

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С.Л. Лакоза

Основи теорії вимірювальних приладів

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою
програмою «Комп'ютерно-інтегровані технології та системи навігації і
керування» і «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в
приладобудуванні»
спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти: *Добролюбова М.В.* — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних вимірювальних технологій КПІ ім. Ігоря Сікорського
Головач С.В. — канд. техн. наук, головний конструктор напрямку АТ «Елміз»

Відповідальний редактор: *Півторак Д.О.*, канд. техн. наук, доцент кафедри приладів і систем орієнтації і навігації КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету (протокол № 4/21 від 26.04.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Лакоза Сергій Леонідович, канд. техн. наук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИЛАДІВ

Основи теорії вимірювальних приладів [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / С.Л. Лакоза; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. - 51 с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості та практичні рекомендації до виконання домашньої контрольної роботи (ДКР) стосовно лінійного розрахунку основних похибок вимірювальних приладів з дисципліни "Основи теорії вимірювальних приладів".

У процесі виконання домашньої контрольної роботи студенти отримують навички застосування лінійної теорії точності для розрахунку похибок засобів вимірювання, моделювання роботи вимірювальних перетворювачів, освоюють метод приведення похибок до стандартної форми.

© С.Л. Лакоза, 2021
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	5
2. ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИКОНАННЯ	6
3. ОФОРМЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕКСТУ РОБОТИ.....	7
4. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	9
4.1. Розрахунок похибок засобів вимірювання	12
4.2. Похибки нелінійності.....	17
4.3. Вимірювальні перетворювачі прямої дії.....	21
5. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	24
5.1. Порядок виконання роботи	32
5.2. Приклад виконання роботи	33
5.3. Контрольні запитання	49
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	50

ВСТУП

Отримання інформації про стан процесів і параметрів за допомогою вимірювальних приладів використовується в багатьох областях діяльності людини: промислового виробництва, авіації і космонавтиці, екологічному моніторингу, медицині тощо. В світі щодня виконується декілька мільйонів вимірювань, що проводяться за допомогою спеціальних вимірювальних приладів, пристроїв, систем. Тому розробка і створення засобів вимірювання є одним з основних напрямків науково-технічного прогресу, тісно пов'язаним з розвитком науки і технології.

Важливу роль відіграє точність вимірювання, яка безпосередньо залежить від точності засобу вимірювання, за допомогою якого отримується інформація про контрольований процес. Точність вимірювального приладу характеризує ступінь близькості дійсної функції перетворення сигналу до теоретичної. Забезпечення потрібної точності є комплексною проблемою, вирішення якої здійснюється на всіх етапах життєвого циклу виробу: проектування, виробництво, технічне обслуговування і ремонт в процесі експлуатації.

У даному посібнику розглядаються питання лінійної теорії точності, що дозволяють оцінювати похибки об'єкта проектування незалежно від принципу його дії і конструктивних особливостей.

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

При виконанні домашньої контрольної роботи використовуються знання, здобуті студентами при вивченні дисциплін «Фізика» та «Вища математика». Домашня контрольна робота виконуються з метою формування та закріплення у студентів теоретичних знань і практичних навичок з питань теорії вимірювальних засобів.

Завдання контрольних робіт:

- систематизація, закріплення та розширення теоретичних знань з фахової дисципліни;
- набуття навичок вирішення прикладних задач щодо аналізу інформаційних характеристик сигналу, розрахунок похибок вимірювальних ланцюгів;
- оцінка випадкової складової похибки засобу вимірювальної техніки по відомій чи доступній імовірнісній інформації;
- поглиблене вивчення конкретних проблем, що стосуються теоретичного апарату для дослідження вимірювальних перетворювачів.

Під час виконання даної домашньої контрольної роботи студент має набути вмінь розрахунку похибок вимірювальних елементів та систем, що з них складаються.

Контрольна робота використовується для перевірки отриманих знань студента під час вивчення даної дисципліни. В контрольних роботах мають бути використанні теоретичні положення, викладені на лекціях та висвітленні в рекомендованих навчально-методичних джерелах.

2. ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИКОНАННЯ

При виконанні домашньої контрольної роботи, необхідно дотримуватися вимог щодо її структури та оформлення. Контрольна робота повинна містити наступні складові елементи: ідентифікаційна частина, основна частина.

Ідентифікаційна частина містить:

- назву навчального закладу;
- назву дисципліни, з якої виконується домашня контрольна робота;
- прізвище, ім'я та по-батькові студента повністю;
- курс, групу студента.

Основна частина роботи має містити:

- номер варіантів завдань для контрольної роботи, який виконує студент (призначається викладачем індивідуально для кожного студента);
- номери завдань контрольної роботи та їх умови;
- рішення завдань контрольної роботи;
- висновки щодо виконаної роботи.

Виконання завдань домашньої контрольної роботи повинно бути послідовним. Рішення певного завдання має міститися одразу після умови цього завдання.

3. ОФОРМЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕКСТУ РОБОТИ

Виконання контрольної роботи поєднує такі елементи:

- вивчення основної навчальної літератури за тематикою роботи;
- вивчення додаткової літератури за тематикою роботи;
- розв'язання завдань та написання тексту роботи.

Контрольна робота повинна бути оформлена відповідно до вимог щодо оформлення тексту, графічних матеріалів, таблиць і формул. Перша сторінка контрольної роботи є титульною з відповідними реквізитами студента: ПІБ, курс, група, назва предмету та номер варіанту, який був виданий на домашню контрольну роботу.

Контрольна робота виконується шляхом власноручного написання темно-синім, чорним або фіолетовим кольором (кульковою ручкою) в звичайному учнівському зошиті або на чистих аркушах А4. Сторінки роботи нумеруються. Написання контрольної роботи здійснюється одним кольором контрастного відтінку з дотриманням інтервалу між рядками. Кожна структурна частина роботи починається з нової сторінки. При написанні обов'язково залишати поля для зауважень. Контрольна робота повинна бути виконана грамотно, без довільного скорочення слів, старанно оформлена. У разі виявлення розбіжностей в почерку особи, яка захищає контрольну роботу, і почерку, яким вона виконана, така робота вилучається і анулюється, а студент отримує нове завдання.

Відповіді на теоретичні питання повинні бути чіткими та лаконічними. Орієнтовно студент повинен завершити роботу над домашньою контрольною роботою не пізніше, ніж за один місяць до початку семестрового контролю. Контроль за якістю виконання контрольних робіт здійснюється шляхом перевірки та оцінки виконаної

роботи. Успішно виконані завдання роботи підлягають зарахуванню та відповідному оцінюванню. Не зараховані контрольні роботи підлягають доопрацюванню і повторному поданню викладачу. При цьому обов'язковим є виконання рекомендацій, що містяться в зауваженнях на контрольну роботу.

Номер сторінки проставляється унизу справа аркушу арабськими цифрами, відступ від краю має становити 1-1,5 см. Перший аркуш включається в загальну нумерацію сторінок, але номер сторінки на ньому не проставляється. Ілюстрації, таблиці, розташовані на окремих аркушах, включаються в загальну нумерацію сторінок.

Ілюстрації (креслення, графіки, схеми, діаграми, рисунки) слід розташовувати в роботі безпосередньо після тексту, у якому вони згадуються вперше, або на наступній сторінці, якщо у вказаному місці вони не поміщаються. Ілюстрації слід нумерувати арабськими цифрами порядковою нумерацією в межах рішення певного завдання. На всі ілюстрації повинно бути дано посилання в роботі. Наприклад: «...відповідно до рисунку 2». Під ілюстраціями зазначається їх номер і назва. При виконанні роботи під час моделювання проходження сигналу необхідно використовувати один з чисельних прикладних математичних пакетів (наприклад, Simulink). Результати роботи моделі необхідно привести в кінці роботи в якості додатків. Кожен із рисунків в додатку має бути пронумерований і підписаний. Рисунки та графіки мають бути виконані на білому тлі контрастними кольорами (сірий, чорний, синій).

При застосуванні формул мають бути приведені короткі пояснення виконуваних дій. Спочатку формули приводяться у загальній постановці, а вже потім необхідно записувати рішення завдання згідно поставленого завдання.

У випадку не зарахування домашньої контрольної роботи студент не допускається до здачі заліку.

4. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У процесі вимірювання на засоби вимірювальної техніки діють одночасно безліч різних факторів, як з боку об'єкта вимірювання, так і зовнішнього середовища — умов проведення вимірювального експерименту.

Метрологічні характеристики (МХ) засобів вимірювальної техніки (ЗВТ) — властивості ЗВТ, що впливають на результати та похибки вимірювань.

Основною МХ вимірювальних приладів і перетворювачів є функція перетворення, що описує залежність між вхідною (вимірюваною) величиною x і вихідною (результатом вимірювання, показами вимірювального приладу) величиною y . Для сукупності засобів вимірювання одного типу встановлюють номінальну функцію перетворення:

$$y_n = f_n(x). \quad (1)$$

Номінальна функція перетворення — це типова функція перетворення (ідеальна, бажана), усереднена по безлічі засобів вимірювання даного типу.

Водночас вхідна (вимірювана) і вихідна величини зв'язані між собою певною фізико-математичною залежністю, яка відображає *теоретичну функцію перетворення*:

$$y_T = f_T(x). \quad (2)$$

Відмінність теоретичної функції перетворення від номінальної породжує методичну складову похибки, що в загальному випадку залежить від значення вхідної величини (змінюється по діапазону вимірювання, перетворення):

$$\Delta_m(x) = f_T(x) - f_n(x) \quad (3)$$

Відмінність реальної функції перетворення кожного окремого екземпляра від теоретичної, в межах нормальних умов, формує конструктивно-технологічну складову інструментальної похибки :

$$\Delta_T(x) = f(x) - f_T(x) = f_T(x, q_1, q_2, \dots, q_n) - f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}). \quad (4)$$

Якщо виконати розклад реальної функції перетворення в ряд в точці поблизу номінальних значень параметрів та обмежити цей ряд лінійними членами розкладу (щоб залишатися в межах лінійної теорії точності), то інструментальну складову похибки можна виразити через конструктивно-технологічні похибки виготовлення параметрів $\Delta q_i = q_i - q_{i0}$ у вигляді

$$\Delta_T(x) = \sum_{i=1}^n \frac{df(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})}{dq_i} \Delta q_i. \quad (5)$$

Різниця між реальною й номінальною функціями перетворення в нормальних умовах — основна похибка засобів вимірювання:

$$\Delta_{очн} = f(x) - f_n(x) = [f(x) - f_T(x)] + [f_T(x) - f_n(x)] = \Delta_m(x) + \Delta_T(x). \quad (6)$$

Похибка ЗВТ у реальних умовах експлуатації складається з основної і додаткової:

$$\Delta(x) = \Delta_{очн}(x) + \Delta_{доо}(x) = \Delta_m(x) + \Delta_T(x) + \Delta_{доо}(x). \quad (7)$$

Чутливість — здатність засобів вимірювання реагувати на зміни вхідної величини. Кількісно чутливість визначається як відношення вихідної величини (покази вимірювального приладу) Δy до зміни вимірюваної величини Δx , що відображає середнє значення чутливості на скінченному інтервалі. Чутливість у точці діапазону дорівнює похідній від функції перетворення. Таким чином, можна говорити про номінальну або реальну чутливість, чутливість в робочих умовах. У загальному випадку чутливість є функцією вимірюваної величини (змінюється по діапазону перетворення):

$$S(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x). \quad (8)$$

Адитивна похибка — це похибка, яка безпосередньо сумується з вимірюваною величиною та не залежить від значення вимірюваної величини. По характеру поведінки в часі вона може бути як систематична, так і випадкова. Звідси виходить більш строгі визначення: **адитивна похибка** — це похибка, абсолютне значення якої в будь-якій точці діапазону обмежене постійною границею (значенням). Границя абсолютного значення адитивної похибки по діапазону описується одночленною формулою:

$$\Delta(x) = \Delta_0, \quad (9)$$

де Δ_0 — граничне по модулю значення (постійна границя) похибки.

Похибка, границя абсолютного значення якої пропорційна значенню вимірюваної величини, називаються **мультиплікативною** або **похибкою чутливості**. Границі абсолютної похибки описуються по діапазону також одночленною формулою

$$\Delta(x) = \gamma_k x, \quad (10)$$

де γ_k — коефіцієнт пропорційності, що представляє собою відносне значення похибки крутизни перетворення (чутливості). Невизначеність функції перетворення в цьому випадку укладається в смугі, що розходиться віялом від початкового значення.

У реальних вимірювальних приладах похибки нуля й чутливості проявляються разом. Границі сумарної похибки в цьому випадку виражаються двочленною формулою

$$\Delta(x) = \Delta_0 + \gamma_k x. \quad (11)$$

У вимірювальних приладах з дуже широким динамічним діапазоном, коли вимірюються як дуже малі, так і дуже великі значення фізичної величини, смуга похибок виражається тричленною формулою:

$$\Delta(x) = \Delta_0 + \gamma_k x + \frac{x^2}{X_0}. \quad (12)$$

Перших два доданки (12) представляють адитивну й мультиплікативну складові похибки, а третій член — квадратичну складову.

4.1. Розрахунок похибок засобів вимірювання

В основу розрахунків похибок покладено структурний метод аналізу, що базується на приведенні до виходу або до входу похибки кожного блоку вимірювального ланцюга. Розрахунки похибки засобів вимірювання доцільно проводити за наступною схемою:

- поділити весь вимірювальний ланцюг на функціонально закінчені блоки (ланки). Наприклад, в електронному вольтметрі змінної напруги можна виділити в самостійні блоки вхідний пристрій, підсилювач змінного струму, детектор і блок індикації;
- складання рівняння похибок кожної ланки;
- приведення рівняння похибок кожної ланки до стандартної форми;
- складання рівняння похибок усього вимірювального ланцюга;
- підсумовування похибок складових компонентів відповідно до рівняння похибок ланцюга.

Етапи розрахунків похибок:

1. Складання рівняння похибок функціонально закінчених вузлів вимірювального ланцюга. Номінальна функція перетворення досліджуваного блоку: $y_n = f_n(x)$. Теоретична функція перетворення даного перетворювача визначається при номінальних значеннях геометричних і фізичних параметрів схеми $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0}$ у межах нормальних умов: $y_T = f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0})$.

Якщо номінальна й теоретична функції перетворення збігаються, то $f_n(x) = f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0})$. Якщо ці функції різні, то має місце методична складова основної похибки

$$\Delta_m = f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0}) - f_n(x). \quad (13)$$

Дана умова виконується завжди при лінеаризації нелінійної теоретичної функції перетворення, а виникаюча при цьому похибка являє собою похибку нелінійності.

При відхиленні параметрів схеми від номінальних значень похибки розрахункової функції обчислюють по формулі

$$\Delta_T(x) = f_T(x, q_1, q_2, \dots, q_k) - f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0}). \quad (14)$$

При лінійному наближенні (у рамках лінійної теорії точності) рівняння буде мати вигляд

$$\Delta_T = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_i} \right)_0 \Delta q_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (15)$$

де $\Delta q_i = q_i - q_{i0}$ — первинна похибка параметра q_i ;

$\left(\frac{\partial y_T}{\partial q_i} \right)_0 = \frac{\partial f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0})}{\partial q_i}$ - значення частинної похідної при номінальних значеннях параметрів q_{10}, \dots, q_{k0} (коефіцієнт впливу i -го параметра на похибку ланки).

Для широкого практичного застосування прийнятний наближений розв'язок, тобто в рамках лінійної теорії точності. Таке наближення є доцільним при виконанні наступних умов:

- відхилення $\Delta q'_i$ і $\Delta \xi_j$ суттєво менші їх номінальних значень;
- похибки $\Delta q'_i$ і $\Delta \xi_j$ відхилення є взаємозалежними величинами.

Сумарна похибка при виконанні зазначених умов знаходиться за принципом суперпозиції (накладення):

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y_p}{\partial q_i} \right)_0 \Delta q'_i + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y_p}{\partial q_i} \right)_0 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \right)_0 \Delta \xi_j.$$

Основна похибка:

$$\Delta_{осн} = \Delta_{м} + \Delta'_T = f_T(x, q_{10}, \dots, q_{k0}) - f_n(x) + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y_T}{\partial q_i} \right) \Delta q'_i. \quad (16)$$

2. Приведення рівняння похибок до стандартної форми. У загальному випадку всі складові похибки (16) є функціями вхідної величини $\Delta_{м} = F_0(x); \left(\frac{\partial y_p}{\partial q_i} \right)_0 = \psi_i(x); \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \right)_0 = \psi_{ij}(x)$.

Тоді основна й додаткова похибки можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_{осн} &= F_0(x) + \sum_{i=1}^k \psi_i(x) \Delta q'_i; \\ \Delta_{дод} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \psi_i(x) \psi_{ij}(x) \Delta \xi_j. \end{aligned} \quad (17)$$

Розкладемо всі функції в ряд Тейлора, обмежувачись трьома членами розкладу:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= a_0 + b_0 x + c_0 x^2; \\ \psi_i(x) &= a_i + b_i x + c_i x^2; \\ \psi_{ij}(x) &= a_{ij} + b_{ij} x + c_{ij} x^2; \\ a_0 &= F(0); \quad b_0 = F'(0); \quad c_0 = \frac{F''(0)}{2!}; \\ a_i &= \psi_i(0); \quad b_i = \psi'_i(0); \quad c_i = \frac{\psi''_i(0)}{2!}; \\ a_{ij} &= \psi_{ij}(0); \quad b_{ij} = \psi'_{ij}(0); \quad c_{ij} = \frac{\psi''_{ij}(0)}{2!}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут a_{ij} — коефіцієнти впливу j -ої зовнішньої величини на абсолютне значення i -го параметра, наприклад q_i , температурний дрейф нуля операційного підсилювача; b_{ij} — коефіцієнти впливу величини ξ_i на відносну зміну параметра q_i , наприклад, температурний коефіцієнт опору;

c_{ij} — коефіцієнти, що характеризують нелінійну залежність параметра q_i від зміни величини ξ_i .

Поєднуючи результати, отримуємо основну й додаткову похибки у вигляді сум адитивної, мультиплікативної й квадратичної складових:

$$\Delta_{осн} = \left(a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \Delta q'_i \right) + \left(b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \Delta q'_i \right) x + \left(c_0 + \sum_{i=1}^k c_i \Delta q'_i \right) x^2. \quad (19)$$

У виразі (19) перший доданок — основна адитивна складова, величини a_i — коефіцієнти впливу відхилень параметрів схеми на адитивну похибку. Другий доданок виражає мультиплікативну складову похибки, при цьому основна похибка чутливості буде

$$\gamma_{осн} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \Delta q'_i, \quad (20)$$

а b_i — коефіцієнти впливу параметрів q_i на мультиплікативну похибку. Третій доданок — квадратична складова основної похибки, де коефіцієнт при x^2 є зворотною величиною параметра X_0 .

У вимірювальних перетворювачах з порівняно вузьким динамічним діапазоном (не перетворюються дуже великі значення вхідної величини, коли перетворення зустрічає істотні технічні труднощі при реалізації) квадратичною складовою, як правило, можна знехтувати в порівнянні з адитивною і мультиплікативною. Останнє припущення істотно спрощує аналіз похибок складних вимірювальних ланцюгів.

3. Складання рівняння похибок вимірювальних ланцюгів. Для складного вимірювального ланцюга, що складається з n ланок, вихідною величиною є

$$y = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

де y_i — вихідна величина i -ої ланки.

Розрахунок похибок ланцюга, що складається із сукупності нелінійних перетворювачів, за загальною формулою зводиться до

нелінійної теорії точності, тому що відповідна модель похибки виходить досить складною, а прийняті допущення для спрощення моделі можуть привести до великих похибок кінцевих результатів.

У лінійному наближенні сумарна похибка — це

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right)_0 \Delta y_i, \quad (21)$$

де Δy_i - похибка на виході i -ої ланки.

Відносне значення похибки вихідного сигналу дорівнює

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right)_0 \frac{y_i}{y} \frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{i=1}^n \psi_i \gamma_i, \quad (22)$$

де $\psi_i = \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right)_0 \frac{y_i}{y}$ - коефіцієнт (функція) впливу i -ої ланки на відносну

похибку вимірювального ланцюга; $\gamma_i = \frac{\Delta y_i}{y_i}$ — відносна похибка i -ої ланки.

Приведене значення похибки ланцюга:

$$\gamma_{np} = \frac{\Delta y}{y_m} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right)_0 \frac{y_{im}}{y_m} \frac{\Delta y_i}{y_{mi}} = \sum_{i=1}^n \psi_{inp} \gamma_{inp},$$

де $\gamma_{inp} = \frac{\Delta y_i}{y_{mi}}$ — приведена похибка i -ої ланки.

Конкретизуємо співвідношення для сукупності лінійних перетворювачів з коефіцієнтами перетворення k_i . Згідно зі структурним принципом аналізу похибку кожної ланки (перетворювача) доцільно привести до виходу (або до входу) і оцінювати адитивною і мультиплікативною складовими окремо.

Послідовне з'єднання ланок. У цьому випадку

$$y = k_1 \dots k_n x = kx;$$

$$y_i = k_1 \dots k_i x.$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right)_0 = k_{i+1} \dots k_n; \quad \Psi_i = \left(\frac{\partial y}{\partial y_i} \right)_0 \frac{y_i}{y} = 1.$$

Відносна похибка

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{i=1}^n \gamma_i. \quad (23)$$

Приведена похибка:

$$\gamma_{np} = \sum_{i=1}^n \gamma_{inp}. \quad (24)$$

Якщо похибки ланок містять адитивні складові Δ_{0i} і мультиплікативні γ_{ki} , тоді:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_{ki} + \sum_{i=1}^n \gamma_{0i}; \quad (25)$$

$$\gamma_{np} = \sum_{i=1}^n \gamma_{ki} + \sum_{i=1}^n \gamma_{inp},$$

де $\gamma_{0i}, \gamma_{inp}$ — відносне й приведене значення адитивної складової похибки i -ої ланки.

4.2. Похибки нелінійності

Похибка нелінійності проявляється в результаті лінеаризації функції перетворення, коли нелінійна функція $y = f(x)$ замінюється номінальною лінійною залежністю $y_n = kx$; є методичною й носить систематичний характер. Відхилення реальної нелінійної функції від лінійної породжує похибку нелінійності:

$$\Delta_n(x) = f(x) - kx. \quad (26)$$

Значення й характер зміни по діапазону похибки нелінійності залежать від обраного способу лінеаризації. Найбільш широко

застосовують наступні способи лінеаризації: дотичною, хордою, січною прямою при мінімізації приведеної або відносної похибки, методом найменших квадратів (МНК) і методом найменших модулів (МНМ).

Лінеаризація дотичною. Представимо нелінійну функцію перетворення (2) рядом Тейлора в околиці нульової точки, обмежувачись чотирма початковими членами розкладання:

$$y = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Початкове значення $f(0)$ можна усунути зсувом нуля шкали відліку. Лінійна частина представляє номінальну функцію перетворення із крутизною $k = f'(0)$. Члени розкладу вище першого порядку відображають похибки нелінійності, що містять квадратичну, кубічну й складові більш високого порядку

$$\Delta_n(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (27)$$

На практиці складові похибки вище другого порядку малості звичайно суттєво менше квадратичної і ними можна знехтувати. Тоді відносне значення похибки нелінійності при лінеаризації дотичною можна знайти з рівняння

$$\gamma_n(x) = \frac{\Delta_n(x)}{kx} = \frac{f''(0)}{2k}x.$$

Лінеаризація хордою. Графічно цей спосіб лінеаризації означає, що початкове й кінцеве значення по діапазону $0 \dots x_m$ функції перетворення з'єднуються прямою лінією. Аналітично номінальний коефіцієнт перетворення рівний

$$k = \frac{f(x_m) - f(0)}{x_m}. \quad (28)$$

Похибка нелінійності по діапазону перетворення складе

$$\Delta_n(x) = f(x) - kx = f(x) - \frac{f(x_m) - f(0)}{x_m} x. \quad (29)$$

Максимум $\Delta_m = \Delta_n(x)_{\max}$ похибки нелінійності досягається в точці $x = x_1$, де похідна від похибки перетворюється в нуль:

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial x}(x_1) = f'(x) - k = f'(x_1) - \frac{f(x_m) - f(0)}{x_m} = 0. \quad (30)$$

Звідси приведена похибка дорівнює

$$\gamma_0 = \frac{\Delta_m}{kx_m} = \frac{\Delta(x_1)}{kx_m} = \frac{f(x_1) - kx_1}{kx_m}. \quad (31)$$

Лінеаризація січною за методом мінімізації приведеної похибки.

Мінімізація приведеної похибки рівносильна мінімізації максимуму абсолютної похибки по всьому діапазону перетворення. Похибка нелінійності в цьому випадку близька до адитивної. Це означає, що абсолютні похибки в деякій точці $x = x_1$ у середині діапазону й наприкінці діапазону ($x = x_m$) повинні бути рівні по модулю. Звідси отримуємо перше рівняння із двома невідомими (k — крутизна перетворення й x_1 — **точка** діапазону, у якій похибка максимальна по модулю). Друге рівняння можна отримати з умови, що в точці $x = x_1$, де похибка максимальна, похідна від функції перетворення дорівнює крутизні перетворення. Система рівнянь із двома невідомими, розв'язок якої дозволяє визначити оптимальний коефіцієнт перетворення й оцінити приведену похибку, має вигляд:

$$\begin{cases} f(x) - kx = kx_m - f(x_m); \\ f'(x) = k. \end{cases} \quad (32)$$

Максимальна по модулю абсолютна й приведена похибки відповідно рівні:

$$\Delta_m = |f(x_1) - kx_1| = |kx_m - f(x_m)|;$$

$$\gamma_0 = \frac{\Delta_m}{kx_m} = \frac{|kx_m - f(x_m)|}{kx_m}. \quad (33)$$

Лінеаризація січною за методом мінімізації відносної похибки. У цьому випадку необхідно так вибрати крутизну перетворення, щоб відносні похибки у внутрішніх точках і наприкінці діапазону були рівні між собою по модулю, щоб характер похибки був близький до мультиплікативної. Сформульована умова зводиться до рівняння із двома невідомими виду

$$\frac{f(x) - kx}{kx} = \frac{kx_m - f(x_m)}{kx_m}. \quad (34)$$

Друге рівняння отримати досить складно, тому що у внутрішніх точках не існує яскраво вираженого екстремуму або він взагалі відсутній. Зазвичай шукана точка лежить близько середини діапазону перетворення. У загальному випадку крутизна перетворення може бути знайдена по формулі, приймаючи $x = \frac{x_m}{2}$

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x_m)}{x_m} \right]. \quad (35)$$

Лінеаризація методом найменших квадратів. Лінійна функція перетворення знаходиться у вигляді полінома першого степеня: $y = y_0 + kx$. Коефіцієнти рівняння — початковий зсув y_0 й крутизна перетворення k — за методом найменших квадратів визначають за умови, щоб дисперсія похибки нелінійності була мінімальна:

$$Q = \int_0^{x_m} [f(x) - y_0 - kx]^2 dx = \min.$$

Мінімізація функціонала Q по обом шуканим коефіцієнтам приводить до системи двох інтегральних рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dy_0} = 0; \\ \frac{dQ}{dk} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Після диференціювання й перетворення рівнянь до нормального виду (члени з невідомими величинами залишені ліворуч, а відомі вирази перенесені вправо) отримуємо систему рівнянь, розв'язок якої дозволяє визначити параметри номінальної функції перетворення:

$$\begin{cases} y_0 \int_0^{x_m} dx + k \int_0^{x_m} x dx = \int_0^{x_m} f(x) dx; \\ y_0 \int_0^{x_m} x dx + k \int_0^{x_m} x^2 dx = \int_0^{x_m} x f(x) dx. \end{cases} \quad (37)$$

4.3. *Вимірювальні перетворювачі прямої дії*

Структурна схема складних приладів прямого перетворення, що складається з ряду послідовно з'єднаних ланцюгів, представлена на рисунку 1. Характерною рисою є те, що вимірювальна інформація передається тільки в одному напрямку із входу на вихід, структурна схема розімкнута, у ній відсутні ланцюги зворотного зв'язку.

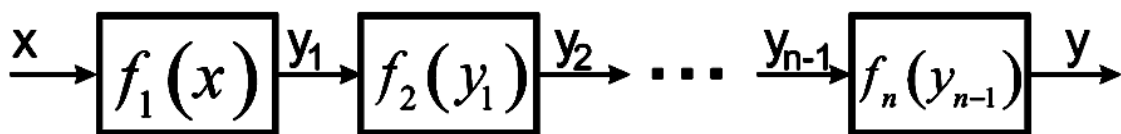


Рисунок 1 — Вимірювальний ланцюг прямого перетворення

Функція перетворення такого ланцюга в цілому й кожного окремого перетворювача в загальному випадку може бути нелінійною:

$$y = f(x) = f_n(y_{n-1}) = f_n(f_{n-1}(\dots(f_1(x))\dots)). \quad (38)$$

Аналіз функції перетворення (38) досить складний. Однак на

обмеженій ділянці кожен локальний функцію перетворення можна представити лінійною функцією. Тоді на заданому обмеженому інтервалі весь вимірювальний ланцюг можна розглядати як лінійний. Тому надалі будемо припускати, що всі перетворювачі є лінійними із крутизною перетворення K_i , як показано на рисунку 2.

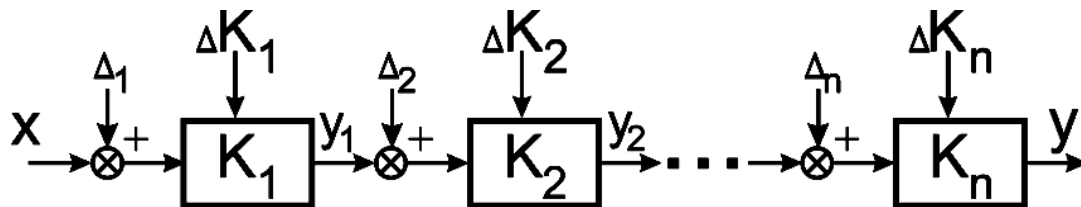


Рисунок 2 — Модель формування похибок ланцюга прямого перетворення

Будемо вважати, що кожний перетворювач із номінальним коефіцієнтом перетворення K_i характеризується приведеною до входу адитивною похибкою Δ_i і похибкою крутизни перетворення ΔK_i . Тоді номінальна функція перетворення буде мати вигляд

$$y = Kx = K_1 K_2 \cdot \dots \cdot K_n x.$$

Сигнал на виході першого перетворювача:

$$y_1 = (K_1 + \Delta K_1)(x + \Delta_1) = K_1 x + K_1 \Delta_1 + \Delta K_1 x + \Delta K_1 \Delta_1. \quad (39)$$

Перший доданок у (39) — номінальне значення сигналу, другий — приведена до виходу адитивна похибка перетворення, третій — мультиплікативна похибка, а останній доданок має другий порядок малості і ним можна знехтувати. Аналогічно отримуємо сигнал на виході другого перетворювача:

$$y_2 = (K_2 + \Delta K_2)(y_1 + \Delta_2) = K_1 K_2 x + K_1 K_2 \Delta_1 + K_2 \Delta_2 + (\Delta K_1 K_2 + \Delta K_2 K_1) x.$$

Отримані вирази можна поширити на ланцюг з будь-якого числа включених послідовно перетворювачів і виділити адитивну та мультиплікативну складову похибки. Такий самий результат можна отримати, розглядаючи місця входу похибок вузлів у вимірювальний ланцюг. Приведена до виходу адитивна складова похибки:

$$\Delta_y = K_1 \cdots K_n \Delta_1 + K_2 \cdots K_n \Delta_2 + \dots + K_n \Delta_n, \quad (40)$$

а приведена до входу –

$$\Delta_x = \frac{\Delta_y}{K} = \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{K_1} + \dots + \frac{\Delta_n}{K_1 \cdots K_{n-1}}, \quad (41)$$

де $K = K_1 \cdots K_n$ - загальний коефіцієнт перетворення.

Мультиплікативна похибка може бути оцінена по відносній похибці коефіцієнта перетворення:

$$\gamma_k = \frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{K} \left(\frac{dK}{dK_1} \Delta K_1 + \dots + \frac{dK}{dK_n} \Delta K_n \right).$$

Кінцевий результат простіше отримати шляхом логарифмування коефіцієнта перетворення з наступним диференціюванням, а потім переходом до скінчених приростів:

$$\ln K = \ln K_1 + \ln K_2 + \dots + \ln K_n, \Rightarrow \quad \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta K_1}{K_1} + \frac{\Delta K_2}{K_2} + \dots + \frac{\Delta K_n}{K_n}. \quad (42)$$

Звідки з (42) остаточно отримаємо

$$\gamma_k = \gamma_{k1} + \gamma_{k2} + \dots + \gamma_{kn}. \quad (43)$$

Останній вираз описує одну з важливих властивостей послідовного з'єднання перетворювачів: мультиплікативна похибка послідовного ланцюга перетворювачів дорівнює сумі мультиплікативних похибок окремих перетворювачів, що створюють цей ланцюг. Якщо функції перетворення окремих блоків нелінійні, то похибка усього ланцюга є складною функцією вхідної величини.

5. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Вимірювальний перетворювач є ланцюгом із трьох ланок. Ланки з'єднанні послідовно згідно рисунку 3. Для другої та третьої ланок відомі номінальні коефіцієнти перетворення, похибки масштабних коефіцієнтів та адитивні похибки. Перша ланка являє собою первинний вимірювальний перетворювач із відомою теоретичною функцією перетворення $y = f(x, D, d, l)$. Також відомо зміна конструктивних параметрів $\Delta D, \Delta d, \Delta l$ першої ланки для її функції перетворення.

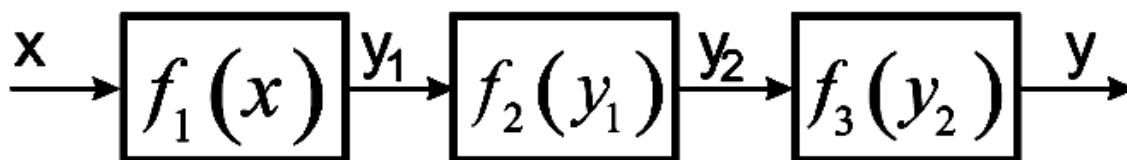


Рисунок 3 — Схема досліджуваного вимірювального перетворювача

Завдання видається викладачем шляхом вибору із таблиці 1 та таблиці 2.

Таблиця 1.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Теоретична функція перетворення	Метод лінеаризації	Номінальні значення конструктивних параметрів та їх похибки, умовні одиниці	Закон зміни вхідної величини
1	2	3	4	5
1	$f(x) = D \sin \frac{l^2 + x}{d^2}$	Лінеаризація дотичною	$D = 2$; $\Delta D = 0.1\%$; $d = 5$; $\Delta d = 0.1$; $l = 3$; $\Delta l = 0.001$.	$A_c = 0.01$; $A_s = 0.045$; $\omega = 1\text{с}^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$

1	2	3	4	5
2	$f(x) = D \operatorname{tg} \frac{0.1 \cdot l^2 + dx}{d^2}$	Лінеаризація хордою	$D = 2; \Delta D = 0.1\%$ $d = 0.1; \Delta d = 0.001$ $l = 2; \Delta l = 0.5\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.045;$ $\omega = 1 \Gamma y$ $x = A_c \cos 2\omega t + A_s \sin \omega t$
3	$f(x) = \frac{l^2 + D}{(x + d)^2}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації приведеної похибки	$D = 5; \Delta D = 0.1\%$ $d = 2; \Delta d = 0.004$ $l = 3; \Delta l = 1\%$	$A_c = 0.08; A_s = 0.045;$ $\omega = 3c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
4	$f(x) = 0.1 \cos \frac{l^2 + (x + 0.2)^2}{D^3 + d^2}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D = 4; \Delta D = 0.0008$ $d = 2.5; \Delta d = 0.001$ $l = 10; \Delta l = 0.2\%$	$A_c = 0.01; A_s = 0.03;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = \frac{A_c}{\cosh \omega t} + A_s \sin \omega t$
5	$f(x) = l \cdot \operatorname{tg} \frac{l^2 + x^{4/3}}{D + d^2}$	Лінеаризація методом найменших квадратів	$D = 6; \Delta D = 0.75\%$ $d = 2; \Delta d = 0.5\%$ $l = 5; \Delta l = 0.008$	$A_c = 0.1; A_s = 0.0;$ $\omega = 5c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
6	$f(x) = D \sinh \frac{l^2 + x}{d^2}$	Лінеаризація хордою	$D = 2; \Delta D = 0.003$ $d = 3; \Delta d = 0.3\%$ $l = 6; \Delta l = 0.04\%$	$A_c = 0.0; A_s = 0.045;$ $\omega = 0.1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
7	$f(x) = D \cosh \frac{l^2 + x}{d^2}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D = 2; \Delta D = 0.003$ $d = 3; \Delta d = 1.3\%$ $l = 6; \Delta l = 0.4\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.045;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
8	$f(x) = 3D \sin \frac{2l^2}{d^2 + (x + 2)^2}$	Лінеаризація дотичною	$D = 2; \Delta D = 0.1\%$ $d = 5; \Delta d = 0.1;$ $l = 3; \Delta l = 0.001.$	$A_c = 0.01; A_s = 0.045;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$

1	2	3	4	5
9	$f(x) = d^2 \operatorname{ctg} \frac{l^2 + dx}{D}$	Лінеаризація хордою	$D = 4; \Delta D = 0.2\%$ $d = 0.1; \Delta d = 0.005$ $l = 5; \Delta l = 0.1\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.01;$ $\omega = 0.1 \Gamma y; t > 2,$ $x = A_c \operatorname{tg} \omega/t + A_s \sin \omega t$
10	$f(x) = \frac{l^2 + D^3}{(x + d)^2} x$	Лінеар. січною по методу мінімізації приведеної похибки	$D = 5; \Delta D = 0.5\%$ $d = 2; \Delta d = 0.004$ $l = 3; \Delta l = 0.5\%$	$A_c = 0.08; A_s = 0.06;$ $\omega = 2c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
11	$f(x) = 3 \frac{\sqrt{l^2 + (x-5)^2}}{D^2 + d^3}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D = 4; \Delta D = 0.002$ $d = 2.5; \Delta d = 0.1\%$ $l = 10; \Delta l = 0.1\%$	$A_c = 0.01; A_s = 0.03;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
12	$f(x) = Dx \cdot \operatorname{arctg} \frac{l^2 + x^2}{D + d^2}$	Лінеаризація методом найменших квадратів	$D = 9; \Delta D = 0.75\%$ $d = 5; \Delta d = 0.5\%$ $l = 5; \Delta l = 0.008$	$A_c = 0.1; A_s = 0.0;$ $\omega = 5c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
13	$f(x) = D \frac{d^2 + x^3}{\sqrt{l^2 + 50x}}$	Лінеаризація хордою	$D = 2; \Delta D = 0.003$ $d = 3; \Delta d = 0.3\%$ $l = 6; \Delta l = 0.04\%$	$A_c = 0.0; A_s = 0.045;$ $\omega = 0.1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
14	$f(x) = l^3 \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{10 + D} + x}{d^2}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D = 2; \Delta D = 0.003$ $d = 3; \Delta d = 1.3\%$ $l = 6; \Delta l = 0.4\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.045;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
15	$f(x) = D \sin \sqrt{\frac{l^2}{d^2 + x^{5/4}}}$	Лінеаризація дотичною	$D = 2; \Delta D = 0.1\%$ $d = 5; \Delta d = 0.1;$ $l = 3; \Delta l = 0.001.$	$A_c = 0.01; A_s = 0.045;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
16	$f(x) = d^2 \frac{l^2 + 100\sqrt{d(x+1)}}{D^3}$	Лінеаризація хордою	$D = 3; \Delta D = 0.5\%$ $d = 0.5; \Delta d = 0.001$ $l = 5; \Delta l = 0.3\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.05;$ $\omega = 1 \Gamma y$ $x = A_c \operatorname{tg} \omega^{-0.1t} + A_s \sin \omega t$

1	2	3	4	5
17	$f(x) = \frac{l^2 + D^3}{(e^{x+1} + d)^2}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації приведеної похибки	$D=5 ; \Delta D=0,5\%$ $d=2 ; \Delta d=0,004$ $l=3 ; \Delta l=0.5\%$	$A_c = 0.08; A_s = 0.06;$ $\omega = 2c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
18	$f(x) = 5 \frac{D + \sin^2(x+2)}{l^2 + d^3}$	Лінеар. січною по методу мінімізації відносної похибки	$D=4 ; \Delta D=0.005$ $d=5 ; \Delta d=0.1\%$ $l=10 ; \Delta l=0,5\%$	$A_c = 0.01; A_s = 0.03;$ $\omega = \frac{1}{2} c^{-1}; x = A_s \sin \omega t +$ $+ A_c \cosh \omega^{0.01t}$
19	$f(x) = \frac{l^2 + \arcsin(x+0.2)^2}{Dx + d^2}$	Лінеаризація методом найменших квадратів	$D=9 ; \Delta D=0.75\%$ $d=5 ; \Delta d=0.5\%$ $l=5 ; \Delta l=0.008$	$A_c = 0.1; A_s = 0.0;$ $\omega = 5c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
20	$f(x) = \frac{d^2 + x}{\sqrt{(l+D)^2 + x^3}}$	Лінеаризація хордою	$D=2 ; \Delta D=0.003$ $d=3 ; \Delta d=0.3\%$ $l=6 ; \Delta l=0.04\%$	$A_c = 0.0; A_s = 0.045;$ $\omega = 0.1c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
21	$f(x) = l^2 \sin \frac{\sqrt{10+D} + 10x}{d^3}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D=5 ; \Delta D=0.003$ $d=8 ; \Delta d=0.1\%$ $l=6 ; \Delta l=0.4\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.045;$ $\omega = 5c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
22	$f(x) = D \ln \frac{l^2 + x}{d}$	Лінеаризація дотичною	$D=5 ; \Delta D=0.1\%$ $d=1.5 ; \Delta d=0.002$ $l=3 ; \Delta l=0.2\%$	$A_c = 0.1; A_s = 0.05;$ $\omega = 2c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
23	$f(x) = d^2 \ln(l^2 + (x+D)^2)$	Лінеаризація хордою	$D=3 ; \Delta D=0.2\%$ $d=2.5 ; \Delta d=0.002$ $l=2 ; \Delta l=0.05$	$A_c = 0.01; A_s = 0.03;$ $\omega = 1c^{-1}$ $x = \frac{A_c}{\cosh \omega t} + A_s \sin \omega t$
24	$f(x) = l \operatorname{tg} \frac{D}{x+d}$	Лінеаризація методом найменших квадратів	$D=0.1 ; \Delta D=0.5\%$ $d=5 ; \Delta d=0.01\%$ $l=2 ; \Delta l=0.005$	$A_c = 0.1; A_s = 0.045;$ $\omega = 1\Gamma\zeta$ $x = A_c \cos 2\omega t + A_s \sin \omega t$

1	2	3	4	5
25	$f(x) = D(x \ln d + lx^3)$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D = 4 ; \Delta D = 0.006$; $d = 22 ; \Delta d = 0.5\%$; $l = 5 ; \Delta l = 0.003$.	$A_c = 0.08 ; A_s = 0.045$; $\omega = 3c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
26	$f(x) = D \sin \frac{d^2}{l+x}$	Лінеаризація методом найменших квадратів	$D = 2 ; \Delta D = 0.3\%$; $d = 7 ; \Delta d = 0.002$; $l = 5 ; \Delta l = 0.03$.	$A_c = 0.01 ; A_s = 0.03$; $\omega = 1c^{-1}$ $x = \frac{A_c}{\cosh \omega t} + A_s \sin \omega t$
27	$f(x) = \frac{1}{D} \operatorname{arctg} \frac{x+l}{d-x}$	Лінеаризація січною по методу мінімізації приведеної похибки	$D = 0.2 ; \Delta D = 0.1\%$; $d = 5 ; \Delta d = 0.005$; $l = 3 ; \Delta l = 0.01$.	$A_c = 0.1 ; A_s = 0.0$; $\omega = 5c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
28	$f(x) = D \operatorname{tg} \frac{d-x}{l+x}$	Лінеаризація хордою	$D = 5 ; \Delta D = 0.07$; $d = 0.1 ; \Delta d = 0.2\%$; $l = 5 ; \Delta l = 0.01$.	$A_c = 0.2 ; A_s = 0.03$; $\omega = 0.5 \Gamma \varphi$ $x = A_c \cos 2\omega t + A_s \sin \omega t$
29	$f(x) = D \cos \left(2 + \frac{x+lx^3}{d} \right)$	Лінеаризація січною по методу мінімізації відносної похибки	$D = 4 ; \Delta D = 1\%$; $d = 2 ; \Delta d = 0.5\%$; $l = 8 ; \Delta l = 0.02$.	$A_c = 0.08 ; A_s = 0.06$; $\omega = 3c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$
30	$f(x) = \frac{1}{d} e^{\frac{x+l}{D^2}}$	Лінеаризація методом найменших квадратів	$D = 3 ; \Delta D = 0.5\%$; $d = 0.4 ; \Delta d = 0.001$; $l = 10 ; \Delta l = 0.02$.	$A_c = 0.1 ; A_s = 0$; $\omega = 0.5c^{-1}$ $x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$

Таблиця 2.

Характеристики 2-ої та 3-ої ланок вимірювального ланцюга

Варіант	K_2 ΔK_2	K_3 ΔK_3	Δ_2	Δ_3
1	2	3	4	5
1	10 0,1%	150 0,01	0,001	0,006
2	15 0,003	12 0,02%	$5 \cdot 10^{-4}$	0,02
3	185 0,01	0,9 0,5%	0,02	$2 \cdot 10^{-5}$
4	5 0,1%	245 0,03	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
5	50 0,003	100 0,5%	0,05	0,02
6	10 0,03%	300 0,06	0,02	0,001
7	460 0,2%	10 0,004	0,003	0,02
8	15 0,5%	60 0,003	0,01	$8 \cdot 10^{-4}$
9	3 0,06%	75 0,02	$6 \cdot 10^{-5}$	0,004
10	0,2 0,3%	250 0,01	$2 \cdot 10^{-5}$	0,01
11	12 0,03	100 0,25%	0,001	0,003

1	2	3	4	5
12	28 0,1%	55 1%	0,002	0,01
13	0,4 0,002	1000 0,03%	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
14	60 0,1%	15 2%	0,004	0,006
15	10 0,4%	25 0,1%	$1 \cdot 10^{-5}$	0,002
16	13 0,08%	235 0,1	$7 \cdot 10^{-4}$	0,002
17	25 0,001	12 0,3%	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
18	15 0,5%	60 0,003	0,01	$8 \cdot 10^{-4}$
19	0,6 0,5%	25 0,01%	$5 \cdot 10^{-5}$	0,002
20	85 0,07	230 0,2%	0,0008	$5 \cdot 10^{-4}$
21	30 0,2%	125 0,02	$6 \cdot 10^{-5}$	0,001
22	185 0,01	0,9 0,5%	0,02	$2 \cdot 10^{-5}$
23	5 0,1%	245 0,03	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
24	12 0,3%	250 0,25%	$2 \cdot 10^{-5}$	0,001

1	2	3	4	5
25	10 0,03%	300 0,06	0,02	0,001
26	60 0,1%	15 2%	0,004	0,006
27	15 0,001	12 0,4%	$5 \cdot 10^{-4}$	0,01
28	0,4 0,002	1000 0,03%	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
29	28 0,05%	70 2%	0,002	0,005
30	42 0,42%	21 0,1%	$1 \cdot 10^{-5}$	0,006

5.1. Порядок виконання роботи

Необхідно виконати наступні завдання:

1. побудувати графік ідеальної функції перетворення для заданого діапазону зміни вимірювальної величини x .
2. прийняв за номінальну функцію перетворення для першої ланки функцію $y = kx + y_0$ необхідно знайти значення коефіцієнтів номінальної функції перетворення, використовуючи заданий метод лінеаризації (**не забудьте, що приведені формули використовуються для нормованого до одиниці діапазону вимірювання**). Записати в загальному вигляді рівняння похибок для першої ланки $\Delta_{осн}$, використовуючи відомості про зміну конструктивних параметрів та вид номінальної функції перетворення.
3. Привести рівняння похибок першої ланки до стандартної форми, використовуючи вираз для основної похибки (19). Розкласти похибки на адитивну, мультиплікативну та квадратичну. Окремими виразами записати адитивну похибку та основну похибку чутливості (похибка масштабного коефіцієнта) ΔK .
4. Зобразити схему приладу як на рисунку 2, використовуючи розраховані похибки. Знайти адитивну похибку приладу, приведену до входу та виходу. Знайти мультиплікативну похибку приладу. Записати вираз для загальної похибки приладу.
5. Виконати моделювання обробки вхідного сигналу $x(t)$ як показано на рисунку 4. Порівняти отримані результати із розрахованими значеннями похибок з пункту 3.

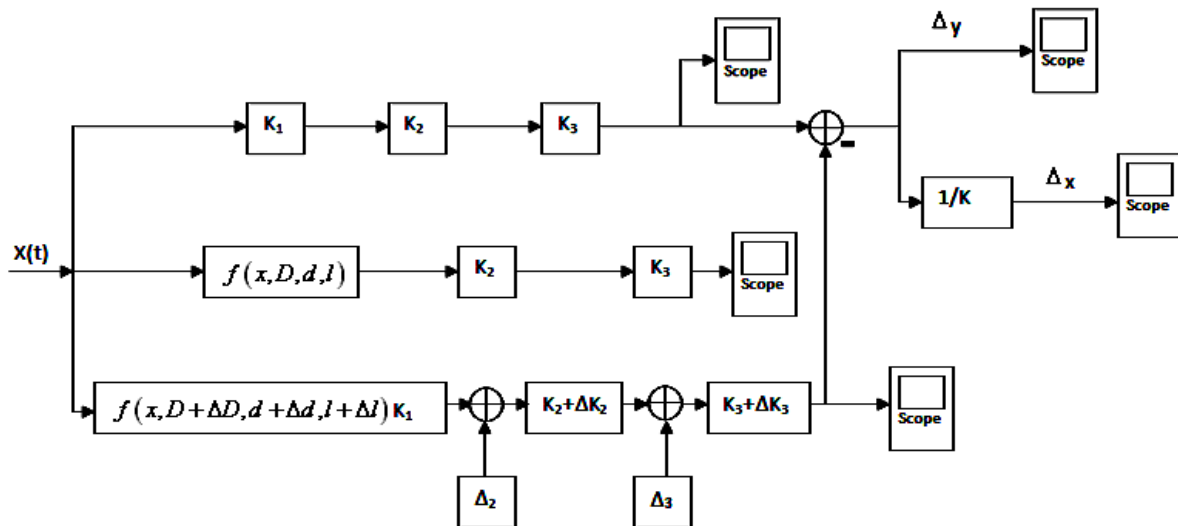


Рисунок 4 — Схема моделювання проходження сигналу через вимірювальний ланцюг, чисельного отримання похибок перетворення

5.2. Приклад виконання роботи

Вихідні дані: Теоретична функції перетворення - $f(x) = \frac{1}{D} \arctg \frac{l^3 + dx}{D + l^2}$;

Номінальні значення конструктивних параметрів та їх похибки - $D=7, \Delta D = 0.05\%, d=5, \Delta d = 0.02, l=3, \Delta l = 0.001$; закон зміни вхідної величини - $A_c = 0.02, A_s = 0.045, \omega = 0.2c^{-1}, x = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$. З таблиці 2 взято дані 1-го варіанту.

РОЗВ'ЯЗОК

Графік зміни в часі вхідної величини показано на рисунку 5. Будемо вважати, що діапазон вимірювання вимірювального перетворювача не перевищує амплітудних значень вхідного сигналу. Отже, границі діапазону можна знайти аналітично і графічно. Використовуючи побудований графік (рис.5) можна встановити, що $x \in [-0.0492; 0.0492]$. Аналітично границі знаходяться у випадку, коли закон зміни вхідної величини заданий явною формулою. У даному випадку, це сума двох гармонічних складових, які коливаються відносно 0_2 тому амплітуда змінювання вхідної величини

становить $A = \sqrt{A_c^2 + A_c^2} = \sqrt{0.02^2 + 0.045^2} = 0.0492$.

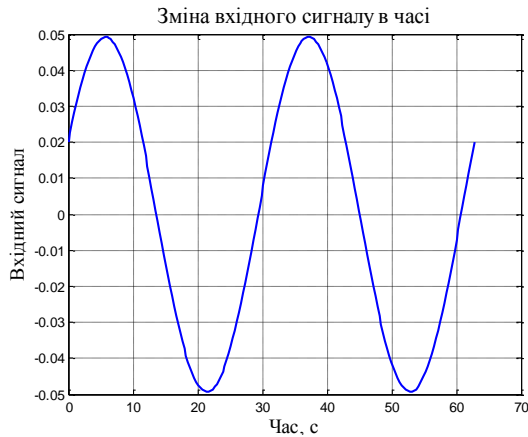


Рисунок 5 — Вхідна величина вимірювального ланцюга

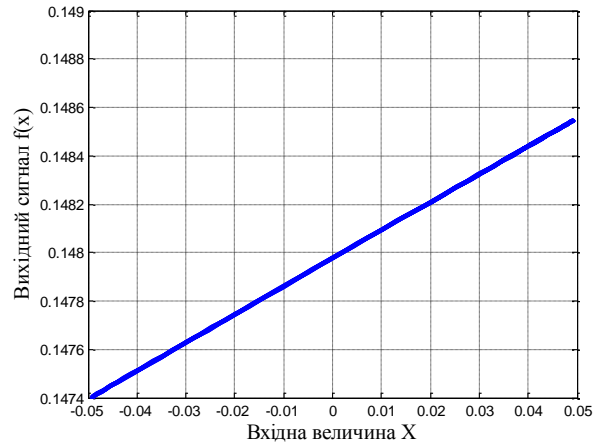


Рисунок 6 — Графік функції перетворення

Графік функції перетворення показано на рисунку 6.

Виконаємо заміну теоретичної функції перетворення номінальною виду $y = kx + y_0$. Для цього лінеаризуємо задану функцію перетворення:

1) лінеаризація дотичною.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x. \quad f(0) = 0.148,$$

$$k = f'(x) = \frac{1}{D} \frac{1}{1 + \left(\frac{l^3 + dx}{D + l^2} \right)^2} \cdot \frac{d}{D + l^2} =$$

$$= \frac{d(D + l^2)}{D \left((D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right)} = \frac{d(D + l^2)}{D} \cdot \frac{1}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2} \Bigg|_{x=0} = 0.0116.$$

$$\text{Отже, } y_{\text{ном}} = kx + f(0) = kx + y_0 = 0.0116x + 0.148.$$

2) лінеаризація хордою.

Згідно з (28) отримаємо

$$k = \frac{f(x_m) - f(0)}{x_m} = \frac{0.14854 - 0.14798}{0.0492} = 0.0115.$$

3) лінеаризація січною за методом мінімізації приведеної похибки.

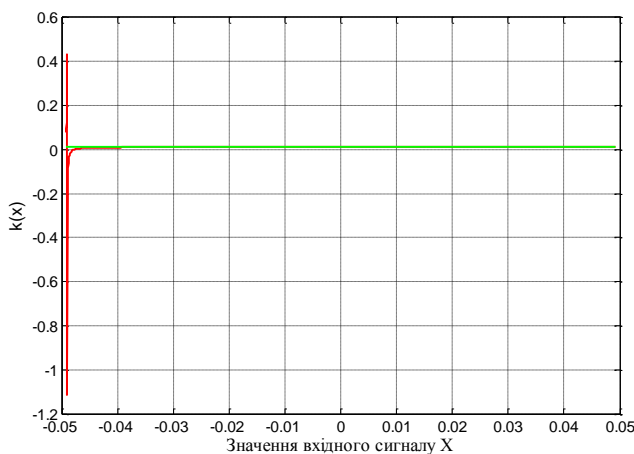
Відповідно до (32) запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{D} \operatorname{arctg} \frac{l^3 + dx}{D + l^2} - kx - f(0) = 0.049k + f(0) - 0.1485; \\ k = \frac{d(D + l^2)}{D} \cdot \frac{1}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2}. \end{cases}$$

Дана система рівнянь є нелінійною, а тому використаємо графічний метод знаходження крутизни перетворення. Для цього запишемо два рівняння відносно k , далі побудуємо графіки залежностей $k_1(x)$ та $k_2(x)$. Точка перетину цих кривих дасть значення аргументу x , для якого необхідно з графіків знайти значення крутизни перетворення.

$$\begin{cases} k_1(x) = \frac{\frac{1}{D} \operatorname{arctg} \frac{l^3 + dx}{D + l^2} + 0.1485 - 2f(0)}{x + 0.049} = \frac{\frac{1}{D} \operatorname{arctg} \frac{l^3 + dx}{D + l^2} - 0.14742}{x + 0.049}; \\ k_2(x) = \frac{1}{D} \cdot \frac{d(D + l^2)}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2}. \end{cases}$$

Графіки $k_1(x)$ та $k_2(x)$, точки їх перетину показані на рисунку 7.а, б.



а)



б)

Рисунок 7 — Графіки для знаходження крутизни перетворення при лінеаризації по методу мінімізації приведеної похибки

Отже, використовуючи графіки приведені на рисунку 7, можна сказати, що даному критерію відповідають два значення крутизни перетворення: $k = 0.01145$, $k = 0.01178$.

4) лінеаризація січною за методом мінімізації відносної похибки.

Враховуючи наявність зміщення нуля шкали, відповідно до (35)

визначимо

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{f\left(\frac{x_m}{2}\right) - y_0}{x_m/2} + \frac{f(x_m) - y_0}{x_m} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{0.14826 - 0.14798}{0.0492/2} + \frac{0.14854 - 0.14798}{0.0492} \right] = 0.01154.$$

5) лінеаризація методом найменших квадратів.

Знайдемо значення інтегралів, що входять в систему рівнянь (37):

$$c_{11} = \int_0^{x_m} dx = x \Big|_0^{x_m} = x_m = 0.0492, \quad c_{12} = \int_0^{x_m} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_m} = \frac{x_m^2}{2} = 0.00121, \quad c_{21} = c_{12},$$

$$c_{22} = \int_0^{x_m} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{x_m} = \frac{x_m^3}{3} = 3.98 \cdot 10^{-5}, \quad d_1 = \int_0^{x_m} f(x) dx = \frac{1}{D} \int_0^{x_m} \arctg \frac{l^3 + dx}{D + l^2} dx =$$

$$= 0.007299, \quad d_2 = \int_0^{x_m} x f(x) dx = \frac{1}{D} \int_0^{x_m} x \cdot \arctg \frac{l^3 + dx}{D + l^2} dx = 0.0001798.$$

Для обчислення значень d_1 та d_2 зручно використовувати функції *quad*, *trapz* системи MatLab.

Розв'яжемо вищевказану систему методом Крамера. Знайдемо головний визначник

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 4.896 \cdot 10^{-7},$$

та визначники для знаходження крутизни перетворення та зміщення нуля

$$\Delta_{y0} = \begin{vmatrix} d_1 & c_{12} \\ d_2 & c_{22} \end{vmatrix} = d_1 c_{22} - c_{12} d_2 = 7.245 \cdot 10^{-8},$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & d_1 \\ c_{21} & d_2 \end{vmatrix} = c_{11} d_2 - c_{21} d_1 = 5.643 \cdot 10^{-9}.$$

Отже: $k = \Delta_k / \Delta_0 = 0.01153$, $y_0 = \Delta_{y0} / \Delta_0 = 0.14798$.

Прийmemo, що коефіцієнти номінальної функції перетворення знайдено за допомогою методу найменших квадратів. Тобто $y_n = 0.01153x + 0.14798$.

Відповідно до необхідних у завданні етапів розрахунку вимірювального ланцюга складемо рівняння похибок першої ланки:

$$\Delta_{оч} = \Delta_m + \Delta'_T.$$

1) методична похибка

$$\Delta_m = F_0(x) = f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0}) - y_n = \frac{1}{D} \arctg \frac{l^3 + dx}{D + l^2} - kx - y_0.$$

2) основна конструктивно-технологічна похибка

$$\Delta_T(x) = f_T(x, q_1, q_2, \dots, q_k) - f_T(x, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{k0}) \cong \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f_T}{\partial q_i} \right)_0 \Delta q_i =$$

$$= \frac{\partial f_T}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial f_T}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial f_T}{\partial l} \Delta l = \psi_D \Delta D + \psi_d \Delta d + \psi_l \Delta l.$$

$$\psi_D = \frac{-1}{D^2} \arctg \frac{l^3 + dx}{D + l^2} + \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{l^3 + dx}{D + l^2} \right)^2} \cdot \frac{l^3 + dx}{(D + l^2)^2} (-1) =$$

$$= -\frac{1}{D^2} \arctg \frac{l^3 + dx}{D + l^2} - \frac{1}{D} \cdot \frac{l^3 + dx}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2}.$$

$$\psi_d = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{l^3 + dx}{D + l^2} \right)^2} \cdot \frac{x}{D + l^2} = \frac{D + l^2}{D} \cdot \frac{x}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2}.$$

$$\psi_l = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(l^3 + dx)^2}{(D + l^2)^2}} \cdot \frac{3l^2(D + l^2) - (l^3 + dx) \cdot 2l}{(D + l^2)^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{l^4 + 3Dl^2 - 2dlx}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2}.$$

Приведемо отримані формули для похибок до стандартного виду, використовуючи формули (18).

$$a_0 = F(0) = \frac{1}{D} \operatorname{arctg} \frac{l^3 + dx}{D + l^2} - kx - y_0 = \frac{1}{D} \operatorname{arctg} \frac{l^3}{D + l^2} - y_0 = -6.3784 \cdot 10^{-7}.$$

$$b_0 = F'(0) = f'(x) - k = \frac{d(D + l^2)}{D} \cdot \frac{1}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2} \Big|_{x=0} - k =$$

$$= 0.0116 - 0.01153 = 7 \cdot 10^{-5}.$$

$$c_0 = \frac{F''(0)}{2!} = -\frac{d(D + l^2)}{2D} \cdot \frac{2d(l^3 + dx)}{\left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2\right]^2} \Big|_{x=0} = -0.00159.$$

$$a_D = \psi_D(0) = -\frac{1}{D^2} \operatorname{arctg} \frac{l^3 + dx}{D + l^2} \Big|_{x=0} - \frac{1}{D} \cdot \frac{l^3 + dx}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2} \Big|_{x=0} = -0.0251$$

$$b_D = \psi'_D(0) = -\frac{1}{D^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{l^3 + dx}{D + l^2}\right)^2} \frac{d}{D + l^2} -$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{D} \frac{d\left((D + l^2) + (l^3 + dx)\right) - (l^3 + dx) \cdot 2d \cdot (l^3 + dx)}{\left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2\right]^2} = -\frac{d(D + l^2)}{D \left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2\right]} - \\ & -\frac{d \left(-2dx^2 + x(d - 4dl^3) + l^3 - 2l^6 + (D + l^2)^2\right)}{D \left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2\right]^2}. \end{aligned}$$

Для скорочення запису b_D введемо наступні позначення:

$$\mu_1 = (D + l^2)^2, \quad \mu_2 = d - 4dl^3, \quad \mu_3 = l^3 - 2l^6 + \mu_1, \quad \mu_4 = \frac{d(D + l^2)}{D^2}.$$

Отже,

$$b_D = \frac{-\mu_4}{\mu_1 + (l^3 + dx)^2} + \frac{d}{D} \frac{2dx^2 - \mu_2 x - \mu_3}{\left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2\right]^2} \Bigg|_{x=0} = \frac{-\mu_4}{\mu_1 + l^6} + \frac{\mu_3 \frac{d}{D}}{(\mu_1 + l^6)^2} = -2.5 \cdot 10^{-3}.$$

$$\begin{aligned} c_D &= \frac{\psi_D''(0)}{2!} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 \cdot 2d(l^3 + dx)}{(\mu_1 + (l^3 + dx)^2)^2} - \frac{d}{D} \left(\frac{-2dx^2 + \mu_2 x + \mu_3}{(\mu_1 + (l^3 + dx)^2)^2} \right)' \right)_x = \\ &= \frac{2d\mu_4(l^3 + dx)}{2(\mu_1 + (l^3 + dx)^2)^2} - \frac{d \left[(-4dx + \mu_2)(\mu_1 + (l^3 + dx)^2)^2 - (-2dx^2 + \mu_2 x + \mu_3) \times \right. \\ &\quad \left. \times 2(\mu_1 + (l^3 + dx)^2) \cdot 2d(l^3 + dx) \right]}{D(\mu_1 + (l^3 + dx)^2)^4} = \\ &= 0.00019 \end{aligned}$$

$$a_d = \psi_d(0) = \frac{D + l^2}{D} \cdot \frac{x}{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2} \Bigg|_{x=0} = 0.$$

$$b_d = \psi_d'(0) = \frac{(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 - 2dx(l^3 + dx)}{\frac{D}{D + l^2} \left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right]^2} = \frac{D + l^2}{D} \frac{(D + l^2)^2 + l^6 - dx^2}{\left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right]^2}$$

Введемо наступні скорочення: $\mu_5 = \frac{D + l^2}{D}$, $\mu_6 = (D + l^2)^2 + l^6$. Отже,

$$b_d = \mu_5 \frac{\mu_6 - d^2 x^2}{\left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2\right]^2} \Bigg|_{x=0} = \frac{\mu_5 \mu_6}{\left[\mu_1 + l^6\right]^2} = \frac{\mu_5 \mu_6}{\left[\mu_5\right]^2} = \frac{\mu_6}{\mu_5} = 0.00232.$$

$$c_d = \frac{\psi_d''(0)}{2!} = \frac{-2d^2x \left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right]^2 - 4d(\mu_6 - d^2x^2) \left(\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right) (l^3 + dx)}{\frac{2}{\mu_5} \left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right]^4} =$$

$$= -\frac{4l^3 \mu_5 \mu_6 d (\mu_1 + l^6)}{2 \left[\mu_1 + l^6 \right]^4} = -\frac{2l^3 \mu_5 \mu_6 d}{\left[\mu_1 + l^6 \right]^3} = 0.000636.$$

$$a_l = \psi_l(0) = \frac{1}{D} \cdot \frac{l^4 + 3Dl^2 - 2dlx}{\left((D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right)} \Bigg|_{x=0} = \frac{1}{D} \frac{l^4 + 3Dl^2}{(D + l^2)^2 + l^6} = 0.0391.$$

$$b_l = \psi_l'(0) = \frac{1}{D} \frac{-2dl \left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right] - (l^4 + 3Dl^2 - 2dlx) \cdot 2d(l^3 + dx)}{\left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right]^2} =$$

$$= \frac{2d^3lx^2 - x(2d^2l^4 + 6d^2l^2D) - 2dl(D + l^2) - 4dl^7 - 6dDl^5}{D \left[(D + l^2)^2 + (l^3 + dx)^2 \right]^2}.$$

Для скорочення записів введемо позначення:

$$\mu_7 = 2dk(D + l^2) + dl^7 + 6dDl^5, \quad \mu_8 = 2d^2l^4 + 6d^2l^2D, \quad \mu_9 = 2d^3l. \text{ Отже,}$$

$$b_l = \frac{\mu_9x^2 - \mu_8x - \mu_7}{D \left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right]^2} \Bigg|_{x=0} = \frac{-\mu_7}{D \left[\mu_1 + l^6 \right]^2} = -0.014$$

$$c_l = \frac{\psi_l''(0)}{2!} = \frac{1}{2D} \frac{(2\mu_9x - \mu_8) \left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right]^2 - (\mu_9x^2 - \mu_8x - \mu_7) \cdot 4d \left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right] (l^3 + dx)}{\left[\mu_1 + (l^3 + dx)^2 \right]^4} =$$

$$= \frac{1}{2D} \frac{-\mu_8 \left[\mu_1 + l^6 \right]^2 + \mu_7 \cdot 4d \left[\mu_1 + l^6 \right] (l^3)}{\left[\mu_1 + l^6 \right]^4} = \frac{-\mu_8 (\mu_1 + l^6) + 4d\mu_7l^3}{2D \left[\mu_1 + l^6 \right]^3} = 0.00047.$$

Розкладаючи функції чутливості в ряд Тейлора по степенях,

запишемо розклад основної конструктивно-технологічної похибки згідно (19):

$$\Delta_{осн} = (a_0 + a_D \Delta D + a_d \Delta d + a_l \Delta l) + (b_0 + b_D \Delta D + b_d \Delta d + b_l \Delta l)x + (c_0 + c_D \Delta D + c_d \Delta d + c_l \Delta l)x^2.$$

З умови завдання маємо: $\Delta D = \frac{0.05}{100} D = \frac{0.05}{100} \cdot 7 = 35 \cdot 10^{-4}$, $\Delta d = 0.02$, $\Delta l = 0.001$. Розрахуємо кожен складову основної похибки першої ланки вимірювального ланцюга:

$$\Delta_{ад} = (a_0 + a_D \Delta D + a_d \Delta d + a_l \Delta l) = -4.92 \cdot 10^{-5}.$$

$$\gamma_{осн} = (b_0 + b_D \Delta D + b_d \Delta d + b_l \Delta l) = 9.36 \cdot 10^{-5}.$$

$$\gamma_{квадр} = (c_0 + c_D \Delta D + c_d \Delta d + c_l \Delta l) = -1.58 \cdot 10^{-3}$$

Розрахуємо максимальні по модулю значення складових основної похибки на діапазоні вимірювання ланки $x \in [-0.0492; 0.0492]$:

$$|\Delta_{ад}| = 4.92 \cdot 10^{-5}, \quad |\Delta_{мульти}|_{\max} = |\gamma_{осн} \cdot x_{\max}| = 9.36 \cdot 10^{-5} \cdot 0.0492 = 4.61 \cdot 10^{-6},$$

$$|\Delta_{квадр}|_{\max} = |\gamma_{квадр} \cdot x_{\max}^2| = 3.82 \cdot 10^{-6}.$$

Графіки мультиплікативної, квадратичної похибки та їх суми показані на рисунку 8. Сума цих двох складових зображена простою лінією без маркерів.

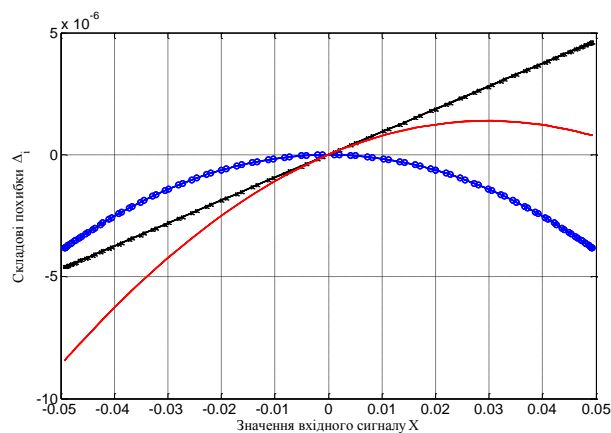


Рисунок 8 — Графіки мультиплікативної та квадратичної складових основної похибки першого елемента вимірювального ланцюга

У першому наближенні знехтуємо квадратичною складовою похибки, бо вона найбільше впливає тільки в кінці діапазону вимірювання. Отже, похибка на виході першої ланки, приведена до стандартного виду має такий вигляд: $\Delta_{осн} = -4.92 \cdot 10^{-5} + 9.36 \cdot 10^{-5} \cdot x$.

Адитивна похибка на вході першої ланки становить $\Delta_{1x} = \frac{\Delta_{ад}}{k} = \frac{-4.92 \cdot 10^{-5}}{0.01153} = -4.27 \cdot 10^{-3}$. Похибка масштабного коефіцієнта – $\Delta K_1 = \gamma_{осн} = 9.36 \cdot 10^{-5}$.

Зобразимо схему (див. рис. 9) проходження сигналу через лінеаризований вимірювальний ланцюг ($K_2=10$, $\Delta K_2=0.001 \cdot 10=0.01$, $K_3=150$, $\Delta K_3=0.01$, $\Delta_2=0.001$, $\Delta_3=0.006$)

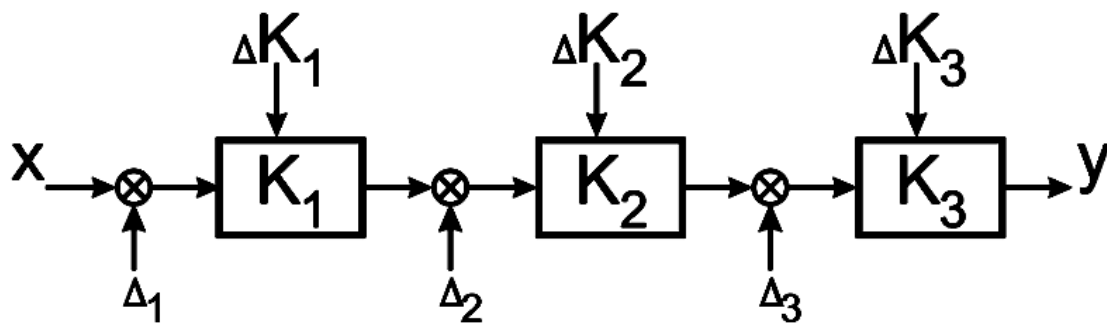


Рисунок 9 — Схема проходження сигналу через вимірювальний ланцюг

Номінальний масштабний коефіцієнт вимірювального ланцюга:

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = 0.01153 \cdot 10 \cdot 150 = 17.295.$$

Приведена до виходу адитивна складова похибки:

$$\Delta_y = K_1 K_2 K_3 \cdot \Delta_1 + K_2 K_3 \cdot \Delta_2 + K_3 \Delta_3 = -4.27 \cdot 10^{-3} \cdot 17.295 + 1500 \cdot 0.001 + 150 \cdot 0.006 \approx 2.326,$$

а приведена до входу – $\Delta_x = \frac{\Delta_y}{K} = \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{K_1} + \frac{\Delta_3}{K_1 K_3} \approx 0.134$.

Мультиплікативна похибка:

$$\gamma_K = \gamma_{K1} + \gamma_{K2} + \gamma_{K3} = \frac{\Delta K_1}{K_1} + \frac{\Delta K_2}{K_2} + \frac{\Delta K_3}{K_3} = \frac{9.36 \cdot 10^{-5}}{0.01153} + 0.001 + \frac{0.01}{150} = 9.2 \cdot 10^{-3} = 0.92 \%.$$

Похибка вимірювального ланцюга (приладу) має вид:

$$\Delta_{np\ y} = 2.326 + 0.159x; \quad \Delta_{np\ x} = 0.134 + 9.2 \cdot 10^{-3}x. \quad (44)$$

Виконаємо моделювання роботи досліджуваного приладу згідно схеми на рисунку 4. Схема моделювання в системі Simulink (Matlab) показана на рисунку 10. Реалізація теоретичної функції перетворення показана на рисунку 11, а реальної – на рисунку 12. Елементи підсистеми генерації вхідного діяння та їх налаштування показані на рисунку 13.а та рисунку 13.б.

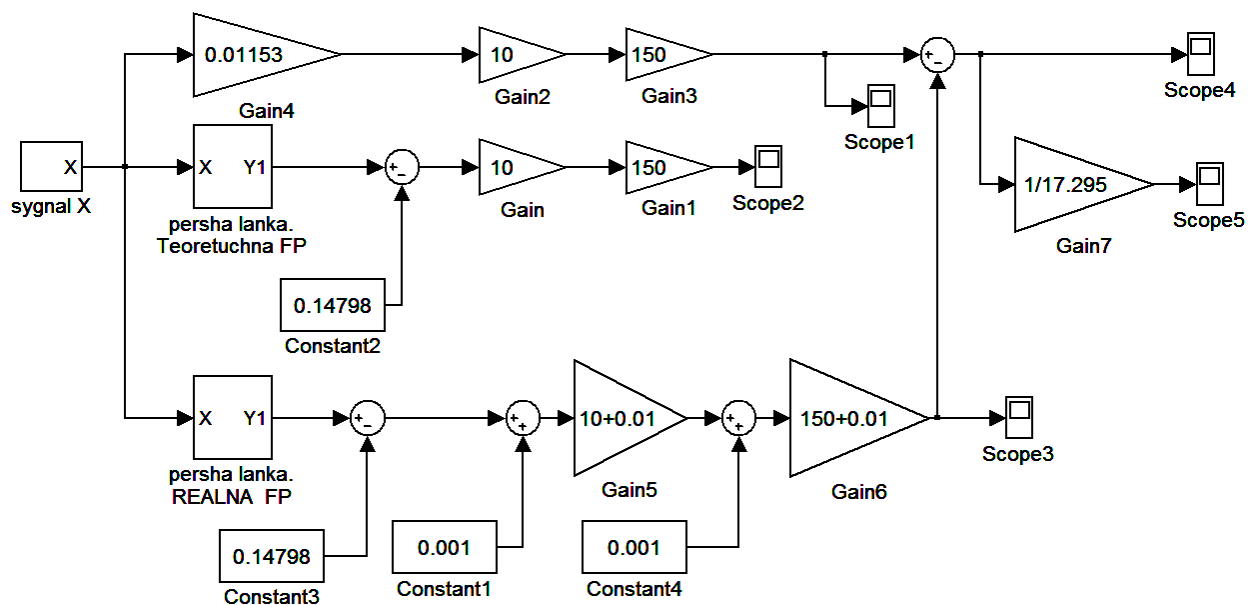


Рисунок 10 — S-модель для імітації роботи вимірювального ланцюга

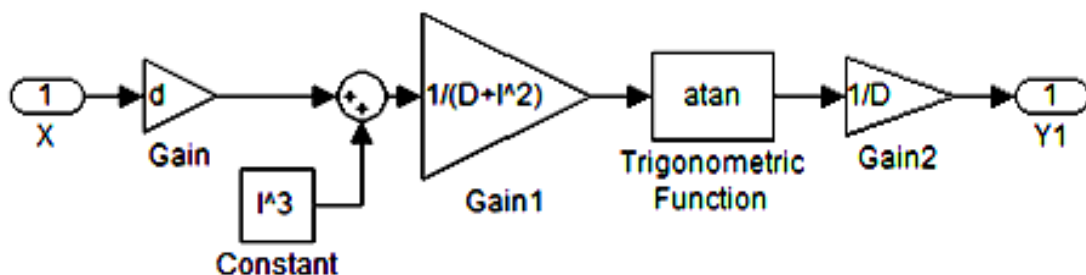


Рисунок 11 — Підсистема для реалізації теоретичної функції перетворення

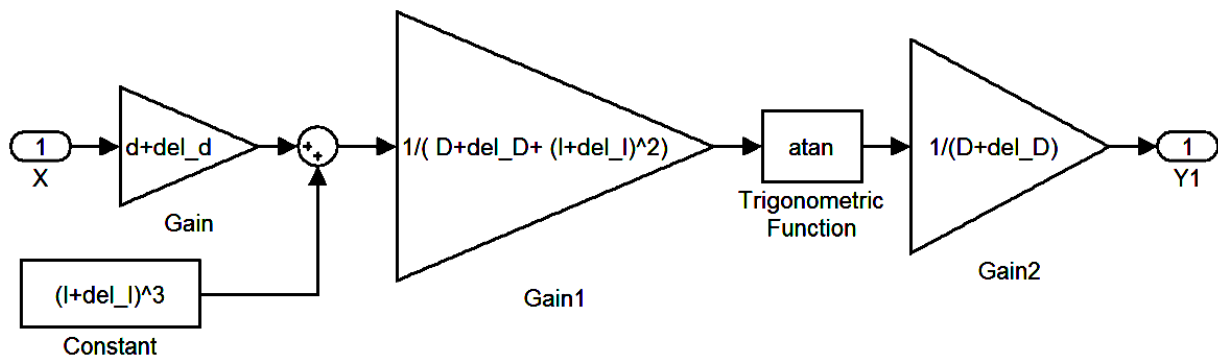


Рисунок 12 — Підсистема для реалізації реальної функції перетворення

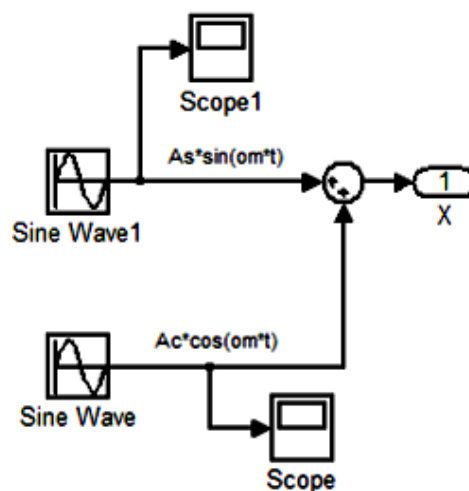


Рисунок 13.а — Підсистема S- моделі для генерації вхідного діяння

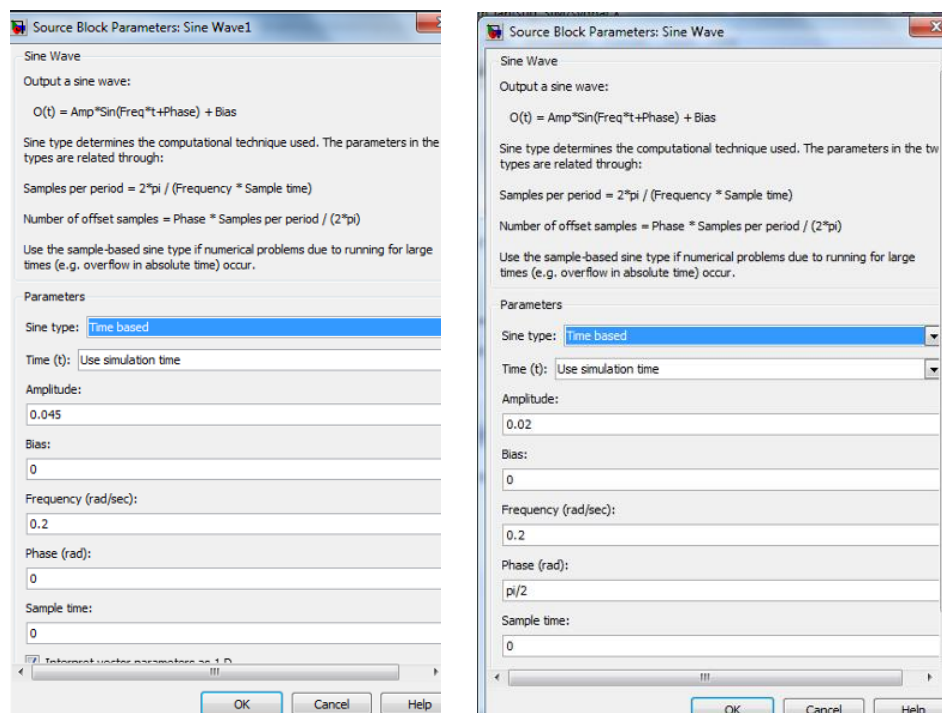


Рисунок 13.б — Налаштування S-моделі для генерації вхідного діяння

Розглянемо сигнали на виході ланцюга, що відображає проходження сигналу через вимірювальний ланцюг з номінальною (верхній ланцюг на рисунку 10) та реальною функцією перетворення (нижній ланцюг на рисунку 10). Сигнал на виході ланцюга з номінальною функцією перетворення можна отримати, відкривши елемент Score1. Його показано на рисунку 14. Сигнал на виході ланцюга з реальною – Score3 (рис.15).

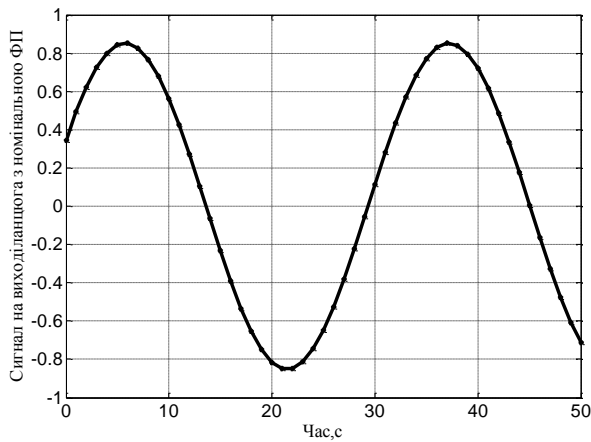


Рисунок 14 — Сигнал на виході ланцюга з номінальною функцією перетворення

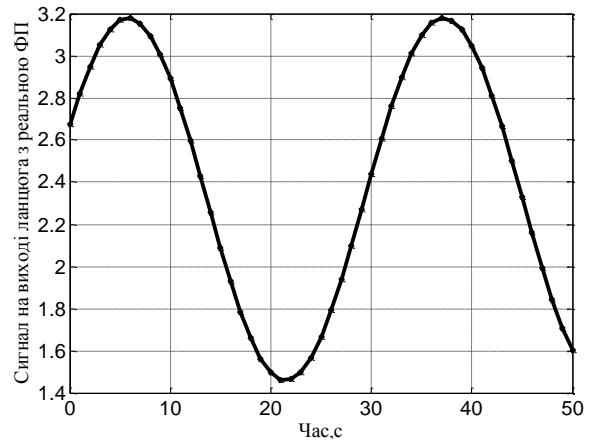


Рисунок 15 — Сигнал на виході ланцюга з реальною функцією перетворення

Сигнал зміни похибки вимірювання (Score 4) приведений до виходу показаний на рисунку 16, а приведений до входу вимірювального ланцюга (Score5) – рисунку 17.

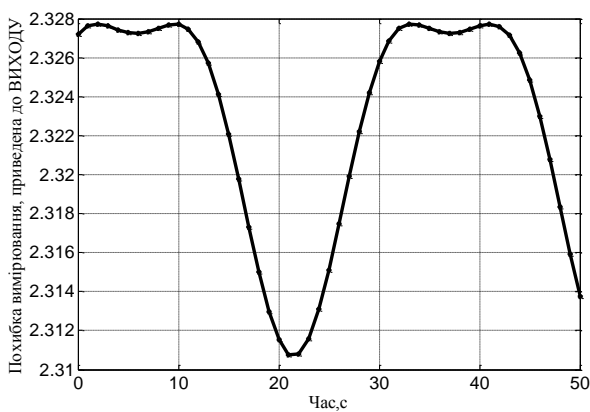


Рисунок 16 — Похибка вимірювального ланцюга приведена до виходу

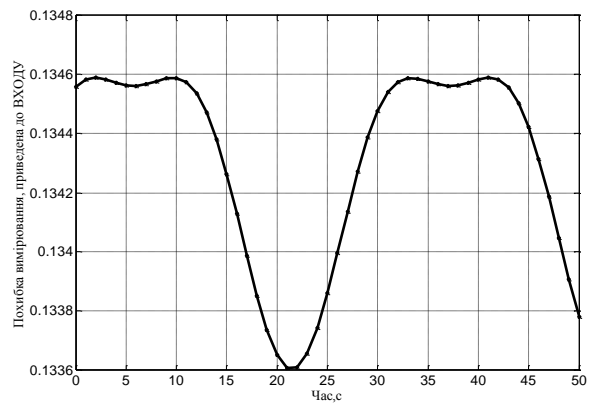


Рисунок 17 — Похибка вимірювального ланцюга приведена до входу

Графіки похибок мають не гармонічний вигляд, що викликано

зсувом частоти вихідного сигналу на виході ланцюга з реальною функцією перетворення. Зсув частоти викликаний нелінійними ефектами у реальному вимірювальному ланцюгу. Відповідно на графіку зміни похибки в часі ми маємо різницю двох коливань з близьким, але не рівними частотами. Це призводить до спостереження графіка, що відображає биття двох коливань. При цьому коливання сигналу похибки має складний характер у вигляді амплітудно-модульованого сигналу. Амплітуда сигналу похибки змінюється з низькою частотою, а основна несуча частота більша за частоту вхідного сигналу приблизно в 2 рази.

Оцінка мультиплікативної і адитивної похибки з графіків на рисунку 16 та рисунку 17 не дасть, в повній мірі, оцінити безпосередні величини адитивної та мультиплікативної похибки через наявність биття та модуляції амплітуди похибки. Проте, з даних графіків добре видно, що адитивні складові похибки, приведені до виходу, та похибки, приведені до входу, добре узгоджуються з розрахунковими значеннями з формули (44). Сталі складові похибки відповідно дорівнюють $2.3193 (\Delta_{п\ p\ y})$ та $0.1341 (\Delta_{п\ p\ x})$.

Максимальне значення приведеної до виходу мультиплікативної похибки становить 0.0085, а розрахункове значення згідно формули (44) має бути

$$\Delta_{п\ p\ y\ мульт} = 0.159 \cdot x_m = 0.159 \cdot 0.0492 = 0.0078.$$

Аналогічно для максимального значення мультиплікативної похибки, приведеної до входу (див. рис.17) - $5 \cdot 10^{-4}$, а розрахункове

$$\Delta_{п\ p\ x\ мульт} = 9.2 \cdot 10^{-3} \cdot x_m = 9.2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0492 = 4.53 \cdot 10^{-4}.$$

Також видно, що розрахункові і модельні значення адитивної складової похибки дуже близькі і відрізняються на долі відсотків:

$$\frac{|2.3193 - 2.326|}{2.3193} = 0.0029 \approx 0.3\%.$$

Виконаємо оцінку складових мультиплікативної і адитивної похибки використовуючи графіки вихідних сигналів ланцюга з номінальною функцією перетворення (рис.14) та з реальною функцією перетворення (рис.15). Для цього оцінимо амплітуди вихідних гармонічних коливань, а також рівні, відносно яких зміщені вихідні сигнали. Отримаємо:

1) характеристики сигналу на виході вимірювального ланцюга з номінальною функцією перетворення

$$y_{ном}(t) = A_{ном} \sin(\omega t + \varepsilon) + b_{ном}, \quad y_{ном \max} = 0.8511, \quad y_{ном \min} = -0.8511.$$

$$A_{ном} = \frac{y_{ном \max} - y_{ном \min}}{2} = 0.8511,$$

$$b_{ном} = \frac{y_{ном \max} + y_{ном \min}}{2} = 0.$$

2) характеристики сигналу на виході вимірювального ланцюга з реальною функцією перетворення

$$y_{реал}(t) = A_{реал} \sin(\omega t + \varepsilon) + b_{реал}, \quad y_{реал \max} = 3.178, \quad y_{реал \min} = 1.4628.$$

$$A_{реал} = \frac{y_{реал \max} - y_{реал \min}}{2} = 0.8576,$$

$$b_{реал} = \frac{y_{реал \max} + y_{реал \min}}{2} = 2.3204.$$

Адитивну похибку, приведену до виходу, оцінимо як різницю між постійними складовими

$$\Delta_{ад \ y} = b_{реал} - b_{ном} = 2.3204.$$

Максимальне значення абсолютної мультиплікативної складової похибки

$$\Delta_{у \ мульт \ max} = A_{реал} - A_{ном} = 0.8576 - 0.8511 = 0.0065.$$

Відносна мультиплікативна похибка:

$$\gamma_{мульт} = \frac{0.0065}{0.8576} = 0.0076 = 7.6 \cdot 10^{-3} = 0.76\%.$$

Порівняння похибок, отриманих з результатів моделювання, із

розрахунковими значеннями похибок з використанням лінійної теорії точності засобів вимірювання показало правильність виконаного розрахунку. Також показано адекватність застосування лінійної моделі похибок для розрахунку похибок вимірювального ланцюга за умови наявності можливості описати похибки засобу вимірювання моделлю у стандартній формі (19).

5.3. *Контрольні запитання*

1. Що таке функція перетворення? Чим відрізняється теоретична функція перетворення від номінальної?
2. На основі чого отримують номінальну функцію перетворення? Теоретичну функцію перетворень?
3. Чим викликана методична похибка засобу вимірювання?
4. Що таке основна похибка засобу вимірювання? З яких частин вона складається? Що таке додаткова похибка засобу вимірювання? Чим вона викликана?
5. Що таке чутливість приладу? Що таке крутизна перетворення приладу? Як пов'язані між собою чутливість та крутизна перетворення?
6. Які похибки приладів визнаєте відносно їх розподілу по діапазону вимірювання? Яка похибка називається адитивною? Мультиплікативною?
7. Яким чином розподілені відносні адитивні та мультиплікативні похибки вздовж діапазону вимірювання?
8. Чим викликана конструктивно-технологічна похибка засобів вимірювання?
9. Які методи лінеаризації функції перетворення ви знаєте?
10. Приведіть алгоритм знаходження похибок засобу вимірювання?
11. Що таке похибка приладу, приведена до входу? В яких одиницях вона вимірюється? Яка похибка приладу називається приведеною до виходу? В яких одиницях вона вимірюється?
12. Як розраховується адитивна похибка засобу вимірювання, що складається із послідовного з'єднання вимірювальних ланок?
13. Яким чином краще розташовувати ланки у засобі вимірювання?
14. Що показує квадратична складова похибки? Які фізичні процеси виникнення похибок вимірювання може відображати квадратична складова?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дорожовець С., Мотало В., Стадник Б. та ін. Основи метрології та вимірювальної техніки. Том 2. Вимірювальна техніка. За редакцією Б. Стадника. Навч. посіб. для студ. вищих навч. закл. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. – 638 с.

2. ДСТУ 2681-94. Метрологія. Терміни та визначення. – Чинний від 1995-01-01 // Кат. нормат. док. - К.: Держстандарт України, 2001. - Група 01.040.17; 17.020 (Т 80).17.020.

3. Клаассен К. Б. Основы измерений. Электронные методы и приборы в измерительной технике/ К. Б. Клаассен. — Москва: Постмаркет, 2002. — 352 с

4. Лавренова Д.Л. Основи метрології та електричних вимірювань [Електронне видання]: навч. посіб. / Д.Л. Лавренова, В.М. Хлистов. — К. : НТУУ «КПІ», 2016. – 123 с.

5. Майстренко В.М. Основи теорії засобів вимірювання / Майстренко В.М., Морозова І.В., Осадчий В.П., Порєв В.А. — Хмельницький: ПП Мельник, 2010. — 494 с.

6. Нестерчук Д.М. Основи метрології та засоби вимірювань: навчальний посібник / Д.М. Нестерчук, С.О. Квітка, С.В. Галько. — Мелітополь: Видавничо-поліграфічний центр «Люкс», 2017. - 256 с.

7. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники : учебник для студ. вузов по спец. "Информационно-измерительная техника" / П. П. Орнатский. — Киев : Вища школа, 1983. — 455 с.

8. Садовський Г.А. Теоретические основы информационно-измерительной техники: Учеб. пособие / Г.А. Садовский. — М.: Высш. шк, 2008. — 478с.: ил.

9. Таланчук П. М. Основы теории и проектирования измерительных приборов: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Приборостроение" / П. М. Таланчук, В.Т. Рущенко. — Киев : Головное издательство издательского объединения "Выща школа", 1989. — 454 с.

10. Ціделко В.Д. Основи метрології та вимірювальної техніки [Текст]: у 2т.: навч. посіб. / В.Д. Ціделко, Н.А. Яремчук, С.А. Затока та ін.. — К.: НТУУ «КПІ», 2013. — 1т. — 236 с.