

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С.Л. Лакоза

Навігаційні системи

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра за освітньою
програмою «Комп'ютерно-інтегровані технології та системи навігації і
керування» і «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в
приладобудуванні»
спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти:

Киричук Ю.В. — докт. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних вимірювальних технологій КПІ ім. Ігоря Сікорського

Головач С.В. — канд. техн. наук, головний конструктор напрямку АТ «Елміз»

Відповідальний
редактор:

Павловський О.М., канд. техн. наук, доцент кафедри приладів і систем орієнтації і навігації КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету (протокол № 4/21 від 26.04.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Лакоза Сергій Леонідович, канд. техн. наук

НАВІГАЦІЙНІ СИСТЕМИ

Навігаційні системи [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / С.Л. Лакоза; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 80 с.

Даний навчальний посібник містить теоретичні відомості та практичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи з розділу теорії побудови та функціонування інерціальних навігаційних систем з дисципліни "Навігаційні системи".

У процесі виконання розрахунково-графічної роботи студенти знайомляться з поняттями стосовно фігури Землі та застосовуваними системами координат, основними поняттями про гравітаційне поле, оволодівають навичками розрахунку похибок інерціальних навігаційних систем, які використовуються при проектуванні алгоритмів навігаційних систем.

© С.Л. Лакоза, 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	6
ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ПОЯСНЮВАЛЬНОЇ ЗАПИСКИ ТА ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ.....	7
1. ВІДОМОСТІ ПРО ЗЕМЛЮ.....	10
1.1. Фігура Землі.....	10
1.2. Гравітаційне поле і поле сили тяжіння Землі.....	13
1.3. Завдання для індивідуальної роботи	17
1.4. Основні системи координат	29
1.5. Завдання для індивідуальної роботи	31
2. ПОХИБКИ ІНЕРЦІАЛЬНИХ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ.....	42
2.1. Методичні похибки інерціальних навігаційних систем.....	42
2.2. Завдання для індивідуальної роботи	50
3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ	69
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	71
ДОДАТОК 1. Анотований покажчик додаткової літератури	72

ОСНОВНІ СКОРОЧЕННЯ

БІНС — безплатформна інерціальна навігаційна система.

ГСП — гіростабілізована платформа.

ГСТ — географічний супроводжуючий тригранник.

ГСК — географічна система координат.

ЕОМ — електронно-обчислювальна машина.

ІВ — інерціальна вертикаль.

ІНС — інерціальна навігаційна система.

РГР — розрахунково-графічна робота.

СК — система координат.

Умовні скорочення, використані для референц-еліпсоїдів

Кл — референц-еліпсоїд Кларка, 1866 р.

Б — референц-еліпсоїд Бесселя.

К — референц-еліпсоїд Красовського.

М — міжнародний референц-еліпсоїд.

Х — референц-еліпсоїд Хейфорда.

W — референц-еліпсоїд WGS-84.

П — референц-еліпсоїд ПЗ-90.

ВСТУП

Інерціальні навігаційні системи були створені в другій половині двадцятого століття і в даний час стали основою навігаційних комплексів рухомих об'єктів. Теорії інерціальної навігації вже більше 70 років, але і сьогодні до неї проявляється значний інтерес у світі. У даний час інерціальні навігаційні системи стали основою навігаційних комплексів рухомих об'єктів. Створені платформні і безплатформні інерціальні навігаційні системи є одними з найнадійніших навігаційних засобів, що використовуються на рухомих об'єктах, з широкими функціональними можливостями.

Такі системи є невід'ємною частиною пілотажно-навігаційних комплексів літаків, ракет-носіїв, наземних, підводних і надводних транспортних засобів і використовуються власне як для навігації, так і для автоматичного керування рухом. Мета даного посібника надати студентам теоретичні та практичні навички у вивченні, дослідженні, а потім проектуванні інерціальних навігаційних систем, показати основні особливості роботи даних систем та їх похибок.

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО- ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Мета розрахунково-графічної роботи (РГР) - закріпити і поглибити знання, отримані на лекціях, практичних і лабораторних заняттях, зміцнити навички самостійного вивчення окремих питань, розрахунків навігаційних систем, умінь пов'язувати теоретичні знання з вирішенням практичних питань. Основні завдання розрахунково-графічної роботи:

- набути навичок самостійного вивчення питань за підручниками, навчальними посібниками, періодичним виданнями;
- навчитися аналізувати технічні пропозиції патентних матеріалів;
- розвинути навички складання функціональних і структурних схем інерціальних навігаційних систем (ІНС), їх математичних моделей;
- закріпити вміння аналізувати роботу ІНС як аналітично, так і шляхом моделювання на ЕОМ;
- розвинути вміння пов'язувати отримані теоретичні знання (з розрахунками окремих характеристик реальних систем) з результатами експериментальних оцінок.

Орієнтовний час, який планується студенту на виконання роботи - 14 год. Плановані витрати часу керівника на розробку завдання, консультації та перевірку роботи - 2 години на одного студента.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ПОЯСНЮВАЛЬНОЇ ЗАПИСКИ ТА ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ

Результати розрахунків згідно з виданими завданням, в тому числі комп'ютерного моделювання, виконані відповідно до завдання на РГР, подають у вигляді записки на аркушах стандартного формату А4.

РГР складається в основному з вирішення типових практичних завдань. Її обсяг визначається кількістю виданих завдань. На початку записки треба привести список завдань і завдання на моделювання (якщо воно було видано). Виконуючи РГР, потрібно дотримуватися вимог щодо її структури та оформлення. РГР повинна містити наступні складові елементи: ідентифікаційна частина, основна частина.

Ідентифікаційна частина містить:

- назва навчального закладу;
- назва дисципліни, по якій виконується РГР;
- прізвище, ім'я та по батькові студента повністю;
- курс, група студента.

Основна частина роботи повинні містити:

- номер варіантів завдань для РГР, який виконує студент (визначається викладачем згідно з розподілом);
- номери завдань і їх умови;
- рішення задач розрахункової роботи.
- висновки щодо виконаних завдань.

Виконання завдань РГР має бути послідовним. При застосуванні формул повинні бути наведені короткі пояснення виконуваних дій. Спочатку формули наводяться в загальній постановці, а вже потім необхідно записувати розв'язання задачі згідно поставленому завданню.

Рішення конкретного завдання повинні міститися відразу після умови цього завдання.

Пояснювальна записка до розрахунково-графічної роботи повинна бути оформлена відповідно до вимог щодо оформлення тексту, графічних матеріалів, таблиць та формул. Перша сторінка роботи є титульною з відповідними реквізитами студента: ПІБ, курс, група, назва дисципліни і номер варіанта, який був виданий на РГР.

РГР виконується шляхом власноручного написання темно-синім, чорним або фіолетовим кольором (кульковою ручкою) на чистих аркушах А4. Сторінки роботи нумеруються. Написання РГР здійснюється одним кольором контрастного відтінку з дотриманням інтервалу між рядками. Рішення типових практичних завдань розрахункової роботи виконується студентом власноруч. Кожна структурна частина роботи починається з нової сторінки. При написанні РГР обов'язково залишати поля для зауважень. РГР повинна бути виконана грамотно, без довільного скорочення слів, старанно оформлена. У разі виявлення розбіжностей в почерку особи, яке захищає контрольну роботу, і почерку, яким вона виконана, така робота вилучається і анулюється, а студент отримує нове завдання.

Номер сторінки проставляється внизу аркушів роботи арабськими цифрами, відступ від краю повинні бути близько 1 см. Перший лист включають до загальної нумерації сторінок, але номер сторінки на ньому не проставляється. Ілюстрації, таблиці, розташовані на окремих аркушах, включаються в загальну нумерацію сторінок.

Ілюстрації (креслення, графіки, схеми, діаграми, рисунки) потрібно розташовувати в роботі безпосередньо після тексту, в якому вони згадуються вперше, або на наступній сторінці, якщо в зазначеному місці вони не поміщаються. Ілюстрації потрібно нумерувати арабськими цифрами

порядковою нумерацією в межах вирішення певної задачі. На всі ілюстрації має бути посилення в роботі. Наприклад: «... відповідно до рисунка 2». Під ілюстраціями проставляється їх номер і назва. При виконанні роботи під час моделювання необхідно використовувати один з чисельних пакетів (наприклад, MatLab або Simulink). Рисунки і графіки повинні бути виконані на білому тлі контрастними кольорами (сірий, чорний, синій).

Відповіді на теоретичні питання повинні бути чіткими і лаконічними. Виконані роботи подаються викладачу на перевірку за 3 тижні до початку екзаменаційної сесії. Успішно виконані завдання роботи підлягають зарахуванню і відповідному оцінюванню. Не зараховані роботи підлягають доопрацюванню і повторному поданню на кафедру. При цьому обов'язковим є виконання рекомендацій, які містяться в зауваженнях до розрахунково-графічної роботи.

1. ВІДОМОСТІ ПРО ЗЕМЛЮ

1.1. Фігура Землі

При навігації рухомих об'єктів в межах невеликих траєкторних ділянок Землю можна вважати сферою радіуса $R = 6371$ км.

Більш точною моделлю фігури Землі є еліпсоїд обертання, або сфероїд. Якщо a і b — велика і мала піввіссі земного сфероїду відповідно, α — стиснення, то можна записати наступні вирази:

$$\alpha = \frac{a - b}{a};$$

$$\frac{b}{a} = (1 - \alpha).$$

Квадрат першого ексцентриситету сфероїда визначається виразом

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \alpha(2 - \alpha),$$

квадрат другого ексцентриситету — $(e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$.

У багатьох випадках можна знехтувати величинами другого порядку малості відносно α . З вказаною точністю — $(e')^2 = e^2 = 2\alpha$.

Параметри так званих референц-еліпсоїдів визначаються шляхом геодезичних вимірювань. У даний час найбільшого поширення в різних країнах отримали референц-еліпсоїди, параметри яких наведені в таблиці 1.

Розрізняють декілька видів широт. Геоцентрична широта φ' визначається кутом, який утворює радіус-вектор \vec{r} , проведений з центру Землі в точку знаходження об'єкта на її поверхні, з площиною екватора.

Таблиця 1.

Параметри референц-еліпсоїдів

Референц-еліпсоїд	Умовне скорочене позначення	Велика піввісь a , м	Мала піввісь b , м	Стиснення α
Кларка 1866р.	Кл	6 378 206	6 356 584	1 / 295,0
Бесселя	Б	6 366 397	6 356 079	1 / 299,15
Красовського	К	6 378 245	6 356 856	1 / 298,3
Міжнародний	М	6 378 388	6 356 909	1 / 297,0
Хейфорда	Х	6 378 388	6 356 911,946	1/297
WGS-84	W	6 378 137	6 356 751,302	1 / 298,257223
ПЗ-90	П	6 378 136	6 356 751,359	1 / 298,2578

Географічна, або геодезична, широта φ визначається кутом, який утворює нормаль до поверхні сфероїда з площиною земного екватора. І, нарешті, астрономічна широта визначається кутом між відвісною лінією і площиною земного екватора. Безпосередньо може бути виміряна лише астрономічна широта, яка з великим ступенем точності (до складової ухилення відвісу) співпадає з географічною широтою. Всі широти змінюються від 0° до -90° в південній півкулі і від 0° до $+90^\circ$ в північній півкулі. Лінії, для яких $\varphi = \text{const}$ або $\varphi' = \text{const}$, є паралелями, а для яких $\lambda = \text{const}$ — є меридіанами. Ці лінії створюють ортогональну координатну сітку на поверхні земного сфероїда. Полюси P і P' є особливими точками координатної сітки. На полюсах втрачає сенс поняття довготи, так як в цих точках перетинаються, всі меридіани.

На рисунку 1.1 показано меридіональний переріз площиною сфери радіуса $r = a + H$ і еліпсоїда, який отриманий з цієї сфери шляхом рівномірного стиснення з коефіцієнтом $k_{ct} = b / a$. Точки, що лежать до стиснення на промені OM' , а після — на промені OM , називаються відповідними, AM' — дотична до кола, AM — дотична до еліпсу, MC — нормаль до еліпсу. Відповідні точки можна охарактеризувати величиною

одного з кутів: $\angle AOM' = \varphi''$, $\angle AOM = \varphi'$, $\angle ACM = \varphi$. Кут φ'' називається приведеною широтою. Приведена широта φ'' , так само як φ' і φ , змінюється в межах $-90^\circ \leq \varphi'' \leq 90^\circ$, $\varphi'' > 0$ в північній півкулі.

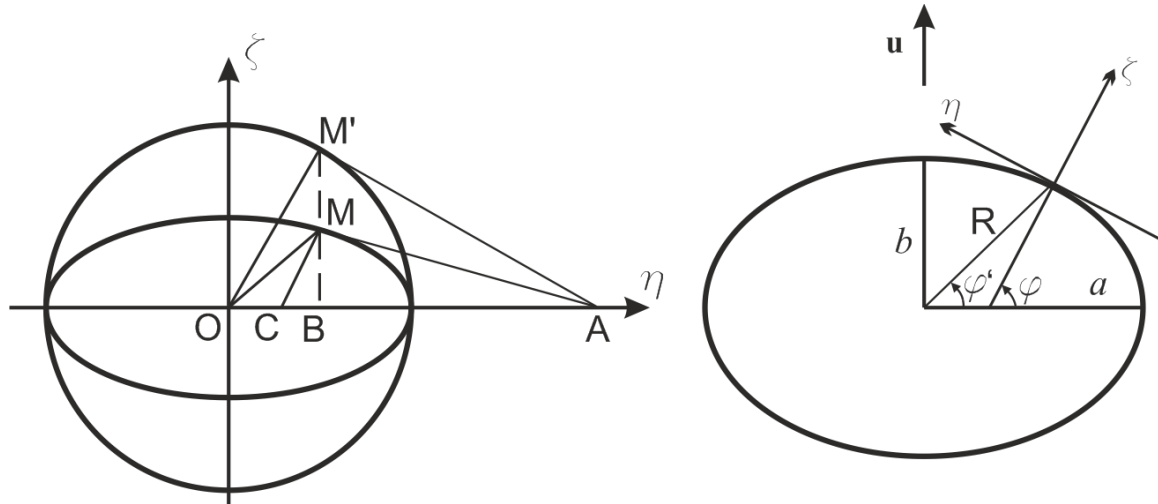


Рисунок 1.1 — Меридіональний переріз сфери

Між приведеною та іншими широтами мають місце наступні співвідношення: $tg \varphi'' = (a / b) \cdot tg \varphi' = (b / a) \cdot tg \varphi$.

З точністю до величин другого порядку малості відносно α можна записати $\varphi'' - \varphi' = (\alpha / 2) \cdot \sin 2\varphi'$; $\varphi - \varphi' = \alpha \cdot \sin 2\varphi'$; $(\varphi - \varphi')_{\max} = 11.5'$; $(\varphi'' - \varphi')_{\max} = 5.7'$. Максимум досягається на широті $\varphi = 45^\circ$.

Рівняння H -еліпсоїда має вигляд

$$r = \frac{a + H}{\sqrt{1 + (e')^2 \sin^2 \varphi'}}.$$

З точністю до величин порядку α^2 : $r = (a + H)(1 - \alpha \sin^2 \varphi')$.

Радіус паралелі на еліпсоїді визначається співвідношенням

$$\rho = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Еліпсоїдальна поверхня в певній точці характеризується двома радіусами кривизни: R_1 — головний радіус кривизни поверхні еліпсоїда в площині першого вертикала. Площиною першого вертикала називається площина, що проходить через нормаль до поверхні еліпсоїда і дотичну до його паралелі. R_2 — головний радіус кривизни поверхні еліпсоїда в площині меридіана, причому

$$R_1 = \frac{\rho}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}; R_2 = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

У даний час при вирішенні навігаційних задач в залежності від протяжності траєкторії руху об'єкта і необхідної точності визначення його координат приймається, як правило, модель фігури Землі першого або другого наближення, тобто у вигляді сфери або у вигляді еліпсоїда. У кожному конкретному випадку прийнята модель фігури Землі буде додатково обговорюватися.

1.2. Гравітаційне поле і поле сили тяжіння Землі

Відповідно до закону всесвітнього тяжіння, всі тіла притягуються одне до одного із силою, прямо пропорційною добутку мас цих тіл і обернено пропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = mg',$$

де F — сила тяжіння; M і m — гравітаційні маси; r — відстань між масами; G — гравітаційна стала; \bar{g}' — гравітаційне прискорення.

У даний час значення гравітаційної сталої, прийняте Комітетом даних для науки і техніки (CODATA) і розраховане за результатами 14 найбільш точних експериментів останніх 40 років, становить

$$G = 6,67408(31) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{с}^2 \text{ кг}).$$

У дужках вказана похибка останніх цифр мантиси.

Гравітаційний потенціал Землі у зовнішній точці, розташований на відстані r від центру тіла, що притягує, може бути виражений в загальному випадку через сферичні функції. Якщо для притягуємої точки M ввести сферичні координати r , φ' , λ , то **гравітаційний потенціал** Землі можна приблизно визначити наступним виразом:

$$v' = \frac{K}{r} + \frac{\mu}{2} \frac{Ka^2}{r^3} (1 - 3\sin^2 \varphi'), \quad (1)$$

де $\mu = 0.00109$ — безрозмірний коефіцієнт, що характеризує розподіл мас всередині Землі; $K = GM = 398600.44 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ для ПЗ-90 або $K = GM = 398600.5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ для WGS-84.

Використовуючи формулу гравітаційного потенціалу (1), зручно визначити вирази для радіальної g'_r і трансверсальної g'_φ складових прискорення сили гравітаційного тяжіння g' :

$$g'_r = \frac{\partial v'}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi') \right], \quad (2)$$

$$g'_\varphi = \frac{\partial v'}{r \partial \varphi} = -\frac{K}{r^2} \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\varphi'. \quad (3)$$

З формул (2) і (3) випливає, що вектор \bar{g}' лежить в площині меридіана, яка проходить через точку M , при цьому його радіальна складова \bar{g}'_r направлена до центру Землі, а трансверсальна складова \bar{g}'_φ перпендикулярна \bar{g}'_r і направлена до площини екватора (на це вказує знак мінус).

Необхідно мати на увазі, що на кожне тіло, що знаходиться на поверхні Землі, діє не тільки сила гравітаційного тяжіння, направлена до

центру Землі, а й відцентрова сила інерції, направлена перпендикулярно до осі обертання. **Результуюча цих двох сил є силою земного тяжіння** (далі будемо скорочено її називати силою тяжіння). Під дією сили тяжіння всі маси на Землі відчувають прискорення g , показане на рисунку 1.2. На рисунку 1.2: g' — гравітаційне прискорення, $\rho\Omega^2$ — відцентрове прискорення. Відношення максимального значення відцентрової сили (на екваторі) до сили тяжіння на полюсі g_n становить $q = \Omega^2 a / g_n = 1/288$.

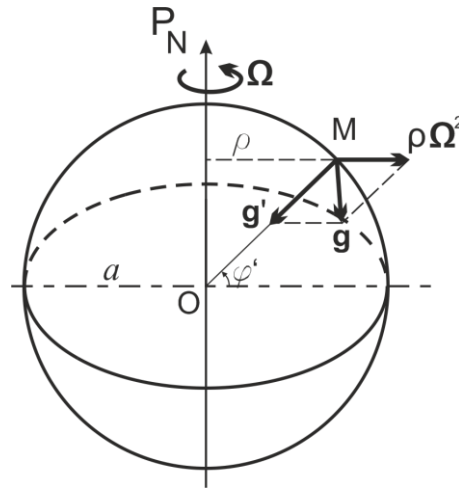


Рисунок 1.2 — Визначення прискорення сили тяжіння

Поле сили тяжіння є також потенціальним полем: його потенціал v визначається сумою гравітаційного потенціалу v' і потенціалу поля відцентрових сил v'' :

$$v = \frac{K}{r} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{Ka}{r^3} (1 - 3\sin^2 \varphi') + \frac{q}{2} \cdot \frac{Ka}{r^3} \cos^2 \varphi'.$$

Радіальна g_r і трансверсальна g_φ складові прискорення сили тяжіння отримують диференціюванням v у відповідних напрямках:

$$g_r = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi') - q \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos^2 \varphi' \right], \quad (4)$$

$$g'_{\varphi} = \frac{\partial v}{r \partial \varphi'} = -\frac{K}{r^2} \left[\frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 \sin 2\varphi' \right]. \quad (5)$$

Складові прискорення сили тяжіння можуть бути записані в наступному вигляді

$$\begin{aligned} g_r &= -g_{e0} \frac{a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta \sin^2 \phi'), \\ g_{\phi} &= -g_{e0} \alpha \frac{a^2}{(a+h)^2} \sin 2\phi', \end{aligned} \quad (6)$$

де g_{e0} — прискорення сили тяжіння на екваторі, α — стиснення еліпсоїда.

Величини β і g_{e0} мають наступні значення:

$$\beta = 0,005317, \quad g_{e0} = 978,049 \text{ см} / \text{с}^2.$$

Абсолютну величину прискорення сили тяжіння $g = \sqrt{g_r^2 + g_{\phi}^2}$ в силу малості g_{ϕ} в (6) можна прийняти рівною абсолютній величині g_r .

Для розрахунків величини прискорення сили тяжіння іноді застосовують формулу Гельмерта (1909 р.):

$$g = 9,78030(1 + 0,005302 \sin^2 \phi - 0,000007 \sin^2 2\phi),$$

де використовується географічна широта ϕ .

Формула Кассініса (1930 р.), яка називається міжнародною, має вигляд:

$$g = 9,78049 (1 + 0,0052884 \cdot \sin^2 \varphi - 0,0000059 \cdot \sin^2 2\varphi).$$

Для вільної в азимуті системи координат $\xi_0 \eta_0 \zeta$ трансверсальна складова гравітаційного прискорення може бути представлена формулами

$$g'_{\xi_0} = \frac{-u^2 R_E \sin 2\phi \sin \chi}{2}, \quad g'_{\eta_0} = \frac{u^2 R_E \sin 2\phi \cos \chi}{2}. \quad (7)$$

При віддаленні від поверхні Землі на висоту ΔH зміна прискорення сили тяжіння становить

$$\Delta g = -\frac{2g}{R} \Delta H. \quad (8)$$

Якщо Δg вимірюється в мілігалах, а ΔH в метрах, то $\Delta g = -0.3086 \cdot \Delta H$. При збільшенні висоти на 100 м сила тяжіння зменшиться на 30,9 мГал. Для точок, що знаходяться під водою, діє наступний закон зміни прискорення сили тяжіння:

$$\delta g = 0.3086 \Delta H - 0.0838 \sigma \cdot \Delta H, \quad (9)$$

де $\sigma = 1.03 \text{ г/см}^3$ — щільність морської води.

З огляду на вказане значення щільності морської води, отримаємо

$$\delta g = +0,225 \Delta H.$$

Ця ж формула дасть поправку до спостережуваного значення сили тяжіння під водою при приведенні його до поверхні моря. У цьому випадку величина ΔH має від'ємний знак. Тобто при зануренні у воду на 100 м сила тяжіння збільшиться на 22,5 мГал.

1.3. Завдання для індивідуальної роботи

1) Знайти геоцентричну і приведену широту для об'єкта, який рухається на заданій широті. Завдання розв'язати, використовуючи точне рішення і формули, в яких нехтують малими величинами 2-го порядку малості відносно α . Індивідуальні завдання приведені у таблиці 2.

Таблиця 2.

Варіант	Географічна широта φ , градуси	Референц-еліпсоїд
1	2	3
1	10	Бесселя
2	-20	Красовський
3	56	ПЗ-90
4	81	Хейворда
5	45	WGS-84

6	20° 20 '	Міжнародний
1	2	3
7	-30	Хейфорда
8	-35° 45 '	ПЗ-90
9	-10	WGS-84
10	60	Красовський
11	-15	Міжнародний
12	-50° 45 '	Кларка
13	1	WGS-84
14	5	Бесселя
16	+45° 30 '	Хейфорда
17	-10° 15 '	Кларка
18	60° 5 '	Красовський
19	25° 30 '	WGS-84
20	-20° 40 '	ПЗ-90

Приклад розв'язку. Знайдемо рішення для варіанту №1. Різні типи широт пов'язує формула

$$tg\varphi'' = (a/b) \cdot tg\varphi' = (b/a) \cdot tg\varphi.$$

В умові задачі задана географічна широта, тоді нам потрібно знайти геодезичну широту

$$\begin{aligned}\varphi' &= \arctg\left(\frac{b^2}{a^2} tg\varphi\right) = \arctg\left((1-\alpha)^2 tg\varphi\right) = \arctg\left((1-1/299,15)^2 tg10^\circ\right) = \\ &= 9.9346^\circ,\end{aligned}$$

та приведену широту

$$\varphi'' = \arctg\left(\frac{b}{a} tg\varphi\right) = \arctg\left((1-\alpha) tg\varphi\right) = \arctg\left((1-1/299,15) tg10^\circ\right) = 9.9672^\circ.$$

Знайдемо необхідні параметри з точністю до величин другого порядку малості відносно α (для геодезичної широти виконано шляхом послідовних наближень):

$$\varphi_1' = \varphi - \alpha \cdot \sin 2\varphi_0' = 10^\circ - \frac{1}{299,15} \sin(2 \cdot 10^\circ) = 9.9989^\circ;$$

$$\varphi'_2 = \varphi - \alpha \cdot \sin 2\varphi'_1 = 10^\circ - 1/299.15 \cdot \sin(2 \cdot 9.9989^\circ) = 9.9989^\circ;$$

$$\varphi'' = \varphi' + (\alpha / 2) \cdot \sin 2\varphi' = 9.9989^\circ + 0.5 \frac{1}{299.15} \sin(2 \cdot 9.9989^\circ) = 9.9995^\circ.$$

2) Визначити головні радіуси кривизни поверхні еліпсоїда на заданій широті. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 3.

Таблиця 3.

Варіант	Тип широти	Широта, градуси	Референц-еліпсоїд
1	Геогр.	10°	Б
2	Геоцент	-20°	К
3	Привед.	56°	П
4	Геогр.	81°	Х
5	Геоцент	45°	W
6	Привед.	20° 20 '	М
7	Геоцент	-30°	Х
8	Привед.	-35° 45 '	П
9	Геогр.	-10°	W
10	Геоцент	60°	К
11	Привед.	-15°	М
12	Геогр.	-50° 45 '	Кл
13	Геоцент	1°	W
14	Привед.	5°	Б
15	Геогр.	20° 20 '	П
16	Привед.	-13°	К
17	Геоцент	20° 20 '	П
18	Привед.	25°	W
19	Геогр.	20° 20 '	Х
20	Геоцент	55°	W

Приклад розв'язку. Знайдемо головні радіуси кривизни на широті $\varphi = 45^\circ$ для референц-еліпсоїда Кларка ($a=6378\,206\text{м}$, стиснення $\alpha=1/295,0$). Спочатку розрахуємо квадрат першого ексцентриситету

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha) = \frac{1}{295.0} \left(2 - \frac{1}{295.0} \right) = 0.006768.$$

Отже, головні радіуси дорівнюють

$$R_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{6378206}{\sqrt{1 - 0.006768 * \sin^2(45^\circ)}} = 6389025.39(\text{м});$$

$$R_2 = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt[3]{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}} = \frac{6378206(1 - 0.006768)}{\sqrt[3]{(1 - 0.006768 \cdot \sin^2 45^\circ)^2}} = 6355330.98(\text{м}).$$

3) Розрахувати радіус паралелі еліпсоїда на заданій широті, знайти величину радіус-вектора для об'єкта, який знаходиться на висоті H над поверхнею еліпсоїда. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 4.

Таблиця 4.

Варіант	Тип широти	Широта, градуси	Висота H , м	Референц-еліпсоїд
1	Геогр.	10	100	Б
2	Геоцент	-20	0	Кл
3	Привед.	56	1500	П
4	Геогр.	81	10000	Х
5	Геоцент	45	50	W
6	Привед.	20° 20 '	2500	М
7	Геоцент	-30	1350	Х
8	Привед.	-35° 45 '	800	П
9	Геогр.	-10	300	W
10	Геоцент	60	12000	К
11	Привед.	-15	20000	М
12	Геогр.	-50° 45 '	5000	К
13	Геоцент	1	6500	W
14	Привед.	5	850	Б
15	Геоцент	20° 20 '	5000	П
16	Привед.	-13°	12000	М
17	Геогр.	20° 20 '	3500	W
18	Геоцент	25°	15000	Б
19	Привед.	20° 20 '	7200	W
20	Геогр.	55°	1250	М

4) Знайти параметри для опису референц-еліпсоїда (a , b , e , α), якщо

різниця між першим і другим типом широти на вказаній широті складає задану в таблиці величину. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 5.

Таблиця 5.

Варіант	Тип першої широти	Тип другої широти	$\Delta\varphi$, кут. хв	Радіус паралелі, км
1	$\varphi = 45^\circ$, Геоцентр.	географ	20	1500
2	$\varphi = 15^\circ$, Географ.	приведена	30	5000
3	$\varphi = -45^\circ$, Приведена	географ	2	4000
4	$\varphi = 60^\circ$, Геоцентр.	географ	10	1200
5	$\varphi = 80^\circ$, Географ.	приведена	15	350
6	$\varphi = -30^\circ$, Геоцентр.	приведена	25	4500
7	$\varphi = 75^\circ$, Геоцентр.	географ	-20	500
8	$\varphi = -10^\circ$, Приведена	геоцентр.	-10	6100
9	$\varphi = -60^\circ$, Географ.	геоцентр.	22	3000
10	$\varphi = 0^\circ$, Геоцентр.	приведена	8	7000
11	$\varphi = 40^\circ$, Приведена	географ	-5	4500
12	$\varphi = -5^\circ$, Геоцентр.	приведена	-30	6500
13	$\varphi = 65^\circ$, Географ.	приведена.	15	1 000
14	$\varphi = 23^\circ$, Приведена	географ	12	3500
15	$\varphi = 12^\circ$, Географ.	геоцентр.	-5	3850
16	$\varphi = -28^\circ$, Приведена	географ	12	6780
17	$\varphi = 47^\circ$, Геоцентр.	географ	9	5800
18	$\varphi = -85^\circ$, Географ.	приведена	-6	2300
19	$\varphi = -42^\circ$, Геоцентр.	приведена	13	1800
20	$\varphi = 58^\circ$, Географ.	геоцентр.	-15	4200

Приклад розв'язку. Розглянемо варіант №1.

Відповідно до умови

$$\varphi = \varphi' \pm \Delta\varphi = 45^\circ \pm \frac{20}{60} = \begin{cases} 45,333^\circ; \\ 44,666^\circ. \end{cases}$$

Зв'язок між широтами визначається формулою $(a/b) \cdot \operatorname{tg} \varphi' = (b/a) \cdot \operatorname{tg} \varphi$, з якої можна знайти відношення квадратів осей еліпсоїда

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi} = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 45.333^\circ} = 0.98844; \\ \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 44.666^\circ} = 1.01172. \end{cases}$$

Друге значення відношення не можливе, бо для моделі еліпсоїда $a > b$. Тобто географічна широта становить $\varphi = 45.333^\circ$. Знаючи географічну широту та радіус паралелі на ній, розрахуємо величину великої піввісі еліпсоїда

$$\alpha \approx \frac{\varphi - \varphi'}{\sin 2\varphi'} = \frac{(45.333^\circ - 45^\circ) \cdot \pi / 180}{\sin(2 \cdot 45^\circ)} = 0.005811,$$

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha) = 0.005811(2 - 0.005811) = 0.01159,$$

$$a = \frac{\rho \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{1500\,000 \sqrt{1 - 0.01159 \cdot \sin^2 45.333^\circ}}{\cos 45.333^\circ} = 2124945.27(\text{м}).$$

Знайдемо значення малої піввісі еліпсоїда

$$b = a(1 - \alpha) = 2124945.27(1 - 0.005811) = 211259.47(\text{м}).$$

5) Розрахувати величину гравітаційного потенціалу Землі для об'єкта, який знаходиться на висоті H над поверхнею Землі (якщо $h < 0$, то вважається, що об'єкт знаходиться під водою). Знайти значення трансверсальної та радіальної складової гравітаційного поля, величину гравітаційного прискорення. На скільки змінилося значення модуля гравітаційного прискорення щодо його значення на поверхні Землі. Розрахувати $\Delta g'$, використовуючи точну і приближену формулу. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 6.

Таблиця 6.

Варіант	Географ широта φ , градуси	Референц-еліпсоїд	Висота H
1	40	Б	100 м
2	50	К	2 км
3	-10	П	-500 м
1	2	3	4
4	10	Х	-50 м
5	0	W	0,5 км
6	60	М	-2 км
7	-75	Х	850 м
8	80	П	6000 м
9	30	W	5 км
10	-45	К	-450 м
11	85	М	8000 м
12	25	Кл	15 км
13	-50	W	150 м
14	52,5	Б	-2 км
15	45	Х	2 км
16	20° 20'	W	-500 м
17	-30	М	-50 м
18	-35° 45'	П	12000 м
19	-10	К	5 км
20	60	W	-550 м

Приклад розв'язку. Географічна широта — 20 градусів, референц-еліпсоїд — ПЗ-90, висота — 750м.

Розрахуємо значення радіус-вектора для прийнятого референц-еліпсоїда:

$$\varphi' = \arctg\left((1 - \alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi\right) = \arctg\left(\left(1 - \frac{1}{298,2578}\right)^2 \operatorname{tg} 20^\circ\right) = 19.8766^\circ,$$

$$r = \frac{a + H}{\sqrt{1 + (e')^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{6378136 + 750}{\sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{1}{298,2578}\right)^2 \sin^2 19.8766^\circ}} = 6378869.42(\text{м}).$$

Знайдемо значення гравітаційного потенціалу

$$\nu' = \frac{K}{r} + \frac{\mu}{2} \frac{Ka^2}{r^3} (1 - 3\sin^2 \varphi') = \frac{398600.44}{6378.86942} +$$

$$+ \frac{0,00109}{2} \cdot \frac{398600.44 \cdot (6\,378,136)^2}{(6378.86942)^3} (1 - 3\sin^2(19.8766^\circ)) = 905024.58$$

Знайдемо радіальну g'_r і трансверсальну g'_φ складові гравітаційного прискорення:

$$g'_r = -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi') \right] =$$

$$= -\frac{398600.44}{(6378.86942)^2} \left[1 + \frac{3 \cdot 0,00109}{2} \left(\frac{6\,378,136}{6378.86942} \right)^2 \cdot (1 - 3\sin^2(19.8766^\circ)) \right] =$$

$$= -0.009792403 (\text{км/с}^2) = -9.792403 (\text{м/с}^2).$$

$$g'_\varphi = -\frac{K}{r^2} \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\varphi' =$$

$$= -\frac{398600.44}{(6378.86942)^2} \cdot \frac{3 \cdot 0,00109}{2} \left(\frac{6\,378,136}{6378.86942} \right)^2 \sin(2 \cdot 19.8766^\circ) = -1.024 \cdot 10^{-2} (\text{м/с}^2).$$

Тепер можна розрахувати модуль гравітаційного прискорення на висоті $H = 750$ м

$$g' = \sqrt{g'_r + g'_\varphi} = \sqrt{9.792403^2 + (1.024 \cdot 10^{-2})^2} = 9.792408 (\text{м/с}^2).$$

Аналогічно можна розрахувати величину гравітаційного прискорення на поверхні Земля ($H = 0$ м). Різниця між отриманими значеннями буде точним значенням зміни модуля гравітаційного прискорення. Далі виконаємо оцінку цієї зміни за наближеною формулою

$$\Delta g = -\frac{2g}{R} \Delta H = -\frac{2 \cdot 9.792408}{6378119.42} = -3.07 \cdot 10^{-6} (\text{м/с}^2).$$

б) Розрахувати величину потенціалу сили тяжіння Землі для об'єкта, який знаходиться на висоті H над поверхнею Землі (якщо $h < 0$, То

вважається, що об'єкт знаходиться під водою). Знайти значення трансверсальної, радіальної складової поля сили тяжіння, величину прискорення сили тяжіння. На скільки змінилося значення модуля прискорення сили тяжіння відносно його значення на поверхні Землі. Розрахувати Δg , використовуючи точну і приближену формулу. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 7.

Таблиця 7.

Варіант	Географічна широта φ , градуси	Референц-еліпсоїд	Висота H
1	2	3	4
1	40	Б	100 м
2	50	К	2 км
3	-10	П	-500 м
1	2	3	4
4	10	Х	-50 м
5	0	W	0,5 км
6	60	М	-2 км
7	-75	Х	850 м
8	80	П	6000 м
9	30	W	5 км
10	-45	Кл	-450 м
11	85	М	8000 м
12	25	К	15 км
13	-50	W	150 м
14	52,5	Б	-2 км
15	25	W	700 м
16	-50	П	3 км
17	52,5	Х	-650 м
18	45	М	4500 м
19	20° 20 '	W	9000 м
20	-30° 40 '	П	-1250 м

7) Чому дорівнює величина сили тяжіння на зазначеній широті? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 8.

Таблиця 8.

Варіант	Тип широти	Широта φ , градуси	Референц- еліпсоїд	Формула
1	географ	40	Б	Гельмерта
2	приведена	50	Кл	Кассініса
3	географ	-10	Х	Гельмерта
4	географ	10	П	Гельмерта
5	приведена	0	W	Кассініса
6	приведена	60	К	Гельмерта
7	географ	-75	П	Кассініса
8	геоцентр.	80	Х	Гельмерта
9	геоцентр.	30	W	Кассініса
10	приведена	-45	М	Кассініса
11	географ	85	К	Гельмерта
12	приведена	25	М	Гельмерта
13	приведена	-50	W	Кассініса
14	географ	52,5	Б	Кассініса
15	геоцентр.	-25	К	Кассініса
16	приведена	-75	W	Гельмерта
17	геоцентр.	44	Б	Кассініса
18	приведена	62	П	Кассініса
19	геоцентр.	0	W	Гельмерта
20	географ	-5,5	Х	Кассініса

Приклад розв'язку. Тип широти – географічна, $\varphi = 30^\circ$, референц-еліпсоїд Хейфорда, розрахунок виконати за формулою Гельмерта.

$$g = 9,78030(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi =$$

$$= 9,78030 \cdot (1 + 0,005302 \sin^2 30^\circ - 0,000007 \sin^2 2 \cdot 30^\circ) = 9.79321(\text{м/с}^2).$$

8) Розрахуйте величини проекцій гравітаційного прискорення на осі систем координат: а) вільної в азимуті; б) інерціальної СК. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 9.

Таблиця 9.

Варіант	Географічна широта φ , градуси	Географічна довгота λ , градуси	Висота H , м	Шляховий кут χ , градуси	Референц- еліпсоїд
1	2	3	4	5	6
1	45	+50	0	10	Б
2	35	-30	500	0	К

1	2	3	4	5	6
3	-10	+90	-200	50	X
4	25	+65	1500	300	W
5	0	-150	12000	250	П
6	33	+25	6500	185	К
7	-75	+60	5800	270	П
8	84	+120	1250	330	X
9	52,6	+150	3450	167	W
10	-45	+45	3890	305	М
11	85	-60	-590	48	Кл
12	25	+75	3800	310	М
13	-57	-90	7500	18	W
14	52,5	+125	2545	55	Б
15	60,5	+150	12000	30	X
16	-42	-140	8000	-60	W
17	-30	-160	5500	80	Кл
18	60,8	+70	9800	220	П
19	80,5	+30	11300	135	W
20	-55	-135	2500	160	П

Приклад розв'язку. Розглянемо варіант №3 для географічної широти $\varphi = 20^\circ$, для висота — 750м.

Радіальна складова для цих умов була знайдена у завданні №5 і становить

$$g'_r = -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi') \right] = -9.792403 (\text{м/с}^2).$$

Нам залишилося знайти трансверсальні складові гравітаційного прискорення для вільної в азимуті системи координат $\xi_0 \eta_0 \zeta$

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha) = \frac{1}{298,2578} \left(2 - \frac{1}{298,2578} \right) = 0.00669$$

$$R_E = R_1 = \frac{a + H}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{6378136 + 750}{\sqrt{1 - 0.00669 \sin^2 20}} = 6381383.46 (\text{м})$$

$$g'_{\xi_0} = \frac{-u^2 R_E \sin 2\phi \sin \chi}{2} = \frac{-(7.29 \cdot 10^{-5})^2 6381383.46 \cdot \sin 40 \cdot \sin 10}{2} =$$

$$= 1.89 \cdot 10^{-3} (\text{м/с}^2).$$

$$g'_{\eta o} = \frac{u^2 R_E \sin 2\phi \cos \chi}{2} = \frac{(7.29 \cdot 10^{-5})^2 6381383.46 \cdot \sin 40 \cdot \cos 10}{2} =$$

$$= 1.07 \cdot 10^{-2} (\text{м/с}^2).$$

Загальний вектор гравітаційного прискорення направлений до центру
мас Землі, його модуль дорівнює

$$g'_{\xi o} = \sqrt{(g'_{\xi o})^2 + (g'_{\eta o})^2 + (g'_{\zeta o})^2} = 9.7924 (\text{м/с}^2).$$

Для того, щоб знайти значення проекцій гравітаційного прискорення на вісі інерціальної СК (наприклад, *ECIF*) потрібно домножити знайдений модуль вектора на напрямні косинуси між геоцентричною вертикаллю і вісями інерціальної СК. Це досить просто зробити знаючи кінематику (див. рисунок 1.3) і маючи приведені у таблиці до завдання значення широти та довготи.

1.4. Основні системи координат

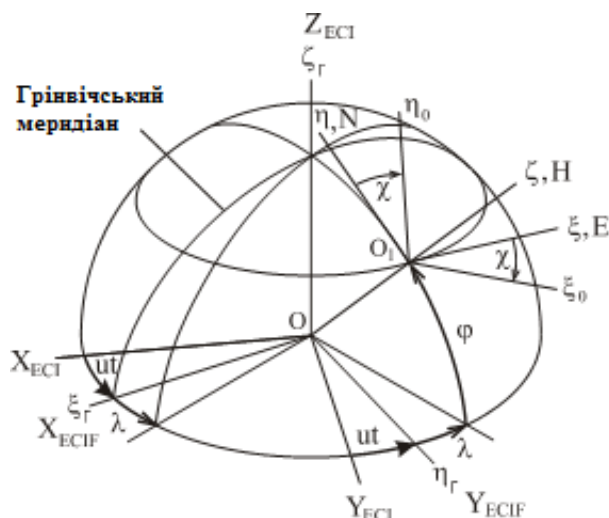


Рисунок 1.3 — Системи координат

На рисунку 1.3 показані основні системи координат (СК), які використовуються для вирішення навігаційних задач. Інерціальна геоцентрична система координат $OXYZ$ має вісь OX , спрямовану по лінії рівнодення в точку весняного рівнодення, вісь OZ спрямована по осі обертання Землі, вісь OY створює з осями OX і OZ правий координатний

тригранник. У іноземній літературі дану систему координат іноді позначають **ECI** (*Earth-centered inertial*), коротко позначають буквою *i*.

Відносно цієї системи координат разом із Землею обертається геоцентрична земна система координат $O\xi_\Gamma\eta_\Gamma\zeta_\Gamma$. Її позначають **ECIF** (*Earth-centered earth-fixed*), коротко позначають *e*. Кут її повороту відповідає величині ut , де *u* — кутова швидкість обертання Землі, *t* — час. Вісь $O\eta_\Gamma$ знаходиться в площині гринвічського меридіана.

Супроводжуюча система координат (супроводжуючий тригранник) має початок в точці на поверхні Землі, положення якої задано широтою ϕ і довготою λ . Якщо широта задана як кут між площиною екватора і геоцентричним радіусом (вертикаллю), то вона називається геоцентричною і позначається ϕ' . Осі супроводжуючого географічного тригранника $O_1\xi\eta\zeta$ (або O_1ENH) направлені наступним чином: вісь $O_1\xi$ по дотичній до паралелі на схід, вісь $O_1\eta$ направлена на Північ, вісь $O_1\zeta$ направлена по

вертикалі. Іноді цей тригранник позначають буквою g . Відносно нього повернута на кут χ в площині горизонту вільна в азимуті система координат. Якщо у якості кут χ взяти шляховий кут ортодромії, то $O_1\xi_0\eta_0\zeta$ — ортодромічна СК.

Географічний супроводжуючий тригранник

Проекції кутової швидкості обертання тригранника (СК, базису) щодо інерціального простору можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned}\omega_{\xi} &= -v_N / (R_2 + h); & h &= h_0 + v_{\zeta}t; \\ \omega_{\eta} &= v_E / (R_1 + h) + u \cos \phi; \\ \omega_{\zeta} &= (v_E / (R_1 + h)) \operatorname{tg} \phi + u \sin \phi; & \omega_{\zeta} &= \omega_{\eta} \operatorname{tg} \phi.\end{aligned}\quad (10)$$

Тут використані наступні позначення: K — курс об'єкта, $v_N = v \cos K$ — північна складова вектора відносної швидкості руху об'єкта, $v_E = v \sin K$ — східна складова, h — висота об'єкта, h_0 — початкове значення висоти, v_{ζ} — вертикальна складова швидкості, t — час.

Ортодромічний супроводжуючий тригранник

Вирази для проекцій абсолютної кутової швидкості ортодромічного тригранника можна отримати, перепроєктувавши проекції кутової швидкості географічного тригранника:

$$\omega_{\xi o} = -u \cos \phi \sin \chi - v / (R + h); \quad \omega_{\eta o} = u \cos \phi \cos \chi; \quad \omega_{\zeta o} = u \sin \phi; \quad (11)$$

R — радіус сферичної Землі.

Якщо є боковий рух зі швидкістю $v_{\xi o}$:

$$\omega_{\xi o} = -u \cos \phi \sin \chi - \frac{v_{\eta o}}{R}; \quad \omega_{\eta o} = u \cos \phi \cos \chi + \frac{v_{\xi o}}{R}; \quad \omega_{\zeta o} = u \sin \phi - \frac{v_{\xi o}}{R} \operatorname{tg} \Phi,$$

де Φ — ортодромічна широта.

Існують інші варіанти опису руху ортодромічного супроводжуючого тригранника, в тому числі з врахуванням еліптичності Землі. Тригранник $O\varepsilon_0\eta_0\zeta$ рухається з відносною кутовий швидкістю ω^o , зв'язаною з шляховою швидкістю v співвідношенням $\vec{v} = \vec{\omega}^o \times \vec{R}$, де \vec{R} — радіус кривизни земного еліпсоїда в площині траєкторії.

Проекції вектора $\vec{\omega}^o$ на осі тригранника $O\varepsilon_0\eta_0\zeta$ представимо у вигляді:

$$\omega_{\xi 0}^o = -\frac{v_{\eta 0}}{R_{\eta 0}} - \frac{v_{\xi 0}}{a} e^2 b_{13} b_{23}, \quad \omega_{\eta 0}^o = \frac{v_{\xi 0}}{R_{\xi 0}} - \frac{v_{\eta 0}}{a} e^2 b_{13} b_{23}.$$

де $R_{\eta 0}$ і $R_{\xi 0}$ — радіуси кривизни нормальних перерізів еліпсоїда в площинах $O\eta_0\zeta$ та $O\xi_0\zeta$ відповідно, e^2 — квадрат ексцентриситету земного еліпсоїда.

Величини, зворотні до радіусів кривизни, обчислюються відповідно до формул:

$$\frac{1}{R_{\xi 0}} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 b_{33}^2 + \frac{1}{2} e^2 b_{13}^2 - \frac{h}{a} \right) / a;$$

$$\frac{1}{R_{\eta 0}} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 b_{33}^2 + \frac{1}{2} e^2 b_{23}^2 - \frac{h}{a} \right) / a,$$

де h — висота, a — велика піввісь земного еліпсоїда.

1.5. Завдання для індивідуальної роботи

9) З якою кутовою швидкістю в абсолютному просторі рухається географічний супроводжуючий тригранник, зв'язаний з об'єктом, що рухається заданим курсом на заданій висоті. Розрахунки провести для сферичної та еліпсоїдальної форми Землі. До якої похибки призводить використання спрощеної моделі для розрахунків? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 10.

Таблиця 10.

Варіант	Географічна широта φ , градуси	Референц-еліпсоїд	Швидкість руху V , км/год	Курс K , градуси	Висота H , м
1	45	Б	300	20	-100
2	35	П	50	0	2500
3	-10	Х	850	50	500
4	25	П	540	64	750
5	0	W	120	150	580
6	33	Х	60	250	250
7	-75	К	300	345	100
8	84	М	250	300	-500
9	52,6	W	455	270	5000
10	-45	К	650	240	12500
11	85	Кл	1200	85	10585
12	25	М	400	15	3500
13	-57	W	70	210	6850
14	52,5	Б	20	30	-1580
15	-54	П	50	30	8500
16	15	Х	150	-45	5200
17	5	W	500	-60	6000
18	-50	К	240	140	800
19	-75	П	800	245	6400
20	35	W	650	300	9500

Приклад розв'язку.

Нехай умови завдання наступні: $\varphi = 45^\circ$, референц-еліпсоїд Кларка,

$$V = 100 \frac{\text{км}}{\text{год}}, K = 60^\circ, H = 1000 \text{ м.}$$

Головні радіуси кривизни (дивись задачу 2)

$$R_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{6378206}{\sqrt{1 - 0.006768 \cdot \sin^2(45^\circ)}} = 6389025.39(\text{м});$$

$$R_2 = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt[3]{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}} = \frac{6378206(1 - 0.006768)}{\sqrt[3]{(1 - 0.006768 \cdot \sin^2 45^\circ)^2}} = 6355330.98(\text{м}).$$

Кутові швидкості географічного супроводжуючого тригранника для

еліпсоїдальної форми Землі

$$\omega_{\xi} = -v_N / (R_2 + h) = \frac{-100 * \cos(60^\circ) / 3.6}{6355330.98 + 1000} = -2.18505 \cdot 10^{-6} (c^{-1});$$

$$\omega_{\eta} = v_E / (R_1 + h) + u \cos \phi = \frac{-100 * \sin(60^\circ) / 3.6}{6389025.39 + 1000} + 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(60^\circ) =$$

$$= 4.02147 \cdot 10^{-5} (c^{-1});$$

$$\omega_{\zeta} = (v_E / (R_1 + h)) \operatorname{tg} \phi + u \sin \phi = \frac{-100 * \sin(60^\circ) / 3.6}{6389025.39 + 1000} * \operatorname{tg}(60^\circ) +$$

$$+ 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(60^\circ) = 6.96538 \cdot 10^{-5} (c^{-1}).$$

Кутові швидкості супроводжуючого тригранника для сферичної форми Землі можна знайти по вище приведеним формулам прийнявши $R = R_1 = R_2 = a = 6378206$ (м):

$$\omega_{\xi} = -v_N / (R + h) = \frac{-100 * \cos(60^\circ) / 3.6}{6378206 + 1000} = -2.17721 \cdot 10^{-6} (c^{-1});$$

$$\omega_{\eta} = v_E / (R + h) + u \cos \phi = \frac{-100 * \sin(60^\circ) / 3.6}{6378206 + 1000} + 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(60^\circ) =$$

$$= 4.02210 \cdot 10^{-5} (c^{-1});$$

$$\omega_{\zeta} = (v_E / (R + h)) \operatorname{tg} \phi + u \sin \phi = \frac{-100 * \sin(60^\circ) / 3.6}{6378206 + 1000} * \operatorname{tg}(60^\circ) +$$

$$+ 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(60^\circ) = 6.96649 \cdot 10^{-5} (c^{-1}).$$

Знайшовши різницю між обчисленими значеннями кутових швидкостей СК, можна оцінити похибку, викликану використанням приближеної моделі Землі у вигляді сфери.

10) З якою кутовою швидкістю в абсолютному просторі рухається ортодромічний супроводжуючий тригранник, зв'язаний з об'єктом, що рухається заданим курсом на заданій висоті. Розрахунки провести для сферичної та еліпсоїдальної форми Землі. До якої похибки призводить використання спрощеної моделі для розрахунків? Індивідуальні завдання

приведені у таблиці 11.

Таблиця 11.

Варіант	Географічна широта φ , градуси	Референц-еліпсоїд	Шляхова швидкість V , км/год	Швидкість бокового руху, км/год	Шляховий кут χ , градуси	Висота H , м
1	45	Б	300	2	20	-100
2	35	П	50	0	0	2500
3	-10	Х	850	55	50	500
4	25	П	540	40	64	750
5	0	W	120	10	150	580
6	33	Х	60	8	250	250
7	-75	К	300	6	345	100
8	84	М	250	13	300	-500
9	52,6	W	455	0,8	270	5000
10	-45	Кл	650	1,5	240	12500
11	85	К	1200	5,9	85	10585
12	25	М	400	6,5	15	3500
13	-57	W	70	15	210	6850
14	52,5	Б	20	5	30	-1580
15	-30	П	650	10	10	2500
16	56	W	440	20	0	550
17	65	Х	320	30	75	7500
18	-25	К	150	5	120	2200
19	-45	М	900	10	150	1500
20	50	W	475	5	320	7000

11) Розрахувати яким курсом рухається об'єкт, якщо датчики кутових швидкостей, які вимірюють кутові швидкості руху географічного супроводжуючого тригранника, показують зазначені в таблиці величини. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 12.

Таблиця 12.

Варіант	Географічна широта φ , градуси	Референц-еліпсоїд	ω_{ξ} , рад / с	ω_{η} , рад / с	Висота H , м
1	2	3	4	5	6
1	45	Б	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	6850
2	35	П	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	-1580
3	-10	Х	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-4}$	-500

1	2	3	4	5	6
4	25	П	$1 \cdot 10^{-4}$	$7,29 \cdot 10^{-5}$	5000
5	0	W	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	12500
6	33	X	$1 \cdot 10^{-5}$	$0,85 \cdot 10^{-4}$	10585
7	-75	K	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	3500
8	84	M	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	-100
9	52,6	W	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	2500
10	-45	Кл	$0,95 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	500
11	85	K	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	750
12	25	M	$8 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	580
13	-57	W	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	250
14	52,5	Б	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	100
15	-35	П	$2 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-4}$	500
16	-50	W	$8 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	6500
17	25	П	$-2 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	8000
18	5	W	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	2500
19	0	Кл	$\cdot 10^{-4}$	$\cdot 10^{-4}$	1000
20	-20	X	$\cdot 10^{-5}$	$\cdot 10^{-4}$	3000

Приклад розв'язку. Географічна широта $\varphi=30$, референц-еліпсоїд ПЗ-90,

$\omega_{\xi}=5 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $\omega_{\eta}=2 \cdot 10^{-4}$ рад/с, висота $H=12000$ м.

Знайдемо головні радіуси кривизни

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha) = \frac{1}{298,2578} \left(2 - \frac{1}{298,2578} \right) = 0.00669$$

$$R_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{6378136}{\sqrt{1 - 0.00669 \cdot \sin^2(30^\circ)}} = 6383476.42(\text{м});$$

$$R_2 = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt[3]{(1 - e^2 \sin \varphi)^2}} = \frac{6378136(1 - 0.00669)}{\sqrt[3]{(1 - 0.00669 \cdot \sin 30^\circ)^2}} = 6349633.86(\text{м}).$$

Проаналізуємо вирази для кутових швидкостей географічної СК

$$\omega_{\xi} = \frac{-v_N}{R_2 + h}; \quad \omega_{\eta} = \frac{v_E}{R_1 + h} + u \cos \phi; \quad \omega_{\zeta} = \frac{v_E}{R_1 + h} \operatorname{tg} \phi + u \sin \phi.$$

Зі значення кутової швидкості ω_{ξ} можна знайти північну проекцію

лінійної швидкості, а з ω_η — східну складову. Арктангенс їх відношення дозволить обчислити кут курсу.

$$v_N = -\omega_\xi \cdot (R_2 + H) = -5 \cdot 10^{-5} (6349633.86 + 12000) = -318.08 \text{ (м/с)}$$

$$v_E = (R_1 + H)(\omega_\eta - u \cos \phi) = (6383476,42 + 12000)(2 \cdot 10^{-4} - 7.29 \cdot 10^{-5} \cos 30^\circ) = 875.33 \text{ (м/с)}$$

Отже, кут курсу дорівнює

$$K = \text{artg} \frac{v_E}{v_N} = \text{artg} \frac{875.33}{-318.08} = 109.97^\circ.$$

12) Розрахувати швидкість руху об'єкта, якщо ортодромічний тригранник рухається із зазначеними кутовими швидкостями. З якою кутовою щодо вертикалі рухається супроводжуючий тригранник? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 13.

Таблиця 13.

Варіант	Широта φ , градуси	Шляховий кут χ , градуси	$\omega_{\xi 0}$, рад / с	$\omega_{\eta 0}$, рад / с	Висота H , м
1	2	3	4	5	6
1	45	30	$1 \cdot 10^{-4}$	$7,29 \cdot 10^{-5}$	6850
2	35	45	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	-1580
3	-10	-50	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-4}$	-500
4	25	20	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	5000
5	0	150	$8 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	12500
6	33	220	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	10585
7	-75	310	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	3500
8	84	330	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	-100
9	52,6	90	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	2500
10	-45	40	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	500
11	85	10	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	750
12	25	270	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	580
13	-57	300	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	250
14	52,5	290	$0,95 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	100
15	-30	40	$2 \cdot 10^{-4}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	5000
16	5	75	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	7800
17	45	110	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$-7 \cdot 10^{-5}$	1600
18	-70	230	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$-4 \cdot 10^{-4}$	3200

1	2	3	4	5	6
19	-25	280	$9 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	1000
20	55,8	100	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	-200

Приклад розв'язку. Нехай дано $\varphi=35$, шляховий кут $\chi=45$, $\omega_{\xi 0}=3,5 \cdot 10^{-4}$ рад / с, $\omega_{\eta 0}=1 \cdot 10^{-4}$ рад / с, $H=2500$ м.

Розв'язок виконаємо для моделі сферичної Землі з $R=6371$ км. Так як не задано вертикальної складової лінійної швидкості, то будемо розглядати рух по поверхні Землі, тобто $v_{\zeta o}=0$.

Поздовжня швидкість об'єкта:

$$v_{\eta o} = -R(\omega_{\xi o} + u \cos \phi \sin \chi) = -6371000(3,5 \cdot 10^{-4} + 7,29 \cdot 10^{-5} \cos 35^\circ \sin 45^\circ) = -2498.87 \text{ (м/с)}.$$

Поперечна складова швидкості:

$$v_{\xi o} = R(\omega_{\eta o} - u \cos \phi \cos \chi) = 6371000(1 \cdot 10^{-4} - 7,29 \cdot 10^{-5} \cos 35^\circ \cos 45^\circ) = 368.08 \text{ (м/с)}.$$

Повна швидкість знаходиться шляхом геометричного підсумовування:

$$v = \sqrt{v_{\eta o}^2 + v_{\xi o}^2} = \sqrt{2498.87^2 + 368.08^2} = 2525.83 \text{ (м/с)}$$

13) Об'єкт рухався з точки A в ціль B по ортодромії. Яку відстань було пройдено? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 14.

Таблиця 14.

Варіант	Точка A		Точка B	
	Широта φ_1 , градуси	Довгота λ_1 , градуси	Широта φ_1 , градуси	Довгота λ_2 , градуси
1	2	3	4	5
1	40	0	45	12
2	20	12	25	50
3	10	0	-10	50

1	2	3	4	5
4	80	300	65	45
5	50	50	60	15
6	5	25	45	15
7	0,5	22,5	52,5	12
8	52,5	50	20	303
9	85	85	60	82
10	26	270	-52	330
11	-30	150	-15	195
12	45	50	65	70
13	10	15	-25	350
14	5	45	45	60
15	10	50	20	55
16	-5	-45	5	-40
17	55	30	65	32
18	-35	-45	-30	-40
19	22	60	25	63
20	-10	-25	-15	-30

Приклад розв'язку. Розглянемо варіант №5.

Спочатку потрібно скористатися формулою сферичною тригонометрії, щоб знайти кутовий шлях, який пройшов об'єкт по дузі великого кола. Знаючи цей кут, легко можна знайти довжину дуги центрального кута з радіусом рівним радіусу сферичної Землі.

$$\begin{aligned}\cos S &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \\ &= \sin 50^\circ \sin 60^\circ + \cos 50^\circ \cos 60^\circ \cos(50^\circ - 15^\circ) = 0.92668\end{aligned}$$

Відстань, яку пройшов об'єкт

$$\cos S = R \arccos S = 6371 \cdot \arccos 0.92668 = 6371 \cdot 0.38531 = 2454.810 \text{ (км)}$$

14) Об'єкт рухається з прискоренням, проекції якого на осі супроводжуючого тригранника складають задані в таблиці величини. Що показує акселерометр (вісі x, y, z), якщо вважається, що всі перехідні процеси завершені? Напрямки осей акселерометрів вказано на рисунках 1.4. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 15.

Таблиця 15.

Варіант	Широта φ , градуси	Референц- еліпсоїд	Схема поворотів на рис. 1.4.	k , Bc^2/m	ψ	ϑ	γ	w_{ξ} , m/c^2	w_{η} , m/c^2	w_{ζ} , m/c^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	45	Б	а	1	20°	0°	45°	10	0	5
2	35	П	б	0.3	50°	25°	150°	0	-10	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	-10	Х	г	5	150°	-15°	90°	5	0	-10
4	25	П	д	-0.2	120°	-45°	30°	-7	5	0
5	0	W	в	0.5	30°	-30°	-30°	-15	0	5
6	33	Х	а	1	45°	45°	45°	9	10	-5
7	-75	К	в	-1	60°	60°	-30°	10	0	25
8	84	М	д	0.5	300°	70°	25°	-3	-5	10
9	52,6	W	а	-0.4	330°	90°	0	5	-10	0
10	-45	К	б	-0.35	55°	-70	20	20	3	0
11	85	КЛ	г	0.25	15	-90	-50	4	0	-7
12	25	М	в	0.8	0	30	-60	0	10	4
13	-57	W	а	2	90	0	45	-8	25	0
14	52,5	Б	б	-1.5	270	30	40	-20	0	10
15	15	П	в	0.3	30	150	10	5	5	0
16	-5	W	д	0.4	65	60	0	10	-8	4
17	-30	Х	г	0.8	150	15	45	25	-5	7
18	75	М	а	-0.6	50	-30	90	0	10	-7
19	47,5	П	в	0.8	25	-75	140	3	2	25
20	-42	W	д	0.2	30	25	-75	-10	12	10

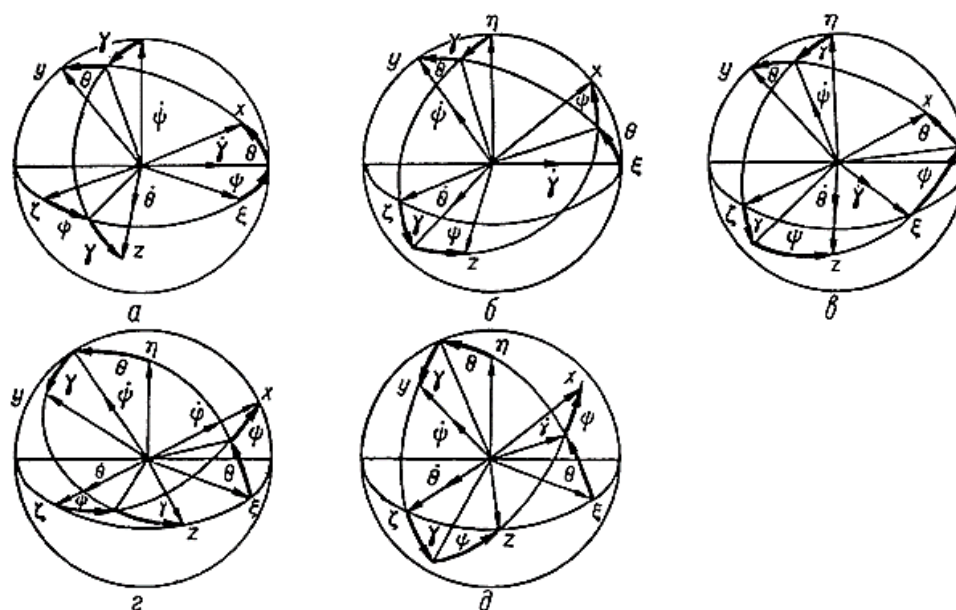


Рисунок 1.4 — Кінематичні схеми кутів повороту об'єкта

Приклад розв'язку. Покажемо розв'язок для акселерометра, встановленого вздовж осі x . Широта $\varphi=30^\circ$, референц-еліпсоїд Красовського, кінематика показана на рисунку 1.4.а, $k=0,5 \text{ Вc}^2/\text{м}$, $\psi=0^\circ$, $\vartheta=30^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $w_\xi=2 \text{ м/с}^2$, $w_\eta=15 \text{ м/с}^2$, $w_\zeta=5 \text{ м/с}^2$

Як відомо, акселерометр вимірює уявне прискорення:

$$\vec{a} = \vec{w} - \vec{g}'.$$

Спочатку знайдемо радіальну та трансверсальну складові гравітаційного прискорення, використовуючи параметри референц-еліпсоїда.

$$\varphi' = \arctg\left((1-\alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi\right) = \arctg\left((1-1/298,3)^2 \operatorname{tg} 30^\circ\right) = 29.834^\circ$$

$$r = (a + H)\left(1 - \alpha \sin^2 \varphi'\right) = 6378245 \left(1 - \frac{1}{298.3} \sin^2 29.834^\circ\right) = 6372953.06(\text{м})$$

$$\begin{aligned} g_r' &= -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi') \right] = \\ &= -\frac{398600.44}{(6372.953)^2} \left[1 + \frac{3 \cdot 0,00109}{2} \left(\frac{6378,245}{6372.953} \right)^2 \cdot (1 - 3\sin^2(29,834^\circ)) \right] = \\ &= -9.8184(\text{м/с}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_\varphi' &= -\frac{K}{r^2} \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\varphi' = \\ &= -\frac{398600.44}{(6372.953)^2} \cdot \frac{3 \cdot 0,00109}{2} \left(\frac{6378.245}{6372.953} \right)^2 \sin(2 \cdot 29.834^\circ) = -1.387 \cdot 10^{-2} (\text{м/с}^2). \end{aligned}$$

Тепер можна розрахувати модуль гравітаційного прискорення на висоті, вектор якого направлений по геоцентричній вертикалі (для зменшення кількості розрахунків будемо вважати, що вісь ζ направлена саме по геоцентричній вертикалі)

$$g' = \sqrt{g_r'^2 + g_\varphi'^2} = \sqrt{9.8184^2 + (1.387 \cdot 10^{-2})^2} = 9.8184 \text{ (м/с}^2\text{)}. \text{ Отже,}$$

$$g_\zeta' = -9.8184 \text{ м/с}^2$$

Знайдемо проекції абсолютних прискорень та прискорення гравітаційного тяжіння на вісь акселерометра x ,

$$w_x = w_\xi (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \sin \gamma) + w_\eta \cos \gamma \sin \theta +$$

$$+ w_\zeta (-\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma) =$$

$$= 2 \cdot 0.866 + 15 \cdot 0.354 + 5 \cdot (-0.841) = 2.837 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

$$g_x' = + g_\zeta' (-\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma) = -9.8184 \cdot (-0.84072) = 8.2545 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Отже, сигнал уявного прискорення вздовж вісі x

$$a_x = w_x - g_x' = 2.837 - (-8.2545) = 11.0915 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Враховуючи коефіцієнт передачі акселерометра $k=0,5 \text{ Вс}^2/\text{м}$, сигнал на виході акселерометра становитиме $U_x = k \cdot a_x = 0.5 \cdot 11.0915 \approx 5.55 \text{ (В)}$.

2. ПОХИБКИ ІНЕРЦІАЛЬНИХ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

2.1. Методичні похибки інерціальних навігаційних систем

ІНС напіваналітичного типу, як правило, створюються на основі ГСП в трьохкільцевому кардановому підвісі. Платформа, що несе гіроскопи і акселерометри, неперервно повертається відносно інерціального простору так, що протягом всього часу руху вона залишається в площині місцевого горизонту. При цьому гіроскопи крім функцій стабілізації виконують ще роль інтегруючих елементів.

Рівняння руху найпростішої напіваналітичної ІНС мають вигляд:

$$\ddot{\beta} + \dot{\varphi} = \frac{\mu}{H} \int_0^t \left[\dot{v}_N - \left(g_0 - R \dot{\varphi}^2 \right) \beta \right] d\tau, \quad (12)$$

де H — кінетичний момент гіроскопа; μ — коефіцієнт пропорційності. Величину μ/H розглядають як масштаб інтегрування ланцюга акселерометр-інтегратор-датчик моменту-гіроскоп.

Після одноразового диференціювання (12), враховуючи співвідношення $\dot{\varphi} = \dot{v}_N / R$ і нехтуючи величиною $R \dot{\varphi}^2$ у порівняно з g_0 , знайдемо

$$\ddot{\beta} + \frac{\mu}{H} g_0 \beta = \dot{v}_N \left(\frac{\mu}{H} - \frac{1}{R} \right).$$

Якщо виконується умова $\frac{\mu}{H} = \frac{1}{R}$, то рівняння набуває вигляду

$$\ddot{\beta} + \frac{\mu}{H} g_0 \beta = \dot{v}_N \left(\frac{\mu}{H} - \frac{1}{R} \right). \quad (13)$$

Якщо існує точна початкова виставка платформи в площину місцевого горизонту і виконується умова незбурюваності $\mu/H = 1/R$, то далі при будь-якому характері руху об'єкта по дузі великого кола необертової сфери платформа буде знаходитися в площині горизонту, не збурюючись прискоренням рухомого об'єкта, або, як кажуть, залишаючись інваріантною до прискорення рухомого об'єкта. При будь-яких випадкових збуреннях платформа буде здійснювати коливання з періодом М. Шулера.

Інерціальна вертикаль створена за будь-якою схемою при виконанні співвідношення $\mu/H = 1/R$ або еквівалентного йому співвідношення є моделлю маятника Шулера.

У ІНС напіваналітичного типу, спрощена функціональна схема одного каналу якої показана на рисунку 2.1, побудова вертикалі здійснюється за допомогою, так званої інерціальної вертикалі (ІВ). ІВ, зазвичай, реалізують на основі ГСП, побудованої на двоступеневих астатичних гіроскопах або на триступеневому астатичному гіроскопі. Також ІВ може бути створена на основі безпосереднього використання триступеневого гіроскопа (у найбільш простому випадку).

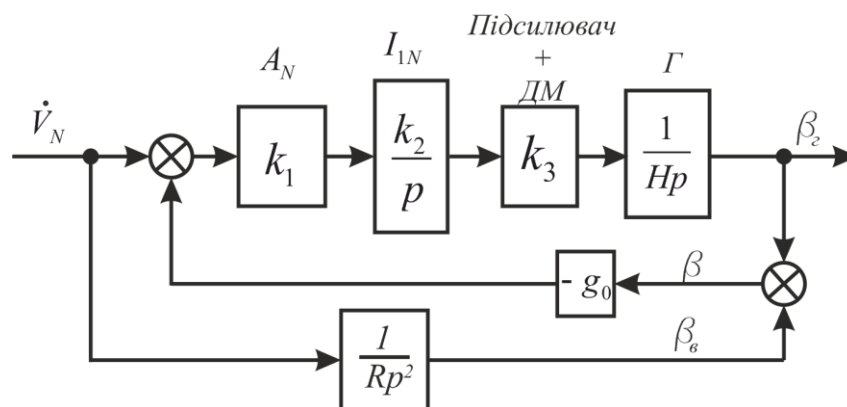


Рисунок 2.1 — Спрощена функціональна схема північного каналу ІНС напіваналітичного типу

У ІНС аналітичного типу ГСП моделює інерційну систему координат XYZ. На ГСП встановлені три акселерометра, осі чутливості яких

паралельні осям базової системи координат. Інформація від акселерометрів надходить в бортовий обчислювач, де і вирішуються всі поставлені перед ІНС завдання.

У ІНС аналітичного типу відсутній побудовувач вертикалі. Вертикаль в них, як правило, не матеріалізується, а при необхідності будується аналітичним шляхом (дивись рисунок 2.2).

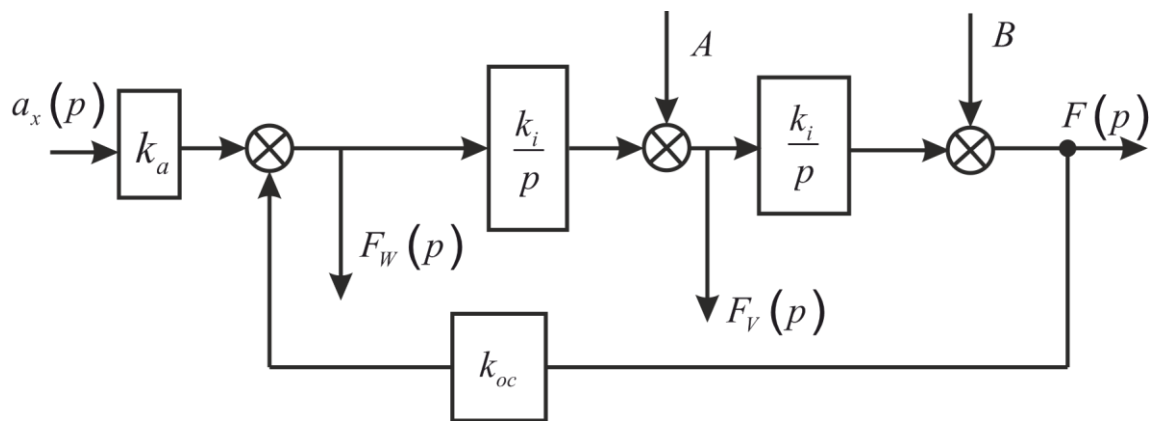


Рисунок 2.2 — Структурна схема маятника Шулера для ІНС аналітичного типу

Похибки ІНС, як і інших навігаційних пристроїв, розділяються на методичні та інструментальні, а також на похибки в статиці (при постійних вхідних впливах) і в динаміці.

Похибки ІНС, викликані переносними і коріолісовими прискореннями руху об'єкта.

Врахування реальних умов — власного обертання Землі, несферичності Землі і нецентральності її гравітаційного поля і т. д — дозволяє виявити методичні похибки ІНС.

Можна вказати наступні основні причини методичних похибок ІНС:

- переносні і коріолісові прискорення руху об'єкта;
- несферичність Землі і нецентральність її гравітаційного поля;
- вертикальна складова швидкості і прискорення руху об'єкта.

Рівняння руху ІВ, що входить в ІНС з географічною орієнтації базової системи координат, незважаючи на виконання умови незбурюваності, неоднорідні. Рівняння руху ІВ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \frac{g_1}{R}\alpha &= \frac{1}{R}\left(\frac{v_E v_n}{R} \operatorname{tg} \varphi + \Omega v_N \sin \varphi\right); \\ \ddot{\beta} + \frac{g_1}{R}\beta &= -\frac{1}{R}\left(\frac{v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi + 2\Omega v_E \sin \varphi\right) + \Omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi; \\ g_1 &= g_0 - R\left[\frac{v_N^2}{R^2} + \left(\frac{v_E}{R} + \Omega \cos \varphi\right)^2\right].\end{aligned}\quad (14)$$

З (14) видно, що ІВ не направлена по геоцентричній вертикалі, і має похибки, викликані обертанням Землі і рухом об'єкта по поверхні Землі, тобто переносними і коріолісовими прискореннями руху об'єкта. **Виконання умови незбурюваності забезпечує незбурюваність ІВ лише відносними прискореннями руху об'єкта \dot{v}_N і \dot{v}_E .**

Похибки координат рухомого об'єкта визначаються похідними від складових переносних прискорень $R\omega_\eta\omega_\zeta$ і $R\omega_\xi\omega_\zeta$, В той час як похибки визначення горизонту залежать від самих складових прискорення. Якщо можна виконати маневр, при якому $\omega_\eta\omega_\zeta = \text{const}$ і $\omega_\xi\omega_\zeta = \text{const}$, то широту і довготу будуть визначати точно, незважаючи на те, що майданчик не займає горизонтального положення.

Один із способів усунення похибок, викликаних переносними і коріолісовими прискореннями, є віднімання розрахункових значень прискорень руху об'єкта з показів акселерометрів. Ці поправки визначаються виразами:

$$\begin{aligned}\Delta w_x &= R\omega_\xi\omega_\zeta = -\frac{v_N v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi - \Omega v_N \sin \varphi; \\ \Delta w_x &= R\omega_\eta\omega_\zeta = -\frac{v_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi + 2\Omega v_E \sin \varphi + \Omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\quad (15)$$

Другий спосіб усунення цієї похибки — це використання ІНС з вільною в азимуті орієнтацією вимірювальних вісей акселерометрів $\omega_{\zeta 0} = 0$. Для визначення координат місця φ_n, λ_n в цьому випадку необхідно безперервно обчислювати кут δ , який описує положення осей чутливості акселерометрів в площині приладного горизонту відносно напрямку на північ (рис. 2.3).

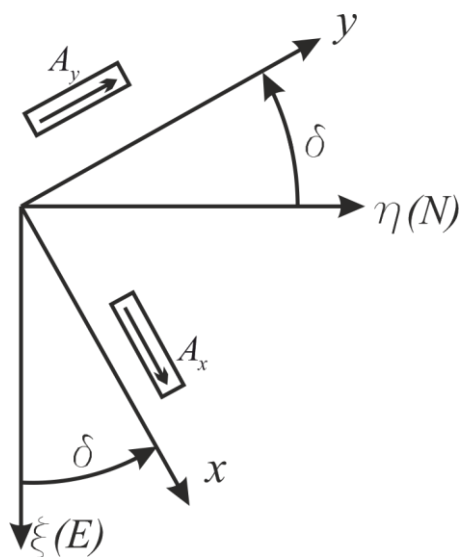


Рисунок 2.3 — Положення осей чутливості акселерометрів в площині горизонту для вільної в азимуті СК

Оскільки вертикальна складова кутової швидкості руху географічної системи координат відносно інерціального простору визначається виразом

$$\omega_{\zeta} = \Omega \sin \varphi + \frac{v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi,$$

то алгоритм обчислення кута δ має вид

$$\delta = \int_0^t \left(\Omega \sin \varphi_n + \frac{v_{En}}{R} \operatorname{tg} \varphi_n \right) d\tau, \quad (16)$$

де v_{En}, φ_n - приладні значення відповідних величин.

Похибки ІНС, викликані несферичністю Землі і нецентральною її гравітаційного поля.

До теперішнього моменту при розгляді ІНС приймалася модель форми Землі першого приближення у вигляді сфери. Перейдемо в рівняннях руху ІНС до моделі форми Землі другого приближення у вигляді еліпсоїда обертання. Складові прискорення руху об'єкта по поверхні земного сфероїда в проекціях на осі географічної теми координат мають вигляд

$$w_{\zeta} = R_2 \left(\dot{\omega}_{\eta} + \omega_{\xi} \xi_{\zeta} \right), \quad w_{\eta} = R_1 \left(-\dot{\omega}_{\xi} + \omega_{\eta} \omega_{\zeta} \right),$$

а складові кутової швидкості географічної системи координат відносно інерціального простору в проекціях на власні осі:

$$\omega_{\xi} = -\frac{v_N}{R_2}, \quad \omega_{\eta} = \Omega \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1}, \quad \omega_{\zeta} = \Omega \sin \varphi + \frac{v_E}{R_1} \operatorname{tg} \varphi.$$

Використовуючи приведені співвідношення, отримуються рівняння руху ІНС наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{d}{dt}(\omega_{\zeta} \beta) + \frac{\mu}{H} g_1 \alpha &= \left(\frac{\mu}{H} R_2 - 1 \right) \dot{\omega}_{\eta} + \frac{\mu}{H} R_2 \omega_{\xi} \omega_{\zeta}; \\ \ddot{\beta} - \frac{d}{dt}(\omega_{\zeta} \alpha) + \frac{\mu}{H} g_1 \beta &= \left(\frac{\mu}{H} R_2 - 1 \right) \dot{\omega}_{\xi} + \frac{\mu}{H} R_1 \omega_{\eta} \omega_{\zeta}, \end{aligned} \quad (17)$$

де $g_1 = g_0 + w_{\zeta}$, $w_{\zeta} = -\frac{v_N^2}{R_2} - \frac{v_E^2}{R_1} - \Omega^2 R_1 \cos^2 \varphi - 2\Omega v_E \cos \varphi$.

З (17) випливає, що не врахування несферичності Землі призводить до небажаних явищ: змінюється період власних коливань ІВ, з'являються відхилення положення рівноваги ІВ від вертикалі і коливання її навколо цього положення рівноваги. Це викликає відповідні похибки ІНС при визначенні координат об'єкта і параметрів його руху.

Способи боротьби з похибками, викликаними несферичністю Землі:

1) необхідно прийняти різні умови незбурюваності для східного і північного каналів ІВ, де параметри системи повинні перелаштовуватися в залежності від широти місця об'єкта φ_n :

$$\frac{\mu}{H} = \frac{1}{R_2} \text{ — в східному каналі; } \frac{\mu}{H} = \frac{1}{R_1} \text{ — в північному каналі. (18)}$$

2) сигнали, що компенсують в показах акселерометрів переносні і коріолісові прискорення руху об'єкту, повинні обчислюватися з урахуванням змінності радіусів кривизни еліпсоїдної поверхні:

$$\begin{aligned} \Delta w_x &= R_2 \omega_\xi \omega_\zeta = -\frac{v_E v_N}{R_1} \operatorname{tg} \varphi - \Omega v_N \sin \varphi; \\ \Delta w_y &= R_1 \omega_\eta \omega_\zeta = -\frac{v_E^2}{R_1} \operatorname{tg} \varphi + 2\Omega v_E \sin \varphi + \Omega^2 R_1 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Похибки ІНС, викликані вертикальними складовими швидкості і прискорення руху об'єкта.

Вертикальний рух об'єкта призводить до появи похибок ІНС по ряду причин:

- порушується умова незбурюваності ІНС;
- не в повному обсязі компенсуються похибки, викликані переносними і коріолісовими прискореннями руху об'єкта;
- з'являються збурення на вході ІНС, безпосередньо викликані дією вертикальних складових швидкості і прискорення руху об'єкта.

Для того щоб перекрити два перших каналу надходження збурень в систему, необхідно лише дещо ускладнити приведені раніше співвідношення, враховуючи зміну положення об'єкта над поверхнею Землі.

При еліпсоїдальній моделі фігури Землі умови незбурюваності (18) приймають вид:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{H} &= \frac{1}{(R_2 + h)} \text{ — в східному каналі,} \\ \frac{\mu}{H} &= \frac{1}{(R_1 + h)} \text{ — в північному каналі,} \end{aligned}$$

а алгоритм обчислення поправок на переносні і коріолісові прискорення руху об'єкту:

$$\begin{aligned}\Delta w_x &= (R_2 + h) \omega_\xi \omega_\zeta = -\frac{v_E v_N}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi - \Omega v_N \sin \varphi; \\ \Delta w_y &= (R_1 + h) \omega_\eta \omega_\zeta = -\frac{v_E^2}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi + 2\Omega v_E \sin \varphi + \Omega^2 (R_1 + h) \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\quad (20)$$

У ІНС з вільною в азимуті орієнтацією вісей чутливості акселерометрів при еліпсоїдальній моделі фігури Землі вираз для кута повороту СК в азимуті мають вигляд

$$\delta = \int_0^t \left(\Omega \sin \varphi_n + \frac{v_{En}}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi_n \right) d\tau.$$

Вертикальне прискорення руху об'єкта \dot{v}_ζ змінює період власних коливань ІВ, вертикальна швидкість v_ζ відхиляє положення рівноваги ІВ від напрямку місцевої вертикалі і викликає коливання ІВ відносно цього положення рівноваги.

Щоб усунути методичну похибку ІНС, викликану вертикальною складовою швидкості руху об'єкта, необхідно за допомогою приладних значень параметрів v_{Nn} , v_{En} , $v_{\zeta n}$, φ_n , h_n обчислити збурюючі складові прискорень:

$$\begin{aligned}\Delta w'_x &= 2v_{\zeta n} \omega_{\eta n} = 2v_{\zeta n} \left(\Omega \cos \varphi_n + \frac{v_{En}}{R + h_n} \right); \\ \Delta w'_y &= 2v_{\zeta n} \omega_{\xi n} = \frac{2v_{\zeta n} v_{Nn}}{R + h},\end{aligned}$$

і відняти їх з показів відповідних акселерометрів. Для більшості рухомих об'єктів переважне значення у виразі для вертикального прискорення w_ζ

має доданок $\frac{v_N^2 + v_E^2}{R + h} = \frac{v_\Gamma^2}{R + h}$, де v_Γ — відносна горизонтальна швидкість

руху об'єкта.

Прийнявши, що $h \ll R$, $w_\zeta \approx \frac{v_\Gamma^2}{R}$, отримаємо вираз для періоду власних коливань ІВ:

$$T = 2\pi \frac{R}{\sqrt{Rg_0 - v_\Gamma^2}}. \quad (21)$$

2.2. Завдання для індивідуальної роботи

15) Записати диференціальні рівняння системи приведеної на рисунку 2.4. За якої умови система незбурювана вхідним впливом (коефіцієнти приведені в таблиці до завдання)? Який елемент ІНС зображений на цьому рисунку? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 16.

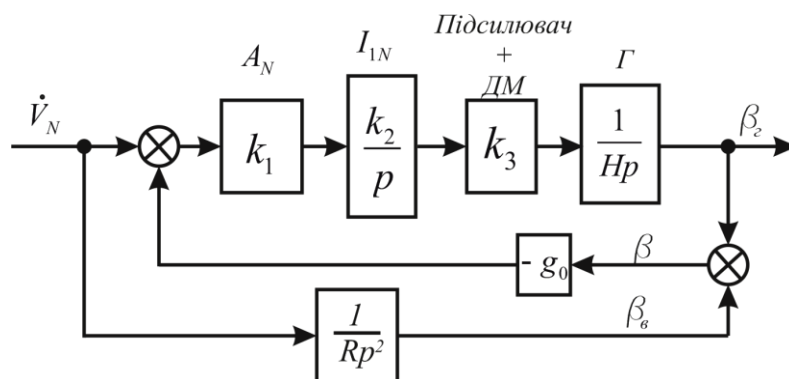


Рисунок 2.4 — Структурна схема елемента ІНС

Таблиця 16.

Варіант	k_1	k_2	k_3	H	g_0
1	2	3	4	5	6
1	4,5	0,002	5	1	9,8
2	3	0,01	9	0,1	9,5
3	1,6	0,001	10	0,5	9,98
4	2,5	0,025	5,8	0,2	10
5	0,8	0,0035	52	0,3	10,5
6	13	0,0085	31	0,4	8,9
7	7,5	0,018	6	0,5	8,5
8	8,4	0,1	0,58	2	7,5
9	5,2	0,0036	0,26	3	8,99

1	2	3	4	5	6
10	1,5	0,0009	2,59	5	8,25
11	0,85	0,0023	9,54	1	9,65
12	2,5	0,098	10	0,2	9,85
13	3,57	0,00014	2,8	0,4	9,79
14	8,5	0,03	3,4	0,5	12,5
15	2	0,035	1,5	0,1	7
16	4	0,006	6	0,05	7,5
17	2,5	0,01	1,5	0,3	8
18	4,5	0,054	12	0,5	10,5
19	7	0,8	7	2	12
20	0,7	0,0085	3	0,8	14

16) Доведіть, що схема північного каналу аналітичного побудовувача вертикалі є коливальною системою з періодом Шулера (рис. 2.5).

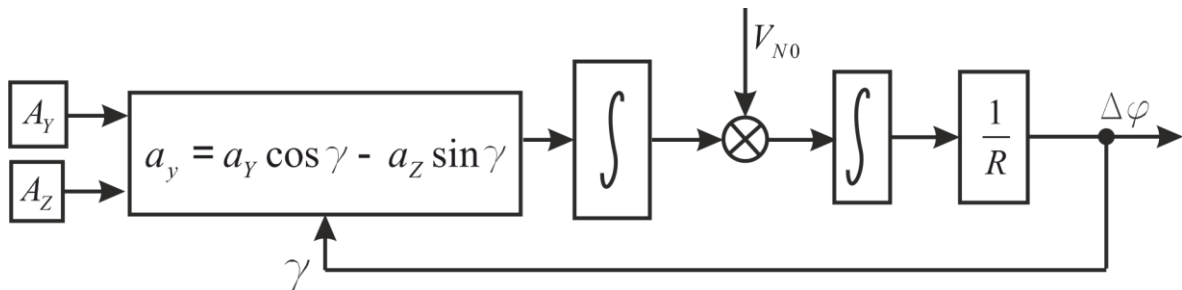


Рисунок 2.5 — Схема північного каналу аналітичного побудовувача вертикалі

17) У ІНС напіваналітичного типу з географічної орієнтацією вісей не виконано компенсацію похибок, викликаних переносними і коріолісовими прискореннями. Розрахувати похибки визначення вертикалі (положення рівноваги) при заданих умовах руху об'єкта? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 17.

Таблиця 17.

Варіант	Широта φ , градуси	Швидкість V , км / год	Курс K , градуси
1	2	3	4
1	45	120	25
2	35	20	0
3	-10	150	30
4	25	250	60
5	0	750	90
6	33	550	250

1	2	3	4
7	-75	850	80
8	84	1230	330
9	52,6	1058	225
10	-45	650	200
11	85	330	45
12	25	90	135
13	-57	140	340
14	52,5	540	10
15	30	50	-30
16	45	150	45
17	-25	225	90
18	60	540	150
19	55	850	335
20	-15	175	250

Приклад розв'язку. $\varphi=30$, $V=100\text{км/год}$, $K=60$.

Спочатку знайдемо проекції швидкості об'єкта на північну і східну вісь географічної системи координат:

$$v_N = v \cdot \cos K = 100 \frac{1000}{3600} \cos 60^\circ = 13.89 \text{ (м/с)};$$

$$v_E = v \cdot \sin K = 100 / 3.6 \cdot \sin 60^\circ = 24,07 \text{ (м/с)}.$$

Похибки, викликаних переносними і коріолісовими прискореннями для сферичної моделі Землі:

$$\begin{aligned} \Delta w_x &= R \omega_\xi \omega_\zeta = -\frac{v_N v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi - \Omega v_N \sin \varphi = \\ &= -\frac{13,89 \cdot 24,07}{6371000} \operatorname{tg} 30^\circ - 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 13,89 \sin 30 = -0.000537 \text{ (м/с}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta w_y &= R \omega_\eta \omega_\zeta = -\frac{v_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi + 2\Omega v_e \sin \varphi + \Omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= -\frac{24,07^2}{6371000} \operatorname{tg} 30^\circ + 2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 13,89 \sin 30 + \\ &+ 7,29^2 \cdot 10^{-10} \cdot 6371000 \sin 30 \cdot \cos 30 = 0.0156 \text{ (м/с}^2\text{)} \end{aligned}$$

18) На який кут повернеться ГСП з вільною в азимуті орієнтацією відносно напрямку на північ, якщо вважати, що широта постійна, а східна

складова швидкості об'єкта за час t змінюється згідно із зазначеним у таблиці 18 законом.

Таблиця 18.

Варіант	Широта φ , градуси	Час t , с	Закон зміни східної складової швидкості об'єкта, км / год
1	25	1200	$V = 250$
2	15	250	$V = 20 + 300t - 0.9t^2$
3	-19	580	$V = 200 + 0.1t + 0.05t^2$
4	22	2900	$V = 500 - 100e^{-0.5t}$
5	84	1850	$V = 50 + 5e^{0.04t}$
6	33	7550	$V = 100 + 0.06t - 20\frac{1}{t+1}$
7	-7	850	$V = 20 + 300t - 2e^{0.04t}$
8	18,4	6230	$V = 120 - 0.02t^2 + \frac{15}{t+5}$
9	-35,6	3058	$V = 100 + 0.6t - 2tg5t$
10	45	1650	$V = 250 - 6t + 0.5\sec^2 t$
11	36	330	$V = 500 + \frac{50}{t^2 - 25}$
12	25	4090	$V = 800 - \frac{50}{4t^2 + 5}$
13	-33	2140	$V = 500 + \frac{50}{t^2 - 25} - 2t$
14	52,5	540	$V = 540 + 0.6t - \frac{22}{5t+8}$
15	-10	300	$V = 10 + 2e^{0.06t}$
16	-35	125	$V = 10 + 30 / e^{0.06t}$
17	54,5	240	$V = 90 - 0.01t^2 + \frac{100}{t+10}$
18	-72	350	$V = 435$
19	35	850	$V = 330 - \frac{500}{t^2 + 25}$
20	-25	2500	$V = 500 + 0.6t - 20\sin 0.05t$

Приклад розв'язку. Розглянемо варіант №1.

Кут повернеться ГСП з вільною в азимуті орієнтацією відносно напрямку на північ визначається інтегралом

$$\delta = \int_0^t \left(\Omega \sin \varphi_n + \frac{v_{En}}{R} \operatorname{tg} \varphi_n \right) d\tau = \int_0^{1200} \left(7,29 \cdot 10^{-5} \sin 25^\circ + \frac{250 / 3,6}{6371000} \operatorname{tg} 25^\circ \right) d\tau =$$

$$= \left(7,29 \cdot 10^{-5} \sin 25^\circ + \frac{250 / 3,6}{6371000} \operatorname{tg} 25^\circ \right) t \Big|_0^{1200} = 0.043 \text{ рад} = 2.467^\circ.$$

19) Знайти величини коректуючих сигналів, що дозволять компенсувати в показах акселерометрів складові від переносного та коріолісового прискорення з врахуванням змінності радіусів кривизни еліпсоїдальної поверхні Землі (об'єкт рухається по поверхні Землі)? Індивідуальні завдання приведені у таблиці 19.

Таблиця 19.

Варіант	Широта φ , градуси	Швидкість V , км/год	Курс K , градуси	Референц- еліпсоїд
1	45	120	25	Б
2	35	20	0	П
3	-10	150	30	Х
4	25	250	60	П
5	0	750	90	W
6	33	550	250	Х
7	-75	850	80	К
8	84	1230	330	М
9	52,6	1058	225	W
10	-45	650	200	К
11	85	330	45	К
12	25	90	135	М
13	-57	140	340	W
14	52,5	540	10	Б
15	84	60	-50	М
16	33	125	45	W
17	-7	300	90	Кл
18	18,4	540	340	W
19	-35,6	120	270	П
20	22	650	240	Х

20) Для ІНС з географічної орієнтацією осей записати умову незбурюваності (знайти коефіцієнт μ/H) з врахуванням еліпсоїдальності поверхні Землі і висоти руху об'єкта. До чого призводить наявність

вертикальної швидкості і прискорення об'єкта? Знайти величини похибок, вважаючи, що на ІНС накладені умови незбурюваності та компенсації впливу переносних і коріолісових прискорень. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 20.

Таблиця 20.

Варіант	Широта φ , градуси	Горизонтальна швидкість V_H , км / год	Курс K , градуси	Вертикальна швидкість V_V , км / год	Вертикальне прискорення \dot{V}_V , м/с ²	Висота H , м	Референц- еліпсоїд
1	45	120	25	5	0,5	6850	Б
2	35	20	0	10	2	-1580	П
3	-10	150	30	2	3	-500	Х
4	25	250	60	20	1	5000	П
5	0	750	90	100	0,6	12500	W
6	33	550	250	25	0,3	10585	Х
7	-75	850	80	55	5,5	3500	К
8	84	1230	330	35	9	-100	М
9	52,6	1058	225	20	2,6	2500	W
10	-45	650	200	10	0,4	500	К
11	85	330	45	9	0,9	750	К
12	25	90	135	5	4	580	М
13	-57	140	340	70	8	250	W
14	52,5	540	10	42	1,35	100	Б
15	60	225	30	5	5	550	W
16	-60	190	60	1	10	6500	П
17	15	80	-45	3	4	3100	М
18	20	20	310	12	2	2400	Х
19	-45	400	275	30	0,5	1450	П
20	-38	320	160	40	3	4200	К

Приклад розв'язку. Розглянемо варіант №10 для випадку руху на поверхні Землі ($H=0$).

Умови незбурюваності ІНС при врахуванні еліпсоїдальності форми Землі та параметрів референц-еліпсоїда Красовського:

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha) = \frac{1}{298,3} \left(2 - \frac{1}{298,3} \right) = 0.00669 /$$

А) в східному каналі

$$\frac{\mu}{H} = \frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt[3]{(1 - e^2 \sin \varphi)^2}}{a(1 - e^2)} = \frac{\sqrt[3]{(1 - 0.00669 \sin(-45^\circ))^2}}{6378245(1 - 0.00669)} = 1.56 \cdot 10^{-7};$$

Б) в північному каналі

$$\frac{\mu}{H} = \frac{1}{R_1} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a} = \frac{\sqrt{1 - 0.00669 \sin^2(-45^\circ)}}{6378245} = 1.565 \cdot 10^{-7}.$$

Спочатку знайдемо східну і північну проекцію горизонтальної складової швидкості:

$$v_{Nn} = v_\Gamma \cos K = 650 / 3.6 \cdot \cos 200^\circ = -169.66 \text{ (м/с)}.$$

$$v_{En} = v_\Gamma \sin K = 650 / 3.6 \cdot \sin 200^\circ = -61.75 \text{ (м/с)}.$$

Розрахуємо складові прискорень, що викликають методичну похибку ІНС, викликану вертикальною складовою швидкості руху об'єкта.

$$\begin{aligned} \Delta w'_x &= 2v_{\zeta n} \omega_{\eta n} = 2v_{\zeta n} \left(\Omega \cos \varphi_n + \frac{v_{En}}{R + h_n} \right) = \\ &= 2 \cdot 10 / 3.6 \left(7.29 \cdot 10^{-5} \cos(-45^\circ) - 61.75 \cdot 1.56 \cdot 10^{-7} \right) = 0.00023 \text{ (м/с}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\Delta w'_y = 2v_{\zeta n} \omega_{\xi n} = \frac{2v_{\zeta n} v_{Nn}}{R + h} = 2 \cdot 10 / 3.6 \cdot (-169.66) \cdot 1.565 \cdot 10^{-7} = -0.00015 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Періоду власних коливань ІВ буде:

$$T = 2\pi \frac{R}{\sqrt{Rg_0 - v_\Gamma^2}} = 2\pi \frac{6371000}{\sqrt{6371000 \cdot 9.81 - (650 / 3.6)^2}} = 5064.8019 \text{ (с)}.$$

Для врахування впливу вертикального прискорення замість g_0 треба використати

$$g_1 = g_0 + w_\zeta,$$

$$\begin{aligned} w_\zeta &= \dot{V}_\zeta - \frac{v_N^2}{R_2} - \frac{v_E^2}{R_1} - \Omega^2 R_1 \cos^2 \varphi - 2\Omega v_E \cos \varphi = \\ &= 0.4 - 169.66^2 \cdot 1.56 \cdot 10^{-7} - 61.75^2 \cdot 1.565 \cdot 10^{-7} - \end{aligned}$$

$$-\frac{7,29^2 \cdot 10^{-10}}{1,565 \cdot 10^{-7}} \cos^2(-45^\circ) + 2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 61,75 \cos(-45^\circ) = 0,3843 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

21) Знайти поправки для компенсації похибок ІНС, викликаних вертикальною складовою швидкості руху об'єкта. Розрахувати період власних коливань інерційної вертикалі, використовуючи припущення про сферичну форму Землі. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 21.

Таблиця 21.

Варіант	Широта φ , градуси	V_N , км/год	V_E , км/год	Вертикальна швидкість V_ζ , км / год	Висота H , м
1	25	120	150	5	6850
2	-13	20	100	10	-1580
3	-25	150	540	2	-500
4	65	250	-300	20	5000
5	42	750	-120	100	12500
6	21	550	415	25	10585
7	-53,8	850	20	55	3500
8	8	1230	-65	35	-100
9	32,6	1058	-400	20	2500
10	45,5	650	205	10	500
11	5,8	330	10	9	750
12	18	90	-650	5	580
13	-67	140	250	70	250
14	42,9	540	-20	42	100
15	-10	200	150	10	3500
16	60	80	90	2	-100
17	-75	440	100	40	2500
18	20	650	50	3	500
19	35	150	300	20	750
20	-44	320	120	10	3700

22) Розрахувати похибки ІНС через похибку початкової виставки вертикалі, якщо всі інші похибки дорівнюють 0. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 22.

Таблиця 22.

Варіант	Широта φ , градуси	Північний канал		Східний канал	
		Похибка виставки вертикалі β_0 , градуси	Швидкість похибки початкової виставки $\dot{\beta}_0$, градус / с	Похибка виставки вертикалі α_0 , градуси	Швидкість похибки початкової виставки $\dot{\alpha}_0$, градус / с
1	2	3	4	5	6
1	25	1	1.31	0,5	2.29
2	-13	0,5	0.34	0,36	2.38
3	-25	0,3	1.42	0,85	0.56
4	65	0,05	0.063	0,0025	1.46
5	42	0,01	0.55	0,001	1.33
6	21	2	0.09	0,05	1.93
1	2	3	4	5	6
7	-53,8	0,06	0.19	0,6	2.12
8	8	0,25	1.64	1,56	2.26
9	32,6	0,002	1.38	2	0.82
10	45,5	0,05	0.63	1,06	2.03
11	5,8	0,9	1.9	0,058	1.96
12	18	0,06	0.068	0,2	0.48
13	-67	0,13	0.87	0,06	0.35
14	42,9	0,1	0.76	0,085	1.49
15	-25	0,05	0,1	2,5	1,2
16	62,5	0,1	0,05	0,03	0,7
17	10	0,003	1,5	0,04	0,06
18	0	0,5	0,08	0,1	0,01
19	-70	0,02	1,2	0,3	0,02
20	33	0,06	0,04	0,2	0,1

Приклад розв'язку. Розглянемо похибки північного каналу для варіанту № 20.

Похибка визначення площини горизонту буде

$$\beta = \beta_0 \cos \nu t - \frac{\dot{\beta}_0}{\nu} \sin \nu t = \frac{0.06 \cdot \pi}{180} \cos(1.22 \cdot 10^{-3} t) - \frac{0.04 \cdot \pi}{180 \cdot 1.22 \cdot 10^{-3}} \sin(1.22 \cdot 10^{-3} t) =$$

$$= 0.0011 \cos(1.22 \cdot 10^{-3} t) - 0.57 \sin(1.22 \cdot 10^{-3} t).$$

Тобто похибка визначення горизонту буде носити гармонічний незатухаючий характер.

Похибка визначення швидкості може бути визначена по формулі

$$\Delta v_N = g \frac{\beta_0}{v} \sin vt = 9,81 \frac{0,06 \cdot \pi}{180 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3}} \sin(1,22 \cdot 10^{-3} t) =$$

$$= 8,420 \cdot \sin(1,22 \cdot 10^{-3} t) \text{ (м/с)}.$$

Похибка визначення широти

$$\Delta \phi = \beta_0 (1 - \cos vt) = \frac{0,06 \cdot \pi}{180} (1 - \cos(1,22 \cdot 10^{-3} t)) = 0,0011 \cdot (1 - \cos(1,22 \cdot 10^{-3} t))$$

Аналогічні формули існують для східного каналу, проте там треба враховувати дещо складніший характер зміни похибки по довготі.

23) Розрахувати похибки ІНС із-за похибки початкової виставки вертикалі, якщо похибки початкової виставки мають значення задані в таблиці нижче і в таблиці 22. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 23.

Таблиця 23.

Варіант	Похибка задання північної складової швидкості ΔV_N , км / год	Похибка задання східної складової швидкості ΔV_E , км / год	Похибка задання початкової широти $\Delta \varphi$, кут. хвилини	Похибка задання початкової довготи $\Delta \lambda$, кут. хвилини
1	4.7987	0.05951	0.22898	0.16887
2	1.7019	1.6856	0.91334	0.79957
3	2.9263	0.81091	0.15238	0.51974
4	1.1191	3.9714	0.82582	1.6001
5	3.7563	1.5561	0.53834	0.86283
6	1.2755	2.6427	0.99613	1.8213
7	2.5298	0.82824	0.078176	0.36369
8	3.4954	3.0099	0.44268	0.52761
9	4.4545	1.3149	0.10665	0.29108
10	4.7965	3.2704	0.9619	0.27214
11	2.7361	3.4461	0.0046342	1.7386
12	0.69312	3.7408	0.77491	1.1594
13	0.74647	2.2527	0.8173	1.0997
14	1.2875	0.41911	0.86869	0.28991
15	0,5	0,1	0,2501	0,2548
16	0,01	0,05	0,1145	0,01
17	0,02	0,3	0,5	0,035
18	1	0,5	0,045	0,01
19	2	0,2	0,03	0,5
20	3,5	1,2	0,8	1,2

24) Розрахувати похибки ІНС в північному каналі, викликані кутовою швидкістю уходу гіроскопа (дрейфом). Індивідуальні завдання приведені у таблиці 24.

Таблиця 24.

Варіант	Дрейф гіроскопа ω_β , кут.хв / хв	τ , с	Час роботи системи t , с
1	1	50	1020
2	5	150	1800
3	0.5	180	3500
4	0.02	20	3900
5	0.01	54	4200
6	0.0023	42	7205
7	0.001	33	7000
8	0.05	30	2504
9	0.06	50	3300
10	0.23	85	1130
11	2.1	100	5080
12	1.65	120	2205
13	0.05	40	4800
14	0.02	15	5300
15	0.2	20	600
16	0.05	50	1500
17	0.8	80	2500
18	0.2	35	5800
19	0.05	60	800
20	0.3	80	3500

Приклад розв'язку. Нехай дано дрейф гіроскопа $\omega_\beta=0,5$ кут.хв / хв, $\tau=40$ с (час дії кутового прискорення дрейфу, тобто час за який установлюється вказане в умові значення дрейфу гіроскопу), Час розгляду роботи системи $t=700$ с.

Похибка визначення вертикалі у північному каналі

$$\beta = \frac{2b}{v^2} \sin \frac{v\tau}{2} \sin v \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \approx \frac{\omega_\beta}{v} \sin v \left(t - \frac{\tau}{2} \right) = \frac{(0.5 / 60 \cdot \pi / 180) / 60}{1.22 \cdot 10^{-3}} \sin v \left(t - \frac{\tau}{2} \right) = 0.002 \sin v(t - 20) (рад) = 0.1146^\circ \sin v(t - 20)$$

Похибка визначення швидкості та широти у північному каналі

$$\Delta v_N = R\omega_\beta \left(1 - \cos \nu \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) = 6371000 \frac{0.5 / 60 \cdot \pi / 180}{60} (1 - \cos \nu (t - 20)) =$$

$$= 15.44 (1 - \cos \nu (t - 20)) \text{ (м/с)}.$$

$$\Delta \varphi = \omega_\beta \left(t - \frac{\tau}{2} - \frac{1}{\nu} \sin \nu \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) = 2.42 \cdot 10^{-6} (t - 20 - 819.67 \sin \nu (t - 20)) =$$

$$= -20 + 2.42 \cdot 10^{-6} t - 0.002 \sin \nu (t - 20) \text{ (рад)}.$$

25) Розрахувати похибки ІНС в північному каналі від впливу зміщення нулів акселерометрів і дрейфів нулів інтеграторів. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 25.

Таблиця 25.

Варіант	Зсув нуля акселерометра $\delta a_y, \text{ м/с}^2$	Дрейф нуля першого інтегратора ε_{IN}	Дрейф нуля другого інтегратора ε_{IIN}
1	0,0001	$1 * 10^{-5}$	$0,1 * 10^{-5}$
2	0,002	$2 * 10^{-5}$	$25 * 10^{-5}$
3	0,01	$0,1 * 10^{-5}$	$0,05 * 10^{-5}$
4	0.005	$0,02 * 10^{-5}$	$0,03 * 10^{-5}$
5	0.0008	$0,05 * 10^{-5}$	$5 * 10^{-5}$
6	0.00002	$5 * 10^{-5}$	$0,05 * 10^{-5}$
7	0.001	$25 * 10^{-5}$	$0,6 * 10^{-5}$
8	0.005	$0,42 * 10^{-5}$	$0,4 * 10^{-5}$
9	0.0008	$0,05 * 10^{-5}$	$42 * 10^{-5}$
10	0.001	$0,08 * 10^{-5}$	$0,2 * 10^{-5}$
11	0,05	$5 * 10^{-5}$	$2 * 10^{-5}$
12	0.003	$0,23 * 10^{-5}$	$0,033 * 10^{-5}$
13	0.0015	$8 * 10^{-5}$	$0,02 * 10^{-5}$
14	0.002	$50 * 10^{-5}$	$0,085 * 10^{-5}$
15	0,005	$2,5 * 10^{-5}$	$0,01 * 10^{-5}$
16	0,0008	$3,3 * 10^{-5}$	$0,5 * 10^{-5}$
17	0,002	$0,045 * 10^{-5}$	$0,085 * 10^{-5}$
18	0,01	$0,005 * 10^{-5}$	$0,004 * 10^{-5}$
19	0,0007	$0,1 * 10^{-5}$	$0,003 * 10^{-5}$
20	0,006	$0,02 * 10^{-5}$	$0,002 * 10^{-5}$

Приклад розв'язку. Нехай $\delta a_y = 0,0045 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_{IN} = 0,025 * 10^{-5}$,
 $\varepsilon_{IIN} = 0,06 * 10^{-5}$.

Похибка визначення вертикалі становить

$$\beta = \frac{\delta a_y + \varepsilon_{IN}}{g_0} (\cos vt - 1) = \frac{0.0045 + 0.025 \cdot 10^{-5}}{9.81} (\cos vt - 1) = 4.58 \cdot 10^{-4} (\cos vt - 1).$$

Похибка визначення швидкості

$$\Delta v_N = \frac{\delta a_y + \varepsilon_{IN}}{v} \sin vt = \frac{0.0045 + 0.025 \cdot 10^{-5}}{1.22 \cdot 10^{-3}} \sin vt = 3.69 \sin vt \text{ (м/с)}.$$

Похибки визначення широти

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{\delta a_y + \varepsilon_{IN}}{g_0} (\cos vt - 1) + \frac{\varepsilon_{IIN}}{R} t = 4.58 \cdot 10^{-4} (\cos vt - 1) + \frac{0.06 \cdot 10^{-4}}{6.371 \cdot 10^6} t = \\ &= 4.58 \cdot 10^{-4} (\cos vt - 1) + 9.4 \cdot 10^{-13} t \text{ (рад)} = 1.57 (\cos vt - 1) + 3.2 \cdot 10^{-9} t \text{ (кут.хв)} \end{aligned}$$

26) Розрахувати похибки ІНС в північному каналі із-за похибки масштабу інтегрування δM . Знайти період власних коливань системи. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 26.

Таблиця 26.

Варіант	Похибка масштабу інтегрування δM , %	Швидкість об'єкта V , м/с	Курс K , градуси	τ , с
1	0.9	300	25	50
2	0,01	50	0	150
3	0,5	850	30	180
4	0,42	540	60	20
5	0,03	120	90	54
6	3	60	250	42
7	0,08	300	80	33
8	0,002	250	330	30
9	0,003	455	225	50
10	0,0001	650	200	85
11	0,035	1200	45	100
12	0,08	400	135	120
13	0,009	70	340	40
14	0,025	20	10	15
15	0.035	50	30	50
16	0.01	150	80	80
17	0.4	540	240	20
18	0.08	420	90	30
19	0.2	330	280	120
20	1.1	90	140	200

Приклад розв'язку. Нехай Похибка масштабу інтегрування $\delta M = 0,01\%$,
Швидкість об'єкта $V = 100$ м/с, $K = 60$, $\tau = 100$ с

Відповідно до теорії похибок ІНС напіваналітичного типу

$$\nu_1^2 = \frac{g_0}{R}(1 + \delta M) = \frac{9.81}{6371 \cdot 10^3}(1 + 0.0001) = 1.55399 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta = \frac{\delta M \cdot V_N}{\sqrt{Rg_0(1 + \delta M)}} \sin \nu_1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) = \frac{0.0001 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ}{\sqrt{6371 \cdot 10^3 \cdot 9.81 (1 + 0.0001)}} \sin \nu_1 (t - 50) =$$

$$= 6.32 \cdot 10^{-7} \sin \nu_1 (t - 50)$$

Похибка визначення швидкості у північному каналі

$$\delta V_N = \frac{\Delta V_N}{V_N} = \delta M \left(1 - \cos \nu_1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \Rightarrow \Delta V_N = V_N \cdot \delta M \left(1 - \cos \nu_1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right)$$

$$\Delta V_N = 50 \cdot 0.0001 \left(1 - \cos \nu_1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) = 0.005 \left(1 - \cos \nu_1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \text{ (м/с)}$$

Похибки визначення широти

$$\delta \varphi = \frac{\Delta \varphi R}{V_N t} = \delta M - \frac{\delta M}{t \cdot \nu} \left(\frac{\nu_1 \tau}{2} + \sin \nu_1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) = 10^{-4} - \frac{0.082}{t} (0.061 + \sin \nu_1 (t - 50))$$

27) Знайти закон зміни похибки визначення азимуту та побудови вертикалі, викликані похибкою початкової виставки δ_0 і дрейфу ω_A азимутального гіроскопа. Побудуйте графік зміни похибки протягом доби.

Вважати, що при $t = 0$ $\beta(0) = 0$, $\dot{\beta}_0 = -\Omega \delta_0$. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 27.

Таблиця 27.

Варіант	Похибка початкової виставки в азимут δ_0 , градуси	Дрейф азимутального гіроскопа ω_A , градус/год
1	2	3
1	1	2
2	0,01	5
3	0,5	0,5
4	0,42	0,01

1	2	3
5	0,03	0,03
6	3	0,05
7	0,08	0,5
8	0,002	1,5
9	0,003	0,42
10	0,0001	0,035
11	0,035	0,005
12	0,08	0,002
13	0,009	0,025
14	0,025	0,0005
15	0,3	0,1
16	0,05	0,3
17	0,08	0,05
18	0,02	0,04
19	-0,3	0,1
20	2	1,5

28) Знайти похибки ІНС за швидкістю і положенням, викликані похибками початкової виставки δ_0 і дрейфу ω_A азимутального гіроскопа. Побудуйте графік зміни похибки широти протягом доби. Вважати, що при $t=0$ $\beta(0)=0$, $\dot{\beta}_0 = -\Omega\delta_0$. Дані для розрахунку взяти з таблиці 27.

29) Розрахувати матрицю напрямних косинусів і параметри Родріга-Гамільтона для початкової орієнтації безплатформної інерціальної навігаційної системи. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 28.

Таблиця 28.

Варіант	Початкове значення кута курсу ψ_0 , градуси	Початкове значення кута тангажу ϑ_0 , градуси	Початкове значення кута крену γ_0 , градуси
1	2	3	4
1	0	-20	-150
2	25	50	-75
3	50	90	60
4	330	-50	20
5	54	-30	50
6	24	45	0
7	320	50	30
8	250	20	150

1	2	3	4
9	200	42	120
10	154	30	70
11	120	-10	20
12	160	85	50
13	345	-90	42
14	60	67	-30
15	30	90	65
16	-50	35	90
17	40	20	60
18	-50	60	135
19	150	60	-45
20	30	30	-30

Приклад розв'язку. Знайдемо матрицю напрямних косинусів та кватерніон повороту для $\psi_0=40$, $\vartheta_0=50$, $\gamma_0=80$. Використаємо класичну авіаційну кінематику кутів повороту $O\xi\eta\zeta \xrightarrow{\psi,\zeta} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\vartheta,x_1} Ox_2y_2z_3 \xrightarrow{\gamma,y_2} Ox_3y_3z_3$

C^{gb}	x	y	z
ξ	$c_{11} = \cos \gamma_0 \cos \psi_0 +$ $+\sin \gamma_0 \sin \psi_0 \sin \vartheta_0;$	$c_{12} = \cos \vartheta_0 \sin \psi_0$	$c_{13} = \cos \psi_0 \sin \gamma_0 -$ $-\sin \psi_0 \cos \gamma_0 \sin \vartheta_0;$
η	$c_{21} = -\cos \gamma_0 \sin \psi_0 +$ $+\sin \gamma_0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0;$	$c_{22} = \cos \vartheta_0 \cos \psi_0;$	$c_{23} = -\sin \psi_0 \sin \gamma_0 -$ $-\cos \gamma_0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0;$
ζ	$c_{31} = -\cos \vartheta_0 \sin \gamma_0;$	$c_{32} = \sin \vartheta_0;$	$c_{33} = \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0.$

$$= \begin{bmatrix} 0.4924 & 0.4132 & -0.7660 \\ 0.4663 & 0.6179 & 0.6330 \\ 0.7349 & -0.6689 & 0.1116 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_{00} = \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} = 0.7453,$$

$$\lambda_{10} = \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} = 0.4367,$$

$$\lambda_{20} = \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} = 0.5035,$$

$$\lambda_{30} = \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} - \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} = -0.0178.$$

30) Знайти значення кутів Ейлера-Крилова для заданого кватерніона орієнтації БІНС. Індивідуальні завдання приведені у таблиці 29.

Таблиця 29.

Варіант	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
1	0.85303	0.98173	0.57521	1.8617
2	0.62206	0.97851	0.05978	0.47239
3	0.35095	0.67544	0.23478	1.7169
4	0.51325	1.8001	0.35316	0.45878
5	0.40181	0.73849	0.82119	0.92121
6	0.075967	0.22241	0.015403	1.564
7	0.23992	1.5605	0.043024	1.9506
8	0.12332	0.77948	0.16899	0.20281
9	0.18391	0.48338	0.64912	2.3235
10	0.23995	0.80782	0.73172	1.9393
11	0.41727	0.19291	0.64775	1.217
12	0.049654	0.26395	0.45092	1.0896
13	0.90272	1.8841	0.54701	1.117
14	0.94479	1.9123	0.29632	0.76587
15	0.12548	0.8754	0.35441	0.141
16	1.2457	0.8574	0.21	0.102
17	0.2547	0.35687	0.7584	0.3254
18	0.5478	0.8574	0.3456	0.2547
19	1.85474	0.6548	0.12	0.124
20	0.4578	0.4587	0.6887	0.1345

31) Демпфування платформної ІНС виконано шляхом:

- а) охоплення перших інтеграторів прямим зв'язком (рис. 2.6.);
- б) охоплення перших інтеграторів зворотним зв'язком (рис.2.7).

Розрахувати відносний коефіцієнт демпфірування і сталу похибку системи для умов руху об'єкта, приведених у таблиці 30.

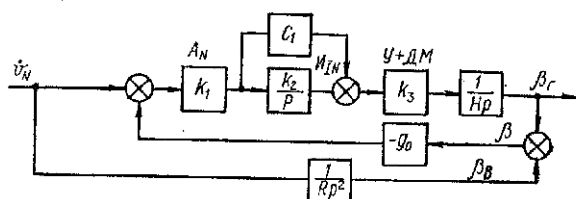


Рисунок 2.6 — Демпфування ІНС при охопленні інтегратора прямим зв'язком

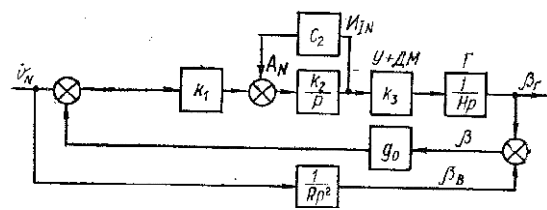


Рисунок 2.7 — Демпфування ІНС при охопленні інтегратора зворотним зв'язком

Таблиця 30.

Варіант	C_1	k_2	Швидкість V_η , км / год	Північна проекція відносного прискорення \dot{V}_η , м/с ²	Рівень зміни прискорення \ddot{V}_η , м/с ²
1	1,2	0,02	100	2	0,2
2	5	0,5	500	5	3
3	8	0,068	250	0,5	2,5
4	25	0,085	120	0,1	2
5	0,15	0,001	50	9	0,05
6	42	0,025	20	5	0,1
7	56	0,042	0	2	0,5
8	8,5	0,05	550	1,5	1,35
9	2,8	1	800	1,05	2,6
10	3,35	0,05	420	0,35	0,58
11	6	0,008	850	0,5	0,09
12	9	0,052	1100	6,2	0,52
13	12	0,009	1250	2,2	0,42
14	8,4	0,003	950	3,5	0,07
15	0,8	0,06	450	3	0,1
16	30	0,008	600	2	0,08
17	17	0,015	150	5	0,1
18	4,5	0,07	70	8	0,3
19	0,9	0,004	220	2	0,04
20	0,4	0,045	340	0,4	0,2

32) Демпфування БІНС виконано шляхом:

- а) охоплення перших інтеграторів прямим зв'язком (рис.2.8.);
- б) охоплення перших інтеграторів зворотним зв'язком (рис.2.9).

Розрахувати відносний коефіцієнт демпфування і сталу похибку системи для умов руху об'єкта, приведених у таблиці 31.

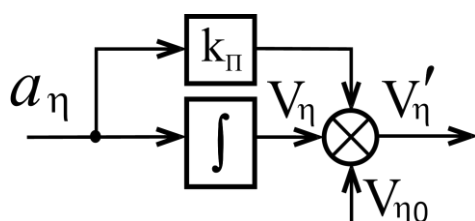


Рисунок 2.8 — Демпфування БІНС при охопленні інтегратора прямим зв'язком

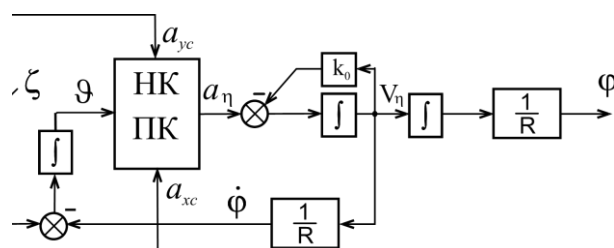


Рисунок 2.9 — Демпфування БІНС при охопленні інтегратора зворотним зв'язком

Таблиця 31.

Варіант	k_0	k_n	Дрейф гіроскопа $\Delta\omega_z$, градус / год	Кутове прискорення дрейфу гіроскопа $\Delta\dot{\omega}_z$, градус/год ²
1	1,2	0,02	0,1	0,01
2	5	0,5	0,02	0,05
3	8	0,068	0,5	0,02
4	25	0,085	1	0,01
5	0,15	0,001	0,01	0,008
6	42	0,025	0,005	0
7	56	0,042	0,002	0,03
8	8,5	0,05	0,025	0,003
9	2,8	1	0,3	0,042
10	3,35	0,05	0,03	0,008
11	6	0,008	0,05	0,052
12	9	0,052	0,008	0,098
13	12	0,009	0,03	0,054
14	8,4	0,003	0,02	0,02
15	8,5	0,15	0,1	0,03
16	2,8	0,002	0,02	0,01
17	3,35	0,08	0,05	0,02
18	6	0,005	1	0,1
19	2,5	0,001	0,04	0,01
20	0,5	0,03	0,2	0,05

Приклад розв'язку. Нехай дано $k_0=3$, $k_n=0,008$, $\Delta\omega_z=0,03$ градус/год, $\Delta\dot{\omega}_z=0,002$ градус/год². Розрахуємо відносний коефіцієнт демпфування і сталу похибку системи для випадку охоплення перших інтеграторів зворотним зв'язком

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0^2}{g}} = \frac{1}{2} k_0 \sqrt{\frac{1}{g}} = \frac{0,03}{2} \sqrt{\frac{1}{9,81}} = 0,0048,$$

$$\beta_{уст} = \frac{k_0}{g} \Delta\omega_z = \frac{3}{9,81} \cdot 0,03 \cdot \frac{\pi / 180}{3600} = 4,45 \cdot 10^{-8} \text{ (рад)} = 2,55 \cdot 10^{-6} \text{ (градус)}.$$

3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які моделі форми Землі ви знаєте?
2. Чому дорівнює радіус сферичної Землі? Що таке стиснення? Які параметри описують еліпсоїд обертання?
3. Що таке референц-еліпсоїд? Які ви знаєте референц-еліпсоїди? Яким чином отримуються їх параметри?
4. Що таке головні радіуси кривизни? Яка площа називається площиною першого вертикала?
5. Що таке екватор, паралелі, меридіани? Як визначається широта? Чому дорівнює широта на екваторі? Що таке довгота та від якої точки відліку прийнято її відраховувати? Якщо об'єкт довгий час рухався по меридіану на довготі 20° і попав на полюс, то чому буде дорівнювати його довгота у такому випадку?
6. Які існують вертикалі? Яку вертикаль найчастіше використовують для побудови інерціальних навігаційних систем? Що таке відвісна лінія?
7. Які моделі гравітаційного поля ви знаєте? У чому різниця між прискоренням гравітаційного тяжіння та прискорення сили земного тяжіння? Що вимірює акселерометр?
8. Що таке гравітаційний потенціал? Куди направлена трансверсальна проекція гравітаційного прискорення стосовно напрямків географічної СК?
9. Які системи координат ви знаєте? Куди направлені вісі СК *ECIF*? Куди направлені вісі СК *ECI*?
10. Як будуються супроводжуючі тригранники (СК)? Куди направлені вісі географічної СК? Чим відрізняється *ENU* від *NED*?
11. Як направлені вісі ортодромічної СК відносно географічної? Як будуть вільну в азимуті систему координат? Чому дорівнює вертикальна

складова кутової швидкості цієї СК

12. Які функції виконують гіроскопи у ГСП, яка використовується для побудови ІНС напіваналітичного типу?

13. Що таке умова незбурюваності? Що вона забезпечує? Як це пов'язано з маятником Шулера?

14. Для чого потрібна інерціальна вертикаль? Зобразіть функціональну схему північного каналу ІНС напіваналітичного типу? Східного каналу?

15. На які найбільш загальні категорії поділяють похибки ІНС?

16. Які методичні похибки ви знаєте? Назвіть основні причини їх виникнення.

17. Які методи компенсації методичних похибок ви знаєте?

18. До чого призводить наявність вертикальної складової руху об'єкта? Як врахувати еліпсоїдальність Землі при забезпеченні умови незбурюваності? Чи однакові ці умови для північного та східного каналу?

19. Які інструментальні похибки ви знаєте? До чого призводить неточність виставки в горизонті? В азимуті?

20. Як впливають похибки акселерометрів на визначення орієнтації та широти?

21. Як впливають похибки гіроскопів на визначення широти?

22. До чого призводить нестабільність коефіцієнта передачі контуру «акселерометр-інтегратор-датчик моменту-гіроскоп» або його аналітичного відповідника у БІНС?

23. Для чого виконується демпфування ІНС? Які схеми демпфування ви знаєте? Яку з них доцільніше застосовувати і коли?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. - М.: Наука, 1956. - 580 с,
2. Анучин О.Н., Емельянец Г.И. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. –СПб: ГНЦ РФ – ЦНИИ "Электроприбор", 2003. – 390 с.
3. Захарин Н.И., Захарин Ф.М. Кинематика инерциальных систем навигации. - М.: Машиностроение, 1958. - 236 с
4. Мелешко В.В. Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка. - К.: «Корнийчук», 1999. – 126с.
5. Мелешко В.В., Нестеренко О.И. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы. Учебное пособие. – Кировоград: ПОЛИМЕД - Сервис, 2011. – 172с.
6. Пельпор Д.С., Михалев И.А., Бауман В.А. и др. Гироскопические системы, ч.2. Гироскопические приборы и системы. - М.: Высш. шк., 1988. - 424 с
7. Самотокин Б.Б., Мелешко В.В., Степанковский Ю.В. Навигационные приборы и системы. - К.: Вища школа, 1986. - 343 с.

ДОДАТОК 1. Анотований покажчик додаткової літератури

Крім бібліографічних даних, в покажчику зазначені тираж видання / т. .. / і кількість примірників в бібліотеці КПІ ім. Ігоря Сікорського / б. ... /.

1. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. - М.: Наука, 1956. - 580 с, т.5600, б.31.

Перша частина фундаментальної монографії. Дано загальну характеристику методу інерціальної навігації. Розглянуто чутливі елементи ІНС. Приведено дані про форму Землі, її гравітаційне поле, рух Землі. Отримано рівняння ідеальної роботи ІНС, виведені рівняння похибок, проведено їх аналіз. Розглянуто залежності похибок визначення координат від інструментальних похибок і похибок початкової виставки. Розглянуто особливості інерціальної навігації поблизу поверхні Землі, підготовки ІНС до робочого режиму.

2. Андреев В.Д.. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. - М.: Наука, 1967. - 643 с, т.550, б.30.

Друга частина фундаментальної монографії. Містяться необхідні дані з теорії автономних ІНС. Розглянуто системи з корекцією від висотоміра, від доплерівського вимірювача швидкості, лага, від астрономічних навігаційних пристроїв. Вивчено можливості спрощення рівнянь ідеальної і реальної роботи. Розглянуто динаміку ІНС з урахуванням випадкового характеру інструментальних похибок.

3. Анучин О.Н., Емельянцев Г.И. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. – СПб: ГНЦ РФ – ЦНИИ "Электроприбор", 2003. – 390 с.

4. Бабич О.А. Обработка информации в навигационных комплексах. –

М.: Машиностроение, 1991. – 512 с.

Дано алгоритми обчислення координат літального апарату за сигналами радіосистем ближньої, далекої і супутникової навігації, бортових візирів наземних орієнтирів, доплерівських та інерціальних систем, а також стохастичні моделі і методи статистичної фільтрації похибок зазначених вимірювачів. Викладено принципи побудови і алгоритми функціонування навігаційних комплексів, що складаються з декількох вимірювачів.

5. Боронахин А.М., Лукьянов Д.П., Филатов Ю.В. Оптические и микромеханические инерциальные приборы. — СПб.: ООО "Техномедиа"/Изд-во "Элмор", 2008, 400с. (монография)

6. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1992. - 280с.

7. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. - М.:Наука, 1979. - 296 с, т.2400, б.14.

Монографія. Описана фігура Землі, поле сили тяжіння. Розглянуто прискорення в різних системах координат. Розкрито принципи побудови чутливих елементів ІНС. Представлені алгоритми роботи ІНС різних типів.

8. Дмитриевский А.А., Иванов Н.И., Лысенко Л.Н., Богодистов С.О Баллистика и навигация ракет /Под ред. А.А .Дмитриевского. - М.: Машиностроение, 1985. - 312 с, г.3000, б.5.

Підручник. Викладено основні положення теорії ІНС. Дано Приведено векторні рівняння похибок платформних ІНС. Розглянуто задачі інерціального керування дальністю і напрямком польоту, а також побудова інерціально-доплерівської ІНС.

9. Дмитроченко Л.А., Савинов Г.Ф., Гора В.П. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы. - М.: МАИ, 1984. - 64 с, т.500, б.-

Представлені основні питання теорії БІНС: проектування

функціональних алгоритмів визначення навігаційних параметрів та параметрів орієнтації; використання надлишкової кількості вимірювачів; способів початкової виставки. Розглянуто використання методів оптимальної фільтрації для початкової виставки.

10. Дмитроченко Л.Л., Тювин А.В., Савинов Г.Ф., Гора В.П. Анализ точности и основы проектирования бесплатформенных инерциальных навигационных систем. - М.: МАИ, 1985. - 53 с, т.500, б.-.

Книга є продовженням навчального посібника 9. Приведена якісна характеристика джерел похибок БІНС. Показані шляхи дослідження похибок БІНС. Представлені чисельні алгоритми розв'язання задачі визначення параметрів орієнтації. Приведено методики оцінки похибок визначення параметрів, в тому числі шляхом моделювання на ЕОМ. Приведено алгоритми контролю відмов і ідентифікації елементів, що відмовили.

11. Елифанов А.Д. Избыточные системы управления летательными аппаратами. - М.; Машиностроение, 1973. - 144 с, т.1380, б.3.

Приведено векторно-матричні рівняння вимірювань і похибок блоку надлишкових вимірювачів, розглянуто питання оптимальної орієнтації надлишкового блоку вимірювачів, обробка надлишкової інформації. Представлено рішення задач ідентифікації надлишкових вимірювачів при наявності відмов, адаптацію при відмовах. Розглянуто питання створення надлишкових керуючих комплексів.

12. Захарин Н.И., Захарин Ф.М. Кинематика инерциальных систем навигации. - М.: Машиностроение, 1958. - 236 с, т.2500, б.1.

Розглянуто алгоритми функціонування ІНС. Отримано рівняння похибок ІНС. Перша вітчизняна монографія, де викладена теорія безплатформних ІНС. Системи розглядаються для застосування в авіаційній техніці.

13. Иванченко А.И. Бесплатформенные инерциальные системы навигации. -К.: КВВАИУ, 1988. - 221 с, т.1450, б.2.

Навчальний посібник. Систематизовано можливості використання різних систем координат, приведені види рівнянь орієнтації. Отримано рівняння похибок. Оцінюються похибки, викликані приближенністю методів обчислень. Викладена теорія початкової виставки ІНС на нерухомій і рухомій основі. Розглянуто комплексування БІНС з вимірювачами швидкості і координат, системи виявлення несправностей. Показано особливості роботи БІНС з різними чутливими елементами, приведено чисельні оцінки.

14. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. - М.: Наука, 1976. - 672 с, т.7000, б.5.

У трьох останніх главах розглянута теорія інерціальної навігації при русі об'єкта по великому колу або вздовж довільної траєкторії. Приведені схеми і теоретичні основи класичних чутливих елементів. Розглянуто ІНС гірокомпасного типу, схеми ІНС без акселерометрів. При описі задачі кінематики інерціальної навігації розглянуто використання параметрів Родріга-Гамільтона, Ейлера-Крилова, Кейлі-Клейна, навігація у високих широтах із застосуванням стереографічної проекції.

15. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. - М.: Наука, 1987. - 320 с, т.7000, 0.1.

Розглядається суть абсолютного і відносного руху. Описано рухомі системи координат. Розглянуто основи побудови ІНС, нестійкість інерціального визначення висоти, поведінку фізичного маятника. Приведено аналітичний виклад деяких питань кінематики.

16. Кавинов И.Ф. Инерциальная навигация в околоземном пространстве. - М.: Машиностроение, 1983. - 144 с, т.1230, б. -.

Розглянуто питання орієнтації і навігації космічних літальних

апаратів. Приведена коротка інформація стосовно приладів первинної інформації, розглянуті питання навігації на ділянці виведення, визначення параметрів орієнтації КА за допомогою ГСП. Представлені алгоритми астрокоррекції, алгоритми БІНС. Досліджено похибки ІНС.

17. Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. - М.: Наука, 1984. - 118 с, т.1650, б.2.

Монографія. Викладається теорія корабельних ІНС. Приведено схеми і рівняння роботи. Викладено основні положення кінематики твердого тіла з однією нерухомою точкою. Розглянуті кінематичні похибки ІНС, демпфування її коливань, особливості роботи з врахуванням несферичності Землі, застосування оптимальної фільтрації. Викладена механіка незбурюваних систем. Приведено числові приклади і результати моделювання на ЕОМ.

18. Кузовков И.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. - М.: Машиностроение, 1982. - 216 с, т.1560, б.-.

Розглянуто платформні і безплатформні ІНС. Досліджено вплив неточностей структури і параметрів ІНС на точність вихідних параметрів. Розглянуто схеми демпфування. Представлені схеми корекції ІНС, розглянуті питання спостережуваності та ідентифікації складових похибок ІНС. Приведено аналіз застосування оптимального фільтра Калмана і субоптимальних фільтрів.

19. Липтон А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании. - М.: Наука, 3971 . - 167 с. /Под ред. В.Л.Леонидова, т.3000, б.1.

Монографія американського автора, практично єдина з системного викладу теорії початкової виставки. Розглянуті похибки вимірювальних систем. Дано аналіз способів виставки: горизонтування, гірокомпасування, виставки за зірками; шляхом фіксації азимута, векторного узгодження, узгодження кутів карданових підвісів, оптичної виставки. Розглянута

виставка ІНС на ракетах, підвішених під літаком-носієм. У додатку розглянуті питання теорії акселерометрів.

20. Лукьянов Д.И., Мочалов А.В., Одинцов А.А., Вайсгант И.Б. Инерциальные навигационные системы морских объектов. - Л.: Судостроение, 1989. - 184 с, т.1700. б.-.

Розглянуто чутливі елементи ІНС, приведено класифікацію ІНС, системи координат і їх перетворення. Викладена теорія похибок ІНС. Приведені чисельні характеристики, як похибок чутливих елементів, так і ІНС, графіки їх зміни.

21. Мак-Клур К.Л. Теория инерциальной навигации. Мак-Клур К.Л. Теория инерциальной навигации. - М.: Наука, 1964. - 300 с, т.4000, б.1.

Розглянуто роботу одноканальної ІНС. Представлені відомості про фігуру Землі, про роботу двохвісної гіростабілізованої платформи. Показано вплив гравітаційних аномалій на роботу ІНС. Розглянуто декілька варіантів демпфування ІНС.

22. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2009. – 280 с.

23. Мелешко В.В. Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка. - К.: «Корнийчук», 1999. – 126с.

Викладено загальний огляд способів початкової виставки, описи окремих способів і схем. Представлені математичні моделі, формули для оцінки основних параметрів режиму. Розглянута виставка систем різних типів, включно ІНС геометричного і аналітичного типуів з ГСП. Приведено схеми та алгоритми початкової виставки платформ двохосьових гіростабілізаторів.

24. Мелешко В.В., Нестеренко О.И. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы. Учебное пособие. – Кировоград: ПОЛИМЕД -

Сервис, 2011. – 172с.

25. О'Донелл К.Ф. ред. Инерциальная навигация. - М.: Наука, 1969. - 592 с, т.5000 , б.1.

Викладено принципи інерціальної навігації. Розглянуто інерціальні та оптичні елементи, інерціальні платформи. Представлені алгоритми інерціальних систем та аналіз похибок, способи і схеми корекції. Розглянуто завдання наведення балістичних снарядів. У ряді програм надано окремі питання математичних методів. Складено низкою американських фахівців.

26. Парусников И.А., Морозов В.М., Борзов В.Н. Задача коррекции в инерциальной навигации. - М.: Изд-во МГУ, 1982. - 174 с, т.1500, б.1.

Викладається теорія, в основі якої покладено уявлення сучасної теорії спостережуваності і оптимального оцінювання. Розглянуто оцінювання вектора стану лінійних динамічних систем, завдання визначення взаємної орієнтації двох тригранників за вимірюваннями їх відносної кутової швидкості і одиничного вектора в проекціях на осі обох тригранників. Приведено основні співвідношення методу інерціальної навігації. Отримано рівняння похибок , алгоритми корекції ІНС, представлена математична модель літального апарату в задачах навігації.

27. Пельпор Д.С., Михалев И.А., Бауман В.А. и др. Гироскопические системы, ч.2. Гироскопические приборы и системы. - М.: Высш. шк., 1988. - 424 с, т.5500, б.21.

Розглянуто теорія фізичного маятника, його поведінка в умовах прискорень на Землі, а також курсовертикалі на ДНГ, на поплавкових інтегруючих гіроскопах. Приведені основи теорії БІНС з ДКШ, з ЕСГ. Викладено питання горизонтування ГСП, початкової виставки безплатформної системи орієнтації. Приведено основні відомості про гіроскопічні чутливі елементи.

28. Пельпор Д.С., Ягодкин В.В. Гироскопические системы.

Проектирование гироскопических систем. Ч.1. Системы ориентации и навигации /Под. ред. Д.С.Пельпора. - М.: Высш. шк., 1977. - 216 с, т.8000 , б.4.

Другий розділ навчального посібника присвячений в основному задачам проектування ІНС, в тому числі для польотів по ортодромії. Враховується несферичність Землі. Приведено методики розрахунків основних параметрів, необхідної точності, інструментальних похибок. Описана методика обґрунтування вимог, які пред'являються до елементів, в тому числі до їх динамічних параметрів. Розглянуто особливості інерціального керування балістичними ракетами. Приведені типові схеми інерціальних систем. Оцінюються їх інструментальні похибки.

29. Рахтеенко В.Р. Гироскопические системы ориентации. - М.: Машиностроение, 1989. - 232 с, т.2630, б.2.

30. Репников А.В. Начальная выставка гироскопических систем ориентации. - М.: МАИ, 1983. - 52 с, т.500, б.-.

Розглянуті способи виставки на нерухомій і рухомій основах. Містить типові приклади і аналіз похибок. Викладення матеріалу базується на векторному поданні спостережуваних і керованих змінних. Приведена і проілюстрована класифікація способів початкової виставки.

31. Ривкин С.С., Ивановский Р.И., Костров А.В. Статистическая оптимизация навигационных систем. - Л.: Судостроение, 1976. - 280 с., г.3000 , б.-1.

Представлені моделі ІНС в просторі станів. Приведені приклади використання в ІНС фільтрів Вінера, Калмана, а також розв'язок задач корекції ІНС за позиційною, швидкісною інформацією, застосування фільтрів Калмана в задачах початкової виставки. Приведені чисельні оцінки.

32. Самошкин Б.Б., Мелешко В.В., Степанковский Ю.В.

Навигационные приборы и системы. - К.: Вища школа, 1986. - 343 с, т.1650, б.21.

Підручник. Розглянуто загальні принципи та схеми побудови ІНС. Найбільш повно досліджена ІНС напіваналітичного типу. Розглянуто схеми комплексування ІНС з радіо-, астронавігаційних системами, лагами. Використовуються методи сучасної теорії керування.

33. Ткачев Л.И. Системы инерциальной ориентации.- М.: Московский энергетический институт. - 1973. - 213 е., т.2500, б.1.

Викладені основи теорії ІНС. Приведено алгоритми ІНС аналітичного і напіваналітичного типів.

34. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М.Н. Красильщикова и Г.Г. Себрякова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 280 с

Викладено основні підходи, методи і алгоритми формування вигляду інтегрованих систем навігації і керування безпілотних маневрених літальних апаратів різних класів. Поняття "вигляд" включає: склад, структуру і алгоритми відповідної інтегрованої системи. До складу сформованих інтегрованих систем входять безплатформна інерціальна система і багатоканальний приймач GPS/ГЛОНАСС. Обговорюються питання комплексування навігаційних вимірювань, обробки зображень, включаючи формування еталонів. Розглянута технологія створення об'єктно-орієнтованих програмних комплексів для моделювання процесів функціонування розроблених інтегрованих систем. Приведено результати моделювання інтегрованих комплексів безпілотних маневрених літальних апаратів різних класів.

35. Філяшкін М.К., Рогожин В.О., Скрипець А.В., Лукінова Т.І. Інерціально-супутникові навігаційні системи. — К.: Вид-во нац.авіац.ун-ту "НАУ-друк", 2009. — 272 с.