій уявного прискорення у відповідних положеннях становитиме похибку методу калібрування (рис.2.7).

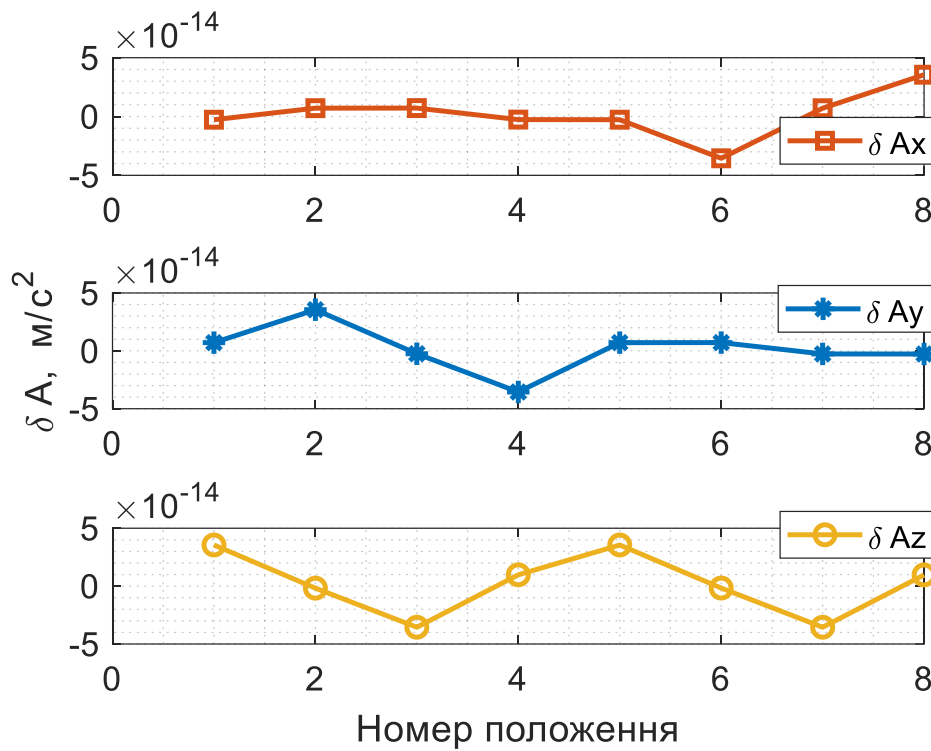


Рис.2.7 Похибка калібрування

Наведені на рис.2.7 результати свідчать, що максимальне значення похибки становить  $\delta A_{\max} = 3,5527 \cdot 10^{-14} \text{ м/с}^2$ ; середнє значення похибки для кожного акселерометра:  $\langle \delta A \rangle = [1,6591 \ 1,6701 \ 1,9984] \cdot 10^{-15} \text{ м/с}^2$ ; а середньоквадратичне відхилення:  $\sigma_{\delta A} = [1,9549 \ 1,9544 \ 2,7285] \cdot 10^{-14} \text{ м/с}^2$ .

Отримані значення похибок знаходяться в межах розрахункових похибок Matlab, тому можна зробити висновок, що програмний алгоритм складено адекватно.

### Перевірка адекватності моделі просторового калібрування блоку акселерометрів

У розробленому програмному алгоритмі реалізовано імітацію повороту стенду на задані кути  $\alpha, \beta, \gamma$ , вихідні сигнали датчиків у вигляді відповідної напруги при певному кутовому положенні стенду та розрахунок калібрувальних матриць за (2.16) та (2.19).

Нехай лабораторний стенд обертається на кути  $\alpha, \beta, \gamma$  від нульового положення до  $400^\circ$  із кроком  $10^\circ$ , як показано на рис.2.8.

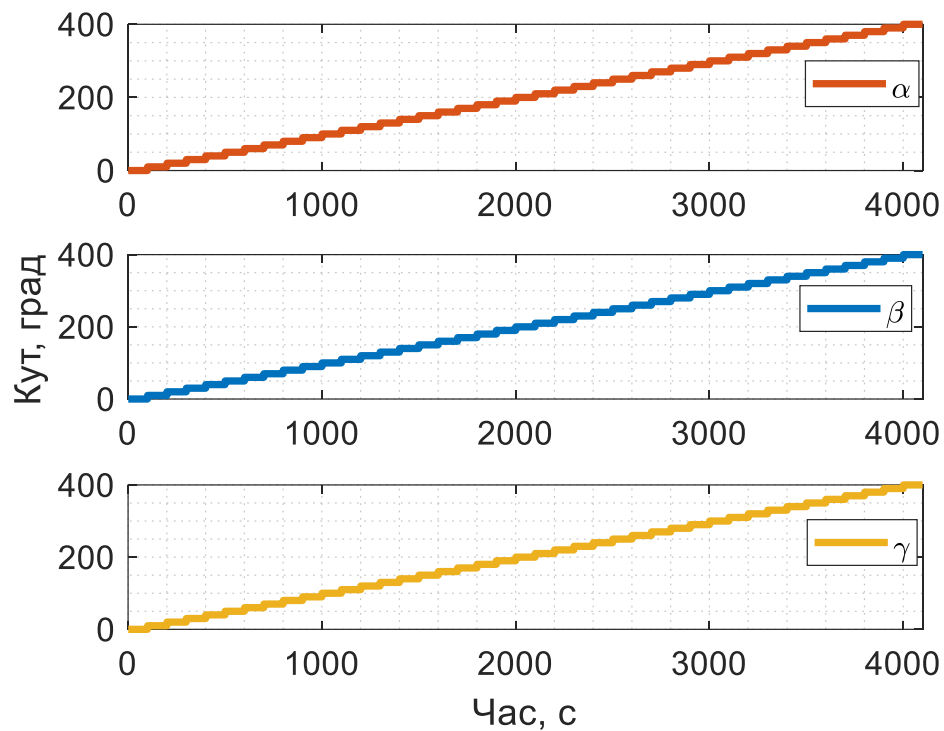


Рис.2.8 Просторовий поворот стенду

Проекції уявного прискорення на осі ІВМ кожному положенні наведені на рис.2.9

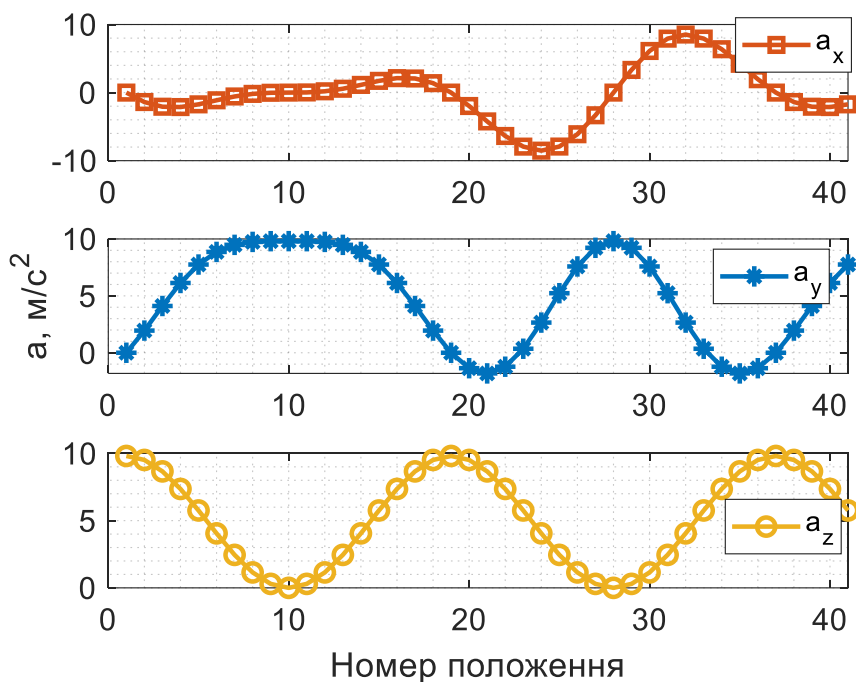


Рис.2.9 Проекції уявного прискорення

Припустимо, що акселерометри ІВМ мають наступні значення нульових сигналів  $[B_{ax} \ B_{ay} \ B_{az}] = [2,5 \ 2,5 \ 2,5]$  В та матриці масштабних коефіцієнтів

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 & -0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 1,00 & -0,01 \\ -0,01 & 0,01 & 1,00 \end{bmatrix} B/g,$$

Вихідний невідкалібрований сигнал акселерометрів у одиницях напруги наведено на рис.2.10.

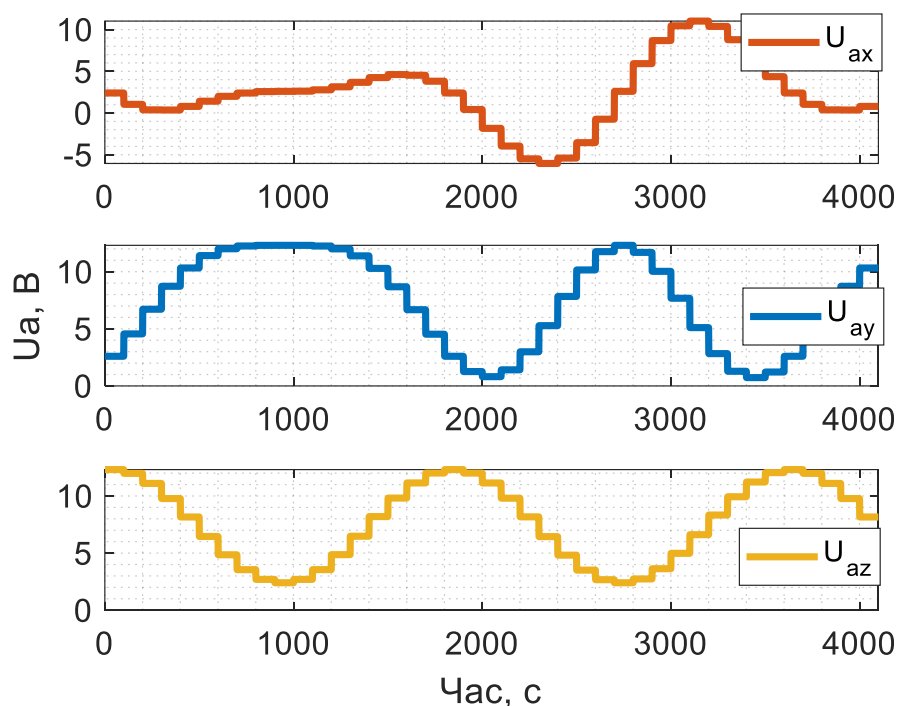


Рис.2.10 Вихідний сигнал акселерометрів

Маючи інформацію про заданий поворот стенду, а, відповідно, і проекції уявного прискорення, що діють на IBM, а також вихідний сигнал акселерометрів, можна, використовуючи (2.16), знайти значення нульового сигналу і масштабних коефіцієнтів датчиків.

Для заданих умов в результаті калібрування за (2.16) отримано матрицю:

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} B_{ax} & B_{ay} & B_{az} \\ k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 2,5 & 2,5 \\ 1,0 & -0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 1,0 & -0,01 \\ -0,01 & 0,01 & 1,0 \end{bmatrix},$$

Отримана матриця коефіцієнтів  $\hat{\mathbf{X}}_1$  використовуються для калібрування вихідного сигналу акселерометрів IBM. На рис.2.11 наведено похибки процедури просторового калібрування блоку акселерометрів.

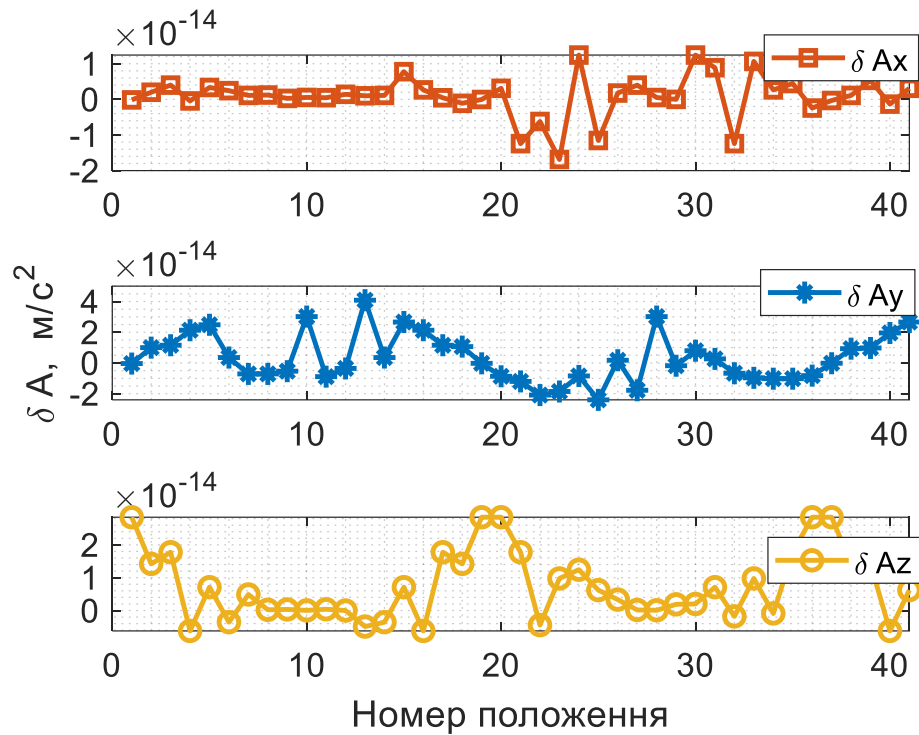


Рис.2.11 Похибка калібрування

Представлені на рис.2.11 результати свідчать, що максимальне значення похибки становить  $\delta A_{\max} = 4,0856 \cdot 10^{-14} \text{ м/с}^2$ ; середнє значення похибки для кожного акселерометра:  $\langle \delta A \rangle = [0,8512 \quad 3,2740 \quad 7,5923] \cdot 10^{-15} \text{ м/с}^2$ ; а середньоквадратичне відхилення:  $\sigma_{\delta A} = [6,0206 \quad 1,5607 \quad 1,0666] \cdot 10^{-14} \text{ м/с}^2$ .

Отримані значення похибок також знаходяться в межах розрахункових похибок Matlab, тому програмний алгоритм складено адекватно.

### 2.2.2 Дослідження точності калібрування акселерометрів

Розроблене програмне забезпечення показало свою адекватну роботу, тому проведемо дослідження точності розробленого методу просторового калібрування акселерометрів.

У реальних умовах при проведенні калібрування існує низка суто інструментальних факторів, які впливають на кінцеву точність вихідного сигналу акселерометрів IBM:

- похибки стендового обладнання;

- похибки датчиків.

Перша група похибок визначається неможливістю абсолютно точно виставити платформу ОДГ або іншого стенду у необхідне, задане процедурою, положення. І справді, виробники стендово-випробувальної апаратури завжди зазначають похибку виставки платформи у специфікаціях виробу. Ця величина знаходиться в межах від 1" до 10". Крім того, при проведенні калібрування ІВМ закріплюється на стенді з додатковою похибкою – вимірювальні осі чутливих елементів не співпадають з осями стенду. Стендові похибки намагаються компенсувати проведенням калібрування у декількох положеннях.

До інструментальних похибок датчиків можна віднести нестабільності зміщень нулів та масштабних коефіцієнтів, а також власні шуми вимірювачів. У математичній моделі акселерометрів (2.1) вони не враховуються. Розширимо модель (2.1) найбільш вагомими інструментальними похибками датчиків:

$$\begin{aligned} U_{ax} &= (1 + \Delta k_x) k_{11} a_x + k_{12} a_y + k_{13} a_z + B_{ax} + \Delta B_{ax} + n_{ax}; \\ U_{ay} &= k_{21} a_x + (1 + \Delta k_y) k_{22} a_y + k_{23} a_z + B_{ay} + \Delta B_{ay} + n_{ay}; \\ U_{az} &= k_{31} a_x + k_{32} a_y + (1 + \Delta k_z) k_{33} a_z + B_{az} + \Delta B_{az} + n_{az}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

де позначено  $U_{ax}, U_{ay}, U_{az}$  – вихідні сигнали акселерометрів,  $B_{ax}, B_{ay}, B_{az}$  – нульові сигнали,  $a_x, a_y, a_z$  – проекції уявного прискорення,  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$  – масштабні коефіцієнти, решта елементів матриці 3x3 – коефіцієнти перехресної чутливості,  $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$  – нестабільність масштабних коефіцієнтів акселерометрів,  $\Delta B_{ax}, \Delta B_{ay}, \Delta B_{az}$  – нестабільність зміщення нуля,  $n_{ax}, n_{ay}, n_{az}$  – шуми акселерометрів.

Передбачається, що записуючи вихідний сигнал датчиків протягом тривалого часу (до 100 с) у визначеному методикою положенні, а потім осереднюючи його для калібрування, можна позбавитись впливу похибок датчиків. Проте в реальності похибки датчиків можуть сягати значних величин, тому доцільно дослідити їх вплив на точність процедури калібрування.

Вважатимемо, що похибки обладнання та датчиків є сталими в рамках одного калібрувального положення.



Дослідження точності методів доцільно провести на розробленому програмному забезпеченні шляхом імітаційного моделювання за схемою, наведеною на рис.2.12.



Рис.2.12 Схема калібрування акселерометрів

Будемо досліджувати максимальну середню величину похибок кожного акселерометра, а також їх середньоквадратичне відхилення. Оскільки похибки обладнання і датчиків мають випадковий характер, то і похибки калібрування також будуть випадковими. Для більшої точності, імітаційну процедуру калібрування виконувалося двісті разів для кожного значення досліджуваної похибки, а отримані вихідні значення похибок калібрування осереднювалися.

## Вплив похибки виставки стану у задане положення на точність калібрування

Похибка виставки платформи стану у задане положення змінюється тільки при зміні калібрувального положення, але під час отримання даних з акселерометрів є сталою. Моделювання проводилось за наступних значень похибки  $\Delta_{\text{ст}} = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]''$ .

Кожен акселерометр калібрується зі своєю похибкою, що показано на рис.2.13.

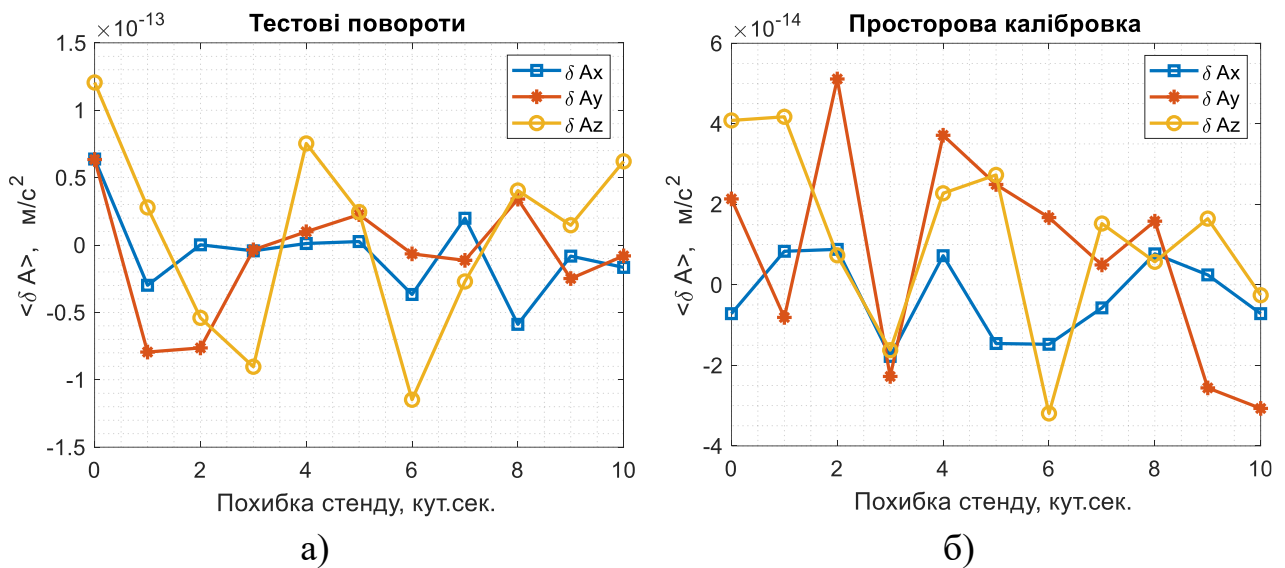


Рис.2.13 Середні значення похибки методу

З рис.2.13 видно, що середні значення деяких похибок має від'ємний знак. Для більшої наочності, наведено абсолютні значення максимальних похибок обох методів на рис.2.14.

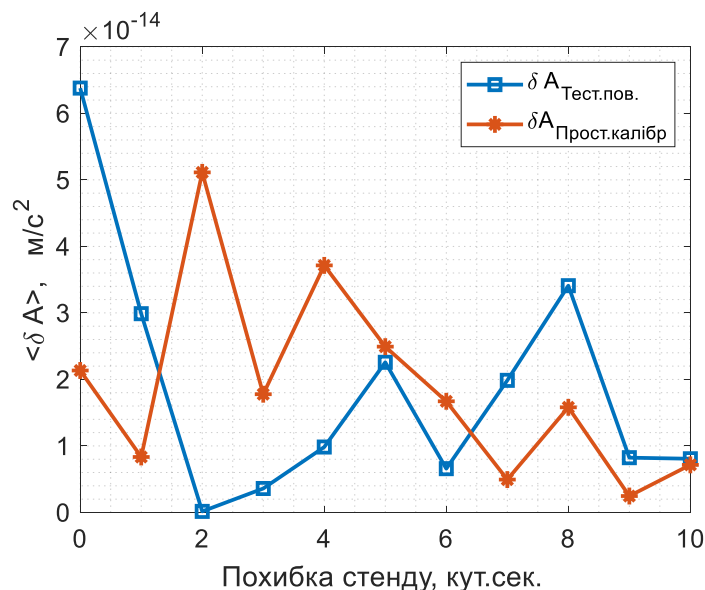


Рис.2.14 Максимальні середні похибки методів

На рис.2.15 представлені значення середньоквадратичних відхилень (СКВ) похибок окремих акселерометрів.

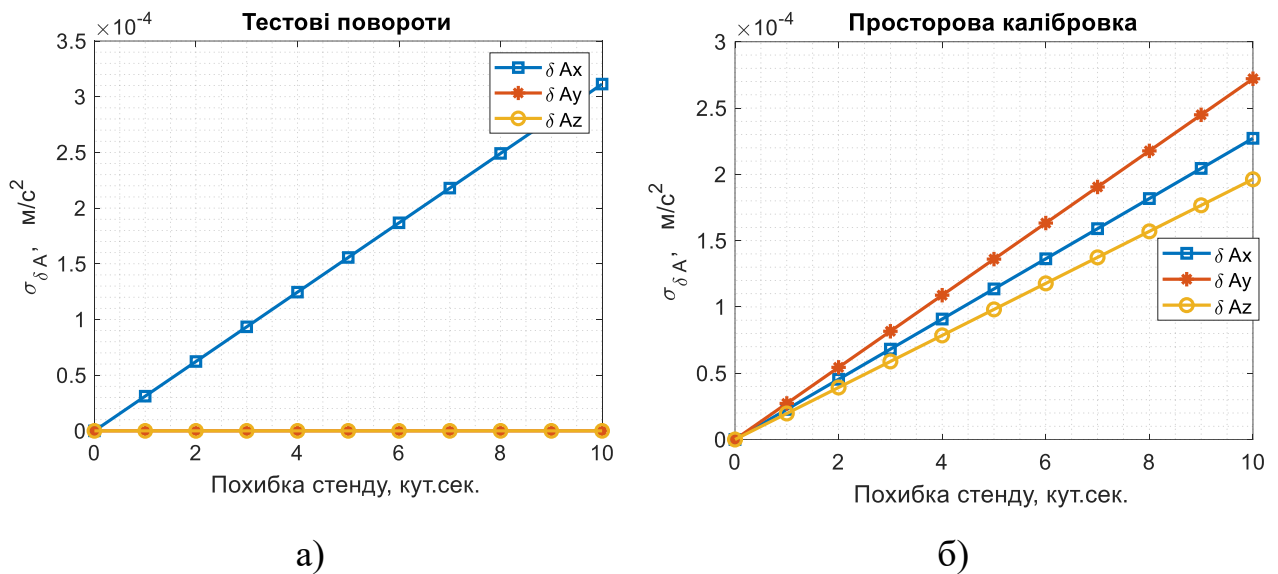


Рис. 2.15 Середньоквадратичні відхилення похибки

Для наочності наведемо на рис.2.16 максимальні значення середньоквадратичних відхилень похибок обох методів калібрування.

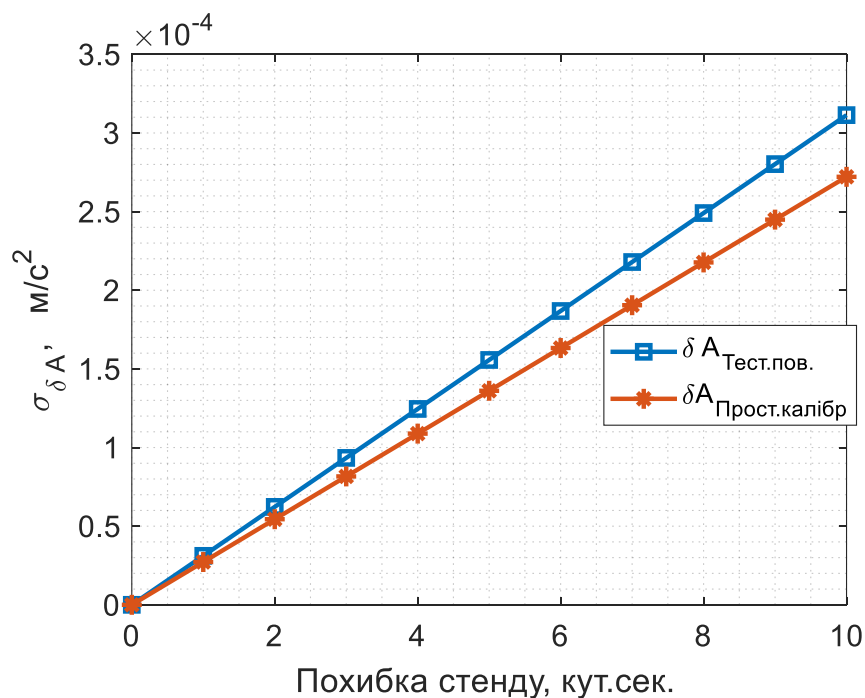


Рис. 2.16 Максимальні середньоквадратичні відхилення похибки

З результатів дослідження впливу похибки виставлення платформи ОДГ на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.14 та 2.16 можна зробити висновок:

- середнє значення похибок калібрування, в межах заданої похибки стенду, має дуже низьку величину (порядку  $10^{-14}$ );
- середньоквадратичне відхилення похибок збільшуються пропорційно похибці стенду;
- точність просторового калібрування, в заданих умовах, суттєво не відрізняється від точності методу тестових поворотів.

### Вплив нестабільності зміщення нуля акселерометрів на точність калібрування

Розглянемо нестабільність зміщення нулів акселерометрів в пуску на похибку калібрування. Акселерометри встановлено на платформі стенду без похибки.

Нестабільність зміщення нуля задамо як випадкову величину, розподілену за нормальним законом. У кожному калібрувальному положенні величина нестабільності не змінюється. Нестабільність зміщення нуля має розмірність вихідної величини акселерометра. Проте зручно користуватися її відносним аналогом – мільйонною долею вимірюваного прискорення (ppm).

На рис.2.17 наведено середні значення похибок калібрування при відповідній нестабільності нулів акселерометрів.

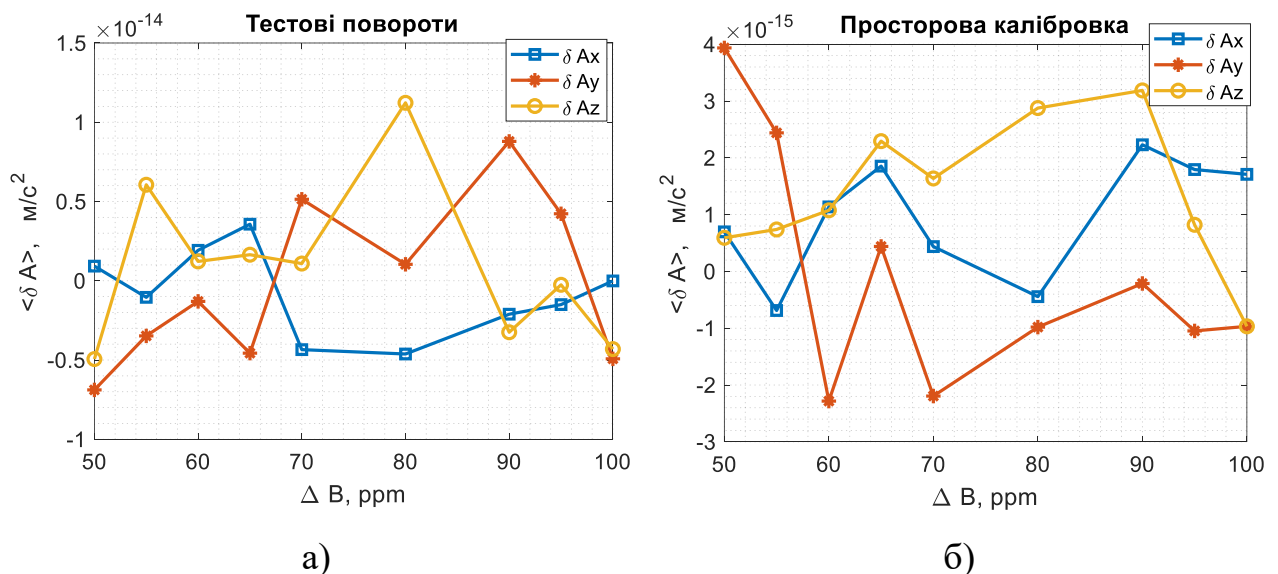


Рис.2.17 Середнє значення похибки методу

З рис.2.17 видно, що середні значення деяких похибок методів мають від’ємний знак. Для більшої наочності, наведемо абсолютні значення максимальних похибок обох методів на рис.2.18.

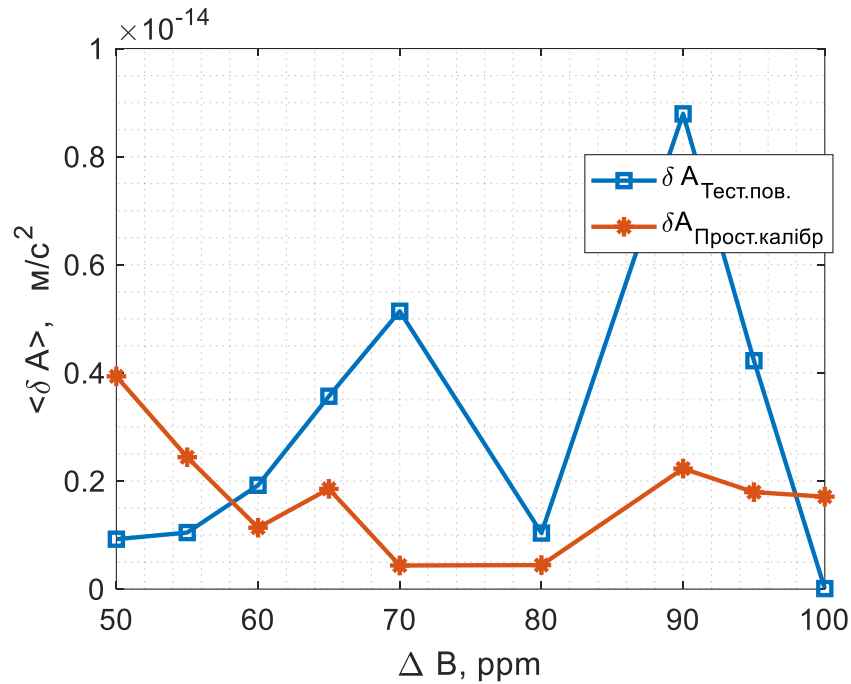


Рис.2.18 Максимальні середні похибки методів

На рис.2.19 представлено СКВ похибок калібрування у залежності від зміщення нулів акселерометрів.

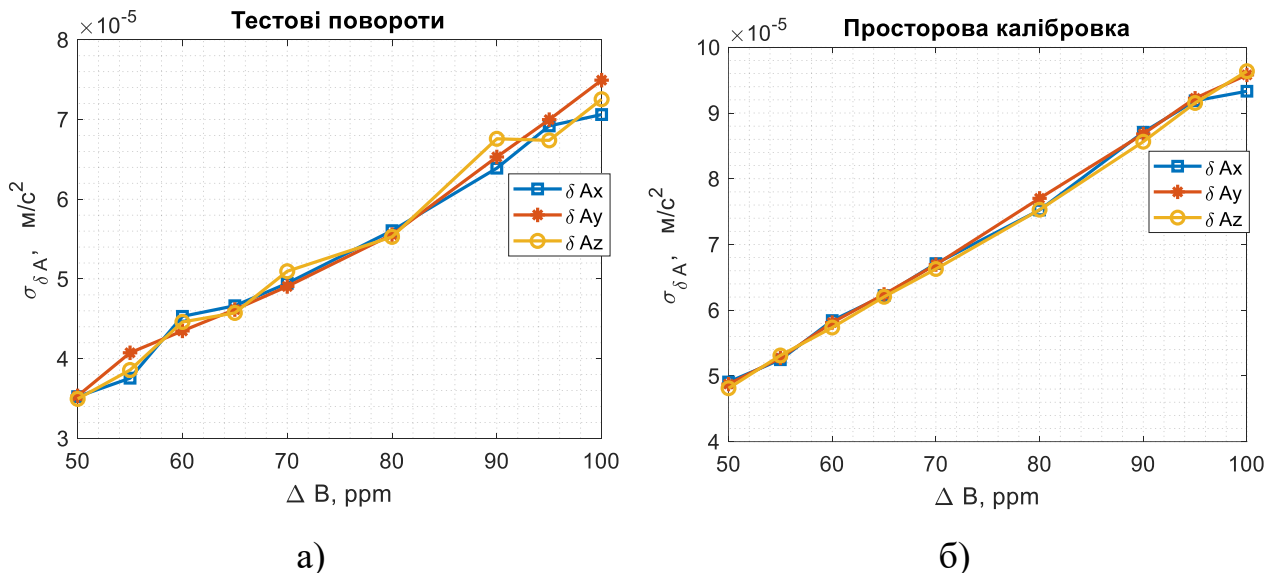


Рис.2.19 Середньоквадратичні відхилення похибки

Максимальні значення СКВ обох методів наведено на рис.2.20 нижче.

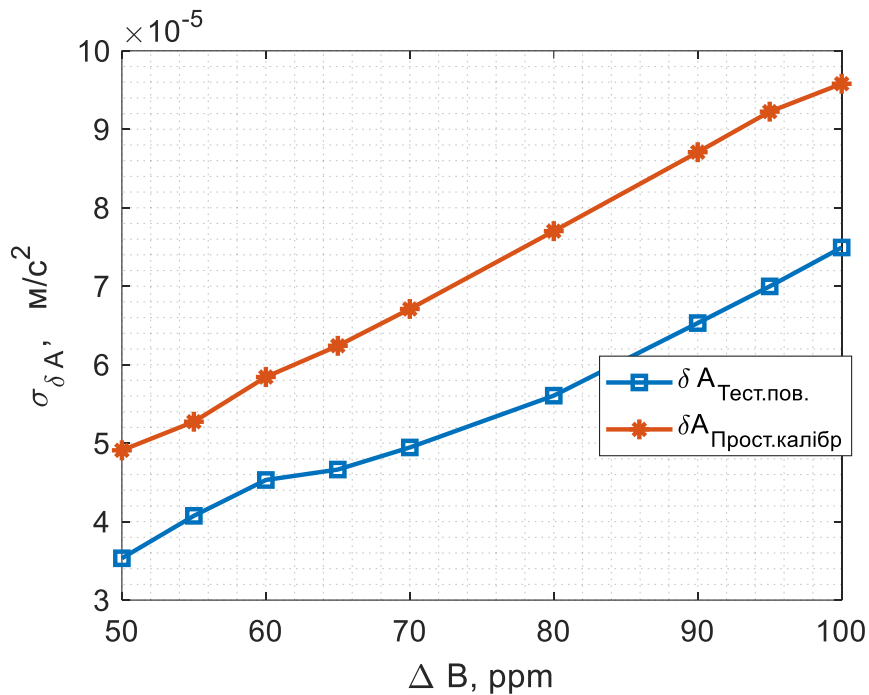


Рис.2.20 Максимальні середньоквадратичні відхилення похибки

З результатів дослідження впливу нестабільності зміщення нуля акселерометрів на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.18 та 2.20 можна зробити висновок:

- середнє значення похибок калібрування при заданій нестабільності нулів має дуже низьку величину (порядку  $10^{-15}$ ), що є межею точності середовища Matlab;
- СКВ похибок калібрування збільшуються зі збільшенням нестабільності нулів акселерометрів;
- точність просторового калібрування, в заданих умовах, суттєво не відрізняється від точності методу тестових поворотів.

### **Вплив нестабільності масштабного коефіцієнту акселерометрів на точність калібрування**

Розглянемо нестабільність масштабного коефіцієнту акселерометрів в пуску на похибку калібрування. Нестабільність масштабного коефіцієнту задамо як випадкову величину, розподілену за нормальним законом. У кожному

калібрувальному положенні величина не змінюється. Задається нестабільність зміщення у мільйонних долях (ppm) від величини прискорення.

На рис.2.21 представлені середні значення похибок обох методів калібрування.

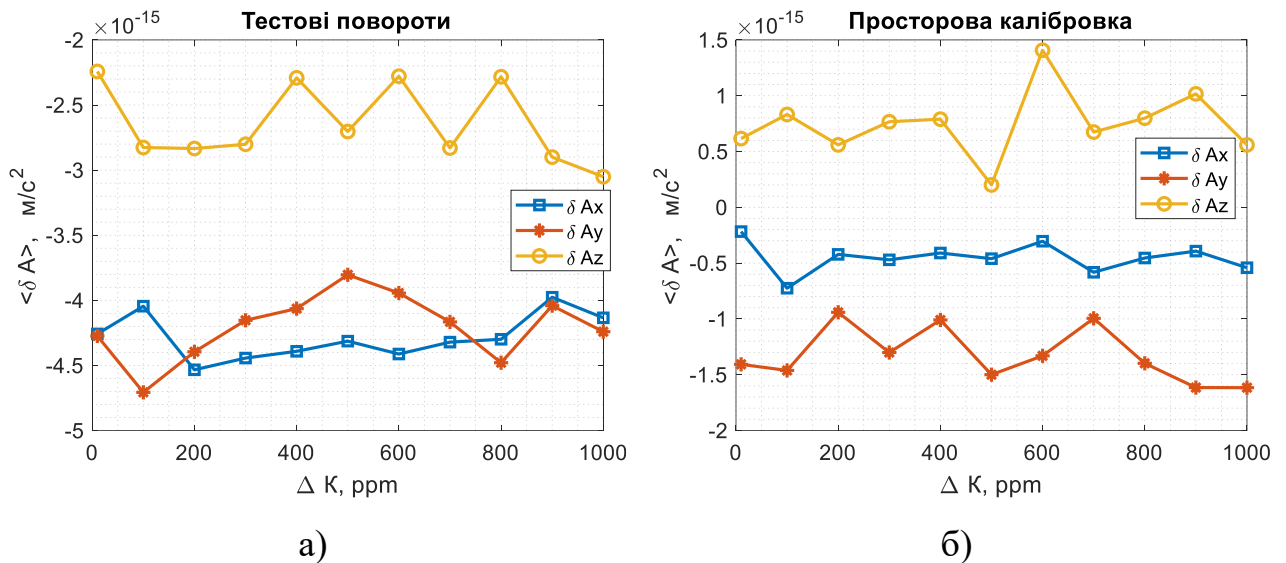


Рис. 2.21 Середнє значення похибки методу

Для порівняння середнього значення похибок методів, доцільно розрахувати максимальні та абсолютні за величиною похибки методів тестових поворотів та просторового калібрування та розглянути їх на одному графіку (Рис. 2.22).

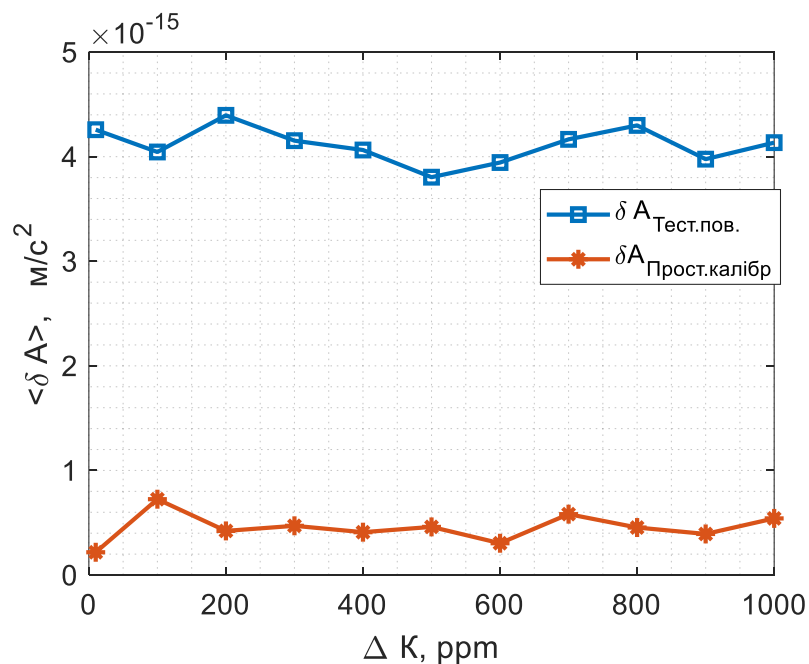


Рис. 2.22 Максимальне середнє значення похибки методу

Нижче, на рис. 2.23, представлені СКВ похибок калібрування.

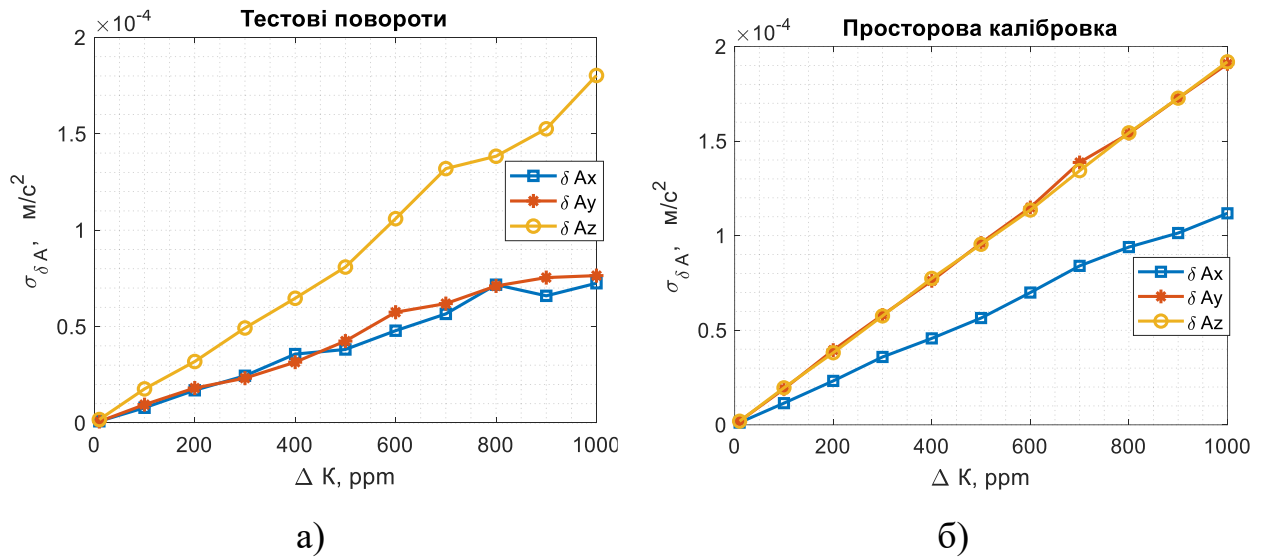


Рис.2.23 Середньоквадратичне відхилення похибки методу

Максимальні значення СКВ похибок зведено на одному графіку, представлено на рис.2.24.

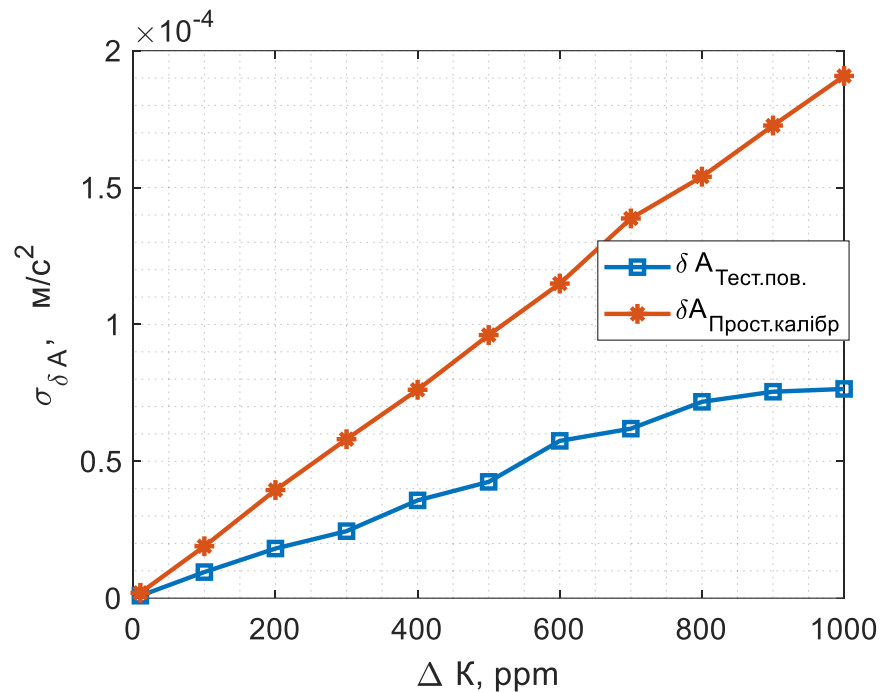


Рис.2.24 Максимальне середньоквадратичне відхилення похибки методів

З результатів дослідження впливу нестабільності масштабного коефіцієнта акселерометрів на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.22 та 2.24 можна зробити висновок:



- середнє значення похибок калібрування в межах заданої нестабільності масштабного коефіцієнту має дуже низьку величину (порядку  $10^{-15}$ ), що є межею точності середовища Matlab; Проте просторове калібрування акселерометрів має до чотирьох разів нижче середнє значення ніж класичний метод тестових поворотів.
- максимальне значення похибок та їх середньоквадратичне відхилення збільшуються зі збільшенням нестабільності масштабних коефіцієнтів акселерометрів;

### Вплив шум акселерометрів на точність калібрування

Розглянемо вплив випадкового нормального шуму акселерометрів на похибку калібрування. Величину шуму задамо як випадкову величину з середньоквадратичним відхиленням:

$$\sigma_{na} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-2} & 5 \cdot 10^{-2} & 1 \cdot 10^{-1} & 5 \cdot 10^{-1} & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \frac{M}{c^2}$$

На рис.2.25 наведено середні значення похибок калібрування окремих акселерометрів.

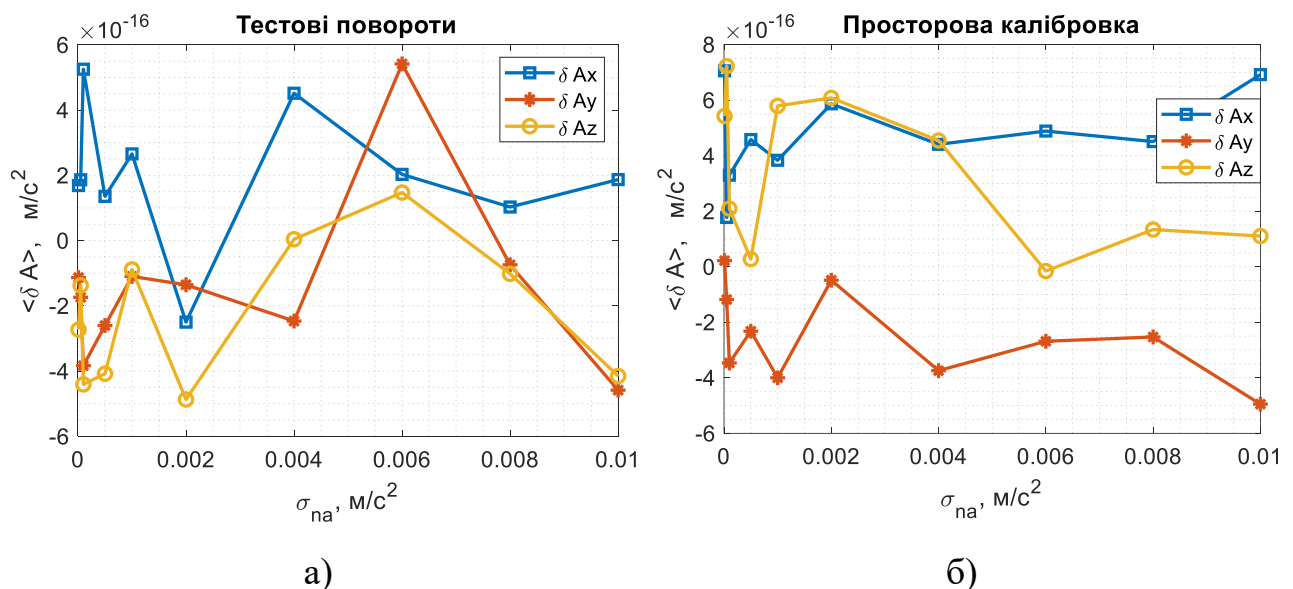


Рис.2.25 Середнє значення похибки методів

Розглянемо максимальні за модулем величини окремих похибок обох процедур калібрування на одному графіку (рис.2.26).

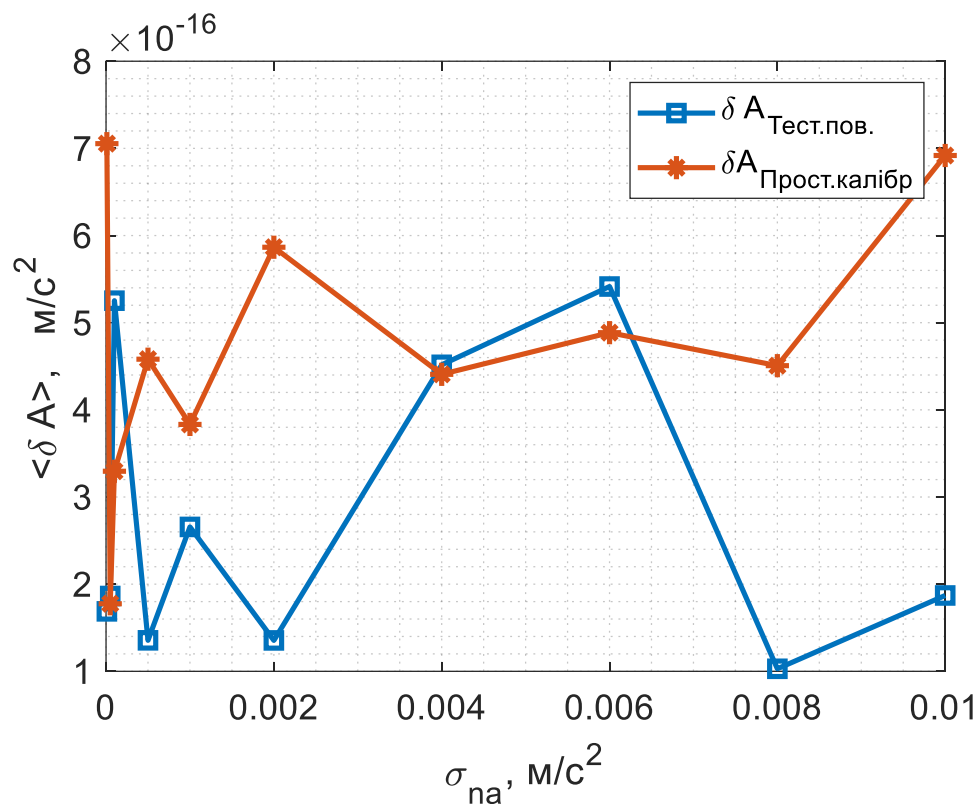


Рис.2.26 Максимальне середнє значення похибки методів

На рис.2.27 наведено СКВ похибок калібрування окремих акселерометрів.

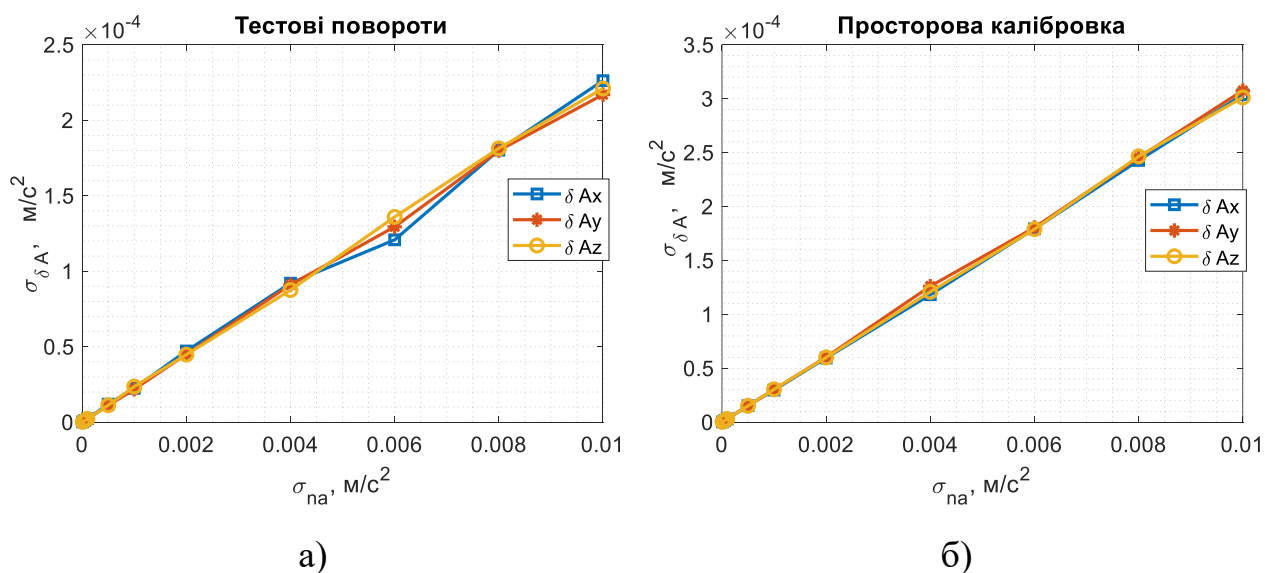


Рис.2.27 Середньоквадратичне відхилення похибки методу

Приведемо, на одному графіку, максимальні за модулем значення СКВ похибок обох методів (рис.2.28).

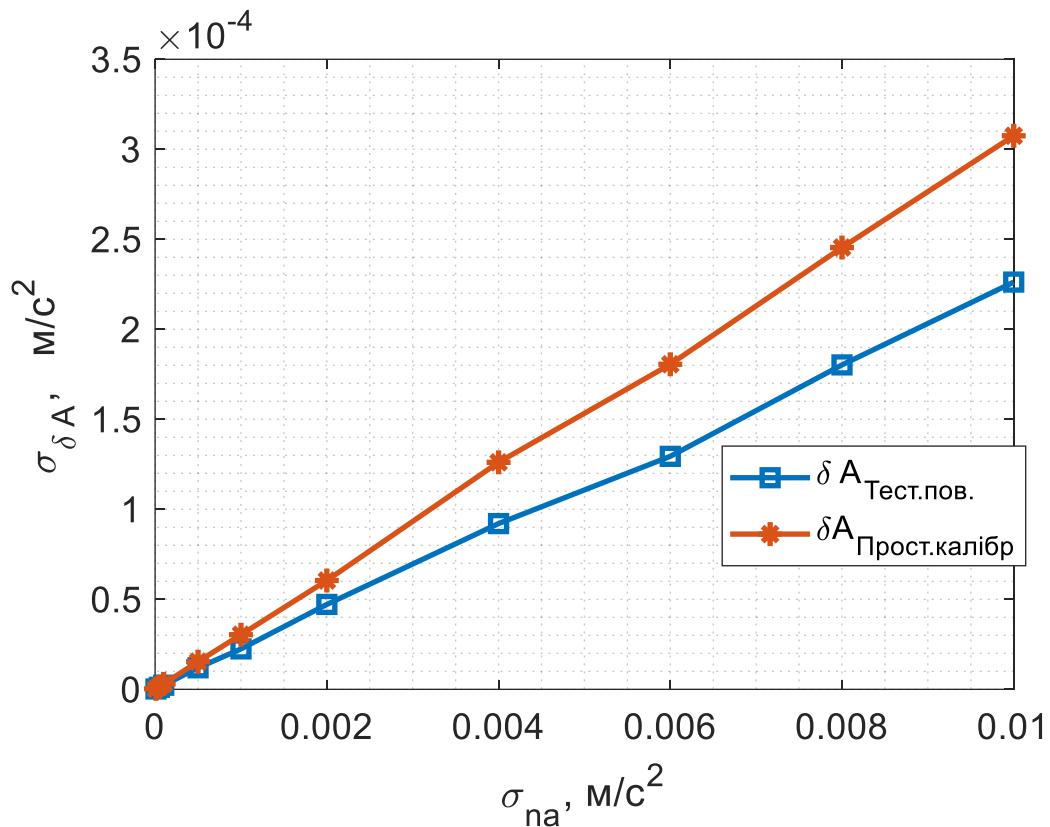


Рис.2.28 Максимальне середньоквадратичне відхилення похибки методу

З результатів дослідження впливу шумів акселерометрів на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.26 та 2.28 можна зробити висновок:

- середнє значення похибок калібрування в межах заданого шуму має дуже низьку величину (порядку  $10^{-16}$ ), що є межею точності середовища Matlab;
- максимальнє значення похибок та їх середньоквадратичне відхилення пропорційно збільшуються зі збільшенням величини шуму;
- точність просторового калібрування, в заданих умовах, суттєво не відрізняється від точності методу тестових поворотів.

За результатами дослідження можна розрахувати можливу похибку процедур калібрування для навігаційного акселерометру АКС-05н виробництва КП СПБ «Арсенал».

Для акселерометру АКС-05н відомі такі характеристики:

- Нестабільність зміщення нуля в пуску,  $-4,75 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 1,93 \text{ ppm}$ ;
- Нестабільність масштабного коефіцієнту,  $-146 \text{ ppm}$ ;
- Середньоквадратичне відхилення шуму вимірювання  $\sim 6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$ .

У цьому разі середньоквадратичні відхилення похибок методів будуть наступні (Табл.2.1).

Таблиця 2.1 Середньоквадратичне відхилення похибки акселерометрів

Похибка методу, $м / с^2$	Нестабільність зміщення нуля, $(\Delta B_A = 50 \text{ ppm})$	Нестабільність масштабного коефіцієнту $(\Delta K = 146 \text{ ppm})$	Середньоквадратичне відхилення шуму $(\sigma_{nA} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м / с}^2)$
Тестові повороти	$1,4104 \cdot 10^{-6}$	$1,3488 \cdot 10^{-5}$	$9,7663 \cdot 10^{-4}$
Просторове	$1,8804 \cdot 10^{-6}$	$2,8420 \cdot 10^{-5}$	$12,8182 \cdot 10^{-4}$

Оскільки похибки методу мають випадковий характер, знайдемо геометричну суму похибок:

- одновісне калібрування акселерометрів  $\sigma_{\Sigma} = 9,7643 \cdot 10^{-4} \text{ м / с}^2$ ;
- просторове калібрування акселерометрів  $\sigma_{\Sigma} = 12,8210 \cdot 10^{-4} \text{ м / с}^2$ .

Результати свідчать про те, що середньоквадратичне відхилення похибки просторового калібрування на 23,8% більше за класичний метод тестових поворотів.

### 2.2.3 Розробка імітаційної моделі калібрування гіроскопів

Калібрування гіроскопів методом послідовного обертання навколо кожної з вимірювальних осей з кількома фіксованими значеннями кутової швидкості є найбільш розповсюдженим в наш час. Для оцінки точності нового розробленого методу просторового калібрування доцільно провести імітаційне моделювання процесу калібрування обома методами та встановити їх точність.

Для проведення дослідження було складено програмний алгоритм обох процедур калібрування гіроскопів у середовищі Matlab (див. у Додатку А). У ньому моделюється обертання поворотного стенду, що визначає невідкалібрований вихідний сигнал гіроскопів, проводиться процедура калібрування одним з методів та оцінюються похибки.

Проведемо перевірку на адекватність розробленого програмного алгоритму.

Для перевірки адекватності розробленої імітаційної моделі припустимо, що відсутні будь-які інструментальні похибки тестового обладнання та гіроскопів. У такому випадку на точність процедури мають впливати лише методичні фактори та похибки машинного обчислення. Очевидно, якщо визначена похибка калібрування буде в межах розрахункових можливостей середовища Matlab, то імітаційна модель працює адекватно.

### **Перевірка на адекватність моделі калібрування гіроскопів на одновісному поворотному стенді**

Оцінимо точність методу калібрування на одновісному поворотному стенді шляхом імітаційного моделювання.

Припустимо, що осі чутливості гіроскопів IBM співпадають з осями стенду. В ході процедури стенд обертається з кутовою швидкістю  $[10 \ 20 \ 30 \ 40]^\circ/\text{с}$  навколо кожної з осей. Час обертання стенду з кожною швидкістю – 100 с для осереднення шумів датчиків. На рис.2.29 представлено графіки проєкцій кутових швидкостей стенду.

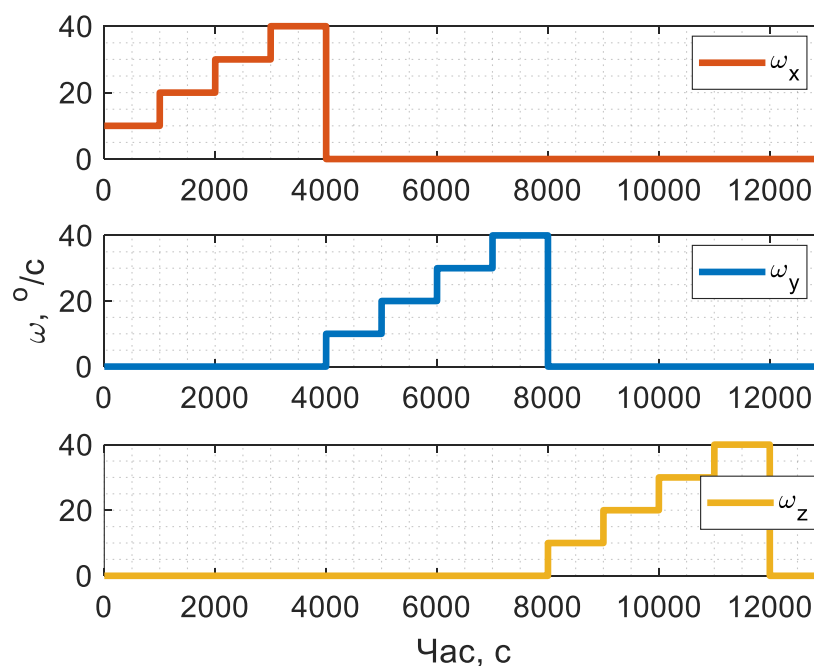


Рис.2.29 Кутова швидкість обертання стенду

Виходячи з аналізу конструкцій та характеристик реальних гіроскопів, покладемо наступні параметри блоку гіроскопів IBM:

- зміщення нуля  $\begin{bmatrix} B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & B_{\omega z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 & 2,0 & 2,0 \end{bmatrix} B$ ,
- масштабні коефіцієнти  $\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 & -0,02 \\ -0,01 & 0,10 & 0,01 \\ 0,03 & -0,01 & 0,10 \end{bmatrix} \frac{B}{^\circ/c}$ .

У результаті обертання стенду отримано вихідний сигнал гіроскопів, що представлений на рис.2.30.

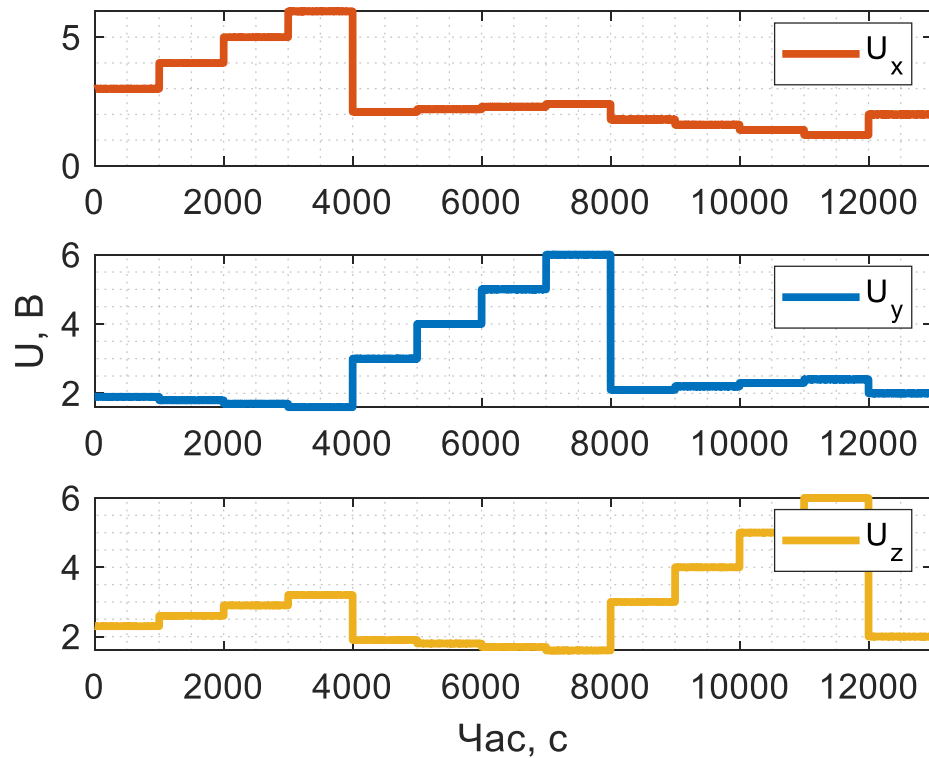


Рис.2.30 Вихідний сигнал гіроскопів

Знаючи кутову швидкість стенду, за формулами (2.11), (2.12) та (2.13) розрахуємо калібрувальні коефіцієнти блоку гіроскопів:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{11} \\ B_{\omega y} & s_{21} \\ B_{\omega z} & s_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 & 0,01 \\ 2,0 & -0,01 \\ 2,0 & 0,03 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{12} \\ B_{\omega y} & s_{22} \\ B_{\omega z} & s_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 & 0,01 \\ 2,0 & 0,10 \\ 2,0 & -0,01 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} B_{\omega x} & s_{13} \\ B_{\omega y} & s_{23} \\ B_{\omega z} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 & -0,02 \\ 2,0 & 0,01 \\ 2,0 & 0,1 \end{bmatrix}, \text{ що повністю співпадає із заданими.}$$

Використовуючи отримані параметри можна провести калібрування вихідного сигналу блоку гіроскопів. Похибка калібрування наведена на рис.2.31.

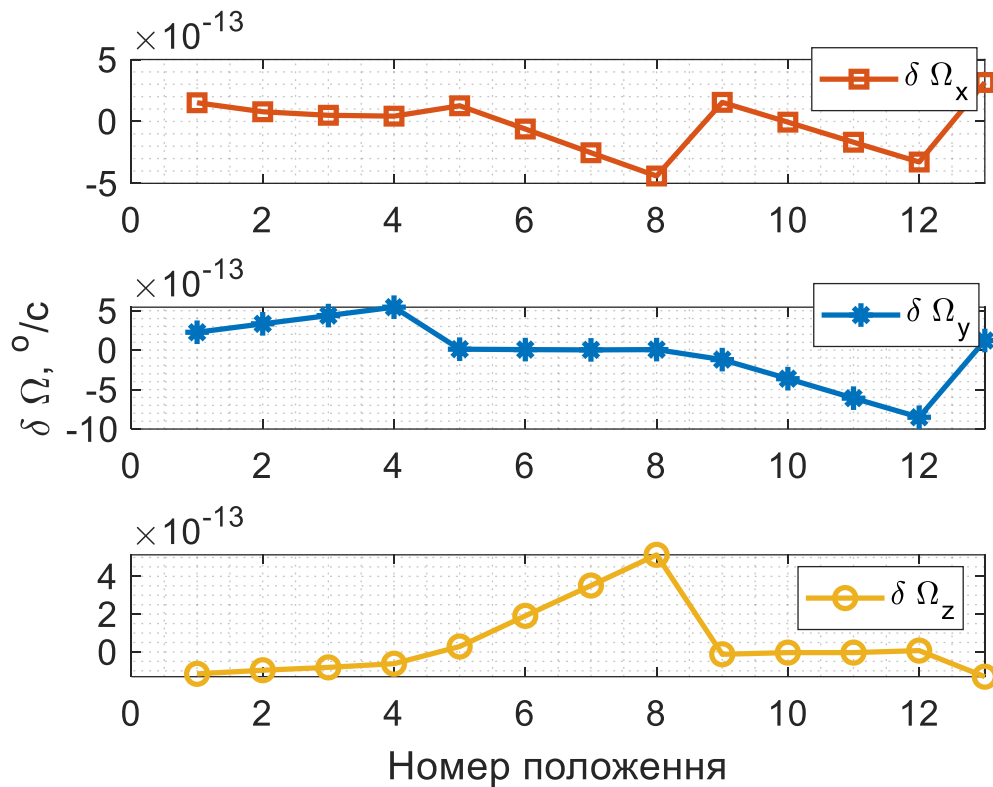


Рис.2.31 Похибка калібрування гіроскопів на поворотному столі

Наведені на рис.2.31 результати свідчать, що максимальне значення похибки становить  $\delta \Omega_{\max} = 8,5043 \cdot 10^{-13} \text{ } ^\circ/\text{с}$ ; середнє значення похибки для кожного гіроскопу сягає:  $\langle \delta \Omega \rangle = [-2,6106 \quad -1,8764 \quad 4,4972] \cdot 10^{-14} \text{ } ^\circ/\text{с}$ ; а середньоквадратичне відхилення:  $\sigma_{\delta \Omega} = [2,1619 \quad 3,9802 \quad 1,9346] \cdot 10^{-13} \text{ } ^\circ/\text{с}$ .

Отримані значення похибок знаходяться в межах розрахункових похибок Matlab, тому програмний алгоритм складено адекватно.

### Просторове калібрування гіроскопів

Для проведення процедури калібрування блоку гіроскопів було створено програмне забезпечення у середовищі Matlab, представлене у Додатку Б. Для перевірки його на адекватність було проведено імітаційне моделювання процесу калібрування.

Згідно з методикою просторового калібрування, стенд, на якому встановлено ІВМ, здійснює просторове обертання з кутовими швидкостями  $\omega_x = 0 \dots 100 \text{ } ^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_y = \sqrt{\omega_x}$ ,  $\omega_z = \sqrt[3]{\omega_x}$ , як показано на рис.2.32.

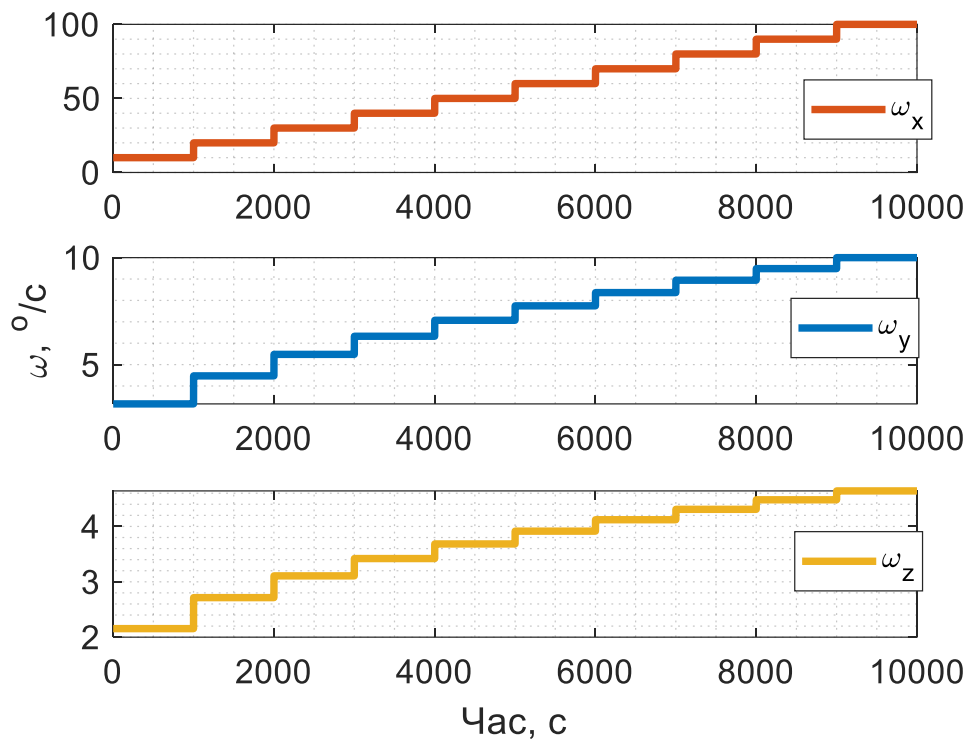


Рис.2.32 Кутові швидкості стенду

Припустимо, що гіроскопи мають наступні калібрувальні параметри:

- зміщення нуля  $\begin{bmatrix} B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & B_{\omega z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 & 2,0 & 2,0 \end{bmatrix} \text{ В}$ ,
- масштабні коефіцієнти  $\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 & -0,02 \\ -0,01 & 0,1 & 0,01 \\ 0,03 & -0,01 & 0,1 \end{bmatrix} \frac{\text{В}}{^\circ/\text{с}}.$

При такому повороті стенду гіроскопи ІВМ будуть видавати сигнал в одиницях напруги, як показано на рис.2.33.



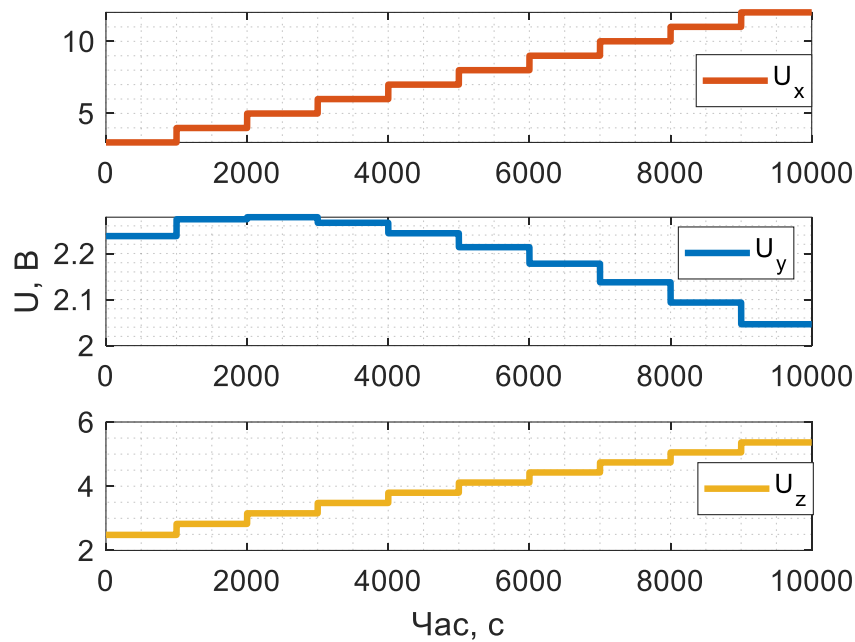


Рис.2.33 Вихідний сигнал блоку гіроскопів

Знаючи кутову швидкість повороту стенду та вихідний сигнал гіроскопів можна за (2.21) розрахувати матрицю нульових сигналів та масштабних коефіцієнтів:

$$\hat{\mathbf{X}}_3 = \begin{bmatrix} 2,0 & 2,0 & 2,0 \\ 1 \cdot 10^{-2} & -1 \cdot 10^{-2} & -3 \cdot 10^{-2} \\ 1 \cdot 10^{-2} & 1 \cdot 10^{-1} & -1 \cdot 10^{-2} \\ -2 \cdot 10^{-2} & 1 \cdot 10^{-2} & 1 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Отримана матриця  $\hat{\mathbf{X}}_3$  повністю співпадає із заданими параметрами гіроскопів, що підтверджує адекватність розробленого програмного забезпечення.

Доцільно проаналізувати точність отриманого методу калібрування, порівнявши отриманий відкалібрований за (2.20) сигнал блоку гіроскопів із відомою кутовою швидкістю повороту стенду. Результати наведені на рис.2.34.

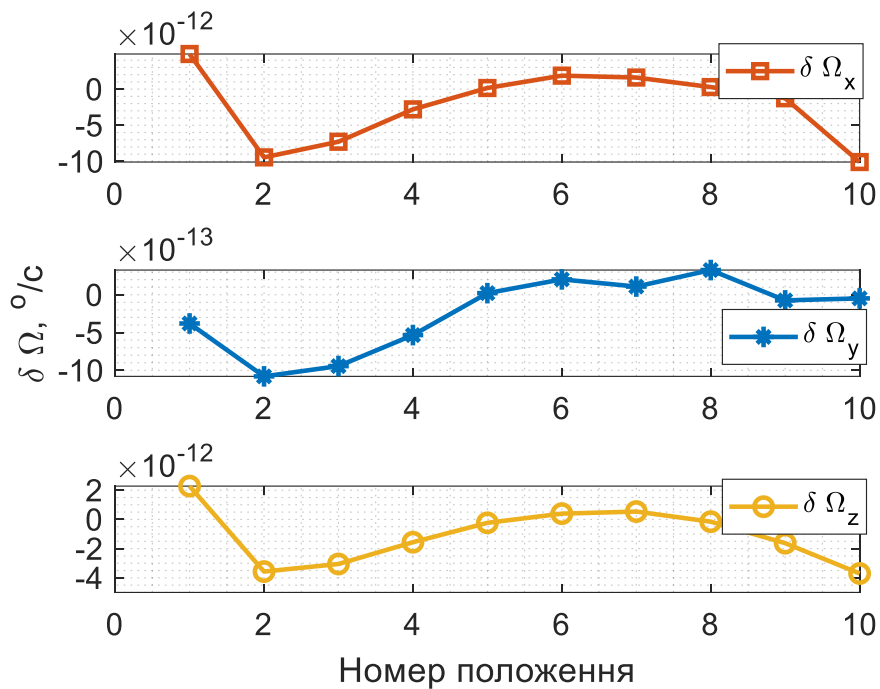


Рис.2.34 Похибка калібрування

Наведені на рис.2.34 результати показують, що максимальне значення похибки становить  $\delta\Omega_{\max} = -2,2105 \cdot 10^{-12} \text{ } ^\circ / \text{с}$ ; середнє значення похибки для кожного гіроскопа:  $\langle \delta\Omega \rangle = [-2,2105 \quad -0,2401 \quad -1,0698] \cdot 10^{-12} \text{ } ^\circ / \text{с}$ ; а СКВ сягає величини:  $\sigma_{\delta\Omega} = [5,1034 \quad -0,4807 \quad 1,9766] \cdot 10^{-12} \text{ } ^\circ / \text{с}$ .

Отримані значення похибок також знаходяться в межах розрахункових похибок Matlab, тому програмний алгоритм складено адекватно.

#### 2.2.4 Дослідження точності калібрування гіроскопів

Перевіривши адекватність створеного програмного забезпечення, можна провести дослідження точності розробленого методу просторового калібрування гіроскопів.

Як і у випадку акселерометрів, існує дві групи факторів, що впливають на точність проведення процедури калібрування:

- похибки стендового обладнання;
- похибки датчиків.

До першої групи можна віднести похибку закріплення блоку гіроскопів на стенді, що викликає неспівпадіння осей чутливості датчиків з осями стенду та

найголовнішу – нестабільність обертання стенду. Ця величина визначається виробником стендового обладнання і, в залежності від величини кутової швидкості платформи, може сягати від 0,05 до 0,0005%.

До інструментальних похибок датчиків можна віднести нестабільності зміщень нулів та масштабних коефіцієнтів, а також власні шуми вимірювачів, які в математичній моделі гіроскопів (2.5) не враховуються. Розширимо модель вихідних сигналів блоку гіроскопів:

$$\begin{aligned} U_{\omega x} &= (1 + \Delta s_x) s_{11} \omega_x + s_{12} \omega_y + s_{13} \omega_z + B_{\omega x} + \Delta B_{\omega x} + n_{\omega x}; \\ U_{\omega y} &= s_{21} \omega_x + (1 + \Delta s_y) s_{22} \omega_y + s_{23} \omega_z + B_{\omega y} + \Delta B_{\omega y} + n_{\omega y}; \\ U_{\omega z} &= s_{31} \omega_x + s_{32} \omega_y + (1 + \Delta s_z) s_{33} \omega_z + B_{\omega z} + \Delta B_{\omega z} + n_{\omega z}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

де позначено  $U_{\omega x}, U_{\omega y}, U_{\omega z}$  – вихідні сигнали гіроскопів,  $B_{\omega x}, B_{\omega y}, B_{\omega z}$  – нульові сигнали,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекції кутової швидкості стенду,  $s_{11}, s_{22}, s_{33}$  – масштабні коефіцієнти, решта елементів матриці 3x3 – коефіцієнти перехресної чутливості,  $\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z$ , – нестабільність масштабних коефіцієнтів гіроскопів,  $\Delta B_{\omega x}, \Delta B_{\omega y}, \Delta B_{\omega z}$  – нестабільність зміщення нуля  $n_{\omega x}, n_{\omega y}, n_{\omega z}$  – шуми датчиків.

Передбачається, що записуючи вихідний сигнал датчиків протягом тривалого часу (до 100 с) у визначеному положенні, а потім осереднюючи його для калібрування, можна позбавитись впливу похибок датчиків. Проте в реальності похибки датчиків можуть сягати значних величин, тому доцільно дослідити їх вплив на точність калібрування.

Вважатимемо, що похибки обладнання та датчиків є сталими в рамках одного калібрувального положення.

Дослідження точності методів доцільно провести на розробленому програмному забезпеченні шляхом імітаційного моделювання за схемою, наведеною на рис.2.35.



Рис.2.35 Схема калібрування гіроскопів

Досліджувалися максимальна, середня величина похибок кожного ДКШ, а також її середньоквадратичне відхилення. Оскільки похибки обладнання і датчиків мають випадковий характер, то і похибки калібрування також випадкові. Для більшої адекватності, імітаційну процедуру калібрування виконувалося двісті разів для кожного значення досліджуваної похибки, а отримані вихідні значення похибок калібрування осереднювалися.

### **Вплив нестабільності кутової швидкості стенду на точність калібрування**

Нестабільність утримання заданої кутової швидкості обертання стенду є випадковою величиною і визначається виробником у відсотках від поточної

кутової швидкості. Вважатимемо, що ця випадкова величина розподілена за нормальним законом. Моделювання проводилось за наступних значень похибки  $\Delta_{\text{ст}} = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10] \cdot 10^{-2} \%$ .

Середні значення похибок калібрування гіроскопів ІВМ наведено на рис.2.36.

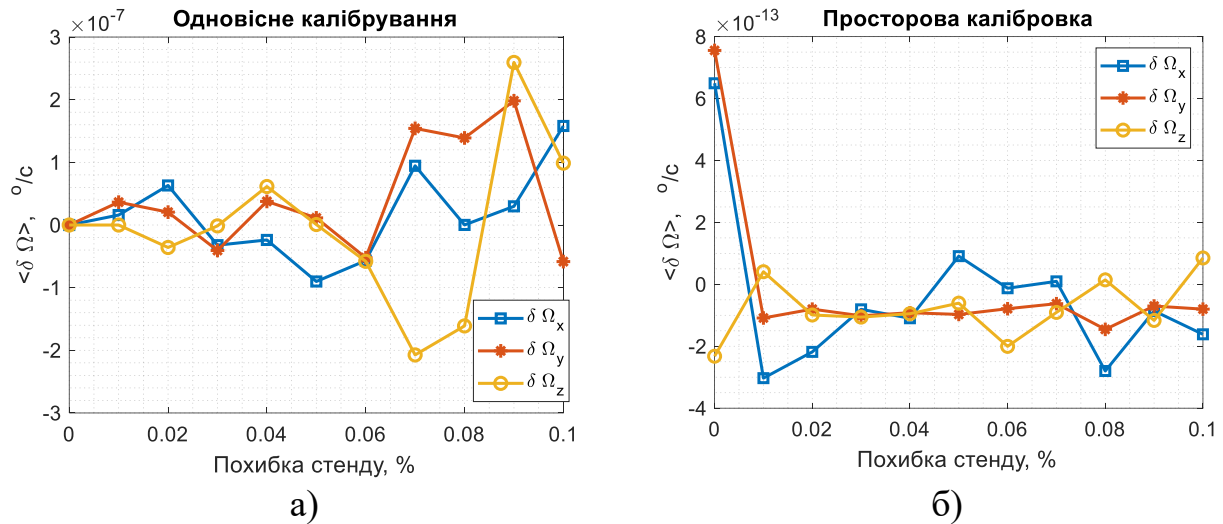


Рис.2.36 Середні значення похибки методу

З рис.2.36 а) та б) видно, що середні значення похибок просторового калібрування на декілька порядків кращі за одновісне калібрування гіроскопів. Для більшої наочності, приведемо максимальні значення похибок методів у логарифмічному масштабі на окремому графіку (рис.2.37).

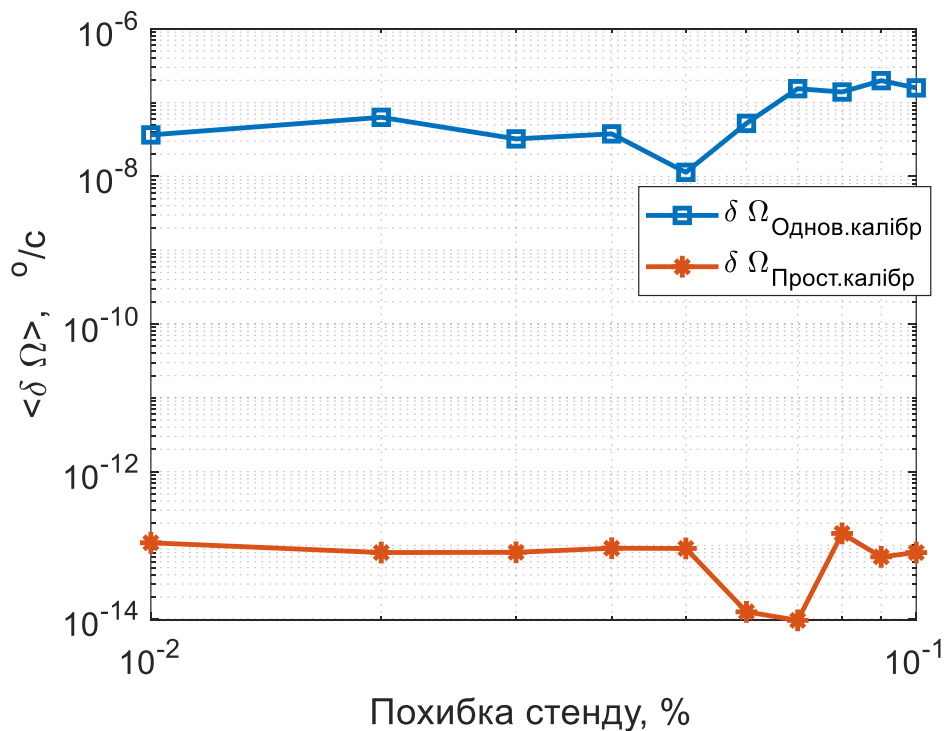


Рис.2.37 Максимальні середні похибки методів

На рис.2.38 приведені значення СКВ похибок калібрування гіроскопів обома методами.

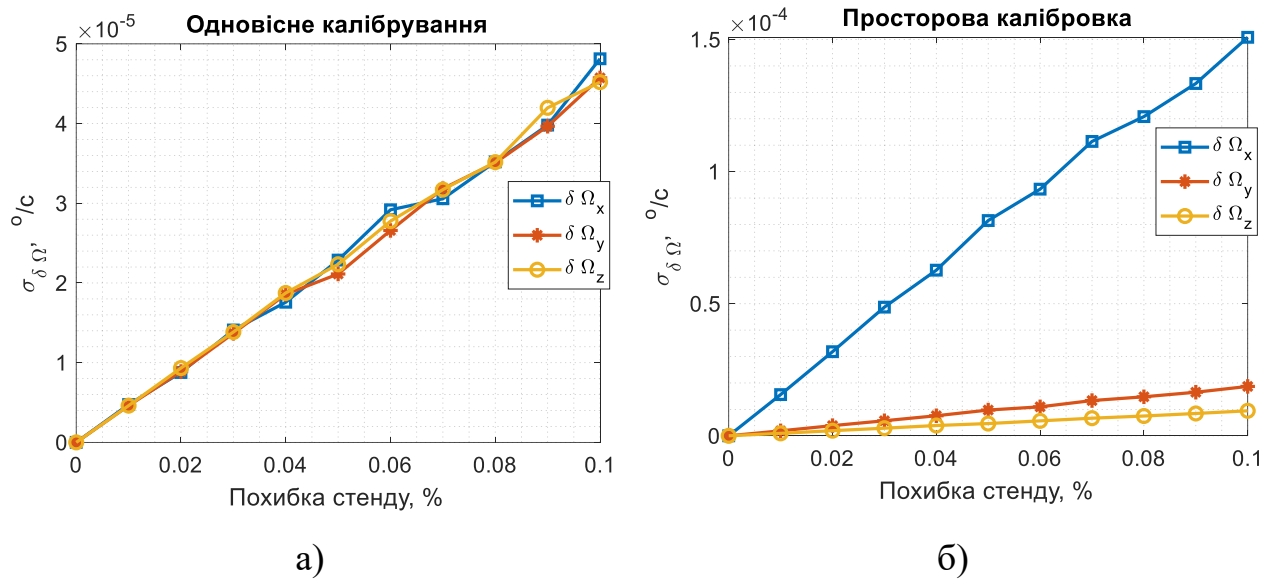


Рис. 2.38 Середньоквадратичні відхилення похибки

Для полегшення аналізу СКВ похибок, наведемо їх максимальні значення на окремому графіку (рис.2.39).

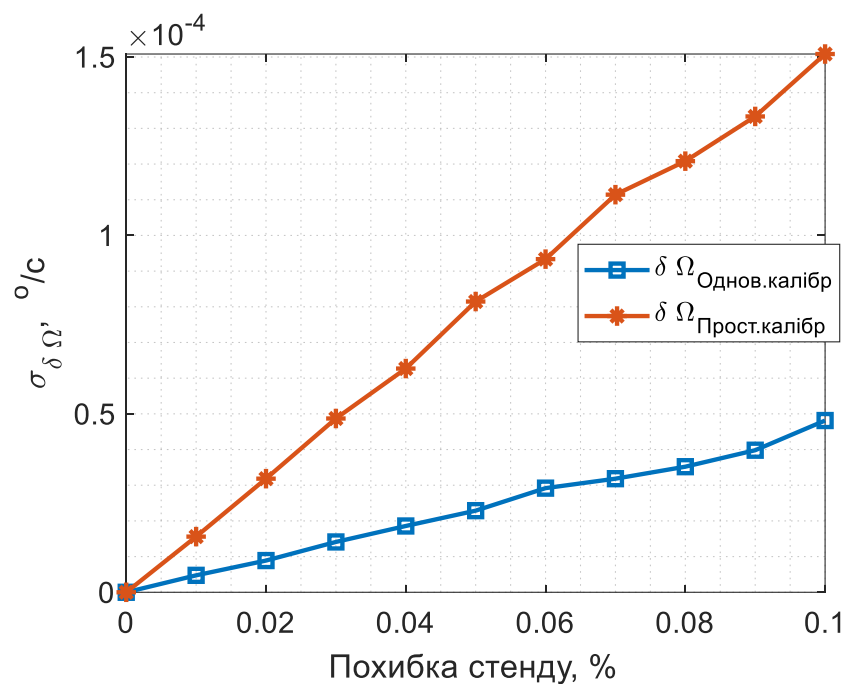


Рис. 2.39 Максимальні середньоквадратичні відхилення похибки

З результатів дослідження впливу нестабільності утримання стандом заданої кутової швидкості на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.38 та 2.39 можна зробити висновок:

- середні значення похибки просторового калібрування в межах заданої нестабільності стенду приблизно на шість порядків менше за одновісний метод калібрування;
- середньоквадратичне відхилення похибок збільшуються зі збільшенням нестабільності кутової швидкості стенду, проте просторове калібрування демонструє значно нижче СКВ;

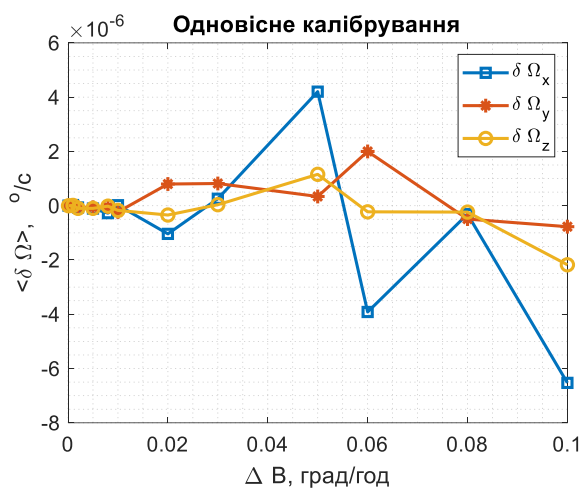
### Вплив нестабільності зміщення нуля на точність калібрування

Розглянемо вплив нестабільності зміщення нулів гіроскопів в пуску на похибку калібрування. Похибки стабільності обертання стенду та закріплення блоку гіроскопів покладемо рівними нулю.

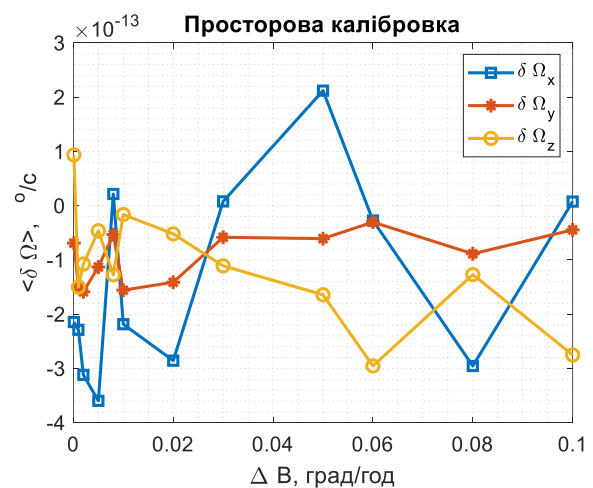
Нестабільність зміщення нуля задамо як випадкову величину, розподілену за нормальним законом. У кожному калібрувальному положенні величину нестабільності зміщення вважатимемо постійною. При моделюванні використовувались наступні значення нестабільності нуля гіроскопів:

$$\Delta B_{\omega} = [0,0001 \ 0,001 \ 0,002 \ 0,005 \ 0,008 \ 0,01 \ 0,02 \ 0,03 \ 0,05 \ 0,06 \ 0,08 \ 0,1] \quad \% / год$$

Середні значення похибок калібрування окремих гіроскопів представлені на рис.2.40.



а)



б)

2.40 Середні значення похибки методу

З рис.2.40 а) та б) видно, що середні значення похибок просторового калібрування на декілька порядків нижчі за одновісний метод. Для більшої

наочності результатів приведемо максимальні значення цих похибок у логарифмічному масштабі на окремому графіку (рис.2.41).

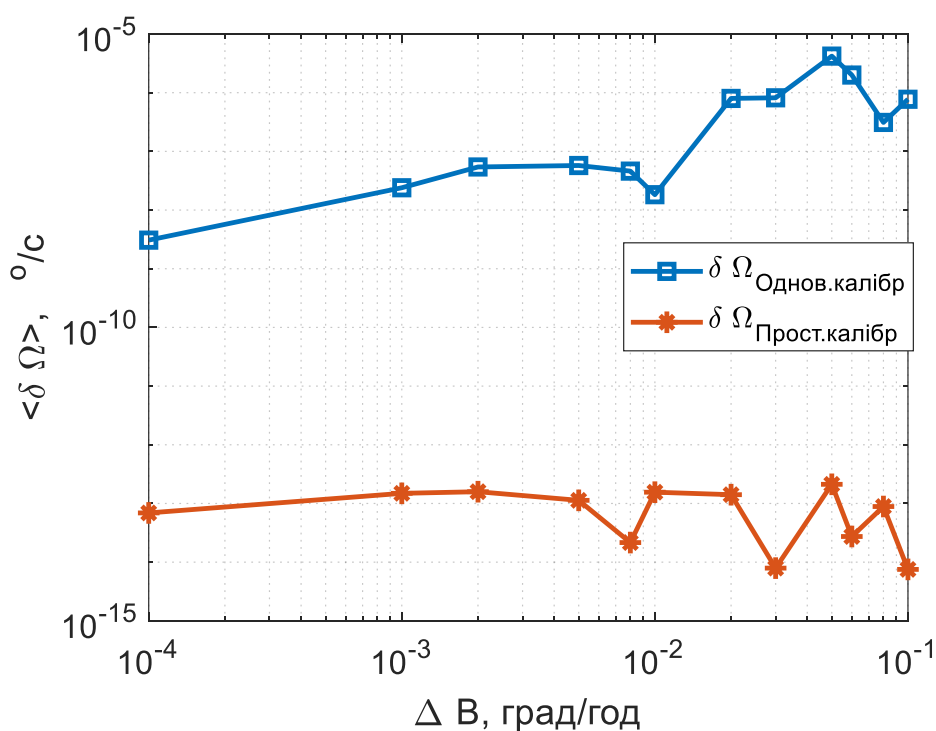


Рис.2.41 Максимальні середні похибки методів

На рис.2.42 наведено СКВ похибок калібрування окремих гіроскопів.

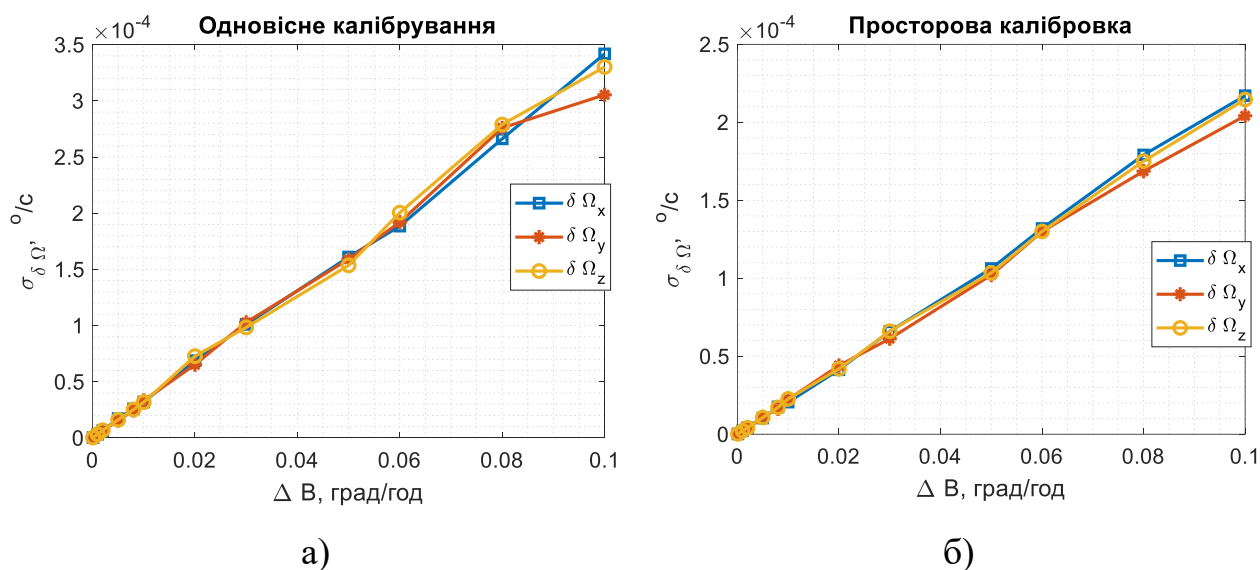


Рис.2.42 Середньоквадратичні відхилення похибки

Максимальні значення СКВ похибок обох методів калібрування гіроскопів наведені на рис.2.43.



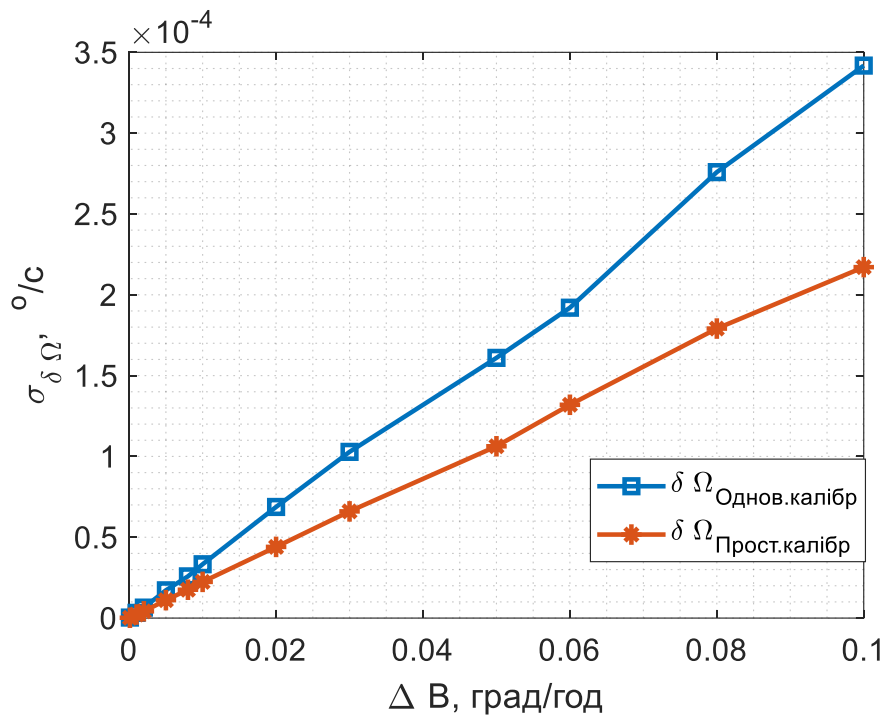


Рис.2.43 Максимальні середньоквадратичні відхилення похибки

З результатів дослідження впливу нестабільності зміщення нуля гіроскопів на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.41 та 2.43 можна зробити висновок:

- середнє значення похибки просторового калібрування в межах заданої похибки стану приблизно на п'ять порядків менше за одновісний метод калібрування;
- середньоквадратичне відхилення похибки калібрування збільшуються зі збільшенням нестабільності кутової швидкості стану, при чому похибки просторового калібрування у декілька разів менші;

### **Вплив нестабільності масштабних коефіцієнту гіроскопів на точність методів калібрування**

Розглянемо вплив нестабільності масштабного коефіцієнту гіроскопів в пуску на похибку калібрування. Нестабільність масштабного коефіцієнту задамо як випадкову величину, що розподілена за нормальним законом. У кожному калібрувальному положенні величина не змінюється. Задається нестабільність

зміщення масштабного коефіцієнту у мільйонних долях (ppm) від вихідної величини датчика.

На рис.2.44 представлено середні значення похибок калібрування гіроскопів.

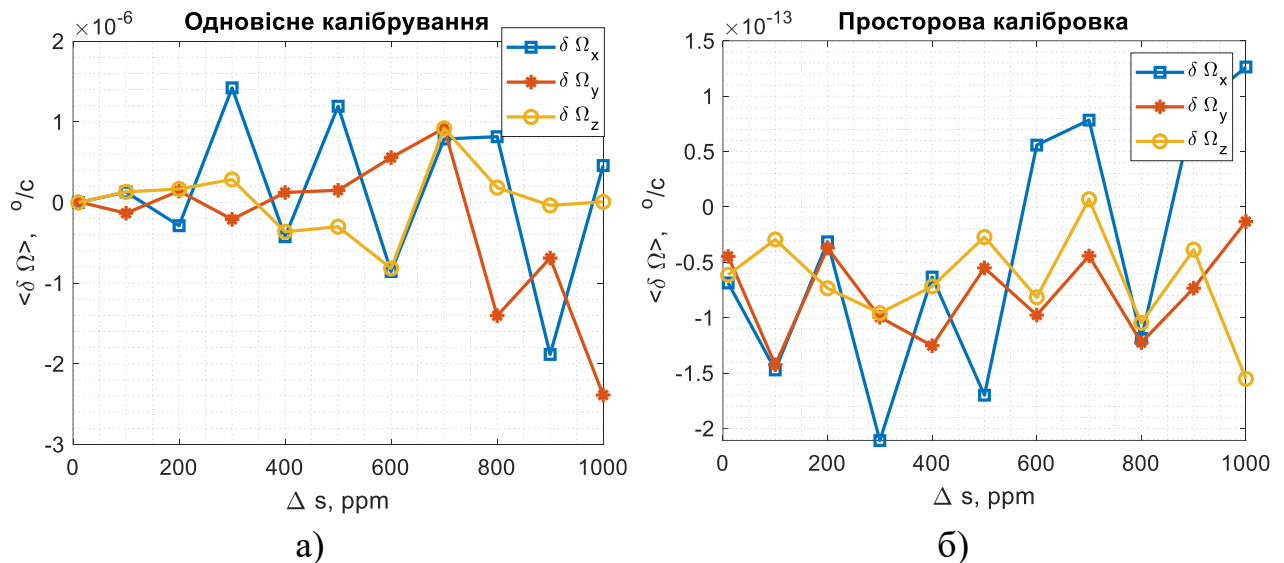


Рис. 2.44 Середнє значення похибки методу

З рис.2.44 а) та б) видно, що середні значення похибок просторового калібрування на декілька порядків менші за одновісний метод калібрування гіроскопів. Для більшої наочності результатів максимальні значення цих похибок у логарифмічному масштабі наведено на окремому графіку (рис.2.45).

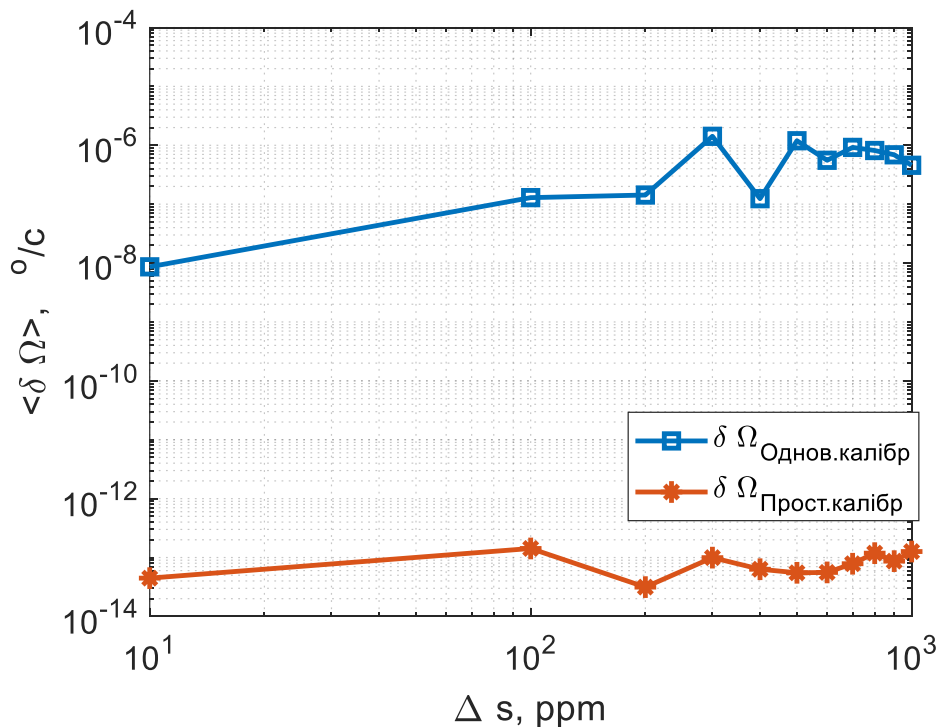


Рис. 2.45 Максимальне середнє значення похибки методу

На рис 2.46 наведено СКВ похибок калібрування окремих гіроскопів

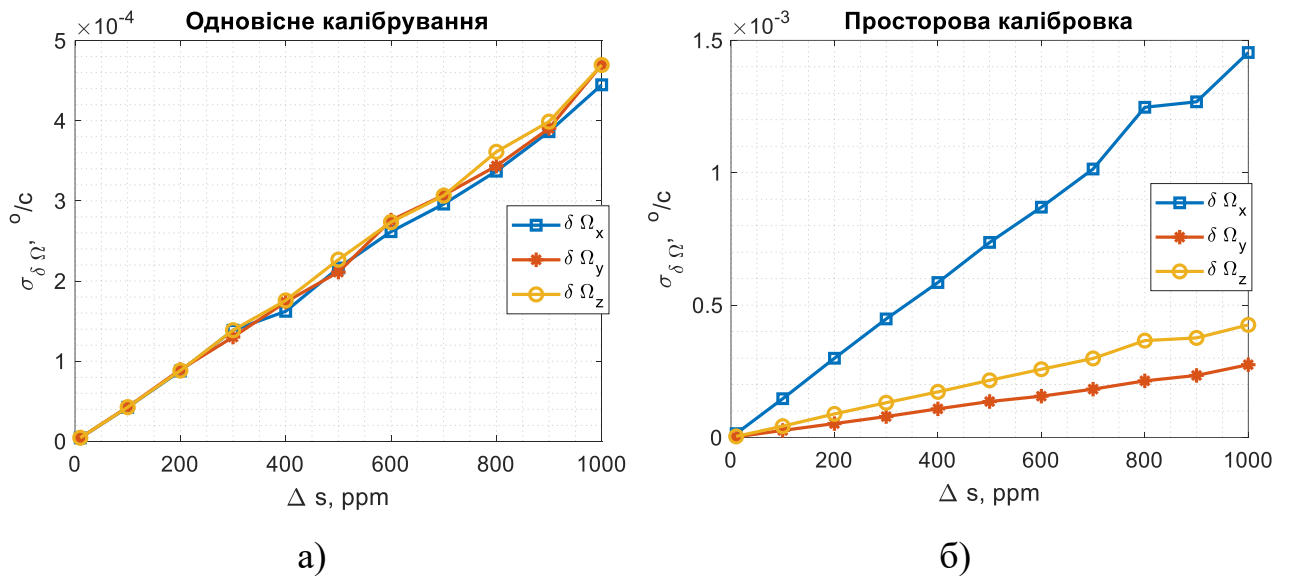


Рис.2.46 Середньоквадратичне відхилення похибки методу

На рис.2.47 представлені максимальні значення СКВ похибок калібрування.

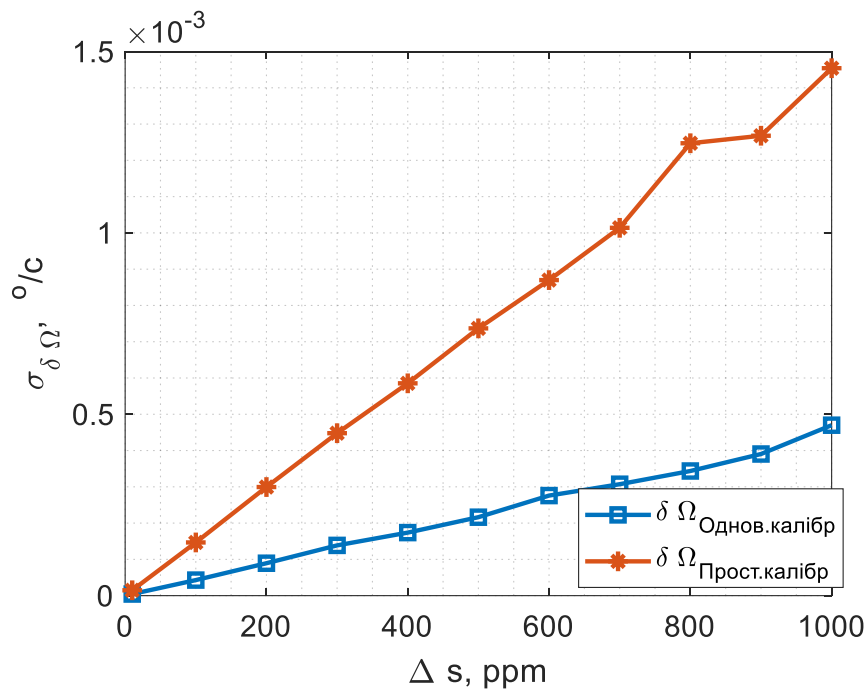


Рис.2.47 Максимальне середньоквадратичне відхилення похибки методу

З результатів дослідження впливу нестабільності масштабного коефіцієнту на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.45 та 2.47 можна зробити висновок:

- середнє значення похибки просторового калібрування в межах заданої похибки стенду приблизно на сім порядків менше за одновісний метод калібрування.
- максимальне значення похибок та їх середньоквадратичне відхилення збільшуються зі збільшенням нестабільності кутової швидкості стенду, при чому СКВ похибки просторового калібрування дещо більша;

### Вплив шум гіроскопів на точність методів калібрування

Розглянемо вплив випадкового нормального шуму гіроскопів на похибку калібрування. Середнє значення шуму датчиків задамо величиною його середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma_{n\omega} = \left[ 2 \cdot 10^{-2} \ 5 \cdot 10^{-2} \ 8 \cdot 10^{-2} \ 1 \cdot 10^{-1} \ 2 \cdot 10^{-1} \ 5 \cdot 10^{-1} \ 8 \cdot 10^{-1} \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \right] \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ / \text{с}.$$

Середні значення похибок калібрування окремих гіроскопів наведені на рис.2.48.

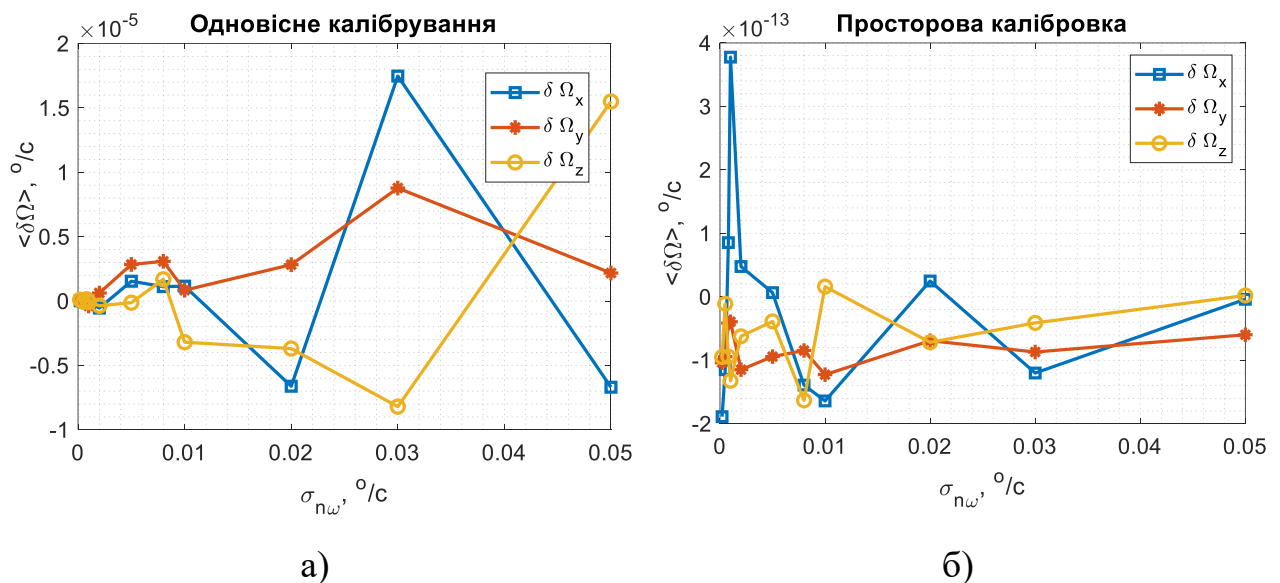


Рис.2.48 Середнє значення похибки методів

Для більшої наочності результатів приведемо максимальні значення цих похибок у логарифмічному масштабі на окремому графіку (рис.2.49).

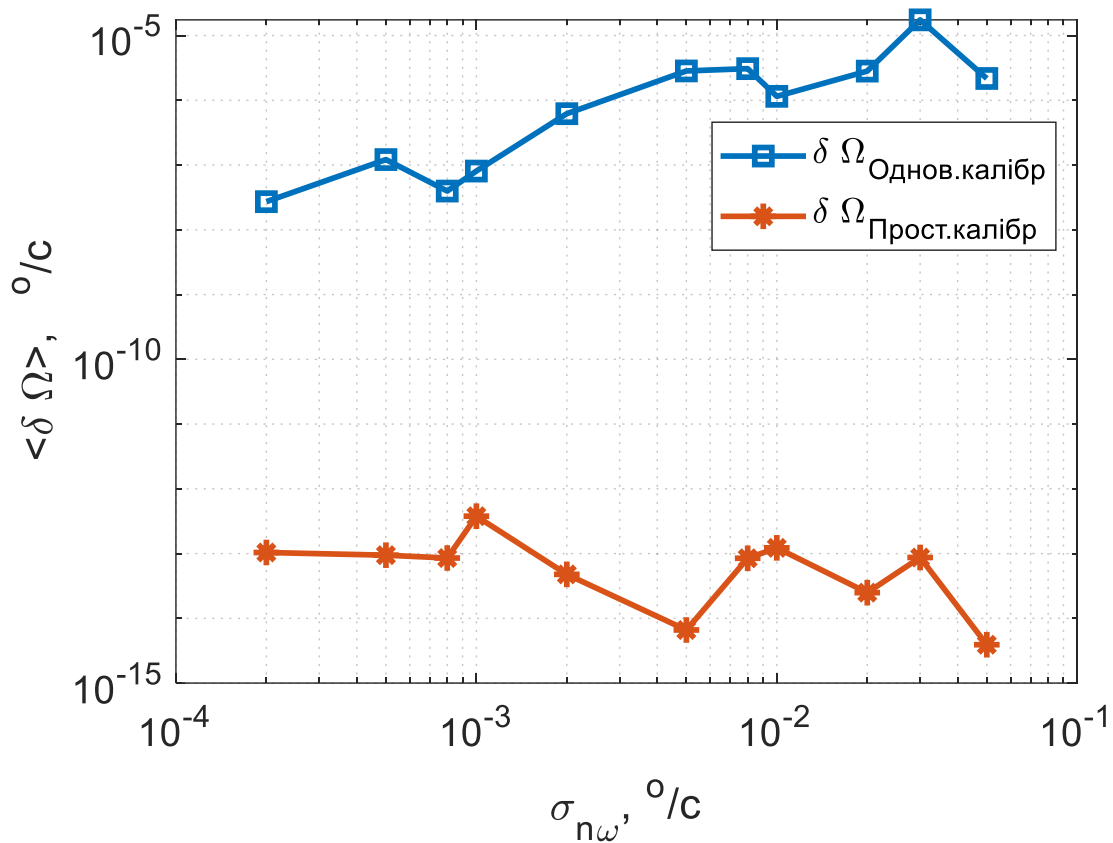


Рис.2.49 Максимальне середнє значення похибки методів

На рис.2.50 представлені СКВ похибок калібрування гіроскопів.

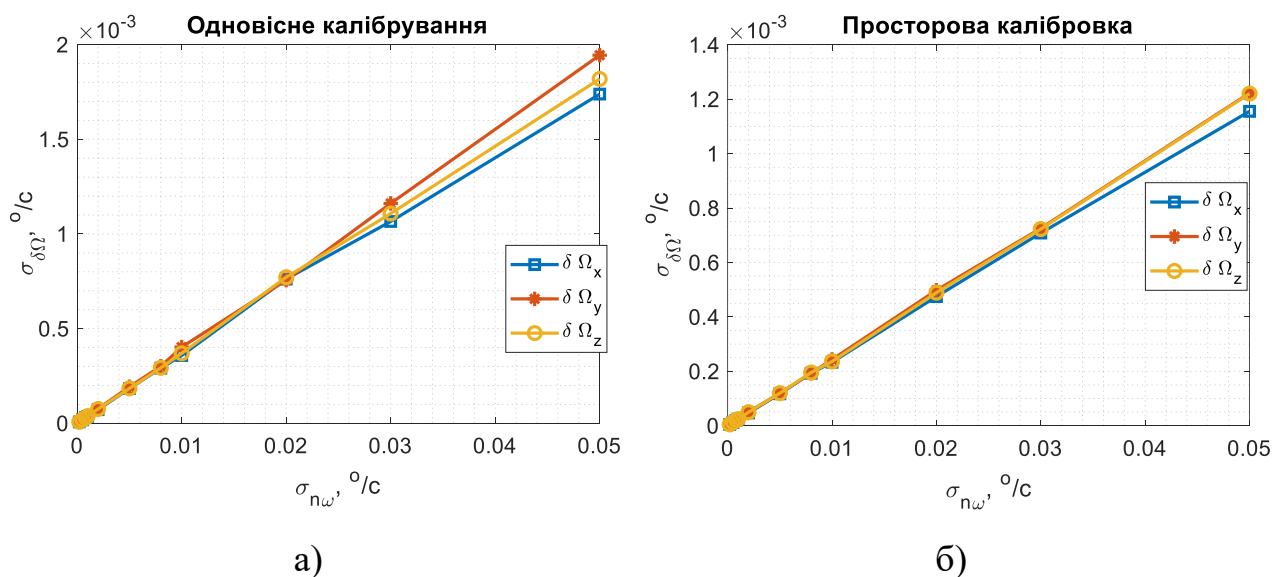


Рис.2.50 Середньоквадратичне відхилення похибки методу

Приведемо на окремому графіку максимальні величини СКВ похибки калібрування гіроскопів.

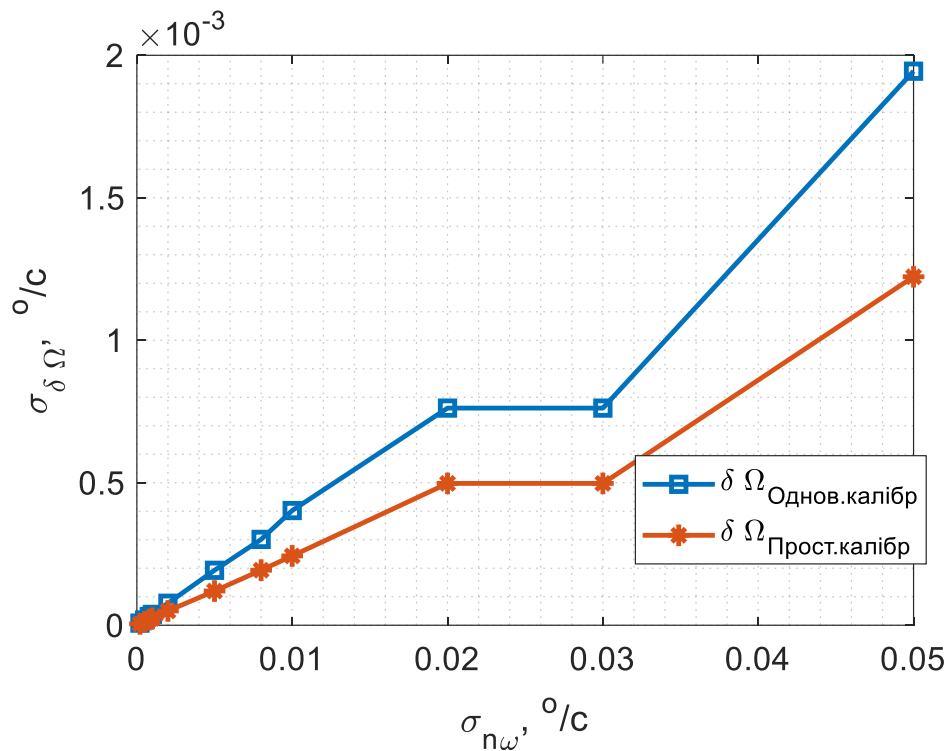


Рис.2.51 Максимальне середньоквадратичне відхилення похибки методу

З результатів дослідження впливу шуму датчиків на точність методів калібрування, що наведені на рис.2.49 та 2.51 можна зробити висновок:

- середнє значення похибки просторового калібрування в межах заданої похибки стенду приблизно на дев'ять порядків менше за одновісне калібрування.
- СКВ похибки калібрування збільшуються зі збільшенням нестабільності кутової швидкості стенду, при чому похибки просторового калібрування дещо менша;

Проведемо оцінку точності методів калібрування акселерометрів і гіроскопів, використовуючи характеристики ЧЕ БІНС виробництва КП СПБ «Арсенал» [36].

Для КЛГ RL-28 відомі такі характеристики:

- Нестабільність зміщення нуля в пуску ( $1\sigma$ ),  $^\circ/\text{год}$  – 0,005;
- Нестабільність зміщення нуля від пуску до пуску ( $1\sigma$ ),  $^\circ/\text{год}$  – 0,01;
- Масштабний коефіцієнт, ppm – 3;
- Середньоквадратичне відхилення шуму вимірювання – від 10 до 30  $^\circ/\text{год}$

У цьому разі середньоквадратичні відхилення похибок будуть наступні (Табл.2.2).

Таблиця 2.2 Середньоквадратичне відхилення похибки ДКШ

Похибка методу, $^{\circ}/c$	Нестабільність зміщення нуля, $(\Delta B_{\omega} = 0,005 \text{ } ^{\circ}/\text{год})$	Нестабільність масштабного коефіцієнту, $(\Delta s = 3 \text{ ppm})$	Випадковий шум $(\sigma_{n\Omega} = 30 \text{ } ^{\circ}/\text{год})$
Одновісне	$1,6098 \cdot 10^{-4}$	$4,4332 \cdot 10^{-6}$	$3,0121 \cdot 10^{-4}$
Просторове	$1,0628 \cdot 10^{-4}$	$1,4812 \cdot 10^{-5}$	$1,9322 \cdot 10^{-4}$

Оскільки похибки методу мають випадковий характер, знайдемо геометричну суму похибок:

- одновісне калібрування ДКШ  $\sigma_{\Sigma} = 3,4155 \cdot 10^{-4} \text{ } ^{\circ}/c$ ;
- просторове калібрування ДКШ  $\sigma_{\Sigma} = 2,2102 \cdot 10^{-4} \text{ } ^{\circ}/c$ .

Результати дослідження свідчать, що середньоквадратичне відхилення похибки просторового калібрування на 35,8% нижче за одновісний метод.

## Висновки по розділу 2

1) Розглянуто математичні моделі вихідних сигналів вимірювачів безплатформних інерціальних систем: датчиків кутової швидкості та акселерометрів.

2) Розроблено імітаційну модель процедури калібрування ІВМ у середовищі Matlab. Перевірена її адекватність.

3) Досліджено новий метод просторового калібрування ІВМ для акселерометрів та гіроскопів, що ґрунтується на повороті ІВМ одночасно навколо трьох осей стенду. Новий метод пришвидшує процедуру, оскільки виконується одночасне калібрування і гіроскопів, і акселерометрів. Просторове калібрування можна виконувати для ІВМ, що вже встановлені на об'єкті, наприклад, у ході передстартової підготовки.

4) Проведено імітаційне програмне моделювання процедур калібрування ІВМ класичними методами тестових поворотів (для акселерометрів) та обертанням блоку гіроскопів на одновісному поворотному стенді, а також нової методики просторового калібрування.

5) Проведено дослідження точності класичних методів калібрування ІВМ та просторового в залежності від можливих інструментальних похибок тестового обладнання та самих датчиків. Результати порівняльного аналізу свідчать, що максимальні середні значення похибок методів калібрування акселерометрів і гіроскопів обома методами значно менші за поріг чутливості сучасних ЧЕ, тому вони не є репрезентативними. Проте, значення середньоквадратичних відхилень похибок, як енергетичні характеристики, можна використати для оцінки точності калібрування.

6) Дослідження показують, що для реальних ЧЕ середньоквадратичне відхилення геометричної похибки просторового калібрування на 23,8% більше за тестові повороти. Однак, у випадку калібрування гіроскопів, середньоквадратичне відхилення геометричної похибки просторового методу нижче на 35,8%. Отримані результати дозволяють використати метод просторового калібрування при синтезі інформаційної моделі БІСО та БІНС.



### РОЗДІЛ 3.

## АЛГОРИТМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КІНЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ БЕЗПЛАТФОРМНИХ ІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ

Безплатформна інерціальна система орієнтації входить до складу безплатформних інерціальних навігаційних систем. Головною її задачею є визначення поточної кутової орієнтації основи, на якій встановлено БІНС, відносно базової СК (як правило географічної СК). Ця інформація може використовуватись безпосередньо, або для того, щоб здійснювати перепроєціювання вектору прискорення руху основи зі зв'язаної СК на осі географічної СК для подальшого інтегрування і визначення координат об'єкта.

БІСО складається з двох головних блоків:

- 1) інерціального вимірювального модуля, що вимірює за допомогою датчиків кутової швидкості (або інтегровальних гіротахometrів) значення проєкцій абсолютної кутової швидкості основи в дискретні моменти часу, розділені так званим кроком опитування вимірювачів, або інтегралів за часом від цих проєкцій (так званих квазікоординат) за один крок опитування;
- 2) бортового обчислювального пристрою, який за даними цього вимірювання обчислює (шляхом чисельного інтегрування за тим чи іншим алгоритмом) кінематичні параметри поточної орієнтації основи.

Алгоритми БІСО можна умовно поділити на розгінні і безрозгінні [98].

Розгінними називають алгоритми, яким необхідна інформація з ІВМ на кількох попередніх кроках опитування вимірювачів. При цьому визначається орієнтація основи через один крок опитування вимірювачів.

До безрозгінних (самостартувальних) відносять алгоритми, для роботи яких не потрібна вимірювальна інформація попередніх кроків опитування, тому їм не потрібна операція «розгону» (стартування) алгоритму. Алгоритм у цьому випадку визначає орієнтацію основи через декілька кроків опитування. Тому крок інтегрування  $H$  диференціальних рівнянь орієнтації складається з кількох

кроків  $h$  опитування  $H = m \cdot h$ , де величину  $m$  називатимемо «кроковістю» алгоритму [98, 103].

У сучасних БІСО розгінні алгоритми практично не використовуються, тому доцільно проводити синтез та дослідження саме безрозгінних алгоритмів.

### ***3.1. Кінематичні рівняння орієнтації безплатформних інерціальних систем***

У сучасній теорії інерціальної навігації використовуються декілька способів математичного представлення кутової орієнтації тіла у просторі [3, 12, 13, 98]:

- 1) за допомогою кутів Ейлера–Крилова, тобто трьох значень кутів послідовних поворотів навколо трьох координатних осей;
- 2) матрицею напрямних косинусів між координатними осями базової системи координат і системи координат, зв'язаної з об'єктом;
- 3) параметрами вектору Ейлера єдиного повороту;
- 4) кватерніоном повороту від вихідної системи координат до кінцевої.

Розглянемо взаємозв'язок між цими кінематичними параметрами орієнтації тіла і побудуємо алгоритмічно-програмні засоби, що забезпечують перехід від одного параметру до іншого.

#### ***3.1.1 Кінематичні параметри кутового положення тіла***

##### **Кути Ейлера–Крилова**

Розглянемо у якості основної послідовність кутів Ейлера–Крилова, наведену на рис. 3.1

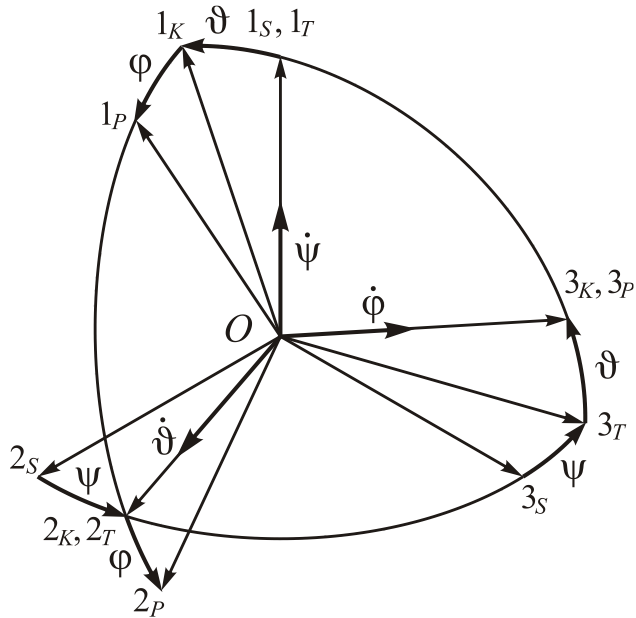


Рис. 3.1. Послідовність поворотів Ейлера–Крилова

Відповідна матриця напрямних косинусів переходу від базової системи координат  $S$  до кінцевої  $P$  має такий вигляд:

$C^{SP}$	$1_P$	$2_P$	$3_P$
$1_S$	$\cos \vartheta \cos \varphi$	$-\cos \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta$
$2_S$	$\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
$3_S$	$\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \vartheta$

У Додатку Б наведено універсальну функцію **ug2mnk**, яка обчислює елементи МНК за відомими значеннями кутів поворотів навколо координатних осей, номери яких вказано у вхідному векторі [127].

Якщо система координат  $S$  спочатку за допомогою поворотів переходить у проміжну систему координат  $T$ , а потім шляхом інших поворотів – в кінцеву СК  $P$ , то операцію знаходження параметрів кінцевого повороту, які забезпечують поворот від системи  $S$  безпосередньо до системи  $P$ , прийнято називати операцією *складання поворотів* [20].

$$C^{SP} = C^{ST} \cdot C^{TP}.$$

**Переваги застосування кутів Ейлера–Крилова** – наочність подання поворотів

**Недоліки застосування кутів Ейлера–Крилова** – неможливість безпосереднього проєціювання векторів, а також відсутність операції складання поворотів.

**Переваги застосування МНК** – добра пристосованість до проєціювання векторів та існування простого правила складання поворотів

МНК результуючого повороту дорівнює добутку МНК складових поворотів, записаних зліва направо у порядку здійснення самих поворотів.

**Недоліки застосування МНК** – не наочність подання поворотів, крім того, необхідно дев'ять параметрів МНК для представлення повороту.

### Вектор Ейлера єдиного повороту

Відповідно до теореми Ейлера довільне кутове положення однієї системи координат  $P$  відносно іншої системи координат  $S$  можна подати як єдиний поворот на кут  $\delta$  (*кут Ейлера*) навколо певно орієнтованої осі (*осі Ейлера*). При цьому кут Ейлера доволі просто визначається з матриці  $\mathbf{C}^{SP}$  напрямних косинусів за формулою [98]

$$\cos \delta = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{C}^{SP}) - 1],$$

де  $\text{Tr}(\mathbf{C}^{SP})$  – позначення сліду (trace) МНК, тобто суми її діагональних елементів. З самого визначення єдиного повороту випливає, що напрямні косинуси  $e_{1S}$ ,  $e_{2S}$  і  $e_{3S}$  осі Ейлера відносно осей  $1_S$ ,  $2_S$ ,  $3_S$  вихідної системи координат  $S$  дорівнюють напрямним косинусам  $e_{1P}$ ,  $e_{2P}$  і  $e_{3P}$  цієї осі відносно кінцевої системи координат  $P$ , тому можна зняти позначення індексу системи координат і користуватися позначеннями

$$e_1 = e_{1S} = e_{1P}; \quad e_2 = e_{2S} = e_{2P}; \quad e_3 = e_{3S} = e_{3P}.$$

Ці напрямні косинуси визначаються співвідношеннями

$$e_1 = \frac{c_{32}^{SP} - c_{23}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_2 = \frac{c_{13}^{SP} - c_{31}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_3 = \frac{c_{21}^{SP} - c_{12}^{SP}}{2 \sin \delta}.$$

Зворотний перехід від параметрів єдиного повороту Ейлера до матриці напрямних косинусів можна представити у вигляді

$$\mathbf{C}^{SP} = \cos \delta \cdot \mathbf{E} + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times) + (1 - \cos \delta) \cdot (\mathbf{e} \times)^2, \quad (3.1)$$

де  $\mathbf{E}$  є одиничною матрицею

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а  $(\mathbf{e} \times)$  є позначенням кососиметричної матриці

$$(\mathbf{e} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо ввести поняття *вектору Ейлера*

$$\boldsymbol{\varphi} = \delta \cdot \mathbf{e}$$

і врахувати, що його модуль дорівнює

$$\varphi = |\boldsymbol{\varphi}| = \delta,$$

то співвідношення (3.1) можна подати у вигляді функції цього вектору:

$$\mathbf{C}^{SP} = \mathbf{E} + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times) + \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi^2} \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times)^2. \quad (3.2)$$

Використовуючи (3.2), було створено відповідні програми-функції **mnk2VEul** та **VEul2mnk**. Вони дозволяють організувати процедуру переходу від МНК до вектору Ейлера і навпаки. Обидві вони наведені у Додатку Б.

**Переваги застосування вектору Ейлера** – наочність подання повороту і мінімальна кількість параметрів.

**Недоліки застосування вектору Ейлера** – не встановлено операції складання поворотів, не пристосованість до проєціювання векторів; виродження при  $\delta = 0$ .

### **Кватерніон повороту**

Кватерніоном називають [12, 98] гіперкомплексне число вигляду

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3,$$

де  $q_0, q_1, q_2, q_3$  – дійсні числа, які також називають параметрами Родріга–Гамільтона;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – уявні одиниці.

Величина  $q_0$  складає скалярну частину кватерніона, а величини  $q_1, q_2, q_3$  можна розглядати як складові деякого вектору – матриці-рядка

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]. \quad (3.3)$$

Кватерніон єдиного повороту на деякий кут  $\delta$  має вигляд

$$\mathbf{Q}^{SP} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e}^{SP} \sin \frac{\delta}{2},$$

де  $\mathbf{e}^{SP} \{e_1, e_2, e_3\}$  – одиничний вектор осі повороту.

Переходячи до подання кватерніона у програмному середовищі Matlab, подаватимемо кватерніон у вигляді вектору-рядка довжиною у чотири елементи

$$\mathbf{Q} = [q_0, q_1, q_2, q_3] = [q_0, \mathbf{q}]. \quad (3.4)$$

Використання (3.4) дає можливість визначити кватерніон повороту через параметри вектору Ейлера у такий спосіб

$$\mathbf{Q}^{SP} = \left[ \cos \frac{\delta}{2}, \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{e} \right], \quad (3.5)$$

де  $\mathbf{e} \{e_1, e_2, e_3\}$  – одиничний вектор осі повороту.

Зворотне перетворення кватерніона повороту у МНК здійснюється за формулою:

$$\mathbf{C}^{SP} = \mathbf{E} + 2[q_0 \mathbf{E} + (\mathbf{q} \times)](\mathbf{q} \times),$$

де  $(\mathbf{q} \times)$  є позначенням кососиметричної матриці

$$(\mathbf{q} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Для перетворення кватерніона у МНК було створено процедуру **quat2mnk**, що наведена у Додатку Б. Для зворотного перетворення використовується функція **mnk2quat**.

#### Переваги застосування кватерніонів:

- мінімальна кількість параметрів;
- існує досить просте правило складання поворотів:

$$\mathbf{Q}^{SP} = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{Q}^{TP},$$

а саме, – кватерніон результуючого повороту дорівнює кватерніонному добутку проміжних кватерніонів поворотів, записаних зліва направо у порядку самих поворотів;

- можливо застосовувати при перепроєціюванні векторів.

**Недоліки застосування кватерніонів** – відсутність наочності у поданні повороту; одному кутовому положенню об'єкту може відповідати два кватерніони  $\mathbf{Q}$  та  $-\mathbf{Q}$  [99].

### ***3.1.2 Кінематичні рівняння орієнтації***

У теоретичній механіці під кінематичними рівняннями розуміють диференціальні рівняння, що пов'язують проекції кутової швидкості тіла, рух якого досліджується, на осі тої чи іншої системи координат з похідними від параметрів повороту.

У даній роботі розглядаються безплатформні інерціальні системи орієнтації, які призначені визначати поточну орієнтацію основи, на якій вони встановлені, використовуючи вимірювання проекцій кутової швидкості основи на осі системи координат, що пов'язана з основою. Тому під *рівняннями орієнтації* розумітимемо такі кінематичні рівняння, в яких похідні від параметрів орієнтації (поворотів) виражаються через проекції  $\omega_{1P}^{PS}$ ,  $\omega_{2P}^{PS}$  і  $\omega_{3P}^{PS}$  вектору  $\omega^{PS}$  кутової швидкості основи (система координат  $P$ ) відносно базової СК  $S$ .

Наведемо рівняння орієнтації, виражені через розглянуті раніше параметри орієнтації [100].

#### **Кінематичні рівняння Ейлера**

Кінематичні рівняння Ейлера добре відомі в теоретичній механіці. Їх можна, відповідно до кінематики з рис.3.1, подати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = (\omega_{1P}^{PS} \cos \varphi - \omega_{2P}^{PS} \sin \varphi) / \cos \vartheta; \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{2P}^{PS} \cos \varphi + \omega_{1P}^{PS} \sin \varphi; \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{3P}^{PS} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{1P}^{PS} \cos \varphi - \omega_{2P}^{PS} \sin \varphi). \end{cases} \quad (3.7)$$

### Матричне рівняння Пуассона

Кінематичне рівняння орієнтації Пуассона використовує матрицю напрямних косинусів і має наступний вигляд

$$\frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} = \mathbf{C}^{SP} \cdot (\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times). \quad (3.8)$$

Тут використано позначення кососиметричної матриці

$$(\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3P}^{PS} & \omega_{2P}^{PS} \\ \omega_{3P}^{PS} & 0 & -\omega_{1P}^{PS} \\ -\omega_{2P}^{PS} & \omega_{1P}^{PS} & 0 \end{bmatrix}.$$

### Векторне рівняння орієнтації Ейлера

Позначимо вектор (матрицю-стовпець з його проекцій) Ейлера як

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{e}, \quad (3.9)$$

де  $\mathbf{e}$  – позначення вектору-стовпця

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T.$$

Кінематичне рівняння через вектор Ейлера (формула Борца) у матричній формі має вигляд (доведення його на основі роботи Борца [54];

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_P^{PS} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\omega}_P^{PS} + \frac{1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\delta^2} (\boldsymbol{\varphi} \times) (\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\omega}_P^{PS}, \quad (3.10)$$

де позначено матриці

$$\boldsymbol{\omega}_P^{PS} = [\omega_{1P}^{PS} \ \omega_{2P}^{PS} \ \omega_{3P}^{PS}]^T; \quad (\boldsymbol{\varphi} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Недоліком рівняння (3.10) є невизначеність значення коефіцієнта при його третій складовій за умови якщо  $\delta = 0$ . Враховуючи, що за малих значень  $\delta$  цей коефіцієнт можна подати у вигляді ряду

$$\frac{1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\delta^2} = \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{\delta^2}{60} + \frac{\delta^4}{2520} + \frac{\delta^6}{10800} + \dots \right),$$

то краще користуватися рівнянням виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_P^{PS} + \frac{1}{2}(\varphi \times) \omega_P^{PS} + \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{\delta^2}{60} + \frac{\delta^4}{2520} + \frac{\delta^6}{10800} + \dots \right) (\varphi \times)(\varphi \times) \omega_P^{PS}.$$

З точністю до членів шостого порядку малості можна використовувати таке спрощене рівняння:

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \omega_P^{PS} + \frac{1}{2}(\varphi \times) \omega_P^{PS} + \frac{1}{12}(\varphi \times)(\varphi \times) \omega_P^{PS}. \quad (3.11)$$

На практиці використовують перші два доданки рівняння (3.11).

### **Кватерніонне рівняння орієнтації**

Кватерніонне рівняння орієнтації має вигляд [98]:

$$\frac{dQ^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} Q^{SP} \circ \Omega_P^{PS}, \quad (3.12)$$

де  $Q^{SP}$  – кватерніон повороту від вихідної системи координат  $S$  до рухомої системи координат  $P$ ;  $\Omega_P^{PS}$  – вектор-кватерніон, скалярна частина якого дорівнює нулю, а векторна складається з проекцій  $\omega_P^{PS}$  на осі системи  $P$  вектору  $\omega^{PS}$  кутової швидкості повороту системи  $P$  відносно системи  $S$  [100, 103].

На практиці найбільшого розповсюдження отримало саме рівняння Борца (3.10) у спрощеній формі (3.11) через мінімальність параметрів і відповідно менше навантаження на обчислювач.

## **3.3 Загальні методи інтегрування диференціальних рівнянь**

В інженерній та науковій практиці дуже часто доводиться обчислювати визначені інтеграли від функцій. Як правило, знайти однозначний аналітичний інтеграл певної функції неможливо, або складно. Якщо функція задана не аналітично, а у вигляді окремих значень аргументу (таблиці), або якщо система не лінійна і не стаціонарна, то у такому випадку можливо лише застосовувати чисельні методи інтегрування.

Переважає більшість чисельних методів ґрунтується на заміні підінтегральної функції  $x(t)$  деякою наближеною функцією  $X(t)$ , інтеграл від якої обчислити легко. Це наближення здійснюється, як правило, інтерполюванням у межах заданого діапазону зміни аргументу. Нехай функція  $x(t)$  задана масивом своїх значень  $x_i$  у  $n$  рівновіддалених точках діапазону змінювання аргументу  $t$  від  $a$  до  $b$  так, що  $h = (b - a) / (n - 1)$  є кроком між значеннями аргументу  $x(t)$ . Одночасно  $h$  є кроком інтегрування. На рис.3.2. представлено графік такої функції.

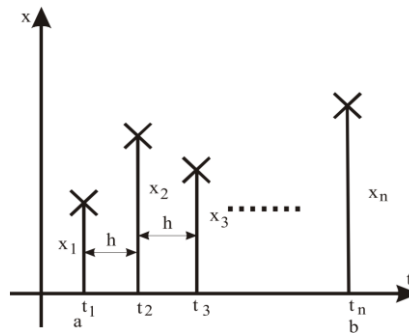


Рис.3.2 Підінтегральна функція

### Метод правих прямокутників

Найпростіший метод чисельного інтегрування. Він полягає у тому, що на кожному кроці інтегрування, на проміжку  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  функція  $x(t)$  замінюється на сталу величину, що дорівнює значенню  $x_i$  на початку інтервалу. Через це, інтеграл від функції  $x(t)$  на цьому проміжку можна геометрично представити, як площу прямокутника, що розташовується справа від  $x_i$ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt = x_i \cdot h + \frac{h^2}{2} X'(\xi) \quad (3.13)$$

Другий член (3.13) представляє оцінку похибки методу. При чому,  $\xi$  – певне значення аргументу функції на інтервалі  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Якщо просумувати значення інтегралу на окремих кроках, одержимо загальну формулу методу правих прямокутників

### Метод трапецій

При інтегруванні цим методом обчислюються площі трапецій, що утворюються при з'єднанні окремих заданих точно відрізками прямих, тобто лінійною інтерполяцією:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t)dt = \frac{h}{2}(x_i + x_{i+1}) + \frac{h^3}{12}X''(\xi)$$

$$\int_a^b x(t)dt = h\left(\frac{x_1 + x_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} x_i\right) + \frac{h^2 \cdot (b-a)}{12}X''(\xi) \quad (3.14)$$

Аналізуючи другі члени формул методів, що описують похибки методів, вони є степеневими функціями від кроку інтегрування. Таким чином методи прямокутників є методами першого порядку, а трапеції – другого [60].

Методи прямокутників і трапеції набули дуже широкого поширення при проектуванні алгоритмічного забезпечення БІНС та БІСО. Вони дозволяють швидко організувати процес інтегрування кінематичних рівнянь у задачах, що не вимагають великої точності. Використовуються, як правило у системах, побудованих на МЕМС датчиках низької та середньої точності [101].

### Методи Рунге–Кутти для кінематичних рівнянь орієнтації

Методи Рунге–Кутти можна використовувати при побудові алгоритмів БІСО, дещо їх трансформували [102].

У прикладній математиці методи Рунге–Кутти вважаються однокроковими, бо розраховують значення вектору фазових змінних на наступному кроці інтегрування [60]. При цьому вони використовують обчислення правих частин диференціальних рівнянь у формі Коши у кількох моментах часу всередині кроку інтегрування. Останнє неможливо в алгоритмах БІСО через те, що значення вектору кутової швидкості відомі лише в дискретні

моменти часу, що розділені інтервалом опитування вимірювачів. Тому в БІСО алгоритми Рунге–Кутти необхідно трансформувати у багатокрокові.

Іншою особливістю алгоритмів БІСО є те, що обчислювання вектору фазових змінних наприкінці кроку інтегрування здійснюється тоді, коли крок інтегрування вже завершився, тобто вже відоме нове значення вектору кутової швидкості основи. Тому вже однокроковий алгоритм БІСО може спиратися на знання значення правих частин диференціальних рівнянь у два моменти часу – на початку і наприкінці кроку опитування [60].

Алгоритми, що основані на методах Рунге–Кутти, є безрозгінними. Вони використовують лише ті значення вимірюваної кутової швидкості, які отримуються на наступних кроках опитування.

Загальну формулу чисельного інтегрування на основі методів Рунге–Кутти можна представити у вигляді:

$$\mathbf{y}_{n+m} = \mathbf{y}_n + H \cdot \mathbf{F}(t_n; \mathbf{y}_n), \quad (3.15)$$

де  $\mathbf{y}_n$  – вектор значень фазових змінних у момент часу  $t_n$ ;  $n$  – номер початкового кроку опитування;  $\mathbf{F}(t_n; \mathbf{y}_n)$  – вектор, що є певною функцією значень правої частини  $\mathbf{Z}(t_j; \mathbf{y}_j)$ ; ( $j = n, n+1, \dots, n+m$ ) диференціальних рівнянь у формі Коши.

Значення функції  $\mathbf{F}(t_n; \mathbf{y}_n)$  визначаються формулами, наведеними у роботі [103] та у Таблиці В.1 Додатку В.

Формули у такому вигляді не відрізняються від звичайних. Відмінність лише у тому, що крок інтегрування має складатися з кількох кроків опитування. Алгоритм **RK21** є однокроковими другого порядку. Двокрокові алгоритми **RK22**, **RK32** и **RK42** мають відповідно другий, третій і четвертий порядок точності. Трикрокові алгоритми **RK33** и **RK43** відносяться до третього і четвертого порядків відповідно.

Характерною відмінністю методів Рунге–Кутти від ряду Тейлора є відсутність необхідності розрахунку похідних від функції  $\mathbf{Z}(t; \mathbf{y})$ , а лише обчислень значень самої функції. Однак, для обчислення наступної точки функції необхідно обчислювати значення  $\mathbf{Z}(t; \mathbf{y})$  кілька разів на одному кроці

інтегрування. Це і призводить до необхідності переформовувати методи Рунге–Кутти під «багатокрокові».

Незважаючи на те, що методи Рунге–Кутти не є спеціально розробленими для БІСО і використовуються, як правило, у вирішенні широкого спектру задач, вони цілком можуть використовуватись в інерціальні орієнтації та навігації [103]–[107].

Методи Рунге–Кутти є стандартними інтеграторами у програмному середовищі Matlab та Simulink і їх часто застосовують при моделюванні БІНС та БІСО, коли не стоїть задача дослідження чисельного інтегрування [85]–[87], [105]. У роботі [108] наведено аналіз швидкодії методів Рунге–Кутти другого і четвертого порядків.

У Додатку Б наведено розроблені функції для інтегрування методами Рунге–Кутти: **RK21, RK22, RK32, RK33, RK42 та RK43**.

### Методи прогнозу-корекції

Багатокрокові методи прогнозу-корекції можна використати для інтегрування кінематичних рівнянь у БІСО [62, 109]. У загальному випадку вони здійснюють чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, представлених у вигляді Коши. Алгоритм роботи цих методів складається з двох етапів. На першому на основі інформації про попередню точку прогнозується значення змінної стану у наступній точці. На другому здійснюється уточнення («корегування») розрахованого значення за спеціальною неявною формулою.

Обчислення на етапі корекції здійснюється кілька ітерацій до тих пір, поки неявні формули значення шуканої змінної справа і зліва формули корекції не співпадуть з потрібною точністю. Але навіть повне співпадіння шуканої змінної у формулі корекції не означає, що отримане значення є точним, оскільки сама формула корекції – наближена.

Порядок методу, як і у випадку методів Рунге–Кутти, характеризує показник степеня у залежності похибки метода від кроку інтегрування. Для методів прогнозу-корекції порядок метода збігається з кількістю попередніх точок, інформація про які використовується у формулах конкретного методу.

Формули прогнозу і корекції багатокрокових методів наведені у роботі [109] та у Таблиці В.2 Додатку В.

Великим недоліком методів прогнозу-корекції є те, що для початку роботи, їм необхідна інформація про значення інтегралу функції у попередні моменти часу. При чому для метода другого порядку необхідна одна точка, третього – дві, а четвертого – три. Для їх знаходження необхідно застосовувати інші методи чисельного інтегрування. Це не тільки призводить до похибки, навантаження на обчислювач, ускладнення усього алгоритму БІСО, а й дуже ускладнює практичне застосування методів прогнозу-корекції. І справді, у реальних системах часто трапляються збої у передачі сигналів від ІВМ до обчислювача. У такому випадку, однокрокові методи та методи Рунге–Кутти просто продовжують працювати спираючись на попередньо обчислену точку, проте методи прогнозу-корекції перестають працювати. Для них необхідно розпочинати процедуру ініціалізації обчислення попередніх точок спочатку.

### ***3.4 Методи чисельного інтегрування Пікара***

Найбільш розповсюдженим підходом при синтезі алгоритмів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь БІСО є метод Пікара. Він полягає у попередньому знаходженні наближеного аналітичного розв'язку диференціального кінематичного рівняння орієнтації на кроці інтегрування з подальшим обчисленням його значення у кінці кроку. Аналітичний розв'язок знаходиться послідовним наближенням.

#### ***3.4.1 Алгоритми Пікара на основі кінематичного рівняння Ейлера***

Обмежимося інтегруванням спрощеного рівняння Борца (3.11), нехтуючи останньою складовою правої частини рівняння Борца, тобто членами з подвійними векторними добутками:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \approx \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} \times) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.16)$$

У роботі [98] детально показано синтез алгоритмів Пікара для рівняння Борца. При синтезі алгоритмів Пікара необхідно враховувати тип вихідної величини з ДКШ. Так було отримано алгоритми для квазікоординат (у випадку оптичних гіроскопів) та кутової швидкості (переважна більшість сучасних ДКШ) Приведемо тут лише фінальні формули методів:

### **Для випадку вимірювання квазікоординат**

#### **Однокроковий алгоритм**

$$\boldsymbol{\varphi}(h) = \mathbf{q}_1. \quad (3.17)$$

#### **Двокроковий алгоритм**

$$\boldsymbol{\varphi}(2h) = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \frac{2}{3}(\mathbf{q}_1 \times) \mathbf{q}_2. \quad (3.18)$$

#### **Трикроковий алгоритм**

$$\boldsymbol{\varphi}(3h) = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \frac{57}{80} \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 + \frac{33}{80} \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_3 + \frac{57}{80} \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3. \quad (3.19)$$

#### **Чотирикроковий алгоритм**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(4h) = & \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 + \frac{736}{945}(\mathbf{q}_1 \times) \mathbf{q}_2 + \frac{334}{945}(\mathbf{q}_1 \times) \mathbf{q}_3 + \frac{526}{945}(\mathbf{q}_1 \times) \mathbf{q}_4 + \\ & + \frac{218}{315}(\mathbf{q}_2 \times) \mathbf{q}_3 + \frac{334}{945}(\mathbf{q}_2 \times) \mathbf{q}_4 + \frac{736}{945}(\mathbf{q}_3 \times) \mathbf{q}_4. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Величини  $\mathbf{q}_i$  представлено у Таблиці В.3 Додатку В.

Двокроковий і трикроковий алгоритми відповідають формулам (3.3.15) та (3.3.17) з фундаментальної роботи А. П. Панова [13]. Чотирикроковий алгоритм виду (3.20) також отримано у роботі [110].

### **Для випадку вимірювання кутової швидкості**

#### **Однокроковий алгоритм**

$$\boldsymbol{\varphi}(h) = h \frac{\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1}{2} + \frac{h^2}{12}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \boldsymbol{\omega}_1. \quad (3.21)$$

#### **Двокроковий алгоритм**

$$\varphi(2h) = \frac{h}{3}(\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2) + \frac{h^2}{15}[4\omega_0 \times \omega_1 + \omega_0 \times \omega_2 + 4\omega_1 \times \omega_2]. \quad (3.22)$$

### Трикроковий алгоритм

$$\begin{aligned} \varphi(3h) = & \frac{3}{8}h(\omega_0 + 3\omega_1 + 3\omega_2 + \omega_3) + h^2 \left[ \frac{351}{2240}(\omega_0 \times) \omega_1 + \frac{27}{140}(\omega_0 \times) \omega_2 + \right. \\ & \left. + \frac{141}{2240}(\omega_0 \times) \omega_3 + \frac{784}{803}(\omega_1 \times) \omega_2 + \frac{27}{140}(\omega_1 \times) \omega_3 + \frac{351}{2240}(\omega_2 \times) \omega_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

### Чотирикроковий алгоритм

$$\begin{aligned} \varphi(4h) = & \frac{2}{45}h(7\omega_0 + 32\omega_1 + 12\omega_2 + 32\omega_3 + 7\omega_4) + \\ & + h^2 \left[ \frac{608}{2835}\omega_0 \times \omega_1 + \frac{16}{135}\omega_0 \times \omega_2 + \frac{32}{135}\omega_0 \times \omega_3 + \frac{148}{2835}\omega_0 \times \omega_4 + \right. \\ & + \frac{128}{189}\omega_1 \times \omega_2 + \frac{2048}{2835}\omega_1 \times \omega_3 + \frac{32}{135}\omega_1 \times \omega_4 + \frac{128}{189}\omega_2 \times \omega_3 + \\ & \left. + \frac{16}{135}\omega_2 \times \omega_4 + \frac{608}{2835}\omega_3 \times \omega_4 \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Формула (3.22) збігається з формулою алгоритму (3.3.126) роботи Панова [13], за винятком знаку перед останньою складовою. Відмітимо, що для випадку вимірювання кутової швидкості, Панов зупинився на розробці двокрокового алгоритму виду (3.22). Отримані у роботі [98] трикроковий та чотирикроковий алгоритми не зустрічалися в раніше опублікованих роботах і є новими.

### **3.4.2 Методи Пікара для інтегрування кінематичного рівняння Пуассона**

У цьому випадку задача полягає в отриманні алгоритму чисельного розв'язку матричного диференціального рівняння Пуассона виду (3.8). На відміну від рівняння Борца, МНК має дев'ять членів і в сучасних системах орієнтації і навігації зустрічається не часто. Проте саме воно дає можливість однозначно визначити орієнтацію об'єкта і не використовувати при цьому додаткові кінематичні параметри [99].



При цьому інформація про кутову швидкість надається у дискретні моменти часу  $t_i (i=1, 2, \dots)$  з інтервалами  $h$  кроку опитування вимірювачів (тобто  $t_i - t_{i-1} = h$ ) у вигляді поточних значень кутової швидкості  $\omega_j(t_i)$ , ( $j=1, 2, 3$ ), або у вигляді дискретних приростів квазікоординат  $q_j(t_i)$ :

$$q_j(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_j(\tau) d\tau.$$

Інтегруючи (3.8) в межах від  $t_0$  до  $t$ , отримаємо

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t C(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi. \quad (3.25)$$

Розв'язок рівняння (3.25) шукатимемо у вигляді добутку початкового значення МНК на деяку невідому матрицю  $P(t)$  – функцію часу, вираз для якої і потрібно знайти:

$$C(t) = C(t_0) \cdot P(t). \quad (3.26)$$

Підставимо (3.26) у (3.25):

$$C(t_0) \cdot P(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t C(t_0) \cdot P(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi,$$

звідки випливає

$$P(t) = E + \int_{t_0}^t P(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi, \quad (3.27)$$

де  $E$  – одинична матриця розміром  $(3 \times 3)$ . Тепер рівняння (3.8) можна подати у вигляді (3.26).

Розглянемо алгоритм знаходження значення матриці напрямних косинусів  $C_{n+1} = C(t_{n+1})$  у момент часу  $t = t_{n+1} = t_n + h$  за заданим її значенням  $C_n = C(t_n)$  у попередній момент часу  $t = t_n$ , де  $h$  – крок інтегрування.

Застосовуючи (3.26), знайдемо

$$C_{n+1} = C_n \cdot P_{n+1},$$

причому, у відповідності до (3.27),  $P_{n+1}$  є розв'язком рівняння у момент часу  $t = t_{n+1} = t_n + h$

$$P(t) = E + \int_{t_n}^t P(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi. \quad (3.28)$$

Рівняння (3.28) розв'язується за методом Пікара послідовними наближеннями.

У нульовому наближенні приймемо  $P_{(0)}(t) = E$ . Підставивши це у праву частину виразу (3.28), отримаємо розв'язок цього рівняння у першому наближенні:

$$P_{(1)}(t) = E + \int_{t_n}^t P_{(0)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi = E + \Delta P_{(1)}(t),$$

де позначено

$$\Delta P_{(1)}(t) = \int_{t_n}^t [\omega(\xi) \times] d\xi. \quad (3.29)$$

Для знаходження розв'язку у другому наближенні у відповідності до методу Пікара, достатньо підставити у праву частину виразу (3.28) результат попереднього (першого) наближення матриці  $P$ :

$$\begin{aligned} P_{(2)}(t) &= E + \int_{t_n}^t P_{(1)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi = E + \int_{t_n}^t \left( E + \int_{t_n}^{\xi} [\omega(\eta) \times] d\eta \right) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi = \\ &= P_{(1)}(t) + \int_{t_n}^t \Delta P_{(1)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi = P_{(1)}(t) + \Delta P_{(2)}(t); \end{aligned}$$

де

$$\Delta P_{(2)}(t) = \int_{t_n}^t \Delta P_{(1)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi. \quad (3.30)$$

Використовуючи результати (3.29) та (3.30), в аналогічний спосіб знайдемо третє наближення

$$P_{(3)}(t) = E + \int_{t_n}^t P_{(2)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi = P_{(2)}(t) + \int_{t_n}^t \Delta P_{(2)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi = P_{(2)}(t) + \Delta P_{(3)}(t),$$

де

$$\Delta P_{(3)}(t) = \int_{t_n}^t \Delta P_{(2)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi. \quad (3.31)$$

Аналогічно у четвертому наближенні отримаємо:

$$P_{(4)}(t) = P_{(3)}(t) + \Delta P_{(4)}(t),$$

де

$$\Delta P_{(4)}(t) = \int_{t_n}^t \Delta P_{(3)}(\xi) \cdot [\omega(\xi) \times] d\xi. \quad (3.32)$$

У роботах [16], [98], [111] детально показано синтез методів Пікара для кінематичного рівняння Пуассона. Наведемо тут більш точні трикрокові та чотирікрокові алгоритми.

### Трикрокові алгоритми

На трьох кроках опитування, що складають один крок інтегрування, відомими є чотири виміряні величини вектору кутової швидкості основи:  $\omega_0$  – на початку,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  – на кінцях першого, другого і третього кроків опитування відповідно. У цьому випадку кутову швидкість слід шукати як кубічний поліном часу:

$$\omega(\tau) = \omega_o + 2\varepsilon\tau + 3a\tau^2 + 4b\tau^3.$$

Для знаходження коефіцієнтів  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $b$ , підставимо у цей вираз час кінця кожного кроку опитування ( $\omega_0 = \omega(0)$ ,  $\omega_1 = \omega(h)$ ,  $\omega_2 = \omega(2h)$ ,  $\omega_3 = \omega(3h)$ ).

Прирости кутової швидкості на кожному з трьох кроків опитування матимуть вигляд:

$$\omega_1 - \omega_o = 2\varepsilon h + 3ah^2 + 4bh^3; \quad \omega_2 - \omega_o = 4\varepsilon h + 12ah^2 + 32bh^3;$$

$$\omega_3 - \omega_o = 6\varepsilon h + 27ah^2 + 108bh^3.$$

Запишемо розв'язок цієї системи рівнянь у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon h \\ ah^2 \\ bh^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 - \omega_o \\ \omega_2 - \omega_o \\ \omega_3 - \omega_o \end{bmatrix}.$$

Якщо ввести позначення:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{12}(-11\boldsymbol{\omega}_o + 18\boldsymbol{\omega}_1 - 9\boldsymbol{\omega}_2 + 2\boldsymbol{\omega}_3); \quad \mathbf{B} = \frac{1}{6}(2\boldsymbol{\omega}_o - 5\boldsymbol{\omega}_1 + 4\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_3);$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{24}(-\boldsymbol{\omega}_o + 3\boldsymbol{\omega}_1 - 3\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3),$$

то вираз кутової швидкості можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{\omega}(\tau) = \boldsymbol{\omega}_o + 2\mathbf{A}\zeta + 3\mathbf{B}\zeta^2 + 4\mathbf{C}\zeta^3, \quad \left( \zeta = \frac{\tau}{h} \right).$$

З співвідношення (3.29) виходить у першому наближенні:

$$\Delta P_{(1)}(\tau) = \int_0^\tau [\boldsymbol{\omega}(\xi) \times] d\xi = \int_0^\zeta [(\boldsymbol{\omega}_o \times) + 2(\mathbf{A} \times)\zeta + 3(\mathbf{B} \times)\zeta^2 + 4(\mathbf{C} \times)\zeta^3] d(\zeta h),$$

або:

$$\Delta P_{(1)}(\tau) = h[(\boldsymbol{\omega}_o \times)\zeta + (\mathbf{A} \times)\zeta^2 + (\mathbf{B} \times)\zeta^3 + (\mathbf{C} \times)\zeta^4].$$

В кінці кроку інтегрування (тобто при  $\zeta = 3$ ) величина матриці  $P$  стає такою:

$$P_{(1)}(3h) = E + h[3(\boldsymbol{\omega}_o \times) + 3^2(\mathbf{A} \times) + 3^3(\mathbf{B} \times) + 3^4(\mathbf{C} \times)]. \quad (3.33)$$

Аналогічно можна отримати формули для методів другого, третього і четвертого наближень:

$$P_{(2)}(3h) = P_{(1)}(3h) + h^2 \sum_{i=2}^8 3^i \mathbf{K}_{2i}; \quad (3.34)$$

$$P_{(3)}(3h) = P_{(1)}(3h) + h^2 \sum_{i=2}^8 3^i \mathbf{K}_{2i} + h^3 \sum_{j=3}^{12} 3^j \mathbf{K}_{3j}; \quad (3.35)$$

$$P_{(4)}(3h) = P_{(1)}(3h) + h^2 \sum_{i=2}^8 3^i \mathbf{K}_{2i} + h^3 \sum_{j=3}^{12} 3^j \mathbf{K}_{3j} + h^4 \sum_{k=4}^{16} 3^k \mathbf{K}_{4k}. \quad (3.36)$$

Формули для коефіцієнтів  $\mathbf{K}$  з рівнянь (3.34), (3.35) та (3.36) наведені у Додатку Г.

### Чотирикрокові алгоритми

На чотирьох кроках опитування, які складають черговий крок інтегрування, стають відомими п'ять вимірних величин вектору кутової швидкості основи:  $\boldsymbol{\omega}_o$  – на початку,  $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3, \boldsymbol{\omega}_4$  – на кінцях другого, третього

та четвертого кроків. Тому кутову швидкість треба апроксимувати поліномом четвертого порядку:

$$\omega(\tau) = \omega_o + 2\varepsilon\tau + 3a\tau^2 + 4b\tau^3 + 5c\tau^4.$$

Щоб знайти векторні коефіцієнти  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , підставимо у цей вираз час кінця кожного кроку опитування ( $\omega_0 = \omega(0)$ ,  $\omega_1 = \omega(h)$ ,  $\omega_2 = \omega(2h)$ ,  $\omega_3 = \omega(3h)$ ,  $\omega_4 = \omega(4h)$ ).

Прирости кутової швидкості на кожному з чотирьох кроків опитування матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\omega_1 - \omega_o &= 2\varepsilon h + 3ah^2 + 4bh^3 + 5ch^4; \\ \omega_2 - \omega_o &= 4\varepsilon h + 12ah^2 + 32bh^3 + 80ch^4; \\ \omega_3 - \omega_o &= 6\varepsilon h + 27ah^2 + 108bh^3 + 405ch^4; \\ \omega_4 - \omega_o &= 8\varepsilon h + 48ah^2 + 256bh^3 + 1280ch^4.\end{aligned}$$

Якщо розв'язати цю систему рівнянь відносно векторних коефіцієнтів, то кутову швидкість можна подати у формі:

$$\omega(\tau) = \omega_o + 2A\zeta + 3B\zeta^2 + 4C\zeta^3 + 5D\zeta^4, \quad \left(\zeta = \frac{\tau}{h}\right),$$

де використані позначення

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{24}(-25\omega_o + 48\omega_1 - 36\omega_2 + 16\omega_3 - 3\omega_4); C = \frac{1}{48}(-5\omega_o + 18\omega_1 - 24\omega_2 + 14\omega_3 - 3\omega_4); \\ B &= \frac{1}{72}(35\omega_o - 104\omega_1 + 114\omega_2 - 56\omega_3 + 35\omega_4); D = \frac{1}{120}(\omega_o - 4\omega_1 + 6\omega_2 - 4\omega_3 + \omega_4).\end{aligned}$$

У першому наближенні у відповідності до співвідношення (3.29) отримаємо:

$$\Delta P_{(1)}(\tau) = \int_0^\tau [\omega(\xi) \times] d\xi = \int_0^\zeta [(\omega_o \times) + 2(A \times)\zeta + 3(B \times)\zeta^2 + 4(C \times)\zeta^3 + 5(D \times)\zeta^4] d(\zeta h);$$

або

$$\Delta P_{(1)}(\tau) = h[(\omega_o \times)\zeta + (A \times)\zeta^2 + (B \times)\zeta^3 + (C \times)\zeta^4 + (D \times)\zeta^5].$$

У кінці кроку інтегрування (тобто при  $\zeta = 4$ ) величина матриці  $P$  стане такою:

$$P_{(1)}(4h) = E + h[4(\omega_o \times) + 4^2(A \times) + 4^3(B \times) + 4^4(C \times) + 4^5(D \times)]. \quad (3.37)$$

Аналогічно можна отримати формули для методів другого, третього і четвертого наближень:

$$P_{(2)}(4h) = P_{(1)}(4h) + h^2 \sum_{i=2}^{10} 4^i \mathbf{K}_{2i}; \quad (3.38)$$

$$P_{(3)}(4h) = P_{(1)}(4h) + h^2 \sum_{i=2}^{10} 4^i \mathbf{K}_{2i} + h^3 \sum_{j=3}^{15} 4^j \mathbf{K}_{3j}; \quad (3.39)$$

$$P_{(4)}(4h) = P_{(1)}(4h) + h^2 \sum_{i=2}^{10} 4^i \mathbf{K}_{2i} + h^3 \sum_{j=3}^{15} 4^j \mathbf{K}_{3j} + h^4 \sum_{k=4}^{20} 4^k \mathbf{K}_{4k}. \quad (3.40)$$

Формули для коефіцієнтів  $\mathbf{K}$  з рівнянь (3.38), (3.39) та (3.40) наведені у Додатку Г.

## Висновки по розділу 3

1) Розглянуто основні способи опису поточної орієнтації об'єкту, використовуючи кінематичні параметри та відповідні диференціальні рівняння. Встановлено взаємозв'язки між кінематичними параметрами і створено відповідні програмні процедури.

2) Визначено, що використання кутів Ейлера-Крилова, незважаючи на їх наочність, призводить до виродження кінематичного рівняння і не може застосовуватись на практиці. Матриці напрямних косинусів, кватерніони і вектор єдиного повороту Ейлера цілком можуть застосовуватись у кінематичних рівняннях. Відмітимо, що вектор Ейлера і кватерніони мають меншу кількість параметрів, що може забезпечити більшу швидкодію вихідних алгоритмів БІСО. Вони є найбільш розповсюдженими в реальних інерціальних системах. Проте необхідно зазначити ряд особливостей: кватерніони не вироджуються проте одному положенню СК можуть відповідати два кватерніони  $\mathbf{Q}$  та  $-\mathbf{Q}$ , що ускладнює визначення однозначної орієнтації; вектор Ейлера може вироджуватись при кратних значеннях кута  $\pi$ , хоча і має мінімальну кількість параметрів. Натомість матриця напрямних косинусів, і диференціальне рівняння Пуассона, що описує її приріст, однозначно описують орієнтацію зв'язаної СК і її легко застосувати для перепроеціювання векторів, наприклад проекцій уявного прискорення, вимірюваних акселерометрами ІВМ.

3) Розглянуто розповсюджені методи чисельного інтегрування низької точності, Рунге–Кутти та прогнозу-корекції. Показано, що вони цілком можуть застосовуватись при синтезі алгоритмі чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації.

4) Наведено методи чисельного інтегрування рівняння Пуассона методом Пікара для випадку вимірювання кутової швидкості. Отримано формули алгоритмів до четвертого порядку точності однокрокові, двокрокові і трикрокові.

# ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ

#### ***4.1. Розробка імітаційної моделі безплатформної інерціальної системи орієнтації***

Розглянемо задачу дослідження похибок БІСО, обумовлених виключно похибками алгоритму чисельного інтегрування, закладеного у обчислювачі БІСО. Оскільки, як зазначалося вище, інтеграл кінематичного рівняння орієнтації не має аналітичного розв'язку, доцільно застосувати імітаційне моделювання алгоритму БІСО.

Відповідний комп'ютерний алгоритм має складатися з таких програмних блоків (рис.4.1):

- 1) блок, що моделює кутовий руху основи;
- 2) процедура, що імітує обчислювальний пристрій БІСО з вбудованим в нього досліджуваним алгоритмом;
- 3) блоку порівнювання параметрів орієнтації, отриманих блоком імітатора обчислювача БІСО, з ідеальними (модельними) значеннями цих параметрів, отриманих у блоці імітатора руху основи; отримання масиву значень похибок алгоритму як функцій часу [98].

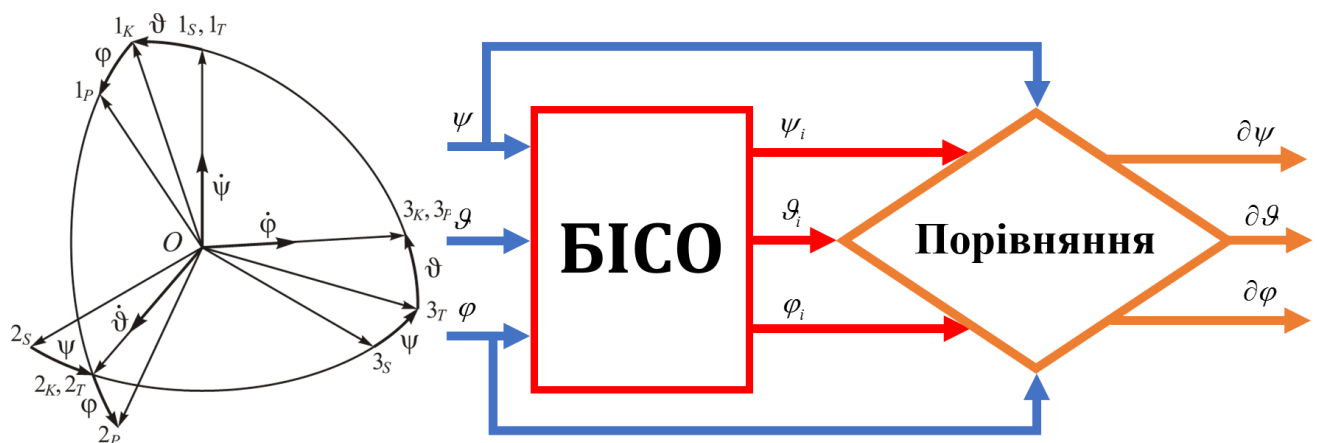


Рис.4.1 Структура імітаційної моделі БІСО



Припустимо, що основа рухається в інерціальній СК. Це дозволить спростити моделі для інтегрування кінематичних рівнянь. При цьому врахувати обертання географічної СК можна буде на етапі синтезу методу та алгоритму реальної БІСО. Для цього додається ще одна процедура інтегрування кінематичного рівняння, що описує кутовий рух географічної СК. Таким чином отримується дві МНК: перша описує орієнтацію зв'язаної СК відносно інерціальної  $C^{IS}$ , а друга – орієнтацію географічної СК відносно інерціальної  $C^{IP}$ . Для знаходження орієнтації об'єкту відносно географічної СК  $C^{SP}$  необхідно знайти добуток проміжних матриць, як показано у роботі [2]:

$$C^{SP} = (C^{IP})^{-1} C^{IS}.$$

У якості кінцевих параметрів поточної орієнтації об'єкту для наочності зручніше використовувати послідовність кутів Ейлера–Крилова. Імітаційну модель було створено у програмному середовищі Matlab. Використовувалися набірки попередніх досліджень, що були представлені у роботах [14, 105, 112–114].

Розроблене алгоритмічно-програмне забезпечення використовувалося при створенні імітаційної моделі безплатформного показника широти і довготи у роботах [115–117].

На розроблену імітаційну модель було оформлено авторське свідоцтво України на твір [118].

## **4.2. Методика дослідження похибок алгоритмів**

Дослідимо похибки чисельного інтегрування на прикладі матричного рівняння Пуассона (3.8) шістьма методами Рунге–Кутти, алгоритми яких були наведені раніше у Розділі 3 та у роботі [103].

Задля виявлення дрейфів похибок задамо такий рух основи:

$$\psi(t) \equiv 0; \quad \vartheta(t) = a_m \sin(\omega t + \varepsilon); \quad \varphi(t) = a_m \sin(\omega t),$$

за якого основа здійснює синхронні коливання з однаковою амплітудою навколо двох ортогональних осей і не повертається навколо третьої осі. За умови, коли

$\varepsilon = 90^\circ$ , такий рух називається конічним (coning) [119]. Він призводить до максимального зростання алгоритмічних дрейфів методів чисельного інтегрування, тому більшість дослідників проводять тестування саме на ньому [6, 14, 71].

На рис. 4.2 – 4.4 показані результати моделювання алгоритмів БІСО за таких значень параметрів руху:  $a_m = 0,1 \text{ рад}$ ;  $\omega = 1 \text{ рад/с}$ . На рис. 4.2 представлені результати за кроку  $h = 1 \text{ с}$ . Аналогічно, на рис. 4.3 та 4.3 наведено результати моделювання при  $h = 0,1$  та  $h = 0,01 \text{ с}$  для зсуву фази коливань  $\varepsilon = 0^\circ$  та  $\varepsilon = 90^\circ$ .

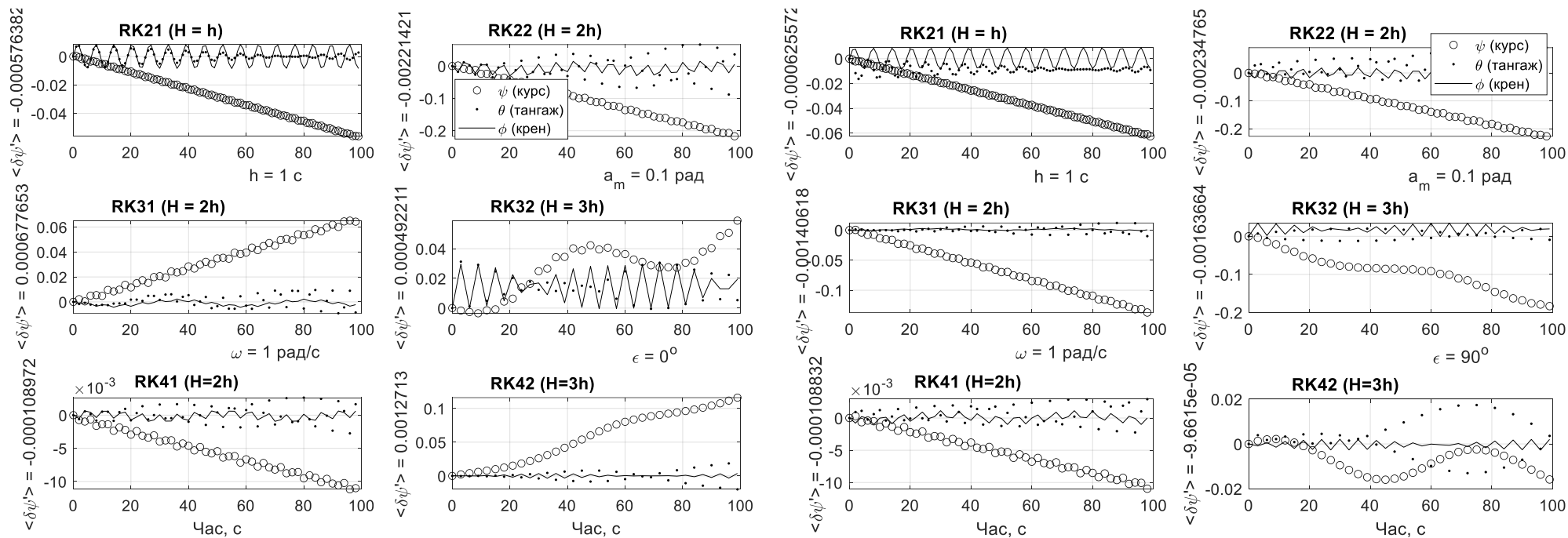
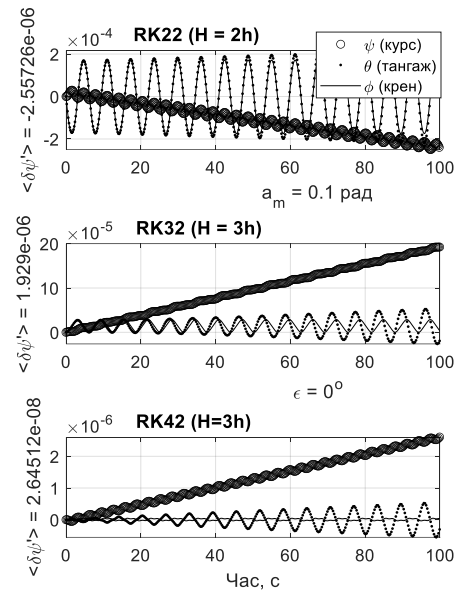
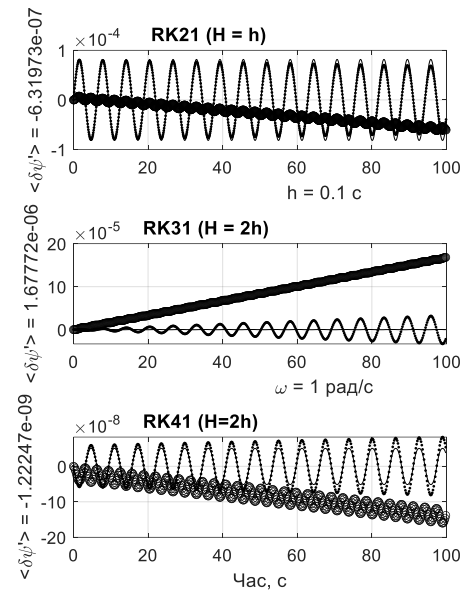
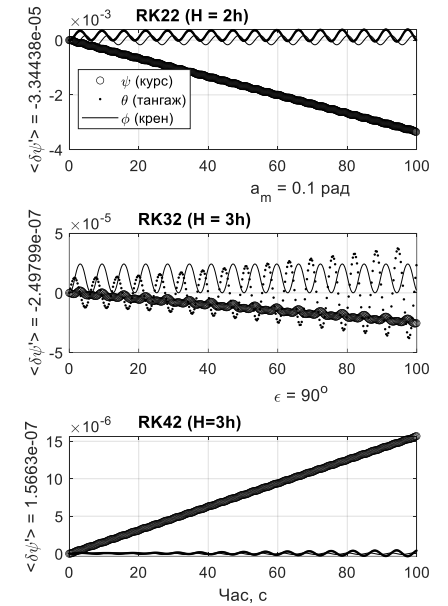
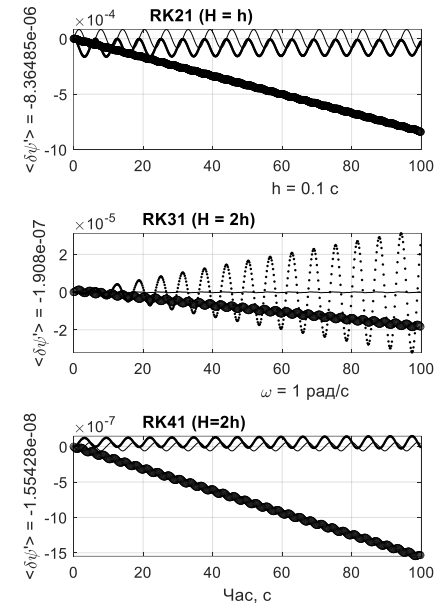


Рис. 4.2 Крок опитування 1 с



а) зсув фаз  $0^\circ$



б) зсув фаз  $90^\circ$

Рис. 4.3. Крок опитування 0,1 с

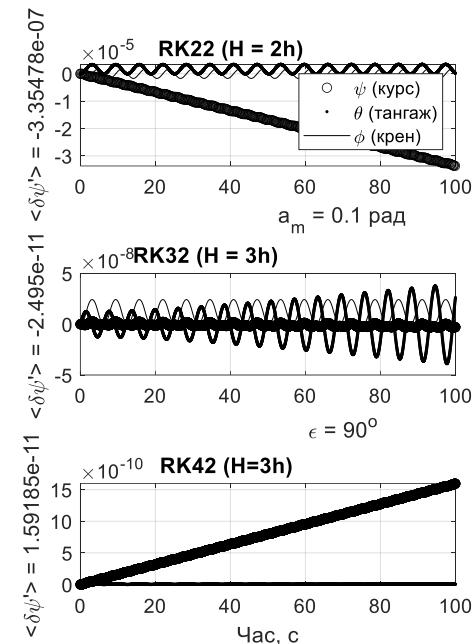
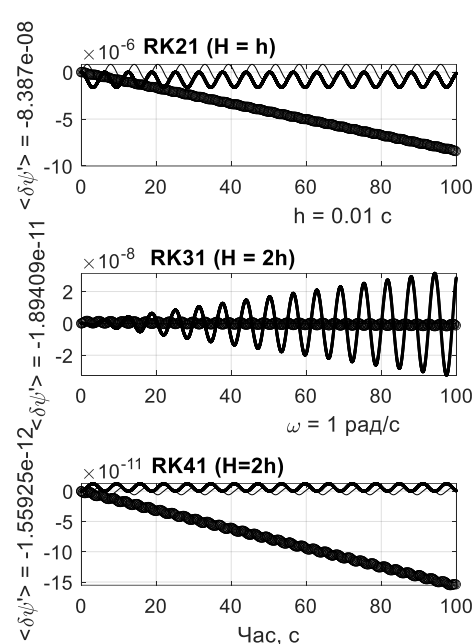
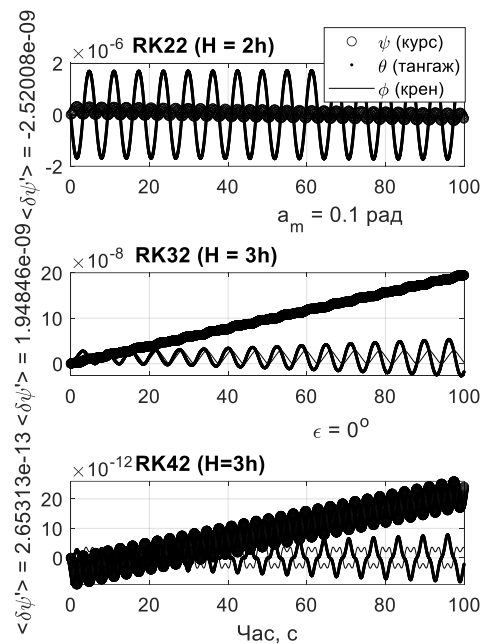
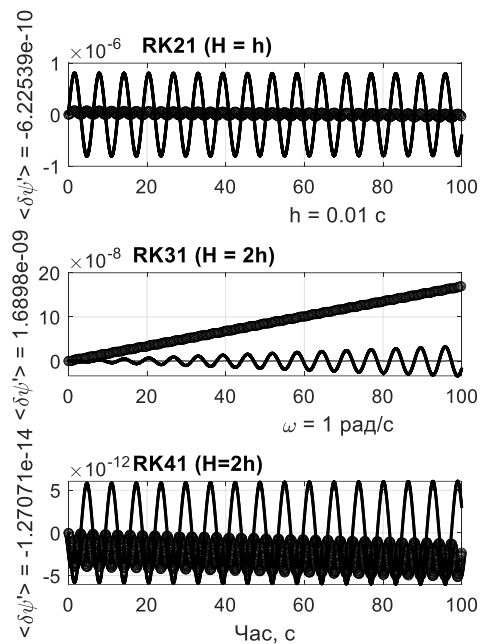


Рис. 4.4. Крок опитування 0,01 с

З наведених графіків випливає:

1) дрейфи похибок алгоритмів суттєво залежать від зсуву фаз між ортогональними коливаннями основи; ця залежність близька до гармонічної як показано на рис.4.5.

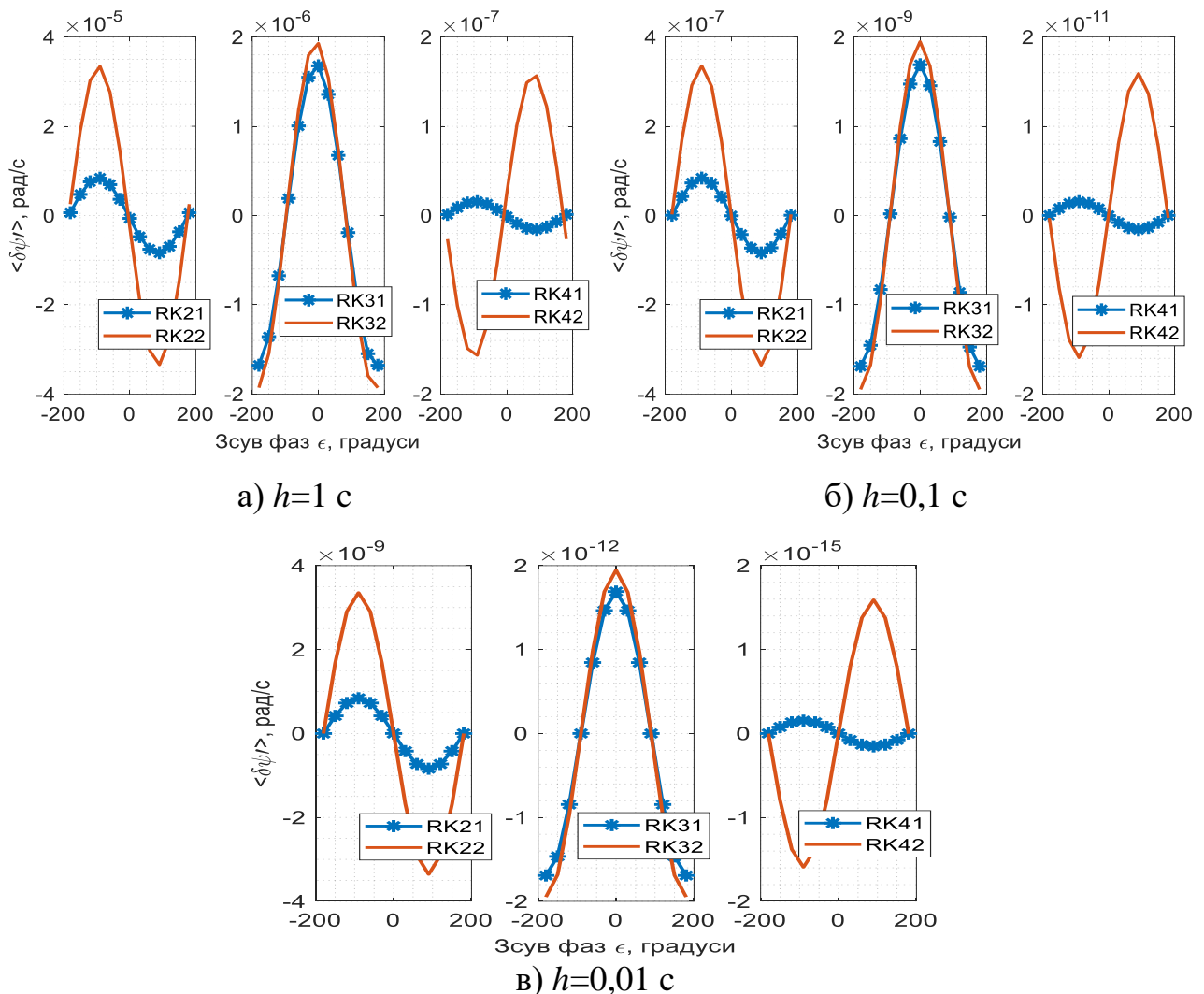


Рис.4.5 Алгоритмічний дрейф БІСО

2) при певних значеннях зсуву фази, дрейф сягає своєї максимальної за модулем величини; саме ці випадки є найбільш небезпечними для практичного застосування алгоритмів; тому дрейфи похибок за таких умов можна прийняти за характеристики точності алгоритмів БІСО; з рис.4.5 випливає, що алгоритми методів RK21, RK22, RK41 і RK42 мають максимальний дрейф при зсуві фаз  $\epsilon = 90^\circ$ , а алгоритми RK31 і RK32 – при  $\epsilon = 0^\circ$ ;

3) максимальні дрейфи суттєво залежать від величини кроку опитування датчиків; зазвичай ця залежність є степеневою, показник степеня якої характеризує порядок точності використаного алгоритму; з представлених

рисунків, наприклад, впливає, що алгоритми RK21 і RK22 мають другий порядок точності, RK31 і RK32 – третій, а RK41 і RK42 – четвертий порядок точності.

Побудуємо у подвійному логарифмічному масштабі графіки залежності максимальних дрейфів досліджених алгоритмів від кроку опитування (рис. 4.6). Значення максимальних дрейфів наведені у табл. 4.1.

Таблиця 4.1 Максимальні дрейфи різних методів (рад/с)

Алгоритм	$h, c$		
	1	0,1	0,01
RK21	6.26e-4	8.36e-6	8.39e-8
RK22	2.35e-3	3.34e-5	3.35e-7
RK31	6.78e-4	1.68e-6	1.69e-9
RK32	4.92e-4	1.93e-6	1.95e-9
RK41	1.09e-4	1.55e-8	1.56e-12
RK42	9.66e-5	1.57e-7	1.59e-11

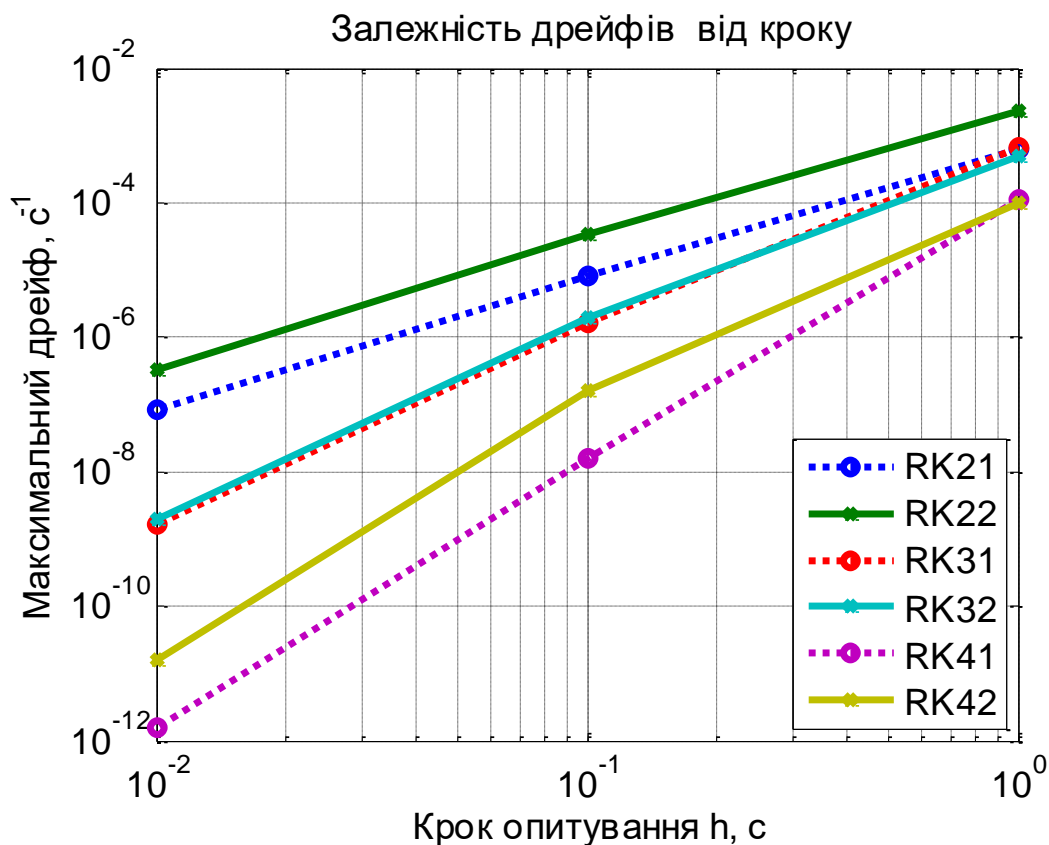


Рис. 4.6 Залежності дрейфу від кроку

Додаткові дослідження за створеним програмним алгоритмом показують, що максимальні дрейфи  $\left\langle \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \right\rangle_{\max}$  методів інтегрування мають такі особливості:

- 1) вони пропорційні добутку амплітуд  $\vartheta_m, \varphi_m$  коливання основи;
- 2) вони пропорційні частоті  $\omega$  коливань основи у степені на одиницю вищій за порядок точності  $N$  відповідного алгоритму [98].

Все сказане дозволяє описати усі залежності дрейфів від кроку опитування загальною емпіричною формулою [109]

$$\left\langle \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \right\rangle_{\max} = k \cdot \omega^{N+1} \cdot \vartheta_m \cdot \varphi_m \cdot h^N. \quad (4.1)$$

Однак, для дослідження точності методів інтегрування набагато зручніше користуватися безрозмірними величинами. В якості першої приймемо величину  $\delta$  відносного (по відношенню до величини  $\omega\vartheta_m\varphi_m$ ) максимального дрейфу

$$\delta = \frac{1}{\omega\vartheta_m\varphi_m} \left\langle \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \right\rangle_{\max}. \quad (4.2)$$

Другою безрозмірною величиною приймемо так званий «частотний параметр»:

$$\mu = \omega \cdot h. \quad (4.3)$$

Тоді формулу (4.1) можна подати у спрощеному вигляді

$$\delta = k \cdot \mu^N, \quad (4.4)$$

і характеризувати точність будь якого алгоритму лише двома параметрами:

- порядком точності  $N$ ;
- величиною коефіцієнта  $k$ .

Відмітимо, що представлені параметри точності є коефіцієнтами апроксимувальної функції (4.4). Тобто, знаючи їх можна аналітично розрахувати відносний максимальний дрейф  $\delta$  алгоритму інтегрування, який і характеризує точність алгоритму чисельного інтегрування.

У цих нових змінних графіки рис.4.6 набудуть вигляду, наведеному на рис.4.7.



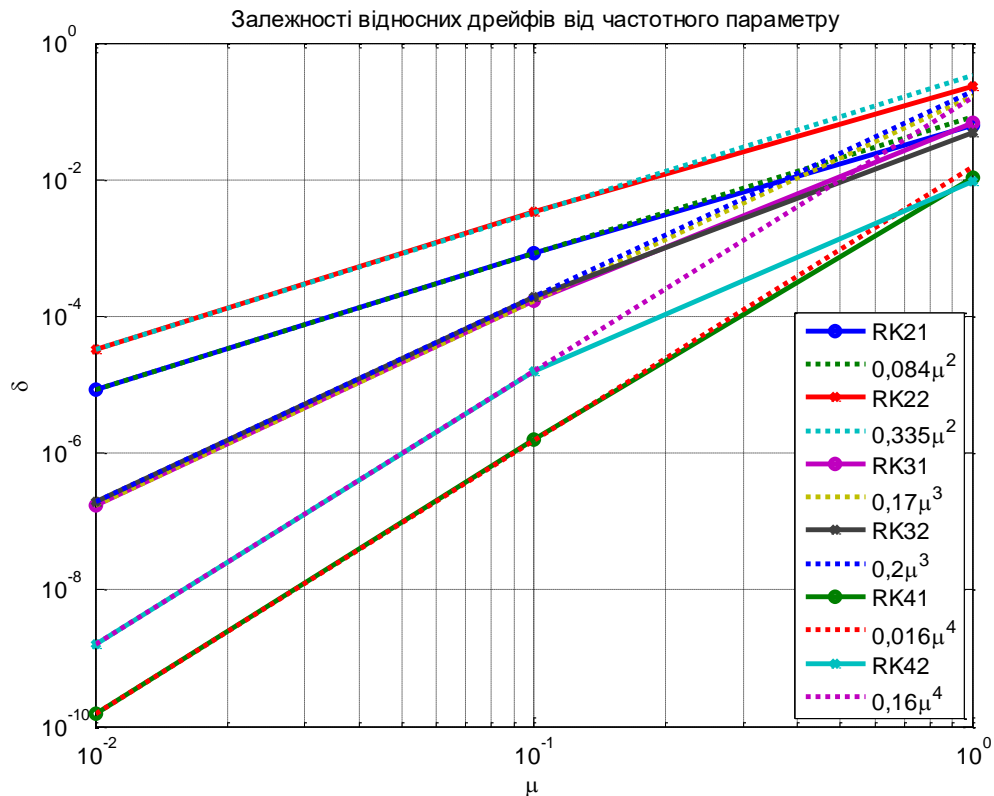


Рис. 4.7 Залежності відносних дрейфів від частотного параметра

На рис.4.7 наведені (пунктиром) апроксимувальні прямі для кожної з побудованих залежностей, які достатньо добре збігаються з експериментальними у діапазоні  $\mu \leq 0,1$ .

Резюмуючи, досліджені алгоритми можна охарактеризувати параметрами, що наведені у Додатку Г в Таблиці Г.1:

Отже, для дослідження точності алгоритмів БІСО необхідно на основі імітаційного моделювання будувати графіки залежності відносних максимальних дрейфів похибок цих алгоритмів при синхронних коливаннях основи навколо двох ортогональних осей від частотного параметра. Саме цей максимальний відносний дрейф і характеризує точність методу. На основі моделювання необхідно знайти два параметри  $N$  і  $k$ , що визначають емпіричну степеневу залежність (4.4) [98, 109].

### 4.3 Дослідження точності алгоритмів чисельного інтегрування

Використовуючи отриману імітаційну модель БІСО та описану методику дослідження точності алгоритмів інтегрування, проведемо дослідження точності відомих та нових розроблених методів. ДКШ може видавати інформацію про проекції кутової швидкості обертання основи, або про приріст квазікоординат на кроці опитування. Для сучасних систем просто організувати отримання інформації про кутову швидкість, тому розглянемо точність алгоритмів чисельного інтегрування саме для цього випадку.

#### 4.3.1 Аналіз точності методів Пікара для векторного рівняння Ейлера

Імітаційне моделювання отриманих формул (3.21), (3.22), (3.23) та (3.24) дозволяє побудувати безрозмірні залежності дрейфів від кроку опитування, які графічно представлено на рис.4.8.

Параметри точності алгоритмів наведено Додатку Г в Таблиці Г.2.

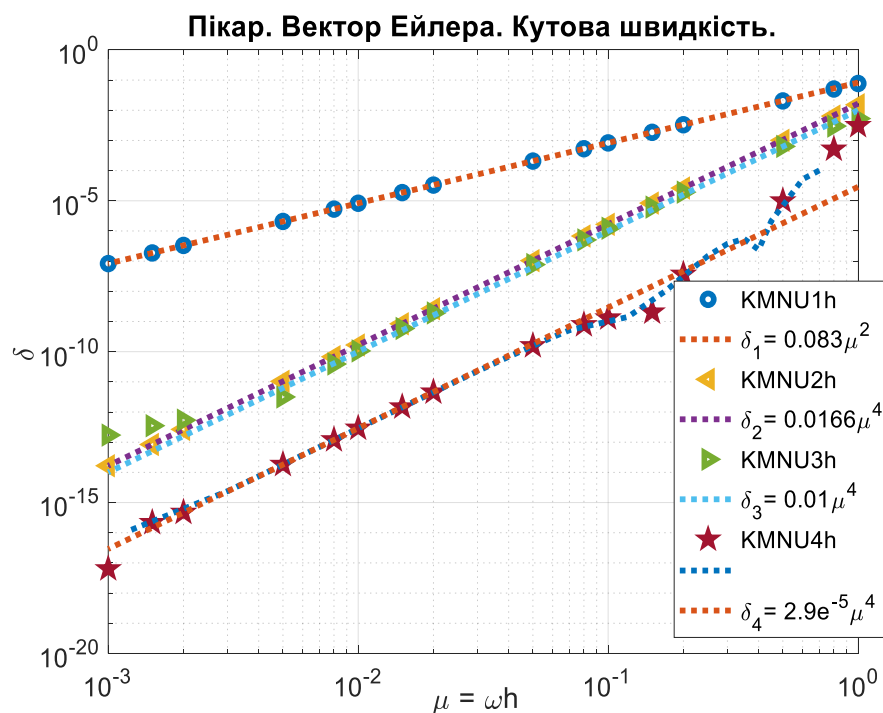


Рис. 4.8 Залежності відносних максимальних дрейфів від частотного параметра

На основі проведеного дослідження можна зробити висновки:

1) показники степеня точності залишаються незмінними у всьому діапазоні частотного параметра лише для алгоритмів KMNU1h та KMNU2h;

спостерігаються деякі незначні відхилення від вказаної залежності за великих і малих значення частотного параметра в алгоритмі KMNU3h;

2) чотирьохкроковий алгоритм KMNU4h має вказані параметри точності лише в діапазоні 0,001...0,1 частотного параметру; ми не можемо прогнозувати його точність за довільної динаміки руху об'єкту, тому він виявляється гіршим за алгоритми KMNU2h та KMNU3h;

3) найбільш точним виявляється двокроковий алгоритм KMNU2h четвертого порядку точності.

#### 4.3.2 Аналіз точності розроблених методів Пікара для рівняння Пуассона

Проведемо імітаційне моделювання для дослідження точності алгоритмів Пікара для рівняння Пуассона.

Результати модельного дослідження точності алгоритмів, що використовують вимірювання кутової швидкості подані у графічній формі на рис. 4.9 – 4.12.

Однокрокові алгоритми. Рівняння Пуассона. Кутові швидкості.

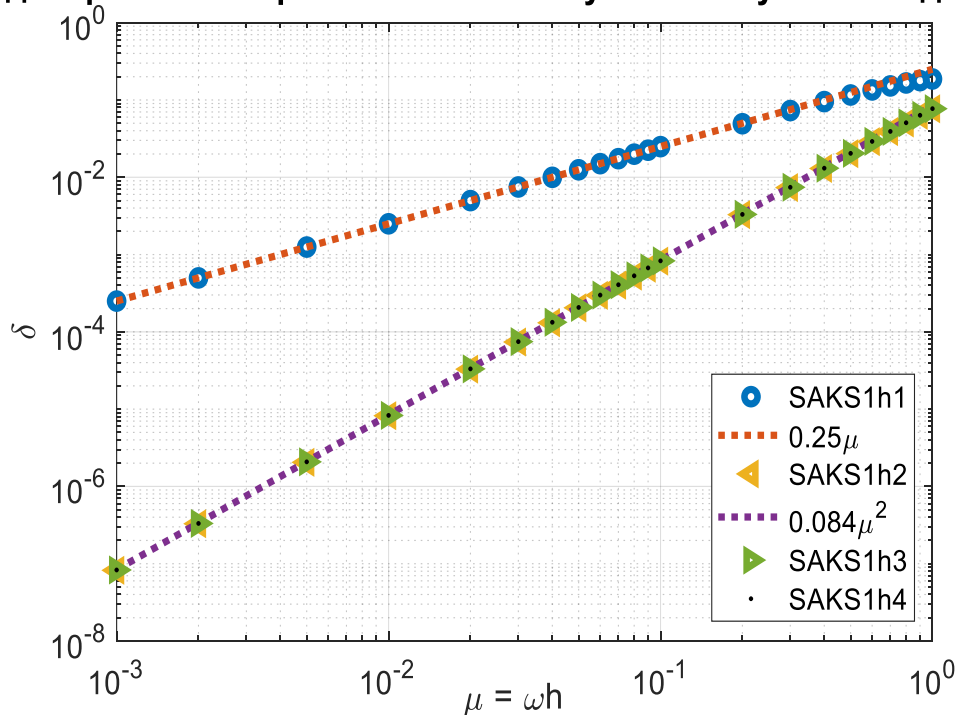


Рис. 4.9 Відносний максимальний дрейф однокрокових алгоритмів

## Двокрокові алгоритми. Рівняння Пуассона. Кутові швидкості.

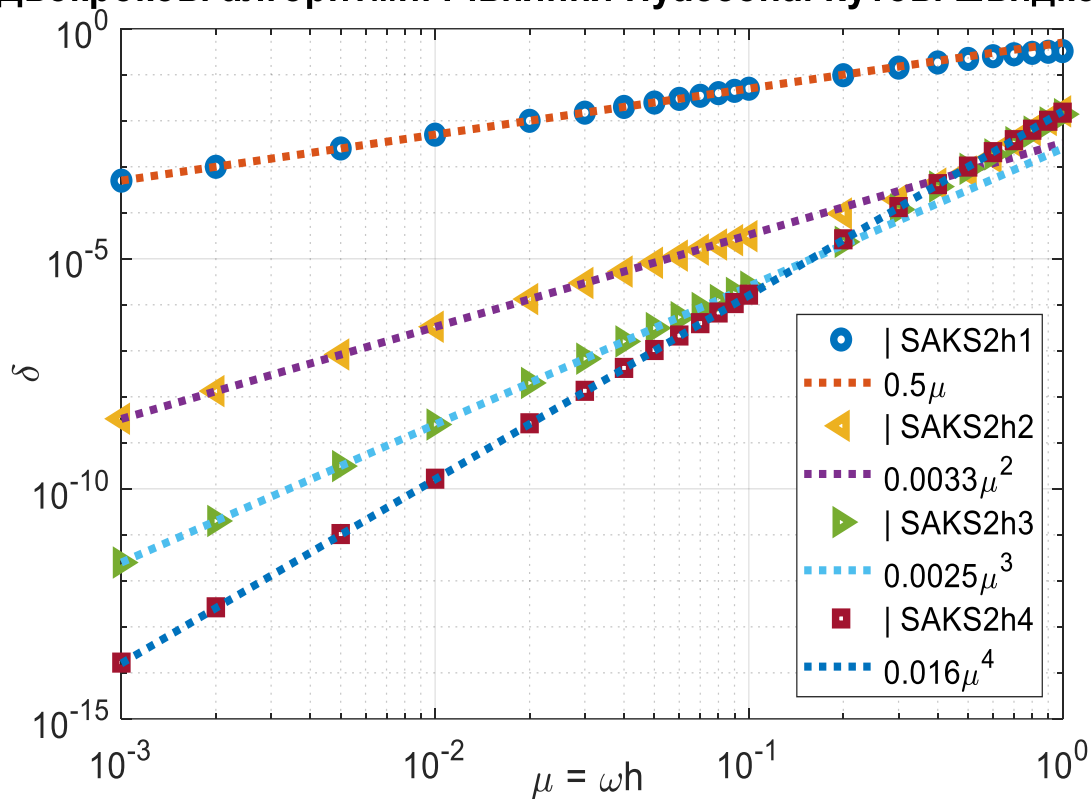


Рис. 4.10 Відносний максимальний дрейф двокрокових алгоритмів

## Трикрокові алгоритми. Рівняння Пуассона. Кутові швидкості.

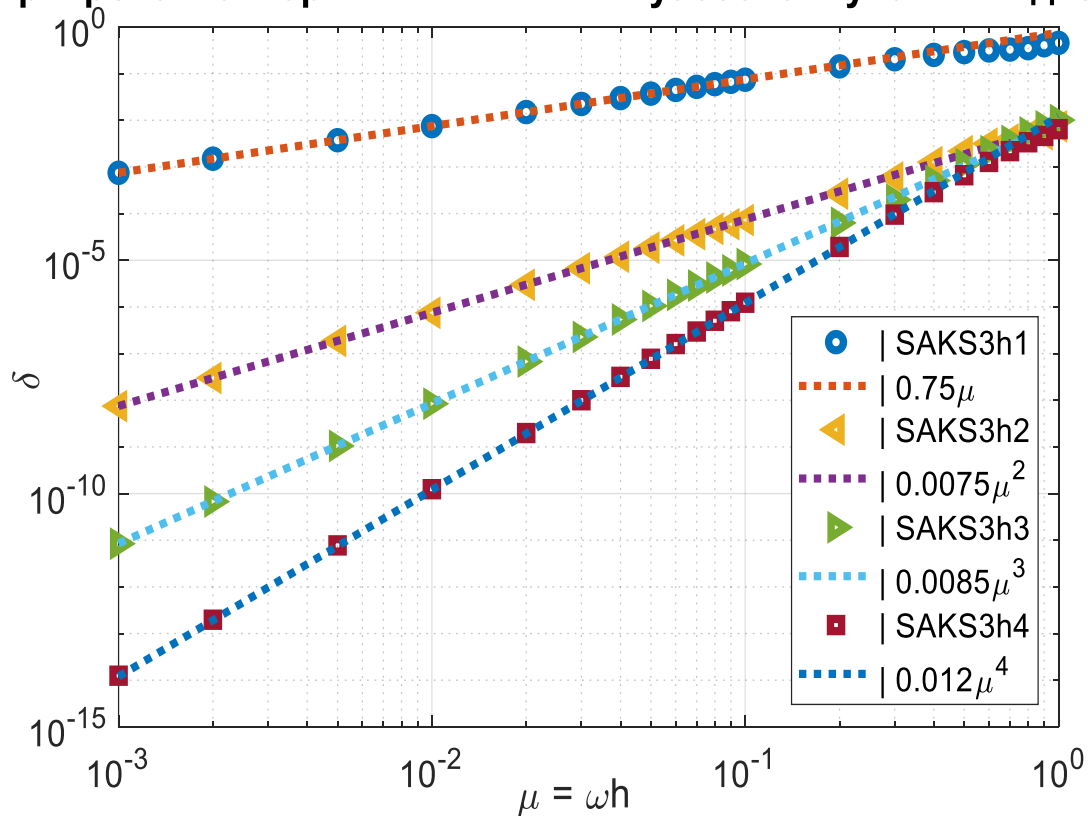


Рис. 4.11 Відносний максимальний дрейф трикрокових алгоритмів

Чотирикрокові алгоритми. Рівняння Пуассона. Кутові швидкості.

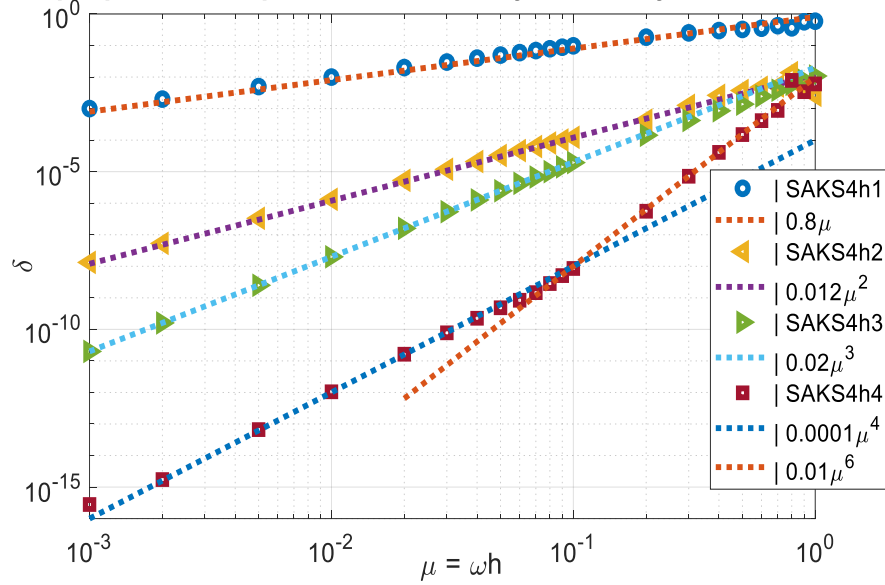


Рис. 4.12 Відносний максимальний дрейф чотирикрокових алгоритмів

На рис.4.9 зображені експериментальні залежності відносних максимальних дрейфів однокрокових алгоритмів. Рис 4.10 представляє аналогічні залежності для двокрокових алгоритмів. На рис.4.11 – трикрокових алгоритмів за формулами (3.33), (3.34), (3.35) та (3.36). і, нарешті, рис.4.12 – чотирикрокових алгоритмів (3.37), (3.38), (3.39) та (3.40).

Представимо на окремих графіках відносні максимальні дрейфи найточніших методів для вимірювання кутових швидкостей (рис.4.13).

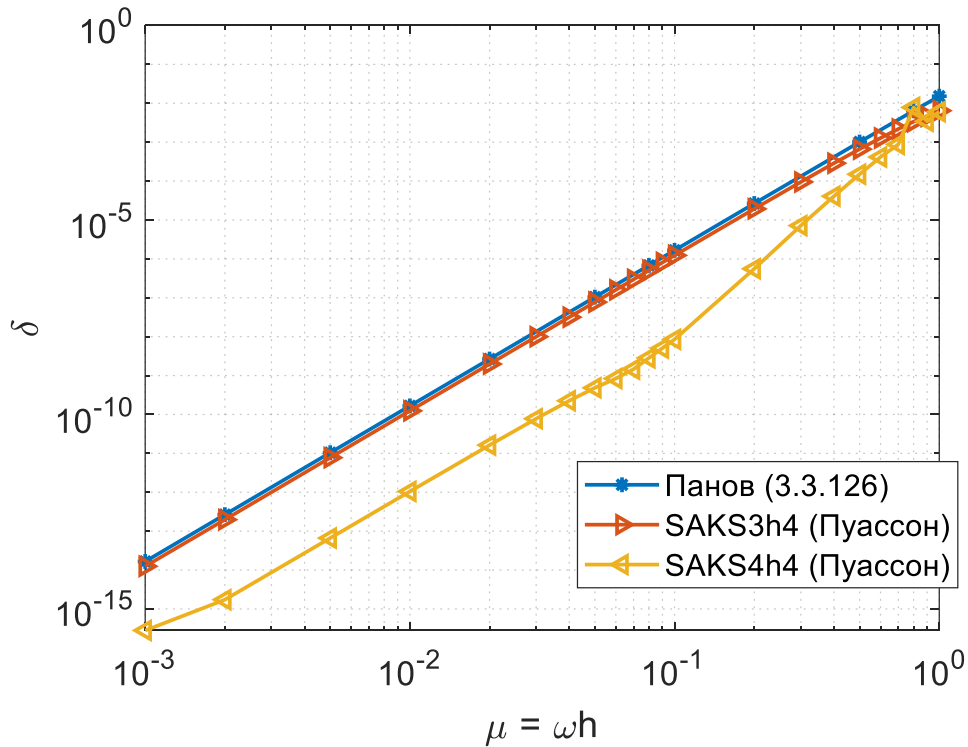


Рис. 4.13 Алгоритмічний дрейф у випадку вимірювання кутових швидкостей

На основі отриманих графіків можна знайти параметри точності досліджених алгоритмів. Відповідні таблиці наведені у Додатку Г в Табл.Г.3–7.

У роботі [109] проведено порівняння точності методів прогнозу-корекції та Пікара для рівняння Пуассона. Результати наведено у Додатку Г в Табл.Г.8.

Отримані результати дозволяють зробити такі висновки:

- точність однокрокових алгоритмів другого порядку для рівняння Пуассона і KMNU1h (3.21) практично однакова;
- точність двокрокового алгоритму четвертого порядку для рівняння Пуассона перевищує точність двокрокового алгоритму KMNU2h (3.22) у 5 разів;
- точності трикрокових алгоритмів SAKS3h3 (3.35) KMNU3h (3.23) є близькими;
- чотирікроковий алгоритм SAKS4h4 (3.40) стрімко втрачає точність при збільшенні частотного параметру більше 0,1 (рис.4.13). Ця обставина не дозволяє гарантувати його точність при довільній динаміці об'єкту. Крім того, він вимагає виконання найбільшої кількості обчислень;
- чотирікроковий алгоритм SAKS3h4 (3.36) є найкращим за точністю серед усіх розглянутих алгоритмів;

З рис.4.19 видно, що трикроковий алгоритм інтегрування кінематичного рівняння Пуассона точніший на усьому діапазоні зміни частотного параметру. Проте для більшої наочності знайдемо у відсотках наскільки новий метод точніший за алгоритм Панова (3.3.126). результати представлені на рис.4.14.

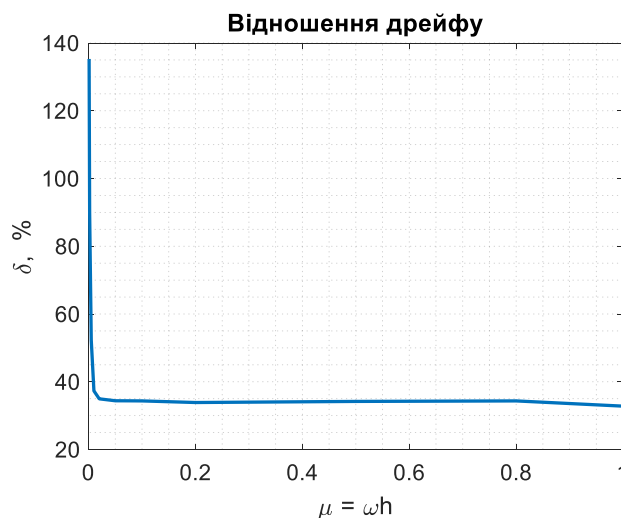


Рис.4.14 Відношення дрейфу метода Панова до метода Пікара (3.36)

Аналізуючи результати, представлені на рис.4.14 можна побачити, що трикроковий алгоритм Пікара для рівняння Пуассона в області середніх і високих значень частотного параметра (а при визначеному  $h$  в області середніх і високих частот), майже на 35% точніший.

Виходячи із аналізу точності алгоритмів, трикроковий алгоритм четвертого порядку для кінематичного рівняння Пуассона з роботи [98] доцільно використовувати при синтезі алгоритмічного забезпечення БІСО.

### ***4.3 Уточнення моделі алгоритмічного дрейфу процедури чисельного інтегрування***

Емпірична формула (4.1) та її безрозмірна форма (4.4), описана у роботах [98, 103], можуть використовуватись при аналізі точності алгоритмів чисельного інтегрування. Оскільки формула (4.1) фактично описує суто алгоритмічний дрейф БІСО під час кінцевого руху основи, до доцільно спробувати застосувати її до компенсації цієї похибки. І справді, якщо дрейф залежить лише від порядку методу, кроку опитування датчиків (що є сталими, визначеними величинами для системи), а також від частоти та амплітуд кінцевого руху, то цілком можна реалізувати таку компенсацію.

Провівши аналіз цієї проблеми, було встановлено, що при збільшенні частоти кутового руху основи, за умови незмінності інших параметрів, дрейф, що розраховується за формулою (4.1) розходиться із результатами моделювання, як показано на рис.4.15. Для трикрокового методу Пікара четвертого порядку інтегрування кінематичного рівняння Пуассона (3.36) коефіцієнти моделі (4.4) наступні:  $N = 4$  та  $k = 0,012$ .

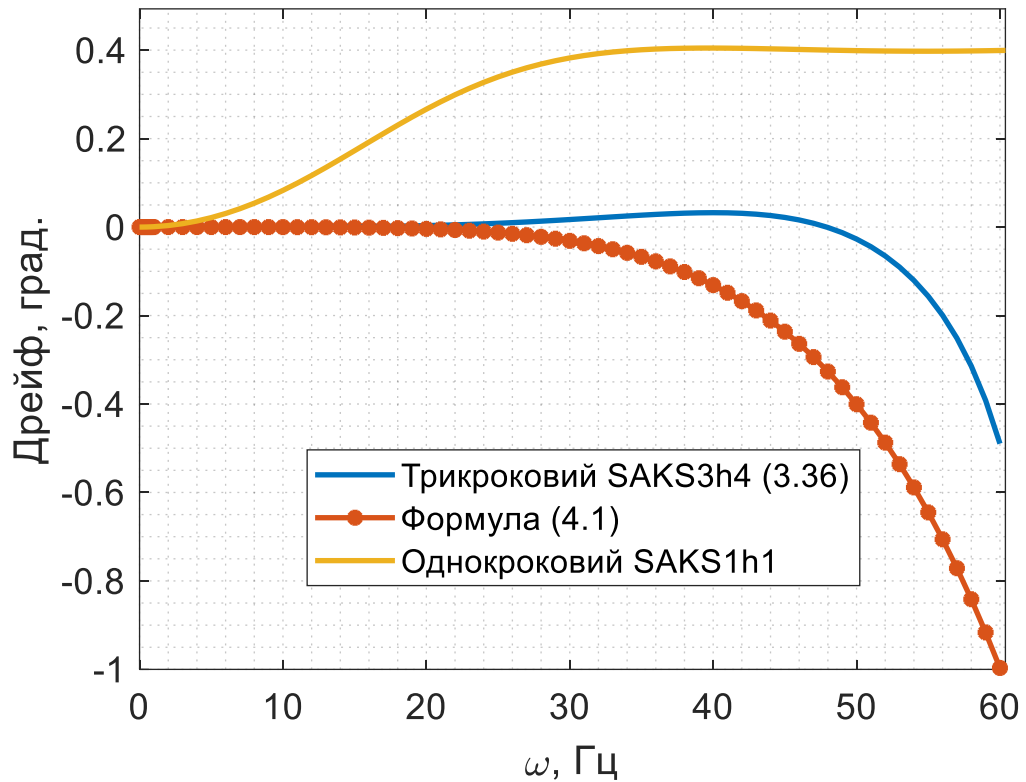


Рис.4.15 Алгоритмічний дрейф БІСО при збільшенні частоти кутового руху

Моделювання проводилося для найточнішого алгоритму SAKS3h4 та одного з найгірших однокрокового алгоритму SAKS1h1. При цьому використовувався типовий крок опитування датчиків  $h=0,005\text{ c}$  (200Гц). Моделювався конічний рух основи зі сталими амплітудами  $\vartheta_m = \varphi_m = 1^\circ$  та зсув фази коливання  $\varepsilon = 90^\circ$ .

З рис.4.15 видно: по-перше, що при частотах коливання основи більших за 15 Гц, величина алгоритмічного дрейфу сягає значень, що наближаються до точності прецизійних ДКШ і алгоритмічна компенсація необхідна; а по-друге, що зі збільшенням частоти коливання основи, формула (4.1) не описує дрейф адекватно – похибка стрімко накопичується. Окремо відмітимо надзвичайно великий алгоритмічний дрейф методу низької точності. Вже за частот, близьких до 5 Гц він сягає величин, що перевищують похибки високоточних ДКШ. Зрозуміло, що для забезпечення високої точності БІСО у випадках високоманеврених об'єктів такі методи застосовувати не можна.



Доречно провести більш ґрунтовне дослідження конічного руху і алгоритмічного дрейфу БІСО. Для цього розширимо модель дрейфу поліномом п'ятого порядку, оскільки з (4.1) випливає, що порядок дрейфу визначається порядком алгоритму методу інтегрування  $N+1$ :

$$\left\langle \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \right\rangle = a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + e\omega^4 + f\omega^5, \quad (4.5)$$

де коефіцієнти  $a, b, c, d, e$  та  $f$  є степеневими функціями і залежать від амплітуди конічного руху. Для спрощення моделі будемо вважати, що амплітуда коливань однакова по обох кутах  $\mathcal{G}_m = \varphi_m$ . Тоді коефіцієнти визначаються як:

$$\begin{aligned} a &= \xi_{11} + \xi_{12}\mathcal{G}_m + \xi_{13}\mathcal{G}_m^2 + \xi_{14}\mathcal{G}_m^3; \\ b &= \xi_{21} + \xi_{22}\mathcal{G}_m + \xi_{23}\mathcal{G}_m^2 + \xi_{24}\mathcal{G}_m^3; \\ c &= \xi_{31} + \xi_{32}\mathcal{G}_m + \xi_{33}\mathcal{G}_m^2 + \xi_{34}\mathcal{G}_m^3; \\ d &= \xi_{41} + \xi_{42}\mathcal{G}_m + \xi_{43}\mathcal{G}_m^2 + \xi_{44}\mathcal{G}_m^3; \\ e &= \xi_{51} + \xi_{52}\mathcal{G}_m + \xi_{53}\mathcal{G}_m^2 + \xi_{54}\mathcal{G}_m^3; \\ f &= \xi_{61} + \xi_{62}\mathcal{G}_m + \xi_{63}\mathcal{G}_m^2 + \xi_{64}\mathcal{G}_m^3; \end{aligned} \quad (4.6)$$

З (4.6) видно, що рівняння коефіцієнтів можна записати у матричному вигляді як:

$$a = \xi_a \cdot \mathcal{G}_a, \quad (4.7)$$

$$\text{де } \xi_a = [\xi_{11} \quad \xi_{12} \quad \xi_{13} \quad \xi_{14}], \quad \mathcal{G}_a = [1 \quad \mathcal{G}_m \quad \mathcal{G}_m^2 \quad \mathcal{G}_m^3]^T.$$

Фактично коефіцієнт  $a$  є величиною алгоритмічного дрейфу інтегрування при відсутності конічного руху і залежать від амплітуди  $\mathcal{G}_m$ . Для знаходження матриці коефіцієнтів  $\xi_a$  рівняння (4.7) використаємо метод найменших квадратів, при цьому необхідно мати матрицю із дрейфів  $a$  за відповідних амплітуд  $\mathcal{G}_m$ :

$$\xi_a = a \cdot \mathcal{G}_a^T \cdot (\mathcal{G}_a \cdot \mathcal{G}_a^T)^{-1} \quad (4.8)$$

Аналогічно за (4.8) можна розрахувати коефіцієнти  $\xi_{ij}$  для решти коефіцієнтів рівняння (4.6).

Схожий підхід можна застосувати і для розв'язання рівняння (4.5). У цьому випадку коефіцієнти  $a, b, c, d, e$  та  $f$  будуть дрейфами алгоритмів за сталих амплітуд при змінних частотах.

Перепишемо рівняння (4.5) у матричному вигляді:

$$Dr = A \cdot \Omega,$$

де позначено  $Dr$  – матриця дрейфів алгоритмів за різних частот руху,

$$A = [a \ b \ c \ d \ e \ f] \text{ і } \Omega = [1 \ \omega \ \omega^2 \ \omega^3 \ \omega^4 \ \omega^5]^T.$$

Отримавши матрицю дрейфів  $Dr$  для ряду частот  $\omega$ , можна знайти невідомі коефіцієнти методом найменших квадратів:

$$A = Dr \cdot \Omega^T \cdot (\Omega \cdot \Omega^T)^{-1} \quad (4.9)$$

Відповідно до вищеописаної методики було проведено серію модельних експериментів та встановлено значення коефіцієнтів розширеної апроксимувальної моделі алгоритмічного дрейфу (4.5). Значення коефіцієнтів  $\xi_{ij}$  наведено нижче:

$$\begin{aligned} \xi_a &= [\xi_{11} \ \xi_{12} \ \xi_{13} \ \xi_{14}] = [-1.1532e-5 \ 3.8547e-3 \ -2.8303e-2 \ 4.4830e-2]; \\ \xi_b &= [\xi_{21} \ \xi_{22} \ \xi_{23} \ \xi_{24}] = [1.5232e5 \ -5.1061e-3 \ 2.3881e-2 \ 1.0271e-2]; \\ \xi_c &= [\xi_{31} \ \xi_{32} \ \xi_{33} \ \xi_{34}] = [-2.3971e-6 \ 8.0317e-4 \ -1.3417e-5 \ -1.9246e-2]; \\ \xi_d &= [\xi_{41} \ \xi_{42} \ \xi_{43} \ \xi_{44}] = [1.2722e-7 \ -4.2547e-5 \ -3.3327e-4 \ 2.4045e-3]; \\ \xi_e &= [\xi_{51} \ \xi_{52} \ \xi_{53} \ \xi_{54}] = [-2.6663e-9 \ 8.8869e-7 \ 2.0392e-5 \ -9.5610e-5]; \\ \xi_f &= [\xi_{61} \ \xi_{62} \ \xi_{63} \ \xi_{64}] = [1.8558e-11 \ -6.1483e-9 \ -2.9614e-7 \ 1.2234e-6]; \\ A &= [a \ b \ c \ d \ e \ f] = [4.7362e-5 \ -6.6557e-5 \ 1.1514e-5 \ -7.0410e-7]. \end{aligned}$$

Маючи значення коефіцієнтів моделі (4.5) можна порівняти її із формулою (4.1). Для цього проведемо програмне моделювання БІСО для такого ж руху основи:  $\vartheta_m = \varphi_m = 1^0$ , зсув фази коливання  $\varepsilon = 90^0$ . Крок опитування датчиків залишається  $h=200$  Гц. Результати наведені на рис.4.16.

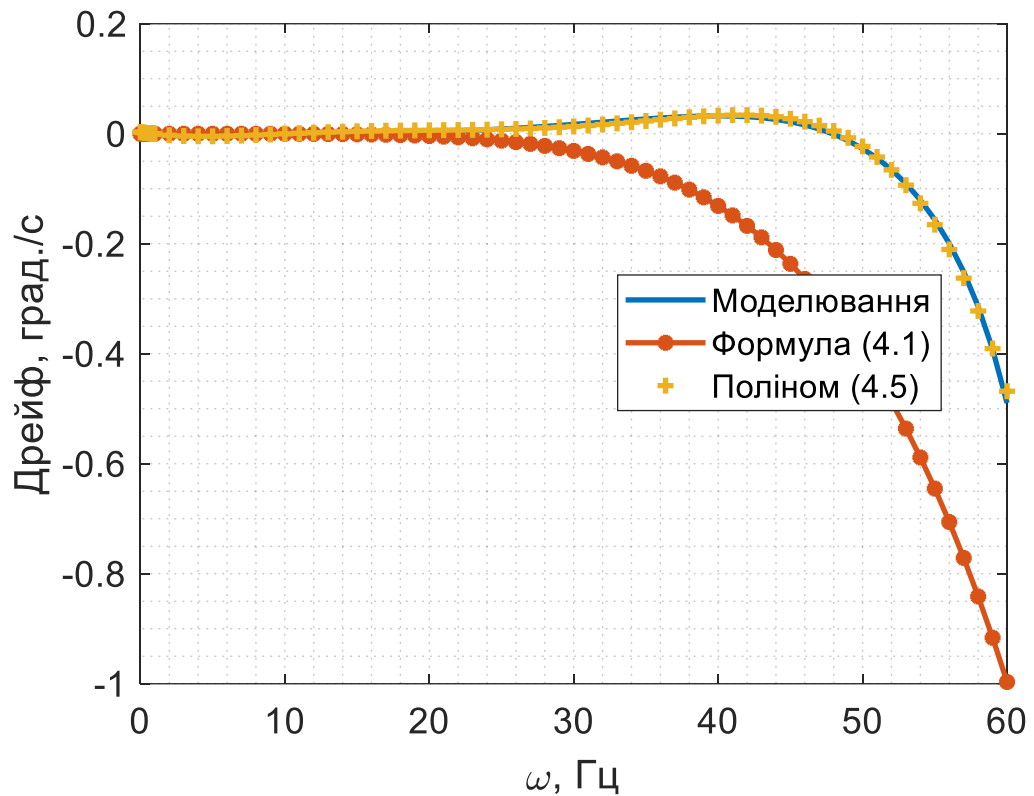


Рис.4.16 Алгоритмічний дрейф БІСО

З рис.4.16 видно, що вибрана модель кінчного дрейфу (4.5) точніше повторює результати моделювання на високих частотах. Проте, збільшивши рис.4.16 в області частот до 15 Гц, як показано на рис.4.17, можна побачити, що дрейф за поліномом (4.5) має набагато більші значення за формулу (4.1).

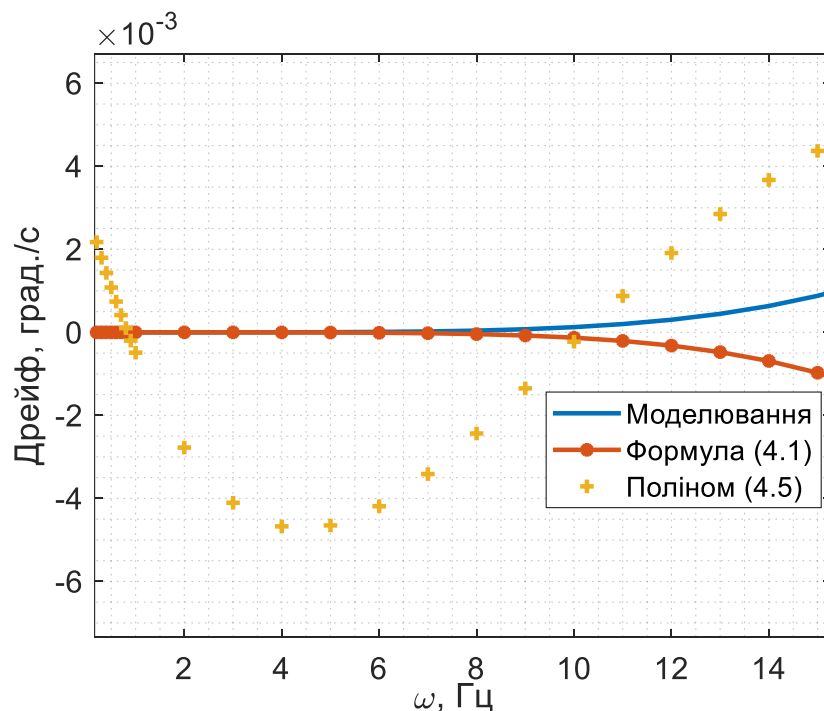


Рис.4.17 Алгоритмічний дрейф БІСО на частотах менше 15 Гц

З результатів наведених на рис.4.16 та 4.17 необхідно встановити якість оцінювання алгоритмічного дрейфу моделями (4.1) та (4.5). Для цього знайдемо відношення величини алгоритмічного дрейфу до розрахованого значення за апроксимаційними моделями (4.1) та (4.5). Результати наведені на рис.4.18.

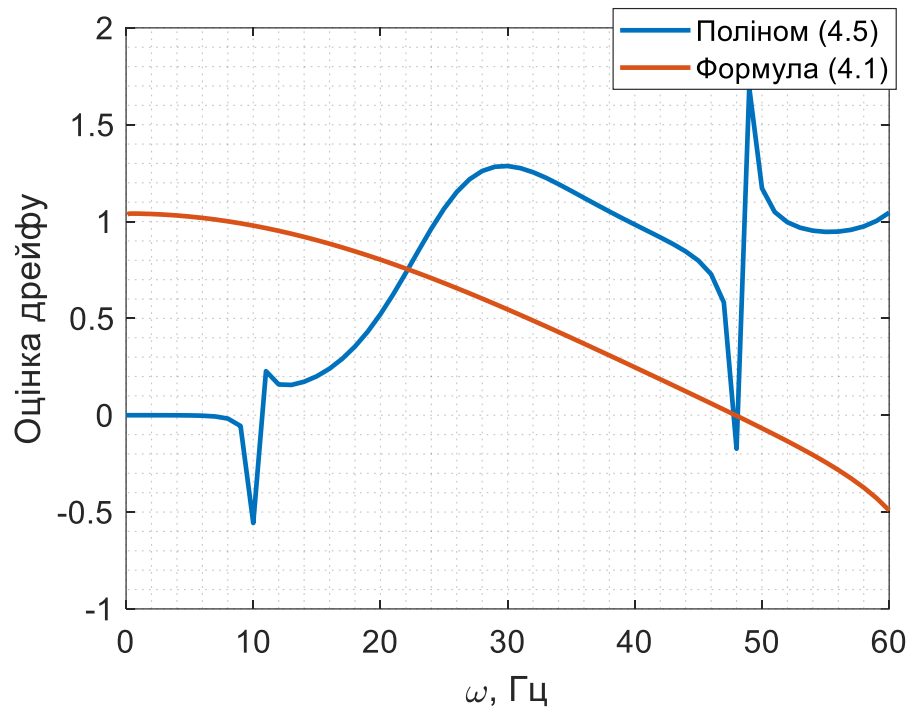


Рис.4.18 Відношення апроксимованих дрейфів до емпіричного

З отриманих результатів видно, формула (4.1) краще описує алгоритмічний дрейф методу інтегрування на низьких частотах, а поліном п'ятого степеня (4.5) – на високих. Доречно використати підхід (4.5) та уточнити формулу (4.1).

Для цього у формулі (4.5) залишимо член шостого порядку, оскільки емпірична модель (4.1) має п'ятий порядок і її точність достатня для низьких частот:

$$K_{dr} = g \cdot \mathcal{G}_m \cdot \varphi_m \cdot h^N \cdot \omega^{N+2}, \quad (4.10)$$

Тоді уточнена формула для кінчного дрейфу БІСО набуде вигляд

$$\left\langle \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \right\rangle_{\max} = k \cdot \omega^{N+1} \cdot \mathcal{G}_m \cdot \varphi_m \cdot h^N + K_{dr}. \quad (4.11)$$

Для оцінки коефіцієнта  $g$  для  $K_{dr}$  з формули (4.11) використовувався набір даних, що являється різницею між алгоритмічним дрейфом, отриманим в результаті моделювання та емпіричною моделлю (4.1).

Відмітимо, що за формулою (4.11) стало можливим відмовитись від модуля дрейфу – уточнюючий коефіцієнт  $K_{dr}$  враховує знак алгоритмічного дрейфу БІСО.

Для вибраного трикрокового алгоритму Пікара четвертого порядку (3.36) коефіцієнт  $g$  становить  $-5,1994 \cdot 10^{-13}$ .

Проведемо імітаційне моделювання та порівняємо точність отриманої методики (4.11) (Рис.4.19).

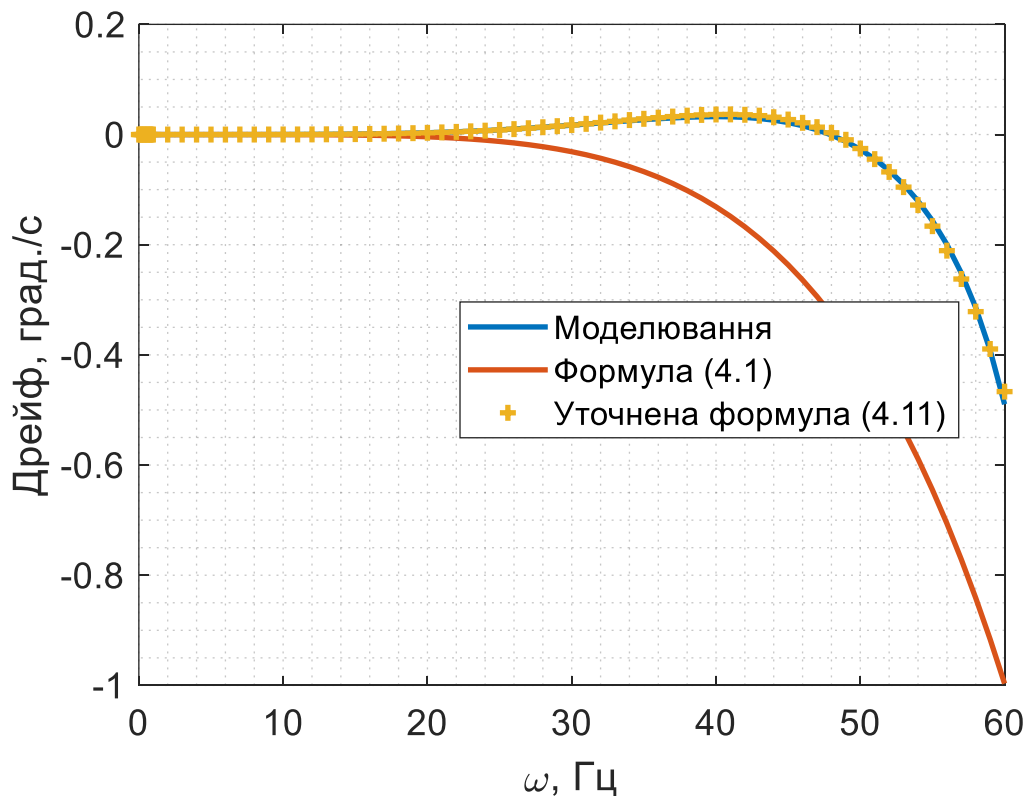


Рис.4.19 Похибка БІСО за кінчного руху основи

Апроксимування поліномом п'ятого степеня (4.5) призвело до неадекватного розрахунку алгоритмічної похибки у низькочастотній області. Перевіримо результати апроксимації за уточненою залежністю (4.11) в області низьких частот (Рис.4.20).

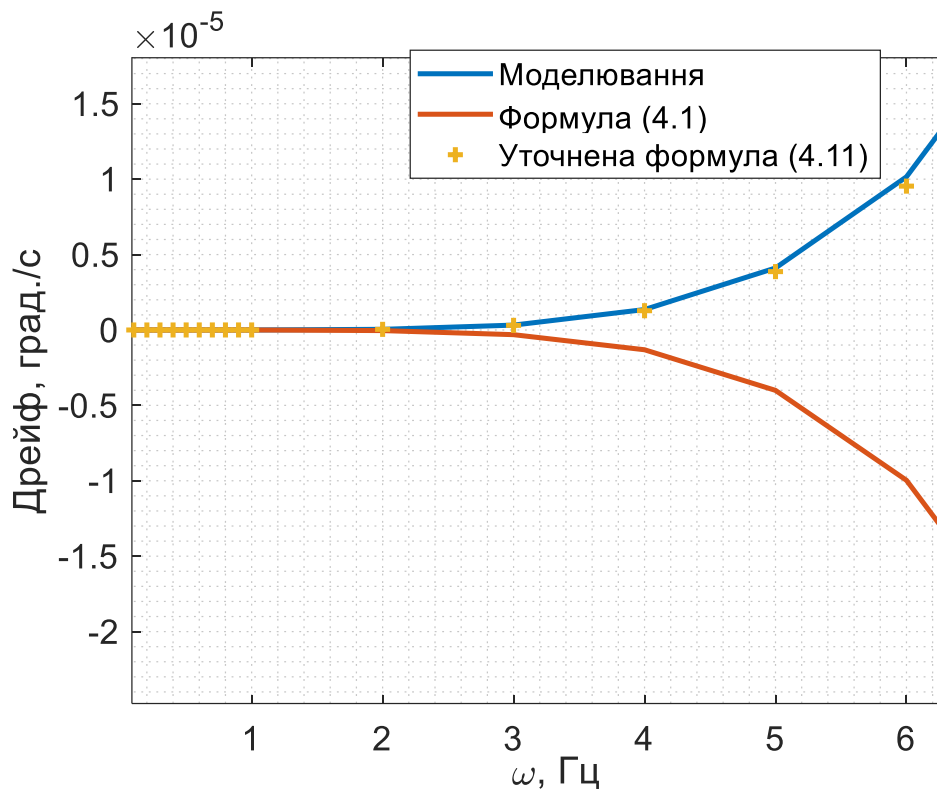


Рис.4.20 Алгоритмічна похибка БІСО

З рис.4.19 та 4.20 видно, що уточнена формула (4.11) з високою точністю повторює алгоритмічний дрейф БІСО на усьому діапазоні розглянутих частот. Проте, для кращої оцінки якості апроксимації за (4.11) знайдемо відношення емпіричного дрейфу до апроксимованого.

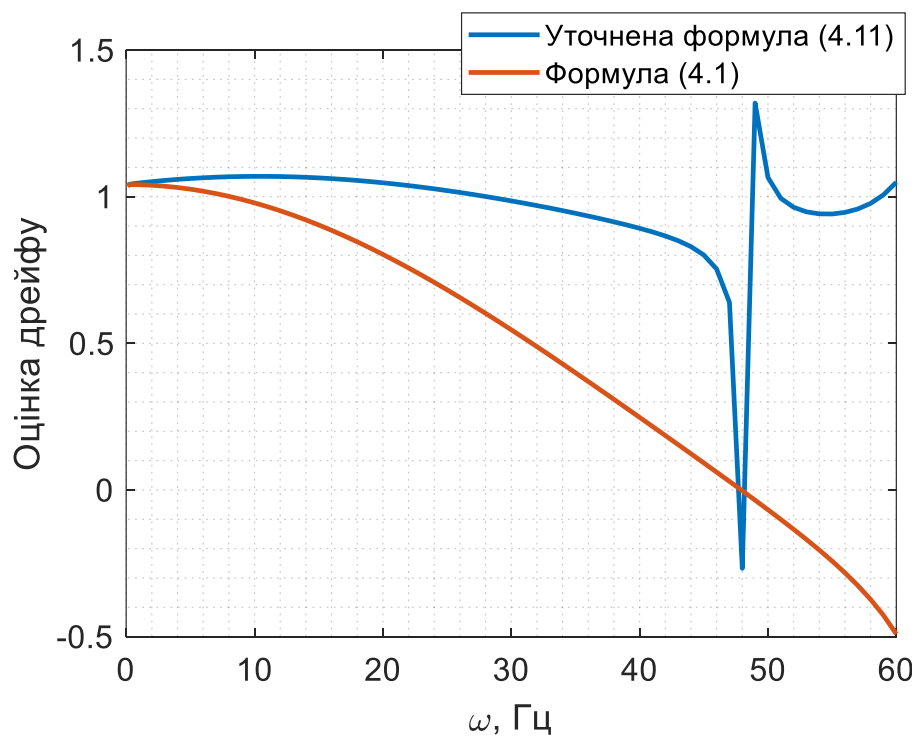


Рис.4.21 Відношення апроксимованих дрейфів до емпіричного. Уточнена модель

З рис.4.21 видно, що уточнена апроксимувальна модель (4.11) краще описує алгоритмічний дрейф трикрокового методу четвертого порядку Пікара для рівняння Пуассона (3.36). Знаючи параметри руху основи, можна провести компенсацію цього алгоритмічного дрейфу.

Використовуючи модель алгоритмічного дрейфу БІСО (4.11) можна запропонувати методику корекції цієї похибки системи: *при появі кінчного руху основи необхідно визначити його амплітуди і частоту, розрахувати за (4.11) алгоритмічний дрейф для конкретного методу інтегрування та відняти це значення від кута, навколо якого основа не рухається.*

Для прикладу роботи такої методики проведемо імітаційне моделювання БІСО за такого руху основи: амплітуда коливань  $\vartheta_m = \varphi_m = 1^\circ$ , частота  $\nu = 20 \text{ Гц}$  зсув фази коливання  $\varepsilon = 90^\circ$ . Результати наведені на рис.4.22.

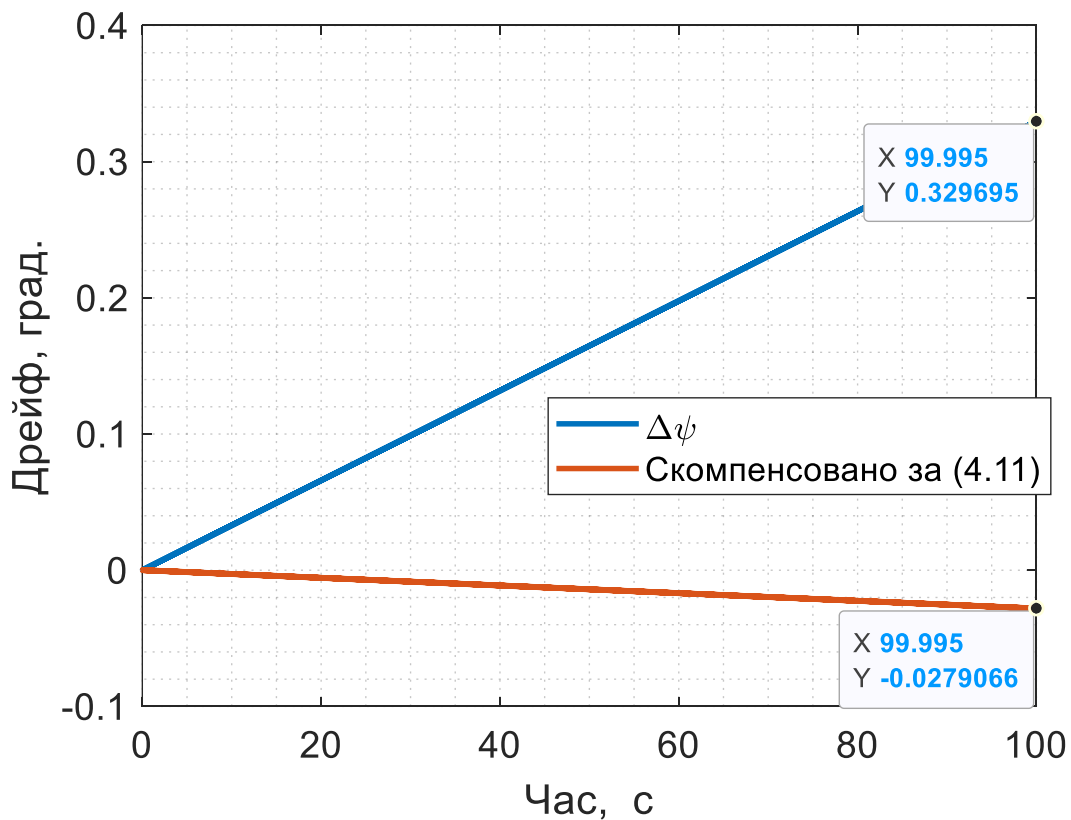


Рис.4.22 Компенсація кінчного дрейфу БІСО

З рис.4.22 видно, що запропонована методика дозволила компенсувати алгоритмічний дрейф БІСО більше ніж на порядок.

## Висновки по розділу 4

Четвертий розділ присвячено дослідженню точності методів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації БІСО. Для цього було створено імітаційну модель системи у середовищі Matlab, що дозволила порівняти відомі та розповсюджені методи, а також методи Пікара для матричного рівняння Пуассона. Шляхом моделювання за умови конічного руху основи було отримано максимальні значення алгоритмічних дрейфів методів інтегрування.

Було виконано порівняння нових методів Пікара для кінематичного рівняння Пуассона: трикрокового і чотирікрокового з відомими алгоритмами А.П. Панова для вектору єдиного повороту Ейлера, що мають дуже широке розповсюдження у безплатформних навігаційних системах високого класу точності.

За результатами імітаційного моделювання встановлено що:

- трикроковий метод четвертого порядку для матричного рівняння Пуассона виявився точнішим за двокроковий алгоритм Панова четвертого порядку в межах 35% у широкому діапазоні частот. Відмітимо, що точність даного методу не деградує при високих частотах руху об'єкту, враховуючи його помірну обчислювальне навантаження.

- чотирікроковий метод четвертого порядку для рівняння Пуассона виявився точнішим за двокроковий алгоритм Панова четвертого порядку приблизно у 150 разів. Проте, його точність значно деградує у високочастотній області руху при найбільшій кількості обчислень на кроці інтегрування.

Було встановлено, що для об'єктів з високою кутовою динамікою та тих, що працюють в умовах високочастотної кутової вібрації, алгоритмічний дрейф внаслідок конічного руху може сягати значень, що наближаються та навіть перевищують точність прецизійних ДКШ. Було отримано апроксимаційну модель, що з високою точністю описує цей алгоритмічний дрейф. Запропоновано методику компенсації цього конічного дрейфу, що дозволяє зменшити його величину до 80% у діапазоні до 40 Гц.



## РОЗДІЛ 5.

### СИНТЕЗ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ

У попередніх розділах було показано нові підходи до проведення калібрування інерціальних вимірювачів БІСО та досліджено нові високоточні алгоритми чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації. Ці наробки можна використати для синтезу алгоритму повноцінної БІСО.

Робота системи показана на рис.5.1.

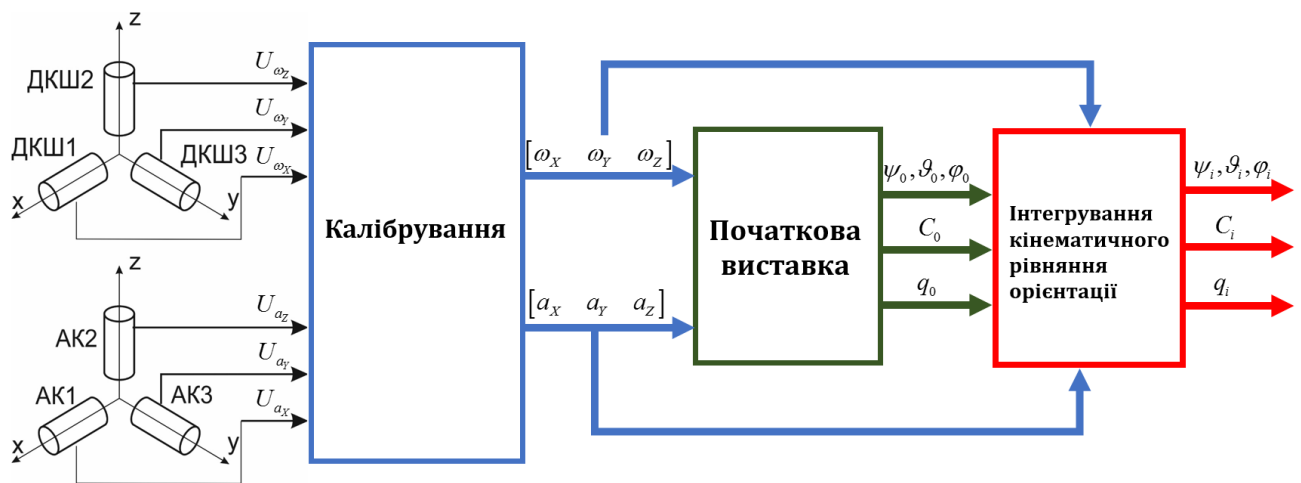


Рис.5.1 Безплатформна інерціальна система орієнтації

Сигнали з датчиків кутової швидкості та акселерометрів проходять калібрування за (2.1) та (2.5). Калібрувальні коефіцієнти знаходяться за більш точною методикою просторового калібрування використовуючи (2.16) та (2.21). Відкалібрований таким чином сигнал ІВМ використовується у наступних підсистемах БІСО.

Для розробленої у четвертому розділі імітаційної моделі БІСО у якості початкових значень для чисельного інтегрування використовувалися задані користувачем кінематичні параметри (кути орієнтації, матриця напрямних косинусів, тощо). Проте початкова орієнтація ІВМ в реальності, як правило, невідома. Для її визначення необхідно провести процедуру початкової виставки БІСО. Методи і алгоритми початкової виставки будуть представлені нижче.

Маючи відкалібровані сигнали ІВМ, а також знаючи початкову орієнтацію системи можна реалізувати чисельне інтегрування кінематичного рівняння орієнтації за дослідженими алгоритмами.

Розробка цієї БІСО спиралася на роботи [102, 104, 120–124] у яких було описано системи орієнтації на мікромеханічних ЧЕ та КЛГ. Створений програмний алгоритм захищено авторськими свідоцтвами України на твір [125–127].

## ***5.1 Початкова виставка безплатформних систем***

Початкова виставка має із заданою точністю визначати початкову кутову орієнтацію ІВМ об'єкта відносно базової системи координат. Початкова виставка виконується за сигналами ІВМ та додатковою зовнішньою інформацією про координати об'єкта. Розглянемо початкову виставку БІСО на нерухомій основі. У випадку безплатформних систем, груба виставка за структурою схожа на гірокомпасування та горизонтування платформних інерціальних навігаційних систем і описана у роботах [2, 15], проте у випадку безплатформних систем вона виконується аналітично.

### ***5.1.1 Базовий алгоритм грубої початкової виставки***

Розглянемо базову початкову систему координат  $X_0Y_0Z_0$  та жорстко зв'язану з об'єктом систему  $X_1Y_1Z_1$ . Припустимо, що осі чутливості ІВМ співпадають з  $X_1Y_1Z_1$ . Зв'язана СК нахилена відносно базової на кути рискання  $\psi$ , тангажу  $\vartheta$  і крену  $\varphi$  як показано на рис.5.2.

Зв'язок між осями  $X_1Y_1Z_1$  та  $X_0Y_0Z_0$  можна описати через МНК:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

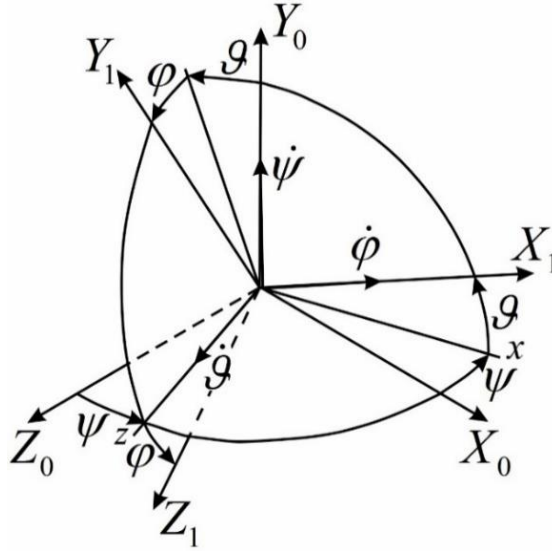


Рис.5.2 Орієнтація зв'язаної СК відносно базової

Матриця напрямних косинусів з (5.1) має вигляд:

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi & \cos \varphi \cos \vartheta & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \vartheta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Цю ж матрицю можна записати у вигляді:

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Для кінематики на рис.5.2 отримаємо проекції прискорення сили тяжіння, що вимірюються ортогональними акселерометрами ІВМ:

$$\begin{bmatrix} a_{X_1} \\ a_{Y_1} \\ a_{Z_1} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Із матричного рівняння (5.4) отримаємо [46]:

$$a_{X_1} = -c_{12}g, \quad a_{Y_1} = -c_{22}g, \quad a_{Z_1} = -c_{32}g.$$

Тоді перші три елементи МНК можна отримати із співвідношень:

$$c_{12} = -\frac{a_{X_1}}{g}, \quad c_{22} = -\frac{a_{Y_1}}{g}, \quad c_{32} = -\frac{a_{Z_1}}{g}. \quad (5.5)$$

Отримаємо проекції кутової швидкості обертання Землі, що вимірюються ортогональними гіроскопами IBM. Припустимо, що вісь  $X_0$  направлена на північ:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{X_1} \\ \Omega_{Y_1} \\ \Omega_{Z_1} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} \Omega \cos B_0 \\ \Omega \sin B_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

де  $\Omega$  – кутова швидкість обертання Землі,  $B_0$  – початкова широта.

Із рівняння (5.6) можна отримати проекції кутової швидкості IBM

$$\Omega_{X_1} = c_{11}\Omega \cos B_0 + c_{12} \cdot \Omega \sin B_0,$$

$$\Omega_{Y_1} = c_{21}\Omega \cos B_0 + c_{22} \cdot \Omega \sin B_0,$$

$$\Omega_{Z_1} = c_{31}\Omega \cos B_0 + c_{32} \cdot \Omega \sin B_0.$$

Тоді наступні три елементи МНК будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{\Omega \cos B_0} (\omega_{X_1} - c_{12} \Omega \sin B_0), \\ c_{21} &= \frac{1}{\Omega \cos B_0} (\omega_{Y_1} - c_{22} \Omega \sin B_0), \\ c_{31} &= \frac{1}{\Omega \cos B_0} (\omega_{Z_1} - c_{32} \Omega \sin B_0). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оскільки МНК ортогональна, то решту елементів можна знайти, використовуючи співвідношення:

$$\begin{aligned} c_{13} &= c_{21}c_{32} - c_{31}c_{22}, \\ c_{23} &= c_{31}c_{12} - c_{11}c_{32}, \\ c_{33} &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Якщо відомо усі елементи матриці напрямних косинусів то задача початкової виставки вирішена. Інколи необхідно знайти початкові значення кутів нахилу зв'язаної СК. Це легко зробити знаючи елементи МНК:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \arctg \left( -\frac{c_{13}}{c_{11}} \right), \\ \vartheta_0 &= \arcsin c_{12}, \\ \varphi_0 &= \arctg \left( -\frac{c_{32}}{c_{22}} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Перший вираз із (5.9) представляє собою аналітичне визначення початкового кута рискання, який чисельно дорівнює азимуту або курсу, але протилежно направлений. Цей вираз фактично реалізує процедуру аналітичного гірокомпасування. Друга і третя формули визначають початкове відхилення ІВМ від площини горизонту, що реалізує аналітичне горизонтування.

На рис.5.3 представлено базовий алгоритм початкової виставки.

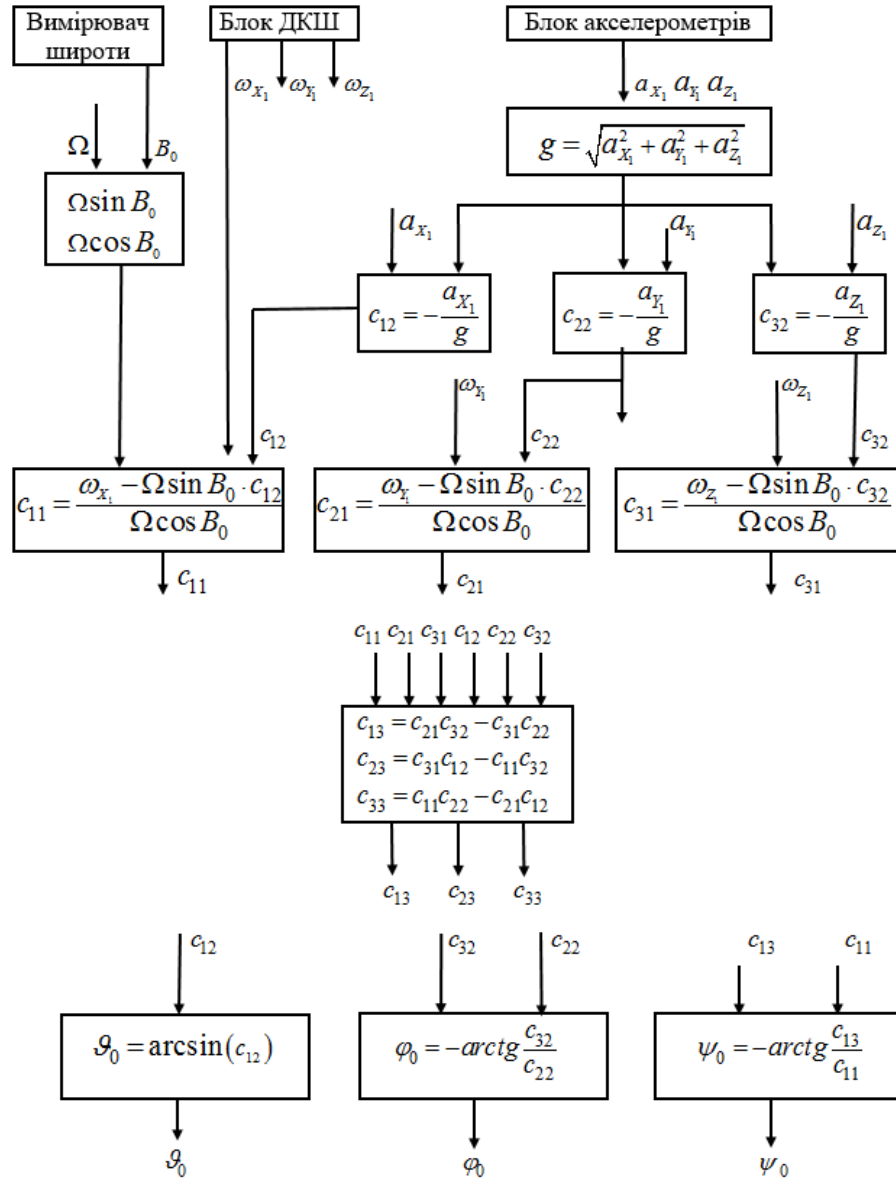


Рис.5.3 Структурна схема базового алгоритму початкової виставки

### 5.1.2 Універсальний алгоритм грубої початкової виставки

У роботі [128] було представлено ще один метод початкової виставки інерціальної системи.

Для отримання напрямних косинусів розрахуємо модуль вектору прискорення сили тяжіння:

$$g = \sqrt{a_{X_1}^2 + a_{Y_1}^2 + a_{Z_1}^2}$$

Одразу можна розрахувати три компоненти МНК:

$$c_{12} = -\frac{a_{X_1}}{g}, \quad c_{22} = -\frac{a_{Y_1}}{g}, \quad c_{32} = -\frac{a_{Z_1}}{g}$$

Знаючи  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  та  $c_{32}$ , можна отримати кути крену  $\varphi$  і тангажу  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \arcsin c_{12}, \\ \varphi_0 &= \arctg \left( -\frac{c_{32}}{c_{22}} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

З рис.5.2 знайдемо горизонтальні складові кутової швидкості

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{X_1} \cos \vartheta_0 - \omega_{Y_1} \cos \varphi_0 \sin \vartheta_0 - \omega_{Z_1} \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0, \\ \omega_z &= \omega_{Z_1} \cos \varphi_0 + \omega_{Y_1} \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \omega_x &= \Omega \cos B_0 \cos \psi, \\ \omega_z &= \Omega \cos B_0 \sin \psi, \end{aligned}$$

Отримаємо формулу початкового курсу:

$$\psi_0 = -\arctg \left( \frac{\omega_z}{\omega_x} \right). \quad (5.11)$$

Алгоритм (5.10), (5.11) призначений для роботи в умовах нерухомої основи і не залежить від широти місця, тому він отримав назву універсального [128].

Структурна схема універсального алгоритму представлена на рис.5.4.

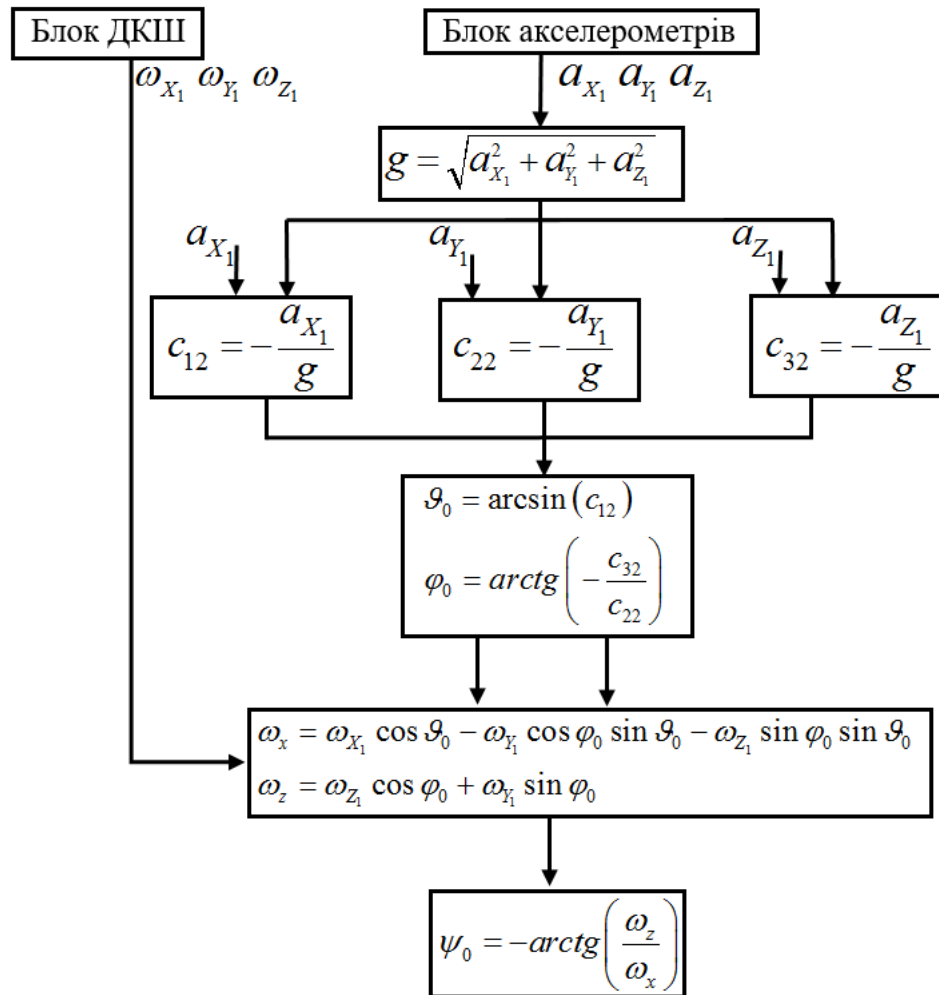


Рис. 5.4 Структурна схема універсального алгоритму початкової виставки

### 5.1.3 Перевірка алгоритмів початкової виставки на адекватність

На основі представлених на рис.5.3 та рис.5.4 схем базового та універсального алгоритмів початкової виставки, було створено відповідні програмні алгоритми у середовищі Matlab, що представлені у Додатку Д. І хоча базовий та універсальний методи добре відомі часто використовуються, необхідно перевірити на адекватність розроблені програмні функції задля коректної роботи усієї системи.

Нехай об'єкт на якому встановлено БІСО не рухається відносно Землі і нахилений відносно базової СК  $X_0Y_0Z_0$  на кути  $\psi_{id}=10^0$ ,  $\vartheta_{id}=20^0$  та  $\varphi_{id}=30^0$ , як показано на рис.5.5.

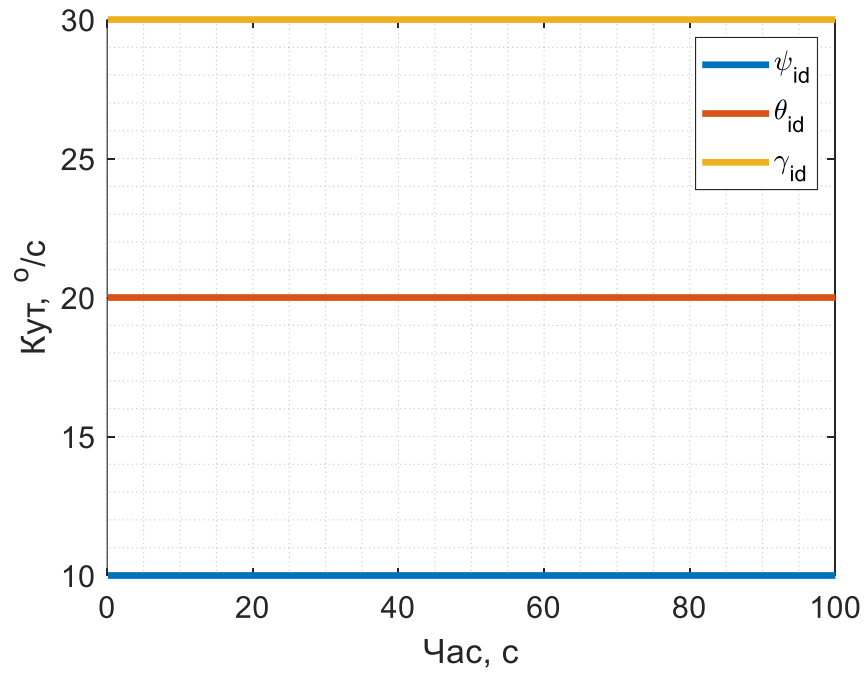


Рис.5.5 Задана кутова орієнтація БІСО

Відповідно до даного кутового положення, можна застосувати базовий та універсальний алгоритми і розрахувати початкове кутове положення об'єкту. На рис.5.6 та 5.7 представлено результати імітаційного моделювання відповідно базового та універсального алгоритмів.

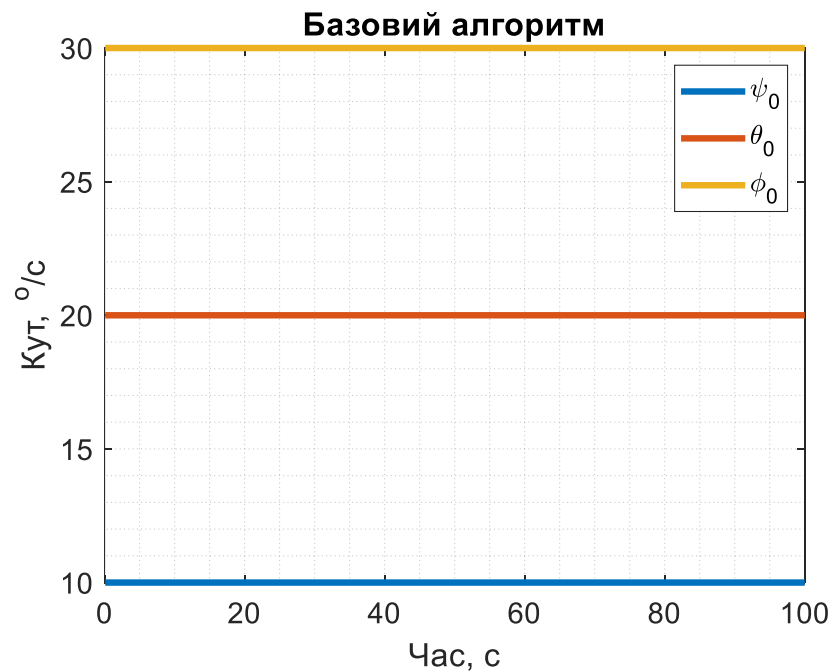


Рис.5.6 Базовий алгоритм початкової виставки



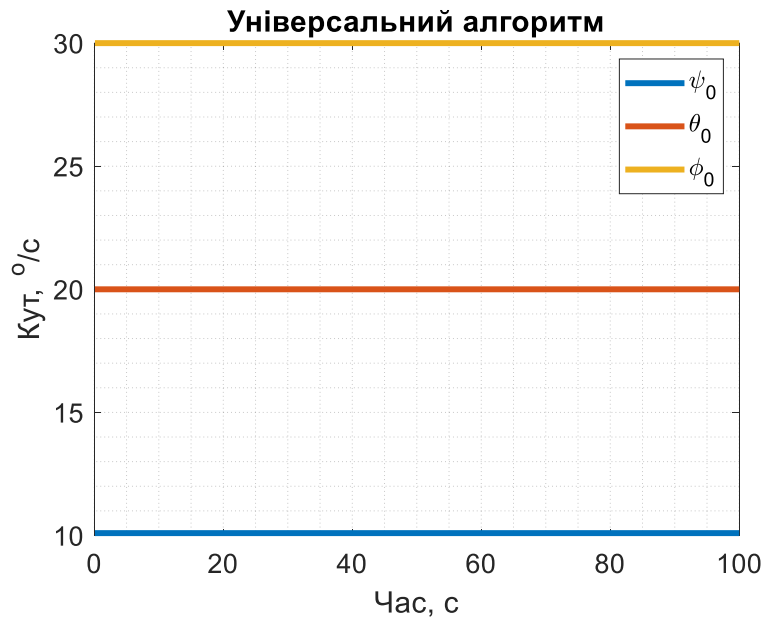


Рис.5.7 Універсальний алгоритм початкової виставки

З результатів моделювання, представлених на рис.5.5 – 5.7 видно, що створена програмна процедура для початкової виставки коректно визначає початкове кутове положення об'єкту і цілком може використовуватись при формуванні алгоритму БІСО з рис.5.1.

На основі процедури горизонтування із базового алгоритму було створено мікромеханічних інклінометр на акселерометрах [129].

## ***5.2 Розробка безплатформної інерціальної системи орієнтації***

У роботах [102, 120] представлено програмний алгоритм системи, що використовує сигнал мікромеханічних чутливих елементів, а у роботах [104, 130] – прецизійних кільцевих лазерних гіроскопів та навігаційних акселерометрів. У якості методу інтегрування було обрано методи Рунге–Кутти другого і четвертого порядків. Результати досліджень показали, що програмне забезпечення працює адекватно і на його основі створити розширений комплекс, що враховував би результати дисертаційних досліджень.

На основі наведених вище методів просторового калібрування чутливих елементів ІМВ, алгоритмів початкової виставки та методу чисельного

інтегрування матричного рівняння Пуассона було створено програмний алгоритм БІСО у середовищі Matlab. Він дозволяє проводити моделювання системи, використовуючи сигнали реальних датчиків, та містить у своєму складі усі необхідні компоненти для подальшої реалізації запропонованих методів на діючих системах орієнтації і навігації.

Структурна схема розробленої системи представлена на рис.5.8.

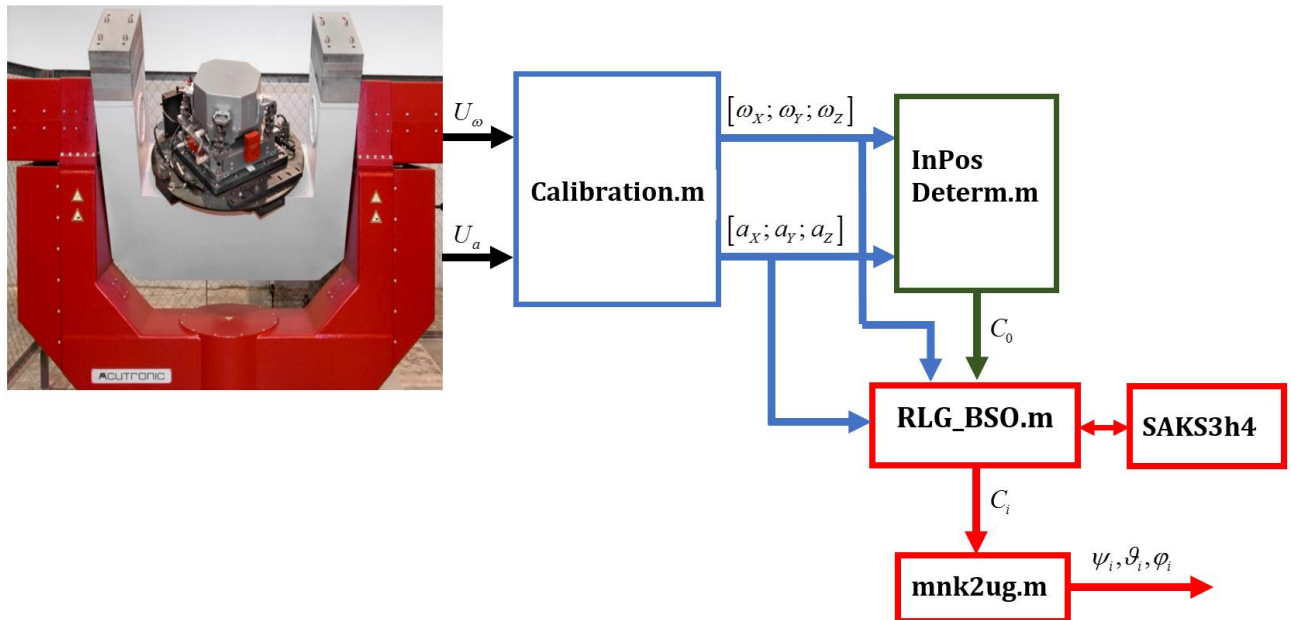


Рис.5.8 Структурна схема БІСО

Пояснимо роботу створеного програмного алгоритму детально.

Записаний у текстовому вигляді сигнал з ІВМ БІНС виробництва КП СПБ «Арсенал» складається із показів трьох лазерних гіроскопів RL-28А та акселерометрів АКС-05М. Сигнал з датчиків отримано з частотою опитування 200 Гц. Лазерні гіроскопи вимірювали кутову швидкість обертання основи.

Вихідні сигнали ІВМ проходять калібрування у процедурі **Calibration.m**. В ній реалізовано калібрування на основі моделей (2.1) та (2.5) з використанням матриць калібрувальних коефіцієнтів датчиків, отриманих просторовим методом.

Відкалібровані значення проекцій кутової швидкості обертання основи та прискорення використовуються у процедурі **InPosDeterm.m** для виконання початкової виставки системи за алгоритмом (5.9), наведеним на рис.5.3. У результаті отримується початкова матриця напрямних косинусів, що

використовується при ініціалізації алгоритму чисельного інтегрування матричного рівняння Пуассона.

Головною є керувальна програма **RLG\_BSO.m**. Вона здійснює взаємозв'язок окремих процедур, визначає початкові параметри системи, виводить результати моделювання у вигляді графіків та найголовніше – ініціалізує цикл інтегрування кінематичного рівняння Пуассона.

Сам алгоритм методу інтегрування (3.36) знаходиться в окремій процедурі **SAKS3h4.m**. До неї надходить дискретна інформація про проекції кутової швидкості основи, крок опитування КЛГ, та попереднє значення МНК. Ця інформація використовується для знаходження поточного значення МНК шляхом інтегрування розробленим трикроковим методом Пікара четвертого порядку.

Для більшої наочності і простоти оцінки результатів, значення поточної МНК перетворюються на відповідні кути орієнтації за допомогою процедури **mnk2ug.m**.

Тексти розглянутих процедур представлені у Додатку Д.

Розроблений програмний алгоритм було адаптовано до використання з мікромеханічними ЧЕ. Побудовано мікромеханічний інклінометр, що дозволяє з високою точністю визначати кути крену і тангажу об'єкту [101, 131]. Також було розглянуто можливість корекції дрейфів МЕМС ДКШ впровадженням фільтра Маджвіка [132] та комплементарного фільтра [133].

## ***5.4 Програмне моделювання безплатформної інерціальної системи орієнтації***

У ході випробувань БІНС на КП СПБ «Арсенал» було отримано три набори вихідних сигналів ІВМ:

- нерухома основа;
- обертання стенду із заданою кутовою швидкістю;
- конічний рух стенду.

Відповідно до руху основи було проведено моделювання розробленої системи орієнтації.

### ***Моделювання БІСО на нерухомій основі***

Статичний сигнал за умови нерухомої основи, проте з відомою орієнтацією ІВМ дозволяє проаналізувати точність ДКШ та акселерометрів, перевірити роботу програмного алгоритму БІСО на адекватність.

Відкалібрований вихідний сигнал гіроскопів ІВМ наведено на рис.5.9.

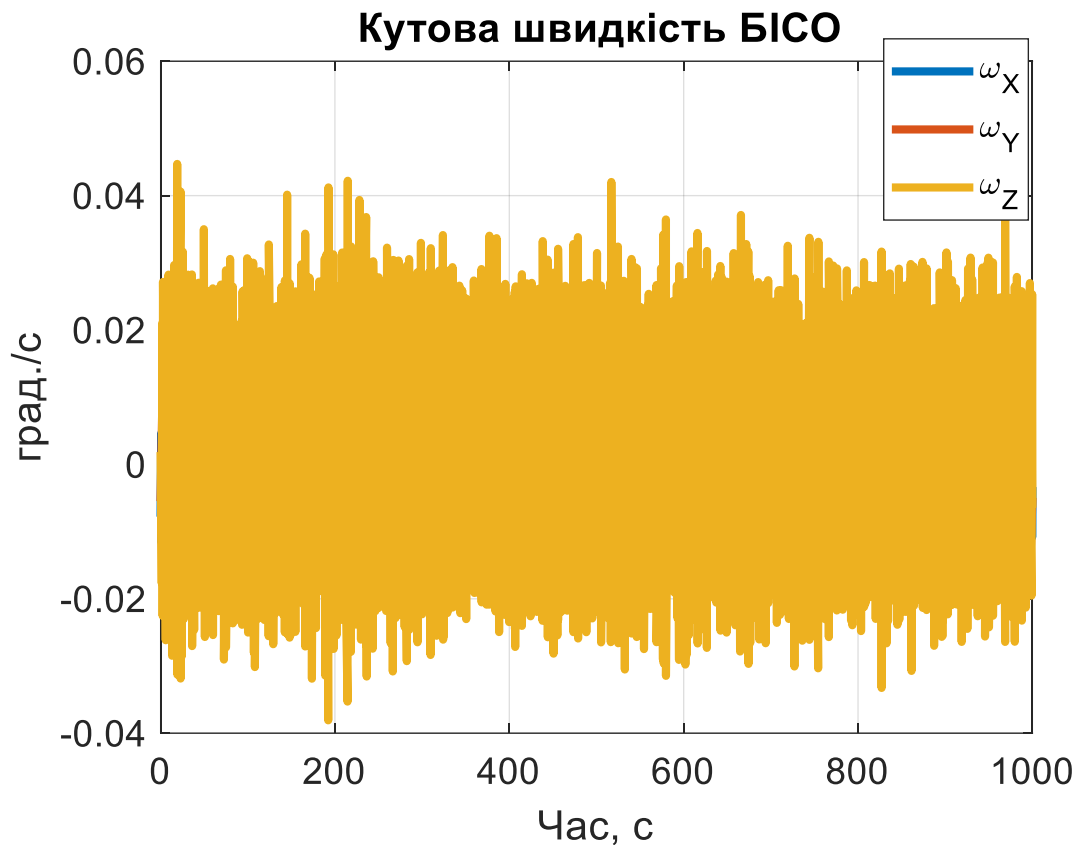


Рис. 5.9 Кутова швидкість виміряна ДКШ

Кутова швидкість обертання Землі сягає  $4,1769 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{с}$ . За статичними сигналами ДКШ, представленими на рис.5.9, можна розрахувати нормальне значення виміряної кутової швидкості. Вона становить  $4,1757 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{с}$ . Кутова швидкість обертання Землі має дві складові: вертикальну і горизонтальну. За умовами пуску ІВМ було розташовано таким чином, що вісь Z була направлена вертикально вгору, а вісь X – на північ. При чому кути нахилу блоку ЧЕ були:  $\psi_0 = 90,1791^\circ$ ,  $\vartheta_0 = -0,0026^\circ$  та  $\varphi_0 = 0,3257^\circ$ . Відповідно такої орієнтації ІВМ,

середнє значення виміряної гіроскопом кутових швидкостей складає  $\omega_z = 1,9550 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{с}$  та  $\omega_x = -3,6897 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{с}$ .

На рис.5.10 представлено результати моделювання БІСО за умов нерухомої основи.

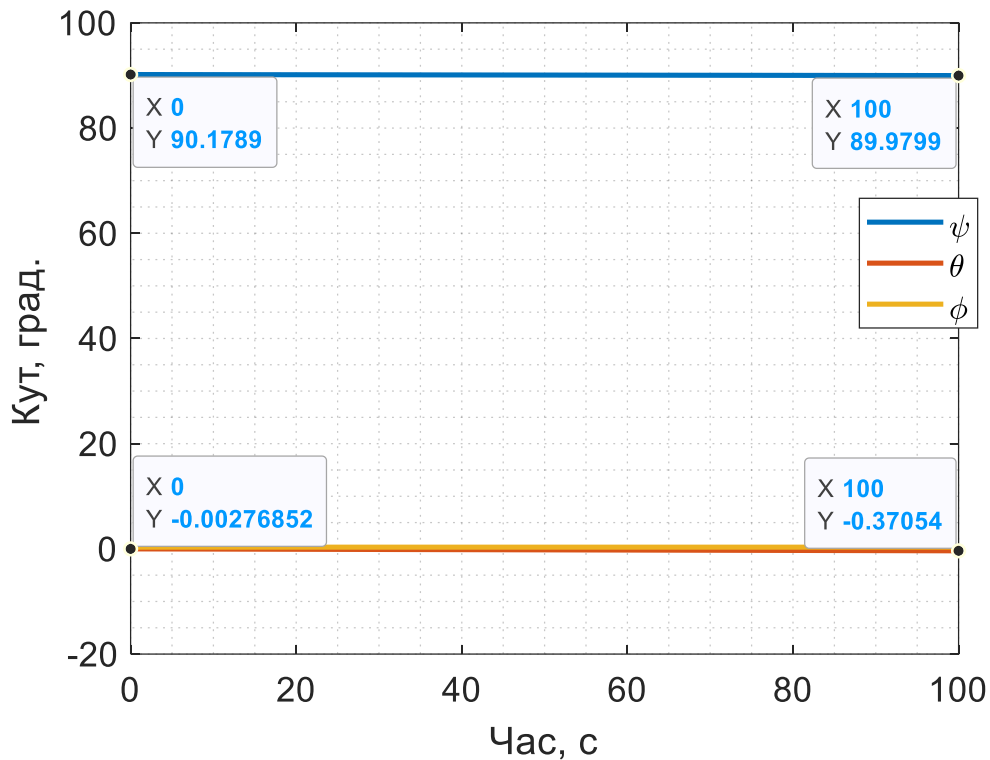


Рис. 5.10 Поточна орієнтація системи

За такої орієнтації ІВМ проекції кутової швидкості обертання основи за час  $t=100$ с призведуть до дрейфів по кутам  $\Delta\psi = 0,1955^\circ$  та  $\Delta\vartheta = -0,3700^\circ$ .

З рис.5.10 видно, кути орієнтації основи мають дрейф  $\Delta\psi_{\text{мод}} = 0,1992^\circ$  та  $\Delta\vartheta_{\text{мод}} = -0,3679^\circ$ , що з точністю до сотих збігається із прогнозованими. Це підтверджує адекватність розробленого програмного забезпечення.

Для реальної роботи БІСО необхідно враховувати кутовий рух географічної СК, тому розширимо кінематичне рівняння Пуассона (3.8), як показано у роботі [2]:

$$\frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} = \mathbf{C}^{SP} \cdot (\boldsymbol{\omega}_p^{PS} \times) - \mathbf{C}^{PS} (\boldsymbol{\omega}_s^{SP} \times), \quad (5.12)$$

де  $\mathbf{C}^{PS} = (\mathbf{C}^{SP})^T$ , а  $(\boldsymbol{\omega}_S^{SP} \times)$  – кососиметрична матриця проєкцій кутової швидкості географічної СК

$$(\boldsymbol{\omega}_S^{SP} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи (5.12), врахуємо обертання географічної СК та повторимо моделювання.

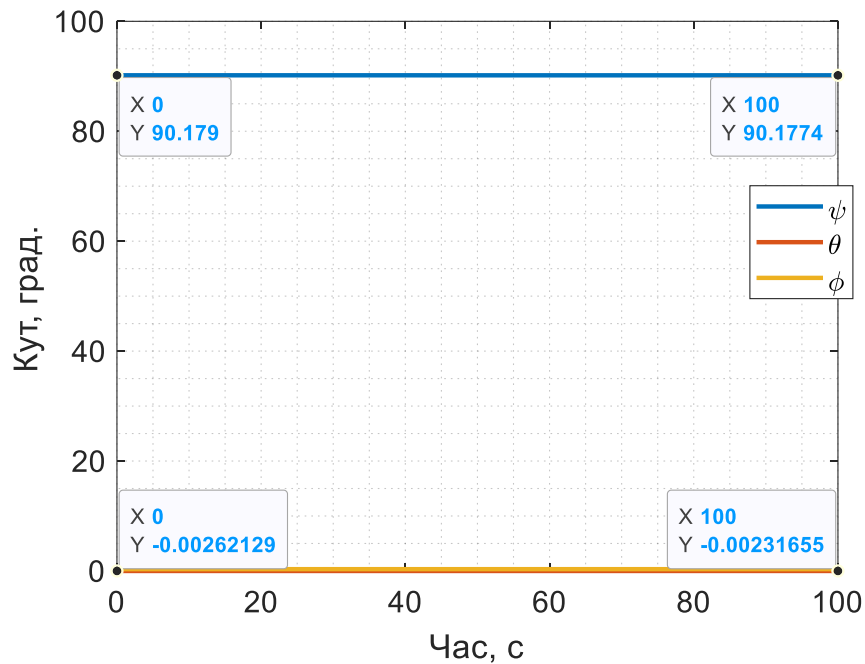


Рис.5.11 БІСО на нерухомій основі

Аналізуючи рис.5.11 можна побачити, що рух географічної СК компенсовано:  $\Delta\psi_{\text{мод}} = -1,7011 \cdot 10^{-3} \text{ град}$  та  $\Delta\vartheta_{\text{мод}} = 2,8512 \cdot 10^{-4} \text{ град}$ .

Кінематичне рівняння (5.12) використовується для подальших досліджень.

### **Моделювання БІСО при одновісному обертанні стенду**

На рис.5.12 – 5.14 наведено відкалібровані сигнали ДКШ системи при кутовому русі основи навколо відповідних осей. У ході випробувань задавалася кутова швидкість обертання стенду  $90\%$ .

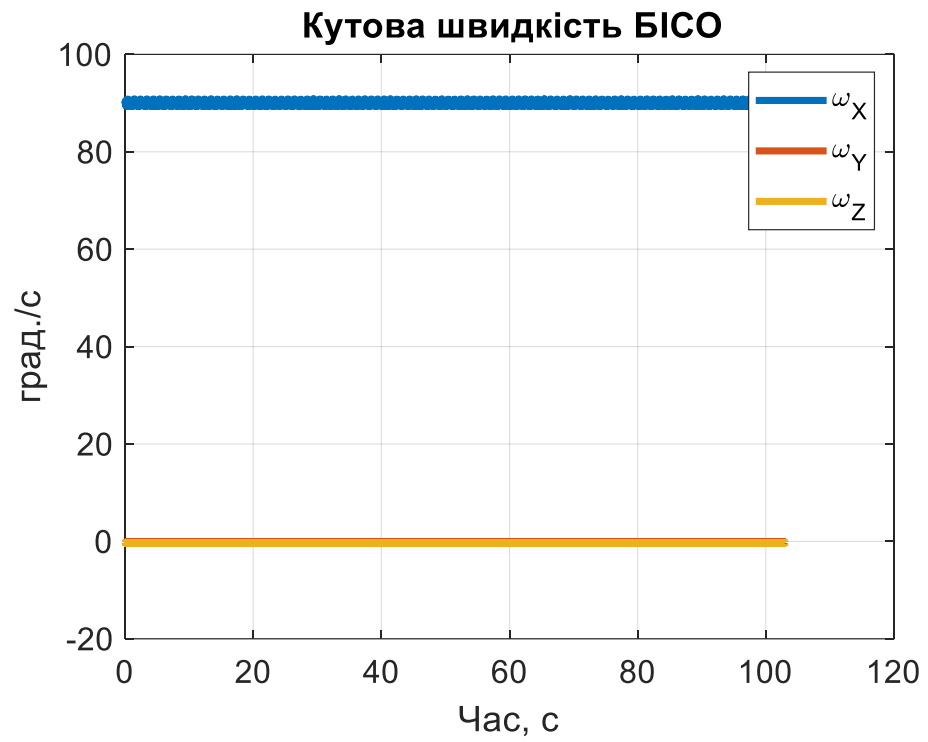


Рис.5.12 Обертання ІВМ навколо осі  $X$

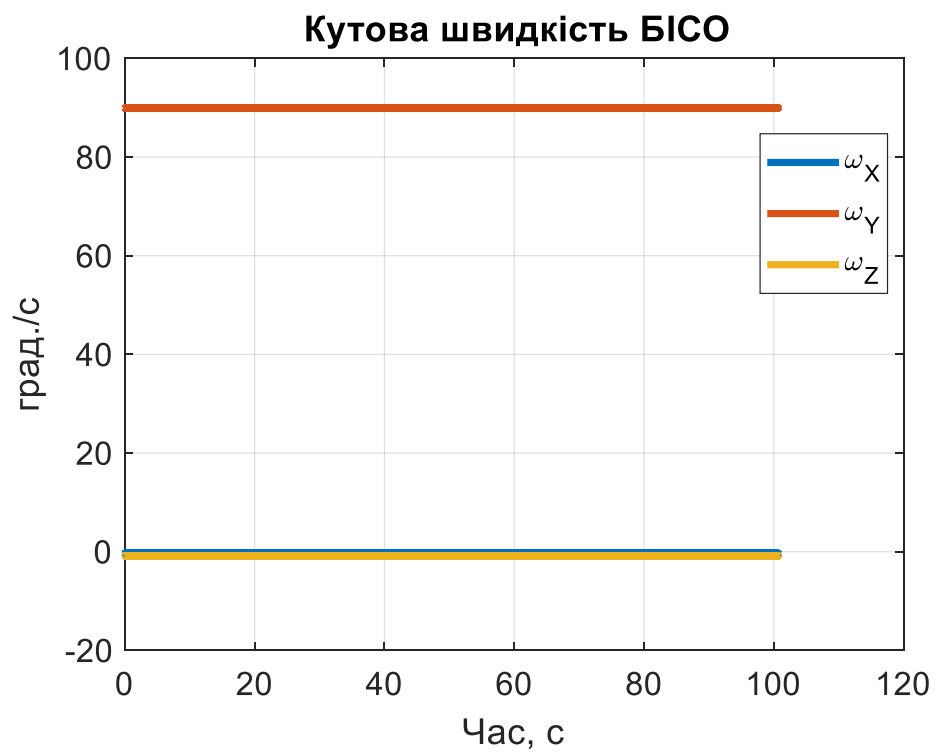


Рис.5.13 Обертання ІВМ навколо осі  $Y$

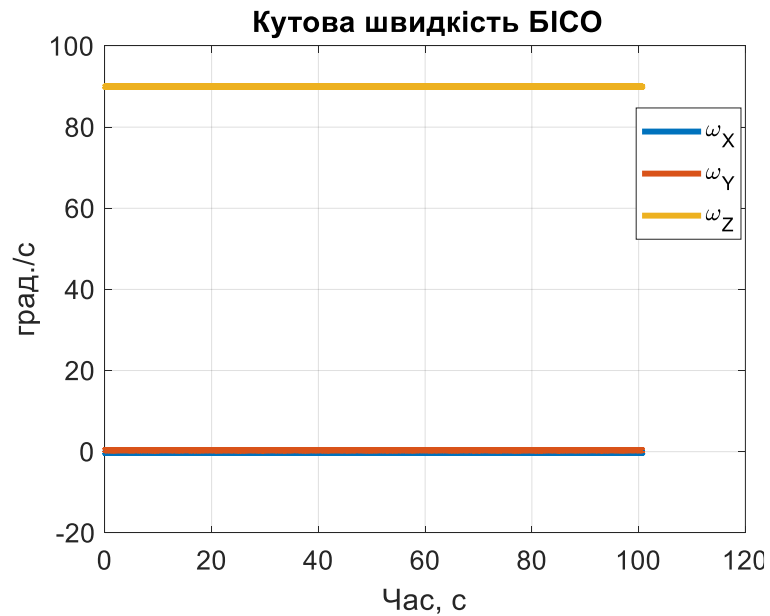


Рис.5.14 Обертання ІВМ навколо осі Z

З наведених графіків видно, що обертання здійснювалось навколо кожної з осей таким чином, що рух навколо інших майже відсутнє. В такому разі має спостерігатися дрейф по одному з кутів у залежності від орієнтації ІВМ. Аналіз сигналів ДКШ також показує, що гіроскопи не зовсім точно визначають кутову швидкість, а саме при відповідних обертаннях кутова швидкість сягала  $\omega_X = 89,960^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_Y = 89,953^\circ/\text{с}$  та  $\omega_Z = 89,967^\circ/\text{с}$ .

Результати програмного моделювання БІСО за умов обертання основи показано на рис.5.15 – 5.17. На графіках виділено час 1 с для легшого аналізу роботи системи.

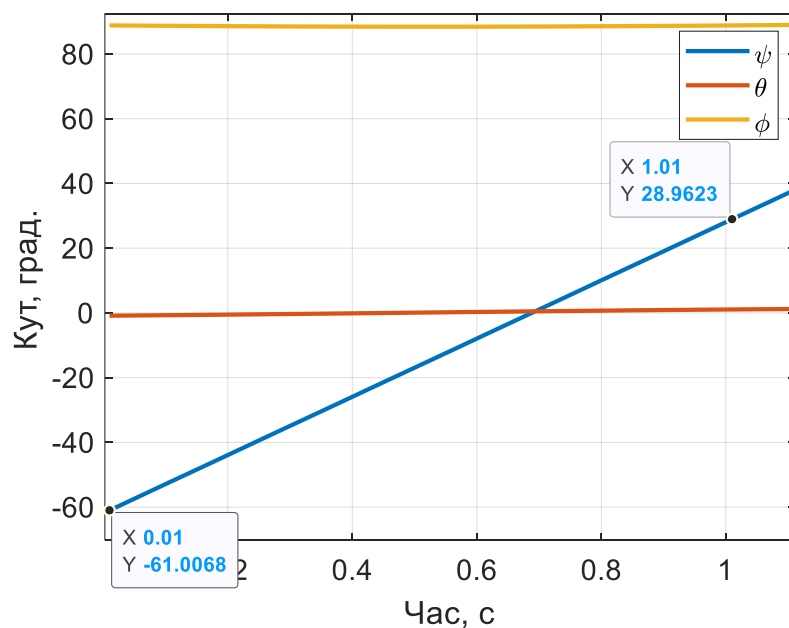


Рис.5.15 Обертання основи навколо осі X



При обертанні навколо осі  $X$  стелді за 1 с мав би відхилитися на  $89,960^\circ$ . Натомість, з рис.5.15 видно, що за результатами моделювання, кут відхилення складає  $\psi = 89,9969^\circ$ . Таким чином, похибка системи складає  $0,009^\circ$ .

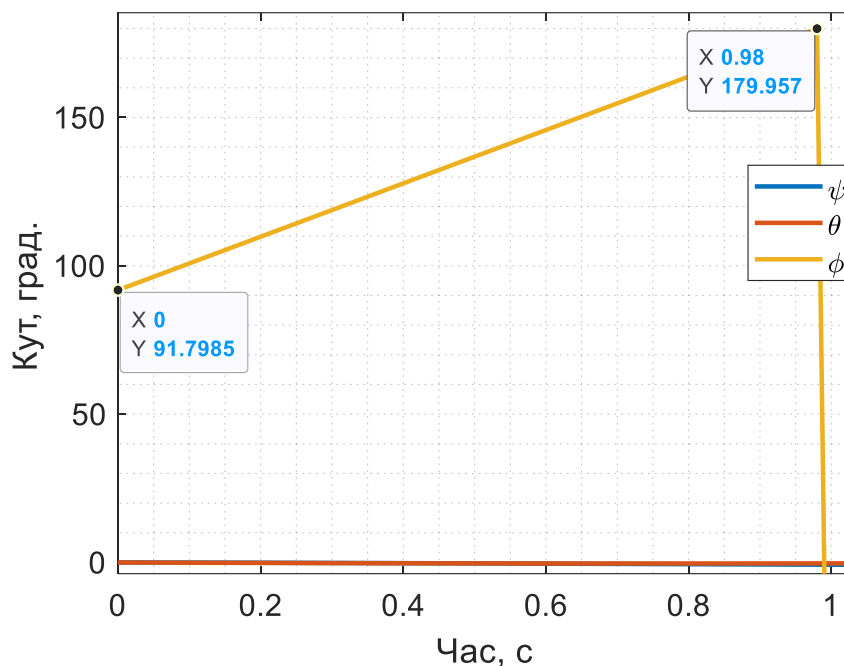


Рис.5.16 Обертання основи навколо осі  $Y$

При обертанні навколо осі  $Y$ , враховуючи орієнтацію вимірювального модуля, відхилення по куту крену за час  $0,98$  с має бути  $88,154^\circ$ . З рис.5.16 видно, що кут відхилення склав  $\varphi = 88,158^\circ$ . При цьому загальна похибка системи склала  $0,004^\circ$ .

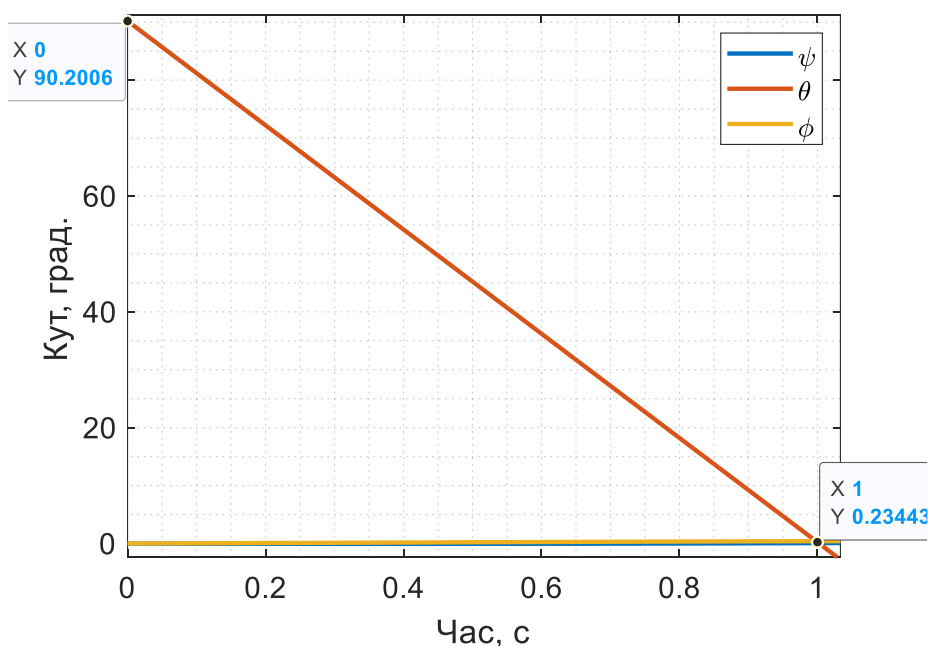


Рис.5.17 Обертання основи навколо осі  $Z$

У наслідок обертання основи навколо осі  $Z$  кут відхилення за 1с має складати  $89,967^\circ$ . З рис.5.17 видно, що за результатами моделювання кут відхилення склав  $\vartheta = 89,966^\circ$ . Похибка системи становить  $0,001^\circ$ .

### ***Моделювання БІСО за умов кінчного руху основи***

На КП СПБ «Арсенал» були проведені дослідження похибки акселерометрів за умов вібрації основи. У результаті виконувалися стендові випробування БІНС за умов гармонічного кутового коливального руху. Коливання здійснювалися навколо осей  $X$  та  $Z$  за однакових амплітуд та частот. Зсув фаз коливання  $\varepsilon = 90^\circ$ . Такий рух основи відповідає кінчному, тому дослідження алгоритмічного дрейфу має велике практичне значення.

На рис.5.18 представлено вихідний сигнал з гіроскопів ІВМ за такого кінчного руху основи: амплітуда  $a_m = 10^0$  і частота  $\nu = 0,1$  Гц.

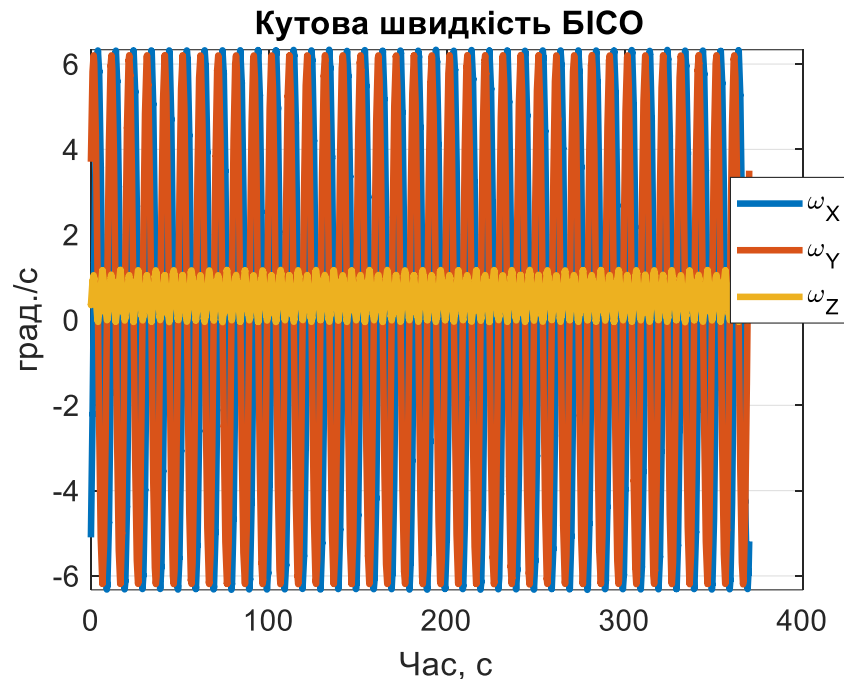


Рис.5.18 Перший випадок кінчного руху

На рис.5.19 представлено вихідний сигнал з гіроскопів ІВМ за такого кінчного руху основи: амплітуда  $a_m = 5^0$  і частота  $\nu = 0,5$  Гц.

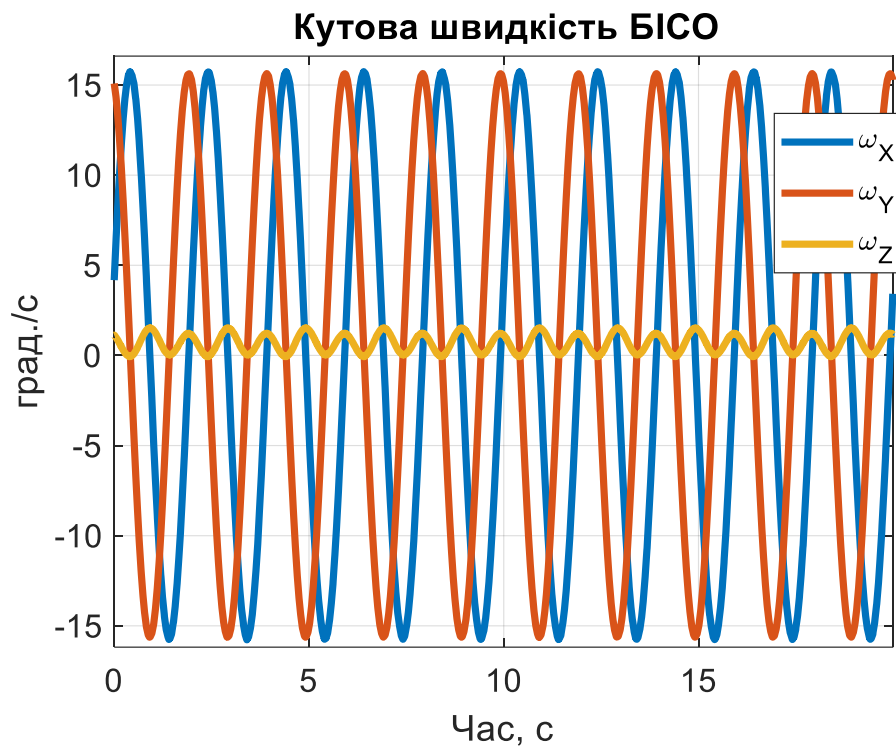


Рис.5.19 Другий випадок конічного руху

На рис.5.20 представлено вихідний сигнал з гіроскопів ІВМ за такого конічного руху основи: амплітуда  $a_m = 5^\circ$  і частота  $\nu = 1$  Гц.

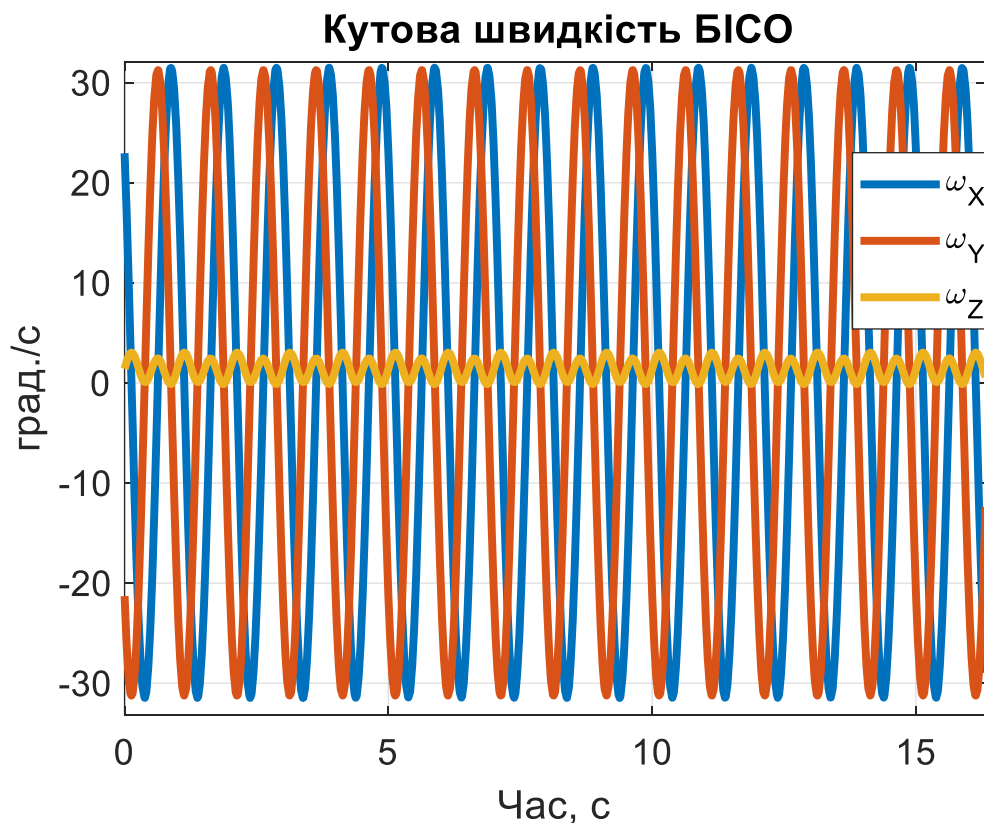


Рис.5.20 Третій випадок конічного руху

На рис.5.21 представлено вихідний сигнал з гіроскопів ІВМ за такого кінчного руху основи: амплітуда  $a_m = 1^\circ$  і частота  $\nu = 2$  Гц.

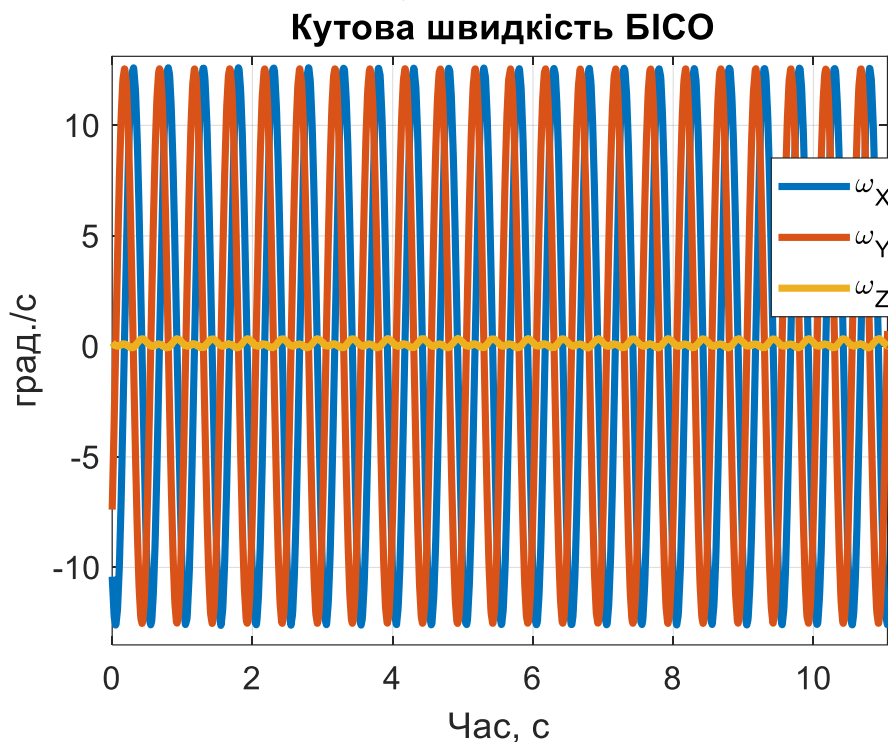


Рис.5.21 Четвертий випадок кінчного руху

Проведемо програмне моделювання алгоритму БІСО для цих чотирьох випадків кінчного руху основи.

На рис.5.22 представлені результати моделювання першого випадку кінчного руху, представленого на рис.5.18.

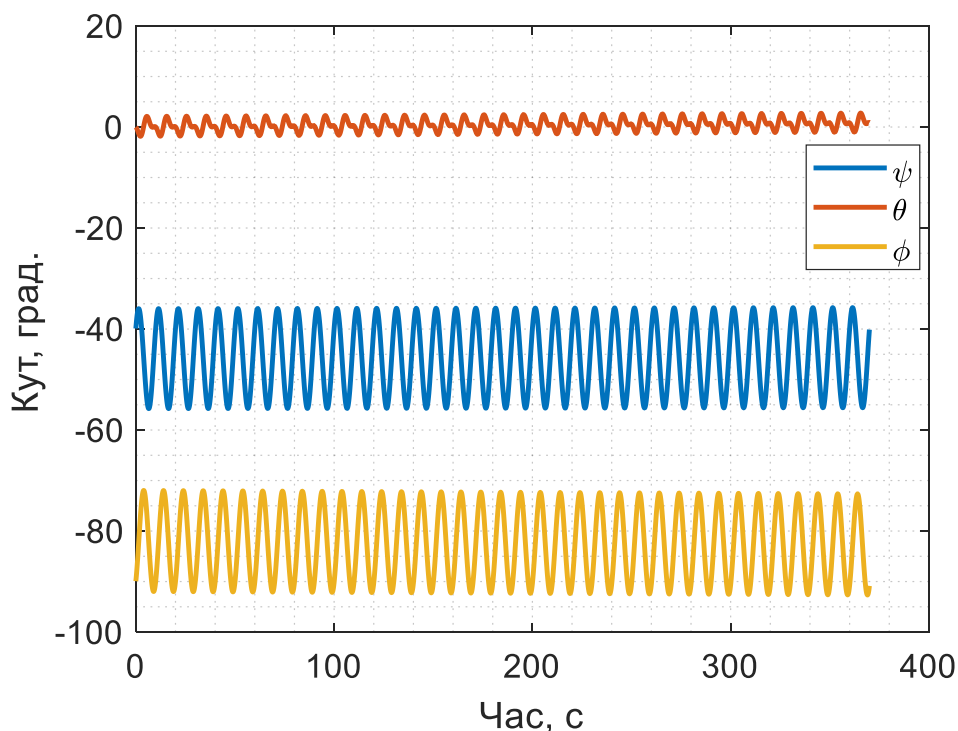


Рис.5.22 Моделювання БІСО за кінчного руху

З результатів моделювання видно, що амплітуда коливань по куту ристання становить  $\psi_a = 9,9986^0$ , а по куту крену –  $\varphi_a = 10,3640^0$ . Конічний дрейф для заданого руху основи, розрахований за (4.11) складає лише  $1,2794 \cdot 10^{-12} \text{ град}$ . Ця величина набагато менша за похибки, викликані початковою виставою та сукупністю похибок ДКШ, тому на рис.5.22 не спостерігається алгоритмічного дрейфу.

На рис.5.23 представлені результати моделювання першого випадку конічного руху, представленого на рис.5.19.

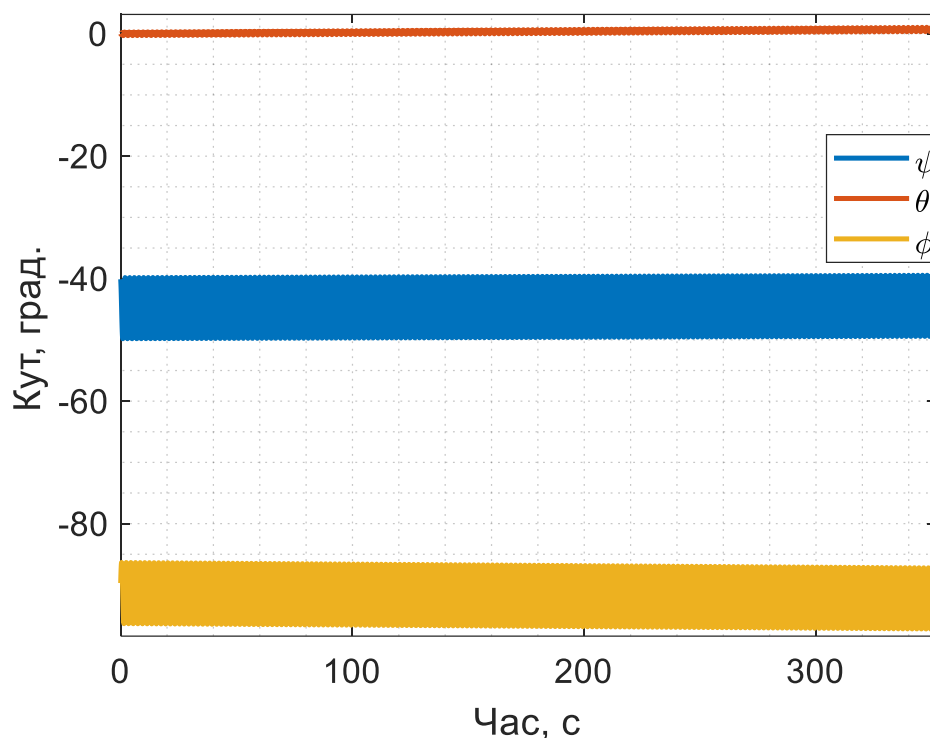


Рис.5.23 Моделювання БІСО за конічного руху

З результатів моделювання видно, що амплітуда коливань по куту ристання становить  $\psi_a = 5,1883^0$ , а по куту крену –  $\varphi_a = 5,4323^0$ . Конічний дрейф для заданого руху основи, розрахований за (4.11) становить лише  $1,20381 \cdot 10^{-9} \text{ град}$ . Ця величина набагато менша за похибки, викликані початковою виставою та сукупністю похибок ДКШ, тому на рис.5.23 не спостерігається алгоритмічного дрейфу.

На рис.5.24 представлені результати моделювання першого випадку конічного руху, представленого на рис.5.20.

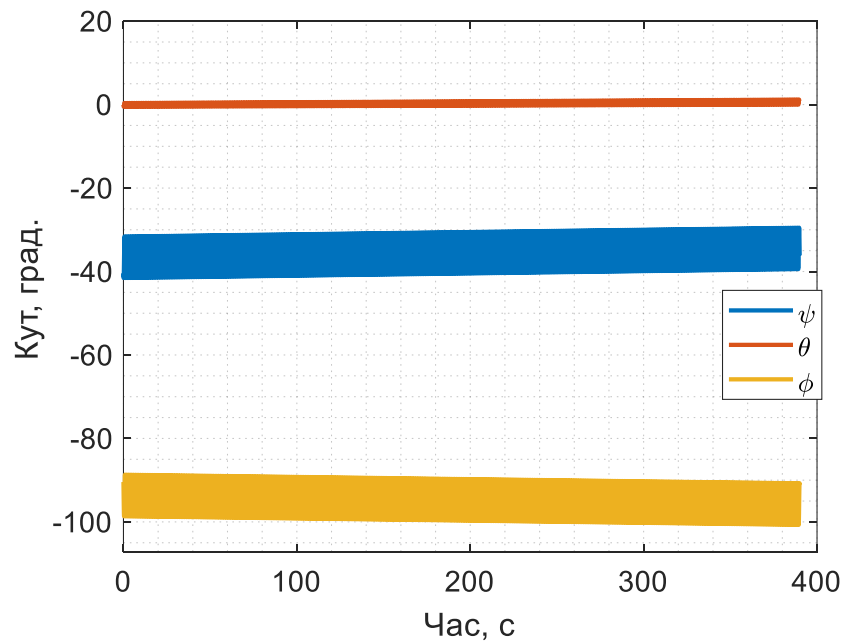


Рис.5.24 Моделювання БІСО за кінчного руху

З результатів моделювання видно, що амплітуда коливань по куту ристання становить  $\psi_a = 5,0406^0$ , а по куту крену –  $\varphi_a = 5,0121^0$ . Конічний дрейф для заданого руху основи, розрахований за (4.11) становить лише  $1,20381 \cdot 10^{-9} \text{ град}$ . Ця величина набагато менша за похибки, викликані початковою виставою та сукупністю похибок ДКШ, тому на рис.5.24 не спостерігається алгоритмічного дрейфу.

На рис.5.25 представлені результати моделювання першого випадку кінчного руху, представленого на рис.5.21.

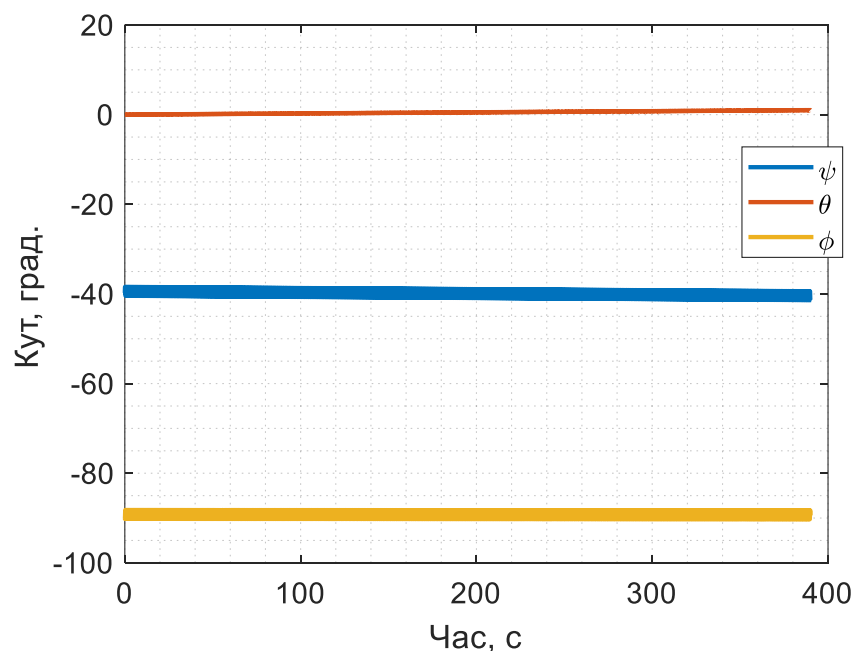


Рис.5.25 Моделювання БІСО за кінчного руху

З результатів моделювання видно, що амплітуда коливань по куту ристання становить  $\psi_a = 1,0480^0$ , а по куту крену –  $\varphi_a = 1,0382^0$ . Конічний дрейф для заданого руху основи, розрахований за (4.11) становить лише  $4,2618 \cdot 10^{-8} \text{ град}$ . Ця величина набагато менша за похибки, викликані початковою виставою та сукупністю похибок ДКШ, тому на рис.5.25 не спостерігається алгоритмічного дрейфу.

## Висновки до розділу 5

П'ятий розділ цілком було присвячену синтезу безплатформної інерціальної системи орієнтації з використанням отриманих вище результатів: методу просторового калібрування та трикрокового алгоритму Пікара четвертого порядку для кінематичного рівняння Пуассона. Для практичного застосування системи було розглянуто і додано до алгоритму методи початкової виставки БІСО на нерухомій основі.

У результаті тестового моделювання отриманого алгоритмічно-програмного забезпечення можна констатувати що:

- Програмний алгоритм БІСО працює адекватно;
- Точність роботи системи при різноманітному русі основи (статика, обертання навколо однієї осі з постійною кутовою швидкістю та конічний рух) знаходиться в межах похибок датчиків;
- Моделювання системи при конічному русі не дало змогу спостерігати великий алгоритмічний дрейф. Це цілком можна пояснити недостатньо високою частотою кутових коливань основи при записі тестових сигналів ІВМ (до 2 Гц), проте як він сягав би значних величин при частотах, що більші за 5-7 Гц.

У цілому можна відмітити комплексність розробленого алгоритмічно-програмного забезпечення та його адекватну роботоспроможність.



## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну науково-практичну задачу з підвищення точності безплатформних інерціальних навігаційних систем шляхом впровадження нових методів калібрування інерціального вимірювального модуля та нових високоточних методів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації.

1. Аналіз сучасного стану та тенденцій розвитку інерціальних засобів орієнтації і навігації показав, що важливими шляхами підвищення точності безплатформних інерціальних навігаційних систем є удосконалення методів калібрування та впровадження нових алгоритмів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації, що не обмежуються швидкодією бортових обчислювачів. Показано, що метод корекції алгоритмічного дрейфу процедури інтегрування внаслідок кінчного руху основи, що спирається на спеціальну «настройку» алгоритмів, а по суті емпіричному підборі коефіцієнтів алгоритму інтегрування не є оптимальним. І справді, алгоритми, що було сформовано таким чином показують високу точність при кінчному русі, проте можуть вводити додаткову методичну похибку при звичайних еволюціях траєкторії об'єкту. Крім того показано, що розповсюджені методи інтегрування кінематичного рівняння Борца (вектору Ейлера єдиного повороту) не можуть однозначно визначати орієнтацію зв'язаної системи координат а мають обов'язково використовуватись з додатковим векторним кінематичним параметром, як правило, кватерніоном повороту.

2. Ґрунтовне дослідження точності було проведено для нового просторового методу калібрування інерціальних вимірювальних модулів навігаційних систем. Метод спирається на одночасному калібруванні тривісного блоку акселерометрів та гіроскопів шляхом одночасного повороту стенду на три осі. Було розширено модель вихідного сигналу датчиків різноманітними похибками: нестабільністю масштабних коефіцієнтів, нестабільністю зміщення нулів, випадковим шумом. Разом із цим було враховано інструментальні похибки стендового обладнання: виставку стенду у певне задане положення,

утримання заданої кутової швидкості, тощо. Дослідження точності просторового калібрування проводилося у порівнянні з відомими методами тестових поворотів та одновісному обертанні вимірювального модуля. Результати показують значне зниження середньоквадратичної похибки калібрування гіроскопів новим просторовим методом.

3. Показано сімейство нових алгоритмів інтегрування методом послідовних наближень Пікара для матричного кінематичного рівняння Пуассона. Наведено алгоритми для випадку вимірювання гіроскопами проекцій кутової швидкості обертання основи; різної кроковості: три- і чотирикрокові методи; а також різного порядку точності (до четвертого включно).

4. Створено імітаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації, що дозволяє проводити дослідження різноманітних методів чисельного інтегрування для різних кінематичних параметрів. Було сформульовано методику дослідження точності методів чисельного інтегрування. За нею розглянуто як відомі методи, що спираються на інтегруванні методом Пікара рівняння Борца (вектор Ейлера єдиного повороту), так і нові методи для рівняння Пуассона. Дослідження однозначно свідчать про те, що трикроковий метод Пікара четвертого порядку точності для рівняння Пуассона перевершує найточніший (і використаний на практиці в реальних навігаційних системах виробництва КП СПБ «Арсенал» та ін.) двокроковий метод четвертого порядку інтегрування рівняння Борца. Враховуючи, що матриця напрямних косинусів, що отримується при інтегрування рівняння Пуассона, однозначно описує орієнтацію об'єкту і може легко використовуватись як безпосередньо, так і для перепроєктування уявного прискорення, цей алгоритм виявляється найкращим.

5. На основі розглянутих методу просторового калібрування, алгоритму інтегрування кінематичного рівняння орієнтації було створено інформаційну модель безплатформної інерціальної системи орієнтації. Отримана модель включає процедури для калібрування сигналів інерціального вимірювального модуля, процедуру початкової виставки системи методами гірокомпасування та горизонтування та розрахунок кінематичних параметрів орієнтації шляхом

чисельне інтегрування кінематичного рівняння Пуассона методом Пікара. Було проведено серію моделювань розробленого програмного алгоритму з використанням реальних сигналів високоточної безплатформної інерціальної навігаційної системи на нерухомій основі, при обертанні навколо кожної вимірювальної осі, а також при конічному русі основи. Система продемонструвала адекватну роботу із точністю на рівні похибок вимірювачів.

6. Результати досліджень знайшли впровадження у КП СПБ «Арсенал», ТОВ «Гіротех», АТ «Елміз» в рамках розробок інерціальних систем орієнтації і навігації, а також в навчальному процесі кафедри приладів і систем орієнтації і навігації Приладобудівного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського».

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Ю. Ф. Лазарев, Я. Г. Бобровицька, *Розроблення і моделювання алгоритмів безплатформової системи орієнтації: Навчальний посібник*. К: НТУУ “КПІ,” 2011.
- [2] В. В. Мелешко, О. И. Нестеренко, *Бесплатформенные инерциальные навигационные системы: Навчальний посібник*. Кировоград: ПОЛИМЕД Сервис, 2011.
- [3] В. В. Матвеев, В. Я. Распопов, *Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем*. СПб: ГИЦ РФ ОАО "ЦНИИ “Электроприбор,” 2009.
- [4] M. Kok, J. D. Hol, and T. B. Schön, “Using inertial sensors for position and orientation estimation,” *Foundations and Trends in Signal Processing*, vol. 11, no. 1–2. Now Publishers Inc, pp. 1–153, 2017.
- [5] P. G. Savage, “Blazing Gyros – The Evolution of Strapdown Inertial Navigation Technology For Aircraft,” *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 36, no. 3, pp. 637–655, 2013.
- [6] P. G. Savage, “Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms,” *J. Guid. Control. Dyn.*, pp. 19–28, 1998.
- [7] O. J. Woodman, “An introduction to inertial navigation,” Cambridge, 2007.
- [8] А. Ю. Борисова, А. В. Смаль, “Анализ разработок современных бесплатформенных инерциальных навигационных систем,” *Инженерный вестник. МГТУ им. Н. Э. Баумана*, № 5, С. 50–57, 2017.
- [9] Д. Б. Пазычев, “Балансировка бесплатформенной инерциальной навигационной системы среднего класса точности,” *Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана*, № 3, С. 1–14, 2011.
- [10] G. T. Schmidt, “GPS Based Navigation Systems in Difficult Environments,” *Giroskopiya i Navig.*, vol. 27, no. 1, pp. 3–21, 2019.
- [11] Г. И. Емельянцев, А. П. Степанов, *Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации*. СПб: ГИЦ РФ ОАО "ЦНИИ

“Электроприбор,” 2016.

[12] В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский, *Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем*. М: Наука, 1992.

[13] А. П. Панов, *Математические основы теории инерциальной ориентации*. К: Наукова думка, 1995.

[14] Ю. Ф. Лазарев, П. С. Мироненко, “Сравнение точности некоторых алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации,” *Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування*, Вип. 53, № 1, С. 5–10, 2017.

[15] В. В. Мелешко, *Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка: Учебное пособие*. К: Корнійчук, 1999.

[16] Ю. Ф. Лазарев, О. О. Сандій, “Синтез і дослідження точності алгоритмів БІСО на основі рівняння Пуассона,” *Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування*, Вип. 1, № 51, С. 22–29, 2016.

[17] В. М. Слюсарь, “О влиянии инструментальных факторов на скорость углового дрейфа БИНС,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 56, № 1, С. 47–62, 2007.

[18] В. М. Слюсарь, “Актуальные вопросы проектирования алгоритмов ориентации БИНС. Часть 1. Амплитудное расширение области применения алгоритмов,” *Гироскопия и навигация*, № 2, С. 61–75, 2006.

[19] V. M. N. Passaro, A. Cuccovillo, L. Vaiani, M. De Carlo, and C. E. Campanella, “Gyroscope technology and applications: A review in the industrial perspective,” *Sensors (Switzerland)*, vol. 17, no. 10. 2017.

[20] Ю. Ф. Лазарев, П. М. Бондар, *Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації*. К: НТУУ “КПІ,” 2011.

[21] С. Е. Переляев, Г. И. Чесноков, А. В. Чернодаров, “Опыт разработки и проблемы в проектировании автономных высокоточных БИНС авиационно-космического назначения,” in *VI міжн. наук.-техн. конф. «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки»*, 2007, С. 28–37.

[22] В. Я. Распопов, Д. М. Малютин, “Измерительные приборы и системы для ориентации, стабилизации и управления,” *Известия ТулГУ. Технические науки*, Вип. 4, С. 372–386, 2018.

[23] И. А. Волочихин *et al.*, “Волновые твердотельные гироскопы (аналитический обзор),” *Известия тульского государственного университета. Технические науки*, № 9, С. 59–78, 2017.

[24] А. Жанруа, А. Буве і Ж. Ремиллье, “Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 4, № 93, С. 24–34, 2013.

[25] Ю. М. Златкин *et al.*, “Лазерная БИНС для ракеты-носителя ‘Циклон-4,’” *Гироскопия и навигация*, Вип. 81, №. 2, С. 61–74, 2013.

[26] С. С. Сысоева, “Тенденции рынка High-end МЭМС-датчиков инерции. Новые уровни характеристик и исполнения,” *Компоненты и технологии*, №. 6, С. 40–46, 2014.

[27] В. Я. Распопов, *Микромеханические приборы: Учебное пособие*. М: Машиностроение, 2007.

[28] Д. Мейер, М. Ларсен, “Гироскоп на ядерном магнитном резонансе для инерциальной навигации,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 1, № 84, С. 3–13, 2014.

[29] V. V. Avrutov, P. M. Aksonenko, N. I. Bouraou, P. Henaff, and L. Ciarletta, “Expanded calibration of the MEMS inertial sensors,” in *Proc. 2017 IEEE 1st Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering, UKRCON 2017* 2017, pp. 675–679.

[30] *IEEE Std 1559-2009 : IEEE Standard for Inertial Systems Terminology*. IEEE, 2009.

[31] В. В. Аврутов, “О скалярной калибровке блока гироскопов и акселерометров,” *Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування*, №. 40, С. 10–14, 2010.

[32] S. Han, J. Wang, and N. Knigh, “No Title,” in *6th Int. Symposium on Mobile Mapping Technology*, 2009.

[33] А. Е. Измайлов, “Исследование точности прецизионных акселерометров и повышение их качества,” Дис. канд. техн. наук : спец. 05.11.14, МАТИ, 2003.

[34] С. Н. Лепе, “Разработка и исследование метода калибровки

избыточных измерителей ускорения с целью повышения точности БИНС,” ГОУ ВПО “МАТИ,” 2008.

[35] В. В. Аврутов, *Испытания инерциальных приборов*. Київ: НТУУ “КПІ,” 2016.

[36] С. В. Головач, “Методы испытаний и калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем,” Дис. канд. техн. наук : спец. 05.11.03, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017.

[37] Z. Syed, “Design and implementation issue of portable navigstion system,” The University of Calgary, 2009.

[38] E.-H. Shin, “Accuracy improvement of low cost INS/GPS for land application,” The University of Calgary, 2001.

[39] А. В. Фомичев, С. Е. Кухтевич і А. Е. Измайлов, “Результаты совершенствования программно-математического обеспечения системы БИНС-СП-2 по материалам летных испытаний,” *Труды Московского института электромеханики и автоматики*, № 7, С. 19–29, 2013.

[40] Н. Myint, “Calibration method accelerometers unit of inertial navigation system on test stand,” *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, Вип. 14, С. 38–54, 2014.

[41] M. S. Grewal, V. D. Henderson, and R. S. Miyasako, “Application of Kalman Filtering to the Calibration and Alignment of Inertial Navigation Systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 1, pp. 3–13, 1991.

[42] Ю. Г. Егоров, А. А. Дзуев і Е. А. Попов, “Синтез программы калибровки блока акселерометров БИНС при инвариантном подходе,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 27, № 1, С. 61–71, 2019.

[43] В. В. Аврутов, С. В. Головач, “Скалярный метод контроля и диагностики инерциально-измерительного модуля,” *Вісник НТУУ «КПІ». Приладобудування*, № 2, С. 14–20, 2014.

[44] M. Gietzelt, K. H. Wolf, M. Marschollek, and R. Haux, “Performance comparison of accelerometer calibration algorithms based on 3D-ellipsoid fitting methods,” *Comput. Methods Programs Biomed.*, vol. 111, no. 1, pp. 62–71, Jul. 2013.

[45] A. B. Chatfield, *Fundamentals Of High Accuracy Inertial Navigation*.

American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997.

[46] H. W. Park, J. G. Lee, and C. G. Park, "Covariance Analysis of Strapdown INS Considering Gyrocompass Characteristics," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 31, no. 1, pp. 320–328, 1995.

[47] D. Chung, J. G. Lee, C. G. Park, and H. W. Park, "Strapdown INS error model for multiposition alignment," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 32, no. 4, pp. 1362–1366, 1996.

[48] J. G. Lee, C. G. Park, and H. W. Park, "Multiposition Alignment of Strapdown Inertial Navigation System," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 1323–1328, 1993.

[49] M. E. Pittelkau, "Kalman filtering for spacecraft system alignment calibration," *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 24, no. 6, pp. 1187–1195, May 2001.

[50] C. Johnson, E. J. Ohlmeyer, and T. R. Pepitone, "Attitude dilution of precision - a new metric for observability of inflight alignment errors," in *18th Applied Aerodynamics Conference*, 2000.

[51] P. G. Savage, "A new second-order solution for strapped-down attitude computation," in *Guidance and Control Conference*, 1966, pp. 60–71.

[52] А. И. Ткаченко, "Алгоритм третьего порядка для вычисления параметров ориентации," *Мат. обеспечение ЭЦВМ*, № 1, С. 100–113, 1970.

[53] J. E. Bortz, "A new concept in strapdown inertial navigation," Massachusetts institute of technology, 1969.

[54] J. E. Bortz, "A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation," *IEEE Transactions Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 7, no. 1, pp. 61–66, 1971.

[55] Д. В. Лебедев, "Простые формулы для оценки методической ошибки вычисления направляющих косинусов в бесплатформенных системах," *Изв. вузов. приборостроение*, №. 11, С. 76–79, 1975.

[56] А. П. Панов, "Двухшаговые алгоритмы вычислений параметров ориентации," *Космические исследования на Украине*, № 5, С. 76–82, 1974.

[57] В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский, "Кинематические задачи ориентации во вращающейся системе координат," *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*, №. 6, С. 36–43, 1972.



[58] Ю. Н. Челноков, “Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига-Гамильтона,” *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*, № 3, С. 11–20, 1977.

[59] Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко, *Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты*. К.: АН УССР. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1991.

[60] Ю. Ф. Лазарев, *Моделювання на ЕОМ: Навчальний посібник*. К: Корнійчук, 2007.

[61] R. B. Miller, “A new strapdown attitude algorithm,” *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 6, no. 4, pp. 287–291, Jul. 1983.

[62] С. Л. Лакоза, “Інерціальна система оцінки параметрів руху людини,” Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2017.

[63] P. G. Savage, “Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms,” *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 21, no. 2, pp. 208–221, 1998.

[64] Г. И. Емельянцев, Б. А. Блажнов, і А. П. Степанов, “Особенности использования фазовых измерений в задаче ориентации интегрированной инерциально - спутниковой системы . результаты ходовых испытаний,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 3, №. 74, С. 3–11, 2011.

[65] Г. И. Емельянцев, Б. А. Блажнов і А. П. Степанов, “О решении задачи ориентации инерциально-спутниковой системой с использованием фазовых и магнитометрических определений для объектов с быстрым вращением,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 2, № 85, С. 28–42, 2014.

[66] Л. В. Водничева, Л. Н. Бельский, О. И. Маслова і Н. А. Лукин, “Оптимальное проектирование прецезионных малогабаритных БИНС для высокоманевренных подвижных объектов,” *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*, Вип. 4, № 20, С. 186–198, 2009.

[67] В. Б. Успенский, И. А. Багмут, “Решение задачи инерциальной навигации в бесплатформенной инерциальной навигационной системе,”

*Авиационно-Космическая техника и технология*, Вип. 3, № 60, С. 39–44, 2009.

[68] В. Я. Распопов, В. В. Матвеев, “Определение угловых параметров вращающегося по крену летательного аппарата,” *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*, Вип. 6, № 284, С. 115–119, 2010.

[69] Ю. Н. Челноков, С. Е. Переляев і Л. А. Челнокова, “Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта,” *Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика*, Вип. 16, № 1, С. 80–95, 2016.

[70] А. П. Панов, С. В. Пономаренко, “О применении неклассических кватернионов и пентанионов полувращений в задачах ориентации твердого тела,” in *Мат. XXIII міжн. конф. з автоматичного управління “Автоматика 2016,”* 2016, С. 32–35.

[71] О. М. Мелашенко, Б. В. Воловик, “Аналіз точності алгоритмів інтегрування кінематичних рівнянь руху твердого тіла,” *Механіка гіроскопічних систем : науково-технічний збірник.*, Вип. 25, С. 78–86, 2012.

[72] О. А. Бабич, “Исследование кинематики некоммутативных поворотов в алгоритмах ориентации БИНС методом аксоидов,” *Гироскопия и навигация*, Вип. 4, № 83, С. 110–120, 2013.

[73] Ю. А. Литманович, Д. Г. Марк, “Прогресс в разработке алгоритмов БИНС на западе и востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций: обзор за десятилетие,” *X Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам*, 2003, С. 250–260.

[74] И. В. Жежера, Уисам Будиба і С. Н. Фирсов, “Малогабаритная бесплатформенная инерциальная навигационная система автономного летательного аппарата с коррекцией от спутникового навигационного приёмника,” *Авиационно-Космическая техника и технология*, Вип. 1, С. 52–58, 2014.

[75] S. Zhang, Z. Su, and X. Li, “Real-Time Angular Motion Decoupling and Attitude Updating Method of Spinning Bodies Assisted by Satellite Navigation Data,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 184340–184352, 2019.

[76] Є. І. Білоус, О. І. Нестеренко, “Спрощення моделі вимірювання в

алгоритмі кватерніонного фільтра Калмана безплатформної курсовертикалі,” *Наукові вісті НТУУ “КПІ,”* Вип. 1, С. 52–58, 2019.

[77] K. Feng *et al.*, “A New Quaternion-Based Kalman Filter for Real-Time Attitude Estimation Using the Two-Step Geometrically-Intuitive Correction Algorithm,” *Sensors*, vol. 17, pp. 1–21, 2017.

[78] W. Zhang, M. Ghogho, and B. Yuan, “Mathematical Model and Matlab Simulation of Strapdown Inertial Navigation System,” *Model. Simul. Eng.*, vol. 2012, pp. 1–25, 2012.

[79] Y. Jiong, Z. Lei, S. Rong, and W. Jianyu, “Initial alignment for SINS based on low-cost IMU,” *J. Comput.*, vol. 6, no. 6, pp. 1080–1085, 2011.

[80] C. W. Kang and C. G. Park, “Euler angle based attitude estimation avoiding the singularity problem,” *IFAC Proc. Vol.*, vol. 44, no. 1 PART 1, pp. 2096–2102, 2011.

[81] R. Zhi, “A Drift Eliminated Attitude & Position Estimation Algorithm In 3D,” The University of Vermont, 2016.

[82] Y. Liu, H. Wang, F. Cheng, M. Wang, and X. Ni, “Improvement Method of Full-Scale Euler Angles Attitude Algorithm for Tail-Sitting Aircraft,” Springer, Singapore, 2018, pp. 257–269.

[83] Y. Wu, “Next-Generation Inertial Navigation Computation Based on Functional Iteration,” *CoRR*, vol. abs/1905.1, 2019.

[84] Y. Wu and Y. A. Litmanovich, “Strapdown Attitude Computation: Functional Iterative Integration versus Taylor Series Expansion,” Sep. 2019.

[85] В. Л. Волков, Н. В. Жидкова, “Обработка информации в системе ориентации на основе МЭМС,” *Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева*, Вип. 110, № 3, С. 279–286, 2015.

[86] В. Л. Волков, Н. В. Жидкова, “Особенности моделирования безплатформенных инерциальных систем,” *Научное обозрение. Технические науки*, №. 4, С. 5–12, 2016.

[87] Н. В. Жидкова, В. Л. Волков, “Моделирование безплатформенной системы ориентации,” *Современные проблемы науки и образования*, №. 1, С. 20–24, 2015.

[88] Г. А. Филатова, “Навигация автономного подводного аппарата при помощи бескарданной инерциальной навигационной системы,” Дис. канд. техн. наук : спец. 01.02.01, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2017.

[89] О. Н. Богданов, “Методика согласованного моделирования измерений инерциальных датчиков, траекторных параметров объекта с приложением к задачам инерциальной и спутниковой навигации,” Дис. канд. техн. наук : спец. 01.02.01, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015.

[90] М. І. Некрасова, “Гібридна інерціальна навігаційна система для об’єктів з високою кутовою динамікою,” Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Дис. канд. техн. наук : спец. 05.11.03, Харків, 2019.

[91] В. В. Аврутов, Т. Ю. Мазепа, “Влияние погрешности поворота стенда на точность калибровки блока гироскопов и акселерометров,” *Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування*, Вип. 43, С. 5–10, 2012.

[92] А. Н. Сапегин, В. М. Шелевер, “Калибровка блока лазерных гироскопов на неподвижном основании,” *Мат. 10-й Межд. научно-техн. конф. молодых ученых и студентов «Новые направления развития приборостроения»*, 2017, Том 2. С. 124.

[93] Е. А. Измайлов, С. Н. Лепе, А. В. Молчанов і Е. Ф. Поликовский, “Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем,” *Юбилейная XV Санкт-Петербургская Межд. конф. по интегрированным навигационным системам*, 2008, С. 145–154.

[94] Х. Н. Мьинт, “Метод калибровки блока акселерометров инерциальной навигационной системы на испытательном стенде,” *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, Вип. 14, № 01, С. 38–54, 2014.

[95] В. В. Аврутов, С. В. Головач, О. М. Сапегін і М. Ю. Хутко, “Метод калібрування і корекції вихідних сигналів тривісного акселерометра,” *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*, №. 1, С. 92–98, 2016.

[96] V. V. Avrutov, “On scalar calibration of an inertial instrument cluster,” *Innov. Technol. News*, vol. 2, no. 11, pp. 22–30, 2011.

[97] V. V Avrutov, A. N. Sapegin, Z. S. Stefanishin, and V. V Tsisarzh,

“Calibration of an Inertial Measurement Unit,” *Int. Appl. Mech.*, vol. 53, no. 2, pp. 228–236, Mar. 2017.

[98] Ю. Ф. Лазарєв, О. М. Сапегін, *Алгоритми безплатформових інерціальних систем орієнтації. Прикладні методи синтезу і аналізу точності: Навчальний посібник*. К: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.

[99] А. Л. Кивокурцев, “Повышение эксплуатационной надёжности интегрированного бортового оборудования на основе реконфигурации структуры его вычислительной системы,” «Московский государственный технический университет гражданской авиации», 2014.

[100] Ю. Ф. Лазарєв, *Кінематика твердого тіла*. К.: НТУУ “КПІ,” 2014.

[101] O. Sapegin, G. Strokach, “Microelectromechanical Inclinator,” *Bull. Kyiv Polytech. Institute. Ser. Instrum. Mak.*, vol. 59, no. 1, pp. 24–29, Jul. 2020.

[102] А. Н. Сапегин, Д. В. Бугайов, “Система ориентации на базе МАХ 21105,” *Міжн. наук.-практ. коф. «Проблеми енергоефективності та автоматизації в промисловості та сільському господарстві»*, 2015, С. 120–121.

[103] Ю. Ф. Лазарєв, А. Н. Сапегин, “О точности численного интегрирования уравнения ориентации пуассона методами Рунге-Кутты и Пикара,” *Вісник інженерної академії наук України*, №. 3, С. 133–139, 2015.

[104] О. М. Сапегін, М. В. Норенко, “Алгоритм безплатформної інерціальної системи орієнтації на лазерних гіроскопах,” *Наукові вісті НТУУ “КПІ,”* №. 2, С. 108–113, 2017.

[105] О. М. Сапегін, М. О. Романов і Д. В. Бугайов, “Безплатформна інерціальна навігаційна система на основі динамічно настроєних гіроскопів,” *Наукові вісті НТУУ “КПІ,”* №. 6, С. 94–100, 2016.

[106] О. М. Сапегін, “Актуальні проблеми у проектуванні алгоритмів сучасних безплатформових інерціальних навігаційних систем,” *XIV Міжн. наук.-техн. конф. “Приладобудування – 2015: стан і перспективи,”* 2015, С. 29–30.

[107] О. М. Сапегін, “Проектування точних алгоритмів сучасних безплатформових інерціальних навігаційних систем,” *Восьма міжн. наук.-практ. конф. «ІРТК-2015»*, 2015, С. 51–53.

[108] О. М. Сапегін, В. А. Яковенко, “Аналіз швидкодії алгоритмів

безплатформенних інерціальних систем орієнтації,” *XIX Міжнар. наук.-техні. конф. «Приладобудування: стан і перспективи», 13-14 травня 2020 р., 2020, С. 17–19.*

[109] Ю. Ф. Лазарев, А. Н. Сапегин, “Исследование точности различных методов численного интегрирования уравнения ориентации Пуассона,” *Вісник інженерної академії наук України*, №. 2, С. 94–100, 2015.

[110] М. Ф. Будённый *et al.*, “Об автоматизированном проектировании системы программно-аппаратных средств на базе гиперкомплексных чисел для задач ориентации твердого тела. Ч. 2,” *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*, Вип. 4, № 4, С. 77–85, 2002.

[111] С. В. Ільчук, “Алгоритми безплатформової інерціальної системи орієнтації на основі рівняння Пуассона,” *НТУУ “КПІ”*, 2017.

[112] Ю. Ф. Лазарев, П. М. Аксененко і С. А. Мураховський, “Исследование точности алгоритмов БИСО,” *Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування*, № 2, С. 10–15, 2016.

[113] Y. Lazarev, V. Avrutov, P. Mironenko, S. Davydenko, and O. Sapegin, “Precision quaternion based one step strapdown attitude algorithm,” *Bull. Kyiv Polytech. Institute. Ser. Instrum. Mak.*, vol. 60, no. 2, pp. 5–15, Dec. 2020.

[114] О. М. Сапегін, О. С. Бельський, “Безплатформова інерціальна навігаційна система на динамічно налагоджених гіроскопах,” *Друга Українська наук.-техн. конф. «Спеціальне приладобудування: стан і перспективи»*, 2016, С. 89–90.

[115] V. V. Avrutov, S. L. Lakoza, L. M. Ryzhkov, and O. M. Sapegin, “Inertial Position Determination Under Vibration,” *Vib. Phys. Syst.*, vol. 31, no. 2, pp. 1–10, 2020.

[116] V. Avrutov, S. Lakoza, and O. Sapegin, “Strapdown Latitude and Longitude Finder,” in *Proc. 2020 IEEE 6th Int. Conf. on Methods and Systems of Navigation and Motion Control, MSNMC 2020*, 2020, pp. 29–33.

[117] O. Sapegin, S. Lakoza, V. Avrutov, and D. Buhaiov, “Latitude autonomous determination on fixed base with varied attitude,” in *Proc. Int. Conf. of Young Professionals «GeoTerrace-2020»*, 2020, vol. 2020, no. 1, pp. 1–5.

[118] Інтегрування алгоритму орієнтації методом Рунге-Кутта: Свідоцтво №65194 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 5.05.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

[119] О. М. Сапегін, “Конічний рух інерціального вимірювального модуля,” *XVII Міжн. наук.-техн. конф. “Приладобудування - 2018: стан і перспективи,”* 2017, С. 25.

[120] А. Н. Сапегін, Д. В. Бугайов, “Програмная модель бесплатформенной системы ориентации на базе инерциального измерительного модуля МАХ21105,” *Вісник інженерної академії України*, №. 1, С. 119–122, 2016.

[121] А. Н. Сапегін, М. В. Норенко, “Бесплатформенная инерциальная навигационная система на основе прецизионных микромеханических датчиков,” *Мат. 9-й Межд. научно-техн. конф. «Приборостроение», Минск, 2016, С. 120–122.*

[122] О. М. Сапегін, М. О. Романов, “Програмна модель системи орієнтації на базі динамічно налагоджуваних гіроскопів,” *Дев'ята міжн. наук.-практ. конф. «ІРТК-2016»,* 2016, С. 57–58.

[123] О. М. Сапегін, Д. В. Бугайов, “Програмна модель системи орієнтації на базі МАХ21105,” *Дев'ята міжн. наук.-практ. конф. «ІРТК-2016»,* 2016, С. 55–56.

[124] О. М. Сапегін, “Моделювання системи орієнтації на базі МАХ21105,” *XV Між. наук.-техн. конф. “Приладобудування - 2016: стан і перспективи,”* 2016, С. 23–24.

[125] Безплатформна система орієнтації: Свідоцтво №62912 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Півторак Д.О. – Зареєстровано 10.12.2015 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

[126] Мікромеханічна безплатформна система орієнтації: Свідоцтво №64218 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна

програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 26.02.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

[127] Безплатформна система орієнтації на базі динамічно налагоджених гіроскопів: Свідоцтво №64219 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Романов М.О., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Романов М.О., Півторак Д.О. – Зареєстровано 26.02.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

[128] Розробка алгоритмів початкової виставки та виставки у польоті безплатформової інерціальної навігаційної системи. Частина 1. Методи просторового калібрування інерціально-вимірювального модуля БІНС. Концепція створення. Принципи побудови,” : звіт про НТР №489/6, кер. Н. І. Бурау, К., 2018 – 145 С.

[129] Г. Ю. Строкач, О. М. Сапегін, “Кутомір на основі акселерометру ADXL-335,” *Мат. XII Всеукр. наук.-практ. конф. “Погляд у майбутнє приладобудування,”* 2019, С. 46–48.

[130] О. М. Сапегін, “Програмне моделювання безплатформової системи орієнтації на лазерних гіроскопах,” *XVI Міжн. наук.-техн. конф. “Приладобудування – 2017: стан і перспективи,”* 2017, С. 24–25.

[131] Г. Ю. Строкач, О. М. Сапегін, “Кутомір на основі мікромеханічного інерціального вимірювального модуля,” *Мат. XIII Всеукр. наук.-практ. конф. “Погляд у майбутнє приладобудування,”* 2020, С. 67–70.

[132] Г. Ю. Строкач, О. М. Сапегін, “Фільтр Маджвіка в алгоритмі інклінометра,” *Тринадцята міжн. наук.-практ. конф. «ІРТК-2020»,* 2020, С. 258–260.

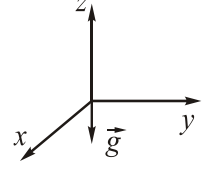
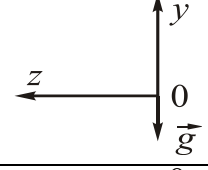
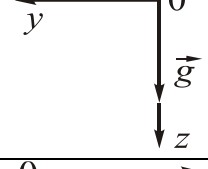
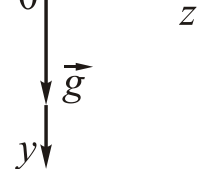
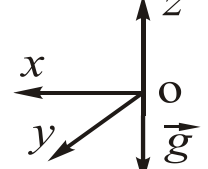
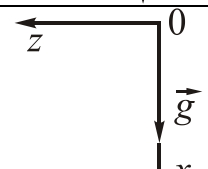
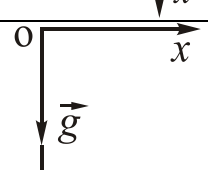
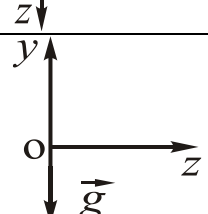
[133] Г. Ю. Строкач, О. М. Сапегін, “Комплементарний фільтр для мікромеханічного інклінометру,” *Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень (Т.1),* 2020, С. 58–60.



# ДОДАТОК А

## Калібрування інерціального вимірювального модуля

Таблиця А.1 Вихідні сигнали блоку акселерометрів

	Положення	Проекції прискорення	Вихідні сигнали акселерометрів
Поворот навколо $x$			
1		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = g$	$U_{ax1} = B_{ax} + k_{13} \cdot g$ $U_{ay1} = B_{ay} + k_{23} \cdot g$ $U_{az1} = B_{az} + k_{33} \cdot g$
2		$a_x = 0$ $a_y = g$ $a_z = 0$	$U_{ax2} = B_{ax} + k_{12} \cdot g$ $U_{ay2} = B_{ay} + k_{22} \cdot g$ $U_{az2} = B_{az} + k_{32} \cdot g$
3		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = -g$	$U_{ax3} = B_{ax} - k_{13} \cdot g$ $U_{ay3} = B_{ay} - k_{23} \cdot g$ $U_{az3} = B_{az} - k_{33} \cdot g$
4		$a_x = 0$ $a_y = -g$ $a_z = 0$	$U_{ax4} = B_{ax} - k_{12} \cdot g$ $U_{ay4} = B_{ay} - k_{22} \cdot g$ $U_{az4} = B_{az} - k_{32} \cdot g$
Поворот навколо $y$			
5		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = g$	$U_{ax5} = B_{ax} + k_{13} \cdot g$ $U_{ay5} = B_{ay} + k_{23} \cdot g$ $U_{az5} = B_{az} + k_{33} \cdot g$
6		$a_x = -g$ $a_y = 0$ $a_z = 0$	$U_{ax6} = B_{ax} - k_{11} \cdot g$ $U_{ay6} = B_{ay} - k_{21} \cdot g$ $U_{az6} = B_{az} - k_{31} \cdot g$
7		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = -g$	$U_{ax7} = B_{ax} - k_{13} \cdot g$ $U_{ay7} = B_{ay} - k_{23} \cdot g$ $U_{az7} = B_{az} - k_{33} \cdot g$
8		$a_x = g$ $a_y = 0$ $a_z = 0$	$U_{ax8} = B_{ax} + k_{11} \cdot g$ $U_{ay8} = B_{ay} + k_{21} \cdot g$ $U_{az8} = B_{az} + k_{31} \cdot g$

Процедури калібрування блоку акселерометрів

```

%% КАЛИБРОВКА БЛОКА ОСЕВЫХ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ
clc, clear all
format compact
dtr=pi/180; rtd=180/pi;
g_id = -9.81;% При розрахунку коефіцієнтів в [В/м/с^2]
% Калібровочні параметри акселерометрів
Bax=2.5; Bay=2.5; Baz=2.5; % нулевой сигнал, В
k11=1.0; k22=1.0; k33=1.0; % масштабный к-т, В/г
k12=0.01; % к-т перекрестной связи, В/г
k13=-0.01; % к-т перекрестной связи, В/г
k21=-0.01; % к-т перекрестной связи, В/г
k23=0.01; % к-т перекрестной связи, В/г
k31=0.01; % к-т перекрестной связи, В/г
k32=-0.01; % к-т перекрестной связи, В/г
fs=10;% Частота опитування датчиків
measure_time = 200;%час вимірювання в одному положенні [с]
st = fs*measure_time;
%% Похибки
% Похибки обладнання
err_angle = 5/3600*dtr; %5" % Погрешность ОДГ
% похибки оснастки
alpha_x = 2/3600*dtr; beta_y = 2/3600*dtr; gamma_z = 2/3600*dtr;
C_osnastka = [ 1 gamma_z -alpha_x;
              -gamma_z 1 beta_y;
              alpha_x -beta_y 1 ];
% Похибки датчиків
sens_SF_err = 500*1e-6;% нестабільність МК, задається в ppm
acc_sensor_noise = 5e-4;% СКО в м/с^2
del_B = 50e-6;% нестабільність зміщення нуля від положення до положення;
% чи від запуску до запуску
%% Вибір методу
vubir = 'Test_rot';
% vubir = 'Block_calibr';
if strcmp(vubir, 'Block_calibr')
    % Поворот стенда
    alfa_bgn = 0*dtr;
    alfa_end = 400*dtr;
    step_alfa = 10*dtr;
    beta_bgn = 0*dtr;
    beta_end = 400*dtr;
    step_beta = 10*dtr;
    gama_bgn = 0*dtr;
    gama_end = 400*dtr;
    step_gama = 10*dtr;
    alfa_model = (0:10:400)*dtr;
    beta_model = (0:10:400)*dtr;
    gama_model = (0:10:400)*dtr;
end
if strcmp(vubir, 'Test_rot')
    alfa_model = [0 0 0 0 0 0 0 0]*dtr;
    beta_model = [0 90 180 270 0 0 0 0]*dtr;
    gama_model = [0 0 0 0 0 90 180 270]*dtr;
end
%% Похибки виставки стенду в задане модельне положення
n_angles=length(beta_model); % размерность массивов
alfa = alfa_model + err_angle;% Поворот на Альфа с случайной погрешностью
beta = beta_model + err_angle;% Поворот на Бета с случайной погрешностью
gama = gama_model + err_angle;% Поворот на Гамма с случайной погрешностью
%% вычисление элементов КВАТЕРНИОНА
% розрахунок по тих положеннях, в які стенд виставився з врахуванням
% похибки
snALFA=sin(alfa/2);
csALFA=cos(alfa/2);
snBETA=sin(beta/2);
csBETA=cos(beta/2);
snGAMA=sin(gama/2);

```

```

csGAMA=cos(gama/2);
for i=1:n_angles
a(i)=csALFA(i)*csBETA(i)*csGAMA(i)+snALFA(i)*snBETA(i)*snGAMA(i);
b(i)=csALFA(i)*snBETA(i)*csGAMA(i)+snALFA(i)*csBETA(i)*snGAMA(i);
c(i)=csALFA(i)*csBETA(i)*snGAMA(i)-snALFA(i)*snBETA(i)*csGAMA(i);
d(i)=snALFA(i)*csBETA(i)*csGAMA(i)-csALFA(i)*snBETA(i)*snGAMA(i);
end
% розрахунок по модельних положеннях
snALFA_ODG_model=sin(alfa_model/2);
csALFA_ODG_model=cos(alfa_model/2);
snBETA_ODG_model=sin(beta_model/2);
csBETA_ODG_model=cos(beta_model/2);
snGAMA_ODG_model=sin(gama_model/2);
csGAMA_ODG_model=cos(gama_model/2);
for i=1:n_angles
a_ODG_model(i)=csALFA_ODG_model(i)*csBETA_ODG_model(i)*csGAMA_ODG_model(i)...
+snALFA_ODG_model(i)*snBETA_ODG_model(i)*snGAMA_ODG_model(i);
b_ODG_model(i)=csALFA_ODG_model(i)*snBETA_ODG_model(i)*csGAMA_ODG_model(i)...
+snALFA_ODG_model(i)*csBETA_ODG_model(i)*snGAMA_ODG_model(i);
c_ODG_model(i)=csALFA_ODG_model(i)*csBETA_ODG_model(i)*snGAMA_ODG_model(i)...
-snALFA_ODG_model(i)*snBETA_ODG_model(i)*csGAMA_ODG_model(i);
d_ODG_model(i)=snALFA_ODG_model(i)*csBETA_ODG_model(i)*csGAMA_ODG_model(i)...
-cnALFA_ODG_model(i)*snBETA_ODG_model(i)*snGAMA_ODG_model(i);
end
% вычисление элементов матрицы направляющих косинусов
for i=1:n_angles
a13(i)=2*(b(i)*d(i)-a(i)*c(i));
a23(i)=2*(c(i)*d(i)+a(i)*b(i));
a33(i)=(a(i)^2-b(i)^2-c(i)^2+d(i)^2);
a13_ODG_model(i) = 2*(b_ODG_model(i)*d_ODG_model(i)-
a_ODG_model(i)*c_ODG_model(i));
a23_ODG_model(i) =
2*(c_ODG_model(i)*d_ODG_model(i)+a_ODG_model(i)*b_ODG_model(i));
a33_ODG_model(i) = (a_ODG_model(i)^2-b_ODG_model(i)^2-
c_ODG_model(i)^2+d_ODG_model(i)^2);
end
%% расчет проекций g
gxyz = C_osnastka*[-g_id * a13
-g_id * a23
-g_id * a33];
gx=gxyz(1,:);% тут не треба похибок вим?рювання датчика +acc_sens_err ;
gy=gxyz(2,:);% це просто значення проекц?й в положенн?, в якому
gz=gxyz(3,:);% виставили стенд з точн?стю до його похибок
gx_ODG_model = -g_id * a13_ODG_model';
gy_ODG_model = -g_id * a23_ODG_model';
gz_ODG_model = -g_id * a33_ODG_model';
%% выходные сигналы акселерометров
uax = []; uay= []; uaz = [];
alfa_time = []; beta_time = []; gama_time = [];
for i=1:n_angles
d_B = del_B*randn(3,1); tmp_arr = ones(st,1);
uax1m = Bax+d_B(1) + k11*(1 + sens_SF_err*randn(st,1)).*gx(i).*tmp_arr ...
+ k12*gy(i).*tmp_arr + k13*gz(i).*tmp_arr;
uay1m = Bay + d_B(2) + k21*gx(i).*tmp_arr + k22*(1 +
sens_SF_err*randn(st,1)).*gy(i).*tmp_arr + k23*gz(i).*tmp_arr;
uaz1m = Baz + d_B(3) + k31*gx(i).*tmp_arr + k32*gy(i).*tmp_arr + k33*(1 +
sens_SF_err*randn(st,1)).*gz(i).*tmp_arr;
uax=[uax; uax1m]; uay=[uay; uay1m]; uaz=[uaz; uaz1m];
alfa_time=[alfa_time; alfa_model(i).*tmp_arr];
beta_time=[beta_time; beta_model(i).*tmp_arr];
gama_time=[gama_time; gama_model(i).*tmp_arr];
end
% Випадкова ПОХИБКА датчика
% acc_sens_err = 0*1e-2;%[м/с^2]
NN=length(uax);
uax=uax + k11*acc_sensor_noise*randn(NN,1);

```

```

uay=uay + k22*acc_sensor_noise*randn(NN,1);
uaz=uaz + k33*acc_sensor_noise*randn(NN,1);
%% Нахождение Калибровочных коэф.
uax_m = []; uay_m= []; uaz_m = [];
for i=1:n_angles
    uax_m(i,1) = mean(uax( (1+st*(i-1)):(st*i) ) );
    uay_m(i,1) = mean(uay( (1+st*(i-1)):(st*i) ) );
    uaz_m(i,1) = mean(uaz( (1+st*(i-1)):(st*i) ) );
end
if strcmp(vubir,'Block_calibr')
    % Нахождение X1
    z=size(uax_m); IT=ones(z);
    % Формирование матрицы G
    G=[IT gx_ODG_model gy_ODG_model gz_ODG_model]; GTG=(G'*G)\G';
    Ua=[uax_m uay_m uaz_m]; % матрица левых частей
    GUa=[G Ua]; % расширенная матрица
    RankG=rank(G); RankGUa=rank(GUa); X1=GTG*Ua;
    % Формування відповідних калібровочних коефіцієнтів
    B=(X1(1,:))'; Q=X1(2:end,:); Q=Q';
end
if strcmp(vubir,'Test_rot')
    Bax_k=mean(uax_m);
    Bay_k=mean(uay_m);
    Baz_k=mean(uaz_m);
    k11_k=( uax_m(6)-uax_m(8) )/(2*g_id);
    k12_k=( uax_m(4)-uax_m(2) )/(2*g_id);
    k13_k=( uax_m(3)+uax_m(7)-uax_m(1)-uax_m(5) )/(4*g_id);
    k21_k=(uay_m(6)-uay_m(8))/(2*g_id);
    k22_k=(uay_m(4)-uay_m(2))/(2*g_id);
    k23_k=(uay_m(3)+uay_m(7)-uay_m(1)-uay_m(5))/(4*g_id);
    k31_k=(uaz_m(6)-uaz_m(8))/(2*g_id);
    k32_k=(uaz_m(4)-uaz_m(2))/(2*g_id);
    k33_k=(uaz_m(3)+uaz_m(7)-uaz_m(1)-uaz_m(5) )/(4*g_id);
    B=[Bax_k Bay_k Baz_k];
    Q=[k11_k k12_k k13_k;
        k21_k k22_k k23_k;
        k31_k k32_k k33_k];
end
%% Проверка калибровки
A = inv(Q)*[uax' - B(1);
            uay' - B(2);
            uaz' - B(3)];
A_mean = [];
for i=1:n_angles
    bm=1+st*(i-1); enm=(st*i);
    A_mean(:,i) = mean(transpose( A(:,bm:enm) ));
end
% Погрешность
Gxyz=[gx'; gy'; gz'];
Gxyz_ODG_model=[gx_ODG_model'; gy_ODG_model'; gz_ODG_model'];
deltaA = A_mean - Gxyz_ODG_model; % deltaA = A - Gxyz;
dA_max=[max(abs(deltaA(1,:))); max(abs(deltaA(2,:))); max(abs(deltaA(3,:)))];
dA_mean=[mean(deltaA(1,:)); mean(deltaA(2,:)); mean(deltaA(3,:))];
dA_std=[std(deltaA(1,:)); std(deltaA(2,:)); std(deltaA(3,:))];
%% График поворота стенда
% figure(1); subplot(3,1,1)
% plot(alfa_time*rtd,'Color','#D95319','LineWidth',3), grid minor
% set(gca,'FontSize',14); legend('\alpha');
% subplot(3,1,2)
% plot(beta_time*rtd,'Color','#0072BD','LineWidth',3), grid minor
% ylabel('Кут, град'); set(gca,'FontSize',14)
% legend('\beta')
% subplot(3,1,3)
% plot(gama_time*rtd,'Color','#EDB120','LineWidth',3), grid minor
% set(gca,'FontSize',14); legend('\gamma'); xlabel('Час, c')
figure(2); subplot(3,1,1)

```

```

plot(gx, '-s', 'Color', '#D95319', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid minor
set(gca, 'FontSize', 14); legend('a_x')
subplot(3,1,2)
plot(gy, '-*', 'Color', '#0072BD', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid minor
xlim([0 length(gx)]); ylabel('a, м/{с^2}'); set(gca, 'FontSize', 14)
legend('a_y')
subplot(3,1,3); plot(gz, '-o', 'Color', '#EDB120', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8),
grid minor; set(gca, 'FontSize', 14); legend('a_z'); xlabel('Номер положения')
%% построение графиков Ux, Uy, Uz
% figure(3); subplot(3,1,1)
% plot(uax, 'Color', '#D95319', 'LineWidth', 3), grid minor; xlim([0 length(uax)])
% title('Осьовий акселерометр'); set(gca, 'FontSize', 14); legend('U_{ax}')
% subplot(3,1,2); plot(uay, 'Color', '#0072BD', 'LineWidth', 3), grid minor
% ylabel('Ua, В'); set(gca, 'FontSize', 14); legend('U_{ay}')
% subplot(3,1,3); plot(uaz, 'Color', '#EDB120', 'LineWidth', 3), grid minor
% set(gca, 'FontSize', 14); legend('U_{az}'); xlabel('Час, с')
%% построение откалиброванных графиков Ax, Ay, Az
% figure(4); subplot(3,1,1)
% plot(A(1,:), 'Color', '#D95319', 'LineWidth', 3), grid minor
% title('Осьовий акселерометр'); set(gca, 'FontSize', 14); legend('Ax')
% title('Відкалібровані значення прискорень')
% subplot(3,1,2)
% plot(A(2,:), 'Color', '#0072BD', 'LineWidth', 3), grid minor
% ylabel('A, м/{с^2}'); set(gca, 'FontSize', 14); legend('Ay'); subplot(3,1,3)
% plot(A(3,:), 'Color', '#EDB120', 'LineWidth', 3), grid minor
% set(gca, 'FontSize', 14)
% legend('Az'); % xlabel('Час, с')
%% График погрешности
% figure(5) % subplot(3,1,1)
% plot(deltaA(1,:), '-s', 'Color', '#D95319', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8
% xlim([0 length(deltaA(1,:))]); % title('Осьовий акселерометр');
% set(gca, 'FontSize', 14); % legend('\delta Ax')
% subplot(3,1,2)
% plot(deltaA(2,:), '-*', 'Color', '#0072BD', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8
% xlim([0 length(deltaA(1,:))]); ylabel('\delta A, м/{с^2}')
% set(gca, 'FontSize', 14); legend('\delta Ay'); subplot(3,1,3)
% plot(deltaA(3,:), '-o', 'Color', '#EDB120', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8
% xlim([0 length(deltaA(1,:))]); % set(gca, 'FontSize', 14)
% legend('\delta Az'); % xlabel('Номер положения')

```

## Процедури просторового калібрування блоку гіроскопів

```

%% КАЛИБРОВКА БЛОКА ОСЕВЫХ ГИРОСКОПОВ
clc, clear all
format compact
dtr=pi/180; rtd=180/pi;
% формирование выходных сигналов БГ
Vx=2; Vy=2; Vz=2; % нулевой сигнал, В
n11=0.1; n22=0.1; n33=0.1; % масштабный к-т, В/град/с
n12=0.01; % к-т перекрестной связи, В/град/с
n13=-0.02; % к-т перекрестной связи, В/град/с
n21=-0.01; % к-т перекрестной связи, В/град/с
n23=0.01; % к-т перекрестной связи, В/град/с
n31=0.03; % к-т перекрестной связи, В/град/с
n32=-0.01; % к-т перекрестной связи, В/град/с
fs=10; % Частота опитування датчиків
measure_time = 200; % час вимірювання в одному положенні [с]
st = fs*measure_time;
% Похибки датчиків
sens_SF_err = 500*1e-6; % нестабільність МК, задається в ppm
om_sensor_noise = 1e-3; % СКО в [градус/с]
del_B = 1e-3 / 3600; % нестабільність зміщення нуля від положення до положення;
% чи від запуску до запуску [град/год]->[градус/с]
% Похибки обладнання

```

```

err_om_stand_rand_const = 0*0.002/3600; % СКО в [град/год] -> [градус/с]
err_om_stand_rand = 5e-5; % стабільність вращення Aсutronic 0.005%
% задаєтьсяя ВІДСОТКАХ

% похибки оснастки
alpha_x = 2/3600*dtr; betta_y = 2/3600*dtr; gamma_z = 2/3600*dtr;
C_osnastka = [ 1 gamma_z -alpha_x;
              -gamma_z 1 betta_y;
              alpha_x -betta_y 1 ];

%% Вибір методу
% vubir = 'MNK';
vubir = 'Block_calibr';
if strcmp(vubir, 'Block_calibr')
%% Угловая скорость стенда OmX, OmY, OmZ
omega=10;
% задание проекций OMEGA
OmegaX_model = 1e-0*(10:10:100);%градуси/с %*dtr;
OmegaY_model = 1e-0*(10:10:100);%градуси/с %*dtr;
OmegaZ_model = 1e-0*(10:10:100);%градуси/с %*dtr;
OmegaX_model = OmegaX_model';
OmegaY_model = OmegaY_model'.^(1/2);
OmegaZ_model = OmegaZ_model'.^(1/3);
end
if strcmp(vubir, 'MNK')
%% задание проекций OMEGA
OmegaX_model = 1e-0*[10 20 30 40 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];%град/с
OmegaY_model = 1e-0*[0 0 0 0 10 20 30 40 0 0 0 0 0 0];%град/с
OmegaZ_model = 1e-0*[0 0 0 0 0 0 0 0 10 20 30 40 0 0];%град/с
end
%% %%%%%%%%%%%%%%% Ошибка стенда %%%%%%%%%%%%%%%
%% вихідні кутові швидкості обертання стенда, враховуючи його похибки
n_OM = length(OmegaX_model);
OmX_stand = []; OmY_stand= []; OmZ_stand = [];
OmX_stand_mean = []; OmY_stand_mean = []; OmZ_stand_mean = [];
uxg = []; uyg = []; uzg = [];
OmX_time = []; OmY_time = []; OmZ_time = [];
for i=1:n_OM
    tmp_arr = ones(st,1);
    OmX_1m = OmegaX_model(i)*(1+err_om_stand_rand*tmp_arr.*randn(st,1)) ...
            + err_om_stand_rand_const*randn;
    OmY_1m = OmegaY_model(i)*(1+err_om_stand_rand*tmp_arr.*randn(st,1)) ...
            + err_om_stand_rand_const*randn;
    OmZ_1m = OmegaZ_model(i)*(1+err_om_stand_rand*tmp_arr.*randn(st,1)) ...
            + err_om_stand_rand_const*randn;
    OmX_stand = [OmX_stand; OmX_1m];
    OmY_stand = [OmY_stand; OmY_1m];
    OmZ_stand = [OmZ_stand; OmZ_1m];
    %% %%%%%%%%%%%%%%% Сигнал ДКШ з похибками %%%%%%%%%%%%%%%
    % % ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ БГ
    d_B = del_B*randn(3,1);
    bm=1+st*(i-1); enm=(st*i);
    Om_osn = C_osnastka * [OmY_stand(bm:enm)';
                          OmZ_stand(bm:enm)';
                          OmX_stand(bm:enm)'];
    ugx1m = Bx+d_B(1) + n11*(1 + sens_SF_err*randn(st,1)).*Om_osn(1,:)'.*tmp_arr ...
            + n12*Om_osn(2,:)'.*tmp_arr + n13*Om_osn(3,:)'.*tmp_arr;
    ugy1m = By + d_B(2) + n21*Om_osn(1,:)'.*tmp_arr ...
            + n22*(1 + sens_SF_err*randn(st,1)).*Om_osn(2,:)'.*tmp_arr
            + n23*Om_osn(3,:)'.*tmp_arr;
    ugz1m = Bz + d_B(3) + n31*Om_osn(1,:)'.*tmp_arr + n32*Om_osn(2,:)'.*tmp_arr ...
            + n33*(1 + sens_SF_err*randn(st,1)).*Om_osn(3,:)'.*tmp_arr;
    uxg = [uxg; ugx1m];
    uyg = [uyg; ugy1m];
    uzg = [uzg; ugz1m];
    OmX_time=[OmX_time; OmegaX_model(i)*tmp_arr];
    OmY_time=[OmY_time; OmegaY_model(i)*tmp_arr];
    OmZ_time=[OmZ_time; OmegaZ_model(i)*tmp_arr];

```

```

end
% Випадкова ПОХИБКА датчика
NN=length(uxg);
uxg=uxg + n11*om_sensor_noise*randn(NN,1);
uyg=uyg + n22*om_sensor_noise*randn(NN,1);
uzg=uzg + n33*om_sensor_noise*randn(NN,1);
U_full=[uxg; uyg; uzg];
% Omega_full=[OmegaX; OmegaY; OmegaZ];
% % Графики OmX OmY OmZ
% figure(1); subplot(3,1,1)
% plot(OmX_time,'Color','#D95319','LineWidth',3),grid minor
% xlim([0 length(OmX_time)]); set(gca,'FontSize',14)
% legend('\omega_x');
% subplot(3,1,2); plot(OmY_time,'Color','#0072BD','LineWidth',3),grid minor
% xlim([0 length(OmX_time)]); ylabel('\omega, {\^o}/c'); set(gca,'FontSize',14)
% legend('\omega_y')
% subplot(3,1,3); plot(OmZ_time,'Color','#EDB120','LineWidth',3),grid minor
% xlim([0 length(OmX_time)]); set(gca,'FontSize',14); legend('\omega_z')
% xlabel('Час, c')
% % Графики UX UY UZ
% figure(2);subplot(3,1,1); plot(uxg,'Color','#D95319','LineWidth',3),grid minor
% xlim([0 length(uxg)]); set(gca,'FontSize',14); legend('U_x')
% subplot(3,1,2); plot(uyg,'Color','#0072BD','LineWidth',3),grid minor
% xlim([0 length(uxg)]); ylabel('U, B'); set(gca,'FontSize',14); legend('U_y')
% subplot(3,1,3); plot(uzg,'Color','#EDB120','LineWidth',3),grid minor
% xlim([0 length(uxg)]); set(gca,'FontSize',14); legend('U_z'); xlabel('Час, c')
% Усреднение на каждом положении стенда
uxg_m = []; uyg_m= []; uzg_m = [];
for i=1:n_OM
uxg_m(i,1) = mean(uxg( (1+st*(i-1)):(st*i) ) );
uyg_m(i,1) = mean(uyg( (1+st*(i-1)):(st*i) ) );
uzg_m(i,1) = mean(uzg( (1+st*(i-1)):(st*i) ) );
end
%% Калибровка
if strcmp(vubir,'Block_calibr')
    z=size(uxg_m);
    I=ones(z);
    IT=I;
    Omega=[IT OmegaX_model OmegaY_model OmegaZ_model];
    Ug=[uxg_m'; uyg_m'; uzg_m']';
    OUg=[Omega Ug];
    RankOm=rank(Omega);
    RankOmUg=rank(OUg);
    OTO=(Omega'*Omega)\Omega';
    X3=OTO*Ug;
    B = (X3(1,:))';
    Q = X3(2:end,:);
end
if strcmp(vubir,'MNK')
    %Вращение вокруг X
    B1=[uxg_m(1:4)';
        uyg_m(1:4)';
        uzg_m(1:4)'];
    A1=[1 1 1 1;
        OmegaX_model(1:4) ];
    X1=B1*A1'*inv(A1*A1');
    %Вращение вокруг Y
    B2=[ uxg_m(5:8)';
        uyg_m(5:8)';
        uzg_m(5:8)'];
    A2=[1 1 1 1;
        OmegaY_model(5:8) ];
    X2=B2*A2'*inv(A2*A2');
    %Вращение вокруг Z
    B3=[ uxg_m(9:12)';
        uyg_m(9:12)'];

```

```

        uzg_m(9:12)'];
A3=[1      1      1      1;
    OmegaZ_model(9:12)  ];
X3=B3*A3'*inv(A3*A3');
% Сместение нулей
B=( X3(1:3,1)+X2(1:3,1)+X1(1:3,1) )/3;
% Масштабные коэф.
S1=X1(1:3,2); S2=X2(1:3,2); S3=X3(1:3,2);
Q = [S1 S2 S3]; Q=Q';
end
Omega_IMU = inv(Q')*([uxg'; uyg'; uzg']-B);
% Omega_IMU_full = inv(Q')*(U_full-B);
Omega_IMU_mean = [];
for i=1:n_OM
    bm=1+st*(i-1); enm=(st*i);
    Omega_IMU_mean(:,i) = mean(transpose( Omega_IMU(:,bm:enm) ));
end
%% Откалиброванные гироскопы
% figure(3); subplot(3,1,1); plot(Omega_IMU_mean(1,:), '-
s','Color','#D95319','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid minor
% xlim([0 length(Omega_IMU_mean(1,:))]); set(gca,'FontSize',14)
% legend('\Omega_x'); subplot(3,1,2); plot(Omega_IMU_mean(2,:), '-
*','Color','#0072BD','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid minor
% ylabel('\Omega, {\^o}/c'); set(gca,'FontSize',14); legend('\Omega_y')
% subplot(3,1,3); plot(Omega_IMU_mean(3,:), '-
o','Color','#EDB120','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid minor
% xlim([0 length(Omega_IMU_mean(1,:))]); set(gca,'FontSize',14)
% legend('\Omega_z'); xlabel('Номер положения')
%% Погрешность
Omega_full =[OmX_time'; OmY_time'; OmZ_time'];
deltaOm = ( Omega_IMU - Omega_full);
deltaOm_mean = (Omega_IMU_mean - [OmegaX_model'; OmegaY_model'; OmegaZ_model']);
dOm_max=[max(abs(deltaOm(1,:))); max(abs(deltaOm(2,:)));
max(abs(deltaOm(3,:)))];
dOm_mean=[mean(deltaOm(1,:)); mean(deltaOm(2,:)); mean(deltaOm(3,:))];
dOm_std=[std(deltaOm(1,:)); std(deltaOm(2,:)); std(deltaOm(3,:))];
dOm_max_poloj=[max(abs(deltaOm_mean(1,:))); max(abs(deltaOm_mean(2,:)));
max(abs(deltaOm_mean(3,:)))];
dOm_mean_poloj=[mean(deltaOm_mean(1,:)); mean(deltaOm_mean(2,:));
mean(deltaOm_mean(3,:))];
dOm_std_poloj=[std(deltaOm_mean(1,:)); std(deltaOm_mean(2,:));
std(deltaOm_mean(3,:))];

```



## ДОДАТОК Б

### Процедура перетворення кутів Ейлера-Крилова в МНК

```
function MNK=ug2mnk(MeanUg)
psi=MeanUg(1); teta=MeanUg(2); fi=MeanUg(3);
c11 = cos(psi)*cos(fi) + sin(teta)*sin(fi)*sin(psi);
c12 = cos(teta)*sin(psi);
c13 = sin(fi)*cos(psi) - cos(fi)*sin(teta)*sin(psi);
c21 = -sin(psi)*cos(fi) + cos(psi)*sin(teta)*sin(fi);
c22 = cos(psi)*cos(teta);
c23 = -sin(psi)*sin(fi) - cos(psi)*sin(teta)*cos(fi);
c31 = -cos(teta)*sin(fi);
c32 = sin(teta);
c33 = cos(teta)*cos(fi);
MNK = [c11 c12 c13;
       c21 c22 c23;
       c31 c32 c33];
```

### Процедура перетворення МНК в кути Ейлера-Крилова

```
function Ug=mnk2ug(MNK)
Ug(1)= atan2(MNK(1,2),MNK(2,2));
Ug(2)= asin(MNK(3,2));
Ug(3)=-atan2(MNK(3,1),MNK(3,3));
```

### Процедура перетворення МНК у вектор Ейлера

```
function VEul=mnk2VEul(C)
cd=(trace(C)-1)/2; d=acos(cd);
if d==0
    e=[1 0 0];
else
    zn=2*sin(d);
    e(1)=(C(3,2)-C(2,3))/zn;
    e(2)=(C(1,3)-C(3,1))/zn;
    e(3)=(C(2,1)-C(1,2))/zn;
end
VEul=d*e;
```

### Процедура перетворення вектору Ейлера в МНК

```
function C=VEul2mnk (VEul)
% Лазарев Ю.Ф. 19-11-2014
d=norm(VEul);
if d==0
    e=[1 0 0];
else
    e=VEul/d;
end
E=eye(3,3);
cd=cos(d); sd=sin(d);
diade=e'*e;
ex=[0 -e(3) e(2); e(3) 0 -e(1); -e(2) e(1) 0];
C=cd*E+(1-cd)*diade+sd*ex;
```

### Процедура перетворення кватерніона в МНК

```

function y= quat2mnk(qw)
x=qw;
y(1,1) = x(1)^2 + x(2)^2 - x(3)^2 - x(4)^2;
y(2,1) = 2 * (x(1)*x(4) + x(2)*x(3));
y(3,1) = 2 * (x(2)*x(4) - x(1)*x(3));
y(1,2) = 2 * (x(2)*x(3) - x(1)*x(4));
y(2,2) = x(1)^2 + x(3)^2 - x(2)^2 - x(4)^2;
y(3,2) = 2 * (x(1)*x(2) + x(3)*x(4));
y(1,3) = 2 * (x(1)*x(3) + x(2)*x(4));
y(2,3) = 2 * (x(3)*x(4) - x(1)*x(2));
y(3,3) = x(1)^2 + x(4)^2 - x(2)^2 - x(3)^2;

```

### **Процедура перетворення МНК в кватерніон**

```

function y = ug2quat(Ug,k)
y1 = quate(Ug(1),k(1)); y2 = quate(Ug(2),k(2)); y3 = quate(Ug(3),k(3));
y12 = Mult_Kwat(y1,y2); y =Mult_Kwat(y12,y3);

```

### **Процедура кватерніонного добутку**

```

function Kw = Mult_Kwat(Kw1,Kw2)
q10=Kw1(1); q1=Kw1(2:4);
q20=Kw2(1); q2=Kw2(2:4);
q0=q10*q20-q1*q2';
q=q10*q2+q20*q1+cross(q1,q2);
Kw=[q0,q];

```

### **Процедура інтегрування RK21**

```

function [tout,yout]=RK21(Zpfun,h,t,y)
k1=feval(Zpfun,t,y);
k2=feval(Zpfun,t+h,y+h*k1);
F=(k1+k2)/2;
yout=y+h*F;      tout=t+h;

```

### **Процедура інтегрування RK22**

```

function [tout,yout]=RK22(Zpfun,h,t,y)
k1=feval(Zpfun,t,y);
k2=feval(Zpfun,t+h/2,y+h*k1/2);
F=k2;
yout=y+h*F;      tout=t+h;

```

### **Процедура інтегрування RK32**

```

function [tout,yout]=RK32(Zpfun,h,t,y)
k1=feval(Zpfun,t,y);
k2=feval(Zpfun,t+h/2,y+h*k1/2);
k3=feval(Zpfun,t+h,y+h*(2*k2-k1));
F=(k1+4*k2+k3)/6;
yout=y+h*F;      tout=t+h;

```

### **Процедура інтегрування RK33**

```

function [tout,yout]=RK33(Zpfun,h,t,y)
k1=feval(Zpfun,t,y);
k2=feval(Zpfun,t+h/3,y+h*k1/3);
k3=feval(Zpfun,t+2*h/3,y+2*h*k2/3);

```

```
F=(k1+3*k3)/4;yout=y+h*F;      tout=t+h;
```

## Процедура інтегрування RK42

```
function [tout,yout]=RK42(Zpfun,h,t,y)
k1=feval(Zpfun,t,y);
k2=feval(Zpfun,t+h/2,y+h*k1/2);
k3=feval(Zpfun,t+h/2,y+(h*k2)/2);
k4=feval(Zpfun,t+h,y+h*k3);
F=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
yout=y+h*F;      tout=t+h;
```

## Процедура інтегрування RK43

```
function [tout,yout]=Ru_Ku_42(Zpfun,h,t,y)
k1=feval(Zpfun,t,y);
k2=feval(Zpfun,t+h/3,y+h*k1/3);
k3=feval(Zpfun,t+2*h/3,y+h*(k2-k1/3));
k4=feval(Zpfun,t+h,y+h*(k1-k2+k3));
F=(k1+3*k2+3*k3+k4)/8;
yout=y+h*F;      tout=t+h;
```

## Процедура імітаційного руху основи

```
function [Ug, UgSk] = UgDvOsn(t)
global Pm Tm Fm eps om
Psi = Pm.*sin(om.*t);
Teta = Tm.*sin(om.*t+eps);
Fi = Fm.*sin(om.*t);
Ug = [Psi Teta Fi];
FiT = Fm.*om.*cos(om.*t);
TetaT = Tm.*om.*cos(om.*t+eps);
OM1 = FiT;
OM2 = TetaT.*sin(Fi);
OM3 = TetaT.*cos(Fi);
UgSk = [OM1 OM2 OM3];
```

## ДОДАТОК В

### Коефіцієнти методів інтегрування

Таблиця В.1. Алгоритми методів Рунге–Кутти

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{Z}(t_n; \mathbf{y}_n)$$

Назва	Формула	Допоміжні величини
RK21 ( $H = h$ )	$\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) / 2$	$\mathbf{k}_2 = \mathbf{Z}(t_n + H; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_1)$
RK22 ( $H = 2h$ )	$\mathbf{F} = \mathbf{k}_2$	$\mathbf{k}_2 = \mathbf{Z}(t_n + H/2; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_1/2)$
RK32 ( $H = 2h$ )	$\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) / 2$	$\mathbf{k}_2 = \mathbf{Z}(t_n + H/2; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_1/2);$ $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Z}(t_n + H; \mathbf{y}_n + H(2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1))$
RK33 ( $H = 3h$ )	$\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_3) / 4$	$\mathbf{k}_2 = \mathbf{Z}(t_n + H/3; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_1/3);$ $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Z}(t_n + 2H/3; \mathbf{y}_n + 2H\mathbf{k}_2/3)$
RK42 ( $H = 2h$ )	$\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) / 6$	$\mathbf{k}_2 = \mathbf{Z}(t_n + H/2; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_1/2);$ $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Z}(t_n + H/2; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_2/2);$ $\mathbf{k}_4 = \mathbf{Z}(t_n + H; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_3)$
RK43 ( $H = 3h$ )	$\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + 3\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) / 8$	$\mathbf{k}_2 = \mathbf{Z}(t_n + H/3; \mathbf{y}_n + H\mathbf{k}_1/3);$ $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Z}(t_n + 2H/3; \mathbf{y}_n + H(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1/3));$ $\mathbf{k}_4 = \mathbf{Z}(t_n + H; \mathbf{y}_n + H(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2))$

Таблиця В.2 Методи прогнозу-корекції

Порядок методу	Формула прогнозу	Формула корекції
2	$y_{m+1} = y_{m-1} + 2hZ(t_m; y_m)$	$y_{m+1} = y_m + h[Z(t_{m+1}; y_{m+1}^*) + Z(t_m; y_m)] / 2$
2	$y_{m+1} = y_m + h[Z(t_m; y_m) - Z(t_{m-1}; y_{m-1})] / 2$	$y_{m+1} = y_m + h[Z(t_{m+1}; y_{m+1}^*) + Z(t_m; y_m)] / 2$
3	$y_{m+1} = y_m + h[23 \cdot Z(t_m; y_m) - 16 \cdot Z(t_{m-1}; y_{m-1}) + 5 \cdot Z(t_{m-2}; y_{m-2})] / 12$	$y_{m+1} = y_m + h[5 \cdot Z(t_{m+1}; y_{m+1}^*) + 8 \cdot Z(t_m; y_m) - Z(t_{m-1}; y_{m-1})] / 12$

4	$y_{m+1} = y_m + h[55 \cdot Z(t_m; y_m) - 59 \cdot Z(t_{m-1}; y_{m-1}) + 37 \cdot Z(t_{m-2}; y_{m-2}) - 9 \cdot Z(t_{m-3}; y_{m-3})] / 24$	$y_{m+1} = y_m + h[9 \cdot Z(t_{m+1}; y_{m+1}^*) + 19 \cdot Z(t_m; y_m) - 5 \cdot Z(t_{m-1}; y_{m-1}) + Z(t_{m-2}; y_{m-2})] / 24$
4	$y_{m+1} = y_{m-3} + 4h[2 \cdot Z(t_m; y_m) - 2 \cdot Z(t_{m-1}; y_{m-1}) + 2 \cdot Z(t_{m-2}; y_{m-2})] / 3$	$y_{m+1} = y_{m-1} + h[Z(t_{m+1}; y_{m+1}^*) + 4 \cdot Z(t_m; y_m) + Z(t_{m-1}; y_{m-1})] / 3$
4	$y_{m+1} = y_{m-3} + 4h[2 \cdot Z(t_m; y_m) - Z(t_{m-1}; y_{m-1}) + 2 \cdot Z(t_{m-2}; y_{m-2})] / 3$	$y_{m+1} = [9y_m - y_{m-2} + 3h[Z(t_{m+1}; y_{m+1}^*) + 2 \cdot Z(t_m; y_m) - Z(t_{m-1}; y_{m-1})]] / 8$

Таблиця В.3. Коефіцієнти апроксимації кутової швидкості за вимірювань квазікоординат

$\zeta$	Виміряні величини	$\omega(\tau)$	Коефіцієнти $A = \omega_0 h$ ; $B = \varepsilon h^2$ ; $C = ah^3$ ; $D = bh^4$
1	$q_1$	$\omega_0$	$A = q_1$
2	$q_1$ , $q_2$	$\omega_0 + 2\varepsilon\tau$	$A = (3q_1 - q_2) / 2$ $B = (q_2 - q_1) / 2$
3	$q_1$ , $q_2$ , $q_3$	$\omega_0 + 2\varepsilon\tau + 3a\tau^2$	$A = (2q_3 - 7q_2 + 11q_1) / 6$ $B = (3q_2 - 2q_1 - q_3) / 2$ $C = (q_1 - 2q_2 + q_3) / 6$
4	$q_1$ , $q_2$ , $q_3$ , $q_4$	$\omega_0 + 2\varepsilon\tau + 3a\tau^2 + 4b\tau^3$	$A = (25q_1 - 23q_2 + 13q_3 - 3q_4) / 12$ $B = (-35q_1 + 69q_2 - 45q_3 + 11q_4) / 24$ $C = (5q_1 - 13q_2 + 11q_3 - 3q_4) / 12$ $D = (-q_1 + 3q_2 - 3q_3 + q_4) / 24$

### Коефіцієнти для методів інтегрування Пікара кінематичного рівняння Пуассона

#### Трикрокові алгоритми

$$K_{22} = \frac{1}{2}(\omega_0 \times)^2; \quad K_{23} = \frac{1}{3} \left[ (\omega_0 \times)(A \times) + \frac{1}{2}(A \times)(\omega_0 \times) \right];$$

$$K_{24} = \frac{1}{4} \left[ 3(\omega_0 \times)(B \times) + 2(A \times)^2 + (B \times)(\omega_0 \times) \right];$$

$$K_{25} = \frac{1}{5} \left[ 4(\omega_0 \times)(C \times) + 3(A \times)(B \times) + 2(B \times)(A \times) + (C \times)(\omega_0 \times) \right];$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{26} &= \frac{1}{6} [4(\mathbf{A} \times)(\mathbf{C} \times) + 3(\mathbf{B} \times)^2 + 2(\mathbf{C} \times)(\mathbf{A} \times)]; \quad \mathbf{K}_{27} = \frac{1}{7} [4(\mathbf{B} \times)(\mathbf{C} \times) + 3(\mathbf{C} \times)(\mathbf{B} \times)]; \\
\mathbf{K}_{28} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} \times)^2; \quad \mathbf{K}_{35} = \frac{1}{5} [3\mathbf{K}_{22}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{23}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{24}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{38} &= \frac{1}{8} [4\mathbf{K}_{24}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{25}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{26}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{27}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{39} &= \frac{1}{9} [4\mathbf{K}_{25}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{26}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{27}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{28}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{310} &= \frac{1}{10} [4\mathbf{K}_{26}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{27}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{28}(\mathbf{A} \times)]; \quad \mathbf{K}_{311} = \frac{1}{11} [4\mathbf{K}_{27}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{28}(\mathbf{B} \times)]; \\
\mathbf{K}_{312} &= \frac{1}{3} \mathbf{K}_{28}(\mathbf{C} \times);
\end{aligned}$$

### Чотирикрокові алгоритми

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{26} &= \frac{1}{6} [5(\boldsymbol{\omega}_0 \times)(\mathbf{D} \times) + 4(\mathbf{A} \times)(\mathbf{C} \times) + 3(\mathbf{B} \times)^2 + 2(\mathbf{C} \times)(\mathbf{A} \times) + (\mathbf{D} \times)(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{27} &= \frac{1}{7} [5(\mathbf{A} \times)(\mathbf{D} \times) + 4(\mathbf{B} \times)(\mathbf{C} \times) + 3(\mathbf{C} \times)(\mathbf{B} \times) + 2(\mathbf{D} \times)(\mathbf{A} \times)]; \\
\mathbf{K}_{28} &= \frac{1}{8} [5(\mathbf{B} \times)(\mathbf{D} \times) + 4(\mathbf{C} \times)^2 + 3(\mathbf{D} \times)(\mathbf{B} \times)]; \quad \mathbf{K}_{29} = \frac{1}{9} [5(\mathbf{C} \times)(\mathbf{D} \times) + 4(\mathbf{D} \times)(\mathbf{C} \times)]; \\
\mathbf{K}_{210} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{D} \times)^2]; \\
\mathbf{K}_{36} &= \frac{1}{6} [4\mathbf{K}_{22}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{23}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{24}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{25}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{37} &= \frac{1}{7} [5\mathbf{K}_{22}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{23}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{24}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{25}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{26}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{38} &= \frac{1}{8} [5\mathbf{K}_{23}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{24}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{25}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{26}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{27}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{39} &= \frac{1}{9} [5\mathbf{K}_{24}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{25}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{26}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{27}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{28}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{310} &= \frac{1}{10} [5\mathbf{K}_{25}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{26}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{27}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{28}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{29}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{311} &= \frac{1}{11} [5\mathbf{K}_{26}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{27}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{28}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{29}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{210}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{312} &= \frac{1}{12} [5\mathbf{K}_{27}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{28}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{29}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{210}(\mathbf{A} \times)]; \\
\mathbf{K}_{313} &= \frac{1}{13} [5\mathbf{K}_{28}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{29}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{210}(\mathbf{B} \times)]; \quad \mathbf{K}_{314} = \frac{1}{14} [5\mathbf{K}_{29}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{210}(\mathbf{C} \times)]; \\
\mathbf{K}_{315} &= \frac{1}{3} [\mathbf{K}_{210}(\mathbf{D} \times)]. \\
\mathbf{K}_{46} &= \frac{1}{6} [3\mathbf{K}_{33}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{34}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{35}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{47} &= \frac{1}{7} [4\mathbf{K}_{33}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{34}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{35}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{36}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)]; \\
\mathbf{K}_{48} &= \frac{1}{8} [5\mathbf{K}_{33}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{34}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{35}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{36}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{37}(\boldsymbol{\omega}_0 \times)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{49} &= \frac{1}{9} \left[ 5\mathbf{K}_{34}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{35}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{36}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{37}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{38}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{410} &= \frac{1}{10} \left[ 5\mathbf{K}_{35}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{36}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{37}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{38}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{39}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{411} &= \frac{1}{11} \left[ 5\mathbf{K}_{36}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{37}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{38}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{39}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{310}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{412} &= \frac{1}{12} \left[ 5\mathbf{K}_{37}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{38}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{39}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{310}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{311}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{413} &= \frac{1}{13} \left[ 5\mathbf{K}_{38}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{39}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{310}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{311}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{312}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{414} &= \frac{1}{14} \left[ 5\mathbf{K}_{39}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{310}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{311}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{312}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{313}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{415} &= \frac{1}{15} \left[ 5\mathbf{K}_{310}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{311}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{312}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{313}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{314}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{416} &= \frac{1}{16} \left[ 5\mathbf{K}_{311}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{312}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{313}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{314}(\mathbf{A} \times) + \mathbf{K}_{315}(\boldsymbol{\omega}_0 \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{417} &= \frac{1}{18} \left[ 5\mathbf{K}_{312}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{313}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{314}(\mathbf{B} \times) + 2\mathbf{K}_{315}(\mathbf{A} \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{418} &= \frac{1}{18} \left[ 5\mathbf{K}_{313}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{314}(\mathbf{C} \times) + 3\mathbf{K}_{315}(\mathbf{B} \times) \right]; \quad \mathbf{K}_{419} = \frac{1}{19} \left[ 5\mathbf{K}_{314}(\mathbf{D} \times) + 4\mathbf{K}_{315}(\mathbf{C} \times) \right]; \\
\mathbf{K}_{420} &= \frac{1}{4} \left[ \mathbf{K}_{315}(\mathbf{D} \times) \right].
\end{aligned}$$

## ДОДАТОК Г

### Параметри точності методів інтегрування

Таблиця Г.1 Параметри точності алгоритмів Рунге–Кутти для рівняння Пуассона

Алгоритм	Порядок точності $N$	$k$
RK21	2	0,084
RK22	2	0,335
RK31	3	0,169
RK32	3	0,195
RK41	4	0,016
RK42	4	0.16

Таблиця Г.2 Параметри точності алгоритмів. Вимірювання кутової швидкості. Вектор Ейлера

Алгоритм	Кроковість	Порядок точності $N$	$k$
KMNU1h	1	2	0,083
KMNU2h	2	4	0,0166
KMNU3h	3	4	0,01
KMNU4h	4	4	2,9e-5

Таблиця Г.3 Параметри точності однокрокових алгоритмів при вимірюванні кутової швидкості. Рівняння Пуассона

Алгоритм	Кроковість	Наближення	Порядок точності $N$	$k$
SAKS1h1	1	1	1	0,25
SAKS1h2	1	2	2	0,084
SAKS1h3	1	3	2	0,084
SAKS1h4	1	4	2	0,084

Таблиця Г.4 Параметри точності двокрокових алгоритмів при вимірюванні кутової швидкості. Рівняння Пуассона

Алгоритм	Кроковість	Наближення	Порядок точності $N$	$k$
SAKS2h1	2	1	1	0,5
SAKS2h2	2	2	2	0,033
SAKS2h3	2	3	3	0,025
SAKS2h4	2	4	4	0,084



Таблиця Г.5 Параметри точності трикрокових алгоритмів при вимірюванні кутової швидкості. Рівняння Пуассона

Алгоритм	Кроковість	Наближення	Порядок точності $N$	$k$
SAKS3h1	3	1	1	0,75
SAKS3h2	3	2	2	0,0075
SAKS3h3	3	3	3	0,0085
SAKS3h4	3	4	4	0,012

Таблиця Г.6 Параметри точності чотирикрокових алгоритмів при вимірюванні кутової швидкості. Рівняння Пуассона

Алгоритм	Кроковість	Наближення	Порядок точності $N$	$k$
SAKS4h1	4	1	1	0,8
SAKS4h2	4	2	2	0,012
SAKS4h3	4	3	3	0,02
SAKS4h4	4	4	4	0,0001

Таблиця Г.7 Параметри точності алгоритмів Пікара та прогнозу-корекції при вимірюванні кутової швидкості. Рівняння Пуассона

Методи	Алгоритми	Порядок точності $N$		
		2-й порядок	3-й порядок	4-й порядок
Прогноз-корекції	коефіцієнт $k$	0,042	0,021	0,014
Пікара	коефіцієнт $k$	0,165	-0,021	0,03

# ДОДАТОК Д

## Програмні алгоритми БІСО

### Керувальна програма

```
%Управляющая программа Бесплатформенной инерциальной системы ориентации на
лазерных гироскопах с применением уравнения Пуассона
%и метода интегрирования Пикара
clc, clear all
global fig Om_Eta Om_Dz
rtd=180/pi; %радианы в градусы
dtr=pi/180; %градусы в радианы
h=1/200; %Шаг опроса 200Hz
H=1*h; %Шаг интегрирования
%Используется 3-х шаговый
OmZemli=7.29e-5; %Угловая скорость вращения Земли (рад)
fig=50.44*dtr; %Широта Киева
OmV=OmZemli*sin(fig); %рад/с
OmN=OmZemli*cos(fig);
Om_Ksi=0;
Om_Eta=OmN; %северная
Om_Dz=OmV; %вертикальная
%% Сигнал с БИНС
[OM, A]=Calibration('coning');
% OMi=OM*4.8481e-06;
% Ai=A;
% % OMi = [8.4690e-05 2.8097e-05 5.6555e-05];
% % A = [9.71970053196605,0.0146586964185100,-0.0608474570013004];
OMi=OM(9e4:1.64e5, :)*4.8481e-6; %Для coning 4:(5.66e5:6.44e5, :)
Ai=A(9e4:1.64e5, :);
% 1 : (9e4:1.64e5, :)
% 2 : (2.5e5:3.2e5, :)
% 3 : (4.06e5:4.84e5, :)
% 4 : (5.66e5:6.44e5, :)
% % OMi=OM_Filter(5.7e5:6.4e5, :)*4.8481e-6; %Для coning
% OMi=OM(1:600, :)*4.8481e-6;
% OMi=OMi+0.0009793*dtr;
% OMi=OM(1:1e5, :)*4.8481e-6; %Для bg_xu_yn
% Ai=A(1:1e5, :);
% OMi=OM(9391:3e4, :)*4.8481e-6; %Для rate_X
% Ai=A(9391:3e4, :);
% OMi=OM(2e3:2.2e4, :)*4.8481e-6; %Для rate_Y, rate_Z
% Ai=A(2e3:2.2e4, :);
OmX=OMi(:,1); OmY=OMi(:,2); OmZ=OMi(:,3);
Tr=length(OMi); %Время интегрирования
t=0:h:(Tr-1)*h; %Время интегрирования
figure(1)
plot(t,OmXf*rtd,'r',t,OmYf*rtd,'b',t,OmZf*rtd,'k','LineWidth',6), grid
plot(t,OmX*rtd,t,OmY*rtd,t,OmZ*rtd,'LineWidth',3), grid
set(gca,'FontSize',14)
title('\bf Кутова швидкість БІСО')
legend ('\omega_X', '\omega_Y', '\omega_Z')
xlabel('Час, c')
ylabel('град./с')
% figure
% plot(t,Ai(:,1),'r',t,Ai(:,2),'b',t,Ai(:,3),'k','LineWidth',3), grid
% set(gca,'FontSize',14)
% title('\bf Прискорення БІСО')
% legend ('aX', 'aY', 'aZ')
% xlabel('час, c')
% ylabel('a, м/с^2')
```

```

% Среднее значение и амплитуда
Om_X=mean(OmX); Om_X_A=(max(OmX)-min(OmX))/2;
Om_Y=mean(OmY); Om_Y_A=(max(OmY)-min(OmY))/2;
Om_Z=mean(OmZ); Om_Z_A=(max(OmZ)-min(OmZ))/2;
OM_t=[t', OMi];
% Начальные значения
Om_X_o=OMi(1,1); Om_Y_o=OMi(1,2); Om_Z_o=OMi(1,3);
%% Начальная выставка
[C0, MeanUg] = InPosDeterm(mean(OM(1:600, :)), mean(A(1:600, :)));
Psi=[]; Teta=[]; Fi=[]; t=[];
clc
OMMM=sqrt(Om_X^2+Om_Y^2+Om_Z^2)
%% Интегрирование
Ck=[]; Cp=C0;
count_integration=floor((Tr-1)/4)
for i=1:count_integration
    Om_Grogr=[Om_Ksi Om_Eta Om_Dz]';
    om0=OMi((i-1)*4+1,:)-(Cp'*Om_Grogr)';
    om1=OMi((i-1)*4+2,:)-(Cp'*Om_Grogr)';
    om2=OMi((i-1)*4+3,:)-(Cp'*Om_Grogr)';
    om3=OMi((i-1)*4+4,:)-(Cp'*Om_Grogr)';
%     om0=OMi((i-1)*4+1,:);
%     om1=OMi((i-1)*4+2,:);
%     om2=OMi((i-1)*4+3,:);
%     om3=OMi((i-1)*4+4,:);

    Ck=SAKS3h4(h, om0, om1, om2, om3, Cp);

    Ug=mnk2ug(Ck);
    Psi=[Psi, Ug(1)];
    Teta=[Teta, Ug(2)-Teta_dr*i];
    Fi=[Fi, Ug(3)];
Cp=Ck;
t(i)=h*(i-1)*4;
end
%% Побудова графіків
figure(2)
plot(t, Psi*rtd, t, Teta*rtd, t, Fi*rtd, 'LineWidth', 2), grid minor
set(gca, 'FontSize', 14)
legend('\psi', '\theta', '\phi')
ylabel('Кут, град.')
xlabel('Час, c')

```

## Процедура калібрування

```

function [OM, A] = Calibration (Axis)
file=Axis;
R=matfile(file);
E=-45*pi/180;
B = [1 0 0;
      0 cos(E) sin(E);
      0 -sin(E) cos(E)];
%% калибр. константы ЛГ:
wx = R.n(:, 1);
wy = R.n(:, 2);
wz = R.n(:, 3);
W=[wx wy wz]; OMi=W; k0 = 0.466;
bx0 = -0.000519; by0 = -0.000516; bz0 = -0.000903;
kx = 0.466013; ky = 0.466012; kz = 0.466084;
a11 = 1.000029; a12 = -0.002897; a13 = -0.003286;
a21 = 0.000275; a22 = 0.708761; a23 = -0.708763;
a31 = -0.004372; a32 = 0.705482; a33 = 0.705485;
bx = bx0*kx; by = by0*ky; bz = bz0*kz;
kx = kx/k0; ky = ky/k0; kz = kz/k0;
% вых. сигн. ЛГ:

```

```

uxg = OMi(:,1); uyg = OMi(:,2); uzg = OMi(:,3);
% модель виходних сигналів ЛГ:
ux = (uxg*kx-bx)*a11 + (uyg*ky-by)*a12 + (uzg*kz-bz)*a13;
uy = (uxg*kx-bx)*a21 + (uyg*ky-by)*a22 + (uzg*kz-bz)*a23;
uz = (uxg*kx-bx)*a31 + (uyg*ky-by)*a32 + (uzg*kz-bz)*a33;
OM=[ux uy uz]*B*200;
%% калібр. константи АК:
gx = R.n(:, 4); gy = R.n(:, 5); gz = R.n(:, 6);
G=[gx gy gz]*B; k0 = 0.0005;
bx0 = 1.035532; by0 = 0.744530; bz0 = 0.870192;
kx = 0.000631417; ky = 0.000608308; kz = 0.000658059;
a11 = 1.000029; a12 = -0.002897; a13 = -0.003286;
a21 = 0.000275; a22 = 0.708761; a23 = -0.708763;
a31 = -0.004372; a32 = 0.705482; a33 = 0.705485;
bx = bx0*kx; by = by0*ky; bz = bz0*kz;
kx = kx/k0; ky = ky/k0; kz = kz/k0;
% вих. сигн. АК:
uxa = G(:,1); uya = G(:,2); uza = G(:,3);
% модель виходних сигналів АК:
ux = (uxa*kx-bx)*a11 + (uya*ky-by)*a12 + (uza*kz-bz)*a13;
uy = (uxa*kx-bx)*a21 + (uya*ky-by)*a22 + (uza*kz-bz)*a23;
uz = (uxa*kx-bx)*a31 + (uya*ky-by)*a32 + (uza*kz-bz)*a33;
A=[ux uy uz]*200;
end

```

## Алгоритм чисельного інтегрування Пікара

```

function Ck=SAKS3h4(h,om0,om1,om2,om3,Cp)
%% Четверте наближення трикрокового алгоритму методу Пікара
% для рівняння Пуассона й вимірювання кутових швидкостей
E=eye(3);
% Перетворення отриманих векторів кутової швидкості в кососиметричну
% матрицю
om0x=cossem(om0); om2x=cossem(om2);
om1x=cossem(om1); om3x=cossem(om3);
Ax=(-11*om0x+18*om1x-9*om2x+2*om3x)/12;
Bx=(2*om0x-5*om1x+4*om2x-om3x)/6;
Cx=(-om0x+3*om1x-3*om2x+om3x)/24;
%% Знаходження першого наближення
P1 = E + (om0x*3+Ax*(3^2)+Bx*(3^3)+Cx*(3^4))*h;
% Введення допоміжних коефіцієнтів для розрахунку другого наближення
K22=(om0x^2)/2;
K23=(2*om0x*Ax+Ax*om0x)/3;
K24=(3*om0x*Bx+2*(Ax^2)+Bx*om0x)/4;
K25=(4*om0x*Cx+3*Ax*Bx+2*Bx*Ax+Cx*om0x)/5;
K26=(4*Ax*Cx+3*(Bx^2)+2*Cx*Ax)/6;
K27=(4*Bx*Cx+3*Cx*Bx)/7; K28=(4*(Cx^2))/8;
%% Знаходження другого наближення
dP2 = (K22*(3^2) + K23*(3^3) + K24*(3^4) + K25*(3^5) + K26*(3^6) +
K27*(3^7) + K28*(3^8))*h^2;
% Введення допоміжних коеф-ів для розрахунку третього наближення
K33=(K22*om0x)/3;
K34=(2*K22*Ax+K23*om0x)/4;
K35=(3*K22*Bx+2*K23*Ax+K24*om0x)/5;
K36=(4*K22*Cx+3*K23*Bx+2*K24*Ax+K25*om0x)/6;
K37=(4*K23*Cx+3*K24*Bx+2*K25*Ax+K26*om0x)/7;
K38=(4*K24*Cx+3*K25*Bx+2*K26*Ax+K27*om0x)/8;
K39=(4*K25*Cx+3*K26*Bx+2*K27*Ax+K28*om0x)/9;
K310=(4*K26*Cx+3*K27*Bx+2*K28*Ax)/10;
K311=(4*K27*Cx+3*K28*Bx)/11; K312=(4*K28*Cx)/12;
%% Знаходження третього наближення
dP3 = (K33*(3^3) + K34*(3^4) + K35*(3^5) + K36*(3^6) + K37*(3^7) +
K38*(3^8) + K39*(3^9) + K310*(3^10) + K311*(3^11) + K312*(3^12))*h^3;
% Введення допоміжних коеф-ів для розрахунку четвертого наближення
K44=(K33*om0x)/4;
K45=(2*K33*Ax+K34*om0x)/5;

```

```

K46=(3*K33*Bx+2*K34*Ax+K35*om0x)/6;
K47=(4*K33*Cx+3*K34*Bx+2*K35*Ax+K36*om0x)/7;
K48=(4*K34*Cx+3*K35*Bx+2*K36*Ax+K37*om0x)/8;
K49=(4*K35*Cx+3*K36*Bx+2*K37*Ax+K38*om0x)/9;
K410=(4*K36*Cx+3*K37*Bx+2*K38*Ax+K39*om0x)/10;
K411=(4*K37*Cx+3*K38*Bx+2*K39*Ax+K310*om0x)/11;
K412=(4*K38*Cx+3*K39*Bx+2*K310*Ax+K311*om0x)/12;
K413=(4*K39*Cx+3*K310*Bx+2*K311*Ax+K312*om0x)/13;
K414=(4*K310*Cx+3*K311*Bx+2*K312*Ax)/14;
K415=(4*K311*Cx+3*K312*Bx)/15; K416=(4*K312*Cx)/16;
%% Знаходження четверого наближення
dP4 = (K44*(3^4) + K45*(3^5) + K46*(3^6) + K47*(3^7) + K48*(3^8) + ...
      K49*(3^9) + K410*(3^10) + K411*(3^11) + K412*(3^12) + ...
      K413*(3^13) + K414*(3^14) + K415*(3^15) + K416*(3^16))*h^4;
P = P1 + dP2 + dP3 + dP4;
Ck=Cp*P;

```

## Процедура початкової виставки

```

function [C0, MeanUg0] = InPosDeterm(Sign_wk, Sign_gk)
global Om_Eta Om_Dz
gxk = Sign_gk(:, 1); wxk = Sign_wk(:, 1);
gyk = Sign_gk(:, 2); wyk = Sign_wk(:, 2);
gzk = Sign_gk(:, 3); wzk = Sign_wk(:, 3);
g_xyzk = sqrt(gxk.^2+gyk.^2+gzk.^2); [R, ~] = size(Sign_wk);
% Алгоритм компасирования
for n = 1:1:R
c31o = (gxk(n)/g_xyzk(n)); c32o = (gyk(n)/g_xyzk(n)); c33o = (gzk(n)/g_xyzk(n));
c21o = (wxk(n)-(Om_Dz*c31o))/Om_Eta;
c22o = (wyk(n)-(Om_Dz*c32o))/Om_Eta;
c23o = (wzk(n)-(Om_Dz*c33o))/Om_Eta;
c11o = c22o*c33o-(c23o*c32o);
c12o = c23o*c31o-(c21o*c33o);
c13o = c21o*c32o-(c22o*c31o);
Psi = atan2(c12o,c22o); Theta = atan2(c32o,sqrt(1-(c32o^2)));
Phi = -(atan2(c31o,c33o));
end
C0 = [c11o c12o c13o;
      c21o c22o c23o;
      c31o c32o c33o];
MeanUg0 = [mean(Psi) mean(Theta) mean(Phi)];

```

## Універсальний алгоритм початкової виставки

```

function [Ug0, MeanUg0] = Univers_alg(Sign_wk, Sign_ak)
gxk = Sign_ak(:, 1); wxk = Sign_wk(:, 1);
gyk = Sign_ak(:, 2); wyk = Sign_wk(:, 2);
gzk = Sign_ak(:, 3); wzk = Sign_wk(:, 3);
An=sqrt(gxk^2+gyk^2+gzk^2);
% Алгоритм компасирования
c12 = -(gxk./An); c22 = -(gyk./An); c32 = -(gzk./An);
Theta = asin(c12); Phi = atan2(-c32,c22);
Omx=wxk*cos(Theta)-wyk*cos(Phi)*sin(Theta)-wzk*sin(Phi)*sin(Theta);
Omz=wzk*cos(Phi)+wyk*sin(Phi);
Psi = atan2(-Omz,Omx);
Ug0 = [Psi' Theta' Phi'];
MeanUg0 = [mean(Psi) mean(Theta) mean(Phi)];

```

## **ДОДАТОК Є**

### **Акти впровадження результатів дисертаційної роботи**

УКРАЇНА

**Товариство з обмеженою відповідальністю  
«ГІРОТЕХ»**

юридична адреса: м. Київ 04071, вул. Шекавицька, 37/48, офіс 1  
фактична адреса: м. Київ 03680, вул. Казимира Малевича, 86г, офіс 2, тел. 38(044) 500-13-21.  
р/р 26006011045141 в ПАТ «Укрсоцбанк», м. Київ, МФО 300023, ЄДРПОУ 37333629

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор

ТОВ «ГІРОТЕХ»



Ю.В.Чех

« 20 »

02

2021р



**АКТ**

**Впровадження результатів наукових досліджень**

Ми, що нижче підписалися, начальник відділу ТОВ «Гіротех» – Панченко Микола Анатолійович, провідний спеціаліст – Деревинський Сергій Вікторович, склали цей акт про те, що наступні результати наукових досліджень Сапегіна Олександра Миколайовича, отримані в дисертаційній роботі «Вдосконалення методів і алгоритмів визначення параметрів орієнтації для безплатформної інерціальної навігаційної системи», а саме, розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення безплатформної інерціальної системи орієнтації впроваджені при модернізації курсовертикалей АНRS-II та АНRS-10, що виготовляються серійно на ТОВ «Гіротех». Відмітимо, що розроблений трикроковий алгоритм Пікара четвертого порядку точності для рівняння Пуассона дозволив підвищити точність визначення орієнтації курсовертикалями.

Начальник відділу ТОВ «Гіротех»



М.А.Панченко

Провідний спеціаліст



С.В.Деревинський



ДЕРЖАВНЕ КОСМІЧНЕ АГЕНТСТВО УКРАЇНИ  
КАЗЕННЕ ПІДПРИЄМСТВО  
СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЛАДОБУДУВАННЯ «АРСЕНАЛ»  
КП СПБ «АРСЕНАЛ»

вул. Московська, 8, м. Київ, Україна, 01010, тел./факс (044) 288-94-29, тел. 253-00-62  
E-mail: info@arsenalcdb.com.ua  
Код ЄДРПОУ 14307357

29.01.2021 № 202/70-121 на № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Директор-Головний конструктор

  
М.І. Лихонін  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

Акт  
впровадження результатів наукових досліджень

Ми, що нижче підписалися, начальник НТК-1 Сладкий Анатолій Михайлович та заступник начальника НТК-1-начальник відділу 15 Юр'єв Юрій Юрійович, склали цей акт про те, що результати наукових досліджень Сапегіна Олександра Миколайовича, отримані в дисертаційній роботі «Вдосконалення методів і алгоритмів визначення параметрів орієнтації для безплатформної інерціальної навігаційної системи», а саме алгоритм чисельного інтегрування рівняння орієнтації та програмне забезпечення для проведення процедури просторового калібрування було апробовано на етапі лабораторних досліджень та можуть знайти застосування при створенні перспективних високоточних безплатформних інерціальних навігаційних систем.

Начальник НТК-1

  
А.М.Сладкий

Заступник начальника НТК-1-  
начальник відділу 15

  
Ю.Ю.Юр'єв



**АТ «ЕЛМІЗ»**

УКРАЇНА  
02099, м. Київ  
вул. Бориспільська, 9  
тел./факс: (044) 566-87-22  
(044) 566-12-77  
факс: (044) 369-55-07  
e-mail: info@elmiz.com



**JSC «ELMIZ»**

UKRAINE  
02099, Kyiv,  
Boryspilska st., 9  
tel/fax: (044) 566-87-22  
(044) 566-12-77  
fax: (044) 369-55-07  
e-mail: info@elmiz.com

№ \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_.

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Голова правління

АТ «ЕЛМІЗ»

 М.М. Шумило  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 р.

**АКТ**

**Реалізації наукових досліджень Сапегіна Олександра Миколайовича**

Комісія у складі: Головного конструктора напрямку з розробки гіроскопів і навігаційних систем, к.т.н. – Головача Сергія Володимировича, провідного інженера-конструктора – Скок Володимира Сергійовича, провідного інженера електроніка – Семененко Івана Андрійовича склали цей акт про те, що результати наукових досліджень Сапегіна Олександра Миколайовича, отримані у дисертаційній роботі «Вдосконалення методів і алгоритмів визначення параметрів орієнтації для безплатформної інерціальної навігаційної системи», а саме, розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення для безплатформних інерціальних систем орієнтації було випробувано та впроваджено при розробці системи управління чотиривісного блоку твердотільних вібраційних гіроскопів ТВГ-25 власного виробництва. Розроблені алгоритми інтегрування кінематичного рівняння Пуассона дозволили в повній мірі використати високу точність гіроскопів та частоту їхнього вихідного сигналу.

Голова комісії:

Члени комісії



С.В. Головач

В.С. Скок

І.А. Семененко

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Декан приладобудівного факультету



Національного технічного університету України

«Київський політехнічний інститут

імені Ігоря Сікорського»

Григорій ТИМЧИК

«9 серпня» 2021 р.

### АКТ

#### Впровадження результатів дисертаційних досліджень в навчальний процес Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Ми, що підписалися нижче, перший заступник декана приладобудівного факультету, к.т.н., доцент Філіппова М.В., к.т.н, доцент Павловський О.М., к.т.н., доцент Лакоза С.Л. склали цей акт про те, що результати дисертаційних досліджень за темою «Вдосконалення методів і алгоритмів визначення параметрів орієнтації для безплатформної інерціальної навігаційної системи» здобувача Сапегіна Олександра Миколайовича, використовуються в навчальному процесі кафедри приладів і систем орієнтації і навігації приладобудівного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

А саме, що результати теоретичних досліджень, а саме методи чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації, були використані в лекційному курсі дисциплін «Навігаційні системи» та «Системи орієнтації і стабілізації».

Перший заступник декана

приладобудівного факультету

к.т.н., доцент

Марина ФІЛІППОВА

к.т.н., доцент

Олексій ПАВЛОВСЬКИЙ

к.т.н., доцент

Сергій ЛАКОЗА

«9» серпня 2021 р.

## ДОДАТОК Ж

### Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

За темою дисертації опубліковано 30 робіт, серед яких 9 статей у провідних фахових виданнях, що входить до міжнародних наукометричних баз, 4 авторські свідоцтва України на твір та 17 тез доповідей, з них 2 статті у матеріалах міжнародних конференцій, що входять до наукометричних баз даних.

1. Лазарев Ю.Ф. О точности численного интегрирования уравнения ориентации Пуассона методами Рунге-Кутты и Пикара / Ю.Ф. Лазарев, А.Н. Сапегин // Вісник Інженерної академії України. – 2015. – №3. – С. 133–139.

2. Аврутов В.В. Метод калібрування і корекції вихідних сигналів тривісного акселерометра / В.В. Аврутов, С.В. Головач, О.М. Сапегін, М.Ю. Хутко // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2016. – №1. – С. 92–98.

3. Сапегин А.Н. Программная модель бесплатформенной системы ориентации на базе инерциального измерительного модуля MAX21105 / А.Н. Сапегин, Д.В. Бугаёв // Вісник Інженерної академії України. – 2016. – №1. – С. 119–122.

4. Сапегін О.М. Безплатформна інерціальна навігаційна система на основі динамічно настроєних гіроскопів / О.М. Сапегін, М.О. Романов, Д.В. Бугайов // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2016. – №6. – С. 94–100. DOI: 10.20535/1810-0546.2016.6.81064.

5. V.V. Avrutov, A.N. Sapegin, Z.S. Stefanishin, V.V. Tsisarzh. Calibration of Inertial Measurement Unit // International Applied Mechanics, Vol.53, No.2, March, 2017. – pp.228–236 (Входить до Scopus). DOI: 10.1007/s10778-017-0808-4.

6. Сапегін О.М. Алгоритм безплатформної інерціальної системи орієнтації на лазерних гіроскопах / О.М. Сапегін, М.В. Норенко // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2017. – №2. – С. 108–113. DOI: 10.20535/1810-0546.2017.2.96257.

7. Сапегін О.М. Мікромеханічний інклінометр / О.М. Сапегін, Г.Ю. Строкач // Вісник НТУУ «КПІ», Серія Приладобудування. – 2020. – Вип.59(1) – С.24–29. DOI: 10.20535/1970.59(1).2020.210007.

8. Avrutov V. Inertial Position Determination Under Vibration / V. Avrutov, S. Lakoza, L. Ryzhkov, O. Sapegin // *Vibrations in Physical Systems*, 2020, 31(2), 2020201, P: 1–10.

9. Lazarev Y. Precision quaternion based one step strapdown attitude algorithm / Y. Lazarev, V. Avrutov, P. Mironenko, S. Davydenko, O. Sapegin // *Вісник НТУУ «КПІ», Серія Приладобудування*. – 2020. – Вип.60(2) – С.5–15. DOI: 10.20535/1970.60(2).2020.221274.

10. Безплатформна система орієнтації: Свідоцтво №62912 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Півторак Д.О. – Зареєстровано 10.12.2015 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

11. Безплатформна система орієнтації на базі динамічно налагоджених гіроскопів: Свідоцтво №64219 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Романов М.О., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Романов М.О., Півторак Д.О. – Зареєстровано 26.02.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

12. Мікромеханічна безплатформна система орієнтації: Свідоцтво №64218 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 26.02.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

13. Інтегрування алгоритму орієнтації методом Рунге-Кутта: Свідоцтво №65194 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 5.05.2016 у державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

14. Avrutov V. Strapdown Latitude and Longitude Finder / V. Avrutov, S. Lakoza, O. Sapegin / In. *Prog. IEEE 6th International Conference on Methods and*

Systems of Navigation and Motion Control (MSNMC), 2020, P: 29–33. DOI: 10.1109/MSNMC50359.2020.9255597.

15. Sapegin O. Latitude Autonomous Determination on Fixed Base with Varied Attitude / O. Sapegin, S. Lakoza, V. Avrutov, D. Buhaiov // In. Prog. Int. Conf. of Young Professionals «GeoTerrace-2020», 2020, Dec.2020, Vol. 2020, P:1–5. DOI: 10.3390/s17092146.

16. Сапегін О.М. Актуальні проблеми у проектуванні алгоритмів сучасних безплатформових інерціальних навігаційних систем / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2015: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : Зб. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2015. – С.29–30.

17. Сапегін О.М. Проектування точних алгоритмів сучасних безплатформових інерціальних навігаційних систем / О.М. Сапегін // Восьма міжнар. наук.-практ. конф. «ІРТК-2015» : Зб. тез. – К.: НАУ, 2015. – С.51–53.

18. Сапегін О.М. Моделювання системи орієнтації на базі MAX21105 / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2016: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : Зб. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016. – С.23–24.

19. Сапегін О.М. Програмна модель системи орієнтації на базі MAX21105 / О.М. Сапегін, Д.В. Бугайов // Дев'ята міжнар. наук.-практ. конф. «ІРТК-2016» : Зб. тез. – К.: НАУ, 2016. – С.55–56.

20. Сапегін О.М. Програмна модель системи орієнтації на базі динамічно налагоджуваних гіроскопів / О.М. Сапегін, М.О. Романов // Дев'ята міжнар. наук.-практ. конф. «ІРТК-2016» : Зб. тез. – К.: НАУ, 2016. – С.57–58.

21. Сапегин А.Н. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на основе прецизионных микромеханических датчиков / А.Н. Сапегин, М.В. Норенко // Мат. 9-й Межд. научно-техн. конф. «Приборостроение». Минск, 2016. Том 2. С. 120–122.

22. Сапегін О.М. Безплатформова інерціальна навігаційна система на динамічно налагоджених гіроскопах / О.М. Сапегін, О.С. Бельський // Друга Українська наук.-техн. конф. «Спеціальне приладобудування: стан і перспективи» Зб. тез. Київ, Україна –К.:КП СПБ «Арсенал» 2016.– С. 89–90.

23. Сапегін О.М. Програмне моделювання безплатформової системи орієнтації на лазерних гіроскопах / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2017: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : Зб. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – С.24–25.

24. Сапегин А.Н. Калибровка блока лазерных гироскопов на неподвижном основании / А.Н. Сапегин, В.М. Шелевер // Мат. 10-й Межд. научно-техн. конф. молодых ученых и студентов «Новые направления развития приборостроения». Минск – 2017 Том 2. С. 124.

25. Сапегін О.М. Конічний рух інерціального вимірювального модуля / О.М. Сапегін // Приладобудування – 2018: стан і перспективи: міжнар. наук.-техн. конф. : Зб. тез. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – С.25.

26. Строкач Г.Ю. Кутомір на основі акселерометру ADXL-335 / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Погляд у майбутнє приладобудування. Зб. тез доп. наук.-практ. конф. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – С.46–48.

27. Сапегін, О. М. Аналіз швидкодії алгоритмів безплатформених інерціальних систем орієнтації / Сапегін О. М., Яковенко В. А. // XIX Міжн. наук.-техн. конф. «Приладобудування: стан і перспективи», 13-14 травня 2020 р., Київ, Україна : Зб. мат. конф. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – С. 17–19.

28. Строкач Г.Ю. Фільтр Маджвіка в алгоритмі інклінометра / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Дванадцята міжн. наук.-практ. конф. «ІРТК-2020» Зб. тез. – К.: НАУ, 2020. – С.258–260.

29. Строкач Г.Ю. Кутомір на основі мікромеханічного інерціального вимірювального модуля / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Зб. пр. XIII наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених «Погляд у майбутнє приладобудування», 13-14 травня 2020, К.: ПБФ, КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2020. С.67–70.

30. Строкач Г.Ю. Комплементарний фільтр для мікромеханічного інклінометру / Г.Ю. Строкач, О.М. Сапегін // Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень: мат. міжнар. наук. конф. (Т. 1), К., Україна: МЦНД. – 2020. С 58 – 60.

## **Апробація результатів дисертації**

Основні положення та результати роботи доповідались та обговорювались на наступних конференціях, конгресах, з'їздах, семінарах, нарадах:

- XXIX conference Vibrations in Physical Systems, м. Познань, 2020 р.;
- IEEE 6th International Conference on Methods and Systems of Navigation and Motion Control, м. Київ, 2020 р.;
- International Conference of Young Professionals «GeoTerrace-2020», м. Львів;
- міжнародна науково-технічна конференція “Приладобудування : стан і перспективи”, м. Київ, 2015 – 2018 рр. та 2020 р.;
- всеукраїнська науково-практична конференція «Погляд у майбутнє приладобудування», м. Київ 2019 та 2020 рр.
- міжнародна науково-практична конференція “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси”, м. Київ, 2015, 2016 2020 рр.;
- другій Українській науково-технічній конференції «Спеціальне приладобудування: стан і перспективи», м. Київ 2016 р.;
- дев'ятій міжнародній науково-технічній конференції «Приборостроение», м. Мінськ, 2016 р.;
- десятій міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених і студентів «Новые направления развития приборостроения» м. Мінськ, 2017 р.;
- міжнародній науково-практичній конференції «Теоретичні та прикладні аспекти радіотехніки, приладобудування і комп'ютерних технологій», м. Тернопіль, 2019 р.;
- міжнародній науково конференції «Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень», м. Київ, 2020 р.