

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

О.М.Польшакова, М.О.Солдатова,
О.А.Станін, М.М.Ткач

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ УПРАВЛІННЯ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра,
за освітньою програмою «Інформаційне забезпечення робототехнічних
систем» спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти: САМСОНКІН В.М., д-р техн. наук, професор, академік транспортної академії України, професор кафедри управління процесами перевезень Державного університету інфраструктури та технологій МОН України
ПАВЛОВ О.А., д-р техн. наук, професор, в.о. завідувача кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління КПП ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор ЛІСОВИЧЕНКО О.І., канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри технічної кібернетики КПП ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 13.05. 2021 р.)
за поданням Вченої ради факультету інформатики та обчислювальної техніки
(протокол № 9 від 19.04. 2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Польшакова Ольга Михайлівна, ст. викладач
Солдатова Марія Олександрівна, канд. техн. наук, доцент
Стенін Олександр Африканович, д-р техн. наук, проф., професор
Ткач Михайло Мартинович, канд. техн. наук, доц. доцент*

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ УПРАВЛІННЯ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Практикум з теорії управління технічними системами [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», освітньої програми «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем» / О. М. Польшакова, М.О.Солдатова, О.А.Стенін, М.М.Ткач ; КПП ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2.851 Кбайт). – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 133 с.

Основною метою навчального посібника є закріплення міцних практичних навичок з дослідження і побудови систем автоматичного управління в різних галузях народного господарства. В навчальному посібнику викладені стисло основні положення теорії управління технічними системами і наведений широкий спектр прикладів вирішення конкретних задач. Для закріплення практичних навичок в кінці кожного розділу дані умови задач з відповіддю для самостійного контролю знань. Це дозволяє закріпити теоретичні положення практичними навичками аналізу і синтезу систем автоматичного управління. Навчальний посібник орієнтовано на студентів і магістрів технічних спеціальностей, які пов'язані з розробкою та використанням автоматичних систем управління в самих різноманітних сферах народного господарства.

© І О. М. Польшакова, М.О.Солдатова, О.А.Стенін, М.М.Ткач, 2021

© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛАНОК І СИСТЕМ	5
1.1. Диференціальні рівняння і передавальні функції типових ланок САУ	5
1.2. Поняття і склад структурної схеми САУ	7
1.3. Побудова структурної схеми САУ	9
1.4. Правила перетворення структурних схем САУ	11
1.5. Основні співвідношення в САУ	17
1.6. Динамічна модель САУ в просторі станів.....	19
РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ЯКОСТІ САУ	28
2.1. Прямі показники якості перехідних процесів в замкнутій САУ.....	29
2.2. Розрахунок помилок сталих режимів при типових впливах	30
2.3. Компенсація помилок управління по заданому впливу і збуренню	33
2.4. Аналіз якості перехідних процесів САУ	35
2.5. Інтегральна квадратична оцінка якості перехідних процесів	38
2.6. Кореневі показники якості САУ	40
РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САУ.....	45
3.1. Визначення стійкості лінійних САУ	45
3.2. Алгебраїчні критерії стійкості САУ.....	47
3.3. Побудова області стійкості САУ	51
3.4. Частотні критерії стійкості САУ	53
3.5. Запас стійкості САУ.....	62
3.6. Показники стійкості типових САУ за логарифмічними характеристиками	64
3.7. Визначення стійкості лінійних багатовимірних САУ	66
3.8. Керованість і спостережуваність лінійних САУ	67
3.9. Оцінка стійкості АС за її структурою	67
РОЗДІЛ 4. СИНТЕЗ САУ	73
4.1 Синтез неперервних систем автоматичного керування. Методи синтезу неперервних систем керування.....	73
4.2. Логарифмічні частотні характеристики САУ	75
4.3. Логарифмічні частотні характеристики типових коригувальних ланок ...	77
4.4 Побудова бажаної логарифмічної характеристики.	82

4.5. Синтез САУ методом логарифмічних частотних характеристик	89
4.6 Типові схеми включення коригувальних пристроїв у САУ.	96
4.7 Синтез інваріантних САУ	104
4.8. Корекція якості динамічних процесів в лінійних багатовимірних САУ.	107
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	113

ВСТУП

Теорія управління технічними системами є технічною наукою загального застосування. Вона дає теоретичну базу для дослідження, розробки і проектування автоматичних і автоматизованих систем управління. Управління будь-яким об'єктом (об'єкт управління будемо позначати ОУ) є вплив на нього з метою досягнення необхідних станів або процесів. В якості ОУ може служити літак, верстат, електродвигун та ін. Управління об'єктом за допомогою технічних засобів без участі людини називається автоматичним управлінням. Сукупність ОУ і засобів автоматичного управління називається системою автоматичного управління (САУ).

Теорія управління технічними системами вивчає загальні принципи побудови САУ і методи їх дослідження незалежно від фізичної природи процесів.

Можна виділити два основні завдання теорії управління технічними системами:

1. Завдання аналізу: дослідження статичних і динамічних властивостей системи.
2. Завдання синтезу: розробка нових систем, що задовольняють заданим технічним вимогам.

При вирішенні цих завдань досліджуються наступні питання.

1. Формування функціональної та структурної схем САУ.
2. Побудова статичних і динамічних характеристик окремих ланок і системи в цілому.
3. Визначення помилок управління і показників точності замкнутої системи.
4. Дослідження стійкості системи.
5. Оцінка якісних показників процесу управління.
6. Синтез коригуючих пристроїв і оптимізація параметрів системи.

Автоматичне управління будь-яким ОУ здійснюється в САУ на основі трьох основних принципів регулювання:

- *Регулювання по збуренню*. Так називають принцип, коли протягом якогось часу вимірюється вплив збурення. Системи, що реалізують цей принцип, працюють по розімкнутому циклу.

- *Регулювання по відхиленню регульованої величини.* В цьому випадку регулятор сприймає значення регульованої величини, зіставляє його з заданим значенням і по їх різниці виробляє відповідний вплив, тобто цей принцип передбачає зворотний зв'язок.

- *Комбіновані системи регулювання.* Припускають використання як принципу по відхиленню, так і принципу по збуренню.

Завдання навчального посібнику - дати студентам в невеликому за обсягом посібнику основні відомості, необхідні в навчальній і практичній роботі з аналізу, розрахунку і дослідження САУ; сприяти засвоєнню основних положень теорії управління технічними системами; сприяти якісному і своєчасному виконанню лабораторних робіт, контрольних завдань і курсової роботи. Щоб практикум зробити зручним для самостійного користування, в нього включені необхідні формули розрахунку, приклади вирішення завдань. Також в кінці кожного розділу дані контрольні питання і завдання для самостійного вирішення з наведеними відповідями для контролю правильності їх рішень.

Структурно навчальний практикум включає розділи, присвячені вирішенню сформульованих вище 6-ти головних питань. У розділі 1 розглядається математичний опис САУ від диференціальних рівнянь і передавальних функцій типових динамічних ланок до структурних схем САУ, правил їх перетворення, і рівнянь САУ в просторі станів. У розділі 2 проводиться аналіз і розрахунок помилок сталих режимів САУ при типових заданих впливах, наводяться методи компенсації помилок САУ по заданому впливу і збуренню, а також інтегральної квадратичної оцінки якості перехідних процесів в САУ. У розділі 3 розглядаються методи дослідження стійкості САУ на основі алгебраїчних і частотних критеріїв, а також у просторі станів. У розділі 4 розглядається синтез коригувальних ланок САУ, щоб в результаті корекції САУ забезпечувався необхідний запас стійкості, точність управління в усталених режимах і якість управління в динамічних режимах. Окремо розглянуто питання корекції динамічних властивостей САУ при їх описі в просторі станів.

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛАНОК І СИСТЕМ

1.1. Диференціальні рівняння і передавальні функції типових ланок САУ

Для аналізу і синтезу САУ необхідно мати їх математичний опис. Зазвичай це диференціальні рівняння (ДУ). Детальне вивчення властивостей реальних об'єктів управління і систем автоматичного управління призводить до опису динамічних ланок у вигляді нелінійних диференціальних рівнянь. Але в багатьох випадках їх можна лінеаризувати, тобто замінити нелінійні рівняння лінійними, які наближено описують процеси в системах. Тим самим здійснюється декомпозиція задач аналізу і синтезу систем, тобто спочатку використовують лінійне представлення, а потім здійснюють облік внесених нелінійностями особливостей. Такому підходу сприяє те, що, в більшості випадків, нормально функціонуюча система працює в режимі малих відхилень, при яких нелінійності не проявляються. Надалі буде розглядатись переважно математичний апарат дослідження лінійних систем.

У загальному вигляді лінійне диференціальне рівняння САУ має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n X_{\text{вих}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вих}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dX_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_n X_{\text{вих}}(t) = \\ b_0 \frac{d^m X_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dX_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_m X_{\text{вх}}(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Диференціальне рівняння (1.1) - це перша форма опису САУ.

Використовуючи теореми перетворення Лапласа лінійності і диференціювання, отримаємо операторне рівняння, що зв'язує зображення вхідного і вихідного сигналів:

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) X_{\text{вих}}(s) = \\ = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) X_{\text{вх}}(s). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отримаємо з (1.2) відношення зображень вихідного і вхідного сигналів:

$$\frac{X_{\text{вих}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (1.3)$$

Відношення (1.3) не залежить від зображень сигналів, визначається тільки параметрами самої динамічної ланки (a_i, b_i), має вигляд дробово-раціональної функції.

Відношення зображень вихідного і вхідного сигналів (1.3) називають *передавальною функцією динамічної ланки*:

$$W(s) = \frac{X_{\text{вих}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)}. \quad (1.4)$$

Слід зазначити, що САУ дуже зручно представляти для аналізу і синтезу у вигляді взаємопов'язаної сукупності динамічних ланок.

Операторне рівняння – 1.2 - це друга форма опису САУ

При дослідженні частотних властивостей САУ використовується частотна передавальна функція. Для її отримання використовується перетворення Фур'є. При цьому оператор $s = j\omega$, а частотна передавальна функція записується у вигляді $W(j\omega)$.

Відношення зображень (1.4) - це третя форма опису САУ.

У таблиці 1.1 наведені перші дві форми опису типових динамічних ланок САУ.

Табл.1.1. Характеристики типових ланок САУ

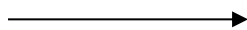
Тип ланки	Дифрівняння	Передавальна функція	Призначення
Аперіодична (інерційна) 1-го порядку	$T \cdot \dot{y} + y = ku$	$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$	T – визначає тривалість перехідного процесу
Аперіодична (інерційна) 2-го порядку	$T_2^2 \cdot \ddot{y} + T_1 \cdot \dot{y} + y = ku$	$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$	Комбінація двох аперіодичних ланок 1-го порядку

Коливальна 2-го порядку	$T^2 \cdot \ddot{y} + 2T\xi \cdot \dot{y} + y = ku$	$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$	$0 < \xi < 1$ = коефіцієнт демпфірування
Консервативна	$T^2 \cdot \ddot{y} + y = ku$	$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}$	$\xi = 0$ - коефіцієнт демпфірування
Ідеальна диференціююча	$y = k\dot{u}$	$W(s) = ks$	
Реальна диференціююча	$T \cdot \dot{y} + y = k\dot{u}$	$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$	
Ідеальна інтегруюча	$\dot{y} = ku$	$W(s) = \frac{k}{s}$	
Ізодромна	$\dot{y} = k(T \cdot \dot{u} + 1)u$	$W(s) = \frac{k(1 + Ts)}{s}$	де $T = \frac{k_1}{k}$

1.2. Поняття і склад структурної схеми САУ

Розрахунок системи зазвичай проводять за допомогою динамічного рівняння. Отримати таке рівняння досить важко. Однак завдання спрощується, якщо побудувати структурну схему системи, а потім перетворити її до форми, зручної для запису рівняння. Схема системи, представлена у вигляді сукупності (з'єднання) всіх її елементів, представлених передавальними функціями, називається структурною схемою САУ. До складу структурної схеми входять:

- 1) *лінії зв'язку* зі стрілками, що вказують напрямок передачі сигналу;



- 2) *вузли підсумовування* (рис.1.1);

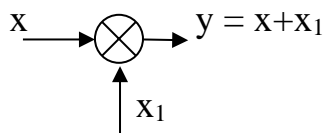
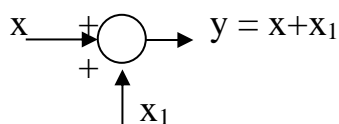


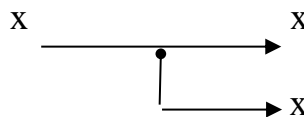
Рис.1.1. Вузли підсумовування

3) вузли віднімання (порівняння), в яких зачернений сектор або знак (-) вказує на інверсію вхідного сигналу (рис.1.2);



Рис.1.2. Вузли віднімання (порівняння), де $x_3 = x_1 - x_2$

4) точки знімання сигналу або точки розгалуження;



5) функціональні блоки (прямокутники або квадрати).

Розрізняють структурну схему як ілюстрацію, що допомагає усвідомити основні функціональні частини системи, їх призначення і всі зв'язки між ними, і структурну схему як малюнок, що відображає математичний опис взаємодій змінних в системі і з зовнішнім середовищем. У першому випадку (рис.1.3) всередині кожного прямокутника, що зображає функціональну частину системи, записують назву функціональної частини. У другому випадку (рис.1.4) всередині прямокутника поміщають відомий з літератури вираз передавальної функції. Якщо в літературі відсутній рекомендований вираз, то її визначають за диференціальними рівняннями, що описують динамічний зв'язок вхідної і вихідної змінних функціональної частини.

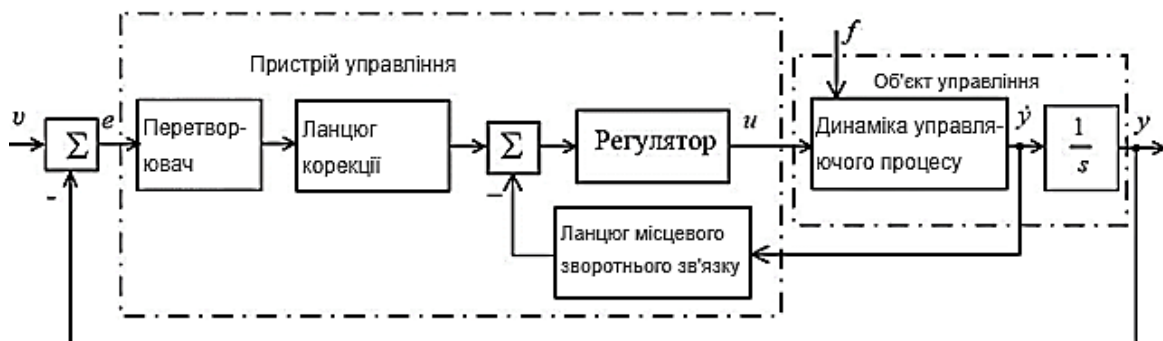


Рис.1.3. Структурна схема з текстовою інформацією в окремих блоках

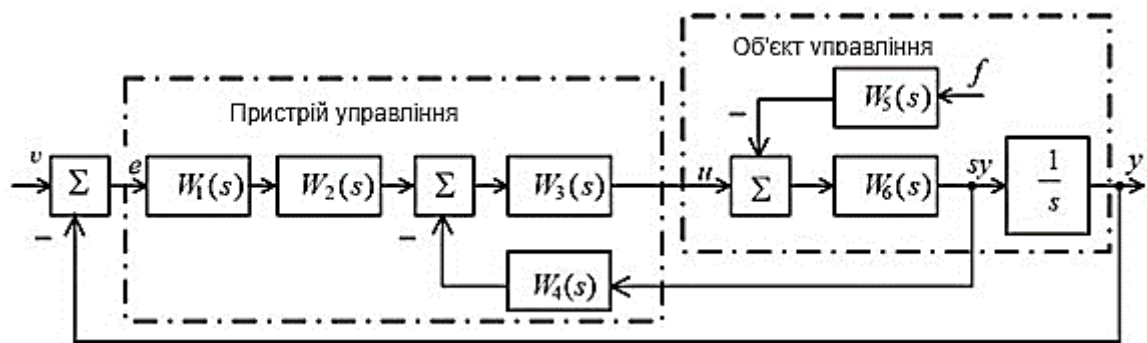


Рис.1.4. Структурна схема з позначенням передавальних функцій в окремих блоках

1.3. Побудова структурної схеми САУ

Структурна схема САУ будується на підставі фізичної моделі системи. При її побудові слід:

- виділити елементарні динамічні ланки основного ланцюгу впливу і ланцюгів зворотного зв'язку та визначити їх передавальні функції;
- знайти точки прикладання заданого впливу і впливів, що збурюють;
- визначити положення вузлів підсумовування і точок знімання сигналів для зворотного зв'язку.

При побудові структурних схем слід враховувати призначення САУ (системи стабілізації, пуску, гальмування та ін.) і, якщо це можливо, визначити місце включення регулятора. При виділенні функціональних елементів в якості динамічних ланок слід прагнути до того, щоб їх передавальні функції були найбільш простими.

Приклад 1.1.

Побудова структурної схеми системи стабілізації швидкості електроприводу постійного струму з тиристорним перетворювачем.

Основні динамічні ланки наступні:

- Двигун постійного струму

Операторне рівняння для електрорушійної сили (е. р. с.) двигуна e_n має вигляд:

$$e_n = (TT_m p^2 + T_m p + 1)e + (Tp + 1)I_c R_0,$$

де e_n - операторне зображення прирощення е. р. с. .

Операторному рівнянню відповідає структурна схема, зображена на рис. 1.5

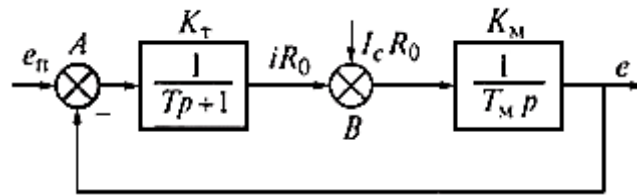


Рис. 1.5. Структурна схема двигуна

Підсумовуючи впливи в вузлах А і В відповідно, отримаємо:

$$(e_n - e)/(Tp + 1) = iR_0,$$

де i -струм двигуна.

Таким чином, можемо записати:

$$(e_n - e)/(Tp + 1) - I_c R_0 = eT_M p$$

$$e_n = (TT_M p^2 + T_M p + 1)e + (Tp + 1)I_c R_0$$

- **Тиристорний перетворювач.**

У практиці проектування прийнято інтерпретувати тиристорний перетворювач інерційною ланкою 1-го порядку:

$$K_{\pi} = \frac{\beta_{\pi}}{T_{\pi} p + 1},$$

де β_{π} - коефіцієнт посилення перетворювача; T_{π} - постійна часу ланки, пов'язана з частотою мережі, числом фаз і середнім статистичним запізненням перетворювача.

- **Підсумовуючий підсилювач.**

Являє собою безінерційну ланку з коефіцієнтом посилення K_y .

- **Датчик швидкості.**

Являє собою інерційну ланку:

$$K_{\text{дш}} = \frac{k_{\text{дш}}}{T_{\text{дш}} p + 1},$$

де $k_{\text{дш}}$ - коефіцієнт посилення датчика швидкості; $T_{\text{дш}}$ - постійна часу фільтра датчика швидкості.

Зазвичай для спрощення розрахунків постійну часу фільтра $T_{\text{дш}}$ призводять до малої постійної часу прямого каналу. Такою постійної часу є T_n інерційної ланки, що характеризує тиристорний перетворювач. Для цієї мети часто використовують формулу Ямпольського:

$$T_{\mu} = 1/2(T_n + T_{\text{дш}} + \sqrt{(T_n + T_{\text{дш}})^2 + T_{\text{дш}}^2}).$$

З урахуванням зроблених зауважень структурна схема системи представлена на рис.1.6.

Тут в ланцюг основного впливу включений регулятор K_p . З регулятора на об'єкт діє керуючий вплив u_y . Умовно приймемо $K_p = 1$.

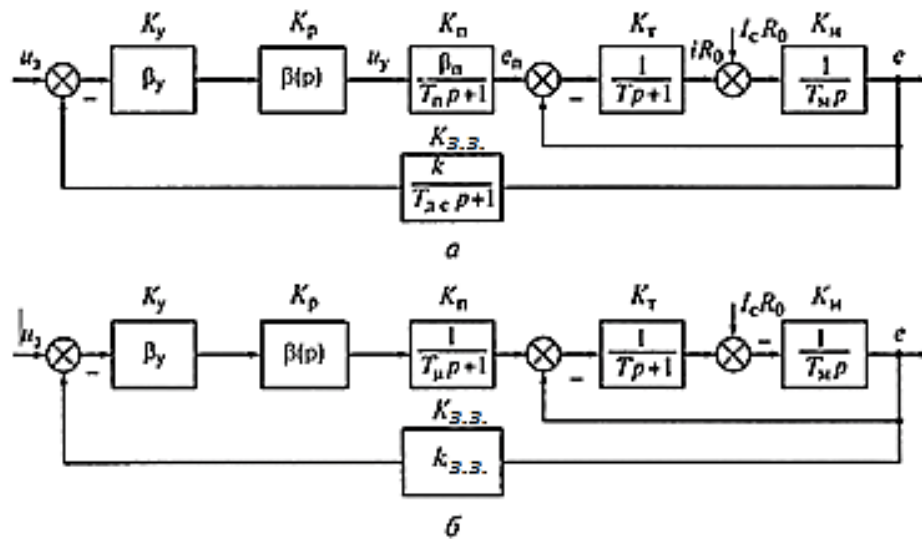


Рис.1.6. Структурна схема стабілізації швидкості: а-вихідна; б-розрахункова

1.4. Правила перетворення структурних схем САУ

У загальному випадку структурна схема представляє багатоконтурну схему з безліччю суматорів, наявністю локальних прямих і зворотних зв'язків. Очевидно, що визначення розрахункових співвідношень в цьому випадку виявляється складним і вимагає відповідних перетворень. Для цього використовуються правила структурних перетворень і правила об'єднання передавальних функцій. Слід зауважити також, що для лінійних САУ справедливий принцип суперпозиції, який полягає в тому, що сумі будь-яких збурень відповідає сума вихідних реакцій, кожна з яких визначається відповідним впливом, і при будь-якій зміні вхідного збурення без зміни його форми, вихідна величина зазнає таку ж зміну, також не змінюючи форми. Це дозволяє при виконанні перетворень не враховувати вхідні і вихідні сигнали, не задіяні при визначенні конкретних передавальних функцій.

Правила структурних перетворень представлені в таблиці 1.2.

Табл.1.2. Правила структурних перетворень

1	Перенесення суматорів	
2	Перестановка ланок	
3	Перенесення вузла з виходу суматора на вхід	
4	Перенесення вузла з входу суматора на вихід	
5	Перенесення вузла з виходу ланки на вхід	
6	Перенесення вузла з входу ланки на вихід	
7	Перенесення суматора з виходу ланки на вхід	
8	Перенесення суматора з входу ланки на вихід	
9	Заміна передавальних функцій прямого і зворотного ланцюга	
10	Приведення до одиничного зворотного зв'язку	

Правила об'єднання передавальних функцій. Без втрати спільності правила об'єднання передавальних функцій сформульовані для різних схем з'єднання двох ланок, передавальні функції яких $W_1(s)$ – першої ланки і $W_2(s)$ – другої ланки відомі.

Правило 1. Передавальна функція $W(s)$ послідовно з'єднаних ланок (рис. 1.7) дорівнює добутку передавальних функцій $W_1(s)$ і $W_2(s)$ окремих ланок:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s). \quad (1.1)$$

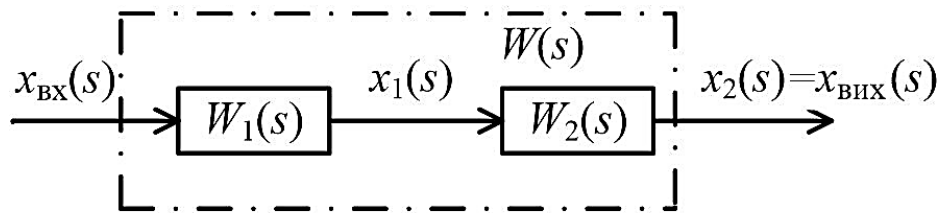


Рис. 1.7. Передавальна функція послідовно з'єднаних ланок

Приклад 1.2.

Нехай $W_1(s) = \frac{K_1}{T_1s+1}$ і $W_2(s) = \frac{K_2(T_2s+1)}{s}$. Визначити передавальну функцію послідовного з'єднання ланок (рис. 1.7).

Згідно (1.1) передавальна функція має вигляд:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s(T_1s+1)}, \text{ де } K = K_1K_2.$$

Правило 2. Передавальна функція $W(s)$ паралельно з'єднаних ланок (рис. 1.4) дорівнює сумі передавальних функцій $W_1(s)$ і $W_2(s)$ окремих ланок:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s). \quad (1.2)$$

Приклад 1.3.

Нехай на структурній схемі (рис. 1.8) $W_1(s) = \frac{1}{T_1s+1}$, $W_2(s) = \frac{1}{Ts}$.

Тоді згідно (1.2) передавальна функція має вигляд:

$$W(s) = \frac{1}{Ts} + \frac{1}{T_1s+1} = \frac{(T_2s+1)}{Ts(T_1s+1)},$$

де $T_2 = T_1 + T$.

Правило 3. Передавальна функція $W(s)$ з'єднання ланок у вигляді замкнутого контуру з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 1.9) дорівнює відношенню передавальної функції $W_1(s)$ в прямому ланцюзі контуру до виразу, що дорівнює одиниці плюс добуток передавальних функцій $W_1(s)$ і $W_2(s)$ прямого ланцюга і ланцюга зворотного зв'язку:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}. \quad (1.3)$$

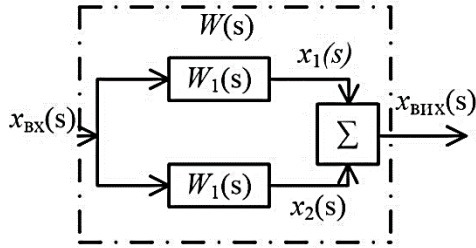


Рис. 1.8. Паралельне з'єднання

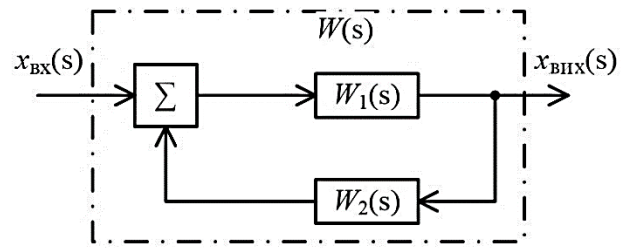


Рис. 1.9. Зворотний зв'язок

Приклад 1.4.

Нехай на структурній схемі (рис. 1.5)

$$W_1(s) = \frac{1}{T_1 s(T_2 s + 1)}, \quad W_2(s) = K_2.$$

Визначити передавальну функцію замкнутої системи.

Згідно (1.3) передавальна функція замкнутої системи автоматичного управління має наступний вигляд:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{\frac{1}{T_1 s(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K_2}{T_1 s(T_2 s + 1)}} = \frac{\frac{1}{K_2}}{\frac{T_1 T_2}{K_2} s^2 + \frac{T_1}{K_2} s + 1}.$$

Правило 4. При приведенні до входу контуру збурення $f(s)$, що діє всередині контуру (рис. 1.10), визначають еквівалентне збурення на вході $n(s)$ (рис. 1.11), яке дорівнює добутку $f(s)$ на зворотну передавальну функцію між зображеннями змінних $n(s)$ і $f(s)$ при $x_{вх}(s) \equiv 0$:

$$n(s) = f(s)W_1^{-1}(s). \quad (1.4)$$

Таке перенесення зовнішнього збурення дозволяє структурну схему контуру перетворити до схеми найпростішого виду.

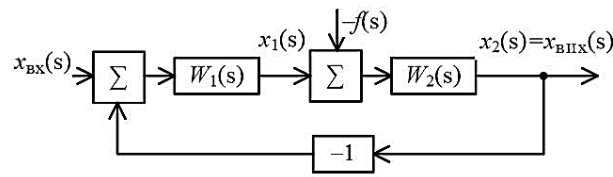


Рис. 1.10. Вихідна САУ

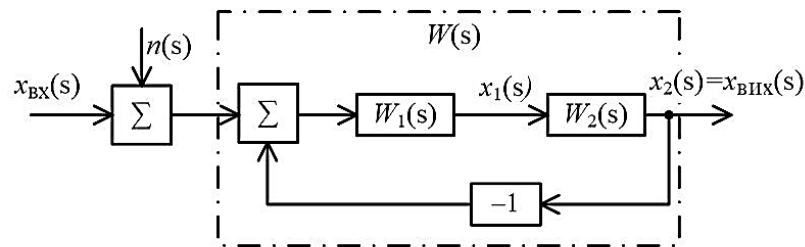


Рис. 1.11. САУ з еквівалентним збуренням

Приклад 1.5.

Потрібно визначити передавальну функцію замкнутої системи автоматичного управління W_{xy} , структурна схема якої представлена на рис.1.12.

Примітка. Задана система лінійна, тому для неї справедливий принцип суперпозиції, що дозволяє при виконанні перетворень не враховувати вхідні і вихідні сигнали, не задіяні при визначенні конкретних передавальних функцій.

З огляду на цю примітку, передавальну функцію необхідно шукати наступним чином.

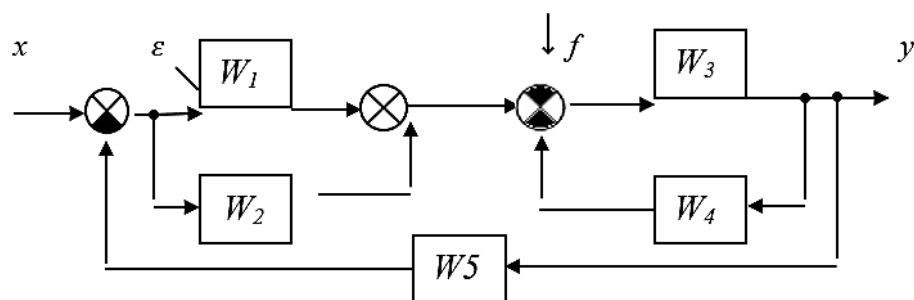


Рис.1.12. Структурна схема САУ

При визначенні передавальної функції W_{xy} відкидається вплив збурення f і не враховується ε . За вище розглянутими правилами виконуються наступні спрощення (перетворення) структурної схеми і вводяться нові позначення:

$W_6 = W_1 + W_2$ - об'єднання паралельно з'єднаних ланок W_1 і W_2 ,

$W_7 = \frac{W_3}{1+W_3W_4}$ –еквівалентна передавальна функція ланки W_3 , охопленого від’ємним зворотним зв’язком, що містить ланку W_4 . Тоді маємо наступну структурну схему (рис. 1.13).

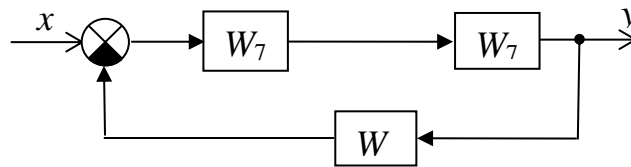


Рис.1.13. Структурна схема з об'єднаними ланками

Позначимо $W_8 = W_6W_7$, як об'єднання послідовно з'єднаних ланок W_6 і W_7 . Звідси

$$W_{xy} = \frac{W_8}{1+W_8W_5}.$$

Після підстановки позначень передавальних функцій елементів вихідної системи отримаємо передавальну функцію, що визначає залежність (зв'язок) вихідної величини Y від вхідної X :

$$W_{xy} = \frac{(W_1+W_2)W_3}{1+W_3W_4+W_3W_5(W_1+W_2)}.$$

Приклад 1.6.

Задана структурна схема САУ (рис. 1.14). Потрібно отримати еквівалентну передавальну функцію W_{xy} .

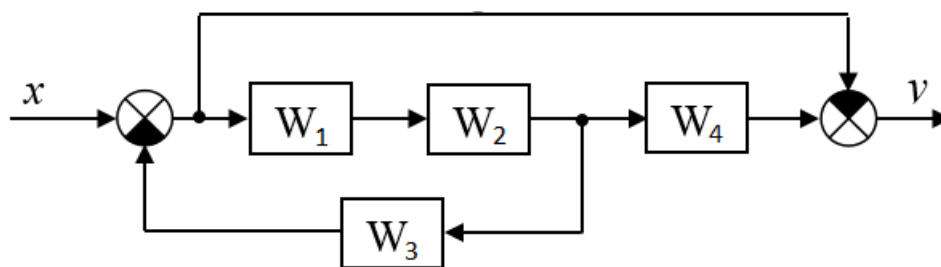


Рис.1.14. Структурна схема САУ

Об'єднуємо в одну дві послідовно з'єднаних ланки: $W_5 = W_1W_2$.

Для подальшого спрощення структурної схеми необхідно з контуру зі зворотним зв'язком (W_5 , W_3 , суматор) видалити точку знімання (розгалуження) сигналу, інакше до даного контуру не можна застосувати правило охоплення ланки зворотним зв'язком.

Для того щоб, після перенесення точки знімання, сигнал на вході другого суматора залишився незмінним, в ланцюг цього сигналу додається ланка з передавальної функцією зворотного зв'язку W_5 (рис.1.15)

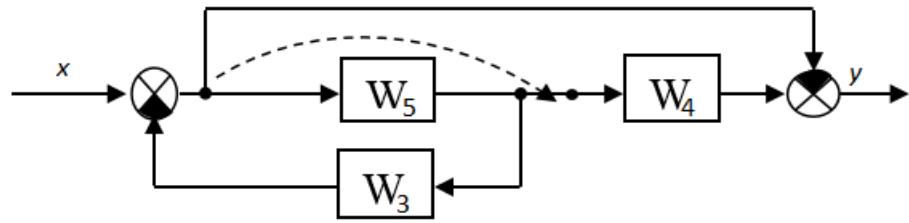


Рис.1.15. Структурне перетворення

Далі, при визначенні передавальної функції W_{xy} досить суматори поміняти місцями (переставити) і застосувати правила перетворення структурних схем для паралельного з'єднання ланок, ланки, охопленої негативним зворотним зв'язком і послідовного з'єднання (рис. 1.15). Звідси маємо:

$$W_4 = 1 - W_1 ; \quad W = \frac{W_2}{1 + W_2 W_3}.$$

В результаті проведених вище перетворень отримаємо вираз для еквівалентної передавальної функції у вигляді:

$$W_{xy} = W_4 W_5 = (1 - W_1) \frac{W_2}{1 + W_2 W_3}.$$

1.5. Основні співвідношення в САУ

Нижче наведені основні розрахункові співвідношення в САУ (рис. 1.16), знання яких необхідні для визначення динамічних характеристик системи і дослідження її поведінки при відтворенні заданих впливів $v(t)$, а також при оцінці впливу зовнішніх збурень $f(t)$.

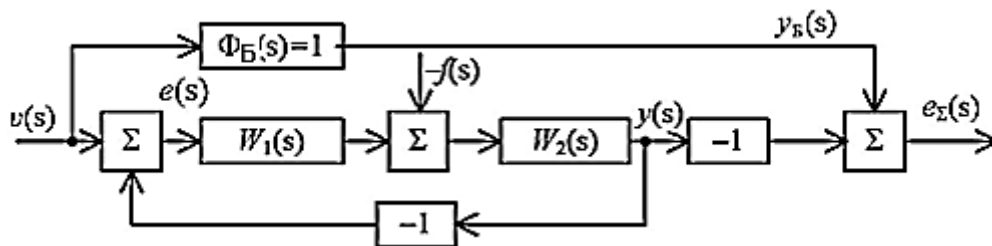


Рис.1.16. Структурна схема типовій САУ

Бажану передавальну функцію замкнутої САУ $\Phi_6(s)$ з практичних міркувань приймаємо рівній одиниці, тобто $\Phi_6(s) = 1$. Основні розрахункові співвідношення в типових САУ мають вигляд:

- **передавальна функція прямого каналу $W(s)$** : відношення зображення вихідної змінної системи $y(s)$ до зображення неузгодженості $e(s)$:

$$W(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = W_1(s)W_2(s);$$

- **передавальна функція замкнутої системи по змінній управління $\Phi(s)$** : відношення зображення вихідної змінної $y(s)$ до зображення впливу $v(s)$, який задається:

$$\Phi(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{1+W(s)};$$

- **передавальна функція замкнутої системи по неузгодженості $\Phi_e(s)$** : відношення зображення неузгодженості системи $e(s)$ до зображення задає впливу $v(s)$:

$$\Phi_e(s) = \frac{e(s)}{v(s)} = [1 - \Phi(s)] \frac{W(s)}{1+W(s)};$$

- **передавальна функція замкнутої системи по збуренню $\Phi_f(s)$** : відношення зображення вихідної змінної $y(s)$ до зображення збурення $f(s)$:

$$\Phi_f(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{W_2(s)}{1+W(s)};$$

- **зображення помилки управління $e(s)$** обумовленої неточним виконанням заданого впливу $v(s)$:

$$e(s) = v(s)[1 - \Phi(s)] = v(s) \frac{1}{1+W(s)};$$

- **зображення помилки по збуренню $e_f(s)$** :

$$e_f(s) = f(s)\Phi_f(s) = f(s) \frac{W_2(s)}{1+W(s)};$$

- **зображення сумарної помилки $e_\Sigma(s)$** :

$$e_\Sigma(s) = e(s) + e_f(s) = v(s) \frac{1}{1+W(s)} + f(s) \frac{W_2(s)}{1+W(s)}.$$

У ряді випадків передавальну функцію $W(s)$ прямого каналу зручно визначати як відношення полінома чисельника $M(s)$ до поліному знаменника $N(s)$:

$$W(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}.$$

Аналогічно можуть бути визначені і інші співвідношення, наприклад, передавальна функція замкнутої системи:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{M(s)}{N(s)+M(s)} = \frac{M(s)}{D(s)},$$

де поліном $D(s) = N(s) + M(s)$ називають *характеристичним поліномом*.

Характеристичне рівняння – дорівнює нулю сума поліномів знаменника $N(s)$ і чисельника $M(s)$ передавальної функції $W(s)$ розімкнутої системи.

$$D(s) = N(s) + M(s) = 0.$$

1.6. Динамічна модель САУ в просторі станів

Для безперервної лінійної динамічної САУ рівняння динаміки в просторі станів мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)U(t); \\ Y(t) = C(t)X + D(t)U(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

де $A(t)$ -матриця розміру $n \times n$; $B(t)$ -матриця розміру $n \times r$; $C(t)$ -матриця розміру $m \times n$; $D(t)$ – матриця розміру $m \times r$.

Для стаціонарної лінійної динамічної САУ матриці A , B , C , D постійні і рівняння стану (1.5) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + BU(t); \\ Y(t) = CX + DU(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

Диференціальні рівняння (1.5) і (1.6), що описують динаміку лінійних САУ записані в нормальній формі Коші.

При переході до нових змінних стану за допомогою лінійного невиродженого перетворення змінних:

$$X = TZ,$$

де T – матриця перетворення ($\det T \neq 0$), а рівняння стану для нових змінних Z будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = T^{-1}ATX + T^{-1}BU(t); \\ Y(t) = CTZ + DU(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

Якщо при переході до нових змінних перетворення $X = TZ$ приводить матрицю A к жордановій формі, тобто $T^{-1}AT = J$ (жорданова форма матриці A), то система рівнянь (1.7). називається канонічною формою Жордана.

Розглянемо спосіб отримання нормальної форми Коші для n -мірного диференціального рівняння, що описується лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^n X}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 u(t). \quad (1.8)$$

Тут $x(t)$ - процес на виході САУ; $u(t)$ – вплив управління.

Вводимо змінні стану x_1, x_2, \dots, x_n за допомогою наступних рівностей:

$$\frac{d^i x}{dt^i} = x_i + 1; \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Така заміна змінних говорить про те, що при зміні параметра i від нуля до $n-1$ отримуємо наступні нові позначення для похідних:

$$i = 0, \quad \frac{d^0 x}{dt^0} \equiv x = x_1;$$

$$i = 1, \quad \frac{d^1 x}{dt^1} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$i = 2, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dx_2}{dt} = x_3;$$

$$i = 3, \quad \frac{d^3 x}{dt^3} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \frac{dx_3}{dt} = x_4;$$

$$i = 4, \quad \frac{d^4 x}{dt^4} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right) = \frac{dx_4}{dt} = x_5;$$

.....

$$i = n - 2, \quad \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}} \right) = \frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1};$$

$$i = n - 1, \quad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} \right) = \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n.$$

В результаті, кожна похідна від вихідної величини $x(t)$ від $i = 0$ до $n-1$ включно тепер стала самостійною змінною стану. Замість вихідного рівняння (1.8) зараз у нових змінних маємо систему диференціальних (1.9) з n рівнянь першого порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = x_5 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1} \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + b_0 u(t), \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$y(t) = x_1(t).$$

Щоб визначити матриці векторно-матричної форми запису рівнянь стану САУ, систему рівнянь (1.9) запишемо у вигляді нормальної форми Коші:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} [u(t)] \quad (1.10)$$

Тепер видно, що матриці A, B, C, D системи (1.10) мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]; D = [0]$$

Розглянемо отримання канонічної форми рівнянь стану САУ на наступному прикладі.

Приклад 1.7.

Нехай САУ описуються рівняннями стану:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} V, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X.$$

Необхідно скласти рівняння стану в канонічній формі.

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -6 & -6-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0;$$

$$\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -2.$$

Визначаємо власні вектори з рішення системи $[A - \lambda_i]x^i = 0$ при $i = 1; 2$.

Нехай $\lambda_i = \lambda_1 = -3$. Тоді $\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1^1 + a_{12}x_2^1 = 0, \\ a_{21}x_1^1 + (a_{22} - \lambda_1)x_2^1 = 0, \end{cases}$ звідки $2x_1^1 + x_2^1 = 0$.

Прийнявши довільно $x_1^1 = 1$, маємо $x_2^1 = -2$ і $x_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

При $\lambda_i = \lambda_2 = -2$ система $\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)x_1^2 + a_{12}x_2^2 = 0, \\ a_{21}x_1^2 + (a_{22} - \lambda_2)x_2^2 = 0 \end{cases}$ приводиться до рівняння

$$3x_1^2 + 2x_2^2 = 0, \text{ звідки, наприклад, при } x_1^2 = 2 \text{ отримаємо } x_2^2 = -3 \text{ і } x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Отже, модальна матриця $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} M_n = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad M^{-1}B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix};$$

$$CM = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}.$$

Остаточню:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} V. \\ Y = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} X. \end{cases}$$

Контрольні питання і завдання

1. Які завдання дозволяють вирішувати правила еквівалентних перетворень структурних схем?
2. Дати визначення принципу суперпозиції стосовно до структурних схем систем автоматичного управління.
3. За математичною моделлю об'єкта управління у формі системи диференціальних рівнянь визначити структурну схему об'єкта.

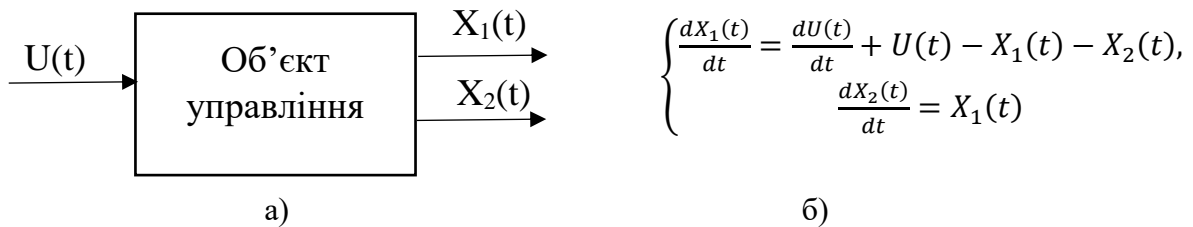
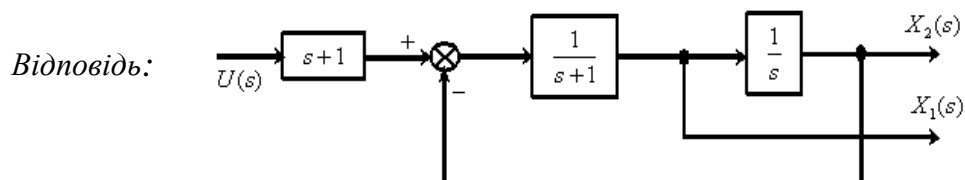


Рис. 1.17. Об'єкт управління а) і система диференціальних рівнянь б)



4. Визначити передавальні функції САУ (Рис. 1.18)

$$W^t(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)}, W^n(s) = \frac{Y_2(s)}{X(s)}$$

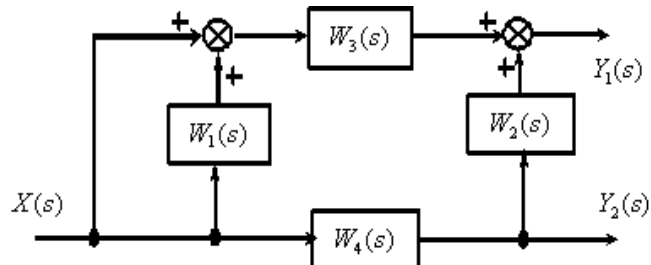


Рис. 1.18. Структурна схема САУ

Відповідь: $W^t(s) = (1 + W_1(s))W_3(s) + W_4(s), W^n(s) = W_4(s).$

5. Визначте передавальну функцію, еквівалентну структурній схемі (рис. 1.19).

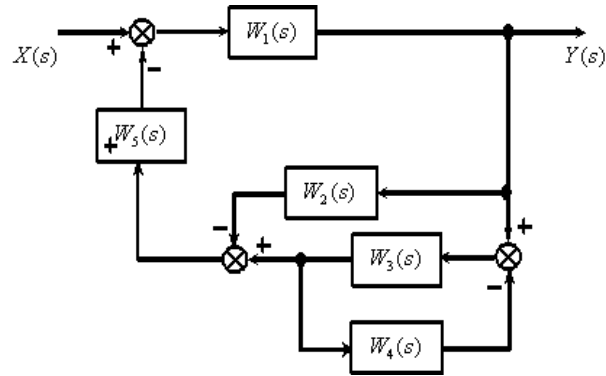


Рис. 1.19. Структурна схема САУ

Відповідь:
$$W(s) = \frac{W_1(s)(1+W_3(s)W_4(s))}{1+W_3(s)W_4(s)+W_1(s)W_5(s)(W_3(s)-W_2(s)(1+W_3(s)W_4(s)))}$$

6. Визначте передавальні функції

$$W^t(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)}, W^n(s) = \frac{Y_2(s)}{X(s)}$$

за наступною структурною схемою (рис. 1.20)

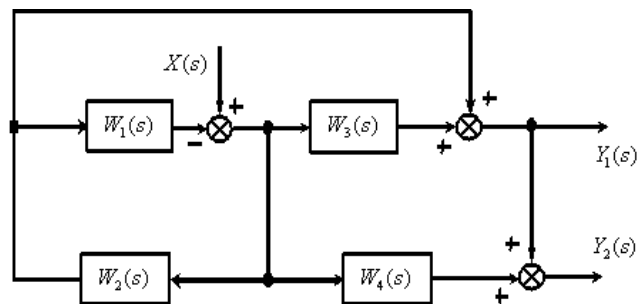


Рис. 1.20. Структурна схема САУ

Відповідь:
$$W^t(s) = \frac{W_2(s)+W_3(s)}{1+W_1(s)W_2(s)}, W^n(s) = \frac{W_2(s)+W_3(s)+W_4(s)}{1+W_1(s)W_2(s)}$$

7. Визначити передавальні функції

$$W_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)}, W_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_2(s)}, W_{13}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_3(s)},$$

$$W_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_1(s)}, W_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)}, W_{23}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_3(s)},$$

за наступною структурною схемою (рис. 1.21)

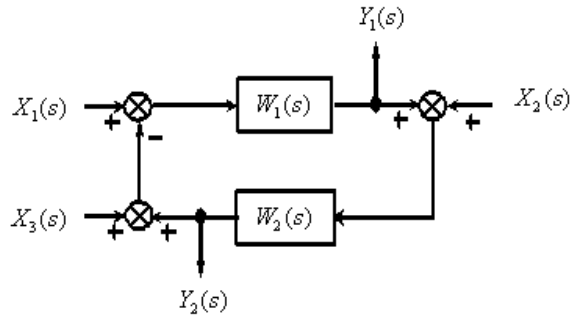


Рис. 1.21. Структурна схема САУ

Відповідь:

$$W_{11}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}, W_{12}(s) = \frac{-W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}, W_{13}(s) = \frac{-W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)};$$

$$W_{21}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}, W_{22}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}, W_{23}(s) = \frac{-W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

8. Дано дві паралельно з'єднаних ланки з передавальними функціями: для першої ланки $W_1(s)$; для другої ланки $W_2(s)$. Визначити передавальну функцію $W(s)$ з'єднаних ланок за такими передавальними функціями:

- а) $W_1(s) = 4$; $W_2(s) = 1/0,1s$;
- б) $W_1(s) = 4/(0,1s+1)$; $W_2(s) = 1/0,1p$;
- в) $W_1(s) = 4/(0,1s+1)$; $W_2(s) = 1/(0,2s+1)$.

Відповіді:

- а) $W(s) = 10(0,4s+1)/s$;
- б) $W(s) = 10(0,5s+1)/s(0,1s+1)$;
- в) $W(s) = 5(0,18s+1)/[(0,1s+1)(0,2s+1)]$.

9. За структурною схемою фільтра, зображеної на рис. 1.22, записати передавальну функцію фільтра при наступних даних:

- а) $W_1(s) = 1$, $W_2(s) = -1$; б) $W_1(s) = 0,1$, $W_2(s) = -\frac{1}{s}$; в) $W_1(s) = 2$, $W_2(s) = \frac{1}{s}$.

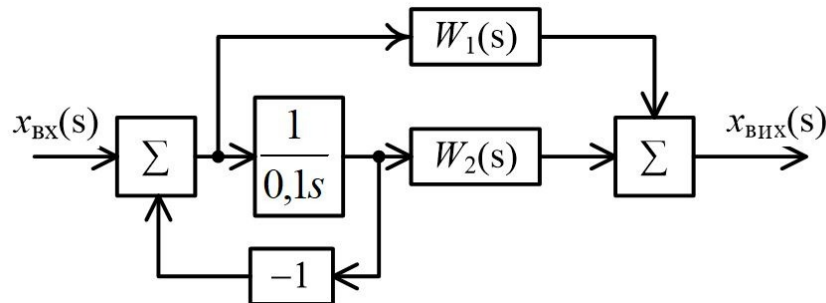


Рис. 1.22. Структурна схема САУ

Відповідь: а) $W(s) = \frac{0,1s-1}{0,1s+1}$;

$$\begin{aligned} \text{б) } W(s) &= \frac{0,1s+1}{s}; \\ \text{в) } W(s) &= \frac{0,2s+1}{0,1s+1}. \end{aligned}$$

10. На рис. 1.23 показана структурна схема окремої функціональної частини системи управління. Знайти її передавальну функцію.

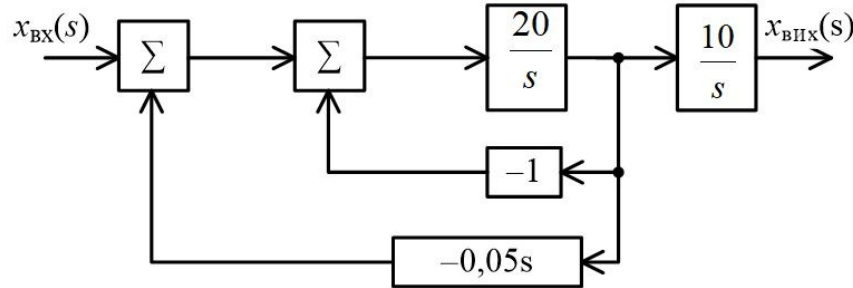


Рис. 1.23. Структурна схема САУ

Відповідь: $W(s) = \frac{x_{\text{ВНХ}}(s)}{x_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{10}{s(0,1s+1)}.$

11. Для структурної схеми, зображеної на рис. 1.24, знайти передавальну функцію $W(s)$ розімкнutoї системи і зображення помилки управління $e(s)$ при наступних вихідних даних:

а) $T = 0,52 \text{ с}, v(s) = \frac{2}{s};$ б) $T = 0,42 \text{ с}, v(s) = \frac{0,2}{s}.$

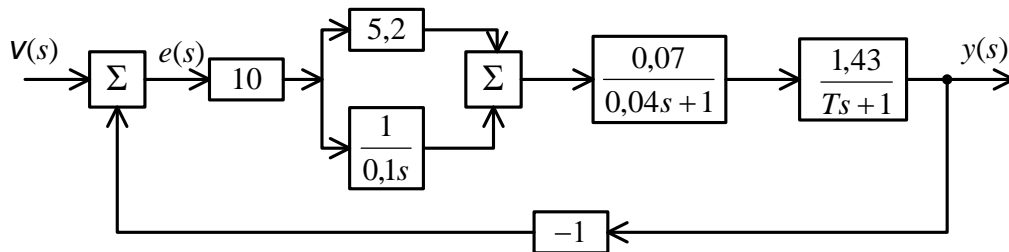


Рис. 1.24. Структурна схема САУ

Відповідь: а) $W(s) = \frac{10}{s(0,04s+1)}; e(s) = \frac{0,08s+2}{0,04s^2+1 \cdot s+10};$

б) $W(s) = \frac{10(0,52s+1)}{s(0,4s+1)}; e(p) = \frac{0,08s+0,2}{0,4s^2+6,2s+10}.$

12. Структурна схема системи автоматичного управління показана на рис. 1.25. Знайти характеристичне рівняння $D(s) = 0$ і зображення помилки по збуренню $f(s)$, якщо дано

а) $T = 0,1 \text{ с}, f(s) = \frac{0,04}{s};$ б) $T = 0,2 \text{ с}, f(s) = \frac{0,04}{s}.$

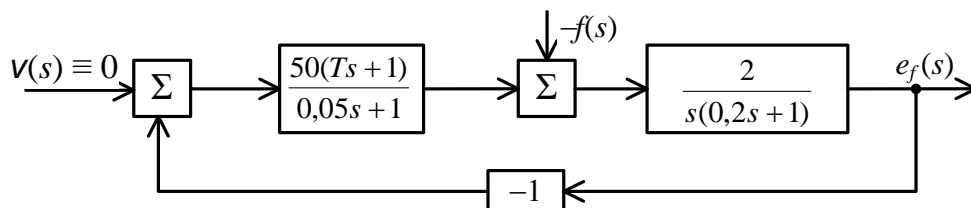


Рис. 1.25. Структурна схема САУ

Відповідь:

а) $D(s) = 0,01s^3 + 0,25s^2 + 11s + 100 = 0, e_f(s) = \frac{0,004s+0,08}{sD(s)}$;

б) $D(s) = 0,01s^3 + 0,25s^2 + 21s + 100 = 0, e_f(s) = \frac{0,004s+0,08}{sD(s)}$.

13. Структурна схема САУ показана на рис. 1.26.

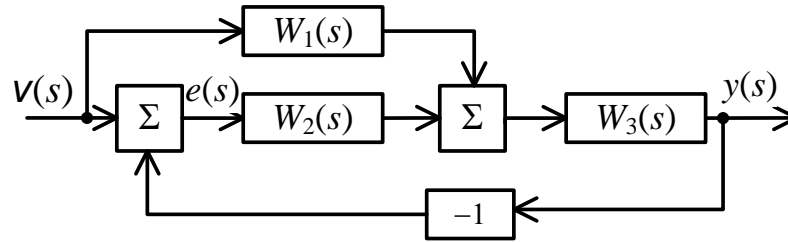


Рис. 1.26. Структурна схема САУ

Знайти передавальну функцію замкнутої системи і зображення помилки управління $e(s)$ при $W_1(s) = W_3^{-1}(s)$.

Відповідь: $\Phi(s) = \frac{[W_1(s)+W_2(s)]W_3(s)}{1+W_2(s)W_3(s)}, e(s) = 0$.

14. Знайти передавальні функції $\Phi(s)$ і $\Phi_e(s)$ САУ з жорстким зворотним зв'язком по швидкості, структурна схема якої представлена на рис. 1.27 при наступних умовах

$K_1 = 84,3$ В/рад; $K_2 = 1000$; $K_3 = 0,75$ В·с/рад; $K_4 = 0,015$ рад/В·с; $T = 0,12$ с.

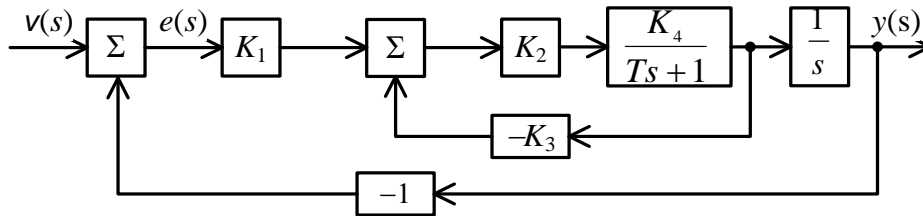


Рис. 1.27. Структурна схема САУ

Відповідь: $\Phi(s) = \frac{1264}{0,12s^2+12s+1264}$; $\Phi_e(p) = \frac{0,12s^2+12s+0}{0,12s^2+12s+1264}$.

15. Динаміка САУ описується диференціальним рівнянням

$$(s^4 + s^3 + 7s^2 + 10s)y = 2v.$$

Отримати рівняння в просторі стану, попередньо склавши структурну схему моделі:

Відповідь: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bv \\ y = C^T x \end{cases}$,

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -10 & -7 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

16. Динаміка САУ описується диференціальним рівнянням

$$(s^2 + 2s + 1,5) = (3s + 1) v.$$

Отримати рівняння в просторі стану.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} \dot{x} = Ax + bv \\ y = C^T x, \end{cases}$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = [1 \quad 0].$$

РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ЯКОСТІ САУ

Стійкість САУ є необхідною, але не достатньою умовою для її ефективного функціонування. Важливе значення має якість управління, тобто ступінь задоволення сукупності вимог до форми кривої перехідного процесу, яка визначає придатність системи для конкретних умов роботи.

Для порівняння якості різних САУ досліджується їх реакція на типові впливи. Зазвичай це ступінчаста функція, як один з найбільш несприятливих видів збурень. Для систем, що працюють з періодичними збуреннями, доцільно оцінювати якість управління при гармонійному впливі. Всі інші збурення можна розкласти на ступінчасті впливи з використанням інтеграла Дюамеля, або в ряд Фур'є.

Всі сучасні методи аналізу якості управління можна розділити на прямі методи аналізу по кривій перехідного процесу або по частотним характеристикам, і непрямі методи, що дозволяють, не вирішуючи диференціальних рівнянь, визначити деякі показники якості процесу управління; до них, зокрема, відносяться кореневі, інтегральні і частотні методи.

2.1. Прямі показники якості перехідних процесів в замкнутій САУ

Працездатність будь якої замкнутої САУ визначається її стійкістю, що в свою чергу зумовлюється структурою системи. Перехідні ж процеси залежать не тільки від структури системи і її параметрів, але і від характеру впливів, прикладених до неї. У зв'язку з цим для оцінки якості регулювання і динамічних властивостей АСР вводять типові впливи, до яких відносять одиничну ступінчасту і імпульсну функції; вплив, що змінюється з постійною швидкістю або постійним прискоренням; гармонійний вплив.

З наведених типових впливів частіше застосовують одиничну ступінчасту функцію. По ній визначають прямі показники якості САУ.

До прямих показників якості відносять такі показники:

- *час регулювання t_p* – мінімальний час, після закінчення якого (з моменту подачі ступінчастого впливу) відхилення вихідної величини від сталого значення не перевищує деякої заданої величини Δ .

$$\Delta = (0.05 - 0.01)h_{cm},$$

де h_{cm} - стале значення перехідної характеристики;

- *перерегулювання σ* – максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення перехідної характеристики (у відсотках):

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{cm}}{h_{cm}} 100\%,$$

де h_{\max} - максимальне відхилення від усталеного значення перехідної h_{cm} ;

- *статична помилка ε_{cm}* – відхилення h_{cm} від заданого вхідного значення A_0 ступінчастого впливу $x_{bx}(t) = A_0 I(t)$ (для статичних систем);
- *ступінь загасання перехідного процесу ξ* – відношення різниці двох сусідніх однаково спрямованих амплітуд коливань до першої з них.

На підставі вищевикладеного можна зробити висновок, що якість процесів регулювання можна оцінити шляхом вирішення диференціального рівняння системи і побудови графіка перехідного процесу. Однак, рішення в аналітичному вигляді можливо тільки в разі лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і пов'язане з труднощами визначення коренів характеристичного

рівняння. Внаслідок цього широко застосовують непрямі оцінки якості САУ, до числа яких відносять кореневі, інтегральні і частотні показники.

2.2. Розрахунок помилок сталих режимів при типових впливах

Значення помилки, яке встановлюється в системі після подачі на її вхід типового впливу і загасання перехідного процесу, є основним показником якості, за яким оцінюють і порівнюють системи управління. В якості типового впливу прийнято використовувати наступні види: ступінчастий, такий, що лінійно змінюється, параболічний або синусоїдальний.

Значення помилки від типового впливу в сталому режимі визначається за наступною формулою:

$$e_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s v(s) [C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \dots], \quad (2.1)$$

де $v(s)$ -зображення по Лапласу типового впливу на вході системи, а C_0, C_1, C_2, \dots – коефіцієнти помилок, що залежать від параметрів системи.

Коефіцієнти помилок визначають за допомогою розкладання передавальної функції замкнутої системи $\Phi_e(s)$ в ряд за ступенями s :

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+K(s)} = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \dots \quad (2.2)$$

Приклад 2.1.

Передавальна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$K(s) = \frac{K_a(T_2 s + 1)}{s^2(T_3 s + 1)}.$$

Визначити перші чотири коефіцієнти помилки.

Рішення: Знаходимо передавальну функцію відносно помилки, яку запишемо у вигляді:

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+K(s)} = \frac{0+0s+1s^2+T_3s^3}{K_a+K_aT_2s+1s^2+T_3s^3}.$$

Примітка. Якщо який-небудь коефіцієнт полінома чисельника дорівнює нулю, то у виразі полінома на місці цього коефіцієнта необхідно писати число «нуль».

Розкладаємо цей вираз в ряд, діленням поліному чисельника на поліном знаменника:

$0 + 0s + 1s^2 + T_3s^3$	$\frac{K_a + K_aT_2s + 1s^2 + T_3s^3}{0 + 0s + \frac{1}{K_a}s^2 + \frac{1}{K_a}(T_3 - T_2)s^3}$
$1s^2 + T_2s^3 + \frac{1}{K_a}s^4 + \dots$	

$$(T_3 - T_2)s^3 - \frac{1}{K_a}s^4 - \dots$$

$$(T_3 - T_2)s^3 + T_2(T_3 - T_2)s^4 + \dots$$

Далі можемо записати тотожність:

$$C_0 + C_1s + \dots = 0 + 0s + \frac{1}{K_a}s^2 + \frac{1}{K_a}(T_3 - T_2)s^3.$$

Звідси отримаємо коефіцієнти помилок:

$$C_0 = 0; C_1 = 0; C_2 = \frac{1}{K_a}; C_3 = \frac{1}{K_a}(T_3 - T_2).$$

Автоматичні системи регулювання прийнято поділяти на статичні і астатичні. Система регулювання називається статичною по відношенню до впливу збурення, якщо при впливі, що прагне з плином часу до деякого сталого постійного значення, відхилення регульованої величини так само прагне до постійного значення, що залежить від величини впливу. Система регулювання називається астатичною по відношенню до впливу збурення, якщо при впливі, що прагне з плином часу до деякого сталого постійного значення, відхилення регульованої величини прагне до нуля незалежно від величини впливу. При цьому, якщо в САУ є одна інтегруюча ланка, то астатизм першого порядку, якщо два – астатизм другого порядку і т. д.

Згідно з формулами (2.1) і (2.2) величина помилки усталеного режиму для таких систем при типових впливах визначається:

— *статичної системи* при ступінчастому впливі $v(t) = A \cdot 1(t)$

$$e_n = \frac{A}{1+K};$$

— *астатичної системи з астатизмом першого порядку* при лінійному впливі $v(t) = Vt \cdot 1(t)$

$$e_{ck} = \frac{V}{K_v};$$

— *астатичної системи з астатизмом другого порядку* при параболічному зміні впливу $v(t) = \frac{1}{2}at^2$

$$e_{yck} = \frac{a}{K_a}.$$

Добротність системи по швидкості D_v це відношення швидкості v впливу до кінетичної помилки e_{ck} , чисельно дорівнює коефіцієнту посилення розімкнутої системи K_v .

Добротність системи по прискоренню D_a це відношення постійного прискорення a впливу на вході системи до помилки по прискоренню e_{yck} , чисельно дорівнює коефіцієнту посилення розімкнутої системи K_a .

При аналізі якості усталеного режиму необхідно враховувати вплив зовнішнього середовища, який проявляє себе у вигляді збурення $f(t)$, прикладеного в системі до входу об'єкта управління. Збурення вносить додаткову помилку. В найпростішому випадку при ступінчастому характері збурення: $f(t) = F_b 1(t)$ додаткову помилку e_f в усталеному режимі обчислюють за формулою:

$$e_f = \lim_{s \rightarrow 0} e_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_b}{s} \Phi_e(s) = F_b \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s). \quad (2.3)$$

Аналогічно при лінійній зміні збурення $f(t) = V_b 1(t)$:

$$e_f = V_b \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \Phi_e(s).$$

Приклад 2.2.

Розглядається САУ, структурна схема якої показана на рис. 2.1.

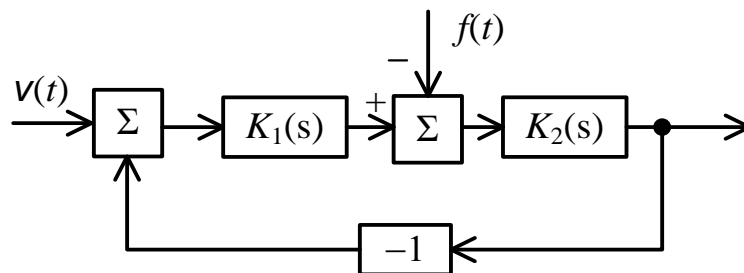


Рис. 2.1. Структурна схема САУ

Визначити усталену помилку по збуренню $f(t)$, якщо дано: $W_1(s) = \frac{10}{1+0,05s}$;
 $W_2(s) = \frac{2}{s}$; $f(t) = 0,2 \cdot 1(t)$.

Знаходимо передавальну функцію замкнутої системи по збуренню:

$$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)}{1+W_1(s)W_2(s)} = \frac{2(1+0,05s)}{s(1+0,05s)+20}.$$

Визначаємо згідно (2.3) усталену помилку:

$$e_f = F_b \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_f(s) = 0,2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(1+0,05s)}{s(1+0,05s)+20} = 0,02.$$

Примітка: отриманий результат вказує на те, що по збуренню система є статичною, в той час як по заданому впливу, вона є астатичною з астатизмом першого порядку.

2.3. Компенсація помилок управління по заданому впливу і збуренню

У теорії управління розроблені умови, при задовільненні яких система в сталому режимі ідеально без помилок відпрацьовує заданий вплив і несприйнятлива до повільно мінливого впливу збурення, наведеного до входу об'єкта управління. Практичне виконання цих умов ґрунтується на введенні в канал неузгодженості $e(s) = v(s) - y(s)$ похідних заданого впливу $sv(s)$; $s^2v(s)$; для компенсації помилки управління по заданому впливу і на використанні інтегруючих зворотних зв'язків для компенсації помилок, обумовлених впливом збурення зовнішнього середовища.

Компенсацію помилок управління по заданому впливу проілюструємо наступним прикладом.

Приклад 2.3.

Нехай задана структурна схема САУ (рис.2.2)

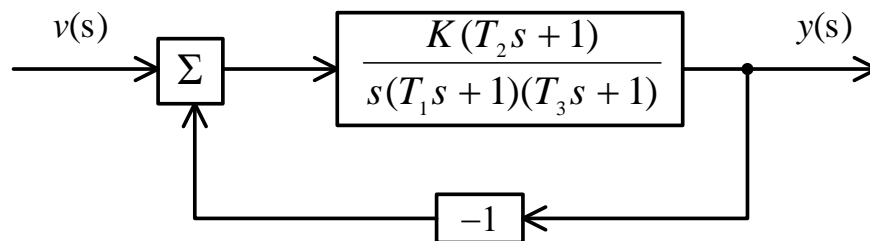


Рис.2.2. Структурна схема САУ

де $W(s) = \frac{K_V(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}$ – передавальна функція розімкнутої САУ.

Приймаємо $K=K_V$ і введемо в канал неузгодженості $e(s) = v(s) - y(s)$ похідні заданого впливу $sv(s)$ (рис.2.3), а також $sv(s)$ та $s^2v(s)$ (рис.2.4).

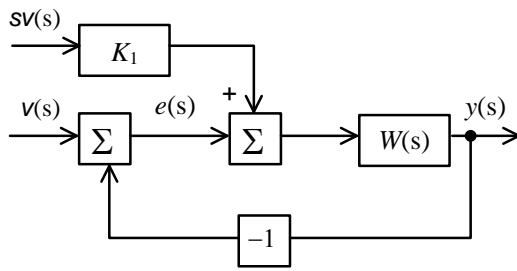


Рис.2.3. Структурна схема САУ

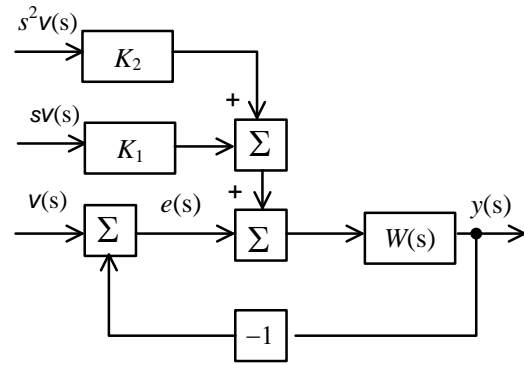


Рис.2.4. Структурна схема САУ

Тепер, якщо для кожної САУ (рис.2.3) та (рис.2.4) знайти передавальну функцію замкнутої САУ за помилкою $\Phi_e(s)$, неважко показати, що при виконанні умови $K_1 = \frac{1}{K_v}$ обидві САУ будуть володіти астатизмом другого порядку по відношенню до заданого впливу, а при виконанні додаткової умови $K_2 = \frac{T_1 + T_3 - T_2}{K_v}$ у другій САУ (рис. 2.4) забезпечується астатизм третього порядку.

Компенсацію помилок від зовнішнього збурення на вході САУ також, як і в попередньому випадку, проілюструємо наступним прикладом.

Приклад 2.4.

Структурна схема САУ (рис.2.5) представлена передавальною функцією інтегруючої ланки з параметром $K_{об}$. Пристрій управління містить інтегратор, охоплений зворотним зв'язком з коефіцієнтом $K_{зз}$. Параметри схеми K_1 , $K_{зз}$ і $K_{об}$ відомі.

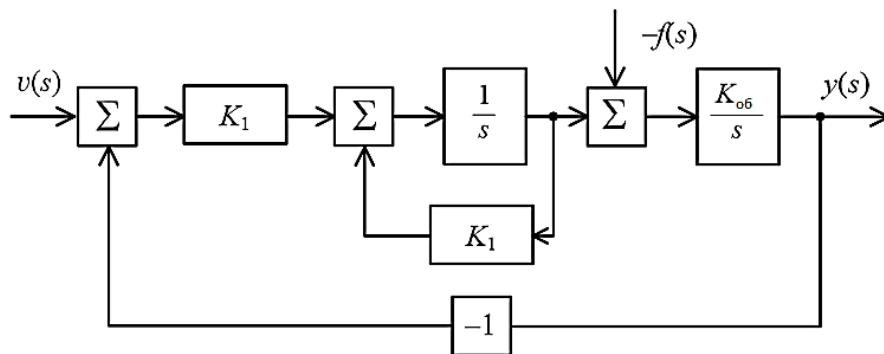


Рис.2.5 Структурна схема САУ

По відношенню до збурення $f(t)$ САУ володіє астатизмом нульового порядку. Щоб підвищити астатизм, а отже компенсувати помилку від зовнішнього впливу, в САУ включається додатковий зворотний зв'язок з одним інтегратором, як показано на рис.2.6 і з двома інтеграторами (рис.2.7), де b_1 і b_2 – деякі постійні коефіцієнти.

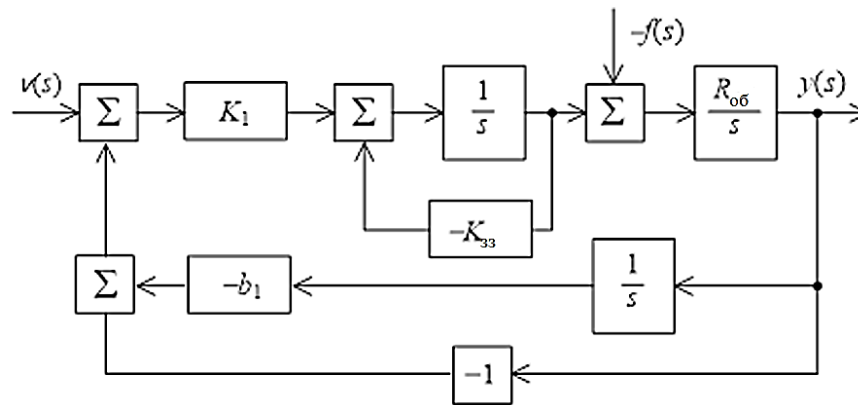


Рис. 2.6. Структурна схема САУ

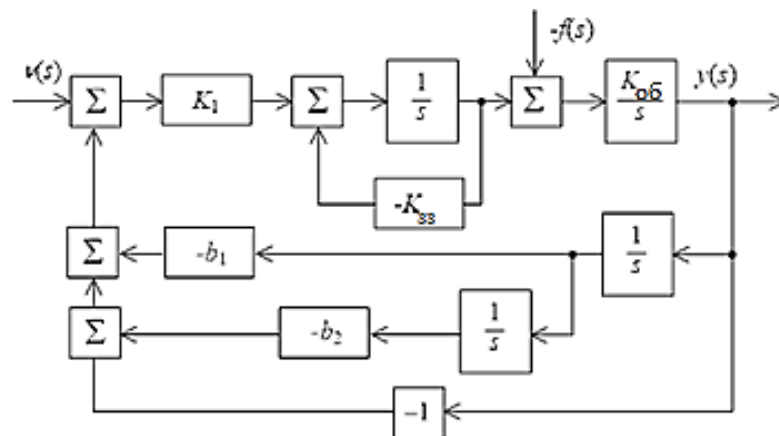


Рис. 2.7. Структурна схема САУ

2.4. Аналіз якості перехідних процесів САУ

Показники якості перехідного процесу кожної конкретної САУ індивідуальні і обумовлені призначенням САУ, особливостями її структурної схеми, параметрами схеми, обмеженнями на керовані процеси та іншими факторами. Все це ускладнює аналіз якості. Щоб спростити процедуру аналізу, його проводять в наступній послідовності.

Спочатку отримують реакцію $h(t)$ замкнутої системи на одиничний ступінчастий вплив, тобто перехідну функцію і визначають її основні показники: перерегулювання – σ (у відсотках); час досягнення перехідним процесом максимального значення – t_{\max} ; час регулювання – t_p ; коливальність, яка визначається числом m коливань щодо сталого значення $h_{\text{см}}$ за час регулювання. Потім вибирають функціонал у вигляді інтегральної квадратичної функції, що відображає вплив сигналу, який задається і збурення на САУ, та обмеження на

процеси управління. Нарешті, обчислюють значення функціоналу, який одночасно характеризує швидкість загасання і розмір відхилень керованої змінної в перехідному процесі.

У теорії автоматичного управління були розроблені і широко застосовуються різні методи аналізу якості. Деякі з них, наприклад, наближені методи оцінки перерегулювання і часу перехідного процесу (регулювання) досі застосовуються на етапах попереднього аналізу і проектування САУ, зокрема:

Наближена оцінка перерегулювання і часу перехідного процесу за еквівалентною передавальною функцією замкнутої системи

Відомо, що інерційні ланки, постійні часу яких на порядок менше найбільшої постійної часу в передавальній функції розімкнутої системи, не роблять помітного впливу на характер перехідного процесу в замкнутій системі і можуть бути виключені. У подібних випадках навіть досить складні стійкі системи вдається описати передавальною функцією виду

$$\Phi(s) = \frac{\omega_{\Pi}^2}{s^2 + 2\xi\omega_{\Pi}s + \omega_{\Pi}^2},$$

зберігаючи при цьому основні властивості вихідної системи.

З коефіцієнтом демпфірування ξ і власною частотою ω_1 коливань системи безпосередньо пов'язані: перерегулювання σ (у відсотках); час досягнення перехідним процесом максимального значення t_{σ} ; час регулювання t_p . В результаті, розрахункові формули для вказаних вище показників мають вигляд:

$$\sigma = 100 \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}); \quad (2.4)$$

$$t_{\sigma} = \frac{\pi}{\omega_{\Pi}\sqrt{1-\xi^2}}; \quad (2.5)$$

$$t_p = \gamma \cdot t_{\sigma}. \quad (2.6)$$

Множник γ вибирають з ряду значень, наведених в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Вибір множників γ

ξ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
γ	3,0	2,3	1,9	1,5	1,36	1,0

Приклад 2.5.

Оцінити перерегулювання σ і час регулювання t_p в системі, структурна схема якої показана на рис.2.8, якщо дано: $T_1 = 0,5$ с; $T_2 = 0,10$ с; $K_1 = 50$; $K_2 = 0,4$; $K_3 = 0,24$.

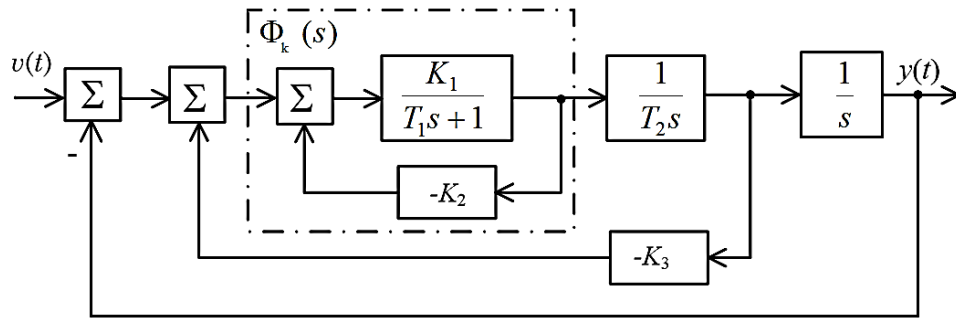


Рис. 2.8. Структурна схема САУ

Передаюча функція $\Phi_k(s)$ – внутрішнього контуру САУ:

$$\Phi_k(s) = \frac{K_1}{T_1 s + (1 + K_1 K_2)} = \frac{\frac{K_1}{1} + K_1 K_2}{1 + s T_1 / 1 + K_1 K_2}.$$

При заданих значеннях K_1 , K_2 і T_1 з похибкою не більше 5 % маємо:

$$\frac{K_1}{1 + K_1 K_2} = \frac{50}{1 + 50 \cdot 0,4} = 2,5; \quad \frac{T_1}{1 + K_1 K_2} = \frac{0,05}{1 + 50 \cdot 0,4} = 0,0024 \text{ с.}$$

Так як постійна часу контуру 0,0024 с на порядок менше постійної часу T_2 ($0,0024 < 0,1 T_2$), то інерційністю контуру нехтуємо. Тоді $\Phi_k(s) \cong \frac{1}{K_2} = 2,5$, а передавальна функція замкнутої системи приймає вигляд:

$$\Phi_k(s) = \frac{\frac{1}{K_1 K_2}}{s^2 + \left(\frac{K_3}{K_2 T_2}\right)s + \frac{1}{K_2 T_2}} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}.$$

Отже, $\omega_n^2 = 25 \text{ с}^{-2}$, $2\xi\omega_n = 6$. Знаходимо $\omega_n = 5 \text{ с}^{-1}$, $\xi = 0,6$. Підставляючи значення ω_n і ξ в (2.4), (2.5) и (2.6), отримуємо $\sigma = 9,4\%$, $t_\sigma = 0,8 \text{ с}$, $t_p = 1,2 \text{ с}$.

Наближена оцінка перерегулювання і часу перехідного процесу за частотними характеристиками

Для типових систем будь-якого порядку (див. розділ 2.4) перерегулювання σ і час перехідного процесу $t_p = \eta\pi/\omega_{зр}$ можна оцінити, використовуючи значення частоти зрізу $\omega_{зр}$, запасу стійкості по фазі $\Delta\varphi(\omega_{зр})$ і дані, наведені в таблиці 2.2.

Як було показано вище з коефіцієнтом демпфірування ξ і власною частотою ω_n коливань системи безпосередньо пов'язані перерегулювання σ (у відсотках); час досягнення перехідним процесом максимального значення t_σ ; час регулювання t_p .

Таблиця 2.2. Визначення показників перехідних процесів

$\Delta\varphi(\omega_{зр})$	39	42	46	50	55
η	5,1	4,2	3,6	3,0	2,2
σ	37	32	26	20	18

2.5. Інтегральна квадратична оцінка якості перехідних процесів

Прямі показники якості перехідних процесів є локальними критеріями якості, тобто кожен з них характеризує одну будь-яку властивість системи. Вони є наочними і широко використовуються при експлуатації автоматичних систем (настроювання апаратури, регламентні роботи) і при їх експериментальному дослідженні на фізичних моделях. Однак у загальному випадку локальні критерії складно обчислити аналітично. Виникає питання: чи можна перехідний процес оцінити більш зручним способом і не використовувати при цьому безпосередньо визначення його окремих показників? Виявляється можна, використовуючи інтегральні оцінки перехідного процесу. Інтегральні оцінки, або інтегральні критерії, є інтегралами від деяких функцій перехідного процесу вихідної координати чи помилки системи в перехідному режимі. Вони являють собою узагальнені критерії, що дозволяють оцінювати якість перехідного процесу і вплив на нього параметрів системи без визначення окремих показників якості. Широко використовуються лінійні та квадратичні інтегральні оцінки.

Для детермінованих впливів з безперервним часом інтегральну квадратичну оцінку перехідного процесу визначають шляхом інтегрування квадратичної функції помилки управління:

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt.$$

Вид функції $e^2(t)$ формують з урахуванням впливів на систему. У загальному випадку її записують як суму квадратів миттєвих значень помилки по заданому впливу $e_v^2(t)$ і помилки по зовнішньому збуренню $e_f^2(t)$:

$$e^2(t) = e_v^2(t) + e_f^2(t).$$

Миттєві значення помилок визначити по структурній схемі вкрай складно, а часом і неможливо. Це складне становище долають, використовуючи теорему Парсеваля, згідно з якою при нульових початкових умовах:

$$\int_0^{\infty} e^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e(s)e(-s)ds, \quad (2.7)$$

де $e(s)$ – зображення помилки по Лапласу при $s = j\omega$.

$$e_v(s) = v(s)\Phi_e(s).$$

Інтегральна квадратична помилка J_f САУ, що вноситься зовнішнім збуренням $f(s)$ визначається як:

$$J_f = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e_f(s)e_f(-s)ds, \quad (2.8)$$

де

$$e_f(s) = f(s)\Phi_f(s).$$

Сумарна інтегральна оцінка перехідного процесу:

$$J = J_v + J_f.$$

Контурні інтеграли в (2.7) і (2.8) обчислюють, використовуючи ітераційну процедуру або таблиці інтегралів. Однак незалежно від способу обчислень інтегралів зображення помилок $e(s)$ і $e_f(s)$ необхідно записувати в суворій відповідності з наступною поліноміальною формою:

$$e_v(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0}, \quad (2.9)$$

$$e_f(s) = \frac{\beta'_{n-1}s^{n-1} + \beta'_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta'_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0}. \quad (2.10)$$

Причому, якщо який-небудь коефіцієнт полінома чисельника відсутній, наприклад β_{n-1} в (2.9) або β'_{n-1} і β'_{n-2} в (2.10), то на місці відсутнього коефіцієнта слід писати число 0. В іншому випадку можна отримати помилковий результат.

Значення контурних інтегралів:

$$\text{при } n = 1 \quad J_v = \frac{\beta_0^2}{2\alpha_0\alpha_1}; J_f = \frac{\beta_0'^2}{2\alpha_0\alpha_1}; \quad (2.11)$$

$$\text{при } n = 2 \quad J_v = \frac{\beta_0^2}{2\alpha_0\alpha_1} + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1\alpha_2}; J_f = \frac{\beta_0'^2}{2\alpha_0\alpha_1} + \frac{\beta_1'^2}{2\alpha_1\alpha_2}. \quad (2.12)$$

Приклад 2.6.

Визначити значення функціоналу $J_v = \int_0^\infty e_v^2(t)dt$, якщо на вхід системи з передавальною функцією в розімкнутому стані $W(s) = \frac{K_a(1+T_2s)}{s^2}$ надходить корисний сигнал $v(t) = (A + Bt) \cdot 1(t)$.

Записуємо передавальну функцію замкнутої системи по помилці:

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^2}{s^2 + K_a T_2 s + K_a},$$

$$\text{і зображення вхідного сигналу: } v(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} = \frac{As+B}{s^2}.$$

Отже,

$$e_v(s) = v(s)\Phi_e(s) = \frac{As+B}{1s^2 + K_a T_2 s + K_a}.$$

Зіставляючи отриманий вираз з виразом (2.9), знаходимо: $\beta_0 = B$; $\beta_1 = A$; $\alpha_0 = K_a$; $\alpha_1 = K_a T_2$; $\alpha_2 = 1$.

Так як $n = 2$, то використовуючи формулу (2.12) отримаємо:

$$J_v = \frac{B_2}{2K_a^2 T_2} + \frac{A^2}{2K_a T_2} = \frac{B^2 + A^2 K_a}{2K_a^2 T_2}.$$

2.6. Кореневі показники якості САУ

Розглянемо основні кореневі показники якості регулювання. Перехідний процес в системі характеризується її передавальною функцією $W(p)$. У разі, коли в чисельнику перехідної функції відсутні нулі, система характеризується полюсами, тобто коренями характеристичного рівняння системи $A(p)$. На комплексній площині можна позначити область розташування коренів даного рівняння при $A(p) = 0$, яка найчастіше приймає форму трапеції, на сторонах і підставі якої розташовуються корені, як зображено на рис. 2.9а.

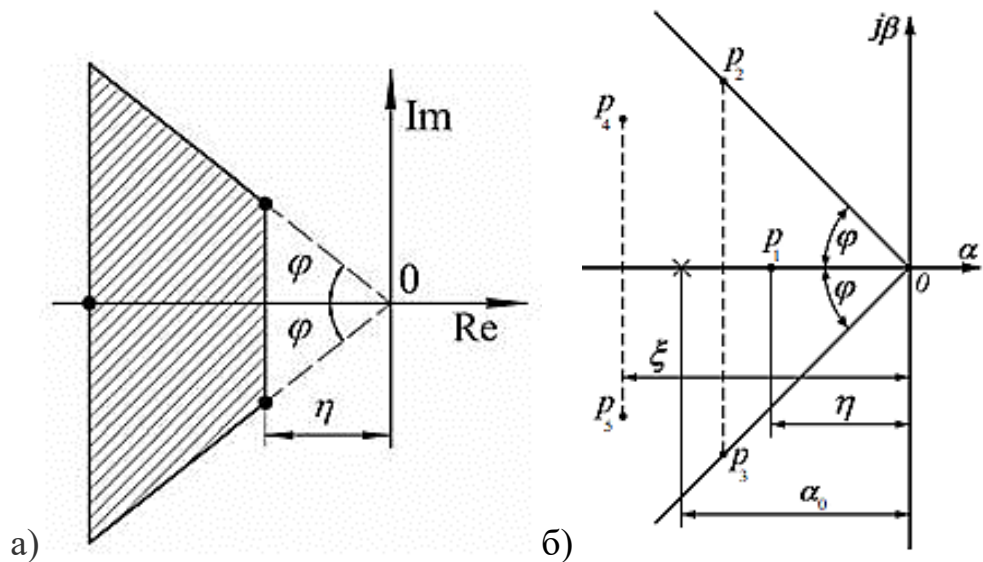


Рис.2.9. Область розташування коренів характеристичного рівняння

Розглянемо основні кореневі показники якості регулювання. Перехідний процес у САУ характеризується її передавальною функцією $W(s)$. У разі, коли в чисельнику перехідної функції відсутні нулі, система характеризується полюсами, тобто корені характеристичного рівняння САУ $D(s)$. На комплексній площині можна позначити область розташування коренів характеристичного рівняння при $D(s) = 0$ (рис. 2.9б).

Основний вплив на характер перехідного процесу надають корені, розташовані ближче до уявної осі, які дають найбільш тривалі складові перехідного процесу і називаються домінуючими.

Відстань від уявної осі до дійсної частини найближчого до неї кореня називається ступенем стійкості η .

За ступенем стійкості η можна приблизно обчислити час перехідного процесу, який визначається по моменту, коли вільна складова з найменшим загасанням зменшиться до величини Δ (рис.2.1)

$$t_p \approx -1/\eta \cdot \ln(1/\Delta)$$

Коливальні властивості САУ зумовлює k -а пара комплексних коренів $p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$, для якої визначено найбільше відношення

$$\mu_k = |\beta_k|/|\alpha_k|$$

або найбільший кут φ між дійсною віссю і променями, що з'єднують початок координат з цими коріннями. В даному випадку такою парою є комплексні корені p_2 і p_3 (рис.2.9).

Чим ближче розташування коренів рівняння до уявної осі, тим повільніше процес загасання. Коливальність САУ має основний вплив на перехідний процес і розраховується як відношення уявної частини β до дійсної частини α домінуючої пари комплексних коренів називають ступенем коливальності μ_d .

За величиною μ_d можна судити про кількість коливань n_k вироблених за час регулювання і про величину перерегулювання σ , так як зі збільшенням коливальності збільшуються значення n_k і σ .

У практичних розрахунках частіше використовують кореневий показник коливальності m_d :

$$m_d = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{1}{\mu_d}.$$

Контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення статичної та астатичної САУ.
2. Які типові впливи використовуються при визначенні помилок в усталених режимах?
3. Назвіть основні показники якості перехідних процесів САУ.
4. Як у САУ компенсуються помилки по заданому впливу і збуренню?
5. Для комплексної радіотехнічної системи, структурна схема якої показана на рис.2.10. визначте перші три коефіцієнти помилки, а також добротність по швидкості і прискоренню.

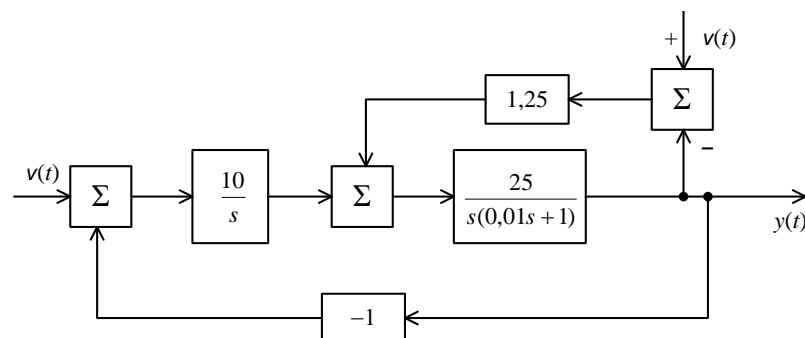


Рис.2.10. Структурна схема САУ

Відповідь: $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; $C_2 = 250$; $D_v = \infty$; $D_a = 250$.

6. Передавальна функція стійкої замкнутої системи має вигляд:

$$\Phi(s) = \frac{B_1 s + B_0}{A_2 s^2 + A_1 s + A_0}.$$

Сформулювати умови, при яких система буде володіти астатизмом: а) нульового порядку; б) першого порядку; в) другого порядку.

Відповідь: а) $B_0 \neq A_0, B_1 \neq A_1$; б) $B_0 = A_0, B_1 \neq A_1$; в) $B_0 = A_0, B_1 = A_1$.

7. Для САУ, передавальна функція якої в розімкнутому стані має вигляд:

$$W(s) = \frac{100(0,12s+1)}{s(0,4s+1)(0,0033s+1)(1+0,008s+0,0002s^2)}.$$

Знайти значення помилки у сталому режимі роботи при впливі, який задається $v(t) = (A + Vt) \cdot 1(t)$, де $A = 0,25$ м; $V = 0,072$ м/хв.

Відповідь: $e_{\text{ycm}} = 0,012$ мм.

8. Визначити добротність САУ з жорстким зворотним зв'язком по швидкості, структурна схема якої наведена на рис.2.11 при наступних умовах: $K_1 = 84,3$ В/рад; $K_2 = 1000$; $K_3 = 0,75$ В·с/рад; $K_4 = 0,015$ рад/В·с; $T = 0,12$ с.

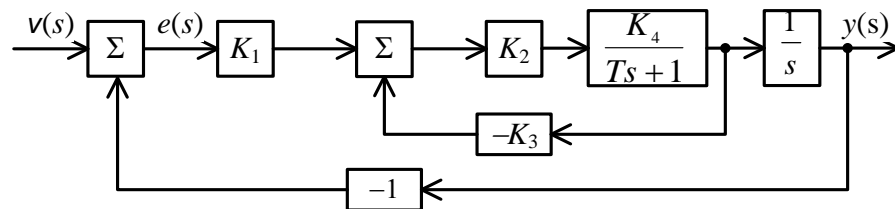


Рис.2.11. Структурна схема САУ з жорстким зворотним зв'язком

Відповідь: $D_v = 105 \text{с}^{-1}$.

9. На вхід САУ, структурна схема якої наведена на рис.2.12, діє корисний сигнал $v(t) = (5 + 1,8t) \cdot 1(t)$, а на об'єкт управління діє збурення $f(t) = 0,04t \cdot 1(t)$.

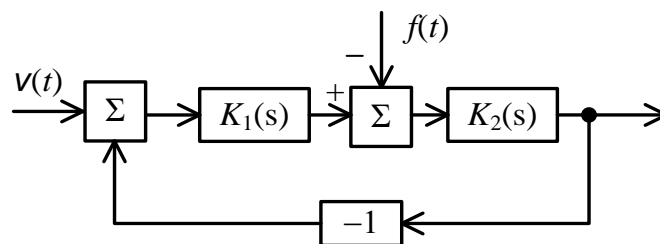


Рис.2.12. Структурна схема САУ

Визначте величину помилки від впливу, який задається і від збурення та порядок астатизму по цих впливах, якщо дано:

а) $W_1(s) = \frac{50(0,1s+1)}{s}$; $W_2(s) = \frac{1,5}{s}$.

б) $W_1(s) = \frac{90(0,2s+1)}{s(0,05s+1)}$; $W_2(s) = \frac{2}{0,7s+1}$.

Відповідь: а) $e_y = 0$; $e_f = 0,02$.

б) $e_y=0.1$; $e_f=\infty$.

10. Для САУ, структурна схема якої показана на рис.2.13:

А. Оцінити перерегулювання σ і час t_p перехідного процесу в САУ, якщо відомі наступні значення параметрів:

а) $K_1 = 100$; $K_2 = 0,12$; $K_3 = 0,10$; $T_1 = 0,18c$; $T_2 = 0,23c$;

б) $K_1 = 100$; $K_2 = 0,12$; $K_3 = 0,167$; $T_1 = 0,18c$; $T_2 = 0,23c$.

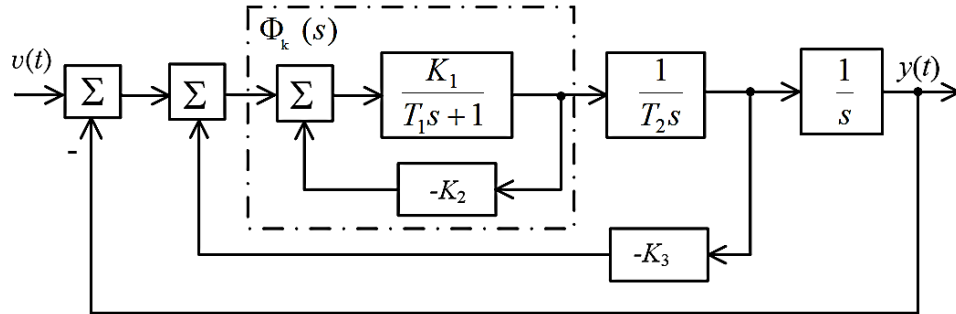


Рис.2.13. Структурна схема САУ

Б. Визначити чисельні значення регульованих коефіцієнтів K_2 і K_3 , якщо дано:

а) $K_1 = 210$; $T_1 = 0,007$ с; $T_2 = 0,014c$; $\sigma \leq 30\%$; $t_p \leq 0,2c$;

б) $K_1 = 180$; $T_1 = 0,007c$; $T_2 = 0,014c$; $\sigma \leq 5\%$; $t_p \leq 0,14c$.

Відповідь: А. а) $\sigma = 37\%$; $t_p = 1,7c$; б) $\sigma = 16\%$; $t_p = 1,1$ с.

Б. а) $K_2 = 0,048$; $K_3 = 0,02$; б) $K_2 = 0,032$; $K_3 = 0,029$.

11. Для наведеної на рис.2.14 структурної схеми системи управління об'єктом, динамічна характеристика якого апроксимована передавальною функцією аперіодичної ланки з динамічними параметрами $K_{об}$ і $T_{об}$, алгебраїчні вирази для обчислення інтегральних квадратичних помилок: J_v , J_f і $J = J_v + J_f$. У пристрої управління реалізований інтегральний закон управління. Параметри схеми K_1 , $K_{об}$ і $T_{об}$ задані. Заданий вплив на вході системи $v(t) = A \cdot 1(t)$, зовнішнє збурення $f(t) = B \cdot 1(t)$, де A і B відомі величини.

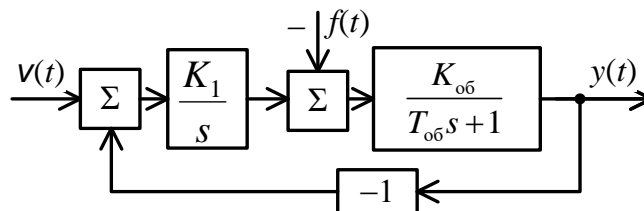


Рис.2.14. Структурна схема САУ

Відповідь: $J_v = 0,5A^2(T_{об} + 1/K_1K_{об})$; $J_f = 0,5B^2K_{об}/K_1$.

12. Знайти значення інтегральної квадратичної оцінки перехідного процесу в системі, структурна схема якої показана на рис.2.15, вважаючи, що заданий вплив на вході системи $v(t) = 1(t)$.

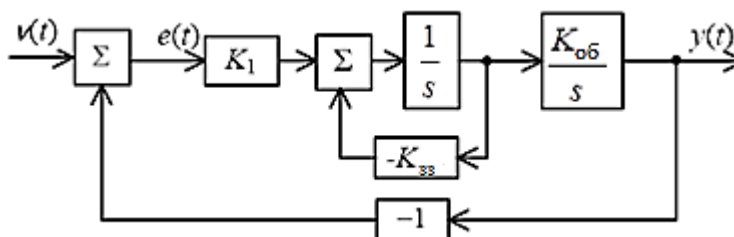


Рис.2.15. Структурна схема САУ

Вихідні дані:

а) $K_1 = 10$; $K_{об} = 0,4$; $K_{o.c.} = 1$;

б) $K_1 = 10$; $K_{об} = 0,4$; $K_{o.c.} = 2$.

Відповідь: а) $J = 0,025$; б) $J = 0,02$.

13. Для системи, структурна схема якої показана на рис.2.15 визначити коефіцієнт зворотного зв'язку $K_{зз}$, коефіцієнт демпфірування системи ξ , перерегулювання σ перехідного процесу, час досягнення перехідним процесом максимуму t_σ , при наступних вихідних даних: $A = 0,4$; $K_1 K_{об} = 16$; $J_v = 0,04$;

Відповідь: $K_{зз} = 4$; $\xi = 0,5$; $\sigma = 16\%$; $t_\sigma = 1,15$ с.

РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САУ

3.1. Визначення стійкості лінійних САУ

Однією з найважливіших характеристик САУ поряд з точністю є стійкість. Причому, якщо показники точності визначають ступінь корисності та ефективності системи, то від стійкості залежить працездатність системи. Тому проблема стійкості систем є однією з центральних в теорії автоматичного управління. Стійкість САУ - це властивість системи повертатися в початковий стан рівноваги після припинення впливу, що вивів систему з цього стану. Відомо, що вільний рух лінійної або лінеаризованої САУ описується однорідним диференціальним рівнянням:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x(t) + a_n x(t) = 0, \quad (3.1)$$

де $x(t) = x_{bc}(t)$ - вільна складова вихідної величини САУ. При цьому вимушена складова вихідної величини САУ, що залежить від виду зовнішнього впливу і правої частини диференціального рівняння, на стійкість не впливає.

Отже можна зазначити, що САУ є стійкою, якщо вільна складова $x_{bc}(t)$ перехідного процесу з плином часу прагне до нуля. САУ є нестійкою в тому випадку, якщо вільна складова прагне до нескінченності, САУ знаходиться на межі стійкості, якщо вільна складова не прагне ні до нуля, ні до нескінченності. Дамо математичне визначення поняття «стійкість». Необхідною і достатньою умовою стійкості лінійних систем АУ є від'ємність реальних частин коренів характеристичного рівняння. Якщо реальна частина одного кореня дорівнює нулю, а реальні частини інших коренів – від'ємні, то система знаходиться на межі стійкості. При наявності кратних коренів рівняння з нульовими реальними частинами система буде нестійкою. Аналітичний розв'язок алгебраїчних рівнянь 4-го, 5-го і більш високих порядків ускладнене. Тому виникає питання: як визначити знаки реальних частин коренів характеристичного рівняння, а отже з'ясувати стійкість системи, не вирішуючи характеристичного рівняння? Відповідь на це питання було надане у формулюванні критеріїв стійкості.

Критерії стійкості можуть бути алгебраїчними і частотними. Алгебраїчні критерії встановлюють необхідні і достатні умови від'ємності коренів у формі обмежень, що накладаються на певні комбінації коефіцієнтів характеристичного рівняння. Частотні критерії визначають зв'язок між стійкістю системи автоматичного управління і формою частотних характеристик системи.

Для лінійних безперервних систем використовуються досить досконалі методи, відомі як критерії стійкості Вишнеградського (який використовується для систем 3-го порядку), Гурвіца, Рауса, Михайлова, Найквіста і методи логарифмічних частотних характеристик (ЛАЧХ).

Ці критерії еквівалентні. Кожен з них визначає умови, за яких корені характеристичного рівняння однорідного диференціального рівняння (3.1)

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.2)$$

будуть мати від'ємні дійсні частини, а система асимптотично стійкою. Один від одного критерії відрізняються видом вихідної інформації і складністю формул, за якими можна судити про стійкість системи, про вплив параметрів системи на її стійкість.

Найпростішим критерієм стійкості є умова додатності коефіцієнтів характеристичного рівняння. Додатність коефіцієнтів рівняння (3.2) є необхідною (але не достатньою) умовою стійкості САУ. Це означає, що якщо всі коефіцієнти додатні, то система може бути стійкою або нестійкою. Але якщо хоча б один коефіцієнт рівняння від'ємний або дорівнює нулю, то система нестійка.

3.2. Алгебраїчні критерії стійкості САУ

Найбільш поширені в інженерній практиці дослідження стійкості лінійних САУ є алгебраїчні критерії, які дозволяють по коефіцієнтах характеристичного рівняння замкненої системи будь-якого порядку, визначити, чи всі корені знаходяться у лівій півплощині, не розв'язуючи самого рівняння.

Критерій Вишнєградського був сформульований саме цим вченим, засновником теорії автоматичного регулювання, у 1876 році для систем 3-го порядку. За цим критерієм система вважається стійкою, якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні і добуток коефіцієнтів середніх членів характеристичного рівняння перевищує добуток крайніх членів рівняння.

Критерій Гурвіца був сформульований і доведений в 1895 р німецьким математиком Гурвіцем, який розробив свій критерій, вирішуючи чисто математичну задачу дослідження стійкості рішень лінійного диференціального рівняння.

Якщо система має характеристичне рівняння, представлене в загальному вигляді як (3.2), то порядок складання визначника Гурвіца формується наступною послідовністю дій:

1. Елемент першого стовпця першого рядка визначника записується коефіцієнт a_{n-1} .

2. На головній діагоналі розташовуються коефіцієнти характеристичного рівняння (3.2) з послідовно спадаючими індексами. При цьому в останньому стовпці останнього рядка визначника записується коефіцієнт a_0 .

3. Починаючи від коефіцієнтів, що стоять на головній діагоналі, заповнюються стовпці визначника так, щоб індекси коефіцієнтів, розташованих над коефіцієнтами головної діагоналі, послідовно зменшували, а коефіцієнтів, розташованих під діагональними коефіцієнтами, – послідовно зростали. Якщо в процесі заповнення стовпця визначника індекс коефіцієнта досягає значення n або 0, то подальше заповнення стовпця здійснюється нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Формулювання критерія Гурвіца: для того щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб всі діагональні мінори визначника Гурвіца були додатними, т. е.

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} > 0; \Delta_n = \det G > 0.$$

Кожний діагональний мінор Δ_{n-1} визначника Гурвіца отримують з попереднього мінору Δ_n шляхом видалення нижнього рядка і правого стовпця визначника. Нижчий діагональний мінор Гурвіца $\Delta_1 = a_{n-1}$

Примітка. САУ знаходиться на межі стійкості, якщо всі визначники Гурвіца нижчого порядку додатні, а головний визначник дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \dots \Delta_n = 0.$$

Якщо $a_0 = 0$, а $\Delta_{n-1} > 0$, то один з коренів характеристичного рівняння САУ дорівнює нулю (система знаходиться на межі стійкості), якщо ж $a_0 \neq 0$,

а $\Delta_{n-1}=0$, то САУ знаходиться на межі коливальної стійкості (два комплексно сполучених кореня знаходяться на уявній осі).

Приклад 3.1.

Для характеристичного рівняння САУ третього порядку

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

за критерієм стійкості Гурвіца визначити вимоги до параметрів САУ.

Необхідні та достатні умови стійкості за визначником Гурвіца:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

визначаються як:

$$a_0 > 0;$$

$$\Delta_1 = |a_1| = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \Delta_2 > 0.$$

Не важко переконатися, що для стійкості САУ третього порядку необхідною умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння. Однак, цих умов недостатньо, тому що з другого мінору видно, що при додатності всіх коефіцієнтів розглянутий мінор буде додатним тільки тоді, коли перший доданок більше другого. Таким чином, в САУ третього порядку для стійкості до необхідних умов додається ще умова достатності $\Delta_2 > 0$.

Критерій Рауса-Гурвіца доцільно використовувати при аналізі стійкості систем вище четвертого порядку. Стійкість лінійної САУ досліджують за коефіцієнтами характеристичного рівняння (3.2) за рахунок простих математичних викладок у вигляді таблиці розрахункових даних (Таблиця 3.1) Методика оформлення таблиці ілюструється на прикладі характеристичного рівняння (3.2) при $n = 5$.

Таблиця 3.1.Розрахункові дані

Номер рядка	Математичні викладки				Формули для обчислень
	Номер стовпця				
	1	2	3	4	
1	r_0	r_0'	r_0''		$r_0 = a_0 \quad r_0' = a_2$
2	$\frac{r_0'}{r_0}$	$\frac{r_0''}{r_0}$			$r_0'' = a_4$
3	r_1	r_1'	r_1''		$r_1 = a_1 \quad r_1' = a_3$
4	$\frac{r_1'}{r_1}$	$\frac{r_1''}{r_1}$			$r_1'' = a_5$
5	r_2	r_2'			$r_2 = \frac{r_0'}{r_0} - \frac{r_1'}{r_1}$
6	$\frac{r_2'}{r_2}$	0			$r_2' = \frac{r_0''}{r_0} - \frac{r_1''}{r_1}$
7	r_3	r_3'			$r_3 = \frac{r_1'}{r_1} - \frac{r_2'}{r_2}$
8	$\frac{r_3'}{r_3}$	0			$r_3' = \frac{r_1''}{r_1} - 0$
9	r_4				$r_4 = \frac{r_2'}{r_2} - \frac{r_3'}{r_3}$

Формулювання критерію стійкості Рауса-Гурвіца: Система стійка, якщо всі коефіцієнти першого стовпця сконструйованої зазначеним вище способом таблиці додатні.

Приклад 3.2.

Визначення стійкості с електроприводу, який стежить. Характеристичне рівняння електроприводу:

$$0,0001s^5 + 0,0117s^4 + 0,188s^3 + 0,98s^2 + 1,8s + 7 = 0.$$

Рішення: Складаємо таблицю розрахункових даних за правилами, сформульованими в таблиці 3.2:

Таблиця 3.2 – Цифрові дані

0,0001	0,188	1,8
1880	18000	0
0,0117	0,98	7
83,76	598,3	0
1796,2	17402	
9,688	0	
74,072	598,3	
8,1	0	
1,6	0	

Всі елементи першого стовпця додатні. Отже, електропривод стійкий.

3.3. Побудова області стійкості САУ

Область стійкості - це геометричне місце точок на площині параметрів системи, які відповідають її стійкому стану. Номограма з вказаною на ній областю стійкості, замінює обчислення за формулами, виконанням найпростіших геометричних побудов за допомогою лінійки і зчитування відліків. Застосовується для дослідження залежності стійкості від параметрів системи, її чутливості до зміни параметрів за умовами стійкості, для обґрунтованого вибору регульованих параметрів в процесі налагодження системи.

Методику побудови області стійкості при використанні критерію Гурвіца проілюструємо на прикладі САУ, структурна схема якої показана на рис. 3.1.

Приклад 3.3.

Використовуючи критерій Гурвіца, побудувати область стійкості в площині параметрів (K, T_2) при наступних даних: $T_1 = 0,25$ с; $T_3 = 0,1$ с; $\Delta T_2 = 0,05T_2$; коефіцієнт запасу стійкості $\alpha = 3$.

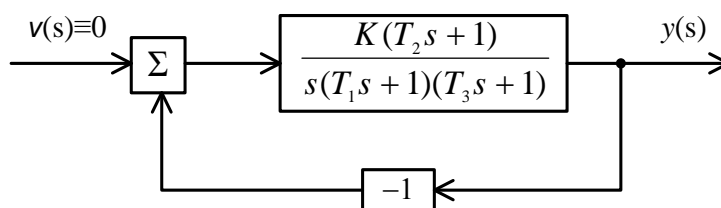


Рис. 3.1. Структурна схема САУ

Записуємо характеристичне рівняння: $T_1 T_3 s^3 + (T_3 + T_1)s^2 + (1 + K T_2)s + K = 0$.

Використовуючи результати прикладу 3.1 записуємо умову стійкості:

$$(T_1 + T_3)(1 + K T_2) - T_1 T_3 K > 0,$$

звідки: $0 < K < \frac{1}{\frac{T_1 T_3}{T_1 + T_3} - T_2}$.

Межа між областю стійкості і нестійкості в площині параметрів K і T_2 визначається рівняннями: $T_{2\text{ гр}} = \frac{T_1 T_3}{T_1 + T_3}$; $K_{\text{гр}} = \frac{1}{T_{\text{гр}} - T_2}$; $0 \leq T_2 \leq T_{2\text{ гр}}$, які при $T_1 = 0,25$ с і $T_3 = 0,1$ с приймають вигляд: $T_{\text{гр}} = 0,071$ с, $K_{\text{гр}} = 1/(0,071 - T_2)$. Межі області стійкості показані на малюнку 3.2.

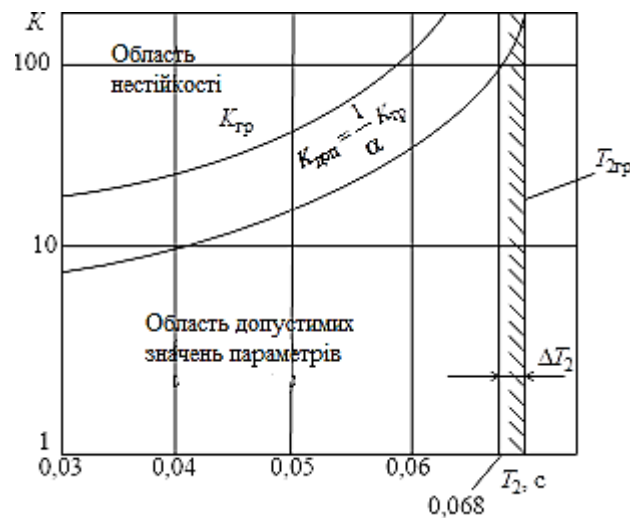


Рис. 3.2. Межі області стійкості

Система буде стійкою при будь-яких налаштуваннях $0 \leq T_2 \leq T_{2\text{ гр}}$ і будь-яких значеннях K , які лежать нижче значень $K_{\text{гр}}$. При будь-яких інших значеннях T_2 і K система нестійка.

Система схильна до нестійкості при значеннях коефіцієнта K близьких до граничних і при несприятливих змінах постійних часу T_1 і T_3 може втратити стійкість. Необхідно враховувати і те, що структурна схема, показана на рис 2.1, є лише уявленням про динаміку реальної системи. Тому на номограмах виділяють область допустимих значень параметрів, при яких в реальній системі гарантується дотримання умов стійкості.

В даній задачі межа цієї області при $\alpha = 3$ і $\Delta T_2 = 0,05 T_2$ визначається наступною рівністю: $K_{\text{гр}} = 0,32 \frac{1}{0,068 - T_2}$.

3.4. Частотні критерії стійкості САУ

Якщо система автоматичного керування описується математичними моделями, які застосовують частотні характеристики, тобто через комплексний коефіцієнт передачі $W(j\omega)$ системи, то істотно, що стійкість системи повинна також визначатися цими характеристиками, тобто через частотні критерії стійкості.

Частотні критерії можна розділити на дві групи:

- частотні критерії, які характеризуються тим, що досліджується безпосередньо замкнута система (критерій Михайлова).
- частотні критерії, які характеризуються тим, що стійкість системи визначається по частотним характеристикам умовно розімкнутої системи (критерій Найквіста).

У основі всіх частотних критеріїв лежить принцип аргументу.

Принцип аргументу

Розглянемо характеристичне рівняння $1 + W_p(s) = 0$ замкненої системи (Рис.3.3)

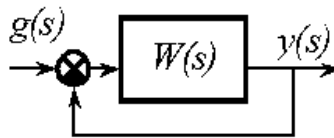


Рис.3.3 Узагальнена схема замкнутої системи

Нехай

$$W_p(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}; \quad W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1+W_p(s)} = \frac{B_m(s)}{A_n(s)+B_m(s)}. \quad (3.3)$$

Вираз $1 + W_p(s) = 0$ приймає вигляд:

$$\frac{A_n(s)+B_m(s)}{A_n(s)} = 1 + W_p(s),$$

який з урахуванням коренів чисельника та знаменника можна записати у вигляді множників:

$$1 + W_p(s) = \frac{A_n(s)+B_m(s)}{A_n(s)} = \frac{\alpha_0(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}{a_0(s-q_1)(s-q_2)\dots(s-q_n)},$$

де чисельник виражає характеристичне рівняння замкненої системи, а знаменник – характеристичне рівняння умовно розімкненої системи. Перехід до частотних характеристик виконується за допомогою перетворення $s = j\omega$. При цьому, співвідношення приймає вигляд:

$$1 + W_p(j\omega) = \frac{A_n(j\omega) + B_m(j\omega)}{A_n(j\omega)} = \frac{\alpha_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n)}{\alpha_0(j\omega - q_1)(j\omega - q_2) \dots (j\omega - q_n)} = \frac{F_3(j\omega)}{F_p(j\omega)},$$

де

$F_3(j\omega) = F_3(\omega)e^{j\phi_3(\omega)}$ – характеристичний вектор замкненої системи;

$F_p(j\omega) = F_p(\omega)e^{j\phi_p(\omega)}$ – характеристичний вектор умовно розімкненої системи.

Розглянемо поведінку характеристичного вектору при зміні частоти ω . Для цього будемо досліджувати поведінку елементарного вектора $(j\omega - s_i)$ за умови $0 < \omega < \infty$.

При зміні частоти ω від 0 до ∞ кінець вектору $(j\omega - s_i)$, який лежить на уявній осі, буде рухатись по уявній осі від 0 до ∞ , а сам вектор повернеться на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки, тобто у додатному напрямку.

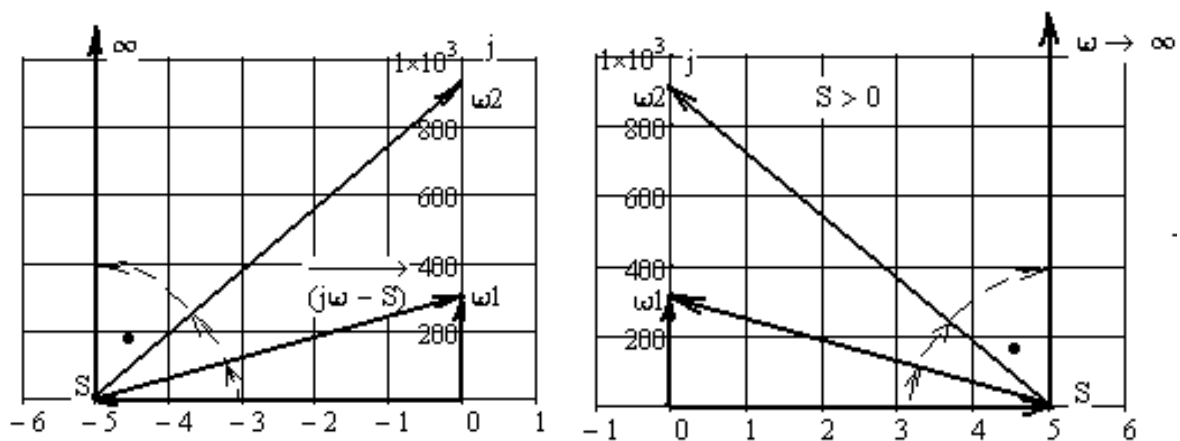


Рис. 3.4 До поняття принципу аргументу для неперервних систем

Якщо корінь буде правий, тобто лежить у правій півплощині s , то приріст аргументу буде здійснюватись у протилежному напрямку, тобто у від'ємному напрямку.

Отже, якщо $s_i = -\lambda_i$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg(j\omega - s_i) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Якщо $s_i = \lambda_i$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg(j\omega - s_i) = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.5)$$

Визначимо, як буде змінюватись приріст аргументу для характеристичного вектору $F_3(j\omega)$.

Так як $F_3(j\omega) = \alpha_0 \prod_{i=1}^n (j\omega - s_i)$, а всі s_i лежать зліва відносно уявної осі, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg F_3(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - s_i) = n \frac{\pi}{2}.$$

Якщо ж декілька коренів характеристичного вектору $F_3(j\omega)$ будуть правими, то

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - l) \frac{\pi}{2} - l \frac{\pi}{2} = (n - 2l) \frac{\pi}{2}. \quad (3.6)$$

Зміна приросту аргументу для характеристичного вектору $F_p(j\omega)$ буде виконуватись аналогічно: якщо всі g_i лежать зліва відносно уявної осі, то

$$F_p(j\omega) = a_0 \prod_{i=1}^n (j\omega - q_i);$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg F_p(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - q_i) = n \frac{\pi}{2}.$$

Аналогічно можна визначити і повний приріст вектору характеристичного рівняння $[1 + W_p(j\omega)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg F(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg[1 + W_p(j\omega)] = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg F_3(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \arg F_p(j\omega). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Критерій Михайлова

Графоаналітичний критерій Михайлова відноситься до частотних методів аналізу систем і дозволяє судити про стійкість замкнутої системи з поведінки годографа характеристичного вектору (годографа Михайлова) на комплексній площині.

Розглянемо характеристичний поліном замкнутої системи $W_{\text{л}}(j\omega)$, де s_i ($i = 1, n$) – корені характеристичного рівняння $\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$. Якщо всі корені s_i характеристичного рівняння розташовані у лівій півплощині,

то характеристичний вектор $F_3(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ буде обертатися на кут A ніде не перетвориться у нуль для стійкої системи.

Можна показати, що приріст аргументу $\Delta \arg F(j\omega)$ буде здійснюватись монотонно.

Дійсно, якщо $s_i = -\alpha_i$, то $\arg(j\omega - s_i) = \arg(j\omega + \alpha_i) = \arctg \frac{\omega}{\alpha_i}$, а похідна по ω :

$$\frac{d \arg(j\omega + \alpha_i)}{d\omega} = \frac{d\left(\arctg \frac{\omega}{\alpha_i}\right)}{d\omega} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_i}\right)^2},$$

завжди більше нуля. Отже, функція змінюється монотонно.

Тому система автоматичного керування буде стійкою, якщо годограф Михайлова, при зміні ω від 0 до ∞ , послідовно пройде n квадрантів проти годинникової стрілки, починаючи від додатної дійсної осі, ніде не перетворюючись у нуль (Рис.3.5).

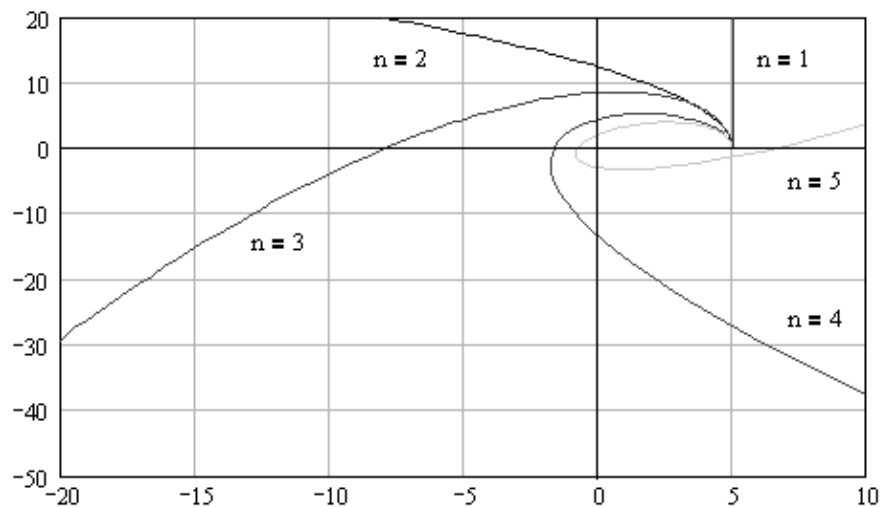


Рис.3.5 Годографи Михайлова для стійких систем

На Рис.3.6 показані годографи характеристичних рівнянь для випадків нестійких систем керування.

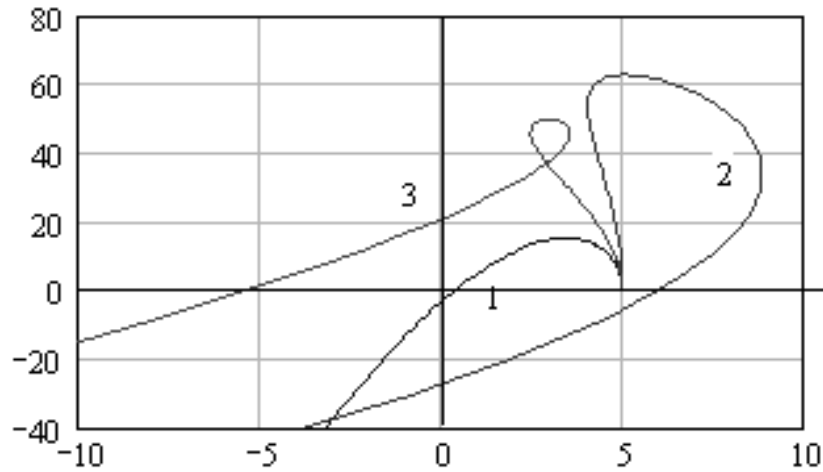


Рис. 3.6 Годографи Михайлова для нестійких систем

Для стійкої системи можна визначити, що годограф $F_3(j\omega)$ послідовно перетинає дійсну та уявну осі. Тому значення ω , при яких перетинається відповідна вісь є коренями рівнянь:

$$V(\omega) = 0, U(\omega) = 0, \quad (3.8)$$

де $V(\omega)$ та $U(\omega)$ визначаються із $F_3(j\omega)$.

$$F_3(j\omega) = V(\omega) + jU(\omega)$$

Функції $V(\omega)$ та $U(\omega)$ можна зобразити графічно (Рис.3.7). Точки перетину кривих з віссю абсцис дають значення коренів цих рівнянь.

Можна привести друге формулювання критерію стійкості Михайлова. Система автоматичного управління буде стійкою тоді, коли дійсна $V(\omega)$ та уявна $U(\omega)$ функції Михайлова прирівняні до нуля мають всі дійсні корені, які перемежуються, при тому загальна кількість цих коренів дорівнює порядку характеристичного рівняння n при $\omega = 0$ і задовольняються умови: $V(0) > 0$, і перша похідна від $U(0) > 0$. Отже, для стійкої системи необхідною умовою є дійсність та послідовність чергування коренів рівнянь (3.7)

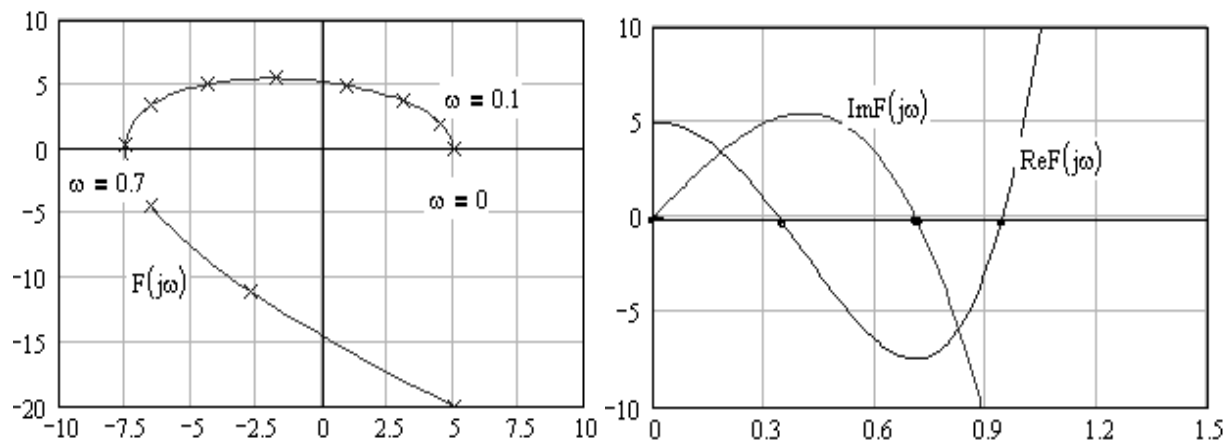


Рис.3.7 Послідовність чергування коренів $F_3(j\omega)$ для стійкої системи

Треба визначити, що при підвищенні коефіцієнту підсилювання системи K_p , коли постійні T_i часу є сталими, годограф $F_3(j\omega)$, тобто годограф Михайлова буде зміщуватись вправо без зміни своєї форми.

При деякому значенні $K_{кр}$ годограф $F_3(j\omega)$ пройде через початок координат, що свідчить про вихід системи на межу стійкості. Отже, якщо є графік годографу Михайлова, то можна визначити критичні $K_{кр}$ коефіцієнт передачі досліджуваної системи.

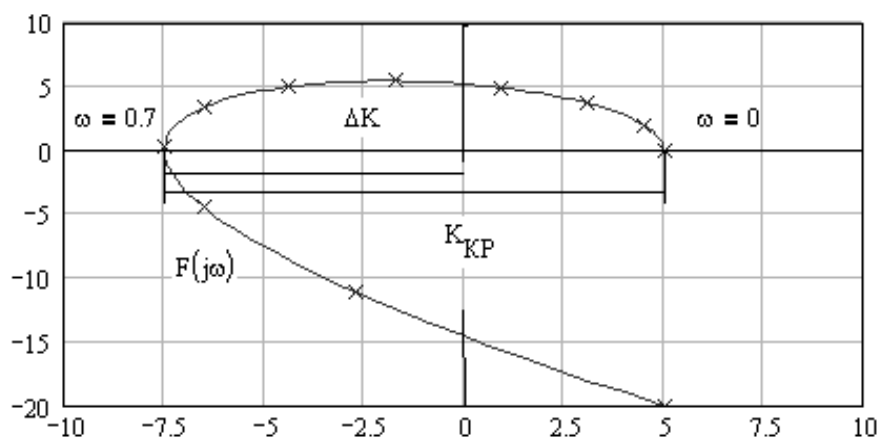


Рис.3.8 Визначення $K_{кр}$ по годографу Михайлова

Практичне використання критерію Михайлова покажемо на наступному прикладі.

Приклад 3.4.

Визначення діапазону зміни коефіцієнта посилення електроприводу, який стежить, використовуючи критерій Михайлова. Характеристичне рівняння електроприводу задано у вигляді:

$$0,0001s^5 + 0,0117s^4 + 0,188s^3 + 0,98s^2 + 1,8s + K = 0.$$

Рішення. Підставимо в характеристичне рівняння $s = j\omega$. Отримаємо:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

де $U(\omega) = K - 0,98\omega^2 + 0,0117\omega^4$; $V(\omega) = 1,8\omega - 0,188\omega^3 + 0,0001\omega^5$.

Прирівнюємо вирази для $U(\omega)$ і $V(\omega)$ нулю: $U(\omega) = 0,0117\omega^4 - 0,98\omega^2 + K = 0$, $V(\omega) = \omega(0,0001\omega^4 - 0,188\omega^2 + 1,8) = 0$. Знаходимо корені рівняння: $V(\omega) = 0$: $\omega_1 = 0,0\text{с}^{-1}$; $\omega_2^2 = 10\text{с}^{-1}$; $\omega_3^2 = 1870\text{с}^{-1}$.

Підставляючи по черзі ці значення в рівняння $U(\omega) = 0$, отримаємо три критичних значення коефіцієнта посилення розімкнутого приводу:

$$K_1=0; K_2= 8,6; K_3= -39082.$$

Значення $K_1=0$ суперечить фізичному змісту, а від'ємне значення K_3 вказує на неправильне з'єднання елементів в системі і має бути відкинута. Отже, коефіцієнт посилення розімкнутої системи необхідно вибирати з діапазону: $0 < K < 8,63$.

Додатково приклади визначення стійкості по годографу Михайлова проілюстровані на рис.3.9.

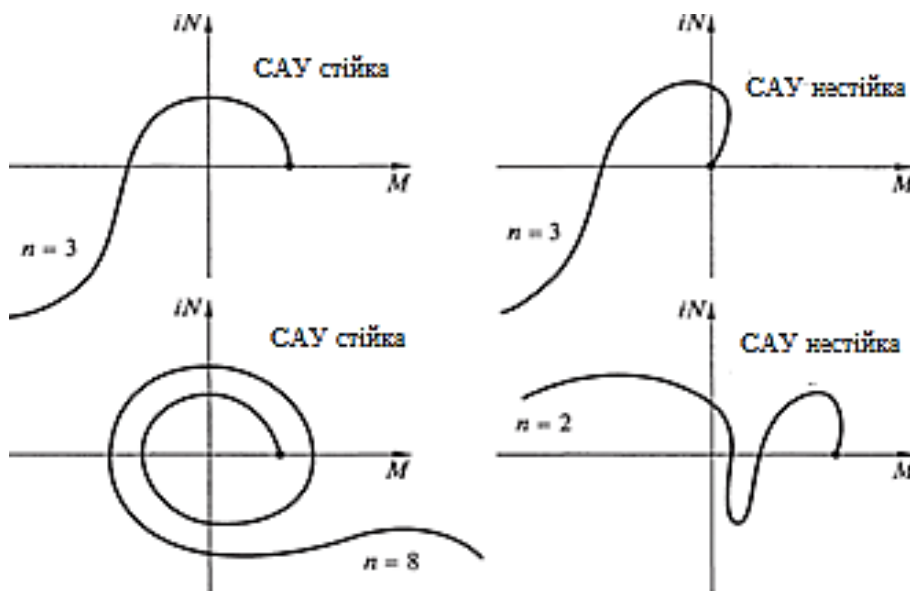


Рис.3.9. Визначення стійкості САУ за критерієм Михайлова

Критерій Найквіста. Алгебраїчні критерії та критерій стійкості Михайлова припускають знання характеристичного рівняння у вигляді полінома.

Однак отримати цей поліном досить складно, а часом і неможливо. Крім того, вони дають слабе уявлення про ступінь стійкості замкнутої системи і про вплив параметрів на її стійкість. Критерій Найквіста вільний від цих недоліків. Він дозволяє судити про стійкість замкнутої системи за характеристиками розімкнутої системи, в тому числі і за експериментальними даними. Дає відомості про ступінь стійкості; показує, як можна стабілізувати систему.

Формулювання критерію Найквіста: для забезпечення стійкості замкнутої САУ необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова частотна характеристика стійкої розімкнутої системи при зміні ω від 0 до ∞ не охоплювала точку з координатами $(-1; j_0)$

Приклади визначення стійкості САУ за критерієм Найквіста наведені на рис.3.10.

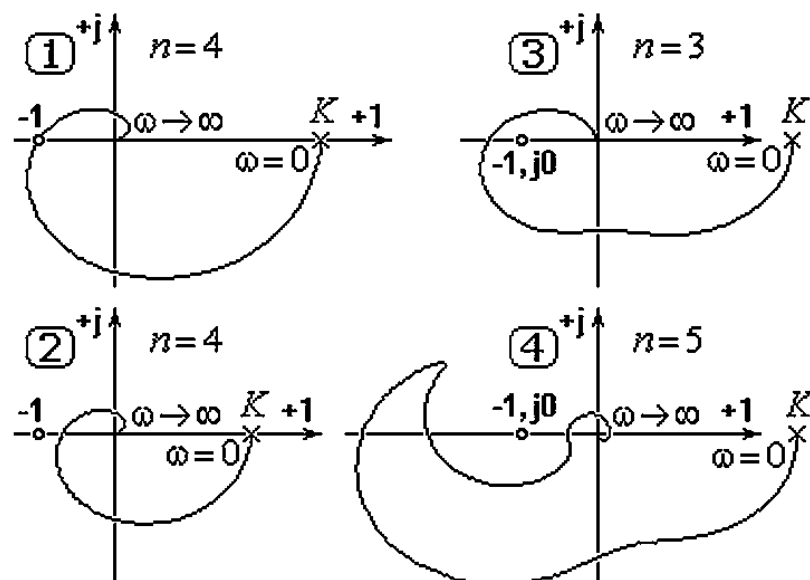


Рис.3.10. Визначення стійкості САУ за критерієм Найквіста (1-САУ на межі стійкості; 2-стійка САУ; 3-нестійка САУ; 4-умовно стійка САУ (тільки при зміні K в деякому діапазоні))

Наявність нестійкості системи в розімкнутому стані не означає, що система буде нестійкою в замкнутому стані. Однак формулювання критерію стійкості Найквіста при цьому дещо змінюється. Нехай знаменник передавальної функції розімкнутої системи містить l коренів у правій напівплощині і $n - l$ коренів — у

лівій. Тоді при зміні частоти від 0 до ∞ для стійкості в замкнутому стані системи результуючий кут повороту годографа вектору $W(j\omega)$ відносно точки $(-1; j_0)$ повинен скласти $\psi = \psi_1 - \psi_2 = n\pi - l\pi = l\pi$, тобто амплітудно-фазова характеристика повинна охопити точку $(-1; j_0)$ стільки разів, скільки коренів у правій півплощині містить знаменник передаточної функції розімкнутої системи. Іншими словами, формулювання критерію Найквіста в найзагальнішому випадку: для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи при зміні частоти від 0 до ∞ охоплювала точку $(-1; j_0)$ на кут $l\pi$ проти годинникової стрілки, де l – число коренів розімкнутої системи в правій напівплощині. Наведене раніше формулювання критерію Найквіста для випадку, коли $l = 0$, впливає звідси як окремий випадок. Так як критерій Найквіста - Михайлова використовує експериментально зняті амплітудно-фазові частотні характеристики (АФЧХ), то можна надати його фізичну трактовку.

1). Якщо система знаходиться на межі стійкості, в цьому випадку АФЧХ розімкнутої системи при деякій частоті ω (частоті зрізу) проходить точку з координатами $(-1; j_0)$. Це означає, що при даній частоті ω_z амплітуда вихідного сигналу дорівнює амплітуді вхідного сигналу, а його фаза прямо протилежна фазі вхідного сигналу, тобто зсув по фазі між ними дорівнює $-\pi$. При замиканні ланцюга основний зворотний зв'язок повинен бути від'ємним, тобто фазу вихідного сигналу при подачі його на вхід системи слід повернути на π . Крім того, слід відімкнути зовнішнє джерело коливальних, яке подавало на вхід системи гармонійні коливання. Таким чином, при замиканні системи вихідний сигнал буде співпадати за амплітудою і фазою з вхідним сигналом, а це означає, що при замиканні нічого не зміниться. В системі встановляться незгасаючі коливання, які будуть підтримуватись не за рахунок енергії вхідного сигналу (він вимкнений), а за рахунок енергії самої системи. Тобто, система знаходиться на межі стійкості.

2). Якщо АФЧХ при частоті зрізу ω_z перетинає дійсну вісь зліва від точки $(-1; j_0)$, то вона охоплює дану точку. Це свідчить про те, що в розімкнутій системі

амплітуда вихідного сигналу на частоті ω_z більше амплітуди вхідного сигналу, а зсув по фазі між ними дорівнює $-\pi$. При замиканні системи та вимкненні джерела зовнішніх коливань, амплітуда вихідних коливань буде зростати, а це означає, що система буде нестійкою.

3). Якщо система не охоплює точку $(-1; j_0)$, то при зсуві по фазі, який дорівнює $-\pi$, амплітуда вихідного сигналу менша за амплітуду вхідного. В даному випадку при замиканні системи коливання в ній будуть затухати, а система буде стійкою.

Одним з важливих показників при дослідженні працездатності САУ, зокрема її стійкості, є запас стійкості по амплітуді і по фазі.

3.5. Запас стійкості САУ

Запас стійкості САУ являє собою кількісну характеристику видалення стійкості певної САУ від межі стійкості. Запас стійкості розширює діапазон зміни внутрішніх параметрів САУ до певних значень і більш детально характеризує перехідні процеси в системі. З урахуванням того, яким критерієм стійкості користуються при розрахунку, визначається запас стійкості. Наприклад, використовуючи критерій Найквіста, можна визначити запаси стійкості по амплітуді і по фазі наступним чином.

Запас стійкості по амплітуді (модулю) дорівнює відстані h на дійсній осі, між точкою $(-1; j_0)$ і найближчою точкою перетину годографа АФЧХ з цією ж віссю. Графічне представлення запасу стійкості по амплітуді зображено на рис.3.11.

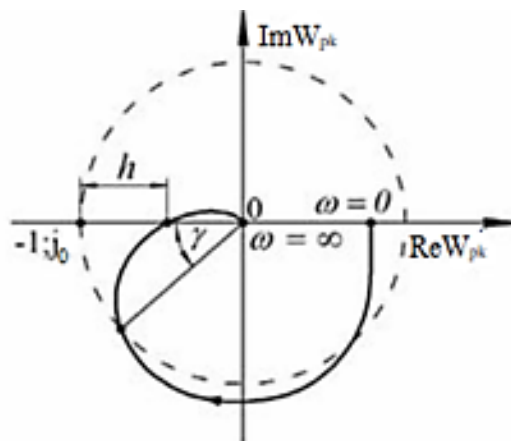


Рис.3.11. Графічне представлення запасу стійкості

У разі, якщо годограф АФЧХ має вигляд, зображений на рис.3.12, запас стійкості по модулю матиме два значення h_1 і h_2 , рівних відстаням від точки $(-1; j_0)$ до найближчих точок перетину годографа АФЧХ з дійсною віссю $\text{Re}W_{pk}$.

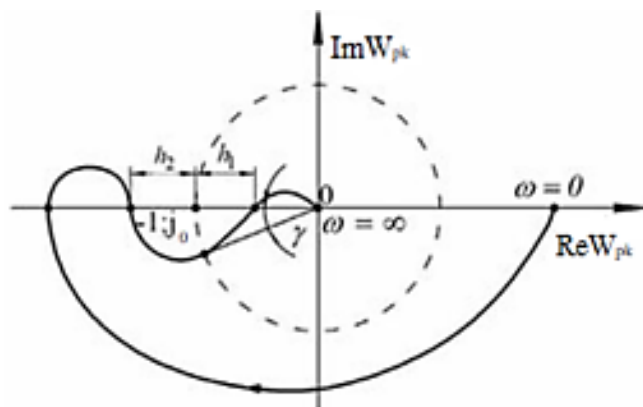


Рис.3.12. АФЧХ САУ з двома значеннями запасу стійкості

Запасом стійкості по фазі називається кут γ , який утворює від'ємна частина дійсної осі і одиничний радіус кола з центром в точці початку координат, що проходить через точку перетину годографа з даною окружністю.

Допустимий запас стійкості САУ при заданих величинах запасу стійкості по модулю і по фазі, являє собою сектор на комплексній площині, що включає точку з координатами $(-1; j_0)$ і обмежений допусками $\pm h$ і $\pm\gamma$, причому годограф АФЧХ в зазначений сектор заходити не повинен, як представлено на малюнку 3.13.

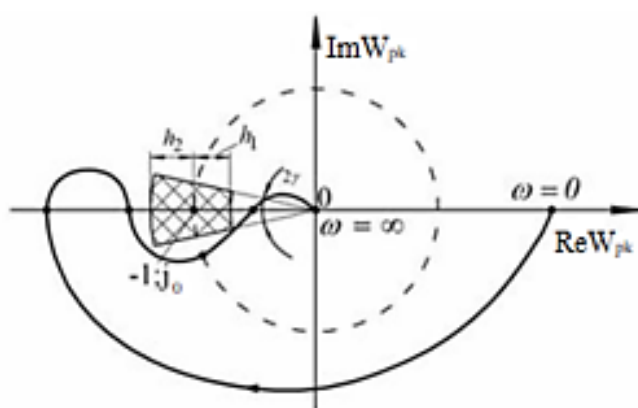


Рис.3.13. Графічне представлення допустимого запасу стійкості

3.6. Показники стійкості типових САУ за логарифмічними характеристиками

При дослідженні стійкості системи за критерієм Найквіста зручно використовувати частотні: логарифмічну амплітудну характеристику (ЛАХ) і логарифмічну фазову характеристику (ЛФХ), побудовані для розімкнутої системи по її передавальній функції $W(s)$.

Нижче наведені формули, за допомогою яких можна за відомими вихідними даними розрахувати запаси стійкості, оцінити вплив параметрів розімкнутої системи на ці запаси. З практичних міркувань формули наведені окремо для типових систем з різним порядком астатизму.

Розрахункові формули показників стійкості типових систем САУ

1. Розрахункові формули для системи з астатизмом другого порядку і

передавальною функцією: $W(s) = \frac{K_a(T_2s+1)}{s^2(T_3s+1)}$.

Амплітудна частотна характеристика: $K(\omega) = \frac{K_a \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega^2 \sqrt{1+\omega^2 T_3^2}}$;

базова частота: $\omega_0 = \sqrt{K_a}$.

Фазова частотна характеристика: $\phi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3$;

запас стійкості по фазі: $\Delta \phi(\omega_{зр}) = 180^\circ + \phi(\omega_{зр})$.

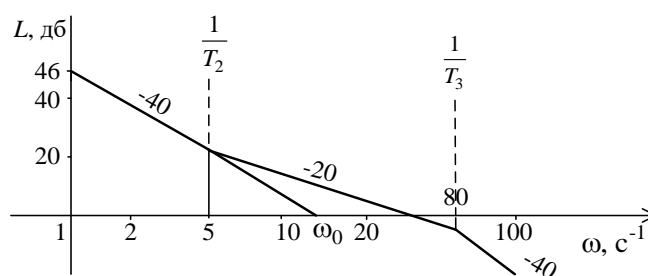


Рис.3.14. Логарифмічна частотна характеристика

2. Розрахункові формули для системи з астатизмом першого порядку и

передавальною функцією $W(s) = \frac{K_V(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}$.

Амплітудна частотна характеристика:

$$K(\omega) = \frac{K_V \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2}}; \quad (3.9)$$

базова частота:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_V}{T_1}}; \quad (3.10)$$

частота зрізу:

$$\omega_{зр} = \omega_0^2 T_2 > \omega_0. \quad (3.11)$$

Фазова частотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3; \quad (3.12)$$

запас стійкості по фазі:

$$\Delta \varphi(\omega_{зр}) = 180^\circ + \varphi(\omega_{зр}); \quad (3.13)$$

запас стійкості по фазі при $\omega_{зр} T_1 \geq 10$:

$$\Delta \varphi(\omega_{зр}) \cong \arctg \omega_{зр} T_2 - \arctg \omega_{зр} T_3. \quad (3.14)$$

3. Розрахункові формули для системи з астатизмом першого порядку і

передавальною функцією $W(s) = \frac{K_V(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1) \dots (T_n s + 1)}$.

При $T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_T$ передавальну функцію апроксимують виразом

$$W(s) = \frac{K_V(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}, \quad (3.15)$$

де

$$T_\Sigma = \sum_{i=3}^n T_i \quad (3.16)$$

Далі можна використовувати формули (3.9) – (3.14), змінивши T_3 на T_Σ .

4. Розрахункові формули для системи з астатизмом першого порядку і

передавальною функцією $W(s) = \frac{K_V(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(1 + 2\xi_3 s + T_3^2 s^2)}$.

При $T_1 > T_2 > \dots > T_3^{-3} \gg \omega_0$, де $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_V}{T_1}}$ (рис.3.15) передавальну функцію апроксимують функцією виду (3.10), в якій обирають $T_\Sigma = 2\xi T_3$, а далі користуються формулами (3.9) – (3.14).

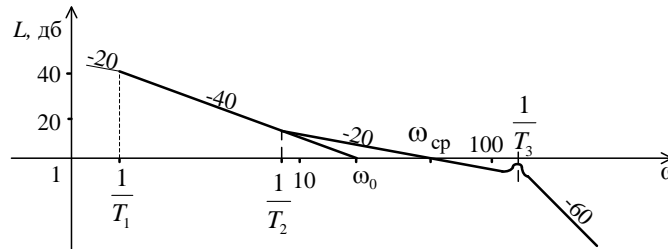


Рис.3.15. Логарифмічна частотна характеристика

Приклад 3.5.

Потрібно розрахувати запас стійкості по фазі при

$$W(s) = \frac{K_v(0,2s+1)}{s(0,7s+1)(1+0,008s+0,0001s^2)},$$

де $K_v = 180c^{-1}$.

Знаходимо: $T_3 = \sqrt{0,0001} = 0,01c$; $\omega_0^2 = \frac{K_v}{T_1} = \frac{180}{0,7} = 257c^{-2}$;

$$\omega_{зп} = \omega_0^2 \cdot T_2 = 257 \cdot 0,2 = 51,4c^{-1};$$

$$\Delta\varphi(\omega_{зп}) = \arctg\omega_{зп}T_2 - \arctg2\xi T_3\omega_{зп} = \arctg51,4 \cdot 0,2 - \arctg0,008 \cdot 51,4 = 84^\circ 30' - 22^\circ 20' \approx 62^\circ.$$

3.7. Визначення стійкості лінійних багатовимірних САУ

Нехай лінійна динамічна САУ описується системою лінійних диференціальних рівнянь у формі Коші (1.6). Відомо, що необхідною і достатньою умовою стійкості даної САУ є знаходження всіх коренів матриці A в лівій (від'ємній) півплощині комплексної площині (Re, jIm) розташування коренів САУ.

Якщо матриця A задана у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді вираз $(A - \lambda E)$ має вигляд:

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix},$$

де λ – незалежна змінна. Вона називається характеристичною матрицею для матриці A . Визначник характеристичної матриці

$$\det|A - \lambda E| \quad (3.17)$$

називається характеристичним поліномом матриці A щодо λ , в чому легко переконатися, обчисливши визначник будь-яким способом, наприклад, розкладанням по першому рядку. Ступінь характеристичного полінома матриці A дорівнює порядку цієї матриці, в даному випадку ця ступінь дорівнює n .

Корені характеристичного полінома матриці A визначаються з (3.17). Визначення коренів характеристичного полінома матриці A для малих порядків САУ не складає великих труднощів, але для великих порядків доводиться користуватися відомими чисельними методами, наявними в програмних продуктах Mathcad, Matlab.

3.8. Керованість і спостережуваність лінійних САУ

З поняттям стійкості лінійних багатовимірних САУ тісно пов'язані питання їх керованості і спостережливості. Критерії керованості і спостережуваності таких САУ були сформульовані американським математиком Калманом:

Для того, щоб лінійна стаціонарна система (1.6) була повністю керована, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці керованості P_y дорівнював n , тобто:

$$\rho = \text{ранг } P_y = \text{ранг } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (3.18)$$

Для того, щоб лінійна стаціонарна САУ (1.6) була повністю спостережувана, необхідно і достатньо, щоб матриця P_n мала ранг, рівний n , тобто:

$$P_n = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]. \quad (3.19)$$

3.9. Оцінка стійкості АС за її структурою

В деяких випадках стійкість системи можна оцінити по її структурі (це скорочує час, так як немає необхідності складати характеристичне рівняння системи).

Якщо система має таку структуру, що в ній неможливо забезпечити стійкість ні при якому значенні параметрів її елементів, то така система називається структурно-нестійкою.

Наприклад: якщо система має дві інтегруючі ланки, які не охоплені жорстким зворотним зв'язком, і немає послідовно включених диференціюючих ланок, то вона буде нестійкою при будь-якому значенні параметрів її елементів.

Розглянемо тепер більш загальний клас систем, які характеризуються умовно розімкненою передаточною функцією вигляду:

$$W_p(s) = \frac{K_p}{s^v A_{n-v}(s)}, \quad (3.20)$$

де v позначає порядок астатизму систем.

Якщо чисельник не залежить від s , то характеристичне рівняння замкнутої системи приймає вигляд:

$$F_3(s) = s^v A_{n-v}(s) + K_p = 0$$

або

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-v} s^v + K_p = 0. \quad (3.21)$$

В тому випадку, коли $v > 2$, частина коефіцієнтів характеристичного рівняння перетворюється у нуль $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-v+1} = 0$ і, отже, не виконується необхідна умова стійкості про додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто така система є нестійкою.

Така система є також структурно нестійкою, бо ніяким вибором значень коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_{n-v}, K_p$ неможливо зробити її стійкою.

Визначимо ступінь r передаточної функції як $r = n - m$, де m – порядок поліному $B_m(s)$ чисельника $W_p(s)$:

$$W_p(s) = \frac{B_m(s)}{s^v A_{n-v}(s)}. \quad (3.22)$$

При цьому

$$F_3(s) = s^v A_{n-v}(s) + B_m(s) = 0. \quad (3.23)$$

Отже, для того, щоб всі коефіцієнти були присутні у характеристичному рівнянні, повинна відбуватися умова $m \geq v + 1$.

Висновки:

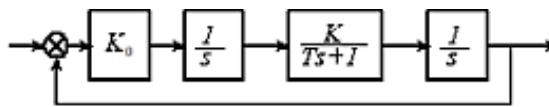
Системи, для яких ступінь r передаточної функції $W_p(s)$ умовно розімкненої системи дорівнює її порядку n , є структурно нестійкими, якщо порядок астатизму не менше двох.

Умови, при яких система перестає бути структурно нестійкою, визначаються як $r \leq n - v + 1$.

Таким чином, для стабілізації структурно нестійких систем необхідно змінювати їх структуру таким чином, щоб змінити степінь передаточної функції $W_p(s)$. Це можливо, якщо вводити у систему внутрішні зворотні зв'язки, які охоплюють інтегруючі пристрої, паралельні канали, або вводити у систему похідні від сигналів, які діють у прямому каналі передачі системи.

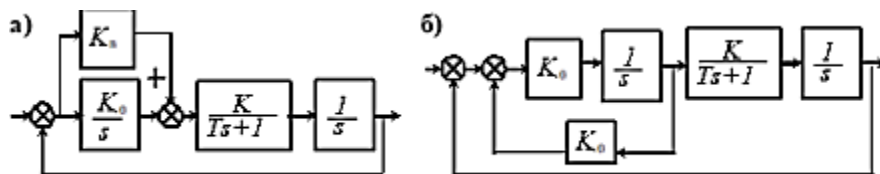
Приклади перетворення нестійкої системи у стійку.

Структурна система нестійка



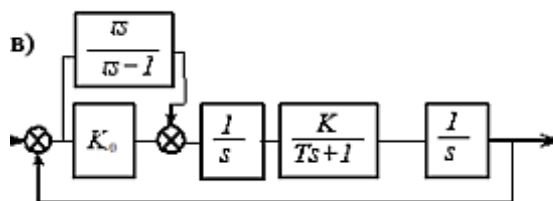
$$F_3(s) = Ts^3 + s^2 + K_0K = 0$$

Варіанти змінення структури системи



$$F_3(s) = Ts^3 + s^2 + KK_n s + K_0K = 0$$

$$Ts^3 + (TK_0^2 + 1)s^2 + K_0^2s + K_0K = 0$$



$$T\tau s^4 + (T + \tau)s^3 + s + K(1 + K_0)\tau s + KK_0 = 0$$

Рис.3.16

Контрольні питання і завдання

1. Який вигляд має вільна складова розв'язку рівняння динаміки САУ?
2. Який вид має характеристичне рівняння?
3. Охарактеризуйте поняття стійкості САУ.

4. Сформулюйте критерій стійкості Вишнеградського.
5. Сформулюйте критерій Рауса-Гурвіца.
6. В чому полягає принцип аргументу?
7. Сформулюйте критерій Михайлова.
8. Сформулюйте критерій Найквіста.
9. Надайте фізичну трактовку критерію Найквіста.
10. Використання логарифмічних частотних характеристик для дослідження стійкості САУ.
11. Дати визначення структурно-нестійкій системі.
12. Як можна стабілізувати структурно-нестійку систему?

Завдання

13. Задано характеристичне рівняння системи:

$$0,8 \cdot 10^{-4}s^4 + 0,9 \cdot 10^{-3}s^3 + 0,18s^2 + 1s + 0,21K = 0.$$

Визначити стійкість системи при наступних значеннях коефіцієнта K :

а) $K = 50$;

б) $K = 100$.

Відповідь: а) система стійка;

б) система нестійка.

14. Визначити стійкість САУ, замкнутої від'ємним одиничним зворотним зв'язком, якщо передавальна функція системи в розімкнутому стані має вигляд:

$$\text{а) } W(s) = \frac{10(0,4s+1)}{s^2(0,2s+1)(0,1s+1)};$$

$$\text{б) } W(s) = \frac{10}{s(0,2s+1)(0,1s+1)}.$$

Відповідь: а) система нестійка;

б) система стійка.

15. Побудувати область стійкості САУ, структурна схема якої представлена на рис.3.17, в площині параметрів (K, T_2) при $T_1 = 0,42\text{с}$; $T_3 = 0,15\text{с}$; $T_2 = 0,05T_3$ і $\alpha = 4$.

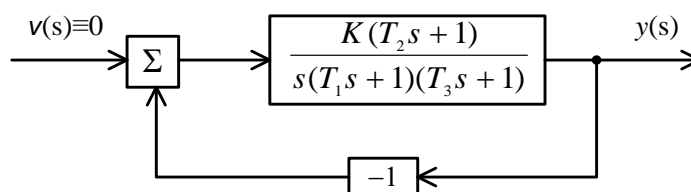


Рис.3.17. Структурна схема САУ

16. Користуючись критерієм Михайлова, визначити діапазон зміни коефіцієнта до розімкнутої системи, якщо характеристичне рівняння має вигляд:

$$0,8 \cdot 10^{-4}s^4 + 0,9 \cdot 10^{-3}s^3 + 0,18s^2 + 1,0s + 0,21K = 0.$$

Відповідь: $0 < K < 90,5$.

17. Передавальна функція розімкнутої системи з одиничним зворотним зв'язком:

$$W(s) = \frac{K}{(0,1s+1)^2(0,01s+1)}.$$

Визначити діапазон зміни коефіцієнта посилення K , при яких замкнута система буде стійкою.

Відповідь: $0 < K < 24,2$.

18. Структурна схема системи управління показана на рисунку 3.18. Побудувати область стійкості в площині параметрів (K_1, K_{33}) при наступних вихідних даних:

а) $K_2 = 0,5$; $T_1 = 0,06$ с; $T_2 = 0,1$ с;

б) $K_2 = 5,2$; $T_1 = 0,08$ с; $T_2 = 0,02$ с.

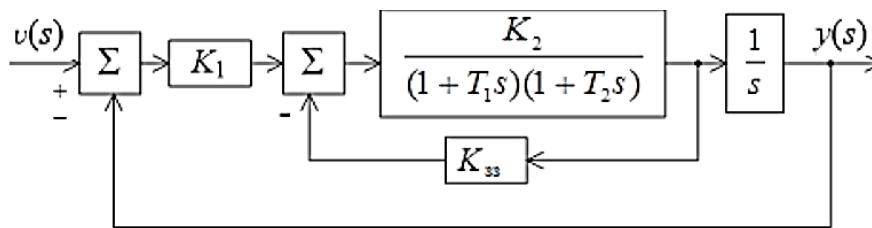


Рис.3.18. Структурна схема САУ

19. Для частотної логарифмічної амплітудної характеристики, показаної на рис.3.19, записати передавальну функцію розімкнутої системи.

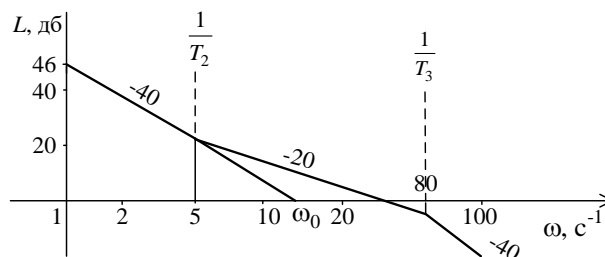


Рис.3.19. ЛАЧХ розімкнутої САУ

Відповідь: $W(s) = \frac{K_a(T_2s+1)}{s^2(T_3s+1)}$.

20. На рис.3.20 показана структурна схема комплексної радіотехнічної системи, яка стежить, з двома джерелами інформації про дальність $v(t)$.

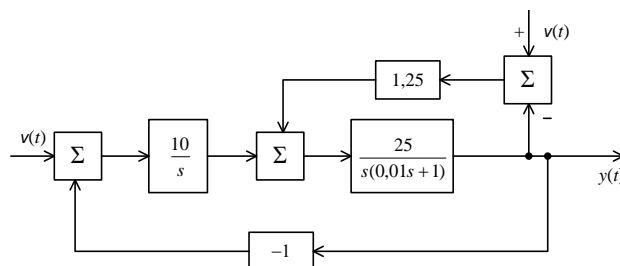


Рис.3.20. Структурна схема комплексної радіотехнічної САУ

Записати передавальну функцію розімкнутої САУ. Побудувати частотні ЛАХ і ЛФХ.

Визначити запас стійкості по фазі.

Відповідь: $\Delta\varphi(\omega_{\text{зр}}) = 58^\circ$.

21. Дана передавальна функція САУ:

$$W(s) = \frac{K_V(0,11s + 1)}{s(0,2s + 1)(0,0145s + 1)}.$$

Визначити запас стійкості САУ при: а) $K_V = 70$; б) $K_V = 100$.

Відповідь: а) $\Delta\varphi(\omega_{\text{зр}}) = 47^\circ$; б) $\Delta\varphi(\omega_{\text{зр}}) = 42^\circ$.

22. Визначити запас стійкості замкнутої системи, якщо її передавальна функція в розімкнутому стані має вигляд:

$$W(s) = \frac{100(0,12s + 1)}{s(0,4s + 1)(0,0033s + 1)(1 + 0,008s + 0,0002s^2)}.$$

Відповідь: $\Delta\varphi(\omega_{\text{зр}}) = 41^\circ$.

23. Для системи, структурна схема якої показана на рис.3.18, визначити запас стійкості по фазі при наступних вихідних даних:

а) $K_1 = 50 \text{ с}^{-1}$; $K_2 = 0,5$; $K_{\text{зз}} = 2$; $T_1 = 0,06 \text{ с}$; $T_2 = 0,1 \text{ с}$;

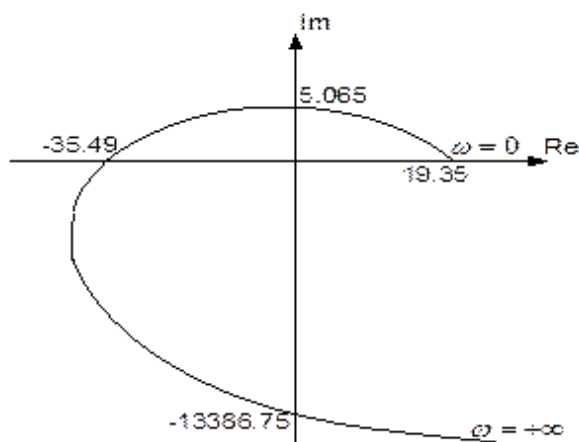
б) $K_1 = 30 \text{ с}^{-1}$; $K_2 = 5,2$; $K_{\text{зз}} = 0,58$; $T_1 = 0,08 \text{ с}$; $T_2 = 0,02 \text{ с}$.

Відповідь: а) $\Delta\varphi(\omega_{\text{зр}}) \approx 28^\circ$; б) $\Delta\varphi(\omega_{\text{зр}}) \approx 22^\circ$.

24. Необхідно визначити за критерієм Михайлова стійкість САУ, характеристичне рівняння якої має вигляд:

$$F(s) = 0,000018s^4 + 0,00576s^3 + 0,319s^2 + s + 19,35.$$

Відповідь: аналізуючи отриманий годограф відповідно до критерію Михайлова можна зробити висновок, що САУ стійка, тому що годограф починається на дійсній осі і з ростом ω від 0 до обходить послідовно в позитивному напрямку 4 квадранта комплексної площині $F(s)$.



РОЗДІЛ 4. СИНТЕЗ САУ

4.1 Синтез неперервних систем автоматичного керування. Методи синтезу неперервних систем керування.

Задача синтезу, яка виникає при проектуванні систем автоматичного керування, полягає у такому доборі структурної схеми системи та технічних засобів її реалізації, при якому забезпечуються задані динамічні та експлуатаційні властивості всієї системи у цілому. Синтез – це лише перший етап проектування та побудови системи. Наступними етапами синтезу є: вибір конкретних елементів системи, енергетичний та конструктивний розрахунок, поєднання характеристик тощо. У залежності від вигляду початкових даних, які приймаються при проектуванні систем, до задачі синтезу можна підходити з різноманітних точок зору. Якщо мається можливість достатньо повної свободи добору структури та параметрів у межах фізичної можливості з урахуванням обмежень, то вирішується задача синтезу оптимальних систем керування, які повинні давати найкращі властивості системі згідно деякого критерію оптимальності (наприклад: найкраща швидкодія, мінімальна похибка у перехідному процесі тощо).

Задачі синтезу можна розбити на дві групи. У задачах першої групи задаються тільки об'єкт керування і треба визначити закон функціонування управляючих засобів у цілому.

У задачах другої групи у поняття синтезу включається ще більш вузька задача - задача вибору та розрахунку параметрів спеціальних коригувальних пристроїв, які забезпечують задані статичні та динамічні характеристики системи. При цьому мається на увазі, що головні функціональні елементи системи (виконавчі, підсилювальні та вимірювальні пристрої) відомі згідно технічного завдання та які в цілому з об'єктом керування складають незмінну частину системи. Однак характеристики цих пристроїв можуть не відповідати тим, що потрібні. Тому виникає необхідність введення у систему допоміжних елементів, які дозволяють покращити, скоригувати якість системи, звести їх до

потрібних.

У якості критерію оптимізації, який використовується при синтезі систем для детермінованого вхідного впливу у вигляді одиничної функції, береться мінімум часу перехідного процесу за умови його монотонності.

Критерії оптимізації при детермінованих впливах можуть обиратися у вигляді функціоналів від похибки вигляду: $I = \int_0^{\infty} (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots)^2 dt$. Найпростішим з них є функціонал: $I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$.

При вирішенні задач збільшення запасу стійкості перш за все необхідно раціональним образом змінити параметри системи таким чином, щоб задовольнити потрібним показникам якості керування. При неможливості вирішити цю задачу у рамках самої системи, треба змінювати її структуру. Для цього у систему вводяться коригувальні пристрої.

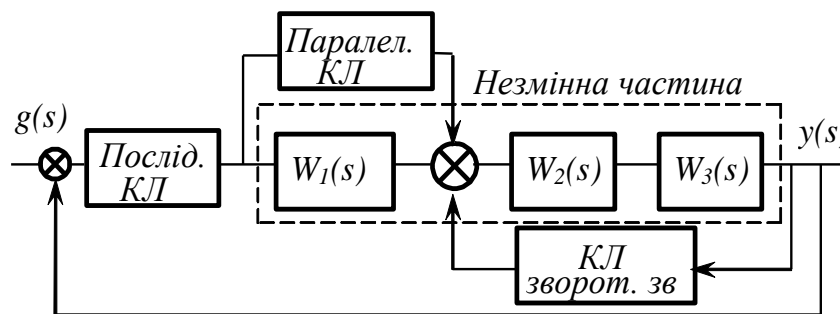


Рис. 4.1 Методи включення коригувальних пристроїв

Ці коригувальні пристрої можуть вводитися в систему різноманітним чином (рис.4.1). Використання того чи іншого метода визначається можливостями технічної реалізації. Елементи послідовного типу (рис. 4.2а) застосовуються у тому випадку, коли у системі управління використовується електричний сигнал у вигляді напруги постійного струму, величина якого функціонально пов'язана з сигналом похибки.

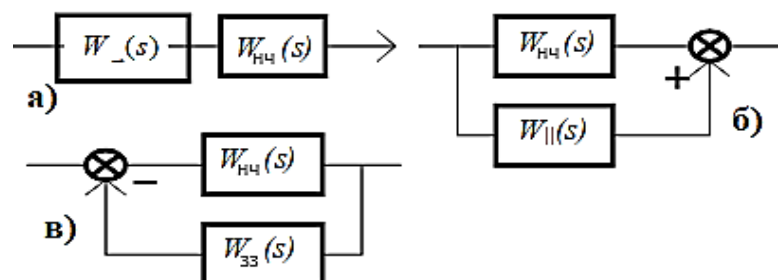


Рис. 4.2 Позначення коригуючих пристроїв

Коригувальні пристрої паралельного типу (рис. 4.2б) бажано застосовувати у тих випадках, коли необхідно здійснювати складний закон керування з введенням інтегралів та похідних від сигналу похибки. Зворотні зв'язки (рис. 4.2в) найбільш зручні для використання тому що ланки, які охоплюються зворотними зв'язками, стають більш стабільні, зменшується їх нелінійність.

У лінійних системах динамічні властивості повинні бути однаковими, і для коригувальних пристроїв одного типу можуть бути підібрані еквівалентні корегувальні пристрої другого типу. Для цього необхідно, щоб виконувалися умови:

$$W(s)W_{\text{пс}}(s) = W_{\text{пс}}(s) + W_{\parallel}(s) = \frac{W_{\text{пс}}(s)}{1+W_{\text{пс}}(s)W_{\text{зз}}(s)} = W_{\text{б}}(s), \quad (4.1)$$

звідки

$$W(s) = \frac{W_{\text{пс}}(s)}{1+W_{\text{пс}}(s)W_{\text{зз}}(s)}; \quad W_{\text{зз}}(s) = \frac{1 - W(s)}{W_{\text{пс}}(s)W(s)};$$

$$W(s) = \frac{W_{\text{пс}}(s)+W_{\parallel}(s)}{W_{\text{пс}}(s)}; \quad W_{\parallel}(s) = W_{\text{пс}}(s)[W(s) - 1].$$

Таким чином, якщо відомі основні елементи системи, які визначають передаточну функцію початкової нескоригованої системи $W_{\text{пс}}(s)$, то задача синтезу зводиться до визначення структури коригувальних ланок та вибору їх параметрів, тобто до синтезу коригувальних пристроїв.

Синтез коригувальних пристроїв засновано на зв'язку перехідної функції з дійсною частотною характеристикою замкненої системи та полягає у максимальному наближенню передавальної функції і проектованої системи до бажаної $W_{\text{б}}(s)$, яка відповідає потрібним показникам якості системи.

Традиційні методи синтезу засновані на використанні логарифмічних частотних характеристик.

4.2. Логарифмічні частотні характеристики САУ

Значний діапазон зміни цього коефіцієнта змусив використовувати логарифмічне уявлення, тобто логарифмічний коефіцієнт передачі по потужності представляється як:

$$L_p = \lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} \quad (4.2)$$

Логарифмічний коефіцієнт посилення по потужності вимірюють спеціальними одиницями, які носять назву бел або б, 1б відповідає посиленню потужності в 10 разів. Найчастіше використовують одиницю в десять разів меншу-децибел або дБ (часто використовують і позначають дБ).

При визначенні логарифмічного коефіцієнта в децибелах, вираз (4.2) приймає вигляд:

$$L_p = 10 \lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}}, \text{ дБ}$$

Логарифмічний коефіцієнт посилення можна виразити через відношення вихідної і вхідної напруги при однакових навантажувальних опорах R:

$$L_p = 10 \lg \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}} = 10 \lg \frac{U_{\text{вих}}^2 R}{U_{\text{вх}}^2 R} = 20 \lg \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}}, \text{ дБ}$$

Таке уявлення коефіцієнта посилення використовують в теорії автоматичного управління для вимірювання амплітуди частотної характеристики в децибелах:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|, \text{ дБ}$$

По осі частот в теорії автоматичного управління так само використовують логарифмічний масштаб на основі десяткового логарифма частоти.

При цьому вісь частот матиме наступний вигляд:

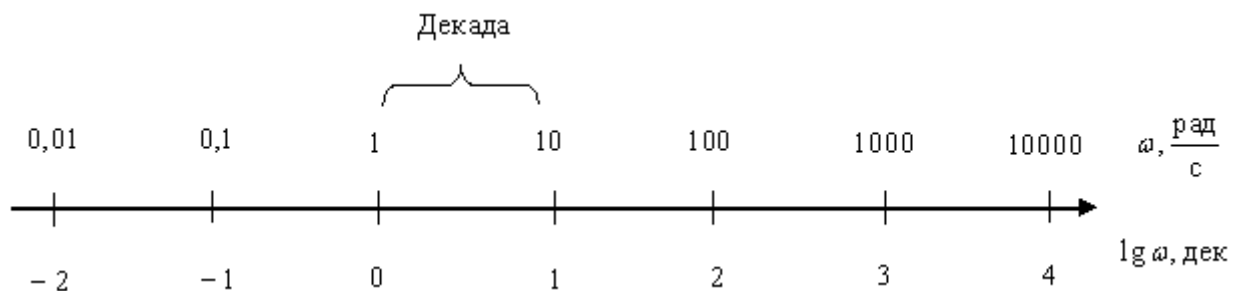


Рис. 4.3 Вісь частот в логарифмічному масштабі

Зміна частоти в десять разів називають декадою. Причому на осі частот, при її логарифмічному масштабі, прийнято позначати значення частоти в рад/с, іноді в герцах, особливо це прийнято в радіотехніці і в інженерній практиці.

Особливо відзначимо, що логарифмічна шкала не має нуля і може перетинатися вертикальною віссю в будь-якому місці, що особливо важливо тим, що дає можливість розглядати частотні властивості динамічних ланок і конкретних пристроїв в необхідному діапазоні зміни частот, де характеристика представляє інтерес для дослідника.

Тепер дамо визначення логарифмічним частотним характеристикам.

Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою (ЛАЧХ) динамічної ланки називають таке уявлення амплітудної частотної характеристики (АЧХ), в якому модуль (амплітуда) частотної характеристики виражений в децибелах, а частота – в логарифмічному масштабі.

Логарифмічною фазовою частотною характеристикою (ЛФЧХ) динамічної ланки називають таке уявлення фазочастотної характеристики (ФЧХ), в якому частота виражена в логарифмічному масштабі.

Досить часто ЛАЧХ і ЛФЧХ будуються на одному графіку, щоб надати повне уявлення про властивості об'єкта, покажемо на рис. 4.4 приблизний вид і оформлення ЛАЧХ і ЛФЧХ деякого інерційного об'єкта.

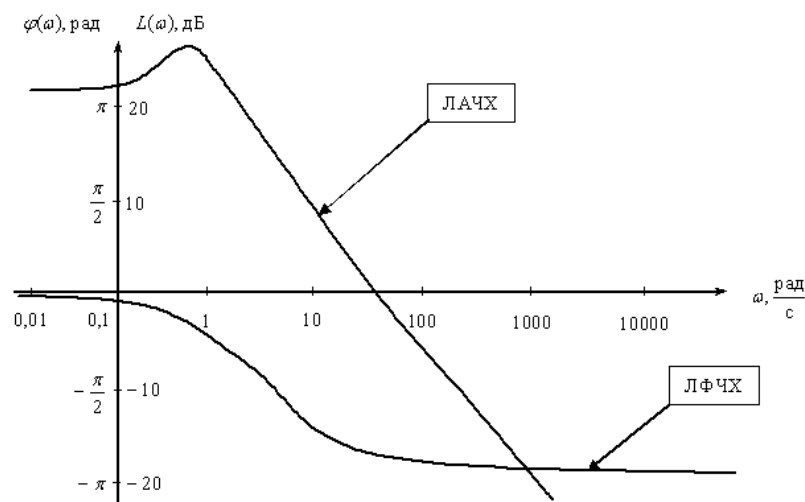


Рис. 4.4 Логарифмічні ЛАЧХ і фазова ЛФЧХ частотні характеристики

4.3. Логарифмічні частотні характеристики типових коригувальних ланок

Розглянемо спочатку характеристики найбільш простих динамічних ланок, які використовуються в якості коригувальних пристроїв.

Безінерційна ланка

Передавальна функція:

$$W(s) = k, k = \text{const}, k > 0.$$

Частотна характеристика:

$$W(j\omega) = [W(s)]_{s=j\omega} = k.$$

АЧХ і ФЧХ:

$$|W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = k, \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0.$$

Логарифмічні характеристики (рис. 4.5):

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{0}{k} = 0.$$

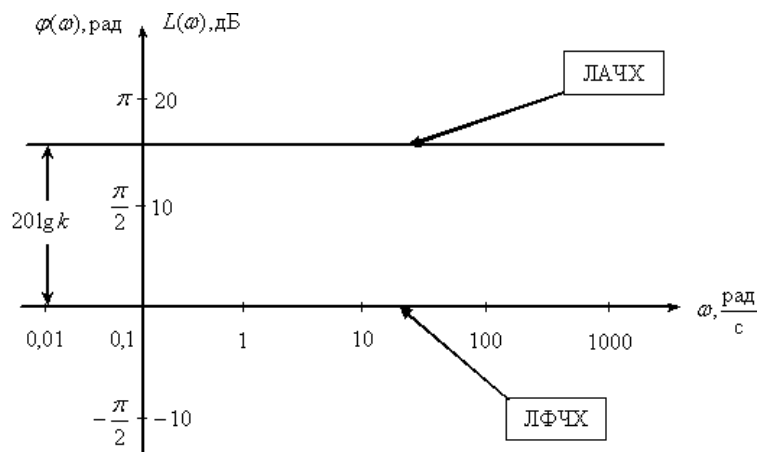


Рис. 4.5. ЛАЧХ и ЛФЧХ безінерційної ланки

Диференціююча ланка

Передавальна функція:

$$W(s) = Ts, T = \text{const}, T > 0.$$

Частотна характеристика:

$$W(j\omega) = [W(s)]_{s=j\omega} = j\omega T.$$

АЧХ і ФЧХ:

$$|W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \omega T, \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{\omega T}{0} = +\frac{\pi}{2}.$$

Логарифмічні характеристики (рис. 4.6):

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \omega T = 20 \lg T + 20 \lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = +\frac{\pi}{2}.$$

Для зручності побудови визначимо точку, де ЛАЧХ перетинає вісь частот

$$L(\omega) = 0 \rightarrow 0 = 20\lg T + 20\lg \omega_Q \rightarrow \omega_Q = \frac{1}{T}.$$

Визначимо нахил ЛАЧХ:

$$\frac{\partial L(\omega)}{\partial (\lg \omega)} = +20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$$

тобто, ЛАЧХ отримує приріст 20 децибел на інтервалі частот в 1 декаду.

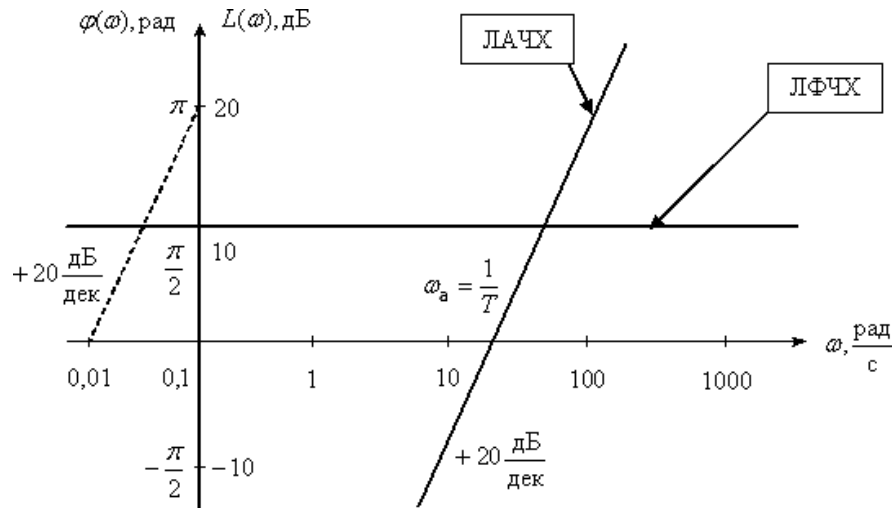


Рис. 4.6. ЛАЧХ і ЛФЧХ диференціюючої ланки

Інтегруюча ланка

Передавальна функція:

$$W(s) = \frac{1}{Ts}, T = \text{const}, T > 0.$$

Частотна характеристика:

$$W(j\omega) = [W(s)]_{s=j\omega} = -j \frac{1}{\omega T}.$$

АЧХ і ФЧХ:

$$|W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{1}{\omega T}, \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{-1}{\omega T \cdot 0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Логарифмічні характеристики:

$$L(\omega) = 20\lg |W(j\omega)| = 20\lg - = 20\lg T + 20\lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = +\frac{\pi}{2}.$$

Для зручності побудови визначимо точку, де ЛАЧХ перетинає вісь частот

$$L(\omega) = 0 \rightarrow 0 = -20 \lg T - 20 \lg \omega_Q \rightarrow \omega_Q = \frac{1}{T}$$

Визначимо нахил ЛАЧХ

$$\frac{\partial L(\omega)}{\partial (\lg \omega)} = -20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}},$$

тобто, отримуємо, що ЛАЧХ має зменшення на 20 децибел на інтервалі частот в 1 декаду.

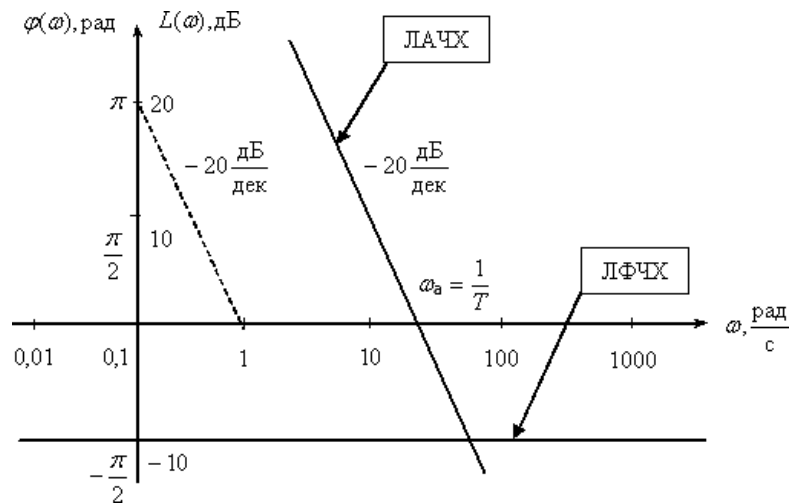
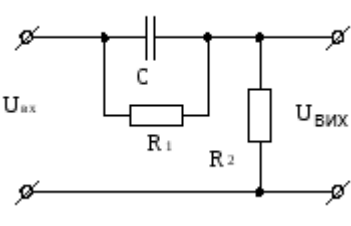
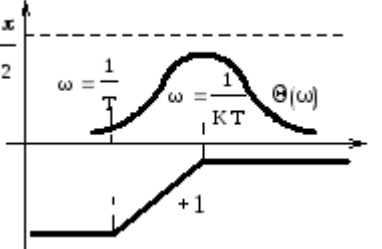
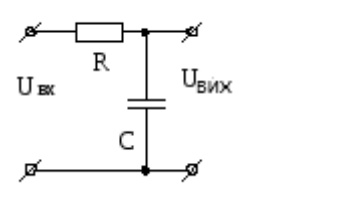
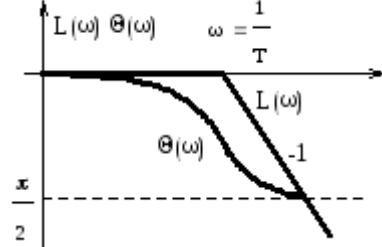
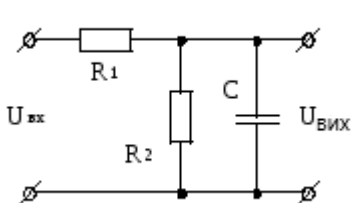
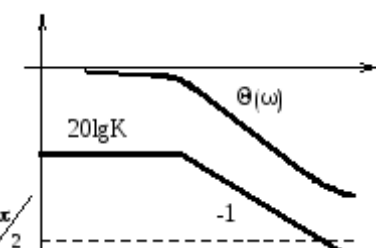
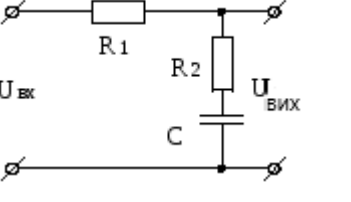
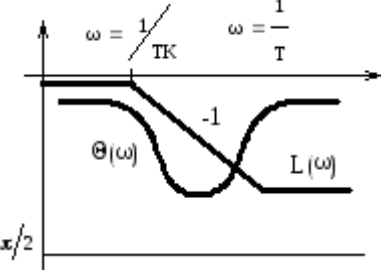
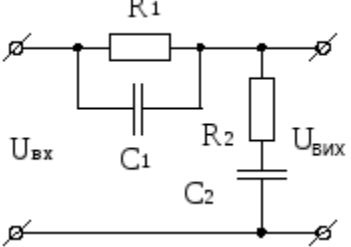
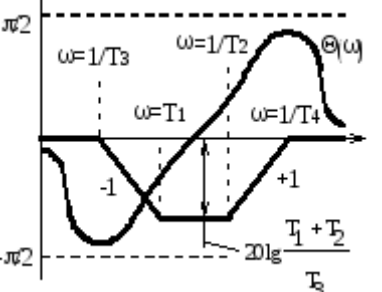


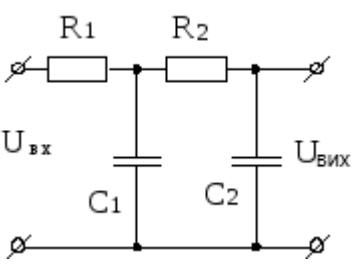
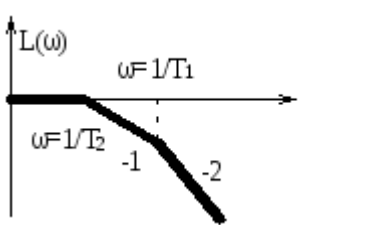
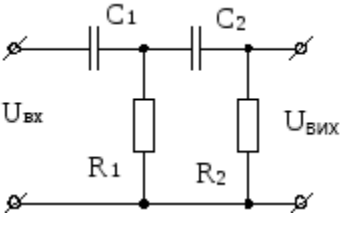
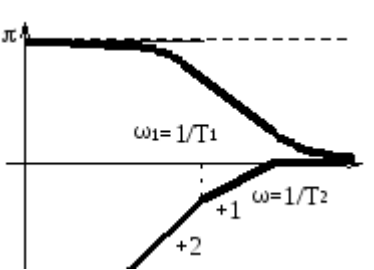
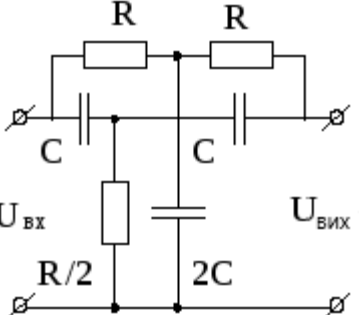
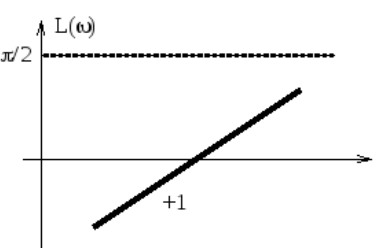
Рис. 4.7 ЛАЧХ і ЛФЧХ інтегруючої ланки

У таблиці 4.1 наведені типові схеми коригувальних пристроїв, їх параметри і логарифмічні характеристики.

Табл.4.1. Типові схеми коригувальних пристроїв

Схема	$W(j\omega)$	ЛАХ и ФЧХ
	$W(j\omega) = K$ $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$	
	$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$ $T = RC$	

	$W(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T)}{1 + j\omega T}$ $T = CR_1$ $K = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \ll 1$	
	$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ $T = RC$	
	$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$ $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$ $T = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	
	$W(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega TK}$ $T = R_2 C$ $K = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$	
	$W(j\omega) = \frac{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}$ $T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2$ $T_3 T_4 = T_1 T_2$ $T_3 + T_4 = T_1 + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$	

	$W(j\omega) = \frac{1}{1 + (T_1 + T_2 + R_1 C_2)j\omega + \dots} \dots \frac{1}{T_1 T_2 \omega^2}$ $T_2 = R_1 C_1 \quad T_1 = R_2 C_2$	
	$W(j\omega) = \frac{-T_1 T_2 \omega^2}{1 + (T_1 + T_2 + T_3)j\omega + \dots} \dots \frac{1}{T_1 T_2 \omega^2}$ $T_1 = R_1 C_1 \quad T_2 = R_2 C_2$ $T_3 = R_1 C_2$	
	$W(j\omega) = j\omega T_3$ $T_3 = \frac{RC}{2}$	

4.4 Побудова бажаної логарифмічної характеристики.

Найбільш практичним інженерним методом синтезу САУ є метод логарифмічних амплітудних частотних характеристик, який заснований на взаємозв'язку перехідних та частотних характеристик. Цей метод дозволяє достатньо швидко побудувати бажану ЛАХ розімкненої системи і по БЛАХ знайти передаточну функцію $W_0(s)$ та розрахувати її параметри.

При синтезі САУ методом ЛАХ у початкових даних звичайно задають такі показники якості:

- час перехідного процесу $t_{\text{пн}}$;
- максимально доступне перерегулювання $\sigma_{\text{max}}\%$ при одиничному

ступінчатому впливі, або запаси стійкості за фазою $\Delta\phi$ та амплітудою ΔL ;

- коефіцієнти динамічної похибки або точність відпрацювання типових вхідних впливів.

По заданим показникам якості можна вибрати відповідну типову дійсну частотну характеристику замкненої системи.

На основі попередніх розрахунків перехідних процесів встановлено, що для забезпечення задовільних показників якості $P(\omega)$ (дійсної частотної характеристики) необхідно мати певні коефіцієнти форми. Із прямокутної трапецоїдної $P(\omega)$ з одним і тим же інтервалом додатності ω_n найменший час регулювання $t_n = \frac{\pi}{\omega_n}$ при незначному перерегулюванні відповідає коефіцієнт похилу $\lambda = \frac{\omega_a}{\omega_n} = 0.2 - 0.25$.

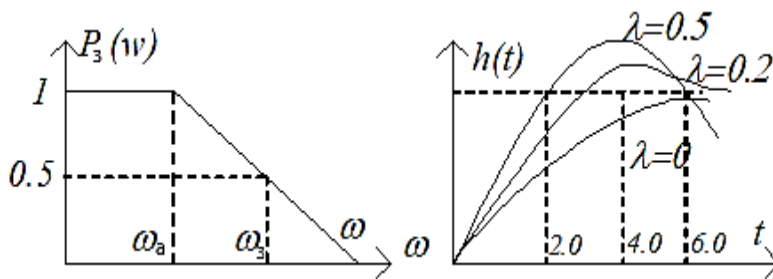


Рис. 4.8

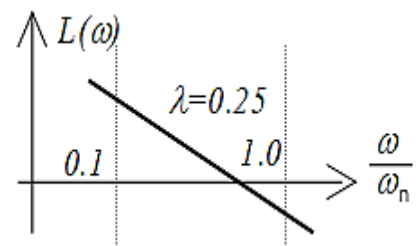


Рис. 4.9

При цьому похил ЛАХ при частоті зрізу $\omega_{зр} = (0,6 - 0,9)\omega_n$ наближається до -20 дБ/дек.

Така ЛАХ може бути прийнята за оптимальну. Однак у реальній системи реалізація $P(\omega)$ у вигляді простої трапеції може бути досягнута тільки за рахунок складних коригуючих пристроїв.

Значно простіше можна реалізувати ДЧХ, яку показано на рис. 4.10 та яка забезпечує придатні показники якості.

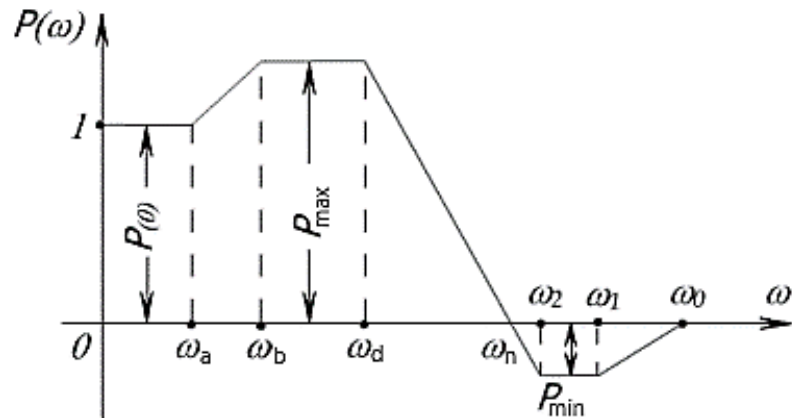


Рис. 4.10 Типова дійсна частотна характеристика

Такий вигляд $P(\omega)$ характеризується такими параметрами:

коефіцієнт похилу: $\lambda = \frac{\omega_a}{\omega_n}$;

коефіцієнт допоміжного похилу: $\lambda_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}$;

коефіцієнт форми: $\lambda_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n}$;

$P_{\max}(\omega), P_{\min}(\omega)$ – максимальне та мінімальне значення $P(\omega)$.

Найліпші перехідні процеси відповідають $P(\omega)$ з коефіцієнтами

$$\lambda \leq 0.8, \quad \lambda_1 \geq 0.4, \quad \lambda_2 \geq 0.5$$

При цьому величина перерегулювання залежить від $P_{\max} > 0$ (рис.4.11), $\sigma\% = f(P_{\max})$. Якщо $P(\omega)$ має мінімум $P_{\min} < 0$, то з'являється додаткове перерегулювання $\Delta\sigma$: $\Delta\sigma \leq 0.3P_{\min}100\%$.

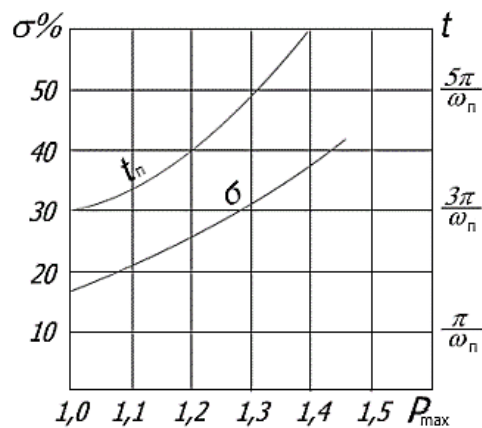


Рис. 4.11 Номограма прямих показників якості з P_{\max}

Отже, загальне перерегулювання буде:

$$\sigma\% = \sigma(P_{\max}) + 0,3(P_{\min})100\%, \text{ де } P_{\max, \min} \quad (4.3)$$

Якщо розглядати оптимальний за швидкодією перехідний процес, який

завершується протягом мінімального часу t_{\min} при $\sigma_{\max} = 0$ (рис. 4.12).

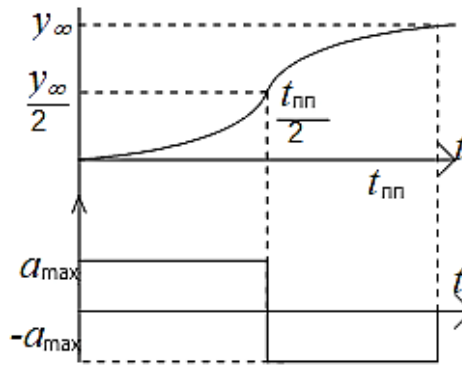


Рис. 4.12 Оптимальний перехідний процес

На першій ділянці виконується розгін системи з максимальною швидкодією, яка відповідає максимально допустимому прискоренню a_{\max} . При цьому регульована величина змінюється по закону:

$$\frac{y_{\infty}}{2} = y(t) = \frac{1}{2} a_{\max} t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{t_{nn \min}}{2}.$$

На другій ділянці здійснюється гальмування з максимальним уповільненням.

При цьому $\frac{y_{\infty}}{2} = y(t) = \frac{1}{2} a_{\max} \frac{t_{nn \min}^2}{4}, \quad \frac{t_{nn \min}}{2} \leq t \leq t_{nn \min}.$

З цього співвідношення можна визначити: $t_{nn} = 2 \sqrt{\frac{y_{\infty}}{a_{\max}}}.$

Для нашої системи ЛАХ буде мати вигляд (рис. 4.13) з похилом на відносних частотах де $\frac{\omega}{\omega_{зр}} < 4$ у -20 дБ/дек, а при $\frac{\omega}{\omega_{зр}} > 4$ похил швидко збільшується.

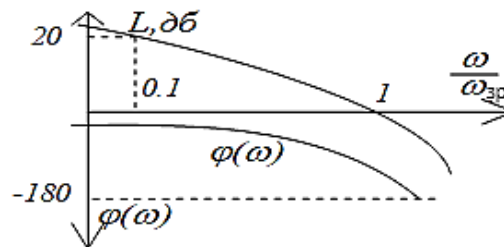


Рис. 4.13 Логарифмічні характеристики квазіоптимальної системи

Частота зрізу $\omega_{зр}$ системи оптимальною за швидкодією дорівнює:

$$\omega_{зр \text{ опт}} = \frac{2}{t_{nn \min}} = \sqrt{\frac{a_{\max}}{y_{\infty}}}, \quad \text{а } t_{nn \min} = \frac{\pi}{\omega_{зр \text{ опт}}}.$$

Так як передавальну функцію, яка забезпечує системі максимальну швидкодiю, простими технічними засобами важко реалізувати, то доцiльно будувати системи у яких перехідний процес не повинен виходити за межі деякої границі $t_{nn \max}$, де $t_{nn \max} < \frac{4\pi}{\omega_n}$, що допускає два послідовних перерегулювання перехідного процесу.

Таким чином, реальна частота зрізу лежить в межах: $\omega_{зр \max} \leq \omega_{зр} \leq \omega_{зр \text{opt}}$. Із порівняння кривих перехідних процесів, які відповідають типовій дійсній частотній характеристиці встановлено, що час регулювання t_{nn} залежить від частоти ω_n , у деякої степені від P_{\max} та практично не залежить від вигляду модуля частотної характеристики у області частот $\omega > \omega_n$.

Крива залежності

$$t_{nn \max} = \frac{K_n}{\omega_n} = f(P_{\max}) \quad (4.4.)$$

зображена на рис. 4.11

Отже, якщо задано t_{nn} , то використовуючи криві (рис. 4.12), можна визначити $\omega_n = \frac{K_n}{t_{nn}}$ та розрахувати $\omega_{зр} = (0,6-0,9)\omega_n$. Якщо задано обмеження по прискоренню, то $\omega_{зр} \leq \sqrt{\frac{a_{\max}}{g_0}}$. При цьому слід пам'ятати, що чим більше $\omega_{зр}$, тим більша швидкодiя буде у системі, але при цьому треба буде застосовувати і більш складні коригувальні пристрої.

Побудова низькочастотної області бажаної ЛАХ проводиться виходячи з заданих вимог до забезпечення точності САУ. При цьому коефіцієнт підсилювання бажаної розімкненої передавальної функції розраховується відносно заданого типового впливу та максимального значення похибки $K_{рб} = \frac{g_0}{\varepsilon(t)}$, де g_0 – задаючий вплив, $\varepsilon(\infty)$ - похибка САУ. Якщо задана величина похибки від швидкості, то система повинна отримати астатичні властивості, що досягається відповідним похилом ЛАХ у області нижніх частот.

При цьому низькочастотна асимптота ЛАХ проводиться через точку $L(\omega=1)=20\lg K_{рб}$ з відповідним похилом ν (-20 дБ/дек), де ν – порядок астатизму.

Якщо задана добротність системи D_v по швидкості, то через точку $\omega = K_{p6}$ проводиться пряма з похилом -20 дБ/дек.

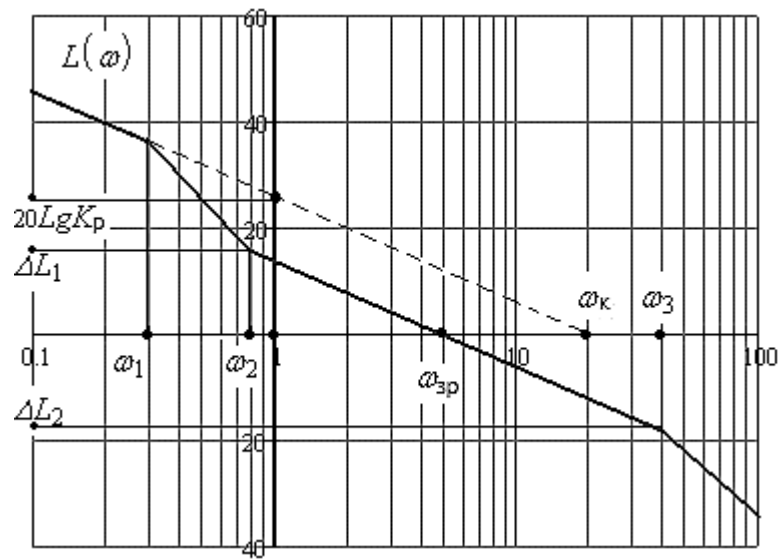


Рис. 4.14 Синтезована ЛАЧХ

На осі абсцис ω відмічають точку, яка відповідає значенню частоти зрізу ω_{zp} , і через неї проводиться пряма з похилом -20 дБ/дек. Це робиться для того, щоб забезпечити прийнятний перехідний процес. Ця пряма буде визначати середньочастотну асимптоту бажаної ЛАХ (рис. 4.14).

Для сполучення низькочастотної ділянки з середньочастотною треба керуватися вимогами до показників якості САУ, які визначають вимоги до запасів стійкості по амплітуді та фазі.

Так, якщо треба забезпечити $\sigma < 30\%$, то для цього відповідно ординати типової $P(\omega)$ не повинні перевищувати $P_{\max}=1,2$, $P_{\min}=-0,2$, тобто $P_{\max} \geq P_3(\omega) \geq -P_{\min}$.

Це відповідає вимогам, щоб ЛАФЧХ не заходила у заборонену область, яка обмежується кривими з індексами P_{\max} , P_{\min} (рис. 4.15)

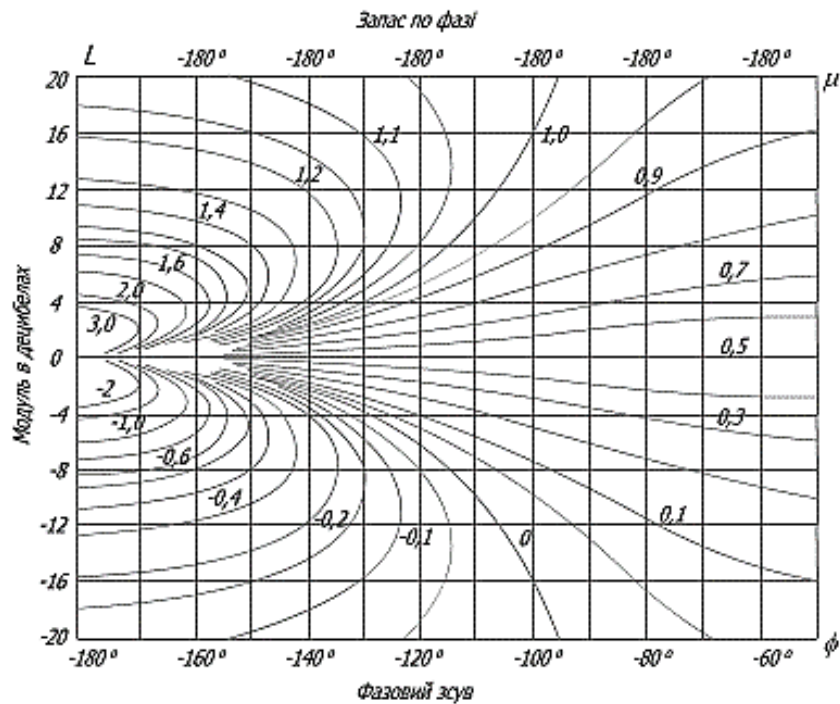


Рис. 4.15 Номограма для визначення запасів стійкості по ЛАФЧХ

Криві із значеннями P_{\max} , P_{\min} можна приблизно замінити прямокутником з параметрами ΔL_1 , ΔL_2 , та $\Delta\phi$, де ΔL_1 , ΔL_2 – запаси стійкості по амплітуді, $\Delta\phi$ – запас стійкості по фазі. При цьому повинні забезпечуватися вимоги:

$$\begin{cases} \Delta L_1 \geq |20 \lg W_{\text{рб}}(j\omega)| \geq \Delta L_2 \\ |\phi(\omega)| < |\Delta\phi|. \end{cases}$$

Існують допоміжні криві $\Delta\gamma = f_1(P_{\max})$ та $\Delta L = f_2(P_{\max})$ (рис. 4.16), які дозволяють визначити бажані значення запасів стійкості по амплітуді та фазі.

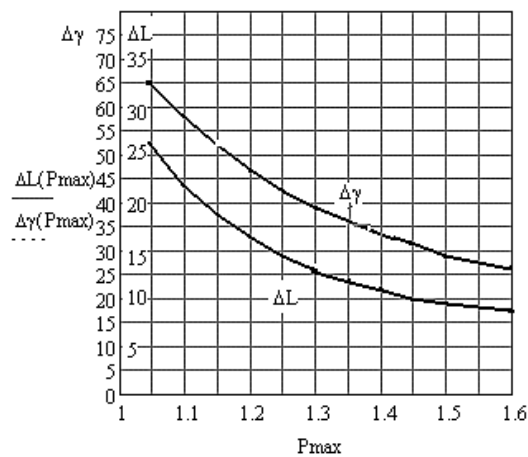


Рис. 4.16 Номограма зв'язку запасів стійкості по амплітуді і фазі в залежності від величини перерегулювання.

Сполучення середньочастотної ділянки з низькочастотною асимптотою проводять виходячи з наступних міркувань:

- сполука проводиться одним відрізком з похилом кратним -20 дБ/дек;
- сполука проводиться так, щоб у інтервалі часом від ωL_1 до $\omega_{зр}$ запас стійкості по фазі $\Delta\phi$ був не менший заданого, тобто $\Delta\phi(\omega) > \phi_1$.

Високочастотну ділянку ЛАХ, яка лежить в області малих параметрів і практично не впливає на стійкість та на показники якості, треба проводити з похилом кратним -20 дБ/дек, що забезпечує швидке пригнічування високочастотних завад.

Однак при цьому необхідно слідкувати за правильним вибором точки сполуки ω_3 , яка забезпечує заданий запас стійкості у області $\omega_{зр} \leq \omega \leq \omega L_2 = \omega_3$. При цьому достатньо виконати перевірку на частоті ωL_2 : $\Delta\phi(\omega_3) = -180^\circ - |\phi(\omega_3)| \geq \Delta\phi$.

Треба визначити, що ці вимоги виконуються, якщо частота сполуки ω_3 буде перевищувати $4\omega_{зр}$: $\omega_3 \geq 4\omega_{зр}$.

4.5. Синтез САУ методом логарифмічних частотних характеристик

Метод логарифмічних частотних характеристик використовується для визначення частотних передавальних функцій коригувальних пристроїв, що наближають динамічні показники до бажаних. Найбільш ефективно цей метод застосовується для синтезу лінійних САУ, оскільки в таких системах частотні характеристики ланок не залежать від амплітуди вхідних сигналів. Синтез САУ методом логарифмічних частотних характеристик включає в себе наступні операції:

На першому етапі за відомою передавальною функцією незмінюваної частини САУ будується її ЛАЧХ.

На другому етапі будується бажана ЛАЧХ (БЛАЧХ) характеристика САУ, яка задовольняла б поставленим вимогам. Визначення виду БЛАЧХ проводиться, виходячи із заданих показників якості САУ, часу перехідного процесу, перерегулювання і коефіцієнтів помилок. При виборі бажаних ЛАЧХ і ЛФЧХ важливо, щоб остання забезпечила необхідний запас

стійкості при частоті зрізу системи. Для цього використовують спеціальні номограми В. В. Солодовнікова (рис. 4.16).

Задовільні якісні показники САУ в динамічних режимах досягаються при перетині амплітудної характеристики осі абсцис з нахилом -20 дБ/дек.

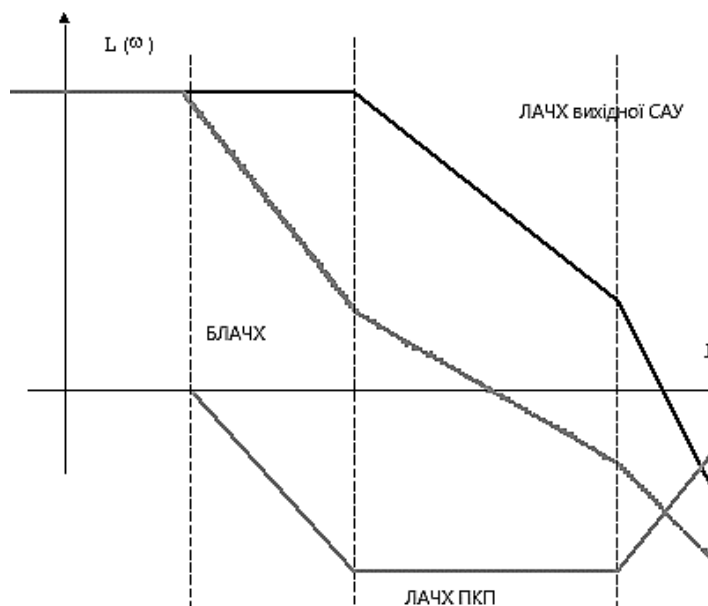


Рис. 4.17. Визначення характеристик коригувального пристрою

На останньому етапі з порівняння логарифмічних частотних характеристик вихідної САУ і бажаних логарифмічних частотних характеристик, визначаються частотні властивості коригувального пристрою.

Зокрема, при використанні лінійних ланок корекції ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою (ПКП), $D(j\omega)$ може бути знайдена відніманням ЛАЧХ некоректованої системи з бажаної ЛАЧХ САУ (рис. 4.17), тобто:

$$L\{D(j\omega)\} = L\{W_6(j\omega)\} - L\{W_1(j\omega)\},$$

звідси

$$D(j\omega) = \frac{W_6(j\omega)}{W_1(j\omega)}.$$

Далі, за ЛАЧХ ПКП $D(j\omega)$ з наведених вище типових схем (табл. 4.1), легко визначити коригувальну ланку в ланцюзі прямого або зворотного зв'язку. Зокрема, в нашому випадку ПКП відповідає типовій схемі (рис. 4.18).

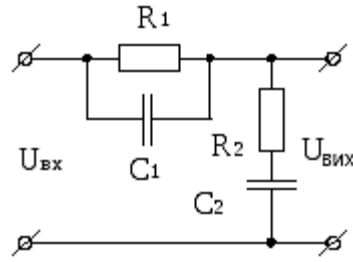


Рис. 4.18. Схема ПКП

Як впливає з вищесказаного, в підґрунті методу корекції на основі логарифмічних частотних характеристик (ЛЧХ) лежить побудова бажаної ЛЧХ, і, перш за все, логарифмічної амплітудної частотної характеристики (ЛАЧХ).

Для всіх бажаних ЛАЧХ характерно, що вони перетинають вісь нуля децибел під одиничним нахилом -20 дБ/дек, що необхідно для забезпечення стійкості.

Синтез бажаної передавальної функції $W_6(s)$ здійснюють в наступній послідовності. Орієнтуючись на передавальну функцію $W(s)$ розімкнутої системи, що складається з функціонально необхідних елементів, вибирають тип бажаної ЛАЧХ $L_6(\omega)$.

Потім, використовуючи задані показники якості, здійснюють прив'язку середньочастотної асимптоти $L_6(\omega)$ з одиничним нахилом до осі частот і сполучають її з асимптотами незмінної частини системи в області низьких і в області високих частот. Нарешті, записують передавальну функцію $W_6(s)$. Методику синтезу $W_6(s)$ проілюструємо на декількох прикладах.

Синтез $W_6(s)$ за заданими значеннями помилки і частотного показника якості M .

Приклад 4.1.

Швидкість зміни впливу на вході системи з астатизмом першого порядку не перевищує значення $\Omega_{\max} = 0,12\text{с}^{-1}$, а прискорення – $\varepsilon_{\max} = 0,1\text{с}^{-2}$. Потрібно побудувати бажану ЛАЧХ $L_6(\omega)$ і визначити $W_6(s)$ системи, яка задовольняє наступним показникам якості: максимальна помилка δ_{\max} кут.хв., показник коливальності $M \leq 1,3$. Передавальна функція $W(s)$ вихідної системи, що складається з функціонально необхідних елементів (без корекції):

$$W(s) = \frac{K_{\Omega}}{s(1+0,054s)(1+0,01s)}. \quad (4.5)$$

Загальний коефіцієнт розімкнутої САУ $K_{\Omega} = \frac{\Omega_{\max}}{\delta_{\max}} = \frac{0,12}{2} \cdot 3438 = 206c^{-1}$.

Примітка. 1 радіан = 3438 кутових хвилин.

Координати контрольної точки A_K :

частота:

$$\omega_k = \frac{\varepsilon_{\max}}{\Omega_{\max} = \frac{0,1}{0,12} = 0,8c^{-1}};$$

ордината:

$$L_k = 20 \lg \frac{\Omega_{\max}^2}{\varepsilon_{\max_{\max}} = 20 \lg \frac{0,12^2}{0,1 \cdot 2} \cdot 3438 = 48} \text{ дБ.}$$

За цими даними будуюмо заборонену зону, в яку не повинна потрапляти бажана ЛАЧХ. Для цього (рис. 4.19) на частоті $\omega_k = 0,8c^{-1}$ відкладаємо ординату $L_k = 48$ дБ. і через отриману точку A_K проводимо дві прямі з нахилом -20 дБ/дек і -40 дБ/дек.

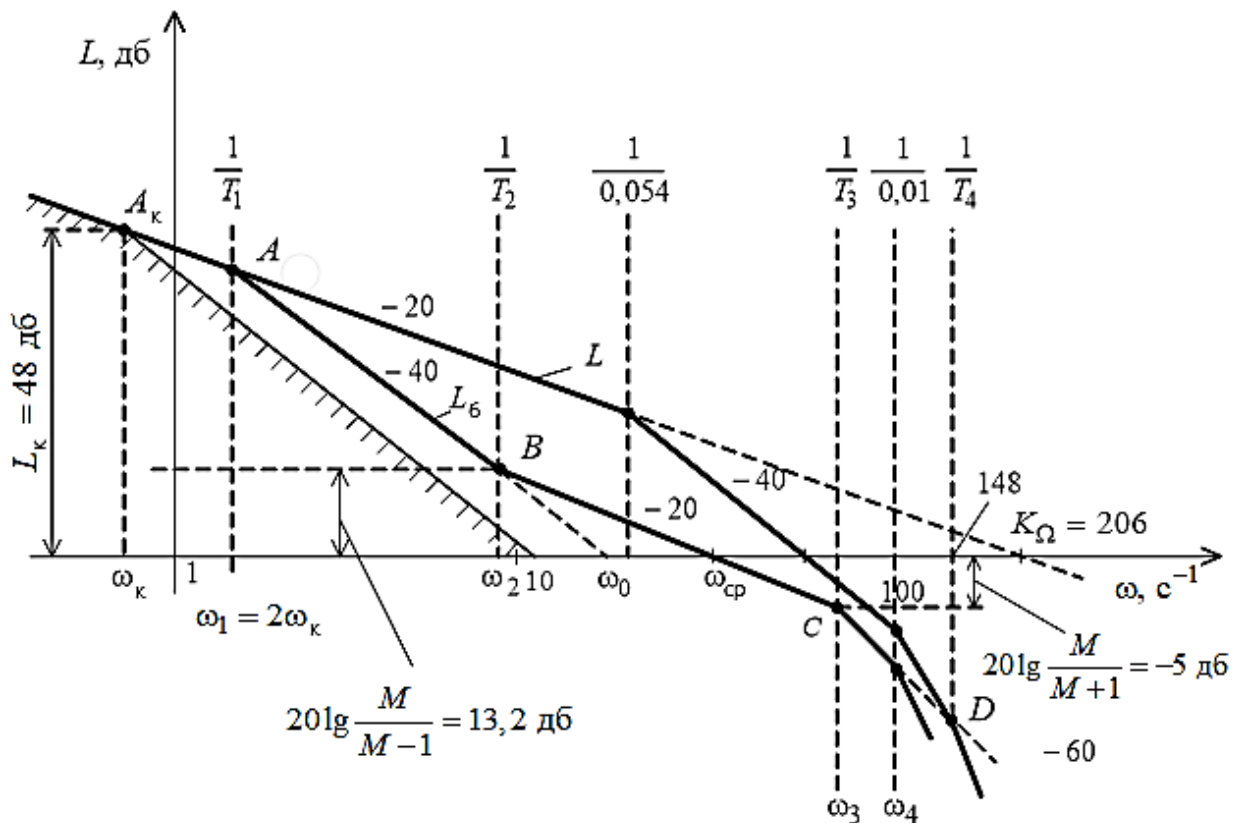


Рис. 4.19. Побудова бажаної ЛАЧХ

Першу сполучну частоту ω_1 приймаємо рівною $2\omega_k$:

$$\omega_1 = 2\omega_k = 2 \cdot 0,8 = 1,6c^{-1}.$$

Допустиме значення першої постійної часу:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{1,6} = 0,625c.$$

Через точку A проводимо асимптоту з нахилом -40 дБ/дек і знаходимо базову частоту:

$$\omega_0 = \sqrt{K_{\Omega} \omega_1} = \sqrt{206 \cdot 1,6} = 18,2c^{-1}.$$

Відповідно до вимоги $M \leq 1,3$ приймаємо показник коливальності $M = 1,28$ і знаходимо межі середньочастотної асимптоти:

$$20 \lg \frac{M}{M-1} = 20 \lg \frac{1,28}{1,28-1} = 13,2 \text{ дБ},$$

$$20 \lg \frac{M}{M+1} = 20 \lg \frac{1,28}{1,28+1} = -5 \text{ дБ}.$$

Визначаємо частоту сполучення як абсцису точки В, отриманої при перетині асимптоти з нахилом -40 дБ / дек верхньої межі середньочастотної асимптоти:

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{M-1}{M}} = 18,2 \sqrt{\frac{1,28-1}{1,28}} = 8,5c^{-1}.$$

Необхідне значення другої постійної часу:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{8,5} = 0,118c.$$

Будуємо середньочастотну асимптоту з єдиним нахилом до перетину з нижньою межею в точці С, абсциса якої визначає частоту сполучення:

$$\omega_3 = \omega_0 \frac{M+1}{\sqrt{M(M-1)}} = 18,2 \frac{1,28+1}{\sqrt{1,28(1,28-1)}} = 69,2c^{-1}.$$

Третя постійна часу:

$$T_3 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{69,2} = 0,0145c.$$

За передавальної функції (4.2) будуємо ЛАЧХ $L(\omega)$ вихідної системи і формуємо високочастотні асимптоти бажаної ЛАЧХ $L_6(\omega)$ так, щоб їх нахили збігалися з нахилами високочастотних $L(\omega)$. В цьому випадку сполучна частота $\omega_4 = 100c^{-1}$, а четверта постійна часу:

$$T_4 = \frac{1}{\omega_4} = 0,01c.$$

Бажана передавальна функція розімкнутої системи:

$$W_6(s) = \frac{K_{\Omega}(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_3 s)(1 + T_4 s)}$$

або

$$W_6(s) = \frac{206(1+0,118s)}{s(1+0,625s)(1+0,0145s)(1+0,01s)}.$$

Можна продовжити високочастотну ділянку з нахилом -40 дБ / дек до збігу асимптот в точці D. Тоді відповідна постійна часу $T_4 = \frac{1}{148} = 0,0068$, а $W_6(s)$ приймає вигляд:

$$W_6(s) = \frac{206(1+0,118s)}{s(1+0,625s)(1+0,0145s)(1+0,01s)}.$$

Синтез $W_6(s)$ за допустимим значенням сталої помилки і необхідними показниками якості в перехідних режимах: $\sigma\%, \xi, t_p$.

Приклад 4.2.

Побудувати бажану ЛАЧХ $L_6(\omega)$ і визначити передавальну функцію $W_6(s)$ для системи с астатизмом першого порядку при наступних умовах: допустиме значення сталої помилки $\delta_{\max} \leq 8$ кут.хв. при постійній швидкості $\Omega = 0,16c^{-1}$ і прискорення $\varepsilon_{\max} = 0,24c^{-2}$; максимальне перерегулювання $\sigma_{\max} \leq 30\%$; час регулювання перехідного процесу $t_p \leq 0,4c$ при числі коливань $n \leq 2$; передавальна функція вихідної нескорегованої системи:

$$W(s) = \frac{K_{\Omega}}{s(1+0,038s)(1+0,0087s)}. \quad (4.6)$$

Вважаємо похибка по швидкості δ і похибка по прискоренню ε рівними 4.

Визначаємо добротності системи:

по швидкості:

$$D_{\Omega} = K_{\Omega} = 3438 \varepsilon/\delta = 137,5 c^{-1};$$

по прискоренню:

$$D_{\varepsilon} = K_{\varepsilon} = 206c^{-1}.$$

Для подальших розрахунків приймаємо:

$$K_{\Omega} = 140c^{-1}, K_{\varepsilon} = 210c^{-2}, \omega_0 = \sqrt{K_{\varepsilon}} = \sqrt{210} = 14,5c^{-1}.$$

Перевіряємо виконання умов по точності:

$$\delta = \frac{\Omega}{K_{\Omega}} + \frac{\varepsilon}{K_{\varepsilon}} = \left(\frac{0,16}{140} + \frac{0,24}{210} \right) \cdot 3438 = 7,86 \text{ кут.хв.}$$

Умова $\delta_{\max} \leq 8$ кут.хв. виконується.

Визначаємо першу сполучну частоту ω_1 бажаної ЛАХ:

$$\omega_1 = \frac{K_{\varepsilon}}{K_{\Omega}} = \frac{210}{140} = 1,5c^{-1}$$

і відповідну їй постійну часу T_1 бажаної передавальної функції $W_6(s)$:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{1,5} = 0,67c.$$

Приймаємо $\sigma\% = 26\%$. Із табл. 2.2 знаходимо $b = 3,6$ і визначаємо допустиме значення частоти зрізу:

$$\omega_{зр} \geq \pi\eta/t_p = 28c^{-1}.$$

Приймаємо $\omega_{зр} = 30c^{-1}$ і визначаємо другу сполучну частоту:

$$\omega_2 = \omega_0^2 / \omega_{зр} = 210/30 = 7c^{-1}$$

і відповідну постійну часу:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{7} = 0,143c.$$

Будуємо бажану ЛАЧХ $L_6(\omega)$ до частоти зрізу $\omega_{зр}$. Через точку с ординатою $20 \lg K_\Omega = 43$ дБ і абсцисою $\omega = 1$ проводимо асимптоту з одиничним нахилом -20 дБ/дек до перетину з віссю абсцис в точці $\omega = K_\Omega = 140 \text{ с}^{-1}$. Через точку А, відповідну частоті $\omega_1 = 1,5 \text{ с}^{-1}$, проводимо асимптоту з нахилом -40 дБ/дек і через $\omega_{зр} = 30 \text{ с}^{-1}$ – асимптоту з нахилом -20 дБ/дек. Перетин прямих дає другу опорну частоту $\omega_2 = 7 \text{ с}^{-1}$.

Для правильного вибору параметрів високочастотної частини бажаної ЛАХ побудуємо ЛАЧХ $L(\omega)$ вихідної нескоригованої системи відповідно до виразу (4.6). Так як нахили високочастотних ЛАХ $L_6(\omega)$ і $L(\omega)$ повинні збігатися, то приймаємо

$$\omega_3 \approx 10 \omega_2 = 70 \text{ с}^{-1}$$

і добудовуємо $L_6(\omega)$ так, як показано на рис. 4.20.

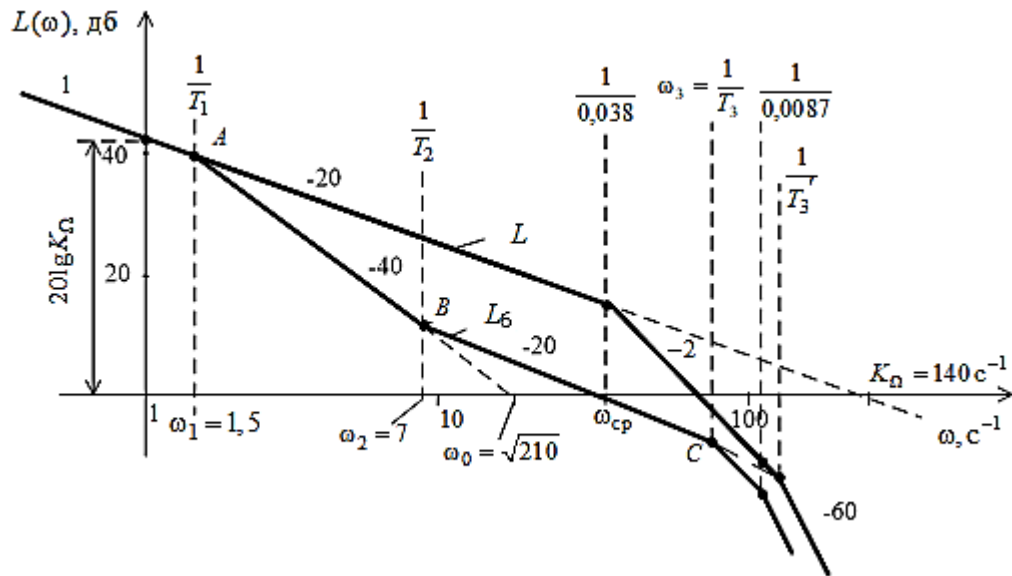


Рис. 4.20. Вихідна і бажана ЛАЧХ

Перевіряємо умову збереження запасів стійкості:

$$2 < \omega_3/\omega_{зр} < 4. \quad (4.8)$$

Знаходимо $\omega_3/\omega_{зр} = 70/30 = 2,3$.

Умова (4.8) виконується.

Далі, по бажаній ЛАЧХ записуємо передавальну функцію:

$$W_6(s) = \frac{K_\Omega(1+T_2s)}{s(1+T_1s)(1+T_3s)(1+T_4s)}.$$

Можна продовжити середньочастотну асимптоту бажаної ЛАЧХ до перетину з $L(\omega)$. Це дасть нову постійну часу $T=0,008 \text{ с}$. і передавальну функцію:

$$W_6(s) = \frac{140(1+0,143s)}{s(1+0,67s)(1+0,008s)(1+0,008s)}.$$

4.6 Типові схеми включення коригувальних пристроїв у САУ.

Синтез послідовного коригуючого пристрою.

Послідовний коригувальний пристрій вводиться у систему послідовно з основними елементами системи, які визначають початкову передавальну функцію розімкненої системи (рис. 4.21).

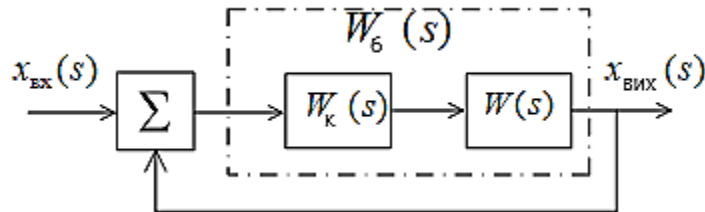


Рис. 4.21 Структурна схема системи з послідовною корекцією

З малюнку очевидно, що передаточна функція скорегованої системи дорівнює бажаній передаточній функції $W_{\delta}(s)$ і буде мати вигляд $W_{\delta}(s) = W_k(s)W(s)$, звідки передавальну функцію $W_k(s)$ коригувальної ланки знаходять з умови:

$$W_k(s) = \frac{W_{\delta}(s)}{W(s)}.$$

При переході до частотних характеристик ($s=j\omega$) $W_{\delta}(j\omega) = W_k(j\omega)W(j\omega)$ і до логарифмічних характеристик $L_{\delta}(\omega) = L_k(\omega) + L(\omega)$ з'являється можливість обчислити:

$$L_k(\omega) = L_{\delta}(\omega) - L_{пр}(\omega) \quad (4.9)$$

Отже, для визначення ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою необхідно :

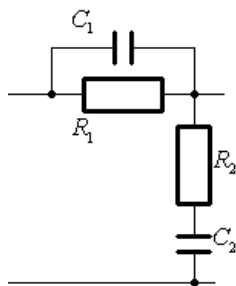
- побудувати ЛАЧХ початкової системи $L(\omega)$;
- побудувати ЛАЧХ бажаної системи $L_{\delta}(\omega)$;
- відняти від ЛАЧХ бажаної системи ЛАЧХ початкової системи;
- по знайдений ЛАЧХ $L(\omega)$ та таблицях (табл. 4.1, 4.2) коригувальних ланок вибрати електричну схему, яка відповідає знайдений формі $L(\omega)$;
- скласти передавальну функцію $W(s)$ коригувальної ланки та розрахувати її елементи;

- звести елементи коригувального пристрою до ряду, який визначається ДЕСТами, уточнити значення передавальної функції;
- визначити передаточну функцію скорегованої системи;
- побудувати перехідний процес та перевірити вимоги по виконанню заданих показників якості.

Якщо задані показники якості задовольняються, то задача синтезу вважається завершеною.

$$W_{\text{пс}}(s) = \frac{K}{(T_y s + 1)(T_d s + 1)s}; \quad W_{\text{к}}(s) = \frac{(T_2 s + 1)(T_d s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)};$$

$$W_{\text{с}}(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_d s + 1)s}$$



$$T_2 = R_1 C_1; \quad T_d = R_2 C_2; \quad T^1 = R_1 C_2;$$

$$T_1 T_3 = T_2 T_d$$

$$T_1 + T_3 = T_2 + T_d + T^1$$

Рис.4.22 Коригувальна ланка

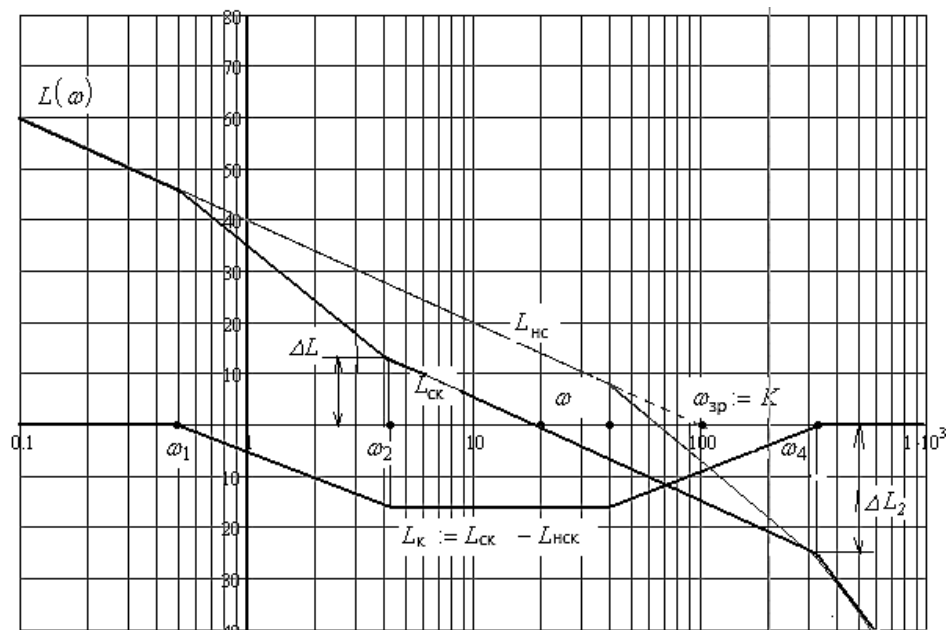


Рис 4.23 Логарифмічні характеристики

Синтез коригувального пристрою зворотного зв'язку.

Якщо бажана ЛАХ системи реалізується за допомогою коригувальних пристроїв типу місцевих зворотних зв'язків (рис. 4.24), то передавальна функція бажаної системи буде приймати вигляд:

$$W_6(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1+W_2(s)W_{33}(s)}, \text{ де } W_1(s)W_2(s)=W_{\text{пр}}(s).$$

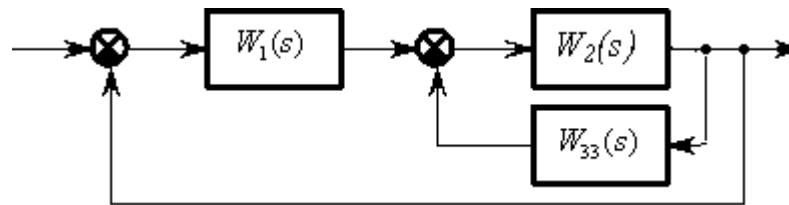


Рис. 4.24 Структурна схема системи з місцевим зворотним зв'язком

При цьому еквівалентна передавальна функція послідовного коригувального пристрою повинна мати вигляд:

$$W(s) = \frac{1}{1 + W_{33}(s)W_2(s)}.$$

Якщо $W_k(s)$ визначена, то $W_{33}(s)$ знаходиться зі співвідношення

$$W_{33}(s) = \frac{1 - W(s)}{W(s)W_2(s)} = \frac{1}{W_2(s)} \left(\frac{1}{W(s)} - 1 \right)$$

і залежить від ланок, які охоплюються місцевими зворотними зв'язками, тобто від $W_2(s)$.

Передавальна функція $W_{33}(s)$ може бути визначена і графічно, за допомогою логарифмічних характеристик.

Із структурної схеми (рис. 4.24) отримаємо: $W_{\text{пр}}(s)=W_1(s)W_2(s)$, $W_6(s) = \frac{W_{\text{пр}}(s)}{1+W_2(s)W_{33}(s)}$.

При переході до частотних характеристик ($s=j\omega$) розглянемо область, у якій виконується умова $|W_2(j\omega)W_{33}(j\omega)| \gg 1$. При цьому можна вважати, що

$$W_6(j\omega) \approx \frac{W_1(j\omega)}{W_{33}(j\omega)} = \frac{W_{\text{пр}}(j\omega)}{W_2(j\omega)W_{33}(j\omega)}.$$

Тобто характеристики системи практично не залежать від параметрів ланок, які охоплені зворотними зв'язками. Це слугує основою для того, щоб такими

місцевими зворотними зв'язками охоплювались ланки з найменш стабільними параметрами.

В області частот, у яких виконується умова $|W_2(j\omega)W_{33}(j\omega)| \ll 1$, можна вважати, що $W_6(s) \approx W_{\text{пр}}(s)$, тобто характеристики системи практично не залежать від параметрів коригувального пристрою.

Розглянемо співвідношення:

$$W_6(j\omega) \approx \frac{W_{\text{пр}}(j\omega)}{W_2(j\omega)W_{33}(j\omega)},$$

та побудуємо логарифмічні характеристики $L_6(\omega)$ та $L_{\text{пр}}(\omega)$.

Далі знайдемо $L_6(\omega) = L_{\text{пр}}(\omega) - L\{W_2(j\omega)W_{33}(j\omega)\} = L_{\text{пр}}(\omega) - [L_2(\omega) + L_{33}(\omega)]$

і визначимо $\Delta L(\omega) = L_2(\omega) + L_{33}(\omega)$. З останнього маємо: $L_{33}(\omega) = \Delta L(\omega) - L_2(\omega)$.

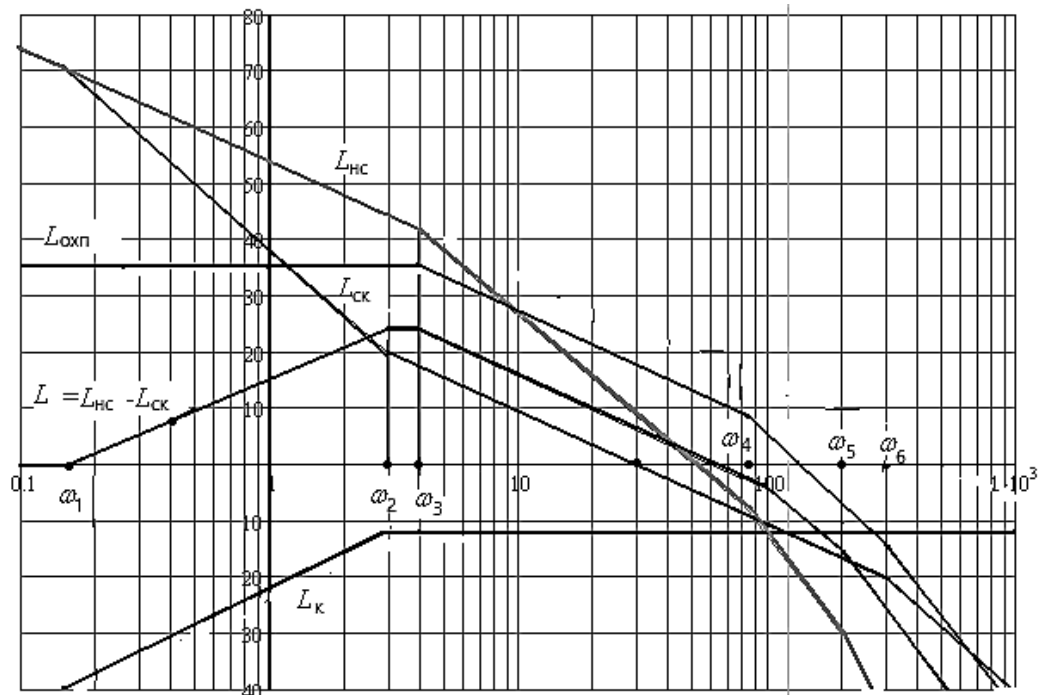


Рис. 4.25 Синтез за допомогою зворотних зв'язків

Отже, для визначення ЛАЧХ коригувального пристрою типу зворотного зв'язку необхідно:

- побудувати ЛАЧХ початкової системи $L_{\text{пр}}(\omega)$;
- побудувати ЛАЧХ бажаної системи $L_6(\omega)$;
- відняти від ЛАЧХ початкової системи $L_{\text{пр}}(\omega)$ ЛАЧХ бажаної системи $L_6(\omega)$, тобто визначити різницю $\Delta L(\omega)$;
- виходячи з технічних можливостей реальної системи визначити

частину системи, яка буде охоплюватися зворотнім зв'язком, та побудувати допоміжну ЛАЧХ $L_2(\omega)$;

- відняти від ЛАЧХ $\Delta L(\omega)$ ЛАЧХ ланок, які охоплюються зворотним зв'язком $L_2(\omega)$ та визначити шукану ЛАЧХ коригувальної ланки зворотного зв'язку $L_{зз}(\omega)$;

- по знайденій характеристиці $L_{зз}(\omega)$ та таблицях характеристик коригувальних ланок, вибрати електричну схему, яка відповідає знайденій $L_{зз}(\omega)$;

- скласти передавальну функцію коригувальної ланки та розрахувати її елементи;

- звести елементи коригувального пристрою до ряду, який визначається ДЕСТами, уточнити значення параметрів передавальної функції;

- дослідити стійкість контура, який охоплюється коригувальною ланкою;

- визначити передавальну функцію скоригованої системи та побудувати перехідний процес у скоригованій системі.

Якщо задані показники якості забезпечуються, то задача синтезу вважається виконаною.

Розрізняють жорсткий і гнучкий коригувальні зворотні зв'язки. Жорсткий зворотний зв'язок використовується для зниження інерційності окремої функціональної частини САУ і, як наслідок, для підняття ЛАЧХ в області середніх і високих частот. Це дозволяє спростити реалізацію послідовних коригувальних ланок. Покажемо практичну реалізацію такого підходу на наступному прикладі.

Приклад 4.3.

Нехай передавальна функція $W(s)=W_1(s)W_2(s)$ розімкнutoї нескоригованої САУ:

$$W(s) = \frac{100}{s(0,08s+1)}; \quad W_1(s) = 10; \quad W_2(s) = \frac{10}{1+0,08s}.$$

Відповідна ЛАЧХ $L(\omega)$ показана на малюнку 4.10. Виділимо в структурній схемі системи інерційну ланку з постійною часу $T_a = 0,08c$ і охопимо її жорстким від'ємним зворотним зв'язком з коефіцієнтом перетворення $k_{зз}$, як показано пунктиром на рис. 4.26.

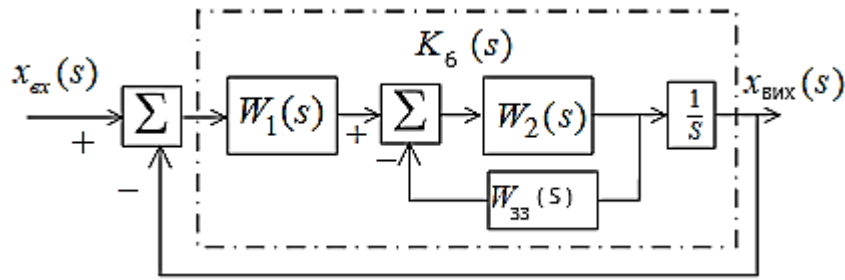


Рис. 4.26. Структурна схема САУ зі зворотним зв'язком

Згідно зі схемою (Рис. 4.26) визначимо нову передавальну функцію:

$$W_6(s) = \frac{100}{s(1+0,08s)(1+T_3s)(1+10k_{33})}.$$

У цьому виразі величину $\frac{1}{1+10k_{33}}$ покладемо рівною постійній часу $T_3 = 0,02$ с бажаної передавальної функції скоригованої системи. Тоді з рівності $\frac{0,08}{1+10k_{33}} = 0,02$.

$$\text{Звідси: } 1 + 10k_{33} = \frac{0,08}{0,02} = 4 \text{ і } k_{33} = 0,3.$$

Жорсткий зворотний зв'язок зменшує коефіцієнт перетворення ланки в $\frac{1}{1+10k_{33}}$.

Тому для збереження заданої добротності системи коефіцієнт посилення ланки в прямому ланцюзі на вході суматора необхідно збільшити в $1 + 10k_{33} = 1 + 10 \cdot 0,3 = 4$ рази.

В результаті на рис. 4.27 показана структурна схема розімкнутої САУ з жорстким зворотним зв'язком, виділена пунктиром на рис. 4.26.

Її передавальна функція приймає наступний вигляд:

$$W(s) = \frac{100}{s(1 + 0,02s)}$$

і відповідає ЛАЧХ $L(\omega)$, показаної на рис. 4.19.

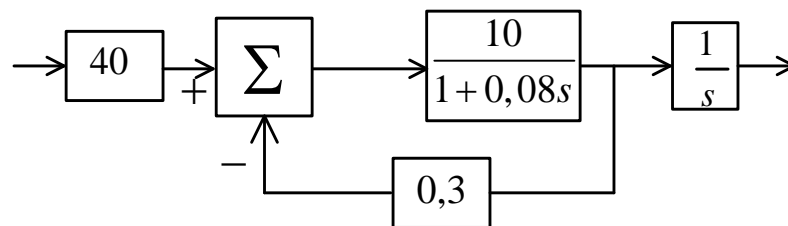


Рис.4.27. Структурна схема розімкнутої САУ з жорстким зворотним зв'язком

Гнучкий зворотний зв'язок грає в САУ ту ж роль, що і послідовна корекція. Однак її реалізація виявляється часто простішою.

Для отримання передавальної функції $W_{33}(s)$ гнучкого зворотного зв'язку доцільно отримати спочатку передавальну функцію $W_k(s)$ послідовної корекції, а далі перерахувати її в еквівалентний зворотний зв'язок за формулою:

$$W_{33}(s) = \frac{1-W_k(s)}{W_k(s)W_2(s)}, \quad (4.10)$$

де $W_2(s)$ – передавальна функція елементів системи, що охоплюються зворотним зв'язком. Покажемо практичну реалізацію такого підходу на наступному прикладі.

Приклад 4.4.

Структурна схема скоригованої САУ має вигляд (рис. 4.26.)

Передавальні функції частин вихідної САУ:

$$W_1(s) = 10; \quad W_2(s) = \frac{10}{1+0,08s}.$$

Визначимо бажану передавальну функцію скоригованої САУ з гнучким зворотним зв'язком як:

$$W_6(s) = \frac{100(1+0,2s)}{s(1+0,8s)(1+0,02s)}.$$

Необхідно визначити вид і параметри передавальної функції $W_{зз}(s)$.

Передавальна функція нескоригованої системи:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) \frac{1}{s} = \frac{100}{s(1+0,08s)}.$$

Передавальна функція коригуючої ланки послідовного типу:

$$W_{пт}(s) = \frac{(1+0,2s)(1+0,08s)}{(1+0,8s)(1+0,02s)}.$$

Звідси, передавальна функція коригувального зворотного зв'язку з урахуванням виразу (4.10), має вигляд:

$$W_{зз}(s) = \frac{0,054s}{(1+0,2s)}.$$

Паралельна корекція

Використовується для введення в закон регулювання інтеграла і похідної від помилки управління. Введення інтеграла зменшує усталені помилки, а похідної – перерегулювання.

Пристрої, що реалізують принципи паралельної корекції в САУ, називають зазвичай регуляторами пропорційно-інтегрального (ПІ), пропорційно-диференціального (ПД) і пропорційно-інтегрально-диференціального (ПІД) дії.

Структурна схема ПІД регулятора показана на рис. 4.28. Розрахунок регулятора полягає у визначенні значень K_p , T_i і T_d за заданими вимогами до якості системи.

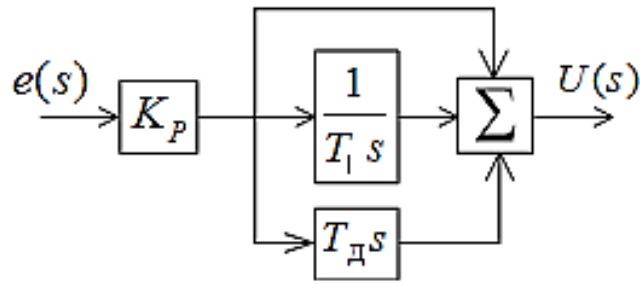


Рис.4.28. Структурна схема ПД регулятора

Покажемо практичну реалізацію такого підходу на наступному прикладі.

Приклад 4.5.

Структурна схема САУ в нашому випадку має вигляд (рис. 4.29)

Параметри САУ: $K_0 = 9$, $T_{01} = 0,8$ с, $T_{02} = 0,04$ с.

Заданий вплив на вході системи: $x_{\text{вх}}(t) = 1$.

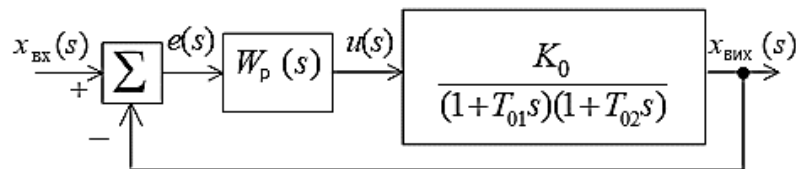


Рис. 4.29. Структурна схема САУ

Визначити передавальну функцію регулятора $W_p(s)$, яка усуває усталену помилку і зберігає незмінним коефіцієнт демпфірування ξ .

Характеристичне рівняння системи без регулятора ($W_p(s)=1$):

$$T_{01}T_{02}s^2 + (T_{01} + T_{02})s + (1 + K_0) = 0. \quad (4.11)$$

Зводимо до рівняння стандартного вигляду:

$$s^2 + 2\xi\omega_1 s + \omega_1^2 = 0 \quad (4.12)$$

шляхом ділення всіх членів рівняння (4.11) на величину $T_{01}T_{02}$. Отримаємо:

$$s^2 + \frac{T_{01}+T_{02}}{T_{01}T_{02}}s + \frac{1+K_0}{T_{01}T_{02}}. \quad (4.13)$$

Зіставляючи рівняння (4.12) і (4.13) знаходимо:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+K_0}{T_{01}T_{02}}} = \sqrt{\frac{1+9}{0,8 \cdot 0,04}} = 17,68 \text{ с}^{-1},$$

$$\xi = \frac{1}{2\omega_1} \frac{T_{01}+T_{02}}{T_{01}T_{02}} = \frac{1}{2 \cdot 17,68} \frac{0,8+0,04}{0,8 \cdot 0,04} = 0,74.$$

При одиничній ступінчастій функції $x_{\text{вх}}(t) = 1$ в САУ встановлюється значення помилки:

$$e_n = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{0,8 \cdot 0,04s^2 + (0,8 + 0,04)s + 1}{0,8 \cdot 0,04s^2 + (0,8 + 0,04)s + 1 + 9} = 0,1.$$

Для усунення помилки в закон управління необхідно ввести інтегральну складову.

Вибираємо структурну схему ПІ регулятора (рис. 4.28 при $T_d = 0$).

Записуємо передавальну функцію розімкнутої системи з ПІ регулятором:

$$W_6(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \frac{9}{(1+0,8s)(1+0,04s)} = \frac{9K_p}{T_I} \frac{1+T_I s}{(1+0,8s)(1+0,04s)}.$$

Параметр T_I вибирається довільно. Вважаємо $T_I = 0,8$ с. Тоді отримаємо:

$$W_6(s) = \frac{9K_p}{0,8} \frac{1}{s(1+0,04s)}.$$

Щоб визначити K_p напишемо характеристичне рівняння системи з регулятором

$0,04s^2 + 1s + \frac{9}{0,8} K_p = 0$ і наведемо його до рівняння виду:

$$s^2 + \frac{1}{0,04} s + \frac{9}{0,8 \cdot 0,04} K_p = 0. \quad (4.14)$$

Зіставляючи рівняння (4.14) і (4.12), а також, враховуючи, що коефіцієнт демпфірування $\xi = 0,74$ необхідно зберегти незмінним, отримаємо:

$$\omega_1 = \frac{1}{2\xi} \frac{1}{0,04} = \frac{1}{2 \cdot 0,74 \cdot 0,04} = 16,9 \text{с}^{-1},$$

$$K_p = \omega_1^2 \frac{0,8 \cdot 0,04}{9} = \frac{16,9^2 \cdot 0,8 \cdot 0,04}{9} = 1,02.$$

4.7 Синтез інваріантних САУ

Однією з головних задач синтезу автоматичної системи є забезпечення необхідної точності в усталених і перехідних режимах. Точність систем в усталених режимах можна підвищити за рахунок збільшення порядку астатизму і коефіцієнта передачі розімкнутого контуру. Але цей шлях призводить до зменшення запасу стійкості, збільшення коливальності і зниження точності системи в перехідних режимах. Ефективним способом вирішення завдання забезпечення точності в усталених і перехідних режимах є компенсація зовнішніх впливів шляхом реалізації принципу інваріантності.

"Інваріантність" означає незалежність однієї фізичної величини від іншої. У ТАУ розглядають незалежність в основному двох вихідних величин: вихідної величини і сигналу помилки від вхідних впливів. У системах стабілізації

необхідно домагатися незалежності вихідної величини від збурення, а у системах, що стежать – незалежності сигналу помилки від заданого впливу.

Інваріантність в САУ досягається компенсацією збурення, коли керуючий вплив формується в залежності від змін збурення. Цей принцип управління застосуємо, якщо збурюючий вплив вимірювано. Зазвичай принцип управління по збуренню застосовують в поєднанні з принципом управління по відхиленню, тобто необхідно реалізувати принцип комбінованого управління.

Інваріантність САУ по збуренню

Приклад 4.6.

Розглянемо реалізацію принципу комбінованого управління на прикладі структурної схеми системи стабілізації з компенсуючим зв'язком по збуренню z , представлену на рис. 4.30. Тут компенсуючий зв'язок діє на вихідну величину зі знаком, який завжди повинен бути протилежний знаку безпосереднього впливу збурення на вихід даної системи стабілізації.

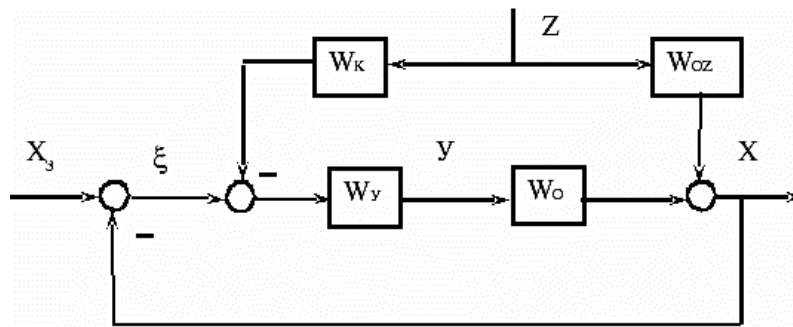


Рис. 4.30. Структурна схема інваріантній системи стабілізації

Передавальна функція САУ стабілізації по збуренню має вид:

$$\Phi_{xz}(s) = \frac{x(s)}{z(s)} = \frac{W_{oz}(s) - W_k(s)W_y(s)W_o(s)}{1 + W_y(s)W_o(s)},$$

де $W_o(s)$ і $W_{oz}(s)$ – передавальні функції об'єкта відповідно по керуючому впливу і збуренню; $W_y(s)$ – передавальна функція керуючого пристрою; $W_k(s)$ – передавальна функція компенсуючого пристрою.

Очевидно, що керована величина $x(t)$ не залежить від збурення $z(t)$, якщо

$$\Phi_{xz}(s) = 0.$$

Ця умова виконується, якщо дорівнює нулю чисельник передавальної функції $\Phi_{xz}(s)$, тобто умова інваріантності стабілізованої величини запишеться як:

$$W_{oz}(s) - W_k(s)W_y(s)W_o(s) = 0.$$

З останнього виразу випливає, що для досягнення незалежності величини $x(t)$ від збурення $z(t)$ необхідно, щоб динамічні властивості двох паралельних каналів, за якими збурення $z(t)$ діє на вихідну змінну САУ $x(t)$, були однаковими.

Ця умова може бути виконана для даної САУ стабілізації в разі, якщо

$$W_k(s) = W_{oz}(s) / W_y(s)W_0(s).$$

Передавальна функція компенсуючого пристрою відповідає динамічній ланці, властивості якої визначаються властивостями каналів збурення $W_{oz}(s)$ і управління $W_y(s)W_0(s)$. Якщо інерційність каналу управління більше, ніж інерційність каналу збурення, то компенсуючий пристрій повинен володіти властивостями диференціюючої ланки. Причому, чим більше різниця цих інерційностей, тим вище повинен бути порядок диференціюючої ланки. Такі ланки технічно важко реалізувати.

Інваріантність САУ по заданому впливу

Приклад 4.7.

Розглянемо реалізацію принципу комбінованого управління на прикладі САУ стабілізації з компенсуючим зв'язком по заданому впливу (рис. 4.31).

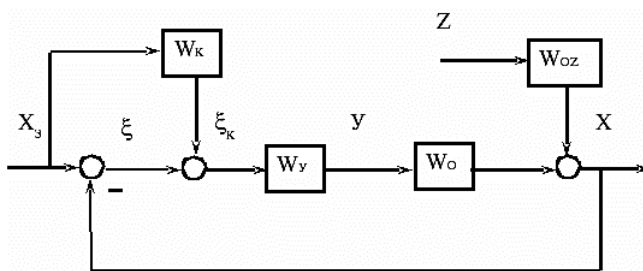


Рис. 4.31 Структурна схема інваріантної системи, що стежить

Для структурної схеми, наведеної на рис.4.31, передавальна функція між точкою застосування заданого впливу $x(t)$ і точкою виходу сигналу помилки $\xi(t)$:

$$\Phi_{\xi z}(s) = \frac{1 - W_k(s)W_y(s)W_0(s)}{1 + W_y(s)W_0(s)}.$$

Прирівнюючи передавальну функцію $\Phi_{\xi z}(s)$ до нуля, визначимо умову інваріантності помилки стеження даної САУ по відношенню до заданого впливу $x_3(t)$:

$$1 - W_k(s)W_y(s)W_0(s) = 0,$$

звідки визначається необхідна передавальна функція компенсуючого пристрою як:

$$W_k(s) = 1 / W_y(s)W_0(s).$$

З передавальних функцій розглянутих вище прикладів випливає, що компенсуючі зв'язки не змінюють характеристичний поліном вихідної некомпенсованої САУ, тобто не впливають на стійкість компенсованої САУ.

Теоретично в САУ можна досягти абсолютної інваріантності. В цьому випадку передавальна функція замкнутої системи повинна дорівнювати одиниці. Це означає, що така САУ повинна мати смугу пропускання по частоті без амплітудних і фазових спотворень, рівну нескінченності. У реальних системах забезпечити нескінченну смугу пропускання неможливо, тому реалізація повної інваріантності по керуючому впливу пов'язана з принциповими труднощами, які обумовлені реалізованістю передавальної функції коригувального пристрою, що зменшує помилку системи. Якщо $W_k(s)$ реалізована наближено, то в системі здійсненна часткова інваріантність. Проте, реалізація навіть часткової інваріантності може значно підвищити точнісні характеристики замкнутих САУ.

4.8. Корекція якості динамічних процесів в лінійних багатовимірних САУ

Якісні показники лінійних багатовимірних САУ визначаються в основному розташуванням найближчих до початку координат комплексної площини коренів характеристичного полінома, що мають назву домінуючих, а також взаємним розташуванням інших коренів (див. розділ 2). Перерозподіл коренів може бути досягнутий синтезом відповідної структури регулятора в зворотному зв'язку замкненої САУ. Це може не тільки підвищити якість динамічних процесів в САУ, але і забезпечити стійкість замкненої САУ.

Якщо $\lambda_0 = \varepsilon_0 + i\omega_0$ – домінуючий корінь, то рішення лінійної багатовимірної САУ можна наближено записати у вигляді:

$$x_j = x_j(t_0) e^{\varepsilon_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_j) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4.15)$$

Величину ω_0 обираємо рівною $1/t_{\text{нп}}$. При цьому за час $t_{\text{нп}}$ перехідного процесу змінна $x_j(t)$ повинна здійснити одне коливання навколо положення рівноваги і буде прагнути до нього з протилежної, відносно початкового збурення, сторони, що дуже бажано з фізичних міркувань. Звідси, ε_0 обирається з виразу:

$$\frac{x_j(t_{nn})}{x_j(t_0)} \leq e^{\varepsilon_0 t_{nn}} \leq \xi, \quad (4.16)$$

де ξ – ступень загасання перехідного процесу.

Щоб уникнути перерегулювання, інші корені характеристичного полінома слід розміщувати якомога ближче до домінуючих з виконанням умови:

$$\begin{aligned} \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots; \\ |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \dots, \end{aligned} \quad (4.17)$$

щоб складові з великим коливанням загасали швидше

$$|\lambda_k| - |\lambda_{k-1}| > 0,1(|\lambda_k|) \quad (4.18)$$

і щоб корені не зливалися в кратні.

Для зменшення часу перехідного процесу бажано корені розташовувати на комплексній площині якомога лівіше. Однак обмеження на змінні стану накладають певні обмеження і на модулі коренів.

Враховуючи (4.14) записуємо:

$$x_j = \frac{d}{dt} x_j = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x(t_0) e^{\varepsilon t} \cos(\omega t + \varphi_{j1}) = \max \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0). \quad (4.19)$$

Кожне j -е рівняння системи (4.16) породжує дві верхні границі модулів коренів характеристичного полінома, викликані одним і тим же обмеженням на ліву і праву частини j -го рівняння системи (4.15).

З урахуванням виразу (4.19) визначаємо:

Для лівої частини j -го рівняння:

$$\max_t \max_{\lambda} x_j = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0) e^{\varepsilon t} \cos(\omega t + \varphi_{j1}) = \max \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0). \quad (4.20)$$

Для правої частини j -го рівняння:

$$\max_t \max_{\lambda} \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq \sum_{i=1}^n |a_{ji} x_i(t_0)|. \quad (4.21)$$

Порівнюючи вирази (4.20) і (4.21), через відсутність явної залежності нерівності (4.16) від модуля коренів, можемо записати наступну нерівність:

$$\max_{\lambda} \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |a_{ji} x_i(t_0)|}{x_j(t_0)}. \quad (4.22)$$

Найбільш жорстке обмеження виду (4.17) дасть ліву межу розташування коренів характеристичного полінома. При цьому прагнення до збільшення для

прискорення загасання процесу відбувається до мінімізації з урахуванням виразів (4.20) і (4.21).

Розташування коренів може бути скориговано після моделювання перехідного процесу, виходячи з накладених на змінні стану обмежень, шляхом зміни коефіцієнтів характеристичного полінома.

Нехай на j -ту змінну стану накладено обмеження $|x_j| \leq x_j^{\text{зад}}$. При моделюванні отримаємо $\max |x_j| \leq x_j^{\text{зад}}$. В цьому випадку множенням коефіцієнтів характеристичного полінома при ступені 1 на величину $\left[\frac{x_j^{\text{зад}}}{x_j}\right]$ гомотетично зрушуємо всі корені відносно початку координат (згідно з теоремою Вієта) з коефіцієнтом гомотетії $\frac{x_j^{\text{зад}}}{x_j}$ [100]. Також відповідно до виразу (4.21) зміниться значення $\max |x_j|$. Таким чином, синтезом лінійних замкнених систем за наведеною процедурою можна забезпечити в них необхідні динамічні властивості.

Контрольні питання і завдання

1. Дати визначення поняттю "декада" стосовно логарифмічних частотних характеристик.
2. Дати визначення логарифмічної амплітудної частотної характеристики.
3. Дати визначення логарифмічної фазової частотної характеристики.
4. Перерахувати основні переваги логарифмічних частотних характеристик в порівнянні зі звичайними частотними характеристиками.
5. Передавальна функція ланки $W(s) = 100$. Як залежить від частоти ЛАЧХ цієї ланки? Визначте ЛАЧХ цієї ланки.

Відповідь: ЛАЧХ не залежить від частоти, $L(\omega) = 40 \text{ дБ}$.

6. Передавальна функція ланки:

$$W(s) = \frac{1}{0,1s}$$

Визначте значення ЛАЧХ цієї ланки при частоті $\omega = 10 \text{ рад/с}$.

Відповідь: $L(\omega)_{\omega=10} = 0 \text{ дБ}$.

7. Передавальна функція ланки $W(s) = 100\sqrt{2} \cdot s$.

Визначте нахил ЛАЧХ цієї ланки.

Відповідь: нахил ЛАЧХ цієї ланки становить 20 дБ/дек .

8. Задані: допустиме значення помилки по швидкості $\delta_c = 4$ кут. хв. при $\Omega_{\max} = 0,14c^{-1}$ і прискорення $\varepsilon_{\max} = 0,21c^{-2}$.

Визначте параметри низькочастотної (НЧ) частини бажаної ЛАЧХ при наступних умовах:

- а) $\omega_1 = 2\omega_K$; б) $\omega_1 = \omega_K$; в) $\omega_1 = 0,6\omega_K$.

Відповідь: параметри НЧ частини бажаної ЛАЧХ:

- а) $K_\Omega = 120c^{-1}$, $\omega_1 = 3c^{-1}$, $\omega_0 = 20c^{-1}$;
б) $K_\Omega = 170c^{-1}$, $\omega_1 = 1,5c^{-1}$, $\omega_0 = 16c^{-1}$;
в) $K_\Omega = 200c^{-1}$, $\omega_1 = 0,9c^{-1}$, $\omega_0 = 13,4c^{-1}$.

9. Побудувати середньочастотну (СЧ) частину бажаної ЛАЧХ при наступних даних:

- а) $\omega_0 = 16c^{-1}$, $M = 1,2$; б) $\omega_0 = 18c^{-1}$, $M = 1,24$; в) $\omega_0 = 18c^{-1}$, $M = 1,18$.

Відповідь: Сполучні частоти СЧ частини асимптоти:

- а) $\omega_2 = 6,5c^{-1}$, $\omega_3 = 72c^{-1}$;
б) $\omega_2 = 7,9c^{-1}$, $\omega_3 = 74c^{-1}$;
в) $\omega_2 = 7c^{-1}$, $\omega_3 = 85c^{-1}$.

10. Побудувати середньочастотну (СЧ) частину бажаної ЛАЧХ, якщо дано: добротність САУ по швидкості $D_\Omega = 150c^{-1}$, добротність по прискоренню $180 c^{-2}$, максимальне перерегулювання $\sigma \leq 38\%$, час регулювання перехідного процесу $t_p \leq 0,5c$.

Відповідь: частота зрізу $\omega_{зр} \geq 26c^{-1}$, сполучні частоти: $\omega_2 = 7c^{-1}$, $\omega_3 = 70c^{-1}$.

11. Вибрати вид бажаної ЛАЧХ і розрахувати параметри бажаної передавальної функції САУ, яка повинна забезпечувати час регулювання перехідного процесу $t_p \leq 0,15c$ і значення помилки по швидкості $\delta_c \leq 3$ кут. хв. при швидкості зміни заданого впливу на вході системи $\Omega_{вх} = 0,24c^{-1}$. Показник коливальності САУ $M = 1,38$, не більше.

Рекомендація. При вирішенні скористатися співвідношенням $t_p = \eta\pi/\omega_{зр}$, звідки $\omega_{зр}t_p = 7,85$.

Відповідь: $W_e(s) = \frac{(1+0,2s)(1+0,08s)}{(1+0,8s)(1+0,02s)}$.

12. На рис. 4.32 зображені логарифмічні амплітудні характеристики скоригованої розімкнутої системи $L_6(\omega)$ і розімкнутої системи $L(\omega)$.

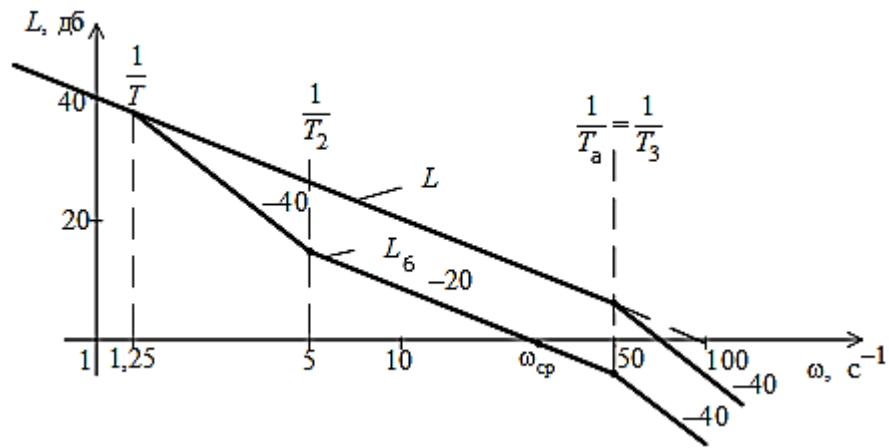


Рис. 4.32. Вихідна $L(\omega)$ і бажана $L_d(\omega)$ частотні характеристики розімкнutoї САУ

Записати передавальну функцію $W(s)$ коригувальної ланки.. Визначити запас стійкості по фазі скоригованої системи.

Відповідь: $W(s) = (1+0,2s)/(1+0,8s)$; $\Delta\varphi(\omega_{зр}) = 52^\circ$

13. Частотні логарифмічні амплітудні характеристики $L_d(\omega)$ для скоригованої системи і $L(\omega)$ для САУ, що складається з функціонально необхідних елементів, показані на малюнку 4.32.

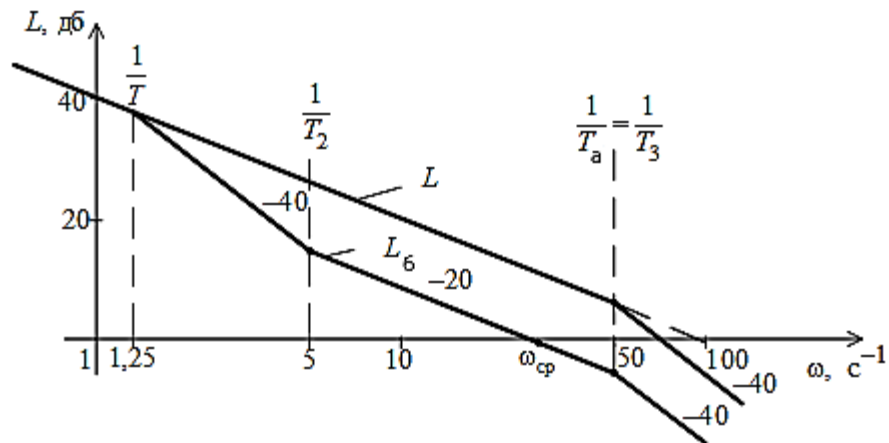


Рис.4.32. Вихідна $L(\omega)$ і бажана $L_d(\omega)$ частотні характеристики розімкнutoї САУ

Визначити передавальну функцію послідовно включених коригувальних ланок і розрахувати їх параметри. Розрахувати запас стійкості по фазі $\Delta\varphi(\omega_{зр})$ скоригованої системи і оцінити показники якості в перехідному режимі

Відповідь: $W_k(s) = \frac{1+T_2s}{1+T_1s} \cdot \frac{1+T_as}{1+T_3s} = \frac{1+0,2s}{1+0,8s} \cdot \frac{1+0,08s}{1+0,02s}$;

$\Delta\varphi(\omega_{зр}) = 52^\circ$; $\sigma = 20\%$; $t_p = 0,4c$.

14. Структурна схема скоригованої САУ відповідає рис.4.26.

Передавальні функції частин нескоригованої системи:

$$W_1(s) = \frac{20,6}{(1+0,01s)}, \quad W_2(s) = \frac{10}{(1+0,54s)}.$$

Бажана передавальна функція розімкнутої системи $W_6(s)$:

$$W_6(s) = \frac{206(1+0,118s)}{s(1+0,625s)(1+0,0145s)(1+0,01s)}.$$

Визначте передавальну функцію і параметри коригувального зворотного зв'язку.

Відповідь: $W_{33}(s) = \frac{0,047s(1+0,0057s)}{(1+0,118s)}.$

Отримана передавальна функція $W_{33}(s)$ фізично не може бути реалізована, так як ступінь полінома чисельника більше ступеня полінома знаменника. Однак оскільки постійна часу $0,0057 \ll 0,118c$, тому її впливом можна знехтувати і на цій підставі записати:

$$W_{33}(s) = \frac{0,047s}{(1+0,118s)}.$$

15. Структурна схема скоригованої САУ відповідає рис. 4.26.

Передавальні функції частин початкової нескоригованої САУ:

$$W_1(s) = \frac{62,6}{(1+0,01s)}, \quad W_2(s) = \frac{5}{(1+0,08s)}.$$

Бажана передавальна функція розімкнутої системи:

$$W_6(s) = \frac{313(1+0,12s)}{s(1+0,91s)(0,012s)(1+0,01s)}.$$

Визначте передавальну функцію і параметри коригувального зворотного зв'язку.

Відповідь: $W_{33}(s) = \frac{0,144s}{(1+0,12s)}.$

16. На рис. 4.33 зображена структурна схема скоригованої САУ:

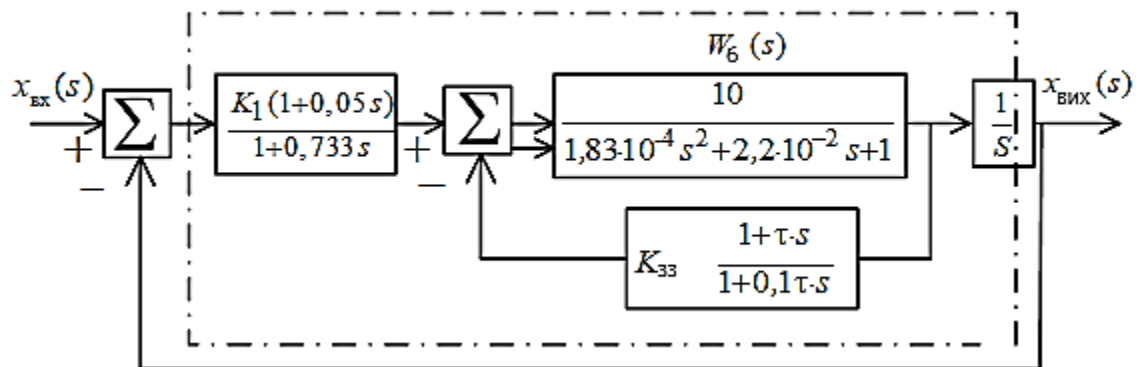


Рис. 4.33. Структурна схема скоригованої САУ:

Передавальна функція САУ в розімкнутому стані має вигляд:

$$W_6(s) = \frac{1000(1+0,05s)}{s(1+0,733s)(1+0,0051s)(1+0,0014s)}.$$

Визначити чисельні значення параметрів схеми: K_1 , K_{33} і τ , що забезпечують бажану передавальну функцію $W_6(s)$.

Рекомендація. При визначенні параметрів покласти $0,1\tau \approx 0$.

Відповідь: $K_1 = 2500$, $K_{33} = 24$, $\tau \approx 0,006c$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Н.П.Деменков, Е.А.Микрин Управление в технических системах. Учебник. -М: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. -456с.
2. А. А. Иванов, С. Л. Торохов. Управление в технических системах. Учебное пособие. - Москва: Форум, 2012. - 271 с.
3. Кузнецов Е.С. Управление техническими системами: Учебное пособие / МАДИ(ТУ) -М., 2003. -247с.
4. Управление техническими системами: учеб. пособие / Г.О. Трифонова, В.В. Буренин, О.И. Трифонова. – М.: МАДИ, 2019. – 192 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – Спб.: Профессия, 2003. – 752 с.
6. Иващенко, Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем Текст.: учебник для вузов / Н. Н. Иващенко. изд. 4-е перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1978. - 736 с.
7. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. Підручник. — 2-ге вид. , перероб. і доп. — К. : Либідь, 2007. — 656 с.
8. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: Курс лекцій для студ. спец. напряму "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" ден., заочн. та скороч. форм навчання – К.: НУХТ, Ч.1, 2004. -174 с. Ч.2,2006. – 169 с.
9. Денисенко В.А., Бобриков С.О., Гончаренко О.Є. Теорія автоматичного управління. Навчальний посібник.– Одеса: ОДАХ, 2010 р.,100 с.
- 10.Сборник задач по теории автоматического управления: учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей / сост. В.А. Бороденко. – Павлодар: Кереку, 2009. – 112 с.
- 11.А. Т. Доманов, С. В. Лукьянец Теория автоматического управления. Практикум. -Минск: Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники 2008. – 75 с.
12. Бесекерский В.А., Герасимов А.Н. и др., Сборник задач по теории автоматического управления, издание 5. - М.: Наука,1978. - 512 с.