

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Л. Р. Ладієва**

## **ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 151  
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ  
КПІ ім.. Ігоря Сікорського  
2020

Рецензент: Корнієнко Б.Я., д-р техн. наук, проф.

Відповідальний редактор Жученко А.І., д-р техн. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім.. Ігоря Сікорського (протокол №10 від 18.06.2020р.)

За поданням Вченої ради інженернохімічного факультету (протокол №3 від 13.04.2020р.)

Електронне мережне навчальне видання

Ладієва Леся Ростиславівна, канд..техн.наук, доц.

### Оптимізація систем керування

Оптимізація систем керування.: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Л. Р. Ладієва; КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2020, 211с.

У навчальному посібнику дано систематизоване викладення питань сучасної теорії оптимального керування системами. Навчальний посібник є введенням в теорію оптимізації, де викладені постановки задач оптимізації, методи дослідження функцій класичного аналізу, множників Лагранжа, лінійного програмування. Розглянуті методи нелінійного програмування при наявності обмежень і без них. Викладення ілюструється прикладами вирішення задач оптимізації. Приділена увага проблемі оптимізації великих систем і декомпозиційним методам оптимізації. Розглядається оптимальне керування при детермінованих вхідних сигналах систем з зосередженими параметрами.

Навчальний посібник призначений студентам і аспірантам, що спеціалізуються в області автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій, а також інших спеціальностей, які пов'язані з розробкою систем оптимального керування.

© Л.Р.Ладієва,2020

© КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2020

## ВСТУП

Математична теорія оптимізації пропонує допоміжний засіб, що робить можливим систематичну розробку рішень. Передумовою для використання цього допоміжного засобу є формулювання в математичних термінах відповідної задачі, тобто упорядкування математичного опису для обмежень, дій і досягнення мети шуканих рішень. Спектр галузей застосування, що припускають таку формалізацію, простирається від функціонування підприємств і державної економіки до інженерних наук і, зокрема, техніки управління і регулювання.

Сила теорії оптимізації впливає з загального характеру її використання. Якщо клас проблем оптимізації буде тільки якимось формалізований і буде показана їхня можливість розв'язання з використанням відповідних засобів, то відповідні алгоритми зможуть застосовуватися до широкого спектра спеціальних галузей, що можуть охоплювати як економіку держави, так і керування пристроями.

Теорія оптимізації надає готові допоміжні засоби рішення, що можуть використовуватися після формулювання проблеми оптимізації. Але, не може бути виконана формалізація перекладу словесного формулювання задачі в математичні терміни, без застосування досвіду і кваліфікації постановника задачі. Звісно ж у знанні методів оптимізації лежить головна передумова раціонального їх застосування. Даний посібник є вступом у теорію оптимізації і знайомить з додатками цієї теорії до рішення ряду задач, що виникають в інженерній практиці. У найбільш загальному змісті теорія оптимізації являє собою сукупність фундаментальних математичних результатів і чисельних методів, орієнтованих на вибір й ідентифікацію найкращих варіантів із множини альтернатив і що дозволяють уникнути повного перебору й оцінювання можливих варіантів.

Класифікація проблем оптимізації і методів може провадитися на основі різноманітних аспектів. Якщо мова йде про статичну область оптимізації (формальне формулювання: якщо змінні рішення є елементами евклідового простору), то відповідні методи і проблеми відносяться до області статичної оптимізації, що викладена в даному посібнику. Якщо ж, навпаки, шукані змінні рішення є функціями, наприклад, часу (формальне формулювання: якщо змінні рішення є елементами гільбертового простору) - або інших функцій, то мова буде йти про динамічні проблеми оптимізації, що також описуються в даному посібнику і більш детально в посібнику "Оптимальне керування системами". Якщо ж, нарешті, задача оптимізації пов'язана зі стохастичними процесами, то необхідно говорити про методи стохастичної оптимізації.

# 1. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Процес оптимізації лежить в основі усієї інженерної діяльності, оскільки класичні функції інженера полягають у тому, щоб, з одного боку, проектувати нові, більш ефективні і менше дорогі технічні системи і, з іншого боку, розробляти методи підвищення якості функціонування існуючих систем.

Ефективність оптимізаційних методів, що дозволяють здійснити вибір найкращого варіанта без безпосередньої перевірки всіх можливих варіантів, тісно пов'язана із широким використанням досягнень в галузі математики шляхом реалізації ітеративних обчислювальних схем, що спираються на суворо обґрунтовані логічні процедури й алгоритми, на базі застосування обчислювальної техніки. Тому для викладу методологічних основ оптимізації потрібно залучення найважливіших результатів теорії матриць, елементів лінійної алгебри і диференціального числення, а також положень математичного аналізу.

Оскільки розмірність інженерних задач, як правило, достатньо велика, оптимізаційні методи орієнтовані головним чином на реалізацію за допомогою ЕОМ.

Методи оптимізації ефективно застосовуються при проектуванні і керуванні технологічними процесами. При проектуванні технологічних процесів і виробництв, а також систем керування вибираються найкращий метод виробництва, схема виробництва, технологічний режим, варіант системи керування. При експлуатації технологічних процесів і виробництв бажано забезпечити найкращий технологічний режим за допомогою оптимальної системи керування. В цих випадках виникає питання: а що таке “найкращий”? Вихідною величиною при аналізі технологічних ланок з точки зору оптимального керування повинна служити техніко-економічна ефективність ведення процесу чи проектування. Рішення задач оптимізації з використанням технічних засобів, особливо ЕОМ пов'язано з коректною постановкою задачі оптимізації. Це особливо актуально в зв'язку з широким застосуванням систем автоматизації проектування (САПР) і автоматизованих систем керування технологічними процесами (АСУ ТП).

Перша і відповідальна задача розробки алгоритмів прийняття оптимальних рішень при проектуванні і керуванні технологічних процесів, постановка задачі оптимізації. Від її грамотного формулювання в значній мірі залежить алгоритмів оптимізації.

## 1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ.

Для того, щоб використати математичні результати і чисельні методи теорії оптимізації для рішення конкретних інженерних задач, необхідно встановити межі системи, що підлягає оптимізації, визначити кількісний критерій, на основі якого можна зробити аналіз варіантів із метою виявлення оптимального, здійснити вибір змінних, що використовуються для визначення характеристик і ідентифікації варіантів, і нарешті, побудувати модель, що відображає взаємозв'язки між змінними. Ця послідовність дій складає зміст процесу постановки задачі оптимізації. Коректна постановка задачі служить ключем до успіху оптимізаційного дослідження й асоціюється в більшому ступені з мистецтвом, ніж із точною наукою.

Для правильної (коректної) постановки задачі оптимізації необхідне виконання умов: наявність одного критерію оптимальності;

наявність у об'єкту оптимізації ступенів свободи, для об'єкту керування – керуючих впливів;

можливість кількісної оцінки оптимізуємої величини.

Постановка задачі оптимізації передбачає існування конкуруючих властивостей об'єкту. Вибір компромісного рішення і представляє у таких випадках процедуру рішення оптимальної задачі. В часткових задачах оптимізації, коли потрібно отримати екстремальні значення якого-небудь параметра оптимізації, конкуруючи властивості можна і не виявити.

Можливість існування специфічних екстремальних властивостей самого об'єкту

оптимізації потрібно врахувати при розгляді конкретної оптимальної задачі.

При формулюванні задачі оптимізації можна виділити ряд послідовних етапів:

- визначення меж системи;
- вибір критерію оптимальності;
- вибір незалежних змінних;
- побудова математичної моделі системи.

### 1.1.1 ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖ СИСТЕМИ

Перед тим, як приступити до оптимізаційного дослідження, важливо чітко визначити межі досліджуваної системи. Межі системи задаються границями, що відокремлюють систему від зовнішнього середовища, і служать для виділення системи з її оточення. При проведенні аналізу звичайно передбачається, що взаємозв'язки між системою і зовнішнім середовищем зафіксовані на деякому обраному рівні уявлення. Проте, оскільки такі взаємозв'язки завжди існують, визначення меж системи є першим кроком у процесі наближеного опису реальної системи.

У ряді випадків може виявитися, що початковий вибір границі є занадто жорстким.

Зрозуміло, розширення меж системи підвищує розмірність і складність багатокomпонентної системи і, отже, значною мірою ускладнює її аналіз. Очевидно, що в інженерній практиці слід, наскільки це можливо, прагнути до розбиття великих складних систем на невеличкі підсистеми, що можна вивчати окремо. Проте при цьому необхідно мати впевненість у тому, що така декомпозиція не призведе до зайвого спрощення реальної ситуації.

### 1.1.2 КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Кількісна оцінка оптимізованої якості об'єкту називається критерієм оптимальності. У інженерних задачах звичайно вибираються критерії техніко-економічного характеру. Проте спектр можливих формулювань таких критеріїв дуже широкий; при визначенні критерію можуть використовуватися такі економічні характеристики, як валові капітальні витрати, витрати в одиницю часу, чистий прибуток в одиницю часу, прибутки від інвестицій, відношення витрат до прибутку. У інших задачах критерій може ґрунтуватися на деяких технологічних факторах, наприклад, коли потрібно мінімізувати тривалість процесу виробництва виробу, максимізувати темпи виробництва, мінімізувати кількість споживаної енергії, максимізувати навантаження і т.п.. Незалежно від того, який критерій вибирається при оптимізації, "найкращому" варіанту завжди відповідає *мінімальне* або *максимальне* значення характеристичного показника якості функціонування системи.

Тільки *один* критерій може використовуватися при визначенні оптимуму, тому що неможливо одержати рішення, що, наприклад, одночасно забезпечує мінімум витрат, максимум виходу продукту і мінімум споживаної енергії.

Один із шляхів урахування сукупності суперечливих цільових настанов складається в тому, що якийсь із критеріїв вибирається в якості первинного, тоді як інші критерії рахуються вторинними. У цьому випадку первинний критерій використовується при оптимізації як характеристична міра, а вторинні критерії породжують обмеження оптимізаційної задачі, що встановлюють діапазони змін відповідних показників від мінімального до максимального прийнятного значення.

Математична реалізація критерію оптимальності називається функцією мети чи цільовою функцією. Вигляд критерію оптимальності визначається конкретним змістом розв'язуваної задачі оптимізації і іноді може чинити суттєвий вплив на вибір методу рішення. На основі вибраного критерію оптимальності складається цільова функція або функція мети, яка представляє собою залежність критерію оптимальності від параметрів, що впливають на його значення.

### 1.1.3 НЕЗАЛЕЖНІ ЗМІННІ

На третьому головному етапі постановки задачі оптимізації здійснюється вибір незалежних змінних, що повинні адекватно описувати припустимі проекти або умови функціонування системи. У процесі вибору незалежних змінних варто взяти до уваги ряд важливих обставин, що розглядаються нижче.

По-перше, необхідно провести розділення між змінними, значення яких можуть змінюватися в достатньо широкому діапазоні, і змінними, значення яких фіксовані і визначаються зовнішніми факторами.

По-друге, при постановці задачі варто враховувати всі основні змінні, що впливають на функціонування системи або якість проекту. Незалежні змінні повинні вибиратися таким чином, щоб усі найважливіші техніко-економічні вирішення знайшли відбиток у формулюванні задачі.

Нарешті, ще одним істотним чинником, що впливає на вибір змінних, є рівень деталізації при дослідженні системи. Дуже важливо ввести в розгляд усі основні незалежні змінні, але не менше важливо не “перевантажувати” задачу великою кількістю дрібних, несуттєвих деталей. При виборі незалежних змінних доцільно керуватися правилом, відповідно до якого варто розглядати тільки ті змінні, що роблять істотний вплив на характеристичний критерій, обраний для аналізу складної системи.

### 1.1.4 МОДЕЛЬ СИСТЕМИ

Після того як характеристичний критерій і незалежні - змінні обрані, на такому етапі постановки задачі необхідно побудувати модель, що описує взаємозв'язок між змінними задачі і відображає вплив незалежних змінних на ступінь досягнення цілі, обумовленої характеристичним критерієм.

Проте на практиці оптимізаційні дослідження проводяться, як правило, на основі спрощеного математичного уявлення системи, тобто на математичній *моделі*. Застосування моделей обумовлене тим, що експерименти з реальними системами звичайно потребують занадто великих витрат засобів і часу, а також у ряді випадків виявляються пов'язаними з ризиком.

У самому загальному уявленні структура математичної моделі включає головні рівняння матеріальних і енергетичних балансів, співвідношення, пов'язані з проектними рішеннями, а також рівняння, що описують фізичні процеси, що протікають у системі. Ці рівняння звичайно доповнюються нерівностями, що визначають область припустимих значень незалежних змінних, дозволяють визначити вимоги, що накладаються на верхні або нижні межі зміни характеристик функціонування системи, і встановити ліміти наявних ресурсів. Таким чином, елементи моделі містять всю інформацію, що звичайно використовується при проектуванні або прогнозуванні характеристик системи.

## 1.2 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ У ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ

Теорія оптимізації знаходить ефективне застосування в усіх напрямках інженерної діяльності, і в першу чергу в наступних чотирьох її галузях:

- 1) проектування систем і їхніх складових частин;
- 2) планування й аналіз функціонування існуючих систем;
- 3) інженерний аналіз і обробка інформації;
- 4) керування динамічними системами.

## 1.3 ВИБІР КРИТЕРІЇВ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Вибір критерію оптимальності лежить поза рамками теорії оптимальних систем і, як відзначає А. М. Летов [92], є прерогативою тієї області прикладної науки, до якої

відноситься керований об'єкт. Можливі різноманітні підходи до проблеми вибору і класифікації критеріїв ефективності. Зокрема, у роботах А. А. Фельдбаума [174] пропонується підрозділяти критерії в залежності від того, дозволяють вони оптимізувати перехідні або усталені процеси в системі.

В залежності від цього задачі оптимізації підрозділяються на:

- а) статичну оптимізацію,
- б) динамічну оптимізацію.

В задачах динамічної оптимізації при керуванні технологічними процесами істотне значення має досягнення оптимальної динамічної точності. З цією метою може бути використаний інтегральний критерій якості перехідного процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, x', t) dt \quad (1.3.1)$$

де  $x(t)$  – припустима траєкторія. При значних коливаннях перехідного процесу можна проводити оптимізацію за узагальненим критерієм

$$I = G[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t] dt \quad (1.3.2)$$

де  $G[X(t_f), t_f]$ ,  $F[X(t), U(t), t]$  можуть бути квадратичною формою.

$$G[X(t_f), t_f] = \frac{1}{2} X^T(t_f) S X(t_f),$$

$$F[X(t), U(t), t] = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U,$$

$Q, R$  — матриці вагових коефіцієнтів,

$X - n$  — мірний вектор стану,

$U - m$  — мірний вектор керування.

В задачі керування кінцевим станом функція вартості може бути представлена

$$I = G[X(t_f), t_f]$$

Одним з важливих видів оптимального керування є керування, що мінімізує тривалість перехідних процесів у системі, яке називають також керуванням, оптимальним за швидкодією. Так, наприклад, при реалізації періодичних технологічних процесів у хімічній промисловості найбільший вплив на вартість кінцевого продукту у багатьох випадках здійснює трудомісткість, видатки виробництва і розміри планових інвестицій. Всі ці витрати збільшуються зі збільшенням часу, що витрачається на один цикл, тому час циклу є показником оптимального процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \rightarrow \min$$

Важливими є подальші узагальнення критерію якості системи керування, що враховують її вартість і різноманітні експлуатаційні характеристики. Основні критерії оцінки систем автоматичного керування технологічними комплексами такі:

- 1) С - вартість розробки, виготовлення, впровадження й експлуатації системи;
- 2) Р - продуктивність технологічного процесу або агрегату;
- 3) Н - надійність розроблюваної системи;

- 4)  $F$  - якість функціонування (точність роботи системи - забезпечення заданої якості кінцевих продуктів технологічного процесу);
- 5)  $W$  - енергетичні показники системи;
- 6)  $J$  - інформаційна спроможність алгоритмів керування і контролю технологічного процесу.

Проектувальник може вирішувати, чи буде система кращою по продуктивності, вартості або іншій характеристиці. У той же час замість таких субоптимальних для системи рішень він може, з огляду на всі перераховані чинники, шукати систему, що задовольняє критерію оптимальності за сукупністю вимог.

При кількісній оцінці кожний із приведених вище критеріїв представляється вектором із визначеним числом компонент:

$$\begin{aligned} C &= (c_1, c_2, \dots, c_{n_1}); P = (p_1, p_2, \dots, p_{n_2}); \\ H &= (h_1, h_2, \dots, h_{n_3}); F = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_4}); \\ W &= (w_1, w_2, \dots, w_{n_5}); L = (l_1, l_2, \dots, l_{n_6}); \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

де  $c_1, c_2, \dots, c_{n_1}$  - числові характеристики, що виражають вартість окремих елементів системи, вартість розробки, виготовлення, впровадження й експлуатації системи;  $p_1, p_2, \dots, p_{n_2}$  - числові характеристики, що визначають вихід кінцевих продуктів і продуктивність процесів;  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_4}$  - числові характеристики, впливають на якість функціонування автоматизованої системи керування технологічним процесом: час перехідного процесу, коливальність, статична і динамічна похибки, інтегральні оцінки якості, можливість влучення в задану область фазового простору вихідних координат процесу;  $h_1, h_2, \dots, h_{n_3}$  - числові характеристики, що виражають надійність функціонування системи: можливість безвідмовної роботи для різноманітних технологічних режимів ведення процесу, середній час безвідмовної роботи, профілактичні заходи, ремонтоздатність;  $w_1, w_2, \dots, w_{n_5}$  - числові характеристики, що виражають потужність енергії, споживаної окремими елементами й пристроями системи при різноманітних умовах роботи, енергетичні ресурси;  $l_1, l_2, \dots, l_{n_6}$  - числові інформаційні характеристики АСУ ТП: ентропія вихідних параметрів, кількість інформації при різноманітних режимах ведення технологічних процесів і функціонування систем.

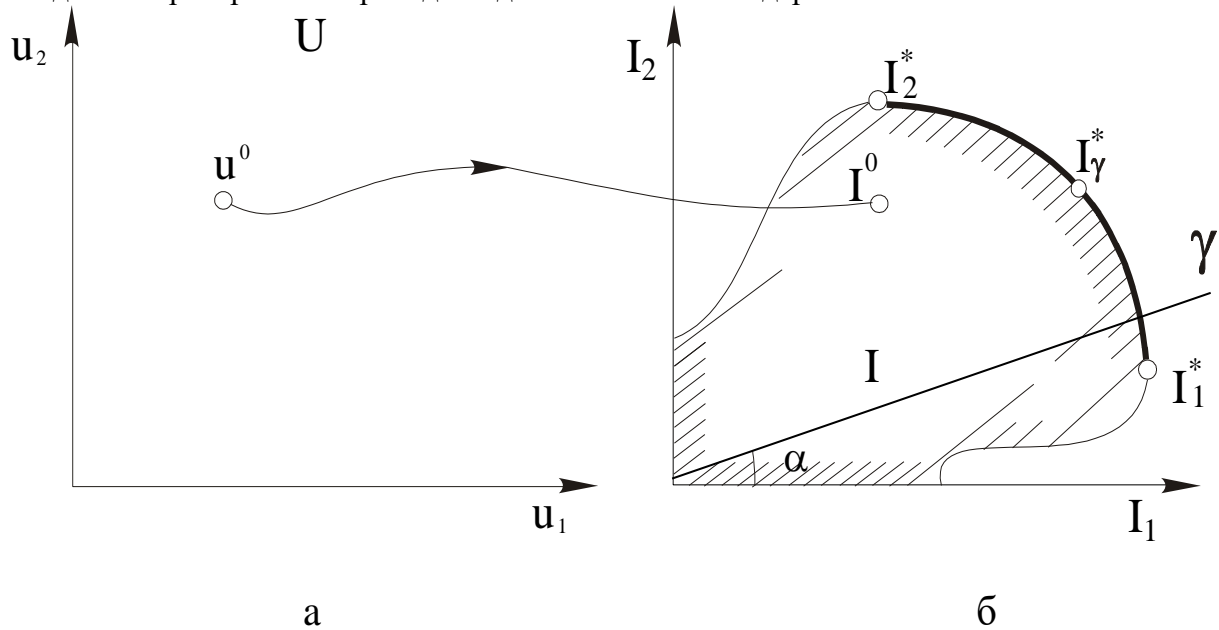
При проектуванні оптимальних систем керування конкретними технологічними процесами деякі з приведених вище критеріїв мають домінуюче значення, інші грають другорядну роль. Наприклад, задача оптимізації математично може бути сформульована в такій формі: знайти оптимальну структуру й оптимальні параметри системи керування процесом, що забезпечує максимальне значення функціонала  $I$  (критерій якості); при цьому вектор функції  $C$  (вартість),  $P$  (продуктивність),  $H$  (надійність),  $W$  (енергетичні витрати),  $J$  (інформаційні алгоритми) повинні задовольняти заданим нерівностям  $C \leq C_T, P \geq P_T, H \geq H_T, W \leq W_T, J \leq J_T$ .

#### 1.4 Способи формування зведеного критерію оптимальності.

Позначимо через  $I_v$   $v$ -тий показник функціонування процесу і будемо для простоти вважати, що в результаті оптимізації бажано будь-який із  $m$  таких показників (частинні критерії) збільшити. Якщо деякі з показників, наприклад капіталовкладення  $M$ , потрібно зменшити, то відповідний їм частинний критерій  $I_v$  приймемо рівним  $-M$ .



Через  $u$  позначимо параметри процесу і системи керування, що підлягають оптимальному вибору, і будемо спочатку вважати задачу цілком детермінованою, вважаючи, що значення кожного з частинних критеріїв стає відомим при заданні  $u$ . Таким чином, кожній точці  $u^\circ$  в просторі  $U$  параметрів відповідає точка  $I^\circ$  в просторі  $I$  критеріїв (рис. 1.1). Ясно, що оптимальне рішення по одній критерію  $I_1$  приводить у точку  $I_1^*$  (рис. 1.1, б) і не збігається з оптимальним рішенням за критерієм  $I_2$  (точкою  $I_2^*$ ). Щоб знайти оптимальне рішення  $u^*$ , можна піти шляхом формування з частинних критеріїв  $I_v$  зведеного критерію  $\bar{I}$ . Приведемо декілька способів одержання  $\bar{I}$ .



**Рис. 1.1. Схема формування критерію оптимальності:**  
а—простір керуючих впливів; б—простір критеріїв

**Згортка частинних критеріїв із ваговими коефіцієнтами.** Вагові коефіцієнти  $\gamma_v$  враховують відносну важливість того або іншого критерію і встановлюються шляхом експертизи

$$\hat{I} = \sum_{v=1}^m \gamma_v I_v \rightarrow \max_u \quad (1.4.1)$$

де

$$\gamma_v \geq 0; \quad \sum_{v=1}^m \gamma_v = 1 \quad (1.4.2)$$

Значення частинних критеріїв  $I_v$  при використанні згортки (1.4.1) повинні бути або безрозмірними, або мати однакову розмірність.

**Використання нормативних показників.** Нехай для кожного з частинних критеріїв відомо деяке нормативне значення  $I_{vn}$ , наприклад середнє значення  $I_v$  для діючих апаратів, аналогічних оптимізованому. Тоді відношення  $i_v = I_v / I_{vn}$  характеризує ступінь досконалості процесу з погляду  $v$ -го показника. Позначимо мінімальне по  $v$  значення  $i_v$  через  $i_{*v}$ . У цьому випадку критерієм оптимальності може бути значення  $i_{*v}$ , так що

$$i_{*v} = \min_v (I_v / I_{vn}) \rightarrow \max_u \quad (1.4.3)$$

При використанні такого критерію можна бути упевненим, що ступінь досконалості по будь-якому показнику буде не нижче, чим значення  $i_{*v}^{\max}$ , отримане в результаті рішення задачі (1.4.3). Практично часто надається, що збільшення одного з показників  $i_v$  призводить до зменшення іншого. У цьому випадку використання критерію (1.4.3) дає таке оптимальне рішення  $u^*$ , для котрого два або декілька значень  $i_v$  виявляться однаковими і рівними  $i_{*v}^{\max}$ .

**Наближення до “ідеалу”.** Нехай відомі рішення  $m$  задач оптимізації вигляду

$$I_v \rightarrow \min_u ; v = \overline{1, m}. \quad (1.4.4)$$

У результаті знайдені граничні значення  $I_v^*$  кожного з частинних критеріїв оптимальності без урахування інших. У просторі критеріїв точку  $I^*$  з координатами  $I_v^*$  називають ідеалом (рис. 1.1, б). Коли рішення  $u_v^*$  задач (1.4.4) не однакові, ідеал не належить множині  $I$  досяжних значень критеріїв. Проте можна на другому етапі рішення поставити задачу визначення такого досягнутого критерію  $\bar{I}$  і відповідного йому припустимого рішення  $\bar{u}$ , для яких відстань від ідеалу була б мінімальною, наприклад:

$$\sum_{v=1}^m \left[ \frac{1}{I_v^*} (I_v^* - \bar{I}_v^*(u)) \right]^2 \rightarrow \min_u$$

або

$$\max_v \frac{1}{I_v^*} (I_v^* - \bar{I}_v^*(u)) \rightarrow \min_u$$

**Справедлива поступка.** Вибір рішення в задачі з декількома частинними критеріями являє собою поступку, тому що збільшення одного показника призводить до зменшення іншого. При справедливій поступці приходимо до того, щоб у точці  $u^*$  сума відносних змін усіх показників дорівнює нулю. Таким чином, у точці  $u^*$  повинна бути виконана рівність

$$\sum_{v=1}^m \delta I_v(u^*) / I_v(u^*) = 0. \quad (1.4.5)$$

яку можна переписати в такому вигляді:

$$\sum_{v=1}^m \delta [\ln I_v(u)]_{u=u^*} = \delta \sum_{v=1}^m \ln I_v(u) = 0. \quad (1.4.6)$$

Рівність (1.4.6) є необхідною умовою максимуму добутку значень  $I_v(u)$ . Дійсно, якщо

$$\bar{I} = \prod_{v=1}^m I_v(u) \quad (1.4.7)$$

досягає максимуму, то максимальний і логарифм цього виразу

$$\ln \bar{I} = \sum_{v=1}^m \ln I_v(u)$$

Таким чином, справедлива поступка відповідає зведеному критерію (1.4.7), рівному добутку частинних критеріїв.

**Оптимальність за Парето.** Вибір кожного з приведених вище способів одержання зведеного критерію суб'єктивний або оснований на деяких додаткових припущеннях. Тим часом, оптимальне рішення в задачі з декількома критеріями можна визначити інакше, ніж у задачі з одним критерієм. У цьому випадку немає необхідності у введенні зведеного критерію оптимальності  $\bar{I}$ . Такий підхід був запропонований у 1904 р. італійським економістом В. Парето.

Оптимальним за Парето рішенням  $u_{\Pi}$  є будь-яке рішення, якщо серед припустимих вирішень не знайдеться такого  $u^{\circ}$ , для котрого

$$I_v(u^{\circ}) \geq I_v(u_{\Pi}); \quad v = \overline{1, m}, \quad (1.4.8)$$

причому хоча б для одного значення  $v$  нерівність (1.4.8) строга. Іншими словами,  $u_{\Pi}$  оптимально, якщо не можна поліпшити жодного з частинних показників, не погіршуючи при цьому хоча б одного з інших.

Оптимальним за Парето рішенням відповідає на рис. 1.1,б та частина межі множини  $I$  (виділена жирною лінією), для котрої будь-який напрямок, що утворить із віссю абсцис кут, менший або рівний  $\pi/2$ , виводить за межі множини  $I$ .

Легко показати, що будь-який із приведених вище способів утворення зведеного критерію  $\bar{I}$  призводить до одержання одного з рішень, оптимальних за Парето. У тому випадку, коли межа множини  $I$ , що відповідає оптимальним за Парето рішенням, опукла, усі ці рішення можна одержати з задачі про максимум зведеного критерію (1.4.1) при зміні вагових коефіцієнтів  $\gamma_v$  у межах умов (1.4.2).

### Урахування випадкових чинників у критеріях оптимальності.

Критерій оптимальності може бути регулярним чи статистичним.

Регулярний критерій оптимальності характеризує з технічної чи економічної сторони об'єкт оптимізації. Це може бути температура в точці, яка характеризує якість суміші пального і окислювача; склад цільового продукту в потоці, що відходять з реактора, собівартість продукції.

Статистичні критерії оптимальності застосовуються для характеристики об'єктів оптимізації коли на вході об'єкту маємо змінні, що є випадковими функціями часу, чи окремі елементи об'єкту містять джерела випадкових збурень.

Прикладами статистичних критеріїв оптимальності можуть бути: мінімум середньоквадратичної оцінки або дисперсії, максимум правдоподібності, мінімакський критерій, тобто мінімізація максимально можливого значення умовного ризику.

У ряді задач на результати оптимального рішення впливають випадкові чинники. Наприклад, в умови задачі може входити навантаження апарата, прогнозоване на планований період. При цьому прогноз носить статистичний характер. Позначимо через  $\xi$  випадковий чинник, для якого відомий або діапазон його можливих значень  $V_{\xi}$  або щільність розподілу  $\rho_{\xi}$ . У якості критерію оптимальності в першому випадку природно прийняти вираз  $I(u, \xi_0)$ , у котрому  $\xi_0$ -таке значення  $\xi \in U$ , для якого функціонал

$I(u^*, \xi_0)$  мінімальний. Вибір рішення з умови

$$\tilde{I} = \min_{\xi} I(u, \xi) \rightarrow \max_u \quad (1.4.8)$$

гарантує, що при іншому значенні  $\xi$  значення  $I^*$  буде не нижче, ніж  $\tilde{I}$ . Якщо ж відома щільність розподілу випадкового чинника, то в якості критерію оптимальності може бути використане середнє по  $\xi$  значення функціонала  $I$ , тобто

$$\bar{I} = \int_{V_{\xi}} \rho(\xi) I(u, \xi) d\xi \rightarrow \max_u \quad (1.4.9)$$

Існує клас задач, у яких зв'язок між керуючими впливами і змінними стану процесу, що залежать від них, носить статистичний характер.

## 1.5 ТИПОВІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

### Оптимізація статичного режиму.

Велику частину часу апарати працюють у сталому режимі. Цей режим може бути статичним (коли всі змінні, що характеризують його, незмінні в часі) або циклічним (коли всі змінними або частина з них періодично змінюються).

У статичному режимі при кожному значенні вектора зовнішніх впливів (склад сировини, параметри навколишнього середовища і т.п.) потрібно знайти такі керування, щоб показник ефективності роботи апарата був максимальний. Отримаємо

$$I \rightarrow \max \quad (1.5.1)$$

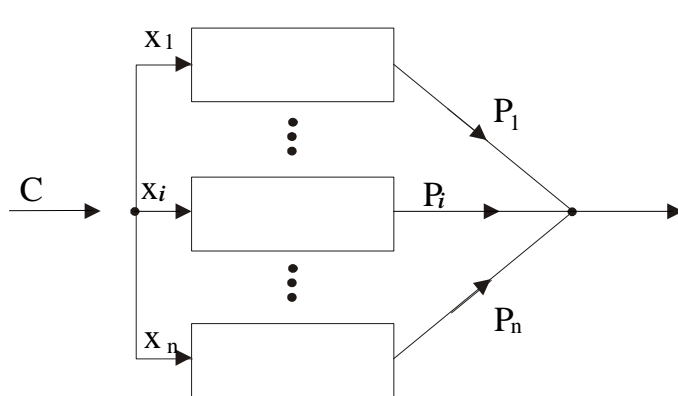
при обмеженнях  $X_{v_{\min}} \leq X_v \leq X_{v_{\max}}, U_{v_{\min}} \leq U_v \leq U_{v_{\max}}$  і зв'язках між  $X$  и  $U$ , обумовлених характеристиками апарату

$$f_v(X, U) = 0, v = \overline{1, m} \quad (1.5.2)$$

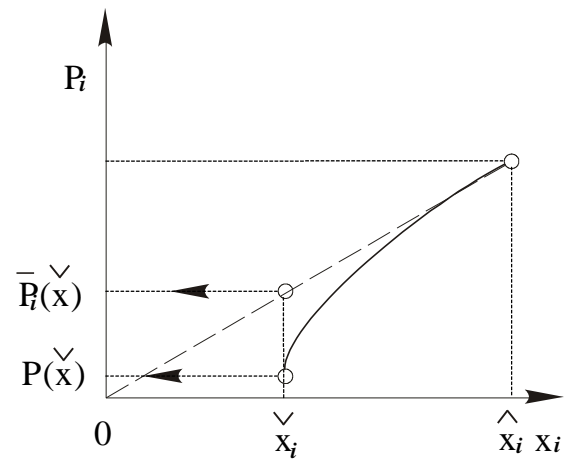
У цій задачі  $X$  та  $U$  вже не вектори-функції, як у динамічній оптимізації, а вектори. Якщо функції, що визначають задачу, неперервні по сукупності змінних, то задача оптимізації статичного режиму являє собою задачу математичного програмування.

### Оптимальний режим роботи паралельних агрегатів; розподіл навантажень.

Задача формулюється в такий спосіб: потрібно вибрати навантаження кожного з агрегатів і склад працюючих агрегатів, включених паралельно (рис. 1.2, а), якщо загальне навантаження (сумарні витрати сировини) задане, а загальна продуктивність повинна бути максимальною.



а



б

**Рис. 1.2. Система паралельних агрегатів:**

а - структура; б - . залежність навантаження агрегату від витрати сировини

Для кожного з агрегатів відома навантажувальна характеристика - залежність продуктивності  $P_i$  від витрати сировини  $x_i$ , (рис 1.2.б). Загальне число агрегатів позначимо  $n$ , а сумарна продуктивність -  $P$ . Тоді критерій оптимальності – максимальна сумарна продуктивність запишеться у вигляді

$$I = \sum_{i=1}^n P_i(x_i) \rightarrow \max. \quad (1.5.3)$$

Запишемо обмеження на множину припустимих рішень:

$$x_i \text{ або } \tilde{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i \quad (1.5.4)$$

Перше з цих умов ставиться до випадку, коли агрегат виключений, друге — до випадку, коли він працює. Умови (1.5.4) зручно переписати, виключивши слово “або”, але ввівши додаткову цілочисельну змінну  $v_i$ , рівну 1, коли  $i$  - тий агрегат включений, і дорівнює нулю, коли він виключений. Перепишемо  $x_i$ ; у виді  $x_i = v_i \tilde{x}_i$ . Тоді умови (1.5.4) відповідають обмеженням на множині значень змінних  $x$  і  $v$ :

$$\tilde{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i; \quad v_i = \{0,1\}; \quad i = \overline{1,n}$$

Завданню сумарного навантаження по сировині відповідає вимога

$$\sum_{i=1}^n v_i \tilde{x}_i = C \quad (1.5.5)$$

З урахуванням цих цілочисельних змінних критерій оптимальності запишеться у вигляді

$$I = \sum_{i=1}^n v_i P_i(\tilde{x}_i) \rightarrow \max \quad (1.5.6)$$

Його потрібно максимізувати при умовах (1.5.5). Наявність цілочислених змінних значно ускладнює рішення цієї задачі.

Оптимальний режим роботи послідовних агрегатів (багатостадійні процеси).

Можлива постановка задачі послідовних агрегатів така: потрібно вибрати режим послідовно сполучених агрегатів так, щоб при заданій загальній продуктивності і заданих характеристиках кінцевого продукту витрати на його одержання були мінімальні.

Введемо позначення:  $x_{i+1}$  - вектор, що характеризує стан продукту на виході  $i$ -го

апарата;  $u_i$  - керуючі впливи  $i$ -го апарата. Кожний з агрегатів (стадій процесу) характеризується витратами, що залежать від типу агрегату, від векторів  $u_i$  і  $x_i$  (параметри потоку на вході в  $i$ -той апарат). Позначимо ці витрати  $f_0(x_i, u_i)$ .

Мінімуму сумарних витрат відповідає критерій виду

$$I = \sum_{i=1}^n f_0(x_i, u_i, i) \rightarrow \min \quad (1.5.7)$$

На змінні  $x_i$ ,  $u_i$  накладені умови двох типів: автономні обмеження

$$x_i \in V_i; \quad u_i \in U_i; \quad i = \overline{1, n}$$

і обмеження, що зв'язують склад продукту на виході кожного агрегату (кожної стадії) із складом на вході і режимними змінними:

$$x_{(i+1)v} = f_v(x_i, u_i, i); \quad i = \overline{1, n} \quad v = \overline{1, m} \quad (1.5.8)$$

Підкреслимо, що в лівій частині цих рівностей фігурує  $v$ -та складового вектори  $x_{i+1}$ , а у функцію  $f_v$  входять у загальному випадку всі складові вектори  $x_i$ .

Для багатьох задач оптимізації послідовно включених агрегатів у хімічній технології початковий стан  $x_1$  не можна вважати фіксованим. Склад сировини може змінюватися в деяких межах, причому ці зміни не завжди можна контролювати. У такому випадку керуючі впливи  $u_i$  можна вибирати або оптимально в середньому на всій множині зміни вектора  $x_i$ , або вони повинні бути оптимальні для самого несприятливого складу сировини.

### Пуск і зупинка одиничного агрегату.

З ростом продуктивності агрегатів задача оптимального автоматизованого керування процесами пуску й зупинки одержує усе більше значення як у відношенні втрат продукту, що залежать від тривалості цих процесів, так і у відношенні безаварійності їхнього проведення. Ця задача часто полягає в введенні об'єкта з фіксованого початкового стану у фіксоване кінцеве за мінімальний час при виконанні обмежень, що гарантують безпеку пуску й зупинки.

Наприклад, при пуску барабанного котлоагрегату швидкість зміни температури металу труб пароперегрівача в місцях встановлення цих труб у барабан котла повинна бути обмежена через виникаючих тут термічні напруги.

Формалізуємо задачу пуску апарату, позначивши  $X$  – вектор стану,  $U$  – вектор керуючих впливів.

Критерієм оптимальності служить тривалість пуску:

$$I = t_f = \int_0^{t_f} dt \rightarrow \min \quad (1.5.9)$$

Умови, що визначають множину припустимих рішень, являють собою таку сукупність:

обмежень, накладених на кожен зі складового вектора  $X$  і  $U$

$$\check{x}_v \leq x_v \leq \hat{x}_v, \quad v = \overline{1, m} \quad (1.5.10a)$$

$$\check{u}_j \leq u_j \leq u_j^{\max}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (1.5.10b)$$

умові, що визначають стан процесу наприкінці і на початку пуску

$$X(0) = x_0, X(t_f) = x_{t_f}; \quad (1.5.11)$$

зв'язків між змінними стану і керуючих впливів, що у більшості випадків мають форму звичайних диференціальних рівнянь

$$x'_v = f_v(X, U), v = \overline{1, m}; \quad (1.5.12)$$

Обмеження на кожну з змінних стану можуть залежати від інших змінних. Такі обмеження можна привести до вигляду

$$F_k(x(t)) \geq 0, \forall t \in [0, t_f], k = 1, 2, \dots; \quad (1.5.13)$$

Часто існують обмеження на загальний ресурс керуючих впливів за весь інтервал пуску:

$$\int_0^{t_f} \varphi_\mu(U(t)) dt - b_\mu = 0, \mu = 1, 2, \dots; \quad (1.5.14)$$

Таким чином, задача пуску апарату, зупинки і переводу з одного режиму на інший (1.5.9)-(1.5.13) являє собою варіаційну задачу оптимального керування, ускладнену обмеженнями (1.5.13) на змінні стану й умовами (1.5.14) на керуючі впливи.

У тому випадку, коли розглядати задачу пуску не одиничного апарату, а системи взаємозв'язаних апаратів, різко росте розмірність векторів стану і керування і додаються логічні умови зв'язку пуску якогось апарату з змінними стану зв'язаних з ним апаратів.

### Оптимізація режиму в апараті періодичної дії.

У апаратах періодичної дії сировину періодично завантажують в апарат, а готовий продукт періодично вивантажують із нього. Тривалість циклу, а також закон зміни керуючих впливів за час циклу підлягають оптимальному виборі.

Нехай функція  $f_0(X, U)$  визначає, як і вище, миттєву продуктивність процесу, з огляду на швидкість утворення корисного продукту, витрати на керування і т.п. Позначимо  $\Theta$  тривалість завантаження і розвантаження, а  $t_f$  - тривалість роботи апарату в кожному циклі. Врахуємо також, що завантаження і розвантаження пов'язані не тільки з витратами часу, але і з витратами трудових і матеріальних ресурсів на сировину, регенерацію каталізатора, фільтра і т.п. Розмір цих витрат, що звичайно не залежать від тривалості циклу, позначимо  $A$ . Тоді критерій оптимальності задачі запишеться у вигляді

$$I = \frac{1}{t_f + \Theta} \left( \int_0^{t_f} f_0(X, U) dt - A \right) \rightarrow \max \quad (1.5.15)$$

Максимум цього виразу потрібно знайти при умовах (1.5.12), записаних у формі диференціальних рівнянь, і при фіксованих значеннях змінних стану

$$x_v(0) = x_{v0}; \quad v = \overline{1, m}. \quad (1.5.16)$$

Що стосується кінцевих значень цих змінних  $x_v(t_f)$ , то, як правило, деякі з них фіксовані, а інші вільні:

$$x_v(t_f) = x_{vt_f}; v = \overline{1, k}; k < m$$

Умови типу (1.5.10) і (1.5.13) також можуть мати місце. Виборові підлягають керуючі впливи  $U_0(t)$  і робочий час циклу  $t_f$ .

## 1.6 ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І МЕТОДИ ЇХ РІШЕННЯ

Метою оптимізації є пошук найкращого або “оптимального” рішення. Хоча звичайно випадає задовольнятися поліпшенням відомих вирішень, а не доведенням їх до досконалості. Тому під оптимізацією розуміють скоріше прагнення до досконалості, що, можливо, і не буде досягнуто.

За характером шуканого рішення оптимізаційної задачі поділяють на задачі пошуку **безумовного** або **умовного** екстремуму цільової функції. Рішенням задачі про безумовний екстремум функції однієї або декількох змінних є деякий вектор, на складові якого не накладено ніяких обмежень. Рішенням задачі пошуку умовного екстремуму (максимуму або мінімуму) функції буде вектор, складові якого пов'язані один з одним функціональними умовами у формі рівностей або нерівностей.

Обмеження, накладені на змінні в задачах оптимізації, визначають множину припустимих рішень  $D$ .

$$h_j(X) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$g_j(X) \geq 0 \quad j = m + 1, \dots, p$$

Якщо деякі зі співвідношень типу рівностей можна розв'язати щодо одного з проектних або технологічних параметрів, то це дозволяє виключити даний параметр із процесу оптимізації.

Крім зв'язків і обмежень на рішення можуть бути накладені додаткові умови. Так, іноді потрібно, щоб ті або інші функціональні складові рішення були неперервними функціями або функціями, що неперервно диференціюються. У ряді випадків обмеження такого типу пов'язані з фізичним змістом постановки, але частіше з використанням підходом до рішення задачі.

**Оптимальним рішенням** називають такий елемент  $X_{opt}$  множини припустимих рішень  $D$ , для якого критерій оптимальності приймає екстремальне значення. Слід зазначити, що дуже часто в зв'язку з обмеженнями оптимальне значення цільової функції досягається не там, де її поверхня має нульовий градієнт. Нерідко краще значення відповідає одній з меж множини  $D$ .

Верхньою гранню функції  $F$  на множині  $D$  називається мінімальне число  $F^*$ , для якого виконується нерівність

$$F^* \geq F; \quad X \in D.$$

Для верхньої грані використовують позначення  $F^* = \sup F$ .

Для нижньої грані використовують позначення  $F^* = \inf F$ .

### 1.6.1. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ І ОБМЕЖЕНЬ

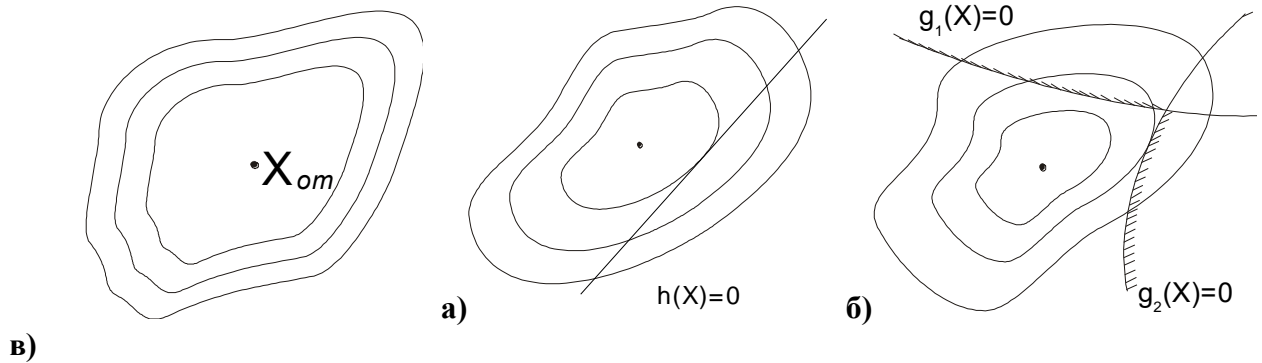
Значення функції цілі  $F$  може розглядатися як функція, визначена в  $n$ -мірному просторі змінних  $X_j (j = 1, \dots, n)$ .

Оскільки наочне графічне зображення  $n$ -мірного простору відсутнє, далі використовується такий прийом представлення  $F(X)$  на плоскому кресленні.

Припустимо, що через точку  $X_{opt}$  в  $n$ -мірному просторі, що відповідає оптимальному вирішенню задачі, наприклад мінімуму цільової функції, проведена двовірна площина  $P$ . Тоді при віддаленій від точки  $X_{opt}$  по цій площині в будь-якому напрямку значення  $F(X)$  збільшується. Якщо  $F(X)$  є неперервною функцією в області  $X_{opt}$ , то навколо точки  $X_{opt}$  завжди можна провести в даній площині замкнену лінію, уздовж якої значення  $F(X)$  постійно.



Таких замкнених ліній, названих лініями рівня функції  $F(X)$  й відповідних різноманітних значень  $F(X) = f_K$ , можна провести в площині  $P$  навколо точки  $X_{opt}$  скільки завгодно. Причому кожна з цих ліній для точки мінімуму буде цілком охоплювати будь-яку лінію, для якої значення  $F(X)$  менше. Форма ліній постійного рівня, відповідає різноманітним значенням  $f_K$ , при цьому може бути істотно різноманітною.



**Рис.1.3. Лінії рівня функції  $F(x)$ .**

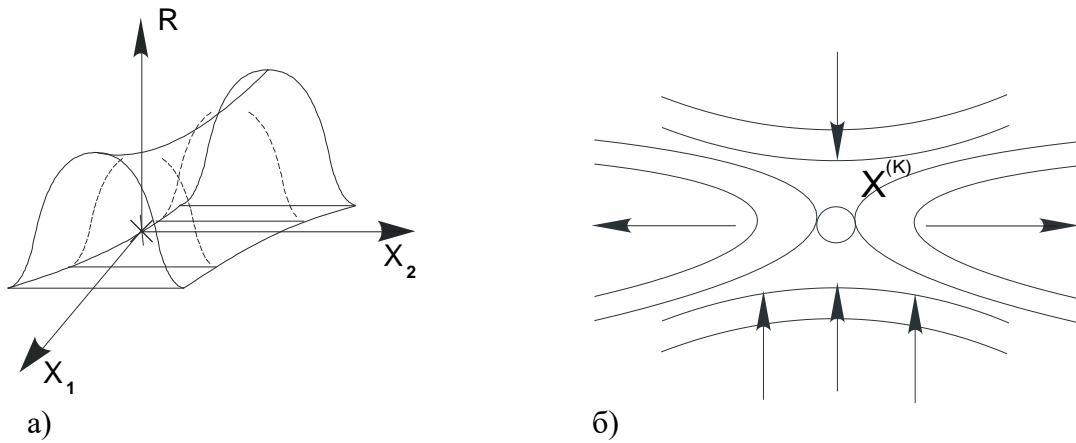
При наявності обмежень типу рівності  $(h_j(X) = 0, j = 1, \dots, m)$  розглянутий прийом зображення цільової функції можна використовувати, якщо взяти до уваги, що кожне з рівнянь  $h_j(X) = 0$  визначає в  $n$ -мірному просторі  $n-1$ -мірну поверхню, перетинання якої з двомірною площиною  $P$  має вид деякої лінії  $l$  (рис. 1.3,б), уздовж якої шукається оптимальне рішення. Правда, випадок, коли число обмежень рівностей більше 1, не піддається зображенню на плоскому кресленні, тому що лінія перетинання поверхні, визначеної двома обмеженнями може мати з площиною тільки деякі загальні точки. Обмеження типу нерівностей незалежно від їхнього числа наочно представляються описаним способом (рис. 1.3, в)

## 1.6.2. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ І ЛІНІЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Як відомо необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є виконання системи рівностей:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Оскільки ця умова - лише необхідна, але ще не достатня, можуть представитися випадки, коли при її виконанні в деякій точці  $X^{(K)}$  екстремуму функції  $F(X)$  в ній не буде. Прикладами подібних точок цільової функції служать точка, у яких функція  $F(X)$  по один або декільком напрямкам має мінімум, у той час як по іншим - максимум. Такі точки називаються “сідловими” точками функції  $F(X)$ .

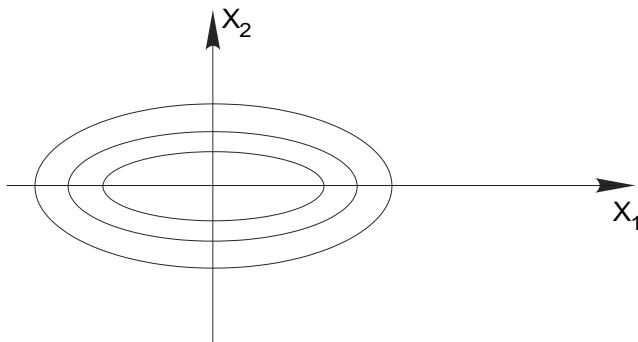


**Рис.1.4. “Сідлова” точка і лінії постійного рівня в околі “сідлової” точки**

Іншим типом особливостей цільової функції є так називані “байраки”, при наявності котрих уздовж визначених напрямків значення даної функції змінюється дуже слабо. Розглянемо, наприклад, функцію

$$F = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + c^2,$$

у якій при виконанні умови  $a \gg b$  є “байрак”, причому його “дно” розташовано уздовж осі  $x_1$  (рис. 1.5).

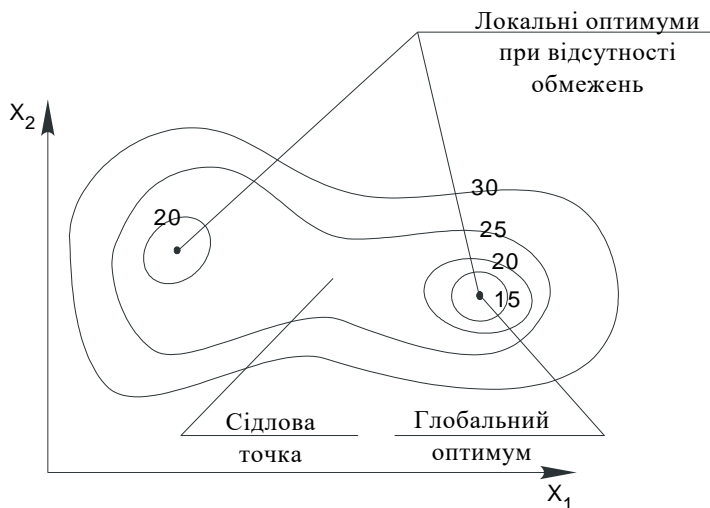


У загальному випадку лінія “дна” байраку може не збігатися по напрямку з осями координат і, крім того, істотно відрізнятися від прямої, тобто можливі криволінійні байраки.

**Рис.1.5. Лінії постійного рівня еліпса.**

### 1.6.3. ГЛОБАЛЬНИЙ І ЛОКАЛЬНИЙ ОПТИМУМИ

Як показано на прикладі мультимодальної функції можуть існувати різноманітні типи оптимальних рішень, якщо цільова функція не є унімодальною (тобто тією, що має один екстремум). Глобальне оптимальне рішення представляє найменше значення  $F(X)$ , тоді як локальне оптимальне рішення являє собою найменше значення  $F(X)$  в окрузі деякого вектора  $X$ .



**Рис.1.6. Класифікація оптимальних рішень**

Як для глобального, так і для локального мінімуму

$$F(X^*) \leq F(X)$$

те для глобального оптимального рішення це співвідношення виконується для всіх  $X \in R^n$   $n$  - мірний евклідовий простір, тоді як для локального оптимального рішення це має місце тільки для малої області  $\mathcal{E}$ , де  $|x - x^*| < \mathcal{E}$ .

При вирішенні конкретної задачі оптимізації насамперед треба вибрати математичний метод, що призводив до кінцевих результатів із найменшими витратами на обчислення або ж давав можливість одержати найбільший обсяг інформації про шукане рішення. Вибір того або іншого методу в значній мірі визначається постановкою оптимальної задачі, а також використовуваною математичною моделлю об'єкта оптимізації.

В даний час для рішення оптимальних задач застосовують у головному такі методи:

1. Методи дослідження функцій класичного аналізу
2. Методи основані на використанні невизначених множників

Лагранжу

3. Лінійне програмування
4. Нелінійне програмування
5. Цілочисельне програмування.
6. Варіаційне числення
7. Принцип максимуму
8. Динамічне програмування

Як правило, не можна рекомендувати якийсь один метод, що можна використовувати для рішення усіх без винятку задач, що виникають на практиці.

Вибір метода рішення задач оптимізації залежить від вигляду цільової функції, обмежень, від мети розв'язку задачі, від використання технічних засобів вирішення оптимальних задач й ряду інших факторів. Одну і ту ж саму задачу оптимізації можна розв'язувати декількома методами, але для кожної конкретної ситуації існує найбільш ефективний метод.

## 2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методи дослідження функцій класичного аналізу являють собою найбільше відомі методи рішення відносно нескладних оптимальних задач. До них відносяться:

1. Метод пошуку безумовних екстремумів;
2. Метод невизначених множників Лагранжа;

Методи дослідження функцій класичного аналізу в основному застосовують у тих випадках, коли відомий аналітичний вигляд залежності функції, що оптимізується  $f$  від незалежних змінних  $x_i$ . Це дозволяє знайти також в аналітичному вигляді похідні оптимізованої функції, використовуючи котрі і формулюють необхідні і достатні умови існування екстремуму.

### 2.1. МЕТОД ПОШУКУ БЕЗУМОВНИХ ЕКСТРЕМУМОВ

Може застосовуватися для рішення задачі оптимізації при відсутності обмежень.

Цей метод заснований на знаходженні першої похідної цільової функції і прирівнюванні її до нуля. При цьому може вирішуватися багатопараметрична задача, тобто задача з кількома параметрами, що варіюються. Для рішення такої задачі необхідно знайти перші похідні по кожному з параметрів, що варіюються і всі ці похідні прирівняти нулю. При цьому необхідно вирішити систему кінцевих рівнянь, найчастіше нелінійних.

Додаткові ускладнення виникають унаслідок того, що рішення задачі пошуку оптимуму дає в цьому випадку лише необхідні, але не достатні умови. Тому усі рішення даної системи необхідно перевірити на достовірність. Крім того, методи дослідження функцій класичного аналізу не дозволяють відразу виділити глобальний екстремум. Тому після перевірки рішення оптимальної задачі на достовірність, провадитися пошук серед вирішень глобального екстремуму.

### 2.2. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Необхідні умови існування екстремуму в неперервній функції  $R(x)$  при відсутності обмежень на діапазон зміни змінної  $x$  можуть бути отримані з аналізу першою похідною  $dR/dx$ . При цьому функція  $R(x)$  може мати екстремальне значення при таких значеннях незалежної змінної  $x$ , де похідна  $dR/dx$  дорівнює нулю або взагалі не існує. Графічно рівність нулю похідної означає, що дотична до кривої  $R(x)$  в цій точці паралельна вісі абсцис (рис.2.1, а). На рис.2.1, б). і в). показано випадки, коли похідні в точках екстремуму функції  $R(x)$  не існують.

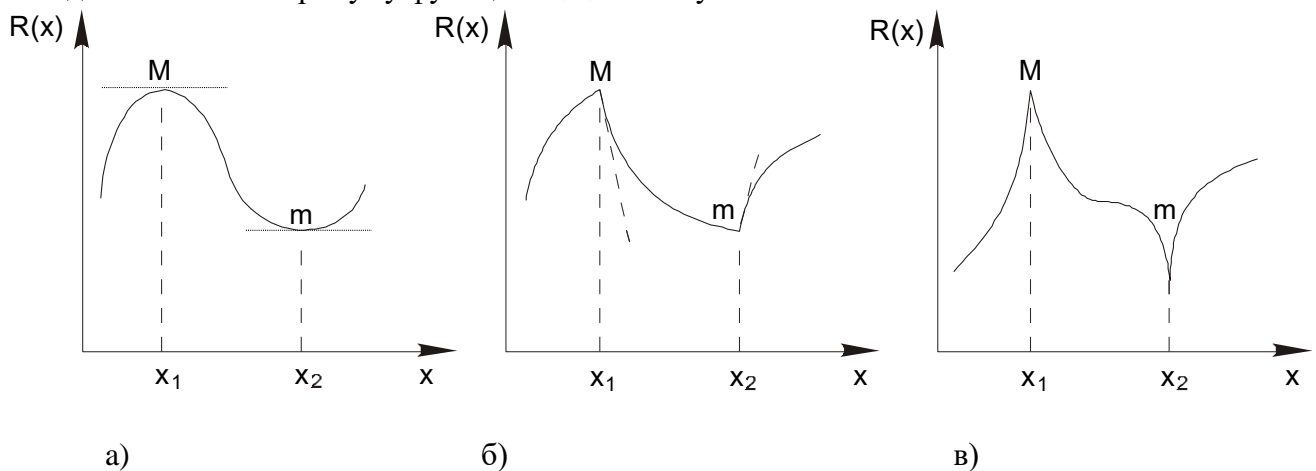
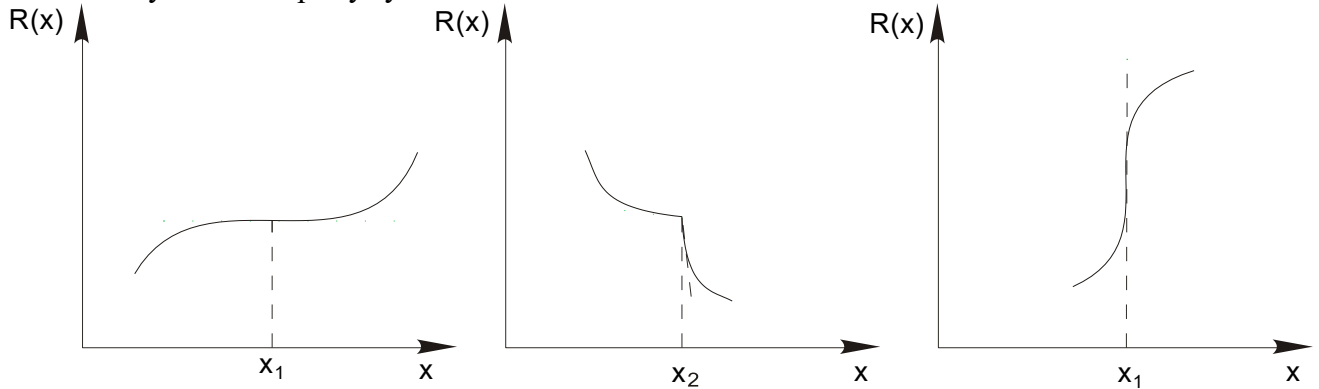


Рис.2.1. Різні типи екстремумів функції  $R(x)$ .

На рис.2.1, б неперервна функція  $R(x)$  в точках  $x_1$  і  $x_2$  має злами, що відповідає наявності кінцевого розриву в похідній  $dR/dx$  в цих точках. У таких випадках прийнято говорити про існування різних значень похідної зліва і справа від точки екстремуму.

На рис.2.1, в показаний варіант, коли значення похідної в точках екстремуму перетворюється в нескінченність. Тут відбувається нескінченний розрив похідної, при котрому її значення змінюється від  $+\infty$  до  $-\infty$  у точці  $x_1$  і від  $-\infty$  до  $+\infty$  у точці  $x_2$ .

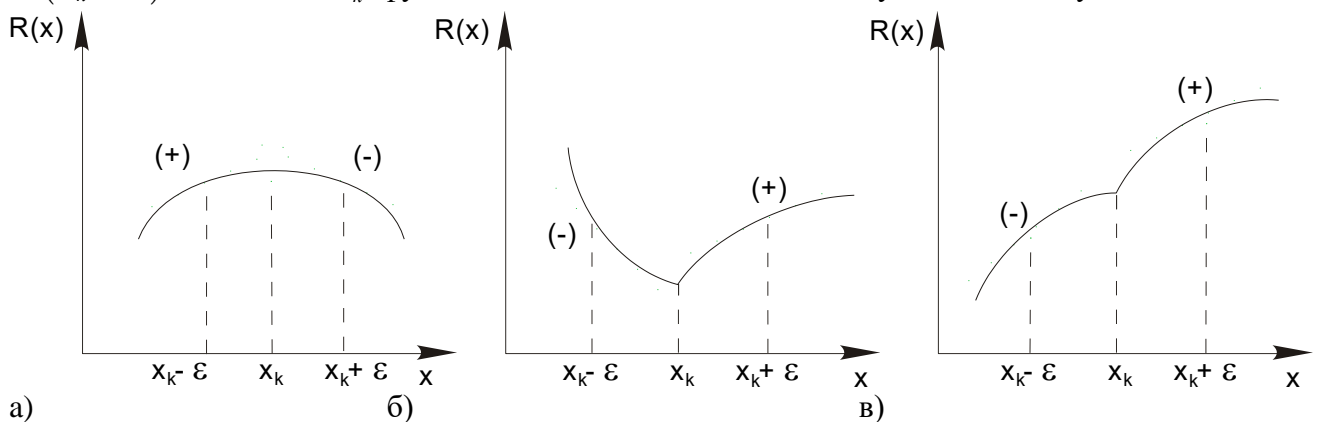
Перераховані умови, тобто рівність нулю або відсутність похідною - тільки необхідні умови екстремуму.



**Рис.2.2. Особливості функції  $R(x)$ , що задовольняють необхідним умовам екстремуму.**

Необхідно провести дослідження точок “підозрюваних” на екстремум.

Порівняння значень функції. Зі значенням функції в точці  $x_k$ , “підозрюваній” на екстремум, порівнюють два її значення, розраховані в точках, достатньо близьких до досліджуваної і розташованих зліва і справа від її, тобто при значеннях змінної  $x_k - \varepsilon$  і  $x_k + \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  - мала додатня величина. Якщо при цьому виявиться, що обидва розрахованих значення  $R(x_k - \varepsilon)$  і  $R(x_k + \varepsilon)$  менше або більше  $R(x_k)$ , то в точці  $x_k$  існує максимум або мінімум. Якщо ж  $R(x_k)$  має проміжне значення між  $R(x_k - \varepsilon)$  і  $R(x_k + \varepsilon)$ , то в точці  $x_k$  функція  $R(x)$  не володіє ні максимумом, ні мінімумом.



**Рис.2.3. Перевірка точок на наявність екстремуму.**

Порівняння знаків похідних. При цьому способі дослідження точки  $x_k$ , “підозрюваної” на екстремум, у точках  $x_k - \varepsilon$  і  $x_k + \varepsilon$  визначається знак похідною  $dR/dx$ . Якщо знаки похідною в цих точках різні, то в точці  $x_k$  є екстремум функції

$R(x)$ . Якщо знак похідною  $dR/dx$  при такому переході змінюється з (+) на (-), то в точці  $x_k$  - максимум (рис.2.3, а), якщо навпаки - із (-) на (+), то мінімум (рис.2.3, б). Якщо ж знаки похідною в точках  $x_k - \varepsilon$  і  $x_k + \varepsilon$  збігаються, то в точці  $x_k$  немає екстремуму (рис.2.3, в).

Дослідження знаків вищих похідних. Цей спосіб можна застосувати в тих випадках, коли в точці, "підозрюваній" на екстремум, існують похідні вищих порядків, тобто функція  $R(x)$  не тільки сама неперервна, але і має також неперервні похідні  $dR/dx$  і  $d^2R/dx^2$ , а в деяких випадках і більш високого порядку.

Коли порядок першої, що не обертається в нуль похідної в точці  $x_k$ , для якої  $dR/dx|_{x=x_k} = 0$ , непарний, то в цій точці функція  $R(x)$  не має ні максимуму, ні мінімуму, тобто точка  $x_k$  не є точкою екстремуму функції  $R(x)$ . Якщо ж порядок першої, що не повертається в нуль похідної в точці  $x_k$  парний, то в даній точці є екстремум функції  $R(x)$ , що буде максимумом або мінімумом у залежності від того, від'ємна або додатня ця похідна.

Може знадобитися виконання досить громіздких обчислень для визначення в аналітичному виді похідних вищих порядків. Тому іноді простіше скористатися одним із наведених вище перших двох способів.

Приклад 2.1. Знайти максимум і мінімум функції  $y = 3x^3 - x$ .

Необхідна умова

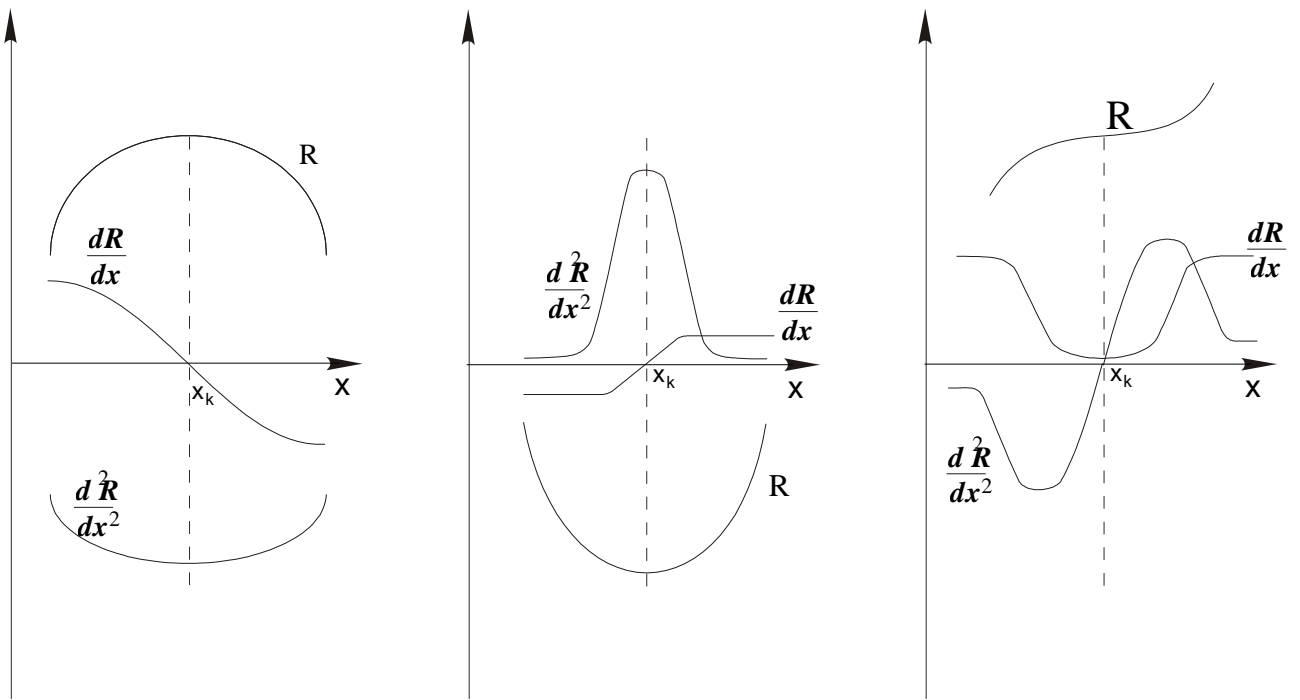
$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 1 = 0$$

задовольняється при  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = -1/3$ .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x$$

при  $x_1 = 1/3$ ,  $18 \times 1/3 = 6$  мінімум

$x_2 = -1/3$ ,  $18 \times (-1/3) = -6$  максимум



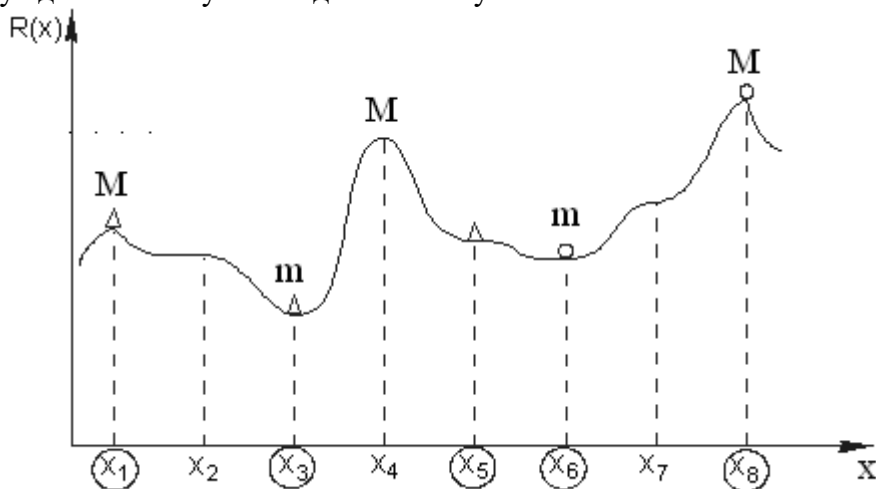
а)

б)

в)

**Рис.2.4. Перевірка точки на екстремум з використанням вищих похідних.**

Для неперервних функцій однієї змінної максимуми і мінімуми чергуються між собою; між двома сусідніми максимумами розташований один мінімум, а між двома сусідніми мінімумами один максимум.



**Рис.2.5. Глобальний і локальні екстремуми**

Оскільки у точці  $x_1$  - максимум, а в точці  $x_3$  - мінімум, то в точці  $x_2$  екстремуму немає. У точці  $x_5$  немає ні максимуму, ні мінімуму, тому подальшу перевірку починаємо з точки  $x_6$ , у якій є мінімум. Отже в пропущеній точці  $x_4$  може бути тільки максимум, оскільки два мінімуми не можуть слідувати підряд. У точці  $x_8$  знову надається максимум, і виходить, у т.  $x_7$  немає ні максимуму, ні мінімуму.

### 2.3. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Рішення задачі оптимізації істотно ускладнюється, коли критерій оптимальності є функцією декількох незалежних змінних навіть при відомому аналітичному виразі цієї функції. Найбільші труднощі виникають при відсутності неперервності у всіх або деяких похідних функції, що оптимізується. У останньому випадку для рішення оптимальної задачі доцільно використовувати методи нелінійного програмування.

**Необхідні і достатні умови** для неперервних функцій, що мають до того ж неперервні похідні першого і другого порядків.

Для неперервної функції багатьох змінних

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

що має неперервні похідні першого і другого порядки по всім змінним  $x_i (i = 1, \dots, n)$ , необхідною умовою екстремуму в точці  $x_i^k (i = 1, \dots, n)$  служить рівність нулю в точці градієнту функції

$$\nabla f(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1^{(k)}} \\ \frac{df}{dx_2^{(k)}} \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n^{(k)}} \end{bmatrix} = 0$$

Тобто точка  $X^k$ , повинна задовольняти умові стаціонарності.

Слід пам'ятати, що функція  $f$  може мати оптимум у точці  $\bar{X}$ , в якій  $f$  чи  $\nabla f$  мають розриви.

Виведемо достатні умови наявності екстремуму функції багатьох змінних.

Розкладемо функцію  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в околі точки  $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  в ряд Тейлора обмежившись квадратичною апроксимацією  $f(X)$ , відкидаючи члени третього і більш високого порядків:

$$f(X) \approx f(X^{(k)}) + \nabla f(X^{(k)}) \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T \nabla^2 f(X^{(k)}) \Delta X$$

Якщо точка  $X^{(k)}$  є точкою мінімуму функції  $f(X)$ , то кожна перша частинна похідна  $\frac{\partial f}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$  повинна перетворюватися в нуль у точці  $X^{(k)}$ .

Тоді знак збільшення  $f(X) - f(X^{(k)})$  визначається похідними другого порядку від  $f(X)$  за всіма змінним, включаючи і змішані похідні.

У матричній формі можна записати матрицю Гессе – квадратну матрицю других частинних похідних  $f(X)$  узятих у точці  $X^{(k)}$



$$\nabla^2 f(\mathbf{X}^{(k)}) = H(\mathbf{X}^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Для випадку двох змінних

$$H(\mathbf{X}^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Необхідними умовами наявності в точці  $\mathbf{X}^*$  локального мінімуму є виконання рівності

$$\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$$

і матриця  $\nabla^2 f(\mathbf{X}^*)$  – додатньо напіввизначена.

Достатніми умовами того, що  $\mathbf{X}^*$  – точка ізольованого (строого) локального мінімуму є

$$\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$$

і матриця  $\nabla^2 f(\mathbf{X}^*)$  додатньо визначена.

Звичайно приходиться обмежуватись знаходженням локального мінімуму. Але якщо можна показати, що  $\Delta \mathbf{X}^T \nabla^2 f(\mathbf{X}^{(k)}) \Delta \mathbf{X} \geq 0$  для всіх  $\mathbf{X}$ , то  $f(\mathbf{X})$  називається опуклою функцією, а локальний мінімум виявляється глобальним.

Якщо в стаціонарній точці  $\bar{\mathbf{X}}$  матриця Гессе  $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{X}})$  – від'ємно визначена, то це точка максимуму, якщо  $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{X}})$  – невизначена, то це сідлова точка.

## Приклад 2.2.

Розглянемо функцію

$$f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2,$$

лінії рівня якої зображені на рис.2.6. Необхідно класифікувати точку  $\bar{\mathbf{x}} = [0,0]^T$ .

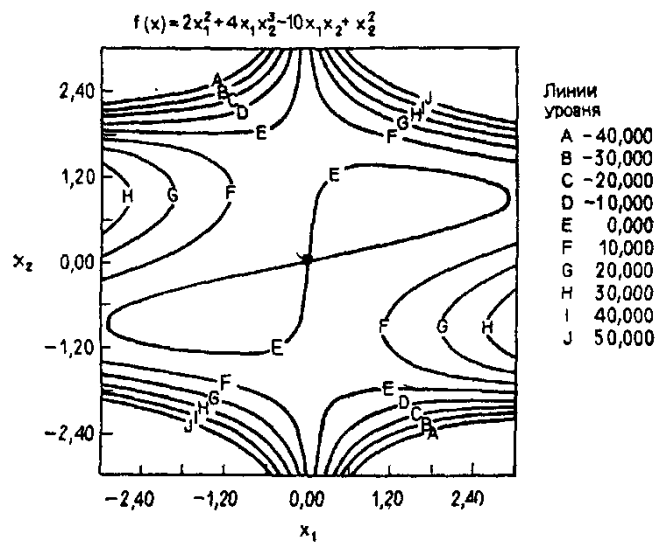


Рис.2.6. Лінії рівня нелінійної функції двох змінних з приклада 2.2.

Розв'язок

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 4x_2^3 - 10x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 12x_1x_2^2 - 10x_1 + 2x_2,$$

$$\nabla f(\bar{x}) = [0, 0]^T.$$

Тоді, точка  $\bar{x}$  - стаціонарна.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 24x_1x_2 + 2 = +2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 12x_2^2 - 10 = -10.$$

Тоді,

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = H_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} +4 & -10 \\ -10 & +2 \end{bmatrix}.$$

Матриця  $\nabla^2 f(\bar{x})$  являється невизначеною. Тому  $\bar{x}$  представляє собою **сідлову точку**, що і відображено на рис.2.6.

Завдання 1. Визначте і класифікуйте стаціонарні точки функції.

а)  $f(X) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4,$

б)  $f(X) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2,$

в)  $f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3,$

г)  $f(X) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$

Завдання 2. В результаті пошуку мінімуму функції

$$f(X) = [x_1^2 + (x_2 + 1)^2] [x_1^2 + (x_2 - 1)^2]$$

знайдені наступні точки:

а)  $X^{(1)} = [0 \ 0]^T$

б)  $X^{(2)} = [0 \ 1]^T$

в)  $X^{(3)} = [0 \ -1]^T$

г)  $X^{(4)} = [1 \ 1]^T$

Класифікуйте отримані точки.

### Контрольні запитання.

Нехай у точці  $X = \bar{X}$  градієнт  $\nabla f(\bar{X}) = 0$ .

Що можна сказати про точку  $\bar{X}$ , якщо

а)  $f(X)$  – опукла функція?

б)  $f(X)$  – вгнута функція?

в)  $\nabla^2 f(X)$  – невизначена матриця?

г) матриця  $\nabla^2 f(X)$  додатньо визначена?

д)  $\nabla^2 f(X)$  від'ємно визначена?

## 2.4. МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕННЯМИ ТИПУ РІВНОСТІ

Розглянемо екстремум функції  $F : R^n \rightarrow R$ , на котру накладено обмеження у вигляді рівності  $f(X) = 0$ , де  $f : R^n \rightarrow R^m$ . Для рішення цієї задачі можливо використовувати декілька методів, два з котрих – **метод прямої підстановки** та **метод множників Лагранжа**.

### 2.4.1. МЕТОД ПРЯМОЇ ПІДСТАНОВКИ

Пряма підстановка – це найбільш зрозуміла процедура, однак часто вона виявляється більш громіздкою, ніж метод множників Лагранжа. Для простоти прикладу нехай  $n=2$  та  $m=1$ .

Метод прямої підстановки може бути описаний наступним чином. Припустимо, що  $f$  така функція, що задовольняє рівності  $h(x_2) = x_1$ . Далі,  $F(x_1, x_2) = F[h(x_2), x_2]$  є функцією тільки  $x_2$ , і можна використовувати методи, що використовуються в задачах без обмежень.

#### Приклад 2.3.

Знайти сторони прямокутного трикутника заданої гіпотенузи 1, щоб площа була максимальною. Площа трикутника  $f(x_1, x_2) = 1/2 x_1 x_2$

Обмеження  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = l^2$ .

Обмеження типу рівності розв'язується аналітично відносно  $x_1$ :

$$x_1 = \sqrt{l^2 - x_2^2} = \bar{C}(x_2), \quad (2.4.1)$$

де від'ємний розв'язок опускається. Для застосування методу підстановки підставимо у функцію якості:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1x_2 = -\frac{1}{2}x_2\sqrt{l^2 - x_2^2} = \bar{f}(x_2), \quad (2.4.2)$$

завдяки чому, обмежена функція якості  $\bar{f}(x_2)$  може бути тепер мінімізована без урахування обмежень типу рівності. Із необхідної умови першого порядку одержуємо результат  $x_2^* = l/\sqrt{2}$ , який також задовольняє достатній умові для локального мінімуму функції  $\bar{f}(x_2)$ .

Відповідне значення другого катета  $x_1^* = l/\sqrt{2}$ . Таким чином, можемо сказати, що прямокутному трикутнику із заданою гіпотенузою  $l$  відповідає рівнобедрений трикутник з максимальною площею.

#### Приклад 2.4.

Виробник бляшаних консервних банок бажає максимізувати об'єм деякої партії банок при заданій площі жести, що використовується.

$$\text{Об'єм } V(r, l) = \pi r^2 l \quad (2.4.3)$$

$$\text{Площа } A(r, l) = 2\pi r^2 + 2\pi r l = A_0 \quad (2.4.4)$$

Задача складається із максимізації  $V(r, l)$  при умові  $A(r, l) = A_0$ , де  $A_0$  - задана величина. Тут може бути використан той же метод, що і у прикладі 2.3. Виражається величина  $l$  через  $r$  (чи, якщо це зручніше, величина  $r$  через  $l$ ), та далі об'єм записується у вигляді функції тільки  $r$ . Відмітимо, що тепер обмеження на площу входить у вираз для об'єму. Далі проводиться дослідження першої та другої похідних для визначення характеру та положення екстремуму.

З рівняння (2.4.3) маємо

$$l = (A_0 - 2\pi r^2) / 2\pi r \quad (2.4.5)$$

Отримаємо

$$V(r) = \frac{r}{2} (A_0 - 2\pi r^2) \quad (2.4.6)$$

Продиференціюємо  $V$  по  $r$  і результату прирівняємо нулю. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{dV(r)}{dr} &= \frac{A_0}{2} - 3\pi r^2 = 0, \\ r &= \sqrt{A_0 / 6\pi} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Отримаємо

$$l = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}} \quad (2.4.8)$$

Цікаво отримати оптимальне відношення довжини до радіуса. Видно, що для отримання максимального об'єму довжину консервної банки слід зробити рівною діаметру (при умові, що площа жести задана).

Для виводу умов оптимальності розкладемо в ряд Тейлора функцію  $f(x)$ , що мінімізується, біля припустимої точки  $\bar{x} \in X$ :

$$f(\bar{x} + \delta x) = f(\bar{x}) + f'_x(\bar{x})^T \delta x + R(\delta x^2). \quad (2.4.9)$$

Тепер будемо враховувати тільки припустимі варіації  $\delta x$ , тобто такі, які задовольняють  $C(\bar{x} + \delta x) = 0$  в першому наближенні. Розкладаючи обмеження типу рівності у ряд Тейлора, отримаємо:

$$C(\bar{x} + \delta x) = C(\bar{x}) + C_x(\bar{x})\delta x + R(\delta x^2). \quad (2.4.10)$$

Тут  $\bar{x}$  припустима, виконується  $C(\bar{x}) = 0$ , так що отримується наступна умова для припустимих варіацій:

$$C_x(\bar{x})\delta x = 0. \quad (2.4.11)$$

Рівняння (2.4.11) означає, що припустимий вектор варіації  $\delta x$  повинен бути ортогональним до кожного вектора рядка матриці Якобі  $C_x$ . Вектори рядка  $C_{ix}^T$ ,  $i = 1, \dots, m$  на нормальних точках незалежні, вони розтягують векторний простір  $\psi$  до розмірів  $m$ , а  $\delta x$  також ортогональний до  $\psi$ . Останнє рівнозначне тому, що вектор  $\delta x$  знаходиться в  $(n-m)$ -мірному додатковому векторному просторі  $\Phi$ .

Геометричне пояснення описаному положенню речей можливо зробити за допомогою рис.2.7 для випадку  $n=2$ ,  $m=1$ . Матриця  $C_x$  в цьому випадку буде вектором, який стоїть замість  $\bar{x}$  перпендикулярно до кривої

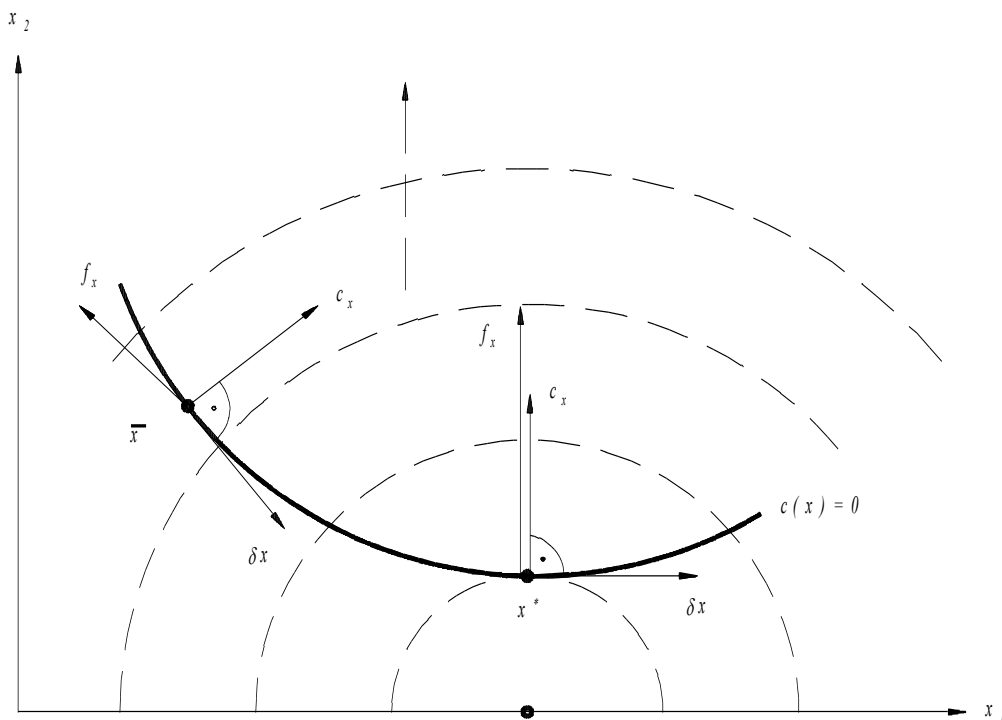


Рис.2.7. Геометричне пояснення ( $n=2, m=1$ )

$c(x)=0$ . Припустима варіація  $\delta x$  очевидно повинна проходити по дотичній до кривої обмежень типу рівності, а також бути ортогональною до  $C_x$ .

#### 2.4.2. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА.

Тепер знову звернемося до рівняння (2.4.11), побачимо, що біля локального мінімуму для всіх припустимих  $\delta x$  перша варіація  $f_x(x^*)^T \delta x$  зникає. Це означає, що градієнт  $f_x(x^*)$  ортогональний до  $\delta x$ , і так як  $\delta x \in \Phi$ , повинно виконуватись  $f_x(x^*) \in \Psi$ . Однак  $\Psi$  розтягується рядовими (рядковими) векторами  $C_{ix}(x^*)^T$ , тому  $f_x(x^*)$  може бути виражено як лінійну комбінацію цих векторів, тобто

$$f_x(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* C_{ix}(x^*) = 0. \quad (2.4.11)$$

У випадку на рис.2.7 градієнт  $f_x$  в локальному мінімумі колінеарний до вектора  $C_x$ . Насправді, після короткого розгляду рис.2.7, можна переконатися у тому, що в усіх точках, де  $f_x$  і  $C_x$  не колінеарні, можлива припустима поправка функції якості, тому не може бути мови про локальні мінімуми.

Локальний мінімум повинен задовольняти обмеженням типу рівності:

$$C(x^*) = 0. \quad (2.4.12)$$

Ці рівняння є необхідними умовами оптимальності першого порядку для постановки задачі.

Для формулювання умов оптимальності спочатку вводять функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T C(x), \quad (2.4.13)$$

де  $\lambda \in R^m$  являє собою вектор множників Лагранжа. Необхідні умови першого порядку для нормального локального мінімуму функції з обмеженнями типу рівності визначаються наступним чином:

існує  $\lambda^* \in R^m$ , тоді

$$L_x(x^*, \lambda^*) = f_x(x^*) + C_x(x^*)^T \lambda = 0, \quad (2.4.14)$$

$$L_\lambda(x^*, \lambda^*) = C(x^*) = 0. \quad (2.4.15)$$

Рівняння (2.4.14) має  $n$ , а рівняння (2.4.15) –  $m$  скалярних рівнянь. Таким чином, необхідні умови першого порядку формують систему рівнянь  $(n+m)$ -ного порядку для обчислення  $n+m$  невідомих. Рівняння (2.4.14), (2.4.15) можна сприймати у якості альтернативної інтерпретації, як необхідні умови для стаціонарної точки функції Лагранжа. В постановці питання немає обмеження типу рівності.

### **Приклад 2.5.**

Тепер розглянемо постановку задачі із прикладу 2.3 з використанням нових знань. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, \lambda) = -\frac{1}{2}x_1x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - l^2). \quad (2.4.16)$$

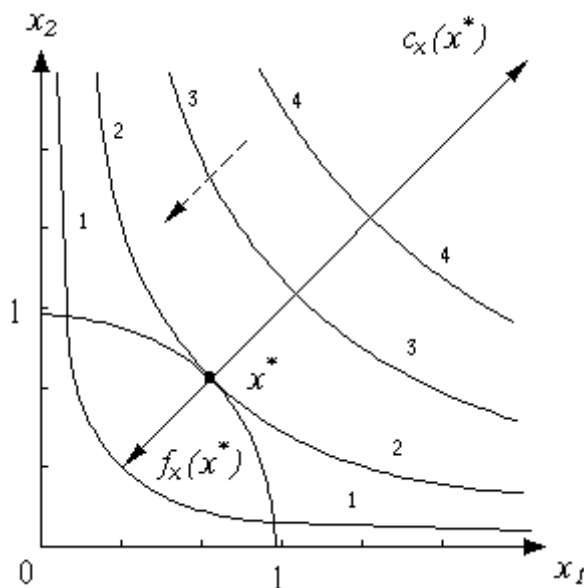
Отримуємо наступні три рівняння:

$$L_{x_1} = -\frac{1}{2}x_2^* + 2\lambda^*x_1^* = 0, \quad (2.4.17)$$

$$L_{x_2} = -\frac{1}{2}x_1^* + 2\lambda^*x_2^* = 0, \quad (2.4.18)$$

$$L_\lambda = x_1^{*2} + x_2^{*2} - l^2 = 0. \quad (2.4.19)$$

Отримуємо  $x_1^* = x_2^*$  і, підставляючи у рівняння, а також використовуючи метод підстановки (приклад 2.3), знаходимо розв'язок  $x_1^* = x_2^* = l/\sqrt{2}$ . Значення множника Лагранжа становить  $\lambda^* = 0,25$ . Геометричне тлумачення наведеної ситуації показано на рис.2.8.



$$x_1^2 + x_2^2 = l^2$$

**Рис.2.8.** Геометричне пояснення прикладу 2.5

Очевидна якість функції Лагранжа, яка пізніше буде часто використовуватись, має вигляд:

$$L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in X. \quad (2.4.20)$$

Наочна інтерпретація множників Лагранжа, які здаються спочатку абстрактними, може бути отримана наступним чином. Уявімо собі, що обмеження типу рівності будуть модифіковані. Тепер повинно виконуватись:

$$C(x) = \varepsilon, \quad (2.4.21)$$

де компонент  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon$  має малу величину. Тоді функція Лагранжа модифікованої постановки задачі має вигляд:

$$L(x, \lambda, \varepsilon) = f(x) + \lambda^T [C(x) - \varepsilon]. \quad (2.4.22)$$

Відповідний розв'язок може бути виражений як функція від  $\varepsilon$ :  $x^*(\varepsilon)$ ,  $\lambda^*(\varepsilon)$ . Значення функції якості буде  $f^*(\varepsilon) = f[x^*(\varepsilon)]$ , а функції Лагранжа -  $L^*(\varepsilon) = L[x^*(\varepsilon), \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon]$ .

Тепер  $f^*(\varepsilon) = L^*(\varepsilon)$  і звідти ж  $f_\varepsilon^*(\varepsilon) = L_\varepsilon^*(\varepsilon)$ . Отримаємо:

$$\frac{df^*}{d\varepsilon_i} = \frac{dL^*}{d\varepsilon_i} = \left( \frac{dx^*}{d\varepsilon_i} \right)^T L_x(x^*, \lambda^*) + \left( \frac{d\lambda^*}{d\varepsilon_i} \right)^T L_\lambda(x^*, \lambda^*) + \frac{\partial L^*}{\partial \varepsilon_i}. \quad (2.4.23)$$

Тут  $L_x(x^*, \lambda^*) = L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$  (умови оптимальності) і отримаємо:

$$\frac{df^*}{d\varepsilon_i} = -\lambda_i^*. \quad (2.4.24)$$

Рівняння (2.4.25) показує, що множник Лагранжа  $\lambda_i^*$  представляє собою безпосередню межу зміни (чутливості) мінімального значення функції якості при зміні відповідного обмеження типу рівність.

Розглянемо задачу, сформульовану у прикладі 2.4., використовуючи множник Лагранжа. Спочатку сформуємо функцію

$$V' = (r, l) = V(r, l) + \lambda[A(r, l) - A_0],$$

де  $\lambda$  - множник Лагранжа. Це вираження можна записати через параметри консервної банки наступним чином:

$$V'(r, l) = \pi r^2 l + \lambda[2\pi r^2 + 2\pi r l - A_0]$$

Візьмемо першу частинну похідну по кожній змінній і прирівняємо кожний результат до нуля. Таким чином, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'(r, l)}{\partial l} &= \pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0, \quad r = -2\lambda, \\ \frac{\partial V'(r, l)}{\partial r} &= 2\pi r l + \lambda[4\pi r + 2\pi l] = 0, \quad l = 2r. \end{aligned}$$

Підрахуємо тепер  $\lambda$  з врахуванням заданого обмеження  $A(r, l) = A_0$  чи  $A_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r l$ . Отримаємо

$$A_0 = 2\pi(4\lambda^2) + 2\pi(2\lambda)(-4\lambda),$$

тоді



$$\lambda = \pm \sqrt{A_0 / 24 \pi}.$$

Таким чином, маємо

$$r = 2\sqrt{A_0 / 24 \pi}, \quad l = 4\sqrt{A_0 / 24 \pi}.$$

Відмітимо, що для  $\lambda$  вибираються тільки від'ємні значення квадратного корня, оскільки в цьому випадку  $r$  та  $l$  приймають фізично реальні значення. Відношення довжини до радіуса буде таким же, як і отримане при прямому методі рішення (як це і повинно бути).

Розглянемо задачу з приклада 2.3 та її розв'язок з приклада 2.5. Тепер поставимо наступне питання: у скільки разів збільшується максимальна площа трикутника при першому наближенні, якщо довжина гіпотенузи дорівнює  $l + \Delta l$ ? Обмеження типу рівності, які лежать в основі постановки задачі, будуть мати вигляд:

$$x_1^2 + x_2^2 = (l + \Delta l)^2 = l^2 + 2\Delta l \cdot l + \Delta l^2,$$

так що  $\Delta \varepsilon$  в першому наближенні буде становить  $\Delta \varepsilon = 2\Delta l \cdot l$ . Знаючи  $\lambda^* = 0,25$  (приклад 2.3), відповідь на поставлене питання:

$$\Delta f^* = -\lambda^* \cdot \Delta \varepsilon = -0,5\Delta l \cdot l.$$

Для виведення необхідних умов оптимальності другого порядку, повинні тепер розкласти функцію Лагранжа у ряд Тейлора в припустимій точці  $\bar{x} \in X$ :

$$L(\bar{x} + \delta x, \lambda) = L(\bar{x}, \lambda) + L_x(\bar{x}, \lambda)^T \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T L_{xx}(\bar{x}, \lambda) \delta x + R(\delta x^3). \quad (2.4.25)$$

$\delta x$  - припустима варіація, таким чином, використовуючи (2. ) повинно виконуватись  $L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x})$  та  $L(\bar{x} + \delta x, \lambda) = f(\bar{x} + \delta x)$ . В подальшому у стаціонарній точці функції Лагранжа виконується  $L_x(x^*, \lambda^*) = 0$ , так що з (2.4.25) виходить наступне співвідношення:

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + \frac{1}{2} \delta x^T L_{xx}(x^*, \lambda^*) \delta x + R(\delta x^3). \quad (2.4.26)$$

Подібна аргументація з допустимою варіацією  $\delta x$ , приводить нас до вказаних умов оптимальності другого порядку.

Необхідні умови другого порядку для локального мінімуму складаються з необхідних умов першого порядку:

$$L_{xx}(x^*, \lambda^*) \geq 0, \quad (2.4.27)$$

з обмеженням (припустима варіація):

$$Y = \{ \delta x | C_x(x^*) \delta x = 0 \}. \quad (2.4.28)$$

Зручний критерій для перевірки визначення матриці з обмеженням призводить до перевірки коренів наступного полінома  $(n - m)$ -го ступеня

$$P(\Lambda) = \begin{vmatrix} \Lambda I - L_{xx}(x^*, \lambda^*) & C_x(x^*)^T \\ C_x(x^*) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.29)$$

Достатні умови для строгого локального мінімуму складаються з припустимих умов першого порядку:

$$L_{xx}(x^*, \lambda^*) > 0 \quad (2.4.30)$$

з обмеженням  $Y$ .

### Приклад 2.6.

Перевірити, чи задовольняє умовам оптимальності другого порядку розв'язок задачі, отриманий в прикладі 2.5. Для цього перевіряємо на додатне значення матрицю

$$L_{xx}(x^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра маємо  $D_1=0,5$ ,  $D_2=0$ . Таким чином,  $L_{xx}(x^*, \lambda^*)$  без обмеження задовольняє необхідним умовам другого порядку. Однак, достатня умова без обмеження не виконується, і бажаємо визначити, чи виконується вона з, для цього складаємо поліном

$$P(\Lambda) = \begin{bmatrix} \Lambda - 0,5 & 0,5 & l\sqrt{2} \\ 0,5 & \Lambda - 0,5 & l\sqrt{2} \\ l\sqrt{2} & l\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = -4\Lambda + 4 = 0.$$

Корінь цього полінома ступеню  $n-m=1$  має вигляд  $\Lambda=1>0$ . Отже,  $L_{xx}(x^*, \lambda^*)$  додатньо визначена для припустимої варіації  $\delta x$ , і достатня умова також виконується.

Для більшості системних задач необхідно розрізняти вектор управління і вектор стану. Найбільш проста одноетапна процедура прийняття рішення з обмеженнями у формі рівностей повинна мінімізувати чи максимізувати скалярний показник характеристики

$$J = F[X, U] \quad (2.4.31)$$

при обмеженні

$$f(X, U) = 0 \quad (2.4.32)$$

де  $X$  –  $n$ -мірний вектор

$$X^T = [x_1, x_2, \dots, x_n],$$

$U$  –  $m$ -мірний вектор

$$U^T = [u_1, u_2, \dots, u_m],$$

$f$  –  $n$ -мірна векторна функція

$$f^T(X, U) = [f_1(X, U), f_2(X, U), \dots, f_n(X, U)].$$

Рішення знаходиться наступним чином. Об'єднуємо (2.4.31) і (2.4.32) множником Лагранжа, в результаті чого отримуємо скалярну величину

$$L(X, U, \Lambda) = F(X, U) + \Lambda^T f(X, U),$$

$$\Lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Тепер знайдемо  $x$  та  $u$ , для котрих  $L$  приймає максимальне чи мінімальне значення. Для цього

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} f^T(X, U) \Lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = \frac{\partial F}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial U} f^T(X, U) \Lambda = 0$$

де

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial U} \right]^T = \left[ \frac{\partial L}{\partial u_1}, \frac{\partial L}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial u_m} \right].$$

Таким чином,  $\frac{\partial L}{\partial U}$  можна інтерпретувати як градієнт  $L$  по  $u$ , що зазвичай позначається  $\nabla_u L$ . Також

$$\frac{\partial}{\partial X} f^T(X, U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.4.33)$$

Для того щоб величина  $J$  досягла екстремуму, необхідно, щоб не тільки

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial U} = 0,$$

але також, щоб друга варіація  $L$  була більш нуля у випадку мінімуму чи менш нуля у випадку максимуму. Для того щоб показати, що означає це обмеження (використовуючи необхідні умови, котрі необхідно виконати для того, щоб  $J(x, u)$  мала екстремум), знайдемо другу варіацію  $L(x, u, \lambda)$ . Перша варіація  $L(x, u, \lambda)$  дорівнює

$$\delta L = \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta X + \left( \frac{\partial L}{\partial u} \right)^T \delta U,$$

що представляє собою лінійну частину приросту

$$\Delta L = L[X + \delta X, U + \delta U] - L[X, U]. \quad (2.4.34)$$

Друга варіація  $L$  дорівнює

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \delta X^T \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} \right] \delta X + \left[ \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right] \delta U \right\} + \frac{1}{2} \delta U^T \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T \delta X + \left[ \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \right] \delta U \right\}. \quad (2.4.35)$$

У компактній формі отримаємо

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \left[ \delta X^T \delta U^T \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta U \end{bmatrix}. \quad (2.4.36)$$

### 2.4.3. ОПТИМАЛЬНИЙ СТАТИЧНИЙ ПРОЦЕС КЕРУВАННЯ

Застосуємо представлену в цьому розділі методологію для проблеми оптимального статичного процесу керування. Статична модель процесу має вигляд :

$$g(x, u, z) = 0. \quad (2.2.1)$$

Задача ТАК полягає в тому, щоб для відповідних збурюючих впливів  $z$  визначити також параметри керування  $u$  і стану  $x$ , щоб функція якості  $f(x, u)$  з урахуванням (2.2.1) могла бути мінімізована. Це є постановкою задачі, яка точно відповідає “розміру” загальної постановки питання цього розділу.

Особливий важливий випадок оптимального статичного процесу керування виникає при розгляді лінійної моделі системи і квадратичної функції якості, тобто

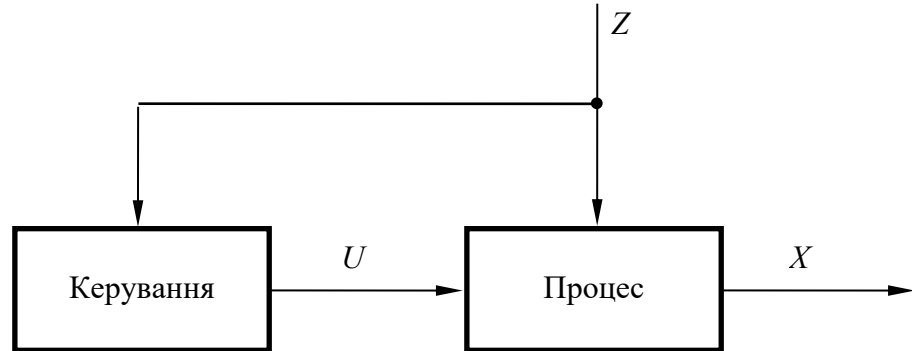
$$\tilde{A}X + \tilde{B}U + \tilde{Z} = 0, \quad (2.2.2)$$

$$f(X, U) = \frac{1}{2} \|X\|^2 Q + \frac{1}{2} \|U\|^2 R, \quad (2.2.3)$$

де матриця  $\tilde{A}$  припускається регулярною для того, щоб забезпечити однозначне обчислення параметрів стану; вагові матриці  $Q, R$  припускаються додатньо визначеними.

З урахуванням  $B = \tilde{A}^{-1} \tilde{B}$  і  $z = \tilde{A}^{-1} \tilde{Z}$ , (2.2.2) описується наступним чином:

$$X + BU + z = 0. \quad (2.2.4)$$



**Рис.2.9. Статичний оптимальний процес керування**

Для розв'язку цієї лінійно-квадратичної задачі можна скористатися методами цього розділу. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(X, U, \Lambda) = \frac{1}{2} (\|X\|^2 Q + \|U\|^2 R) + \lambda^T (X + BU + z). \quad (2.2.5)$$

У підсумку отримуємо необхідні умови першого порядку:

$$L_x(X^*, U^*, \Lambda^*) = QX^* + \Lambda^* = 0, \quad (2.2.6)$$

$$L_u(X^*, U^*, \Lambda^*) = RU^* + B^T \Lambda^* = 0, \quad (2.2.7)$$

$$L_\lambda(X^*, U^*, \Lambda^*) = X^* + BU^* + z = 0. \quad (2.2.8)$$

При розв'язку цієї лінійної системи рівнянь обчислюється оптимальний вектор керування:

$$U^* = -(R + B^T QB)^{-1} B^T Qz, \quad (2.2.9)$$

як функція, що залежить від вектора збурення  $z$ . При використанні достатніх умов можна упевнитись в тому, що при  $u^*$  мова йде про мінімум. Гранична ситуація  $R \rightarrow 0$  (великі витрати на керування не враховуються) цікавим чином призводить до результату, оскільки матриця  $B^T QB$  інвертована. З іншого боку, гранична ситуація  $Q \rightarrow 0$  призводить, як і треба було чекати, до безглузлого (з технічної точки зору) нульового керування  $u^* = 0$ .

Завдання 1. За допомогою метода множників Лагранжа розв'язати наступну задачу: мінімізувати  $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{9}{2}.$$

Пояснити, чому указаний метод забезпечує отримання оптимального рішення.

Завдання 2. Застосувати метод множників Лагранжа для знаходження глобального мінімуму і глобального максимуму функції:

$$f(X) = x_2 - x_1^2$$

при обмеженнях  $x_1^2 + x_2^2 = 1$

На знаки  $x_1$  і  $x_2$  обмеження не накладено.

Контрольні запитання:

1. Поясніть труднощі, що виникають при використанні метода прямої підстановки.
2. Яка може бути економічна інтерпретація множників Лагранжа?
3. Яка роль оптимальних множників Лагранжа в аналізі чутливості рішень?
4. Як перевірити стаціонарну точку функції Лагранжа?

### 3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

### 3.1 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТА ЇХ ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

Лінійне програмування /ЛП/ являє собою теоретичний апарат модельного дослідження, спрямованого на відшукання найкращого способу розподілу обмежених ресурсів за кількома взаємопов'язаними за метою і використанням ресурсів видами виробничої діяльності. ЛП широко застосовується при розв'язуванні багатьох практичних задач організаційно-економічного управління.

Загальна задача ЛП полягає в максимізації /чи мінімізації/ лінійної функції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.1.1)$$

від  $n$  дійсних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що задовольняють умови невід'ємності

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0 \quad (3.1.2)$$

і т лінійні обмеження:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq (=, \geq) b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq (=, \geq) b_2; \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq (=, \geq) b_m. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

У матричних позначеннях задачу можна подати таким чином:  
максимізувати (мінімізувати) функцію

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}^T \mathbf{X}_0, \quad (3.1.4)$$

де

$$X_0 \geq 0, \quad A_0 \mathbf{X}_0 \leq (=, \geq) \mathbf{b}; \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \text{вектор-столбец } n \times 1;$$

$$\mathbf{C}^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] - \text{вектор-рядок } 1 \times n;$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ - вектор-стовпчик } m \times 1;$$

$$A_0 = (a_{ij}) - \text{матрица } m \times n.$$

Індекс 0 у векторі  $\mathbf{X}_0$  і в матриці  $A_0$  вказує на те, що це початкові значення.

Лінійність передбачає наявність двох властивостей: пропорційності і адитивності.

1. Пропорційність означає, що внесок кожної змінної ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) у цільову функцію і загальний обсяг споживання відповідних ресурсів прямо пропорційний рівню (величині) цієї змінної.

2. Адитивність полягає в тому, що цільова функція є сумою внесків від різних змінних. Аналогічно ліва частина кожного обмеження повинна являти собою суму витрат, кожний доданок якого пропорційний за значенням відповідній змінній.

Задачу ЛП, що містить тільки дві змінні, можна розв'язати графічно.

Перший крок при використанні графічного методу полягає в геометричному зображенні припустимих розв'язків, тобто в побудові області (припустимих) розв'язків, у якій одночасно задовольняються всі обмеження моделі. Умови невід'ємності змінних обмежують область їх припустимих значень першим квадрантом.

### Приклад 3.1.1

Максимізувати вираз при обмеженнях

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_2 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

На рис.3.1.1 показано простір розв'язків - багатокутник. Області, в яких виконуються відповідні обмеження у вигляді нерівностей, вказуються стрілками, напрямленими в бік припустимих значень змінних.

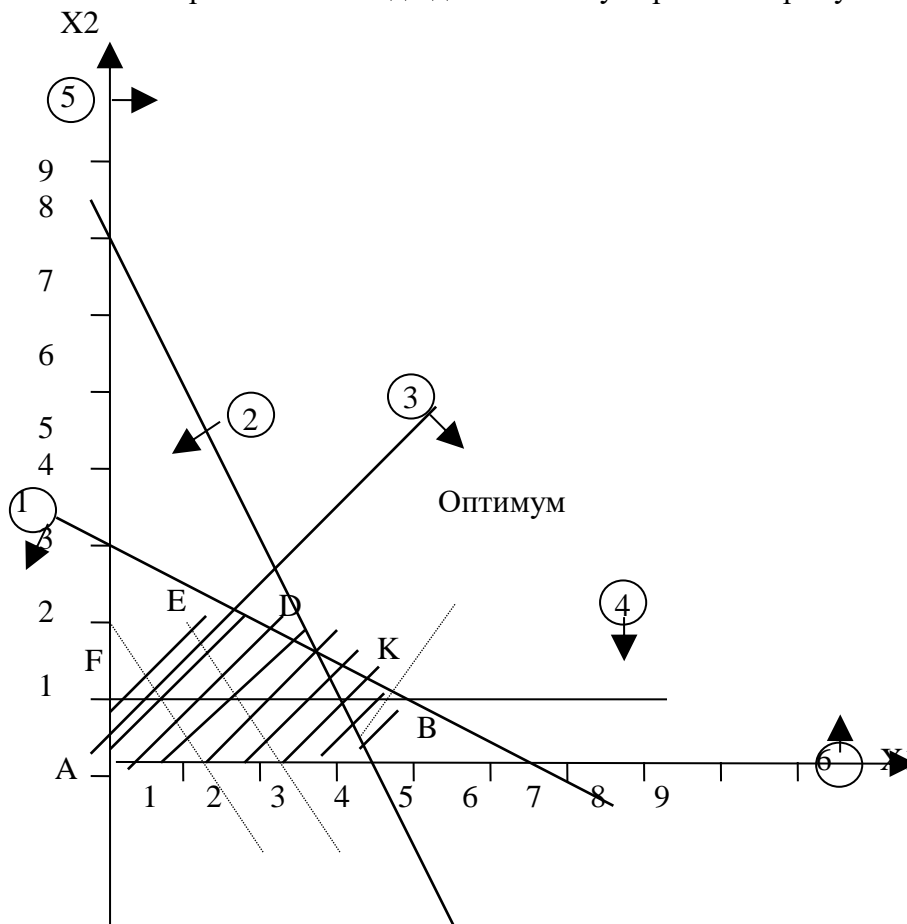
Для знаходження оптимального розв'язку слід перемістити пряму, яка характеризує рівень цільової функції, у напрямі її зростання. Оптимальному розв'язку відповідає точка

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\frac{1}{3}; & x_2 &= 1\frac{1}{3}; \\ z &= 3 \cdot 3\frac{1}{3} + 2 \cdot 1\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Можливість зручного і наочного графічного методу розв'язування задач ЛП обмежені випадком двох змінних.

При геометричній інтерполяції прикладу 3.1.1 виявляються характерні риси задач ЛП:

- 1) припустима область завжди являє собою опуклий багатокутник, навіть коли вона не обмежена;
- 2) оптимальний розв'язок завжди досягається у вершинах припустимої області.



### Рис. 3.1.1. Геометрична інтерпретація прикладу 3.1.1

Процес, який реалізується після того, як оптимальний розв'язок задачі отримано, називається аналізом моделей ЛП на чутливість.

#### Характерні задачі аналізу на чутливість.

1. На скільки можна збільшити (зменшити) запас деякого ресурсу для покращення (збереження) отриманого оптимального значення цільової функції?
2. Збільшення об'єму якого з ресурсів найбільш вигідно?
3. У яких межах припустима зміна коефіцієнтів цільової функції?

### 3.1.1 СТАНДАРТНА ФОРМА ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ.

Для побудови загального методу розв'язування задач ЛП відповідні моделі мають бути подані у стандартній формі лінійних оптимізаційних моделей, за яких:

- 1) усі обмеження записуються у вигляді рівностей з невід'ємною правою частиною;
- 2) значення всіх змінних моделі невід'ємні;
- 3) цільова функція підлягає мінімізації.

#### Обмеження.

1. Вихідне обмеження, записане у вигляді нерівності типу  $\leq$  ( $\geq$ ), можна подати у вигляді рівності, додавши додаткову змінну до лівої частини обмеження (віднявши додаткову змінну від лівої частини).
2. Праву частину рівності завжди можна зробити невід'ємною, помноживши обидві частини на -1.

#### Змінні.

Кожна змінна  $y_i$ , яка не має обмеження за знаком, може бути подана як різниця двох невід'ємних змінних:  $y_i = y'_i - y''_i$ , де  $y'_i, y''_i \geq 0$ .

#### Цільова функція.

Максимізація деякої функції еквівалентна мінімізації тієї самої функції, взятої з протилежним знаком, і навпаки. Еквівалентність означає, що при одній і тій самій сукупності обмежень оптимальні значення змінних в обох випадках будуть однаковими. Відмінність полягає тільки в тому, що при однакових числових значеннях цільових функцій їх знаки будуть протилежними.

#### Завдання.

Розв'язати графічним способом такі задачі ЛП:

- а) максимізувати  $z = 6x_1 - 2x_2$  при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$3x_1 - x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0;$$

- б) максимізувати  $z = 4x_1 + 4x_2$  при обмеженнях

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21,$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 49, \quad x_1, x_2 \geq 0;$$

- в) максимізувати  $z = 5x_1 + 6x_2$  при обмеженнях



$$x_1 - 2x_2 \geq 2,$$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq 2;$$

$x_1, x_2$  не обмежені за знаком;

г) максимізувати  $z = 3x_1 + 2x_2$  при обмеженнях

$$2x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12, \quad x_1, x_2 \geq 0;$$

д) максимізувати  $z = 5x_1 + 2x_2$  при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_1 = 5, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

### Завдання для самостійної роботи.

Заводу потрібне вугілля із вмістом фосфору 0,03% і зольних домішок не більше ніж 3,25%. Він може придбати три сорти вугілля А, В, С за такими цінами:

Сорт вугілля	Вміст домішки, %		Ціна за 1 т, грн.
	фосфору	золи	
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

Як змішати ці сорти вугілля, щоб отримати мінімальну ціну і задовольнити обмеження на вміст домішок? Показати, що задачу можна подати графічно у двовимірному просторі і, таким чином, отримати розв'язок.

### Контрольні запитання.

1. Чи може в задачах ЛП з двома змінними цільова функція набувати одного й того самого значення у двох різних екстремальних точках?
2. Чи можуть змінні лінійних оптимізаційних моделей не мати обмежень за знаком?

## 3.2 СИМПЛЕКС-МЕТОД - АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛП.

Лінійна модель стандартної форми складається з  $m$  рівнянь і  $n$  ( $m \leq n$ ) невідомих. Усі припустимі експериментальні точки визначаються як усі однозначні невід'ємні розв'язки системи  $m$  рівнянь, в яких  $(n - m)$  змінних дорівнюють нулю. Однозначні розв'язки такої системи рівнянь, отримані шляхом прирівнювання до нуля  $(n - m)$  змінних, називаються базисними. Якщо базисний розв'язок задовольняє вимогу невід'ємності правих частин, він називається припустимим. Змінні, які мають нульове значення, називаються небазисними. При реалізації симплекс-методу алгебраїчне визначення базисних розв'язків відповідає ідентифікації екстремальних точок при геометричному зображенні простору розв'язків. Рівняння (3.1) і (3.3) можуть бути зведені до вигляду

[illegible]

$$c'_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \dots + c_n x_n = z - z_0, \quad (3.2.2)$$

$$\text{де } z_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i .$$

Рівняння (3.1.3) і (3.2.1) відображають однакові обмеження, а рівняння (3.1.1) і (3.2.2) подають одну й ту саму цільову функцію в різних алгебраїчних формах.

Рівняння (3.2.1) і (3.2.2) є канонічною формою для базису  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Якщо покласти небазисні змінні  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  такими, що дорівнюють нулю, то співвідношення  $x_1 = b'_1, x_2 = b'_2, \dots, x_m = b'_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0$  задають базисний розв'язок.

Якщо всі  $b_i \geq 0$ , цей розв'язок припустимий.

### 3.2.1 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ПРОЦЕДУРИ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ.

Симплекс-метод складається з таких кроків.

**Крок 0.** З використанням лінійної моделі стандартної форми визначається початковий припустимий базисний розв'язок шляхом прирівнювання до нуля  $(n - m)$  небазисних змінних.

**Крок 1.** З числа поточних небазисних змінних вибирається змінна, що включається в новий базис, збільшення якої забезпечує покращення значення цільової функції. Якщо такої змінної немає, розрахунки припиняють, тому що поточний базисний розв'язок оптимальний. У противному разі переходять до кроку 2.

**Крок 2.** З числа змінних поточного базису вибирається змінна, що виключається і повинна набувати нульового значення при введенні до складу базисних нової змінної.

**Крок 3.** Знаходиться новий базисний розв'язок. Здійснюється перехід до кроку 1.

Для вибору змінної, що включається в базис, використовується умова оптимальності.

Умова оптимальності. В задачі мінімізації введеною є небазисна змінна, що має в  $z$ -рівнянні найбільший від'ємний коефіцієнт. Якщо такі коефіцієнти дорівнюють один одному, для кількох небазисних змінних вибір довільний. Якщо всі коефіцієнти при небазисних змінних у  $z$ -рівнянні додатні, отриманий розв'язок оптимальний.

Пояснимо процедуру симплекс-методу на прикладі.

### Приклад 3.2.1.

Максимізувати при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1;$$

$$x_1 \leq 2; \quad x_1, x_2 \geq 0;$$

Подати цільову функцію і обмеження моделі у стандартній формі: мінімізувати

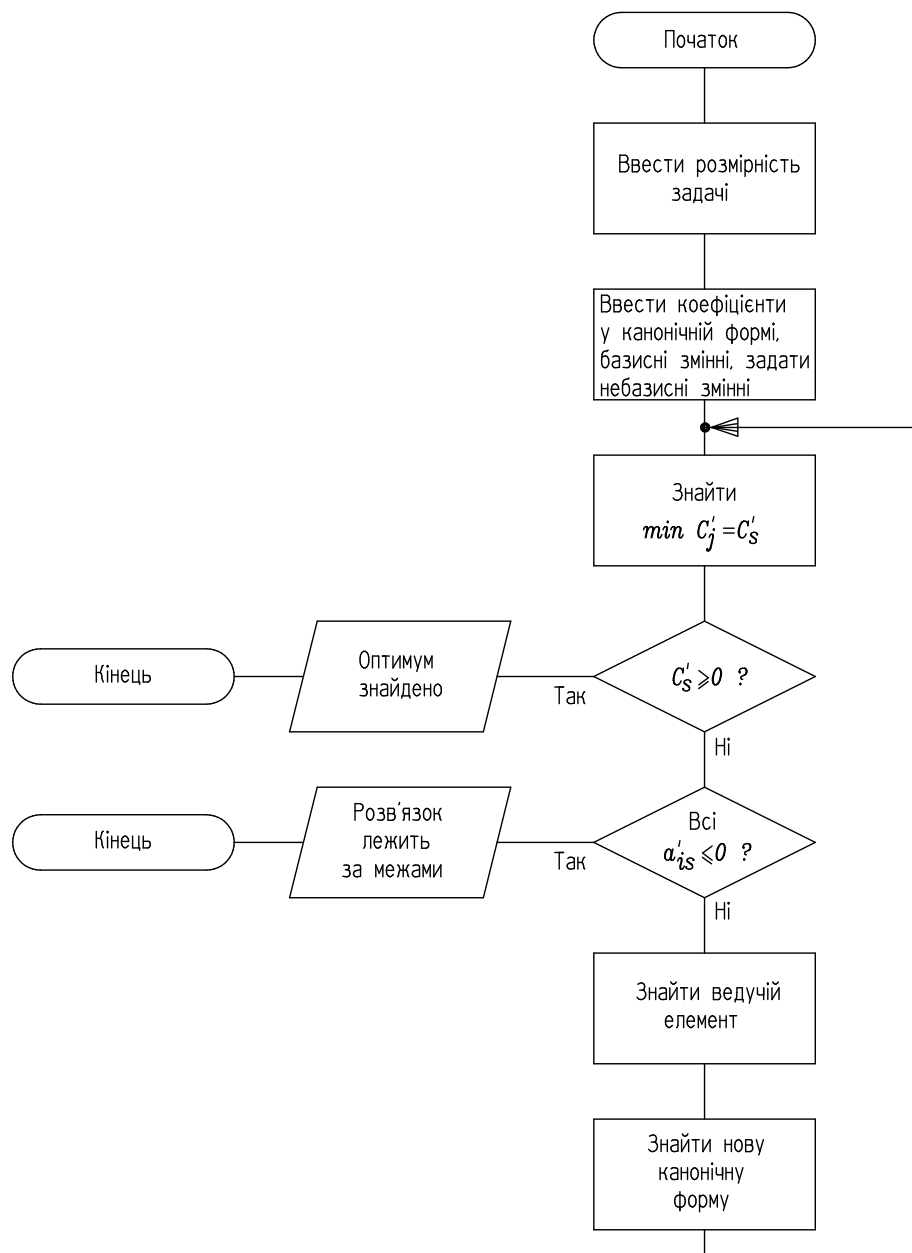
$$z = -3x_1 - 2x_2, \quad (-z - 3x_1 - 2x_2 = 0)$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6; \\
 2x_1 + x_2 + x_4 &= 8; \\
 -x_1 + x_2 + x_5 &= 1; \\
 x_2 + x_6 &= 2.
 \end{aligned}$$

Базисна змінна	Ведучий стовпчик	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Розв'язок
Z	-3	-2	0	0	0	0	0	0
X3 0	1	2	1	0	0	0	0	Відношення 6 6/1=6
Ведучий рядок X4 0	2	1	0	1	0	0	0	8 8/2=4
X5 0	1	1	0	0	1	0	0	1
X6 0	1	1	0	0	0	0	1	2

Стовпчик симплекс-таблиці, асоційований зі змінною, що включається, називається ведучим. Рядок, який відповідає змінній, що виключається, називають ведучим, а елемент таблиці, який розміщується на перетині ведучого стовпчика і ведучого рядка, - ведучим.

Змінна, що виключається з базису, визначається з використанням умови припустимості.



**Рис. 3.2.1. Схема симплекс-методу**

Умова припустимості. У задачах максимізації і мінімізації за змінну, що виключається, вибирають ту базисну змінну, для якої відношення сталої у правій частині відповідного обмеження до (додатного) коефіцієнта ведучого стовпчика мінімальне. У випадку рівності цього відношення для кількох базисних змінних вибір довільний.

Новий базисний розв'язок відшукується методом виключення змінних чи методом Гаусса-Жордана і містить обчислювальні процедури двох типів.

**Тип 1.** (формування ведучого рівняння):

Новий ведучий рядок = попередній ведучий рядок / ведучий елемент.

**Тип 2.** (формування всіх інших рівнянь, включаючи z - рівняння):

Нове рівняння = попереднє рівняння - (коефіцієнт ведучого стовпчика попереднього рівняння x новий ведучий рядок).

Використання процедури типу 1 призводить до того, що в новому ведучому рівнянні ведучий елемент стає таким, що дорівнює одиниці. У результаті процедури типу 2 всі інші коефіцієнти у ведучому стовпчику стають такими, що дорівнюють нулю, тобто приходимо до нової канонічної форми.

Ітераційний характер симплекс-методу ЛП може реалізуватися на ЕОМ. Схема симплекс-методу для випадку мінімізації цільової функції показана на рис.3.2.1.

### Завдання 1.

Дано сукупність обмежень

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46;$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8;$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10.$$

Розв'язати задачу ЛП симплекс-методом при таких цільових функціях: максимізувати

$$\text{а) } z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4;$$

$$\text{б) } z = -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4;$$

$$\text{в) } z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4;$$

мінімізувати

$$\text{г) } z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4;$$

$$\text{д) } z = 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4.$$

### Завдання 2.

Мінімізувати функцію  $z = -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$  при обмеженнях

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0:$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15;$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120;$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100.$$

### Завдання 3.

Використати симплекс-метод для максимізації функції  $z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3$  при обмеженнях  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ :

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1.$$

### Завдання для самостійної роботи.

Підприємство виготовляє два продукти А і В, ринок збуту яких необмежений. Кожний продукт повинен бути оброблений кожною з машин 1, 2 і 3. Час обробки (у годинах) для кожного з виробів А і В наведений у таблиці:

Продукт	Машина		
	1	2	3
А	0,5	0,4	0,2
В	0,25	0,3	0,4

Машини 1, 2, 3 працюють відповідно 40, 36, 36 годин на тиждень. Прибуток від реалізації виробів А і В дорівнює відповідно 5 і 3 грн.

Визначити тижневі норми випуску виробів А і В, які максимізують прибуток. Сформулювати цю задачу як задачу ЛП і розв'язати її.

### Контрольні запитання.

1. Чи правильні твердження, що максимізація деякої функції  $f$  за заданою сукупністю обмежень еквівалентна мінімізації функції  $g = -f$  за тою самою системою обмежень, за винятком того, що  $\min g = -\max f$ ?
2. Чи може кількість додатних базисних змінних на ітерації симплекс-методу перевищувати  $m$  при розв'язуванні задач ЛП з  $m$  обмеженнями?
3. Чи обов'язково відповідає ітерації симплекс-методу (базисному розв'язку) припустима екстремальна точка простору розв'язку?
4. Чи залежить у першу чергу обсяг обчислень при реалізації симплекс-методу від кількості обмежень?
5. Чи різні умови припустимості для випадків максимізації та мінімізації цільової функції?

## 3.3 ДВОЕТАПНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД.

В обчислювальній схемі симплекс-методу для отримання початкового базисного розв'язку використовувались залишкові змінні. Проте, коли вихідне обмеження записано у вигляді рівностей чи має знак  $\geq$ , не можна відразу отримати припустимий початковий базисний розв'язок.

Рациональний спосіб його знаходження полягає у використанні штучних змінних. Він передбачає включення невід'ємних змінних у ліву частину кожного з рівнянь, які не містять очевидних початкових базисних розв'язків.

Проілюструємо це твердження на такому прикладі.

### Приклад 3.3.1

$$\begin{aligned} \text{Мінімізувати } z &= 4x_1 + x_2 \quad \text{при обмеженнях} \\ 3x_1 + x_2 &= 3; \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6; \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

У стандартній формі з невід'ємними додатковими змінними обмеження набирають вигляду

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Очевидно, припустимого базисного розв'язку немає. Є три рівняння, які містять чотири невідомих.

### Етапи методу отримання стартової точки.

**Етап 1.** Вводяться штучні змінні, необхідні для отримання стартової точки. Записується нова цільова функція, що передбачає мінімізацію суми штучних змінних при вихідних обмеженнях. Якщо мінімальне значення цільової функції дорівнює нулю

(тобто всі штучні змінні мають в оптимумі нульові значення), вихідна задача має припустимий розв'язок. Переходять до етапу 2.

У протилежному разі, тобто коли мінімум нової цільової функції виявляється більшим від нуля, вихідна задача не має припустимих розв'язків.

**Етап 2.** Оптимальний базисний розв'язок, отриманий на етапі 1, використовується як початковий розв'язок вихідної задачі.

Реалізацію двоетапного методу проілюструємо на прикладі 3.3.1.

**Етап 1.** Необхідно ввести штучні змінні R1 і R2 відповідно у перше і друге рівняння, тобто етап 1 зводиться до мінімізації  $W=R_1+R_2$  при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3;$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, x_4 \geq 0.$$

Для мінімізації штучної цільової функції її треба виразити через небазисні змінні (R1 і R2 - базисні змінні на першому етапі розв'язання)

$$W = R_1 + R_2 = (3 - 3x_1 - x_2) + (6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3) = -7x_1 - 4x_2 + x_3 + 9$$

За допомогою цього співвідношення отримаємо початкову симплекс-таблицю.

Базисна змінна	X1	X2	X3	R1	R2	X4	Розв'язок
W	7	4	-1	0	0	0	9
R1	3	1	0	1	0	0	3
R2	4	3	-1	0	1	0	6
X4	1	2	0	0	0	1	4

Оптимальна таблиця, що отримана за дві ітерації, має такий вигляд.

Базисна змінна	X1	X2	X3	R1	R2	X4	Розв'язок
W	0	0	0	-1	-1	0	0
X1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
X4	0	0	1	1	-1	1	1

Оскільки  $\min W=0$ , задача має припустимий розв'язок і можна перейти до етапу 2.

**Етап 2.** Штучні змінні виконали свою функцію, так що у всіх наступних розрахунках вони фігурувати не повинні. Рівняння з оптимальної симплекс-таблиці етапу 1 запишемо у такому вигляді: мінімізувати  $z = 4x_1 + x_2$  при обмеженнях

$$x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{3}{5};$$

$$x_2 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{6}{5};$$

$$x_3 + x_4 = 1;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Головна мета етапу 1 полягає в отриманні початкового розв'язку вихідної задачі. Оскільки є три рівняння і чотири змінні, то, дописуючи одній із змінних (а саме  $x_3$ ) нульове значення, можна отримати припустимий базисний розв'язок:  $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}, x_4 = 1$ .

Розроблений також метод отримання стартової точки, в якому використовується “штрафування” штучних змінних.

#### М-метод (метод великих штрафів)

Розглянемо лінійну модель, що приведена раніше з введеними штучними змінними  $R_1$  і  $R_2$ .

За використання цих змінних у складі цільової функції можна ввести штраф, приписуючи йому достатньо великий додатній коефіцієнт  $M$ . Такий спосіб введення штучних змінних  $R_1$  і  $R_2$  приведе до наступної лінійної моделі:

$$\text{мінімізувати } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,$$

$$x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, x_4 \geq 0.$$

Для отримання цільової функції у канонічній формі виразимо штучні змінні  $R_1$  і  $R_2$  через небазисні, в результаті маємо наступний вираз для  $z$ :

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + x_2 + M(3 - 3x_1 - x_2) + M(6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3) = \\ &= (4 - 7M)x_1 + (1 - 4M)x_2 + Mx_3 + 9M \end{aligned}$$

Таким чином, стартовій точці, в якій  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  відповідає значенням  $z=9M$  при  $R_1=3$  і  $R_2=6$ .

Недолік М-метода пов'язаний з можливістю похибок в обчисленнях, обумовлених дуже великою величиною коефіцієнта  $M$ .

Внаслідок помилок округлення властивих цифрових ЕОМ, процес обчислень може стати нечутливим до значень вихідних коефіцієнтів при змінних. При цьому виникає небезпека того, що ці змінні будуть інтерпретовані як змінні, що фігурують у цільовій функції з нульовими коефіцієнтами.

Особливі випадки застосування симплекс-методу:

- 1) виродженість;
- 2) альтернативні оптимальні рішення;
- 3) необмежені рішення;
- 4) відсутність припустимих рішень.

**Виродженість** - у тих випадках, коли перевірка припустимості не приводить до однозначної ідентифікації змінної, підлягаючої виключенню базису, вибір можна



здійснити довільно. Однак на наступній ітерації принаймні одна з базисних змінних повинна дорівнювати нулю.

Наявність виродженості рішення не свідчить про яку-небудь небезпеку, викликає лише деякі незручності. З практичної точки зору специфіка ситуації має на увазі наявність в моделі принаймні одного надлишкового обмеження.

### Приклад 3.3.2

$$z = 3x_1 + 9x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

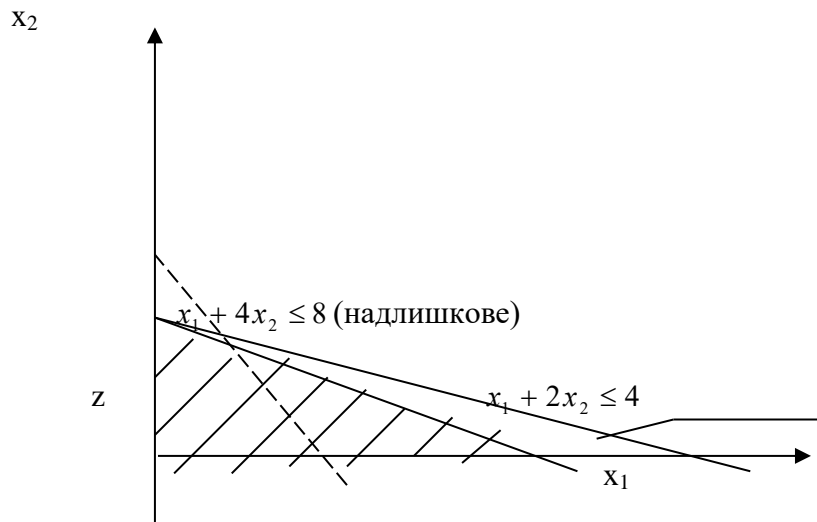


Рис.3.3.1 Вироджене оптимальне рішення.

Ітерація	Базисні змінні	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Рішення
0	$z$	-3	-9	0	0	0
$x_2 \rightarrow$ введ	$X_3$	1	4	1	0	8
$x_3 \rightarrow$ викл	$X_4$	1	2	0	1	4
1	$z$	-3/4	0	9/4	0	18
$x_1 \rightarrow$ введ	$X_2$	1/4	1	1/4	0	2
$x_4 \rightarrow$ викл	$X_4$	1/2	0	-1/2	1	0
2	$z$	0	0	3/2	3/2	18
оптимум	$X_2$	0	1	1/2	-1/2	2
	$X_1$	1	0	-1	2	0

### Завдання 1.

Розглянути систему обмежень:

$$-24x_1 + 3x_2 = 3; \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10; \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5; \quad (3)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 3; \quad (4)$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 5; \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6)$$

Підставити штучні змінні та скласти штучну цільову функцію для кожного з таких випадків:

максимізувати

а)  $z = 5x_1 + 6x_2$  при обмеженнях (1), (3) і (4);

б)  $z = 2x_1 - 7x_2$  при обмеженнях (1), (2), (4) і (5);

мінімізувати

в)  $z = 3x_1 + 6x_2$  при обмеженнях (3), (4) і (5);

г)  $z = 4x_1 + 6x_2$  при обмеженнях (1), (2) і (5);

д)  $z = 3x_1 + 2x_2$  при обмеженнях (1) і (5).

Розв'язати їх і результати порівняти з графічним розв'язком задачі.

2. За допомогою двоетапного методу розв'язати задачу ЛП, що має систему обмежень

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7;$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

і таку цільову функцію:

а) максимізувати  $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$ ;

б) мінімізувати  $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$ ;

в) максимізувати  $z = x_1 + 2x_2 + x_3$ ;

г) мінімізувати  $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$ .

### 3.4 АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ НА ЧУТЛИВІСТЬ.

#### 3.4.1 СИМПЛЕКС-МНОЖНИКИ.

Аналіз моделей на чутливість – це процес, що реалізується після того, як оптимальне рішення задачі отримане. В рамках такого аналізу виявляється чутливість оптимального рішення до певних змін вихідної моделі.

Матриця обмежень  $A$  загальної задачі ЛП може бути розбита наступним чином:

$$A = [BR]$$

де  $B$  – матриця базисних змінних  $m \times m$ ;

$R$  – матриця небазисних змінних  $m \times (n-m)$ .

Канонічна форма для базису отримується множенням рівняння

$$[BR]X = b$$

на обернену матрицю  $B^{-1}$ .

$$\text{Так як } B^{-1}[BI] = [IB^{-1}]$$

отримаємо співвідношення

Таким чином коефіцієнти при базисних змінних визначаються одиничною матрицею  $I$ ,  
коефіцієнти при небазисних змінних

$$x_i = b'_i, i = 1, \dots, m,$$

$$z = \sum_{i=1}^m c_i b'_i$$

Симплекс метод не складається у безпосередньому обчисленні оберненої матриці. Цей метод ітеративен по суті, він перетворює базис і це перетворення може бути знайдено з таблиць обчислень симплекс методом.

Ітерація	Базис	Значення	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$-x_3$	1700	3	4	1	0
	$x_4$	1600	2	5	0	1
	$z$	0	-2	-4	0	0

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Ітерація	Базис	Значення	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
2	$x_1$	300	1	0	5/7	-4/7
	$x_2$	200	0	1	-2/7	3/7
	z	1400	0	0	2/7	4/7

$$b' = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1700 \\ 1600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

мінімізувати функцію  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = z$

[illegible]

Можна помножити обмеження на  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ , додати до виразу для функції  $z$  і одержати співвідношення

$$x_1 \left( c_1 + \sum_{i=1}^m a_{i1} \pi_i \right) + x_2 \left( c_2 + \sum_{i=1}^m a_{i2} \pi_i \right) + \dots + x_n \left( c_n + \sum_{i=1}^m a_{in} \pi_i \right) = z + \sum b_i \pi_i \quad (3.4.1)$$

Значення  $\pi_i$  можна вибрати так, що коефіцієнти при базисних змінних у рівняннях (3.4.1) стануть нульовими. Значення  $\pi_i$  називаються симплекс-множниками. Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – базисні змінні (при цьому не відбувається втрати спільності), тоді  $\pi_i$  визначаються із системи рівнянь

[illegible]

Для прикладу, що розглядався вище, коефіцієнти  $x_3$  і  $x_4$  в оптимальному вигляді для функції  $z$  рівні відповідно  $2/7$  і  $4/7$ , це і є симплекс-множники для оптимального базису.

Обмеження і цільова функція мають наступний вихідний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1 - 4x_2 = z.$$

Помноживши обмеження (як показано вище) на  $\pi_1$  й  $\pi_2$  і додавши їх до функції  $z$  одержимо

$$x_1\left(-2+3\times\frac{2}{7}+2\times\frac{4}{7}\right)+x_2\left(-4+4\times\frac{2}{7}+5\times\frac{4}{7}\right)+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4=$$

$$=z+1700\times\frac{2}{7}+1600\times\frac{4}{7}$$

ТОБТО

$$\frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 = z + 1400 \quad (3.4.2)$$

що  $i$  є остаточною виглядом для функції  $z$ .

Далі з рівняння (3.4.2) для функції  $z$  в остаточному вигляді ясно, що коефіцієнти при базисних змінних будуть нульовими завдяки вибору  $\pi_i$ , а коефіцієнти при небазисних змінних будуть додатними. При цьому (тому що небазисні елементи дорівнюють нулю) кожен доданок у лівій частині рівняння (3.4.1) дорівнює нулю; або коефіцієнти при них дорівнюють нулю. Отже, оптимальне значення для функції  $z$  визначається формулою

$$\begin{aligned} z^{opt} + \sum b_i \pi_i &= 0 \\ z^{opt} &= -\sum b_i \pi_i \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

ТОБТО

Для тільки що розглянутого приклада це очевидно

$$z^{opt} = - \begin{bmatrix} 1700 \\ 1600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} = -1400$$

Коефіцієнти, що входять у математичне формулювання задачі, часто мають фізичний сенс у практичних задачах. Коефіцієнти цільової функції можуть виражати прибуток при комерційних операціях. Значення, що входять в праві частини обмежень, можуть виражати обмеженість доступних ресурсів. Очікується, що в подібних випадках ці значення будуть мінятися, що, у свою чергу, приведе до зміни формулювань математичних задач. Наприклад, завдяки підвищенню продуктивності праці може збільшитися доступний продуктивний час верстатів, пожежа на складі може знизити постачання сировини і т.д. Як діяти в подібних ситуаціях?

Один із самих примітивних способів полягає в тому, щоб врахувати виникаючі фізичні зміни, поставити нову задачу і вирішити її спочатку. Однак цей спосіб може бути дуже неефективний; він не враховує корисну роботу проведenu при вирішенні задачі до змін.

Давайте послідовно розглянемо:

- 1) зміни в  $b_i$  (значення правих частин);
- 2) зміни в  $c_j$  (коефіцієнти цільової функції);
- 3) включення додаткових змінних;
- 4) включення додаткових обмежень.

1) Зміни в  $b_i$

Нехай вихідні обмеження задачі у виді  $AX=b$  і функція  $z=c^T X$  повинна бути мінімізована.

Припустимо, що вихідна задача вирішена. З рівняння (3.4.1) значення цільової функції виражається в такий спосіб:

$$z^{opt} = - \sum b_i \pi_i$$

причому всі коефіцієнти при небазисних змінних

$$c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq 0. \quad (3.4.4)$$

(коефіцієнти при базисних змінних дорівнюють нулю, при небазисних змінних  $\geq 0$  ).

Нехай нова задача сформулюється так:

$$AX = b + \Delta b,$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \dots \\ \Delta b_m \end{bmatrix}$$

з тією же цільовою функцією  $z=c^T X$ .

Тепер при зміні тільки коефіцієнтів  $b_i$  рівняння (3.4.4) для нової задачі залишається незмінним. Тому якщо базисне рішення залишається припустимим і для нового формулювання задачі, то воно буде й оптимальним базисним припустимим рішенням для цієї задачі. Новим значенням функції  $z$  буде

$$z^* = - \sum_{i=1}^m (b_i + \Delta b_i) \pi_i$$

У такий спосіб з рівняння (2.5) можна одержати

$$\frac{\partial z^{opt}}{\partial b_i} = -\pi_i, \quad (3.4.5)$$

де  $z^{opt}$  розглядається як функція від  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Розуміється якщо сильно змінити  $b_i$ , то точка  $x^*$  (нові значення базисних змінних) буде неоптимальна і задачу прийдеться вирішувати спочатку.

Приклад 3.4.1. Задача ЛП полягає в тому, щоб знайти такі  $x_1, x_2 > 0$ , що

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$$

при яких мінімізується функція  $-2x_1 - 4x_2 = z$  (прибуток, узятий зі зворотним знаком).

Перша й остання (оптимальна) мають відповідний вигляд (таблиці стор.18). Обернений базис має вигляд

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix};$$

симплекс-множники

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

1. Припустимо, що з'явилася можливість придбати додаткову сировину в другого постачальника. Скільки йому можна заплатити за  $1m^2$ ?

Допустимо, що в першому обмеженні 1700 було замінено на 1701.

Вектор  $b$  замінюється на новий вектор  $\begin{bmatrix} 1701 \\ 1600 \end{bmatrix}$ .

Новими значеннями базисних змінних будуть

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1701 \\ 1600 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 + 5/7 \\ 200 - 2/7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

що припустимо.

Оптимальне значення для функції  $z$  змінюється на  $(-\sum b_i \pi_i)$ , у даному випадку  $-(2/7 \times 1701 + 4/7 \times 1600) = -1400 - 2/7$ .

У такий спосіб прибуток зростає на  $2/7$  грн. і це – максимальна ціна, яку варто заплатити за  $1m^2$  листової сталі.

Немає рації купувати додаткову сировину.

**Максимальна ціна дорівнює  $\pi_1$ .**

2. Припустимо, що мається можливість одержання додаткового машинного часу. Чи буде вигідно це якщо 1 година машинного часу коштує 7грн.?

У цьому випадку в математичній задачі вектор  $b$  замінюється на вектор  $\begin{bmatrix} 1700 \\ 1610 \end{bmatrix}$ . Новими значеннями базисних змінних будуть

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1700 \\ 1610 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 - 40/7 \\ 200 + 30/7 \end{bmatrix}$$

що припустимо.

Оптимальне значення для функції  $z$  заміняється на значення  
 $-(2/7 \times 1700 + 4/7 \times 1610) = -1400 - 40/7$ .

Прибуток збільшується на  $40/7$  грн. Оскільки додаткова 1 година машинного часу коштує 7 грн., це не вигідно.

Легко бачити, що рішення цієї задачі спочатку приведе до тих же результатів. Але немає ніякої необхідності починати спочатку. У великих за обсягом задачах це неефективно.

### Приклад 3.3.2

Нехай у прикладі 2.4 прибуток від однієї моделі А відповідає  $P_1$  грн., а від однієї моделі В –  $P_2$  грн. Для яких значень  $P_1$  і  $P_2$  отримане рішення є оптимальним?

Цільова функція в першій таблиці задається формулою  $-P_1x_1 - P_2x_2 = z + 0$ . Оскільки в таблиці змінюється тільки останній рядок, канонічна форма обмежень у тім же базисі залишиться колишньою, тобто

$$x_1 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = 300$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 200.$$

Щоб записати функцію  $z$  у канонічній формі варто виключити  $x_1$  і  $x_2$  з виразу для функції  $z$ . Це можна зробити, помноживши перше обмеження (у кінцевій таблиці) на  $P_1$ , друге – на  $P_2$  і додавши їх до вираження для функції  $z$ ; у результаті одержимо

$$\left(\frac{5}{7}P_1 - \frac{2}{7}P_2\right)x_3 + \left(-\frac{4}{7}P_1 + \frac{3}{7}P_2\right)x_4 = z + 300P_1 + 200P_2.$$

Це видно з рис. 3.1.1, де точка В – оптимальна якщо припустити, що лінія рівня функції  $z$ , що проходить через крапку В, лежить між двома лініями обмежень пересіченими в точці В.

3) включення додаткових змінних.

### Приклад 3.4.3

Нехай виявилось можливим виготовити деталі типу С і нехай для виготовлення однієї деталі цього типу необхідно  $4\text{м}^2$  матеріалу і потрібно 20 хвилин машинного часу. Якщо прибуток одного виробу складає  $P$  грн. чи варто братися за його виготовлення?

Якщо виготовити  $x_5$  одиниць типу С, то задача в стандартній формі перетворюється в наступну: знайти такі  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , що

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 1600,$$

$$-2x_1 - 4x_2 - Px_5 = z$$

і мінімізувати функцію  
 тобто

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 + \frac{10}{3}x_5 = 1600,$$

$$-2x_1 - 4x_2 - Px_5 = z$$

У кінцевій таблиці перші два елементи стовпця, що відповідає  $x_5$ , будуть відповідно до рівняння  $a'_j = B^{-1}a_j$

мати наступний вид:

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/21 \\ 6/21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}, \text{ з рівняння}$$

$$x_1 \left( c_1 + \sum_{i=1}^m a_{i1} \pi_i \right) + x_2 \left( c_2 + \sum_{i=1}^m a_{i2} \pi_i \right) + \dots + x_n \left( c_n + \sum_{i=1}^m a_{in} \pi_i \right) = z + \sum b_i \pi_i.$$

впливає, що коефіцієнт при  $x_5$  у канонічній формі для функції  $z$

$$-P + \frac{2}{7} \times 4 + \frac{4}{7} \times \frac{10}{3} = -P + \frac{64}{21}$$

Кінцева таблиця прийме наступний вид (зміни відбувалися тільки в  $x_5$ ):

Ітерація	Базис	Значення	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	$x_1$	300	1	.	5/7	-4/7	20/21
	$x_2$	200	.	1	-2/7	-2/7	6/21
	-Z	1400	.	.	2/7	4/7	-P+64/21

Якщо  $-P + \frac{64}{21} \geq 0$ , то рішення, приведене в таблиці оптимальне,  $x_5$  залишається небазисною змінною, і не треба складати нову модель.

Якщо  $-P + \frac{64}{21} < 0$ , тобто  $P > \frac{64}{21}$ , то необхідно включити  $x_5$  у базис. З цього моменту можна продовжити обчислення симплекс-методом.

4) Включення додаткових обмежень.

#### Приклад 3.4.4

Припустимо в період економічної кризи повідомлять, що ринок приймає 550 деталей у тиждень. Як це відіб'ється на виробництві? Зазначене обмеження на обсяг продажу рівносильне обмеженню  $x_1 + x_2 \leq 550$ .

Це додаткове обмеження повинне бути включене в математичну постановку задачі. Однак у даному випадку воно ніяк не впливає на оптимальне рішення. У цьому рішенні  $x_1=300$  і  $x_2=200$ , так що  $x_1+x_2=500$  задовольняє додатковому обмеженню.

Якби криза була серйознішою, з обмеженням ринку до 450 деталей у тиждень, ситуація була б іншою.

Застосування подвійного симплекса-методу особливо ефективно при аналізі моделей на чутливість, зокрема в тих випадках, коли після одержання оптимального рішення в умови задачі вводиться нове обмеження.

Наприклад, для економічних задач може становити інтерес питання про те, як вплине на оптимальне рішення збільшення і зменшення попиту і (чи) зміна запасів вихідних продуктів. Можливо також визначити впливу зміни ринкових цін на оптимальне рішення. Якщо для попереднього оптимального рішення нове обмеження не виконується, то отримане рішення оптимальне, але не припустиме. У цьому випадку подвійний симплекс-метод використовується для перебування нового оптимального рішення шляхом послідовного зменшення ступеня неприпустимості рішень, одержуваних у процесі симплексів-ітерацій.

#### Запитання для самостійної роботи

Підприємство закупає необроблену нафту з кількох джерел  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  та  $Z$  і очищає її, виробляючи різні види ( $A$ ,  $B$  і  $C$ ) мастил, готових до продажу. Існують також обмеження щодо кількості продажу кожного виду мастил.



Мастило	Вміст, %	Можливий об'єм мастила для продажу, л
<i>A</i>	Не менше ніж 10( <i>W</i> ) Не більш ніж 25( <i>Z</i> )	90000
<i>B</i>	Не менше ніж 15( <i>W</i> )	100000
<i>C</i>	Не менше ніж 20( <i>X</i> ) Не більше ніж 50( <i>Y</i> )	120000

Ціни (в умовних одиницях) 1 л сировини і мастил наведені в таблиці.

Сировина				Мастило		
<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	<i>W</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
72	60	67	75	90	87	84

Припустивши, що необроблена нафта доступна в необмеженій кількості, сформулювати задачу максимізації прибутку як задачу ЛП і знайти оптимальний розв'язок.

### Контрольні запитання

1. Чому необхідно мінімізувати суму штучних змінних?
2. Чи потрібно максимізувати суму штучних змінних, якщо цільова функція вихідної задачі ЛП підлягає максимізації?
3. Особливі випадки використання симплекс-методу.

## 3.4.2 ПОДВІЙНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

У звичайному симплекс-методі спочатку знаходять припустимий, але неоптимальний розв'язок. Метод, що отримав назву подвійного симплекс-методу, забезпечує виконання умов оптимальності розв'язку і систематичне наближення його до області припустимих розв'язків. При його використанні не вимагається, щоб усі базисні змінні були додатними із самого початку, але для задачі мінімізації необхідно, щоб усі коефіцієнти цільової функції були невід'ємними. Коли отриманий розв'язок виявляється припустимим, ітераційний процес обчислень закінчується, оскільки цей розв'язок є і оптимальним.

### Приклад 3.4.5.

Мінімізувати  $Z = 2x_1 + x_2$  при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

У стандартній формі задача формулюється так: знайти такі  $x_i \geq 0$ , що

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3;$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3,$$

і мінімізувати  $Z = 2x_1 + x_2$ .

Якщо помножити ці обмеження на -1 (для отримання конкретного вигляду базису), матимемо:

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_3 &= -3; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 &= -6; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 3; \\ 2x_1 + x_2 &= Z; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Спроба скласти для цієї задачі початкову симплекс-таблицю призводить до висновку, що значення залишкових змінних ( $x_3, x_4, x_5$ ) не забезпечують отримання припустимої стартової точки. Початковий базисний розв'язок ( $x_3=-3, x_4=-6, x_5=3$ ) оптимальний, але недопустимий. Така ситуація типова для задач ЛП деякого типу, які розв'язують за допомогою подвійного симплекс-методу.

Початкова симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному, але неприпустимому розв'язку, має такий вигляд:

Базисна змінна	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Розв'язок
-Z	2	1	0	0	0	0
$x_3$	-3	-1	1	0	0	-3
$x_4$	-4	-3	0	1	0	-6
$x_5$	1	2	0	0	1	3

Умова припустимості. За змінну, що виключається, вибирається найбільша за абсолютною величиною від'ємна базисна змінна (при наявності альтернатив вибір довільний). Якщо всі базисні змінні невід'ємні, обчислення закінчується, оскільки отриманий розв'язок припустимий і оптимальний.

Умова оптимальності. Змінна, що включається в базис, вибирається з числа небазисних змінних таким чином. Обчислюється відношення коефіцієнтів лівої частини Z-рівняння до відповідних коефіцієнтів рівняння, асоційованого зі змінною, що виключається. Відношення з додатним чи нульовим значенням знаменника не враховується. Введеній змінній повинно відповідати відношень, найменше за абсолютною величиною. Якщо знаменники всіх відношень дорівнюють нулю чи додатні, задача не має припустимих розв'язків.

Після вибору змінних, що включаються в базис і виключаються з нього, для отримання наступного розв'язку здійснюється звичайна операція перетворення рядків симплекс-таблиці.

У таблиці змінною, що виключається, є  $x_4=-6$ , оскільки вона має найбільше за абсолютною величиною від'ємне значення. Відношення, що обчислюються для визначення нової базисної змінної, наведені в таблиці.

Змінна	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
Z-рівняння	2	1	0	0	0
$x_4$ -рівняння	-4	-3	0	1	0
Відношення	1/2	1/3	-	-	-

За змінну, що включається, вибирається  $x_2$ , оскільки цій змінній відповідає найменше за модулем відношення, яке дорівнює 1/3.

Наступні перетворення рядків приводять до нової симплекс-таблиці.

Базисна Змінна	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Розв'язок
-Z	2/3	0	0	1/3	0	-2
$x_3$	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
$x_2$	4/3	1	0	-1/3	0	2
$x_5$	-5/3	0	0	2/3	1	-1

Новий розв'язок також оптимальний, але все ще неприпустимий ( $x_3 = -1$ ;  $x_5 = -1$ ). Потрібно продовжити перетворення симплекс-таблиці до отримання оптимального і припустимого розв'язку.

Застосування подвійного симплекс-методу особливо ефективно при аналізі моделей на чутливість, зокрема, тоді, коли після отримання оптимального розв'язку в умову задачі вводять нове обмеження. Наприклад, для економічних задач може бути цікавим те, як впливає на оптимальний розв'язок збільшення чи зменшення попиту і (або) зміна запасів вхідних продуктів. Можливо також визначити вплив зміни ринкових цін на оптимальний розв'язок.

Якщо для попереднього оптимального розв'язку нове обмеження не виконується, то отриманий розв'язок оптимальний, але не припустимий. У цьому випадку подвійний симплекс-метод використовується для знаходження нового оптимального розв'язку шляхом послідовного зменшення ступеня неприпустимості розв'язків, отриманих у процесі симплекс-ітерації.

Завдання. Розв'язати задачі за допомогою подвійного симплекс-методу:

а) мінімізувати  $Z = 2x_1 + 3x_2$  при обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10;$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

б) мінімізувати  $Z = 5x_1 + 6x_2$  при обмеженнях:

$$x_1 + x_2 \geq 2;$$

$$4x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

в) мінімізувати  $Z = 2x_1 + x_2$  при обмеженнях:

$$3x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

г) мінімізувати  $Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$  при обмеженнях:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 8;$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 9;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

### Завдання для самостійної роботи

У пошуках оптимального технологічного процесу припускалось, що температура  $x_1$  і швидкість подачі матеріалу  $x_2$  - параметри, які визначають ведення процесу. Після

узгодження з технологом сформульовано таку задачу ЛП: знайти невід'ємні  $x_1, x_2$  і такі, що  $x_1 + x_2 \leq 6$ ;  $4x_1 + 11x_2 \leq 44$ ; мінімізувати функцію  $Z = -2x_1 - 5x_2$ .

Знайти розв'язок за допомогою симплекс-методу. У процесі обговорення з технологом вирішено, що потрібно ввести додаткове обмеження  $x_1 + 2x_2 \leq 8$ .

Виконати необхідні розрахунки і показати, який подвійний симплекс-метод дозволяє використовувати останню таблицю розрахунку для отримання нової задачі.

### Контрольні запитання

1. Чи правильне твердження, що якщо стандартна пряма задача ЛП - задача мінімізації, подвійна до неї задача - задача максимізації з обмеженням типу  $\leq$  і змінними, які не мають обмежень за знаком?
2. Чи повинен бути оптимальним неприпустимий початковий розв'язок задачі ЛП при використанні подвійного симплекс-методу?
3. Чим відрізняється подвійний симплекс-метод від звичайного?

## 3.5 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна модель використовується для складання найбільш економічного плану перевезень одного виду продукції з кількох пунктів (наприклад, заводів) у пункти доставки (наприклад, склади). Її можна застосувати у задачах, які пов'язані з керуванням запасами, складанням змінних графіків, призначенням службовців на робочі місця, регулюванням витрат води у водосховищах тощо.

Транспортна задача - задача ЛП. Її специфічна структура дає змогу так модифікувати симплекс-метод, що обчислювальні процедури стають більш ефективними.

Задача ЛП транспортного типу у загальному вигляді формулюється так: мінімізувати

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad (3.5.1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3.5.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (3.5.4)$$

де  $x_{ij}$  - кількість продукції, що перевозиться з вихідного пункту  $i$  в пункт призначення  $j$ ;  $C_{ij}$  - вартість перевезення одиниці продукції з пункту  $i$  в пункт  $j$ ;  $a_i, b_j$  - кількість продукції, відповідно вироблюваної у пункті  $i$  і споживаної у пункті  $j$ .

Транспортна задача є задачею ЛП, але специфічного вигляду. Зокрема коефіцієнти в обмеженнях приймають значення 0 чи 1, а кожна змінна входить тільки у два обмеження.

Якщо сумарний обсяг виробництва дорівнює сумарному попиту  $\left( \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \right)$ , то модель

називається збалансованою транспортною. Від наведеної моделі вона відрізняється тільки тим, що всі обмеження перетворюються на рівності.

Компактний спосіб подання транспортної моделі пов'язаний з використанням транспортної таблиці, що має вигляд матриці, у якій рядки відповідають вихідним пунктам, а стовпчики - пунктам призначення. Коефіцієнти вартості  $C_{ij}$  розміщені у правому нижньому куті кожної комірки  $(i, j)$ .

$C_{11}$	$C_{12}$		$C_{in}$	$a_1$
$C_{21}$	$C_{22}$		$C_{2n}$	$a_2$
$\vdots$				$\vdots$
$C_{m1}$	$C_{m2}$		$C_{mn}$	$a_m$
$b_1$	$b_2$		$b_n$	

Метод розв'язування транспортної задачі складається з таких кроків:

**Крок 1.** Знайти початковий припустимий розв'язок.

**Крок 2.** Виділити з числа небазисних змінних введену в базис. Якщо всі небазисні змінні задовольняють умову оптимальності (симплекс-методу), закінчити розрахунки, у противному разі перейти до кроку 3.

**Крок 3.** Вибрати змінну, що виводимо з базису (використовуючи умову припустимості) з числа змінних поточного базису; потім знайти новий базисний розв'язок. Повернутись до кроку 2. В алгоритмі методу повторюються етапи реалізації симплекс-методу, проте спосіб перевірки умов оптимальності та припустимості змінився.

Розглянемо приклад, представлений у таблиці

Таблиця 3.5.1.

		Пункти призначення				Об'єм виробництва
		1	2	3	4	
Вихідні пункти	1	$X_{11}$ 10	$X_{12}$ 0	$X_{13}$ 20	$X_{14}$ 11	15
	2	$X_{21}$ 12	$X_{22}$ 7	$X_{23}$ 9	$X_{24}$ 20	25
	3	$X_{31}$ 0	$X_{32}$ 14	$X_{33}$ 16	$X_{34}$ 18	5
Попит		5	15	15	10	

### 3.5.1 ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВОГО РІШЕННЯ

Згідно загальному визначенню транспортної моделі, потрібно щоб  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ . З цього витікає, що одне рівняння виявляється залежним, тобто транспортна модель містить тільки  $m + n - 1$  незалежних рівнянь. Таким чином, як і в симплекс-методі, початкове базисне припустиме рішення повинно мати  $m + n - 1$  базисну змінну.

Звичайно, якщо транспортна модель представлена у вигляді симплекс-таблиці, для отримання початкового базисного рішення потрібно використовувати штучні змінні. Проте, якщо побудувати транспортну таблицю, початкове базисне припустиме рішення легко отримати безпосередньо з неї. Для цього опишемо процедуру, засновану на так званому правилі **північно-західного кута**. Дві інші процедури, названі методом **мінімальної вартості** і **приближним алгоритмом Фотеля** відповідно. Ці розрахункові процедури звичайно дають краще початкове рішення, яке забезпечує менше значення цільової функції.

Згідно правилу *північно-західного кута*, починають з того, що приписують змінній  $X_{11}$  (розташованій у північно-західному куті таблиці) максимальне значення, припустиме обмеженням на попит і об'єм виробництва. Після цього викреслюють відповідний стовпчик (чи рядок), фіксуючи цим, що інші змінні викресленого стовпчика (рядка) вважаються рівними нулю. Якщо обмеження, представлені стовпчиком та рядком, виконуються одночасно, то можна викреслити або стовпчик, або рядок (ця умова автоматично гарантує знаходження нульових базисних змінних, якщо такі зустрічаються). Після того як попит і об'єм виробництва у всіх невикреслених рядках та стовпчиках зведені згідно з поставленим значенням змінної, максимально припустиме значення приписується першому невикресленому елементу нового стовпчика (рядка). Процес закінчується, коли залишається не викресленою *в точності* один рядок (чи один стовпчик).

Застосуємо описану процедуру до прикладу в табл. 3.5.1

1.  $X_{11}=5$ , стовпець 1 викреслюється. Тобто у першому стовпці неможливо більше проводити ніякі операції. На рядок 1 тепер приходиться 10 одиниць.
2.  $X_{12}=10$ , рядок 1 викреслюється, а на стовпець 2 залишається 5 одиниць.
3.  $X_{22}=5$ , стовпець 2 викреслюється, а в рядку 2 залишається 20 одиниць.
4.  $X_{23}=15$ , стовпець 3 викреслюється, а в рядку 2 залишається 5 одиниць.
5.  $X_{24}=5$ , рядок 2 викреслюється, в стовпці 4 залишається 5 одиниць.
6.  $X_{34}=5$ , викреслюється рядок 3 або стовпець 4. Оскільки залишається тільки один стовпець чи тільки один рядок, процес закінчується.

**Таблиця 3.5.2.**

	1	2	3	4	
1	5	10			15
	10	0	20	11	
2		5	15	5	25
	12	7	9	20	
3				5	5
	0	14	16	18	
	5	15	15	10	

Отримане базисне рішення подане в таблиці 3.5.2. Базисні змінні отримують значення:  $X_{11}=5$ ,  $X_{12}=10$ ,  $X_{22}=5$ ,  $X_{23}=15$ ,  $X_{24}=5$ ,  $X_{34}=5$ . Інші змінні – небазисні зі значеннями, які дорівнюють нулю. Відповідні транспортні витрати дорівнюють  $5 \times 10 + 10 \times 0 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 5 \times 18 = 410$  у.о.

Якщо одночасно і стовпець, і рядок задовольняє обмеження, чергова змінна, яка входить в базисне рішення, обов'язково має нульове значення.

Таблиця 3.5.3 показує цю ситуацію. Стовпець 2 та рядок 2 одночасно призводять до виконання відповідних обмежень. Якщо викреслюється стовпець 2, то на наступному кроці змінна  $X_{23}$  стає базисною з нульовим значенням, оскільки величина речення в рядку 2 дорівнює нулю (табл. 3). Якщо ж викреслюється рядок 2, то  $X_{32}$  нульовою базисною змінною.

**Таблиця 3.5.3.**

	1	2	3	4	
1	5	5			40 5
	10	0	20	11	
2		5	0		5 0
	12	7	9	20	
3			8	7	15
	0	14	16	18	

5	40	8	7
	5		

Початкові рішення в табл. 2 та 3 містять необхідну кількість базисних змінних, яке дорівнює  $m + n - 1 = 6$ . Використання правила північно-західного кута завжди приводить до потрібного числа базисних змінних.

Серед методів визначення початкового розв'язку метод **найменшої вартості** дає добрий початковий розв'язок.

Суть методу найменшої вартості полягає в наступному: вибирається змінна, якій відповідає найменша вартість у всій таблиці, їй надається якнайбільше значення. (Якщо таких змінних кілька, то береться будь-яка з них.) Викреслюється відповідний стовпчик чи рядок. Після розрахунку нових значень попиту і обсягу виробництва для всіх невикреслених рядків та стовпчиків процес повторюється при можливо більшому значенні тієї змінної, якій відповідає мінімальна вартість серед невикреслених.

Процедура завершується, коли залишається один рядок чи один стовпчик.

Для розглянутого приклада метод найменшої вартості дає таке початкове рішення

5	5			15	10
10	0	20	11		
	5	15	5	25	5
12	7	9	20		
			5	5	
0	14	16	18		
5	15	15	10		

### 3.5.2 ЗНАХОДЖЕННЯ ЗМІННОЇ ДЛЯ ВКЛЮЧЕННЯ У БАЗИС.

#### Метод потенціалів.

Цей метод розроблений Ф.Л. Хітчкоком, який використав симплекс-множники.

Припустимо, що для розглянутої задачі вже побудовано припустиме базисне рішення, в якому деякі змінні  $X_{ij}$  відмінні від нуля, а інші змінні – небазисні, дорівнюють нулю.

Нехай  $-U_i$  і  $-V_j$  – симплекс-множники для обмежень, що відповідають  $i$ -й строці і  $j$ -му стовпцю у цьому базисі, то після множення  $i$ -ої строки на  $-U_i$ ,  $j$ -го стовпця на  $-V_j$  і додавання вартості  $C$  отримаємо

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1(-U_1) \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2(-U_2) \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & x_{m1} + \dots + x_{mn} & = a_m(-U_m) \\
 x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} & & & & & = b_1(-V_1) \\
 & x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} & & & & = b_2(-V_2) \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} & = b_n(-V_n) \\
 C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{mn}x_{mn} & & & & & = C
 \end{array}$$

Відповідно

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (C_{ij} - U_i - V_j) x_{ij} = C - \sum_{i=1}^m U_i a_i - \sum_{j=1}^n V_j b_j \quad (3.5.1)$$

Рівняння (3.5.1) – спеціальний вид рівняння () для транспортної задачі. Якщо рівняння () є канонічною формою цільової функції, що відповідає базису, то коефіцієнти при базисних змінних дорівнюють нулю. Таким чином для зайнятих клітинок масиву справедливе співвідношення

$$C_{ij} - U_i - V_j = 0 \quad (3.5.2)$$

Відповідно можна визначити  $U_i$  і  $V_j$ . Маємо  $m$  невідомих  $U_i$  і  $n$  невідомих  $V_j$ , оскільки базисними змінними зайнято  $m+n-1$  клітинок, з рівняння (3.5.2) отримаємо  $m+n-1$  рівнянь  $m+n$  невідомих. Ці рівняння можна розв'язати, прирівнявши одне з невідомих до нуля і розв'язати систему відносно інших невідомих.

У розглянутому прикладі на першому кроці маємо наступне базисне припустиме рішення

5-W 10	10+W 0	20	11	15 (-7)
12	5-W 7	15 9	5+W 20	25 (0)
W -15 0	14	16	5-W 18	5 (-2)
5 (17)	15 (7)	15 (9)	10 (20)	

Маємо 7 невідомих  $U_1, U_2, U_3$  і  $V_1, V_2, V_3, V_4$  і 6 зайнятих клітинок. Якщо нехай  $U_2=0$ , то в трьох зайнятих клітинках строки отримаємо  $V_2=7, V_3=9, V_4=20$ . Оскільки  $V_2=7$ , то  $U_1=-7$ , а  $V_4=20$ , то  $U_3=-2$ , а  $V_1=17$ .

Перевіримо, чи оптимальне це рішення?

Якщо  $C'_{ij}$  – коефіцієнт при  $x_{ij}$  в канонічній формі для цільової функції, то

$$C'_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

Для базисних змінних  $C'_{ij} = 0$ . Для небазисних змінних від'ємне значення  $C'_{ij}$  указує на те, що змінна  $x_{ij}$  повинна бути включеною у базисні змінні, що приведе до зменшення цільової функції. В клітинках, в яких значення  $C'_{ij}$  від'ємне указується у лівих нижніх кутах масиву.

Ясно, що збільшення  $x_{31}$  приведе до зменшення цільової функції. При збільшенні значення  $x_{31}$  на число  $W$ , необхідно зменшити  $x_{11}$  на число  $W$ , щоб зберегти суму у стовпчику (1). Для того, щоб зберегти суму у рядку (1) необхідно збільшити  $x_{12}$  на  $W$  і т.д. Програма повинна уникати розв'язків “глухого кута”.

Оскільки  $x_{11} = 5 - W \geq 0$ , то максимальне значення  $W$  дорівнює 5. У цьому випадку змінна  $x_{11}$  стає не базисною. Щоб кількість базисних змінних дорівнювала 6, змінні  $x_{22}$  і  $x_{34}$ , які стали нульовими, враховуються як базисні.

10	15-W 0	20	W -2 11	15 (-7)
12	0+W 7	15 9	10-W 20	25 (0)
5 0	14	16	0 18	5 (-2)
5 (2)	15 (7)	15 (9)	10 (20)	

Для цього масиву



$$C = 15 \times 0 + 0 \times 7 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 0 + 0 \times 18 = 335 = 410 + C'_{31}W = 410 - 15 \times 5$$

Визначимо  $U_i$  і  $V_j$  для цього рішення. Від'ємні значення для небазисних змінних указані у лівих нижніх кутах клітинок масиву. Очевидно, що у базис слід включити змінну  $x_{14}$ . В результаті найбільше можливе значення для  $W$  дорівнює 10 і у наступному масиві змінна  $x_{24}$  стане небазисною.

10	5 0	20	10 11	(-7)
12	10 7	15 9	20	(0)
5 0	14	16	0 18	(1)
(-1)	(7)	(9)	(17)	

Значення вартості  $C$  зменшується.

$$C = 5 \times 0 + 10 \times 11 + 10 \times 7 \times 15 \times 9 + 5 \times 0 + 0 \times 18 = 315 = 335 - 2 \times 10 = 335 + C'_{14}W$$

Для цього масиву обчислюється  $U_i$  і  $V_j$ . Для незайнятих клітинок всі  $C_{ij}$  додатні. Таким чином отримане оптимальне рішення, в якому

$$x_{12}=5; x_{14}=10; x_{22}=10; x_{23}=15; x_{31}=5; x_{34}=0; C_{min}=315 \text{ грн.}$$

Схема алгоритму розв'язання транспортної задачі показана на рис.3.5.1.

Окремим випадком транспортної задачі є задача про призначення (наприклад, розподілити  $m$  робіт чи виконавців за  $n$  обладнанням), яка формулюється так:  
мінімізувати

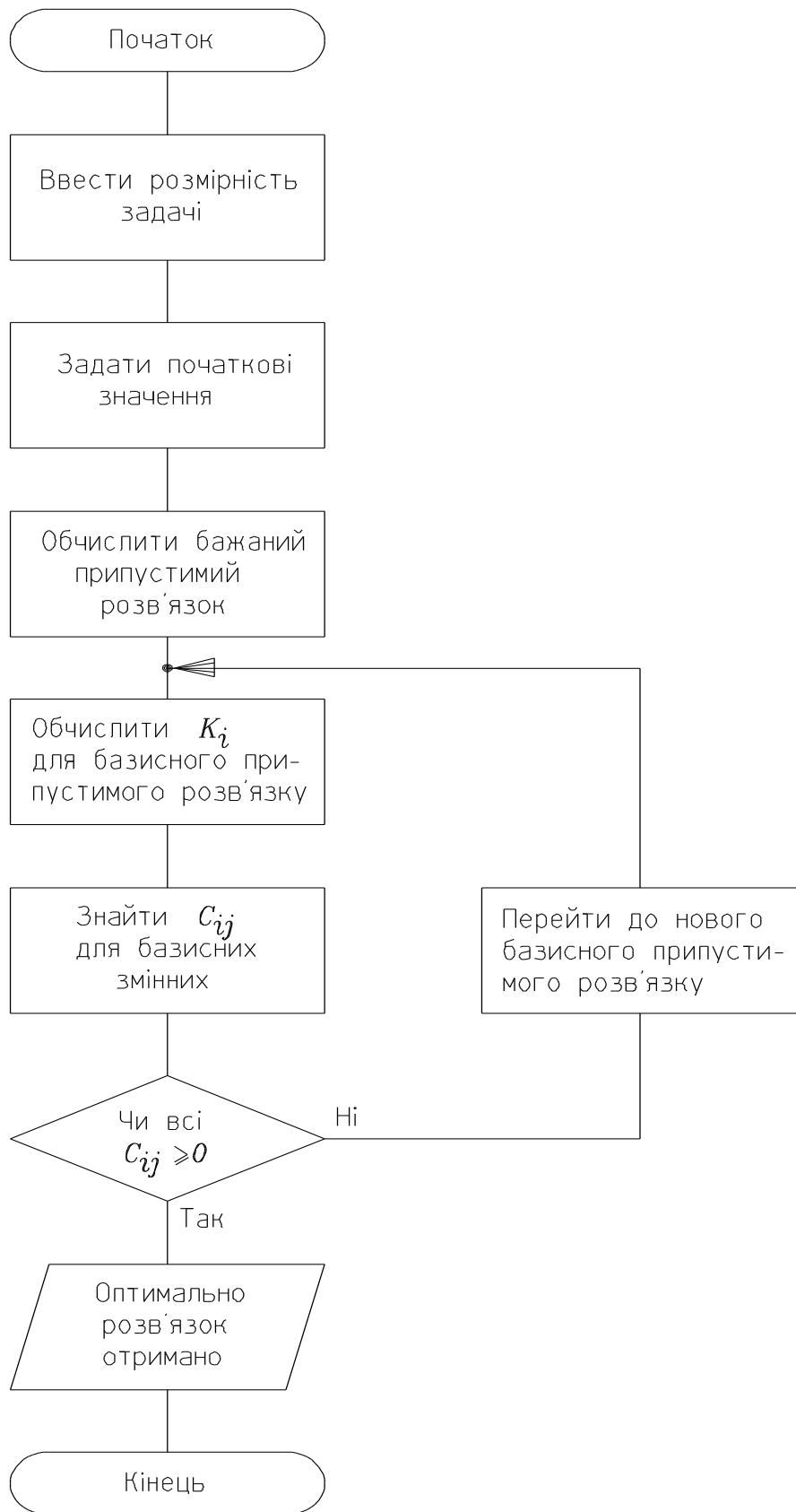
$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}, \quad (3.5.3)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.5.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.5.5)$$

$$x_{ij}=0 \text{ або } x_{ij}=1.$$



**Рис.3.5.1. Схема алгоритму розв'язання транспортної задачі**

### 3.5.3 ДИСБАЛАНС І ВИРОДЖЕНІСТЬ У ТРАНСПОРТНІЙ ЗАДАЧІ.

Виконання умови  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  важливе в транспортній задачі. Для масиву розмірністю

$m \times n$  означає, що в базисне припустиме рішення входить  $m \times n - 1$  базисна змінна. Припустимо, що баланс між попитом та пропозицією порушений.

#### Приклад 3.5.1.

Нехай 15, 25, 20 деталей виробляються на заводах  $W_1, W_2, W_3$ , повинні бути передані споживачам  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , щотижневі запити яких складають 20, 12, 5 і 9 виробів. Вартість транспортування одного виробу від заводів до споживачів приведені в таблиці.

Завод	Споживач			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$W_1$	2	2	2	4
$W_2$	3	1	1	3
$W_3$	3	6	3	4

Як варто організувати перевезення для мінімізації вартості?

Заводи роблять 60 деталей. Споживачам потрібно лише 46 деталей. Для того, щоб перейти до транспортної задачі введемо фіктивного споживача, якому потрібно 14 деталей. Вартість перевезень із заводу до цього споживача приймаємо рівну 0. Якщо в остаточному рішенні буде отримано, що деякі деталі треба відправити цьому споживачу, то це буде зігноровано. Деталі залишаться на заводах.

У таблиці приводиться перше базисне рішення для цього масиву.

15					15 (-1)
2	2	2	4	0	
5- W	12	5	3+W		25 (0)
$x_{21}$	3	1	3	0	
W			6-W	14	20 (1)
$x_{31}$	3	6	4	0	
-1					
20	12	5	9	14	C=95
(3)	(1)	(1)	(3)	(-1)	

Змінна  $x_{31}$  входить у базис; максимальне значення  $W$  дорівнює 5. Змінна  $x_{21}$  виключається з базису:

15					15 (0)
2	2	2	4	0	
	12	5	8		25 (0)
3	1	1	3	0	
5			1	14	20 (1)
3	6	3	4	0	
20	12	5	9	14	C=90
(2)	(1)	(1)	(3)	(-1)	

14 деталей із клітинки (3.5) залишаються на заводі 3. Потреби споживачів цілком виконані. Одержали оптимальне рішення:

$x_{11}=15; x_{22}=12; x_{23}=5; x_{24}=8; x_{31}=5; x_{34}=1; C=90$ .

Ясно, як справитися з дисбалансом, якщо попит перевищує пропозицію: треба увести фіктивного виробника з нульовою вартістю перевезень. Продукція цього виробника насправді поставлятися не буде. Попит на неї не буде вдоволений.

Виродженість у транспортній задачі виникає, якщо одна чи більш базисних змінних обертаються в нуль. На кожному кроці варто розрізняти базисні змінні, котрі дорівнюють нулю і знаходяться у відповідних клітинках і небазисні змінні.

При побудові першого базисного припустимого рішення можуть виникнути труднощі, якщо суми і по рядках і по стовпцях рівні між собою і обернулися в нуль. У цьому випадку з подальших розглядів варто виключити тільки одну з них. Інша сума буде ліквідована при присвоєнні базисній змінній значення 0. Оскільки на кожному кроці, крім останнього, видаляється тільки один рядок чи тільки один стовець, то в результаті виходить  $m+n-1$  базисних змінних і стільки заповнених клітинок, скільки потрібно (навіть якщо деякі базисні змінні обернулися в нуль).

Труднощі можуть виникнути і при поліпшенні базисного припустимого рішення. Застосування правил може перетворити в нуль більш однієї базисної змінної. У цьому випадку важливо пам'ятати, що тільки одна з них повинна стати небазисною; інші варто зберігати базисними, але з нульовими значеннями. Їх складають клітинки з метою визначення  $U_i$  і  $V_j$ .

## 3.6 ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

### 3.6.1 ПРЯМА І ДВОЇСТА ЗАДАЧА

Багато з отриманих результатів легше пояснити, ввівши поняття двоїстості. Ми побачимо, що кожній задачі лінійного програмування відповідає інша (двоїста) задача. Якщо зрозуміти взаємозв'язок між цими задачами, то можна одержати вирішення обох, коли відомо вирішення будь-якої їх них. Введемо нові поняття.

Пряма задача:

знайти такі  $x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ , що

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.6.1)$$

і функція  $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$  має мінімальне значення.

Їй відповідає двоїста задача:

знайти такі  $y_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, m)$ , що

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.6.2)$$

і функція  $\sum_{i=1}^m b_i y_i = w$  має максимальне значення.

Вихідна задача:

знайти такі  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , що

$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 19$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7$$

і функція  $50x_1 + 25x_2 = z$  має мінімальне значення.

Відповідна двоїста задача:

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ , що

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 50$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 25$$

і функція  $8y_1 + 19y_2 + 7y_3 = w$  має максимальне значення.

Пряма задача має обмеження у вигляді нерівності зі знаком  $\geq$ , а двоїста – із знаком  $\leq$ .

Кількість змінних у прямої задачі збігається з кількістю обмежень у двоїстій задачі.

Матриця коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів прямої задачі. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі є значеннями правих частин обмежень прямої задачі, і навпаки. У матричному записі пряма задача має такий вид:

знайти такий  $X \geq 0$ , що

$$AX \geq b$$

і функція

$$c^T X = z \quad (3.6.3)$$

має мінімальне значення.

Двоїста задача в матричному виді записується в такий спосіб:

знайти такий  $Y \geq 0$ , що

$$A^T Y \leq c \quad (3.6.4)$$

і функція  $b^T Y = w$

має максимальне значення.

Хоча пряма задача була поставлена при невід'ємних змінних для мінімізації цільової функції, що задовольняють обмеженням із знаком  $\geq$  (а не в стандартній формі задач лінійного програмування), втрати спільності при цьому не відбувається. Будь-яку задачу лінійного програмування можна привести до такого вигляду.

### Приклад 3.6.1

Привести до необхідної форми пряму задачу

знайти такі  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , що

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_3 \leq 4$$

і функція  $x_1 - 4x_2 - 3x_3 = z'$  має максимальне значення.

Сформулювати двоїсту задачу.

Максимізація функції  $z'$  рівносильна мінімізації, наприклад, функції  $-z' = z$

Обмеження  $x_3 \leq 4$  множенням на -1 перетвориться в обмеження  $-x_3 \geq -4$ .

Обмеження

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

рівноцінно двом обмеженням

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

тобто

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6$$

У такий спосіб задача може бути переписана таким чином:

знайти такі  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , що

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 6 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -6 \\ -x_3 &\geq -4 \end{aligned}$$

і ця функція  $-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = z$  має мінімальне значення. Це необхідна форма прямої задачі.

Двоїста задача має такий вид:

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2' \geq 0, y_2'' \geq 0, y_3 \geq 0$

(зміст цих позначень незабаром стане ясний), що

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2' - y_2'' + 0y_3 &\leq -1 \\ 4y_1 + 2y_2' - 2y_2'' + 0y_3 &\leq 4 \\ y_1 + y_2' - y_2'' - y_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

і функція  $7y_1 + 6y_2' - 6y_2'' - 4y_3 = w$  має максимальне значення.

Це стандартна двоїста задача. Очевидно, що  $y_2 = y_2' - y_2''$  може рахуватися єдиною змінною через вигляд коефіцієнтів, і задача може бути переписана так:

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2$  (знак невизначений),  $y_3 \geq 0$ , що

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\leq -1 \\ 4y_1 + 2y_2 &\leq 4 \\ y_1 + y_2 - y_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

і функція  $7y_1 + 6y_2 - 4y_3 = w$  має максимальне значення.

### Приклад 3.6.2

Знайти двоїсту задачу для задачі

знайти такі  $x_1 \geq 0$  і  $x_2$  невизначений знак, що

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &\geq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

і функція  $6x_1 + 10x_2 = z$  має мінімальне значення.

Якщо виразити  $x_2$  через  $x_2' - x_2''$ , де  $x_2' \geq 0$  і  $x_2'' \geq 0$  задача прийме необхідну форму для прямої задачі:

знайти такі  $x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0$ , що

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2' - 3x_2'' &\geq 10 \\ -x_1 + x_2' - x_2'' &\geq -4 \end{aligned}$$

і функція  $6x_1 + 10x_2' - 10x_2'' = z$  має мінімальне значення.

Відповідна двоїста задача має вид:

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , що

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 &\leq 6 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 10 \\ -3y_1 - y_2 &\leq -10 \end{aligned}$$

і функція  $10y_1 - 4y_2$  має максимальне значення.

Двоїста задача приведена в стандартній формі. Проте два останніх обмеження

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\leq 6 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 10 \end{aligned}$$

рівносильні, так що двоїста задача може бути подана в такому виді:

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , що

$$5y_1 - y_2 \leq 6$$

$$3y_1 + y_2 = 10$$

і функція  $10y_1 - 4y_2 = w$  має максимальне значення.

Таким чином, із прикладів даного розділу очевидно, що кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїста задача, а кожної змінної прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі. Якщо обмеження в прямої задачі задано у вигляді рівності, то відповідна змінна двоїстої задачі не обмежена знаком (приклад 3.6.1); Якщо змінна прямої задачі не обмежена знаком, що відповідне двоїсте обмеження є рівністю (приклад 3.6.2).

У розглянутому підході всі обмеження представляються у вигляді нерівностей, але можливий і інший варіант представлення.

Інформація з цих питань стосовно до задачі в стандартній формі представлені в таблиці 3.6.1.

**Таблиця 3.6.1.**

Пряма задача в стандартній формі*. Цільова функція.	Двоїста задача		
	Цільова функція	Обмеження	Змінні
Максимізація	Мінімізація	$\geq$	Не обмежені в знаку
Мінімізація	Максимізація	$\leq$	Не обмежені в знаку

\*) Всі обмеження прямої задачі – рівності з невід’ємними правими частинами, а всі змінні невід’ємні.

### Приклад 3.6.3.

Пряма задача:

Максимізувати  $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$  при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Пряма задача в стандартній формі:

Максимізувати  $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$  при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Двоїста задача:

Мінімізувати  $w = 10y_1 + 8y_2$  при обмеженнях

$$x_1 : y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$x_2 : 2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$x_3 : y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$x_4 : y_1 + 0y_2 \geq 0,$$

(означає, що  $y_1 \geq 0$ ),  $y_2$  не обмежений у знаку.

Приклад 4.4. Пряма задача:

Мінімізувати  $z = 5x_1 - 2x_2$  при обмеженнях

$$-x_1 + x_2 \geq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Пряма задача в стандартній формі:

Мінімізувати  $z = 5x_1 - 2x_2$  при обмеженнях

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Двоїста задача:

Максимізувати  $w = 3y_1 + 5y_2$  при обмеженнях

$$y_1 + 2y_2 \leq 5$$

$$-y_1 + 3y_2 \leq -2$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \leq 0.$$

$y_1, y_2$  не обмежені в знаку.

Приклад 4.5. Пряма задача:

Максимізувати  $z = 5x_1 + 6x_2$  при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$

$x_1$  не обмежений у знаку,  $x_2 \geq 0$ .

Пряма задача в стандартній формі.

Нехай  $x_1 = x'_1 - x''_1$ , де  $x'_1, x''_1 \geq 0$ . Стандартне формулювання прямої задачі при використанні такої підстановки має вид:

Максимізувати  $z = 5x'_1 - 5x''_1 + 6x_2$  при обмеженнях

$$x'_1 - x''_1 + 2x_2 = 5$$

$$-x'_1 + x''_1 + 5x_2 - x_3 = 3$$

$$4x'_1 - 4x''_1 + 7x_2 + x_4 = 8$$

$$x'_1, x''_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Двоїста задача:

Мінімізувати  $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$  при обмеженнях

$$y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5$$

$$-y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$-y_2 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$y_1, y_2, y_3$  не обмежені в знаку.

### 3.6.2 ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ

#### Теорема 1.

Двоїста задача до двоїстої є пряма задача.

За допомогою рівнянь (3.6.4) двоїста задача може бути записана (виходячи з прямої в стандартній формі) у такий спосіб:

знайти такий  $y \geq 0$ , що

$$-A^T y \geq -c$$

і функція  $-b^T y \geq w'$  має мінімальне значення. Її двоїста задача має вигляд:

знайти такий  $x \geq 0$ , що

$$-Ax \leq -b$$



і функція  $-c^T x = z'$  має максимальне значення.

Але вона рівносильна задачі

знайти такий  $x \geq 0$ , що

$$Ax \geq b$$

і функція  $c^T x = z$  має мінімальне значення, а це і є пряма задача.

## Теорема 2.

Значення функції  $z$  що відповідає будь-якому припустимому розв'язанню прямої задачі, не менше значення функції  $w$ , що відповідає припустимому розв'язанню двоїстої задачі.

Нехай  $X$  і  $Y$  – припустимі розв'язки власне прямого і двоїстого обмеження. Нехай відповідні значення цільової функції

$$Z = c^T X \text{ і } W = b^T Y$$

З рівняння (3.6.3)  $AX \geq b$ .

Оскільки  $Y \geq 0$ , то

$$Y^T AX \geq Y^T b = b^T Y = W$$

Далі з рівняння (4.4)  $A^T Y \leq c$ , оскільки  $X \geq 0$ , то

$$X^T A^T Y \leq X^T c = c^T X = Z.$$

Проте  $X^T A^T Y$  – скалярна величина, тому дорівнює своїй транспозиції  $Y^T AX$ , отже,

$$Z = c^T X \geq Y^T AX \geq b^T Y = W$$

тобто

$$Z \geq W \quad (3.6.5)$$

З цього результату випливає, що якщо є припустиме значення функції  $z$ , рівне припустимому значенню функції  $w$ , то це повинне бути мінімальне значення функції  $z$  і максимальне значення функції  $w$ . Нізвідки не випливає, що такі значення існують.

## Теорема 3.

Якщо пряма задача має кінцеве вирішення  $z = z_{\min}$ , то двоїста задача має кінцеве вирішення  $w = w_{\max} = z_{\min}$ . При цьому симплекс-множини оптимального розв'язку прямої задачі є значеннями змінних в оптимальному розв'язку двоїстої задачі, узятими з протилежним знаком.

Якщо в обмеження прямої задачі вводяться нові змінні, пряма задача приймає вигляд:

знайти такі  $x_j \geq 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$ ), що

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$$

і функція  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = z$  має мінімальне значення.

Якщо  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  – симплекс-множини оптимального розв'язку, то після множення обмежень на  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  і додавання до виразу для функції  $z$  отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} x_1 \left( c_1 + \sum_{i=1}^m a_{i1} \pi_i \right) + x_2 \left( c_2 + \sum_{i=1}^m a_{i2} \pi_i \right) + \dots + x_n \left( c_n + \sum_{i=1}^m a_{in} \pi_i \right) - \\ - x_{n+1} \pi_1 - x_{n+2} \pi_2 - \dots - x_{n+m} \pi_m = z + \sum_{i=1}^m \pi_i b_i \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Далі якщо рівняння (3.6.6) – оптимальна канонічна форма для функції  $z$ , те всі коефіцієнти лівої частини невід'ємні. Отже,

$$-\pi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

Ці обмеження рівносильні обмеженням

$$\begin{aligned} -\pi_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum a_{ij}(-\pi_i) &\leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

так що значення  $-\pi$ , задовольняють властивим обмеженням.

Зрозуміло, у рівнянні (4.6) коефіцієнти при базисних змінних обернуться в 0; самі базисні змінні також рівні 0, так що ліва частина дорівнює 0 і

$$z_{\min} = -\sum_{i=1}^m b_i \pi_i = \sum_{i=1}^m b_i (-\pi_i)$$

Таким чином,  $z_{\min} = \sum_{i=1}^m b_i (-\pi_i)$ . Але це – значення функції  $w$ , що відповідає припустимому

вирішенню обмежень двоїстої задачі, що задається рівностями  $y_i - \pi_i$ .

Таким чином, у силу зауважень після рівняння (3.6.5) ця величина є максимальним значенням функції  $w$ . Отже

$$w_{\max} = z_{\min}$$

#### Теорема 4.

Якщо двоїста задача має кінцеве рішення  $w = w_{\max}$ , то пряма задача має кінцеве рішення  $z_{\min} = w_{\max}$ . Значення симплекс-множників оптимального рішення двоїстої задачі є значеннями змінних в оптимальному рішенні прямої задачі.

Це може бути виведене з теорем 1 і 2; але корисно також одержати прямий доказ у матричних позначеннях, аналогічне доказу теореми 3.

Двоїста задача з обмеженнями у вигляді рівності може бути записана як

максимізувати функцію  $b^T y = w$

при обмеженнях  $A^T y + y_s = c$ ,

де

$$y_s = \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+n} \end{pmatrix} \geq 0$$

– вектор нових змінних.

Якщо  $\rho^T = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$  – симплекс-множники оптимального рішення двоїстої задачі, то

$$\begin{aligned} \rho^T A^T y + \rho^T y_s &= \rho^T c = c^T \rho \\ \text{отже, } (b^T + \rho^T A^T) y + \rho^T y_s &= w + c^T \rho \end{aligned}$$

Далі, оскільки функція  $w$  максимізується (а не мінімізується, як звичайно), коефіцієнти при  $y$  і  $y_s$ , у лівій частині рівняння не повинні бути додатними, отже,

$$\left. \begin{aligned} \rho^T &\leq (0, 0, \dots, 0), \\ b^T + \rho^T A^T &\leq (0, 0, \dots, 0), \end{aligned} \right\}$$

тобто

$$\begin{aligned} -\rho &\geq 0, \\ b + A\rho &\leq 0, \end{aligned}$$

що можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -\rho &\geq 0, \\ A(-\rho) &\geq b, \end{aligned}$$

Так що значення  $-\rho$  задовольняють обмеженням прямої задачі. Те ж міркування показує, що

$$w_{\max} = c^T (-\rho) = z_{\min}$$

Наслідком теорем 3 і 4 є те, що при зустрічі з задачею лінійного програмування ми вільні вибирати, чи вирішувати задачу в тому виді, як вона поставлена, або вирішувати двоїсту

задачу Якщо застосовується модифікований симплекс-метод (що настійно рекомендується), то будуть отримані і значення змінних, і симплекс-множники. Це дозволить визначити також симплекс-множники і значення змінних іншої задачі. У такий спосіб можна сильно заощадити час обчислень. Обсяг обчислень у задачі лінійного програмування пов'язаний скоріше з кількістю обмежень, чим із кількістю змінних.

Виходить, якщо в пряму задачу входять 7 обмежень на 3 змінні, перетворення будуть провадитися в матриці розмірністю  $9 \times 8$  на етапі I і в матриці розмірністю  $8 \times 8$  на етапі II. У двоїсту задачу входять 3 обмеження на 7 змінних, і вона незалежна від етапу I; перетворення будуть провадитися в матриці розмірністю  $4 \times 4$ . Таким чином, із кожної ітерації обсяг обчислень скорочується щонайменше в чотири рази.

### У якості ілюстрацій до теорем 3 і 4 розглянемо задачу

знайти такі  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , що

$$2x_1 + 3x_2 \geq 10$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 19$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 9$$

і функція  $7x_1 + 10x_2 = z$  має мінімальне значення.

Її двоїста задача має вигляд

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ , що

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 7$$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 10$$

і функція  $10y_1 + 19y_2 + 9y_3 = w$  має максимальне значення.

Рішення першої задачі на ЕОМ показує, що в оптимальному рішенні  $x_1 = 1, x_2 = 4, \pi_1 = 0, \pi_2 = -2, \pi_3 = -1$  та  $z_{\min} = 47$ . Таким чином, для іншої задачі рішенням є  $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 1$ , де  $\rho_1 = -1, \rho_2 = -4$  та  $w_{\max} = 47$ . Це підтверджується розв'язком двоїстої задачі на ЕОМ. Тут потрібно деяка увага. При вирішенні на ЕОМ, використовуючи лінійне програмування, ми мінімізували функцію

$$w' = -10y_1 - 19y_2 - 9y_3$$

(знаки цільової функції і симплекс-множників тут звернені).

### 3.6.3 АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ З ПОГЛЯДУ ПОДВІЙНОСТІ

Поняття двоїстості допомагає краще усвідомити деякі отримані вище результати лінійного програмування.

Алгоритм подвійного симплекса-методу був виведений без звертання до двоїстості. Однак подвійність дозволяє глянути на процедуру по-іншому.

Розглянемо задачу

знайти такі  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , що

$$x_1 + 3x_3 \geq 3,$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 5$$

і функція  $4x_1 + 6x_2 + 18x_3 = z$  має мінімальне значення.

Оскільки коефіцієнти у виразі для функції  $z$  додатні, можна уникнути введення штучних змінних і вирішити задачу з використанням подвійного симплекса-методу. Приведемо таблицю послідовних обчислень:

Ітерація	Базис	Значення	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_4$	-3	-1	0	-3	1	0
	$x_5$	-5	0	-1*	-2	0	1
	$-z$	0	4	6	18	0	0
1	$x_4$	-3	-1	0	-3*	1	0
	$x_2$	5	0	1	2	0	-1
	$-z$	-30	4	0	6	0	6
2	$x_3$	1	1/3	0	1	-1/3	0
	$x_2$	3	-2/3	1	0	2/3	-1
	$-z$	-36	2	0	0	2	6

Таким чином, в оптимальному рішенні  $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1$  і  $z_{\min} = 36$ .

Симплекс-множники (коефіцієнти при нових перемінних  $x_4$  і  $x_5$  в остаточному виді для функції  $z$ ) дорівнюють  $\pi_1=2$  і  $\pi_2=6$ .

Розглянемо двоїсту задачу

знайти такі  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , що

$$y_1 \leq 4,$$

$$y_2 \leq 6,$$

$$3y_1 + 2y_2 \leq 18$$

і функція  $3y_1 + 5y_2 = w$  має максимальне значення.

При звичайному підході до задачі ми мінімізуємо функцію

$$w' = -3y_1 - 5y_2.$$

Приведемо таблицю послідовних обчислень:

Ітерація	Базис	Значення	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$y_3$	4	1	0	1	0	0
	$y_4$	6	0	1*	0	1	0
	$y_5$	18	3	2	0	0	1
	$-w'$	0	-3	-5	0	0	0
1	$y_3$	4	1	0	1	0	0
	$y_2$	6	0	1	0	1	0
	$y_5$	6	3*	0	0	-2	1
	$-w'$	30	-3	0	0	5	0
2	$y_3$	2	0	0	1	2/3	-1/3
	$y_2$	6	0	1	0	1	0
	$y_1$	2	1	0	0	-2/3	1/3
	$-w'$	36	0	0	0	3	1

Симплекс-множники (для цільової функції  $w'$ ) суть  $\rho_1 = 0, \rho_2 = 3, \rho_3 = 1$  (коефіцієнти при нових змінних  $y_3, y_4$  і  $y_5$ ). Вони дають значення змінних прямої задачі. Двоїсті змінні  $y_1=2$  і  $y_2=6$  є симплекс-множниками прямої задачі. У проведених обчисленнях подвійний симплекс-метод для рішення прямої задачі і симплекс-метод для рішення зворотної задачі, власне кажучи, ідентичні.

## 4. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна задача нелінійного програмування полягає у пошуці екстремума цільової функції при заданих обмеженнях у вигляді рівностей і (або) нерівностей. Обмеження можуть бути лінійними і (або) нелінійними. Формально задача нелінійного програмування може бути сформульована таким чином:

мінімізувати

$$f(X), X \in E^n \quad (4.1)$$

при  $m$  лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді рівностей

$$h_j(X) = 0, j = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

та  $(p-m)$  лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді нерівностей

$$g_j(X) \geq 0, j = m + 1, \dots, p \quad (4.3)$$

де  $E^n$  –  $n$  - мірний евклідовий простір.

В більш вузькій постановці задачі нелінійного програмування із розгляду вилучаються наступні спеціальні випадки:

1) змінні приймають лише цілочислові значення (нелінійне цілочислове програмування);

2) обмеження включають у собі час як параметр, при цьому використовуються диференціальні рівняння (динамічна оптимізація).

Якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні, то має місце задача квадратичного програмування. Задачі лінійного та квадратичного програмування можуть розглядатися як два частинних випадки загальної задачі нелінійного програмування.

### 4.1 ГРАДІЄНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Серед методів, які використовуються для рішення задач нелінійного програмування, значне місце займають методи пошуку рішення, оснований на аналізі похідних оптимізуємої функції. Якщо цільова функція неперервна та диференційована, то існує градієнт  $f'(X)$ , який визначається як вектор-стовбець з перших частинних похідних

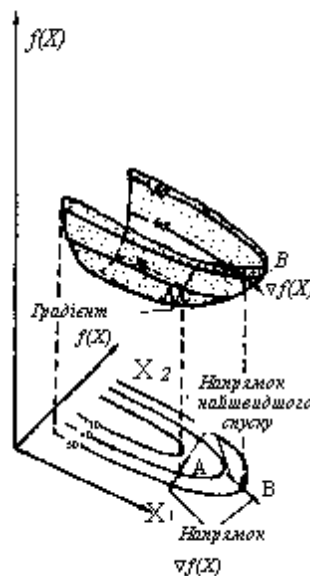
$f'(X)$  по  $X$ , значення яких беруться у даній точці  $X$ . Верхній індекс  $k=0,1,\dots$

використовується для позначення точки в  $E^n$ , в якій береться значення градієнту, і, таким чином, градієнт в  $X^k$

$$\nabla f(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_n} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Вираз  $\nabla^T f(X^{(k)})$  позначає вектор-рядок.

Основною властивістю градієнту функції  $f(X)$  являється наступне: вектор  $\nabla f(X)$  у кожній точці області визначення функції  $f(X)$  направлений до поверхні рівня, проведеної через цю точку, і за алгебраїчною величиною рівний похідній від вказаної функції по напрямленню до нормалі; градієнт скалярної функції направлений у бік найшвидшого збільшення функції, тобто найшвидшого підйому і ортогональний лінії рівня  $f(X)$ , яка проходить через данну точку (рис.4.1). Вектор, протилежний цьому градієнтові (від'ємний градієнт), направлений у бік найшвидшого спуску. Довільний вектор  $V$ , ортогональний  $\nabla f(X^{(k)})$  (так само, як і дотична площина до  $f(X^{(k)})$  у точці  $X^{(k)}$ ), може бути записаний як  $V^T \nabla f(X^{(k)}) = 0$ . Градієнт не являється направленням найшвидшого збільшення  $f(X)$ , якщо розгляд ведеться не в евклідовій, а у другій метриці.



**Рис.4.1. Градієнт (напрямок найшвидшого підйому) та напрямок найшвидшого спуску у двох точках**

## 4.2 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ

В градієнтних методах або в методах других похідних, здійснюють лінійну або квадратичну апроксимацію функції  $f(X)$ . Лінійна, або першого порядку, апроксимація цільової функції може бути виконана за допомогою усіченого ряду Тейлора в околиці  $X^{(k)}$ :

$$f(X) \approx f(X^{(k)}) + \nabla^T f(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) \quad (4.5)$$

Квадратичну апроксимацію  $f(X)$  можна отримати, відкинувши у рядах Тейлора члени третього або більш високого порядків:

$$f(X) \approx f(X^{(k)}) + \nabla^T f(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) + \frac{1}{2} (X - X^{(k)})^T \nabla^2 f(X^{(k)}) (X - X^{(k)}), \quad (4.6)$$

де  $\nabla^2 f(X^{(k)})$  - матриця Гессе  $f(X)$ ,  $H(X)$ , яка являє собою квадратичну матрицю других частинних похідних  $f(X)$ , взятих у точці  $X^{(k)}$ :

$$\nabla^2 f(X^{(k)}) = H(X^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_n \partial X_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_n^2} \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

### 4.3 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ

Постановка задачі: мінімізувати  $f(X)$ ,  $X \in E^n$ . Для задачі нелінійного програмування при відсутності обмежень необхідними умовами того, що  $X^*$  - точка локального мінімуму задачі, являються наступні:

- 1) функція  $f(X)$  диференційована у точці  $X^*$ ;
- 2)  $\nabla f(X^*) = 0$ , тобто існує стаціонарна точка  $X^*$ .

Достатні умови того, що  $X^*$  - точка локального мінімуму задачі (4.8), крім приведених у пп. 1 і 2 умов, включають:  $\nabla^2 f(X^*) > 0$ , тобто матриця Гессе - додатньо визначена (для випадку максимуму умови ті ж, за виключенням того, що матриця Гессе  $f(X^*)$  повинна бути від'ємно визначена).

Звичайно обмежуються пошуком локального мінімуму; разом з тим, якщо можна показати, що  $X^T \nabla^2 f(X) X \geq 0$  для всіх  $X$ , то  $f(X)$  називається опуклою функцією, а локальний мінімум стає глобальним.

### 4.4 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ВИГЛЯДІ РІВНОСТЕЙ І НЕРІВНОСТЕЙ. УМОВИ КУНА - ТАККЕРА

У розділі 2 було встановлено, що множники Лагранжа можна використовувати при побудові критеріїв оптимальності для задач оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей. Кун і Таккер узагальнили цей підхід на випадок загальної задачі нелінійного програмування з обмеженнями як у вигляді рівностей, так і у вигляді нерівностей [13].

Кун і Таккер побудували необхідні і достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування, виходячи з припущення про диференційованість функцій  $f, g_j$  і  $h_j$ .

Знайти сукупність векторів  $X^*, U^*, V^*$ , задовольняючих наступні умови:

$$\nabla L(X^*, U^*, V^*) \equiv \nabla f(X^*) - \sum_{j=1}^m U_j \nabla h_j(X^*) - \sum_{j=m+1}^p U_j^* \nabla g_j(X^*) = 0, \quad (4.8)$$

$$h_j(X^*) = 0, j = 1, \dots, m, \quad (4.9)$$

$$g_j(X^*) \geq 0, j = m + 1, \dots, p, \quad (4.10)$$

$$U_j^* g_j(X^*) = 0, j = m + 1, \dots, p, \quad (4.11)$$

$$U_j^* \geq 0, j = m + 1, \dots, p, \quad (4.12)$$

де  $L(X, U, V)$  - узагальнена функція Лагранжа;  $U, V$  - множники Лагранжа.

Достатньою умовою того, що обмеження - першого порядку, є те, що всі градієнти активних обмежень нерівностей ( $g_j(X^*) = 0$ ) і обмежень-рівностей, взятих у деякій

довільній точці  $X^*$ , лінійно незалежними. Умова лінійної незалежності являє собою деяку умову регулярності припустимої області, яка майже завжди виконується для задач оптимізації, які зустрічаються на практиці. Перевірка умов лінійної незалежності являє складність, тому що потрібно, щоб оптимальне рішення задачі було відомо раніше.

### Теорема 1.

Якщо функції  $f(X), h_j(X) (j = 1, \dots, m)$ ,

$g_j(X) (j = m + 1, \dots, p)$  диференційовані в точці  $X^*$  і якщо у точці  $X^*$  обмеження

являються обмеженнями першого порядку, то необхідною умовою наявності в точці  $X^*$  локального мінімуму задачі (4.1) - (4.3) полягає у тому, що існують множники Лагранжа  $U^*$  і  $V^*$  такі, що сукупність векторів  $X^*, U^*, V^*$  задовільняє співвідношенням (4.8) - (4.12).

Умови Куна - Таккера стають достатніми умовами наявності глобального мінімуму, якщо цільова функція опукла, обмеження - нерівності утворенні вгнутими функціями, а обмеження - рівності мають лінійні функції. Розглянемо слідуочу задачу нелінійного програмування.

### Приклад 4.1

Мінімізувати  $f(X) = X_1^2 - X_2$  при обмеженнях

$$g_1(X) = X_1 - 1 \geq 0, \quad g_2(X) = 26 - X_1^2 - X_2^2 \geq 0, \quad h_1(X) = X_1 + X_2 - 6 = 0 \quad [13].$$

За допомогою теореми доведемо, що рішення  $X^* = [1 \quad 5]^T$  - оптимальне.

Маємо

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 2X_1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad H_f(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тому що матриця  $H_f(X)$  - додатньо напіввизначена при всіх  $X$ , функція  $f(X)$  виявляється опуклою. Перше обмеження - нерівність має лінійну функцію  $g_1(X)$ , яка одночасно являється і опуклою, і вгнутою. Для того щоб показати, що функція  $g_2(X)$  - вгнута, обчислимо



$$\nabla g_2(X) = \begin{bmatrix} -2X_1 \\ -2X_2 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad H_{g_2}(X) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця  $H_{g_2}(X)$  від'ємно визначена, функція  $g_2(X)$  - увігнута. Функція  $h_1(X)$  входить у лінійне обмеження - рівність. Отже, всі умови теореми виконані; якщо покажемо, що  $X^* = [1 \ 5]^T$  - точка Куна - Таккера, встановимо оптимальність рішення  $X^*$ .

Наприклад, умова Куна - Таккера має вигляд:

$$2X_1 - U_1 + 2X_1U_2 - V_1 = 0, \quad (4.13)$$

$$-1 + 2X_2U_2 - V_1 = 0, \quad (4.14)$$

$$X_1 - 1 \geq 0, \quad (4.15)$$

$$26 - X_1^2 - X_2^2 \geq 0, \quad (4.16)$$

$$X_1 + X_2 - 6 = 0, \quad (4.17)$$

$$U_1(X_1 - 1) = 0, \quad (4.18)$$

$$U_2(26 - X_1^2 - X_2^2) = 0 \quad (4.19)$$

$$U_1, U_2 \geq 0. \quad (4.20)$$

Точка  $X^* = [1 \ 5]^T$  задовільняє обмеженням (4.15) - (4.17) і, отже, - припустима. Рівняння (4.13) - (4.14) приймають наступний вигляд:

$$2 - U_1 + 2U_2 - V_1 = 0; \quad -1 + 10U_2 - V_1 = 0.$$

Припустивши  $V_1 = 0$ , отримаємо  $U_2 = 0,1$ ;  $U_1 = 2,2$ . Рішення  $X^* = [1 \ 5]^T$ ,  $U^* = [2,2 \ 0,1]$  і  $V^* = 0$  задовільняють умовам Куна - Таккера.

Щоб врахувати нелінійний характер функції в задачах (4.1) - (4.3), Мак - Кормік сформулював необхідні і достатні умови оптимальності другого порядку для задач з двічі диференційованими функціями.

Точка Куна - Таккера в задачі нелінійного програмування визначається вектором  $(X^*, U^*, V^*)$  задовільняючим співвідношенням (4.8) - (4.12).

Точка  $X^*$  являє собою точку локального мінімуму в задачі нелінійного програмування, якщо  $X^*$  відповідає припущеному рішенню і  $f(X^*) \leq f(\bar{X})$  для всіх припущених  $\bar{X}$  з деякої малої околиці  $\delta(X^*)$  точки  $X^*$

Точка  $X^*$  являє собою точку строгого (єдиного або ізольованого) локального мінімуму, якщо  $X^*$  відповідає припущеному рішенню задачі і  $f(X^*) < f(\bar{X})$  для всіх припустимих  $\bar{X} \neq X^*$  і деякої малої околиці  $\delta(X^*)$  точки  $X^*$

## Теорема 2.

Необхідні умови оптимальності другого порядку. Нехай  $f(X)$ ,  $h_1(X), \dots, h_m(X)$ ,  $g_{m+1}(X), \dots, g_p(X)$  - двічі диференційовані функції,  $X^*$  - припустиме рішення нелінійної задачі, а множина активних в точці  $X^*$  обмежень визначається множиною  $I = \{j \mid g_j(X^*) = 0\}$ . Припустимо, що градієнт  $\nabla g_j(X^*)$  при  $j = m+1, \dots, p$  і  $\nabla h_j(X^*)$  при  $j = 1, \dots, m$  - лінійно незалежні. Тоді необхідні умови того, щоб точка  $X^*$  була точкою локального мінімуму в задачі нелінійного програмування, формулюються наступним чином:

1) існує такий вектор  $(U^*, V^*)$  що вектор  $(X^*, U^*, V^*)$  визначає точку Куна - Таккера;

2) для будь-якого нульового вектора  $Y$ , задовільняючого системі рівнянь

$$\nabla g_j(X^*)Y = 0, \quad j = m+1, \dots, p, \quad (4.21)$$

$$\nabla h_j(X^*)Y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.22)$$

виконується нерівність

$$Y^T H_L(X^*, U^*, V^*)Y \geq 0, \quad (4.23)$$

$$\text{при } L(X; U, V) = f(X) - \sum_{j=1}^m V_j h_j(X) - \sum_{j=m+1}^p U_j g_j(X), \quad (4.24)$$

а  $H_L(X^*, U^*, V^*)$  - матриця Гессе, утворена значеннями других частинних похідних  $L$  по  $X$  у точці  $(X^*, U^*, V^*)$ .

Достатні умови Куна - Таккера виконуються при дуже жорстких припущеннях. У зв'язку з цим розглянемо достатні умови другого порядку, формулювання яких не потребує припущень про опуклість та вгнутість відповідних функцій і про лінійність обмежень - рівностей.

### Теорема 3.

Достатні умови оптимальності другого порядку.

Достатні умови того, щоб точка  $X^*$  була точкою строгого локального оптимуму в задачі нелінійного програмування, де  $f(X)$ ,

$g_j(X)$ ,  $j = m+1, \dots, p$ ,  $h_j(X)$ ,  $j = 1, \dots, m$  - двічі диференційовані функції, формулюються наступним чином:

1) існує такий вектор  $(U^*, V^*)$ , що вектор  $(X^*, U^*, V^*)$  визначає точку Куна - Таккера;

2) для кожного ненульового вектора  $Y$ , задовільняючого системі рівнянь і нерівностей

$$\nabla g_j(X^*)Y = 0, \quad j \in I_1 = \{j \mid g_j(X^*) = 0, U_j^* > 0\} \quad (4.25)$$

$$\nabla g_j(X^*)Y = 0, \quad j \in I_2 = \{j \mid g_j(X^*) = 0, U_j^* = 0\} \quad (4.26)$$

$$\nabla h_j(X^*)Y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad Y \neq 0, \quad (4.27)$$

виконується нерівність

$$Y^T H_L(X^*, U^*, V^*)Y > 0. \quad (4.28)$$

Множина  $I = I_1 \cup I_2$  має номери всіх активних у точці  $X^*$  обмежень.

Порівнюючи теореми 2 і 3, нескладно побачити, що достатні умови лише дечим відрізняються від необхідних умов. Основна різниця полягає у тому, що рівняння (4.21) не повинні виконуватися для всіх активних обмежень, а нерівність (4.23) перетворюється у строгу нерівність.

#### Приклад 4.2

Мінімізувати  $f(X) = (X_1 - 1)^2 + X_2^2$  при обмеженні

$$g_1(X) = -X_1 + \left(\frac{X_2^2}{5}\right) \geq 0 \quad [13].$$

Припустимо, потрібно перевірити, чи буде точка  $X^* = [0 \quad 0]^T$  точкою локального мінімуму. Запишемо умови Куна - Таккера для данної задачі:

$$2(X_1 - 1) + U_1 = 0; \quad 2X_2 - \frac{2}{5}X_2U_1 = 0;$$

$$U_1 \left[ -X_1 + \left(\frac{X_2^2}{5}\right) \right] = 0; \quad U_1 \geq 0.$$

Точка  $X^* = [0 \quad 0]^T$ ,  $U_1^* = 2$  задовільняє умовам Куна - Таккера. Необхідні

умови наявності мінімуму виконуються, однак не можна стверджувати, що  $X^*$  - точка локального мінімуму, оскільки функція  $g_1(X)$  в супереч припущень теореми 1 (про достатність умов Куна - Таккера) являється опуклою.

Використовуючи достатні умови другого порядку, знаходимо матрицю

$$H_L(X^*; U^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}.$$

Вектор  $Y = [Y_1 \quad Y_2]^T$ , задовільняючий умовам (4.25) та (4.26)  $\nabla g_1(X^*)Y = 0$ ,

або  $[-1 \quad 0] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0$  необхідно розглядати у вигляді  $[0 \quad Y_2]^T$ . Нерівність (4.28)

приймає вигляд

$$\begin{bmatrix} 0 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 1,2Y_2^2 > 0 \quad \text{при всіх } Y_2 \neq 0$$

Таким чином, за теоремою 3  $X^* = [0 \quad 0]^T$  - точка строгого локального мінімуму.

## 4.5 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У більшості, методи нелінійного програмування можуть бути охарактеризовані як багатокрокові, або методи послідовного покращення вихідного (або початкового) рішення. Однак у задачах нелінійного програмування звичайно наперед не можна сказати, яке найбільше число кроків гарантує знаходження оптимуму з заданою точністю. Вибір крока являє собою серйозну проблему, від успішного рішення якої у більшості залежить ефективність застосування того чи іншого методу.

Різноманітність методів рішення задач нелінійного програмування і пояснюється намаганням знайти оптимальне рішення за найменше число кроків, щоб обминути необхідність багаторазового обчислення значень цільової функції. Вибір того чи іншого методу визначається конкретним складом задачі. Д.Хіммельблау [15] запропонував способи класифікації задач нелінійного програмування.

### Класифікація методів нелінійного програмування.

1. Класифікація по деяким аспектам постановки задачі.
  - 1.1. Характер цільової функції (з обмеженнями, без обмежень).
    - 1.1.1. Без обмежень.
    - 1.1.2. Обмеження - рівності.
    - 1.1.3. Обмеження - нерівності.
    - 1.1.4. Як обмеження - рівності, так і обмеження - нерівності.
  - 1.2. Дискретні (цілочислові) змінні, приймаючі неперервні значення.
  - 1.3. Опукле, квадратичне, сепарабельне програмування.
2. Класифікація за характерними рисами методів розв'язку.
  - 2.1. Методи, які використовують похідні; методи, які не використовують похідні.
  - 2.2. Аналітичне визначення похідних; числове визначення похідних.
  - 2.3. Методи, які використовують перші похідні; методи, які використовують другі похідні.
  - 2.4. Градієнтні методи з малим кроком; градієнтні методи з великим кроком.
  - 2.5. Одночасна ітерація по всім змінним у процесі пошуку; релаксація (послідовний пошук кожного разу по одній змінній).
  - 2.6. Методи внутрішньої точки; методи зовнішньої точки.
  - 2.7. Детермінований пошук; випадковий пошук.
  - 2.8. Початковий вектор знаходиться у припустимій чи неприпустимій області.
3. Класифікація за використаною мовою програмування.

### Завдання

1. Сформулювати умови Куна - Таккера для наступної задачі:  
максимізувати  $f(X) = 3X_1^2 - 2X_2$  при обмеженнях  $2X_1 + X_2 = 4$ ;  
 $X_1^2 + X_2^2 \leq 40$ ,  $X_1 \geq 0$ .
2. Розглянути наступну задачу: мінімізувати  $f(X) = (X_1 - 3)^2 + (X_2 + 4)^2 + e^{5X_3}$   
при обмеженнях  $X_1 + X_2 + X_3 \leq 1$ ;  $X_1, X_2, X_3 \geq 0$ ;
  - а) записати умови Куна - Таккера для цієї задачі;
  - б) показати, що виконання умов Куна - Таккера є достатнім для існування оптимального розв'язку даної задачі;
  - в) довести, що  $X = [1 \ 0 \ 0]^T$  - точка оптимуму.

3. Розглянути наступну задачу нелінійного програмування: максимізувати

$$f(X) = A_1 X_1 + X_2^2, \text{ при обмеженні } X_1^2 + X_2^2 \leq 25; X_1 - X_2 \leq 1, X_1 \geq 0, X_2 \geq 0,$$

а) записати умови Куна - Таккера;

б) показати, що умови Куна - Таккера являються необхідними та достатніми;

в) визначити область значень  $A_1$ , для якої розв'язок  $X_1 = 4, X_2 = 3$ , оптимальний.

### Контрольні запитання

1. В чому практичне значення теорем про необхідність та достатність умов Куна - Таккера?

2. Показати основні напрямки використання необхідних та достатніх умов оптимальності другого порядку.

## 5. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЯКІ НЕ ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ

При реалізації методів прямого пошуку потрібно тільки значення цільової функції. При розв'язку задач безумовної оптимізації методами нелінійного програмування градієнтні методи та методи, які використовують другі похідні, сходяться швидше, ніж методи прямого пошуку.

Але, застосовуючи на практиці методи, які використовують похідні, доводиться стикатися з двома головними перешкодами. По-перше, в задачах з досить великим числом змінних важко або не можливо отримати похідні у вигляді аналітичних функцій, необхідних для градієнтного алгоритму або для алгоритму, який використовує похідні другого порядку. Хоч обчислення аналітичних похідних можна замінити обчисленням похідних за допомогою різницевого схем, помилка яка при цьому виникає, особливо в околиці екстремуму, може обмежити застосування подібної апроксимації. По-друге, при використанні методів оптимізації, основаних на обчисленні перших і при необхідності - других похідних, потрібно порівняно з методами прямого пошуку багато часу на підготовку задачі для розв'язку.

Методи прямого пошуку не потребують регулярності і неперервності цільової функції і існування похідних; хоча повільніше реалізуються у випадку простих задач але з точки зору користувача, на практиці можуть опинитися більш задовільними, ніж градієнтні методи.

### 5.1 ФУНКЦІЯ ОДНОЇ ЗМІННОЇ

#### 5.1.1 МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ

За допомогою методів виключення інтервалів можна реалізувати процедуру пошуку, яка дозволяє знайти точку оптимуму шляхом послідовного виключення частин вихідного обмеженого інтервалу. Логічна структура пошуку за допомогою методів виключення інтервалів основана на простому порівнянні значень функції в деяких пробних точках. Крім того, при такому порівнянні в розрахунок приймається тільки відношення порядку на множині значень функції і не враховується різниця між значеннями функції. Пошук завершується, коли залишившийся підінтервал зменшується до достатньо малих розмірів. Застосуванню методів виключення інтервалів накладається єдина вимога на досліджувану функцію: вона повинна бути унімодальною. Отже, вказані методи можна використовувати для аналізу як неперервних, так і розривних функцій, а також у випадках, коли змінні приймають значення із дискретної множини. Метод ділення інтервалу на чотири частини

Цей метод інколи називають п'ятиточковим пошуком на рівних інтервалах, оскільки його реалізація основана на виборі п'яти пробних точок, рівномірно

розподілених у інтервалі пошуку. Нижче наведен опис основних кроків пошукової процедури, орієнтованої на знаходження точки мінімуму функції  $f(X)$  в інтервалі  $[a, b]$ .

**Крок 1.** Припустимо  $L = b - a$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_3 = a + \frac{L}{2}$ ,  $x_5 = b$ . Обчислити значення  $f(x_1)$ ,  $f(x_3)$  та  $f(x_5)$ .

**Крок 2.** Припустимо  $x_2 = a + \frac{L}{4}$ ,  $x_4 = b - \frac{L}{4}$ . Відмітимо, що точки  $x_2, x_3$  і  $x_4$  ділять інтервал  $[a, b]$  на чотири рівні частини. Обчислити значення  $f(x_2)$  та  $f(x_4)$ .

**Крок 3.** Порівняти значення  $f(x_k)$ , де  $k = 1, \dots, 5$ , знайти найменше значення  $f(x_m)$  серед обчислених  $f(x_k)$ . Якщо  $x_m \leq x_2$ , виключити інтервали  $[x_3, b]$ , поклавши  $b = x_3$ . Якщо  $x_m = x_3$ , виключити інтервали  $[a, x_2]$  та  $[x_4, b]$ . Припустимо  $a = x_2$  і  $b = x_4$ . Якщо  $x_m \geq x_4$ , виключити інтервал  $[a, x_3]$ . Припустимо  $a = x_3$  і  $b = x_5$ . Перейти до кроку 4.

**Крок 4.** Обчислити  $L = b - a$ . Якщо значення  $\frac{L}{4}$  мале, закінчити пошук. В протилежному випадку повернутися до кроку 2.

Зауваження. 1. На кожній ітерації потрібно не більше двох обчислень значення функції.

2. Показано [13], що з усіх методів пошуку на рівних інтервалах (чотириточкових, п'ятиточкових, шеститочкових і т.д.) п'ятиточковий відрізняється найбільшою ефективністю.

Абсолютна помилка в знаходженні положення екстремуму з збільшенням числа точок, в яких обчислюється значення цільової функції, визначається виразом

$$\Delta = (b - a) 2^{-\frac{N-1}{2}}. \quad (5.1)$$

### Завдання

Реалізувати процедуру одномірного пошуку точки оптимуму методом ділення інтервалу на чотири частини функції:

а)  $f(X) = 3x^2 + \left(\frac{12}{x^3}\right) - 5$ , у інтервалі  $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ ;

б)  $f(X) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$ ,  $-2 \leq x \leq 1$ ;

в)  $f(X) = 3x^4 + (x - 1)^2$ , у інтервалі  $0 \leq x \leq 4$ ;

г)  $f(X) = 4x \sin x$ ,  $-1 \leq x \leq 3,14$ ;

д)  $f(X) = 2(x - 3)^2 + e^{0,5x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 100$ .

### Завдання для самостійної роботи

Задані наступні функції однієї змінної:

а)  $f(X) = x^5 + x^4 - \left(\frac{x^3}{3}\right) + 2$ ;

$$б) f(X) = (2x + 1)^2 (x - 4).$$

Для кожної із заданих функцій знайти:

- 1) інтервал(и) зростання, убуття;
- 2) точки перегину (якщо такі є);
- 3) інтервали, в яких функція вгнута, опукла;
- 4) локальні і глобальні максимум (мінімум) (якщо є).

### Контрольні запитання

1. Як перевірити, являється функція опуклою або вгнутою? Визначити, які із наступних функцій опуклі або вгнуті:

$$а) f(X) = e^x; б) f(X) = e^{-x}; в) f(X) = \frac{1}{x^2}; г) f(X) = x + \log x, x > 0.$$

2. У чому полягає властивість унімодальності функції і в чому його важливе значення при рішенні задач оптимізації з однією змінною?

### Метод золотого перерізу

Величина підінтервалу, виключаємого на кожному кроці пошуку оптимуму, залежить від знаходження пробних точок всередині інтервалу пошуку. Оскільки місцезнаходження точки оптимуму невідоме, доречно припустити, що розміщення пробних точок повинно забезпечувати зменшення інтервалу в одному і тому ж відношенні. Крім того, в цілях збільшення ефективності алгоритму необхідно вимагати, щоб вказане відношення було максимальним. Подібну стратегію називають стратегією пошуку.

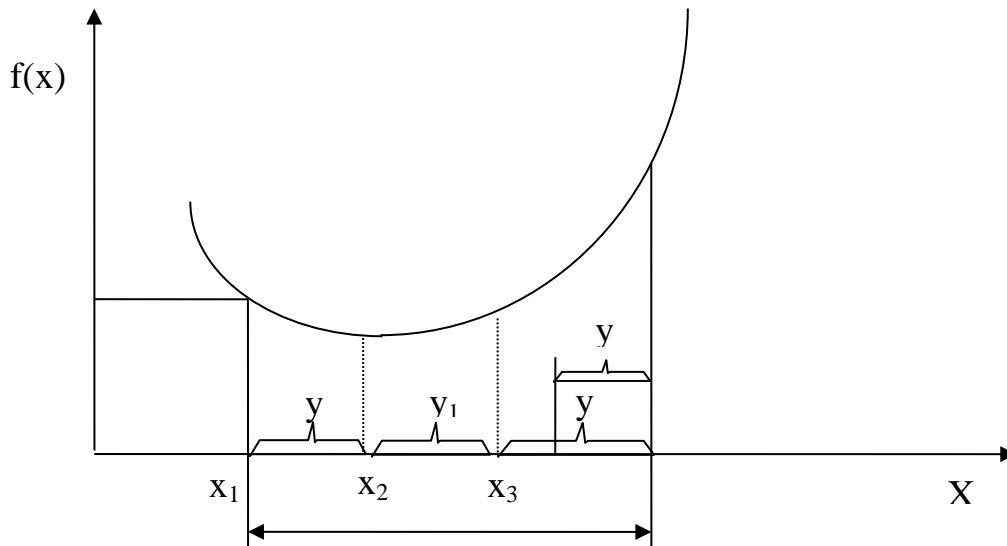
На основі методів виключення інтервалів і мінімаксних стратегій пошуку можна зробити наступні висновки.

1. Якщо кількість пробних точок приймається рівним двом, то їх слід розміщувати на однакових відстанях від середини інтервалу.

2. У відповідності з загальною мінімаксною стратегією пробні точки повинні розміщувати в інтервалі по симетричній схемі таким чином, щоб відношення довжини виключаючого підінтервалу до довжини інтервалу пошуку залишалось постійним.

Одним з найбільш ефективних способів мінімаксної стратегії пошуку являється пошук за допомогою золотого перерізу, оснований на розбитті відрізка прямої на дві частини у відношенні, відомому як золотий переріз. При цьому відношенні довжини всього відрізка до більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до меншої.

Розглянемо симетричне розположення двох пробних точок  $x_2$  та  $x_3$  на вихідному інтервалі  $[a, b]$ , де  $L = b - a$ ,  $x_1 = a$  і  $x_4 = b$ , яке показано на рис. 5.1.



**Рис. 5.1. Пошук за допомогою методу золотого перерізу**

Довжини інтервалів  $[x_1, x_3]$  та  $[x_2, x_4]$  однакові, тобто  $x_3 - x_1 = x_4 - x_2$ , інтервали  $[x_1, x_2]$  і  $[x_3, x_4]$  також рівні. Позначимо  $y = x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ . Значення  $y$  вибирається таким чином, щоб

$$\frac{y}{l} = \frac{l - 2y}{l - y} \quad (5.2)$$

Значення  $y$  визначається з (5.2) як рішення рівняння  $y^2 - 3ly + l^2 = 0$ ,

$$\frac{y}{l} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (5.3)$$

З двох коренів рівняння залишаємо

$$\frac{y}{l} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \quad (5.4)$$

так як другий корень  $\frac{y}{l} > 1$ , що не відповідає постановці задачі. Знайдене значення

відношення  $\frac{y}{l}$  носить назву золотого перерізу.

Після відкидання у вихідному відрізку однієї з крайніх його частин залишений відрізок при збереженні на місці його вибраної точки повинен ділитися в тому ж відношенні, що і вихідний.

Процедура пошуку мінімуму методом золотого перерізу складається з наступних кроків.

**Крок 1.** Припустимо  $L = b - a$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_4 = b$ . Обчислити значення  $f(x_1)$  та  $f(x_4)$ .

**Крок 2.** Припустимо  $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = x_1 + zL$ ,  $x_3 = x_4 - zL$ . Обчислити значення  $f(x_2)$  і  $f(x_3)$ .



**Крок 3.** Вибрати скорочений підінтервал в інтервалі  $L$ , в якому локалізований мінімум.

Якщо  $f(x_2) < f(x_3)$ , то  $x_4 = x_3$ ,  $x_3 = x_2$ ,  $x_2 = x_1 + (x_4 - x_3)$ .

Якщо  $f(x_2) > f(x_3)$ , то  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = x_3$ ,  $x_3 = x_1 + (x_4 - x_2)$ .

**Крок 4.** Обчислити  $x_2 - x_1$ . Якщо величина  $x_2 - x_1$  мала, закінчити пошук. В протилежному випадку повернутися до кроку 3.

Оцінку точності визначення екстремуму методом золотого перерізу при заданному числі розрахунків значень функції  $f(x)$  можна визначити як

$$\Delta = \frac{b-a}{2} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{s-3}, \quad (5.5)$$

де  $\Delta$  - абсолютна помилка у визначенні положення екстремуму після  $S$  обчислень  $f(x)$ .

**Завдання**

Реалізувати процедуру одномірного пошуку оптимуму методом золотого перерізу функції:

а)  $f(X) = 3x^2 + \left(\frac{12}{x^3}\right) - 5$ , у інтервалі  $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ ;

б)  $f(X) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$ ,  $-2 \leq x \leq 1$ ;

в)  $f(X) = 3x^4 + (x-1)^2$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ;

г)  $f(X) = 4x \sin x$ ,  $-1 \leq x \leq 3,14$ ;

д)  $f(X) = 2(x-3)^2 + e^{0,5x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 100$ .

Порівняти результуючі інтервали пошуку, отримані за допомогою:

а) методу ділення інтервалу на чотири частини;

б) методу золотого перерізу.

Який з методів виявився більш ефективним? Чому?

**Завдання для самостійної роботи**

Мінімізувати  $f(x) = x^2 - x$  за допомогою методу золотого перерізу в інтервалі

$0 \leq x \leq 1$ . Виконати число обчислень функції, достатнє, щоб отримати  $|\Delta x_k| < 10^{-3}$ .

Побудувати графік залежності  $[f(x_{k+1}) - f(x_k)]$  від послідовності номерів  $k$ .

**Контрольні запитання**

Вказати необхідні та достатні умови мінімуму функції однієї змінної.

Метод пошуку з використанням чисел Фібоначчі

Для організації оптимального пошуку екстремуму можна використовувати ряд чисел Фібоначчі, властивості якого описуються рекурентним співвідношенням

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad (5.6)$$

де  $F_0 = F_1 = 1$ .

Для оцінки точності визначення екстремуму при заданому числі розрахунків  $s$  значень функції  $f(x)$ , які визначаються на інтервалі  $[a, b]$ , використовують формулу

$$\Delta = \frac{b-a}{F_s}, \quad (5.7)$$

де  $F_s$  -  $s$ -е число Фібоначчі.

Порядок виконання алгоритму пошуку мінімуму, який використовує числа Фібоначчі, складається з наступних етапів.

**Крок 1.** По заданій точності  $\Delta$ , з якою необхідно знайти положення екстремуму функції  $f(x)$  в інтервалі  $[a, b]$ , розрахувати допоміжне число

$$N = \frac{b-a}{\Delta} \quad (5.8)$$

Для отримання значення  $N$  знайти таке число Фібоначчі  $F_s$ , щоб виконувалась нерівність  $F_{s-1} < N < F_s$ .

**Крок 2.** Визначити крок пошуку за формулою

$$\Delta_m = \frac{b-a}{F_s}. \quad (5.9)$$

**Крок 3.** Розрахувати значення функції  $f(x)$  на початку інтервалу, тобто  $f(a)$ .

**Крок 4.** Знайти наступну точку, в якій обчислюється значення  $f(x)$ , за формулою

$$x^{(1)} = a + \Delta_m F_{s-2} \quad (5.10)$$

Якщо цей крок вийшов вдалим, тобто  $f(x^{(1)}) < f(a)$ , то наступна точка визначається за формулою

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta_m F_{s-3} \quad (5.11)$$

При  $f(x^{(1)}) > f(a)$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \Delta_m F_{s-3} \quad (5.12)$$

**Крок 5.** Наступні кроки виконуються з зменшуваною величиною кроку, яка для  $i$ -го кроку

$$\Delta x^{(i)} = \pm \Delta_m F_{s-i-2}.$$

Процес продовжується до тих пір, доки не будуть вичерпані всі числа Фібоначчі у зменшуваний послідовності:

$$F_{s-i-2} = F_{s-i} - F_{s-i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Показано, що алгоритм пошуку з використанням чисел Фібоначчі в границі при  $S \rightarrow \infty$ , тобто при пошукі з високою точністю, збігається з методом золотого перерізу [6],

так як відношення  $\frac{F_{s-1}}{F_s}$  прямує до значення  $1 - z$ , де  $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38$ .

**Завдання**

Знайти екстремальні точки наступних функцій методом пошуку, який використовує числа Фібоначчі:

$$a) f(x) = x^3 + x, \quad -2 \leq x \leq 2;$$

- б)  $f(X) = x^4 + x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ;  
 в)  $f(X) = 4x^4 - x^2 + 5$ ,  $0 < x < 2$ ;  
 г)  $f(X) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ;  
 д)  $f(X) = 6x^5 - 4x^3 + 10$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Завдання для самостійної роботи

У структурі капітальних вкладів на розвиток хімічного заводу важливе місце займають витрати на придбання і монтаж труб, а також витрати на встановлення насосного обладнання. Розглянемо проект трубопроводу довжиною  $L(m)$ , який повинен

забезпечувати подачу рідини зі швидкістю  $Q \left( \frac{m^3}{xv} \right)$ . Вибір найбільш економічного

діаметра труби  $D (m)$  здійснюється за мінімізації функції затрат на придбання труб, насосів та прокачування рідини. Відомо, що функція затрат в одиницю часу у випадку, коли трубопровід складається з труб, виготовлених з вуглецевої сталі, і центробіжного насосу з електродвигуном, може бути описана виразом

$$f(x) = 0,45L + 0,245LD^{1,5} + 325(hp)^{0,5} + 61,6(hp)^{0,925}102,$$

$$\text{де } hp = 4,4 * 10^{-8} \frac{LQ^3}{D^5} + 1,92 * 10^{-9} \frac{LQ^{2,68}}{D^{4,68}}.$$

Сформулювати відповідну задачу оптимізації з однією змінною для проектування трубопроводу довжиною 300 м, який повинен забезпечити подання рідини зі швидкістю  $0,1 \frac{m^3}{xv}$ . Діаметр труби повинен бути заключений в границях  $0,6 * 10^{-2} \dots 0,2m$ . Вирішити цю задачу за допомогою методу пошуку з використанням чисел Фібоначчі.

### Контрольні запитання

1. В чому суть алгоритму пошуку мінімуму, що використовує числа Фібоначчі?
2. Як обчислюється точність визначення екстремуму за допомогою методу пошуку, що використовує числа Фібоначчі.

## 5.1.2 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ.

В ряді випадків виходить більш ефективним, ніж методи виключення інтервалів, метод пошуку, який дозволяє враховувати відносні вимірювання значень функції. Основна його ідея пов'язана з можливістю апроксимації гладкої функції поліномом і послідовного використання апроксимуючого поліному для оцінки координати точки оптимуму. Необхідними умовами ефективної реалізації такого підходу є унімодальність та неперервність досліджуваної функції. Відповідно теоремі Вейєрштрасса про апроксимацію, кількість оцінок координати точки оптимуму, які отримуються за допомогою апроксимуючого поліному, можна підвищити двома способами: використанням поліному більш високого порядку і зменшенням інтервалу апроксимації. Другий спосіб являється переважним, оскільки побудова апроксимуючого поліному порядку вище третього стає складною процедурою, тоді як зменшення інтервалу в умовах, коли виконується припущення про унімодальність функції, особливої складності не являє. Методи оцінювання з використанням квадратичної апроксимації

Простіший варіант поліноміальної інтерполяції - квадратична апроксимація, основана на тому, що функція, яка приймає мінімальне значення у внутрішній точці інтервалу,

повинна бути по крайній мірі квадратичною.

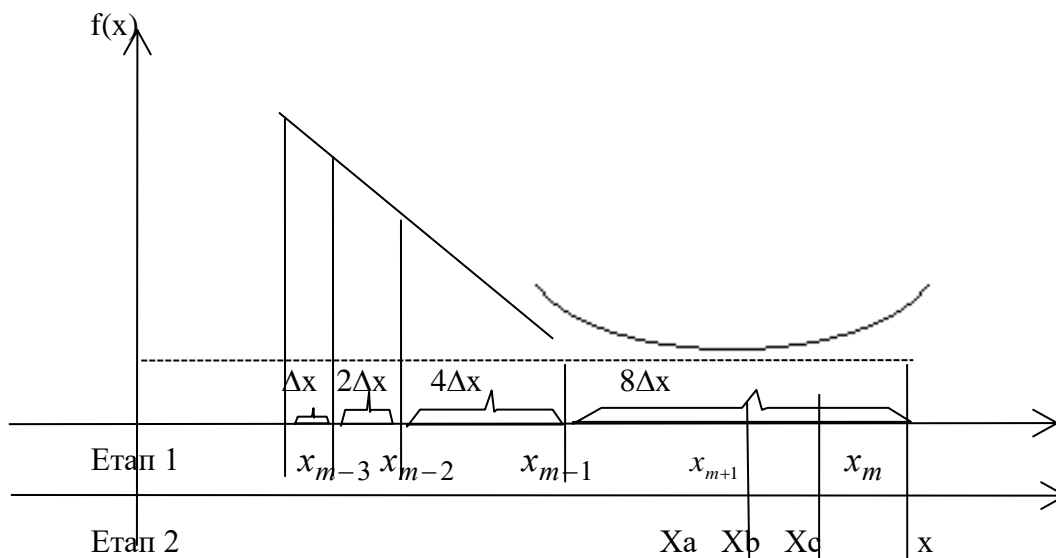
Коггінс запропонував використовувати алгоритм Девіса, Свенна та Кемпі (ДСК) [15] для визначення інтервалу, який складає точку мінімуму, щоб усі подальші обчислення проводились за алгоритмом Пауелла [15].

При одномірному пошуці за алгоритмом ДСК проводяться зростаючі за величиною кроки до тих пір доки не буде пройдений мінімум, а потім за алгоритмом Пауелла проводиться квадратична апроксимація і визначається точка  $x$ , відповідна мінімуму квадратичної функції. На рис. 5.2 зображена така процедура. Квадратична апроксимація продовжується до тих пір, доки з потрібною точністю не знаходиться мінімум  $f(x)$ .

**Крок 1.** Обчислити  $f(x)$  у початковій точці  $x_0$ . Якщо  $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$ , то перейти до кроку 2. Якщо  $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ , то припустити  $\Delta x = -\Delta x$  і перейти до кроку 2.

**Крок 2.** Обчислити  $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ .

**Крок 3.** Обчислити  $f(x_{k+1})$ .



**Рис. 5.2. Одномірна мінімізація методом Коггінса**

**Крок 4.** Якщо  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ , тоді удвоїти  $\Delta x$  та повернутися до кроку 2 при  $k = k + 1$ . Якщо  $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ , то  $x_{k+1}$  позначити  $x_m$ ,  $x_k - x_{m-1}$  і т.д., зменшити наполовину і повернутися до кроків 2 та 3.

**Крок 5.** З чотирьох рівновідстаючих значень  $x\{x_{m+1}, x_m, x_{m-1}, x_{m-2}\}$  вибрати або  $x_m$ , або  $x_{m-2}$  в залежності від того, яке з них знаходиться далі від  $x$ , відповідного найменшому значенню  $f(x)$ . Нехай  $x_a$ ,  $x_b$  та  $x_c$  - залишені три значення  $x$ , де  $x_b$  - центральна точка, а

$$x_a = x_b - \Delta x \text{ і } x_c = x_b + \Delta x.$$

**Крок 6.** Обчислити наближене значення  $x$  у точці мінімуму  $f(x)$  за формулою

$$\tilde{x}^* = -\frac{1}{2} \frac{\left[ (x_b)^2 - (x_c)^2 \right] f(x_a) + \left[ (x_c)^2 - (x_a)^2 \right] f(x_b) + \left[ (x_a)^2 - (x_b)^2 \right] f(x_c)}{(x_b - x_c) f(x_a) + (x_c - x_a) f(x_b) + (x_a - x_b) f(x_c)} \quad (5.14)$$

**Крок 7.** Якщо  $\tilde{X}^*$  і будь-яке із значень  $x \in \{x_a, x_b, x_c\}$ , відповідних мінімуму  $f(x)$ , відрізняється менш, ніж на передписану точність  $x$  або на точність відповідних значень функції  $f(x)$ , тоді закінчити пошук. У протилежному випадку обчислити  $f(\tilde{X}^*)$  та вилучити з множини  $\{x_a, x_b, x_c\}$  те значення  $x$ , яке відповідає найбільшому значенню  $f(x)$ , якщо, однак, при цьому не буде загублений інтервал, в якому знаходиться мінімум  $f(x)$ . У цьому випадку слід так вилучити  $x$ , щоб зберегти цей інтервал. Перейти до кроку 6.

Робота алгоритму продовжується до тих пір, доки не буде досягнена бажана точність, вказана у кроці 7.

### Завдання

Знайти точку мінімуму функції  $f(x) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$ . Задані початкова точка  $x = 2$  та довжина кроку  $\Delta = 0,5$ .

Порівняти отриманий результуючий інтервал пошуку з отриманим за допомогою методу золотого перерізу.

### Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати  $f(x) = x^2 - x$ , починаючи з точки  $x = 3$ , за допомогою методу Коггінса. Нехай  $|\Delta x_0| = 0,1$ . Виконати кількість обчислень функції, достатнє, щоб отримати  $|\Delta x_k| < 10^{-3}$ . Побудувати графік залежності  $[f(x_{k+1}) - f(x_k)]$  від послідовності номерів  $k$ . Визначити інтервал, в якому знаходиться мінімум, методом золотого перерізу.

### Контрольні запитання

1. Зформулювати умову, при виконанні якої метод пошуку, оснований на поліноміальній інтерполяції, може не привести до отримання вірного рішення.
2. Чи являються методи виключення інтервалів в цілому більш ефективними, ніж методи точкового оцінювання? Чому?

### Порівняння методів одномірного пошуку

За допомогою теоретичних висновків показано, що такі методи точкового оцінювання, як метод Коггінса або метод пошуку з використанням кубічної апроксимації, суттєво ефективніше методів виключення інтервалів, серед яких виділяється метод золотого перерізу. У випадку, коли інтервали збігу порівняні між собою, метод оснований на квадратичній апроксимації, збігається швидше, ніж будь-який з методів виключення інтервалів.

Результати експериментальних досліджень довели [13], що якщо необхідно отримати рішення з високим ступенем швидкості, тоді кращими виявляються методи пошуку на основі поліноміальної апроксимації. З другого боку, доведено, що при дослідженні мультимодальних (швидко-змінних) функцій метод Коггінса збігається повільніше, ніж метод виключення інтервалів.

Для оцінки ефективності методів використовувались три характеристики: час, витрачений на отримання рішення, точність рішень та чутливість до зміни параметру збігу.

## 5.2 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

### 5.2.1 МЕТОД СКАНУВАННЯ

Метод сканування полягає у послідовному перегляді значень функції мети у ряді точок, які належать області зміни незалежних змінних і знаходження серед них мінімального (максимального) значення функції мети [6]. Точність методу визначається тим, наскільки щільно розташовуються обрані точки у припустимій області зміни незалежних змінних.

Переваги методу - при використанні щільного розташування досліджуваних точок гарантується відшук оптимуму, а також незалежність пошуку від вигляду оптимізованої функції.

Недолік методу - обчислення значень цільової функції для великої кількості точок.

Найбільш простий алгоритм пошуку оптимуму методом сканування, який називається пошуком на сітці змінних, полягає у приростах, які дають у відповідному порядку по кожній з незалежних змінних і забезпечуючих заповнення всієї області зміни рівномірною і достатньо щільною сіткою (рис. 5.3).

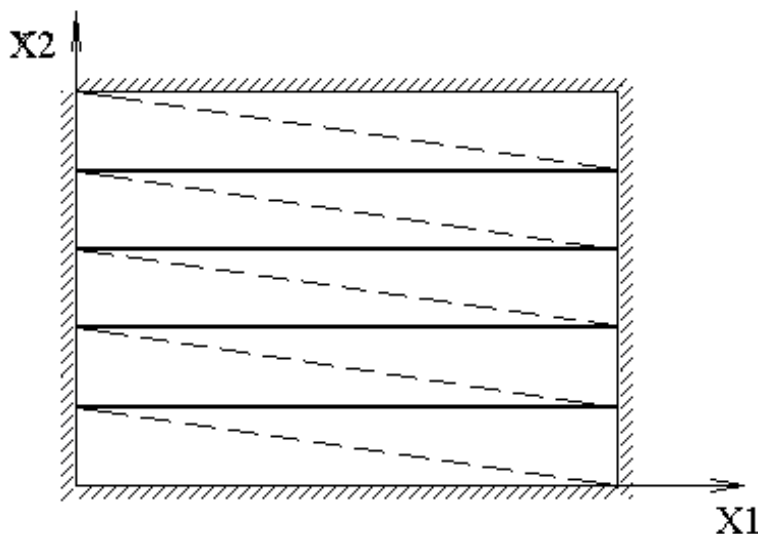


Рис. 5.3. Пошук оптимуму для випадку двох змінних

Додаткові обмеження на незалежні змінні не ускладнюють процедуру використання методу, так як у цьому випадку точки, які не задовільняють заданим умовам, просто вилучаються з розгляду і значення функції мети не обчислюються.

Для оцінки обчислювальних витрат методом сканування визначають кількість обчислень функції мети при умові, що точність визначення положення оптимуму дорівнює  $\Delta$ :

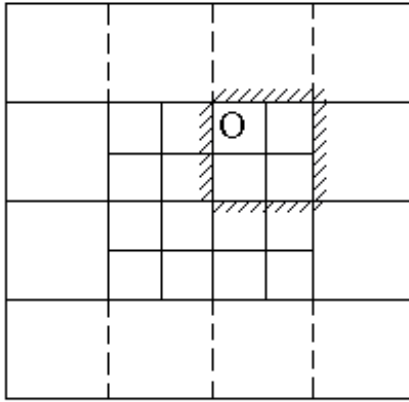
$$S = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^n, \quad (5.15)$$

де  $n$  - кількість незалежних змінних.

Для скорочення об'єму обчислень застосовують різні модифікації методу сканування, наприклад метод пошуку з змінним кроком сканування. Початкова величина кроку обирається достатньо великою, по можливості такою, що перевищує точність визначення положення оптимуму. Виконується грубий пошук, який локалізує область знаходження глобального оптимуму. Коли область визначена, проводиться пошук з меншим кроком. Необхідний об'єм обчислень значень цільової функції скорочується:

$$S = k^{-rn} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^n + r(2k)^n, \quad (5.16)$$

де  $r$  - число етапів уточнення пошуку, на яких крок пошуку зменшується у  $k$  разів.  
На рис. 5.4 показаний пошук з змінним кроком для функції двох змінних.



**Рис. 5.4. Пошук методом сканування з змінним кроком: хрестиком позначене значення оптимуму, знайдене у наслідок грубого пошуку, кружком - справжнє положення оптимуму.**

Порядок виконання пошуку процедури мінімуму функції  $f(x)$  методом сканування зі змінним кроком складається з наступних етапів.

**Крок 1.** Обчислити крок сканування по кожній змінній

$$H(z) = \frac{(B(z) - A(z))}{2K(z)} \quad (5.17)$$

і початковий крок сканування по першій змінній

$$HO = \frac{(B(1) - A(1))}{L}, \quad (5.18)$$

де  $A, B$  - ліва та права межі вихідної області;  $k$  - кратність дроблення по кожній змінній;  $L$  - кратність дроблення по першій змінній.

**Крок 2.** Для ряду значень першої змінної, які відстають один від одного на величину кроку  $H$ ,

$$X(1) = A(1) + H(1)Z(1) \quad (5.19)$$

і при фіксованих значеннях інших змінних обчислити значення функції мети  $f$ . Якщо  $\left[ f(x_{k+1}^{(i)}) < f(x_k^{(i)}) \right]$ , то переприсвоїти  $y(z) = x(z)$ ,  $f_1 = f$ . Знайти мінімальне значення функції мети  $f_1$ .

**Крок 3.** При першому значенні другої змінної, яке відстає на величину кроку від попереднього значення,

$$X(2) = A(2) + H(2)Z(2) \quad (5.20)$$

та фіксованих значеннях інших змінних перейти до кроку 2 і т.д.

**Крок 4.** Якщо весь діапазон зміни змінних досліджений, перевірити умову збігу за величиною кроку по першій змінній. Якщо  $\frac{(B(1) - A(1))}{K(1)} \leq HO$ , то пошук закінчується; у протилежному випадку локалізується область знаходження оптимуму

$$A(z) = Y(z) + H(z), \quad B(z) = Y(z) + H(z) \quad (5.21)$$

і крок пошуку зменшується кратно  $K$   $H(z) = \frac{H(z)}{K}$ , здійснюється повернення до кроку

1.

### Завдання

Дослідити функцію

$$f(x) = x^3 - 12x + 3 \text{ на інтервалі } -4 \leq x \leq 4.$$

Знайти локальний мінімум і глобальний мінімум в заданному інтервалі. Порівняти об'єми обчислень методів сканування з постійним та змінним кроком.

Завдання для самостійної роботи

Знайти екстремальні точки наступних функцій:

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 5.$$

### Контрольні запитання

1. Нехай дана точка задовільняє достатнім умовам існування локального мінімуму. Як встановити, чи являється цей мінімум глобальним?
2. Модифікації методу сканування.

## 5.2.2 МЕТОД ГАУСА-ЗЕЙДЕЛЯ

Метод почергової зміни змінних, який називається також методом Гауса-Зейделя заключається в тому, що почергово змінюються всі незалежні змінні так, щоб кожна з них досягала найменше (найбільше) значення цільової функції. Черговість варіювання незалежних змінних встановлюється довільно і звичайно не змінюється в процесі пошуку. Кожна уточнююча змінна варіюється до тих пір поки в данному осьовому напрямку не буде знайдено мінімум, після чого починається процес крокового пошуку по наступному осьовому напрямку. Стратегія пошуку мінімуму по кожній змінній при цьому може бути будь-якою. Зокрема можна використовувати один із описаних вище методів пошуку оптимуму функції однієї змінної.

Відзначимо, що для двох незалежних змінних метод почергового змінення змінних та метод релаксації (градієнтний метод пошуку оптимуму) співпадають. Метод Гауса-Зейделя приводить до оптимуму більш довгим шляхом. Однак загальний об'єм обчислень порівняно з методом релаксації в данному випадку може стати меншим, так як при переході до уточнення наступної змінної похідні цільової функції не обчислюються. До недоліків методу Гауса-Зейделя відноситься труднощі пошуку при наявності обмежень або особливостей цільової функції.

Порядок виконання пошукової процедури мінімуму функції  $f(x)$  методом Гауса-Зейделя складається із наступних етапів:

**Крок 1.** Обчислити  $f(x)$  при початкових координатах змінних.

**Крок 2.** При зміні однієї змінної, якщо  $f(X_0^{(i)} + \Delta X^{(i)}) \leq f(X_0^{(i)})$ , то перейти до кроку 3; якщо  $f(X_0^{(i)} + \Delta X^{(i)}) > f(X_0^{(i)})$ , то прийняти  $\Delta X^{(i)} = -\Delta X^{(i)}$  і перейти до кроку 3.

**Крок 3.** Обчислити  $X_{k+1}^{(i)} = X_k^{(i)} + \Delta X^{(i)}$ .

**Крок 4.** Обчислити  $f(X_{k+1}^{(i)})$ .



**Крок 5.** Якщо  $f(X_{k+1}^{(i)}) < f(X_0^{(i)})$ , то переприсвоїти  $f(X_0^{(i)}) = f(X_{k+1}^{(i)})$  і повернутися до кроку 2. Якщо  $f(X_{k+1}^{(i)}) > f(X_0^{(i)})$ , то перевіряється умова збігу метода по величині кроку.

При виконанні, коли величина кроку  $H_k$  стане менше заданої точності, пошук закінчується; в протилежному випадку величина кроку пошуку зменшується кратно  $K$ , проходить повернення до кроку 2.

#### Завдання

1. Використовуючи метод Гауса-Зейделя знайти мінімум функції

а)  $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 2(x_2 - 5)^2$ ,  $X^0 = [1 \ 2]$ ;

б)  $f(x_1, x_2) = 3(x_1 + 1)^2 + 2(x_2 - 5)^2$ ,  $X^0 = [0 \ 0]$ ;

в)  $f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 2)^2$ ,  $X^0 = [3 \ 4]$ ;

2. Використовуючи метод Гауса-Зейделя, знайти максимум функції

а)  $f(x_1, x_2) = 2 + 2x_1 + x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$ ,  $X^0 = [3 \ 3]$ ;

б)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1$ ,  $X^0 = [1 \ 2]$ ;

в)  $f(x_1, x_2) = 2 + 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$ ,  $X^0 = [1 \ 2]$ ;

#### Завдання для самостійної роботи

Знайти мінімум функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + 3(x_2 - 3)^2$$

за допомогою метода Гауса-Зейделя, використовуючи пошук мінімуму по кожній змінній методом золотого перерізу. В якості початкової точки вибрана точка  $X^0 = [2, 1]$ .

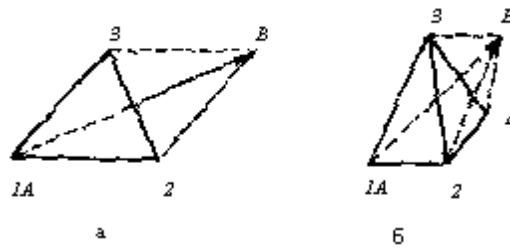
#### Контрольні запитання

1. Область застосування методу Гауса-Зейделя.
2. Порівняти методи Гауса-Зейделя та релаксації.

### 5.2.3 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Спробою уникнути необхідності обчислення похідних для визначення напрямку найшвидшого просування до оптимуму і в той же час зберегти можливість достатньо швидкого руху до нього являється алгоритм симплексного методу [13].

Процедура симплексного пошуку Спендлі, Хекста та Хімсворта базується на тому, що експериментальним зразком, який складається з найменшої кількості точок являється регулярний симплекс. Регулярний симплекс в  $N$  - мірному просторі являє собою багатогранник, створений  $N+1$  рівновіддаленими одна від одної точками-вершинами. Наприклад, у випадку двох змінних симплексом являється рівносторонній трикутник, в трьохмірному просторі-тетраedr (рис.5.5)



**Рис.5.5. Регулярні симплекси для випадку двох (а) та трьох (б) незалежних змінних: вершина 1 означає найбільше значення  $f(x)$ , стрілка вказує найшвидше покращення.**

Із аналітичної геометрії відомо, що координати вершин регулярного симплексу визначаються матрицею  $D$ , в якій стовпці являють собою вершини, пронумеровані від 1 до  $N+1$ , а рядки -координати (і приймає значення від 1 до  $N$ ):

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_2 \\ 0 & d_2 & d_1 & \dots & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_2 & d_2 & \dots & d_1 \end{bmatrix} - \text{матриця}, \quad (5.22)$$

$$\text{де } d_1 = \frac{t}{N\sqrt{2}}(\sqrt{N+1} + N - 1); \quad d_2 = \frac{t}{N\sqrt{2}}(\sqrt{N+1} - 1);$$

$t$  - відстань між вершинами.

Наприклад, для  $N=2$  та  $t=1$  трикутник на рис.5.5 має наступні координати:

Вершина	$X_{1,i}$	$X_{2,i}$
1	0	0
2	0,965	0,259
3	0,259	0,965

Цільову функцію можна обчислити в кожній з вершин симплексу; з вершини, де цільова функція максимальна (точка А на рис.5.5), проводять проектуючу пряму через центр тяжіння симплексу. Потім точку А виключають і будують новий симплекс, називаємий відбитим, з залишившихся попередніх точок та однієї нової точки В, розташованої на проектуючій прямій на належній відстані від центру тяжіння. Якщо функція зменшується достатньо плавно, ітерації продовжують до тих пір, поки або не буде накрыта точка мінімуму (рис.5.6), або почнеться циклічний рух по двох та більше симплексах.



### Рис.5.6. Послідовність регулярних симплексів отриманих при мінімізації цільової функції у двумірному просторі

В таких ситуаціях можна скористатися наступними правилами:

**Правило 1.** Накриття точки мінімуму.

Якщо вершина, якій відповідає найбільше значення цільової функції, побудована на попередній ітерації, то замість неї береться вершина, якій відповідає наступне по величині значення цільової функції.

**Правило 2.** Циклічний рух.

Якщо деяка вершина симплексу не виключається протягом більш ніж  $M$  ітерацій, то необхідно зменшити розміри симплексу за допомогою коефіцієнту редукції і побудувати новий симплекс, вибравши в якості базової точку, якій відповідає мінімальне значення цільової функції. Спендлі, Хекст і Хімсворт запропонували обчислити значення  $M$  за формулою:

$$M = 1.65 N + 0.05 N^2$$

де  $N$  - розмірність задачі, а  $M$  округлюється до найближчого цілого числа.

**Правило 3.** Критерій закінчення пошуку.

Пошук завершується, коли або розмір симплексу, або різниці між значеннями функцій у вершинах стають достатньо малими.

Відображення відносно центру тяжіння являє неважку процедуру. Нехай  $X^{(j)}$  - точка, підлягаюча відображенню. Центр тяжіння  $N$  точок розташований в точці

$$X_c = \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N X^{(i)}. \quad (5.24)$$

Всі точки прямої, проходящої через точки  $X^{(j)}$  та  $X_c$ , задаються формулою

$$X = X^{(j)} + \lambda (X_c - X^{(j)}). \quad (5.25)$$

При  $\lambda=0$  отримуємо вихідну точку  $X^{(j)}$ , тоді як значення  $\lambda=1$  відповідає центру тяжіння  $X_c$ . Для того, щоб побудований симплекс володів властивістю регулярності, відображення повинно бути симетричним. Відповідно, нова вершина отримується при  $\lambda=2$ . Таким чином

$$X_{\text{нова}}^{(j)} = 2 X_c - X_{\text{попер}}^{(j)}. \quad (5.26)$$

Схема алгоритму пошуку по симплексу показана на рис.5.7.

Алгоритм володіє рядом суттєвих недоліків:

- 1) невиключено виникнення труднощів, зв'язаних з масштабуванням, оскільки всі координати вершин симплексу залежать від одного і того ж масштабного множника  $t$ ;
- 2) алгоритм працює дуже повільно, так як отримана на попередніх ітераціях інформація не використовується для прискорення пошуку;
- 3) не існує простого способу розширення симплексу, непотребуючого перерахунку значень цільової функції у всіх точках зразка.

#### Завдання

1. Визначити регулярну симплексну фігуру в трьохмірному просторі таку, що відстань між вершинами дорівнює 0.2 і одна вершина знаходиться в точці  $(-1.2, -2)$ .

2. Використовуючи симплексну фігуру, побудовану в п.1, провести вісім циклів відкидання вершин та отримати нові при пошуку мінімуму цільової функції

$$f(X) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2.$$

3. Трьохмірний оптимальний симплекс пошук дав наступні проміжні результати

Вектор	Значення цільової функції
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	4
$\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$	7
$\begin{bmatrix} -1/3 & -4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$	10
$\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$	5

Яка наступна точка підлягає обчисленню в процесі пошуку?

Яка точка пропущена?

Що буде центром тяжіння нового симплексу?

### Завдання для самостійної роботи

Число змінних дорівнює 2. Обмеження відсутні. Потрібно мінімізувати

$f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$  за допомогою симплекс методу. В якості чергової точки вибирається точка  $X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1 \end{bmatrix}^T$ , в якій  $f(X^{(0)}) = 24.20$ .

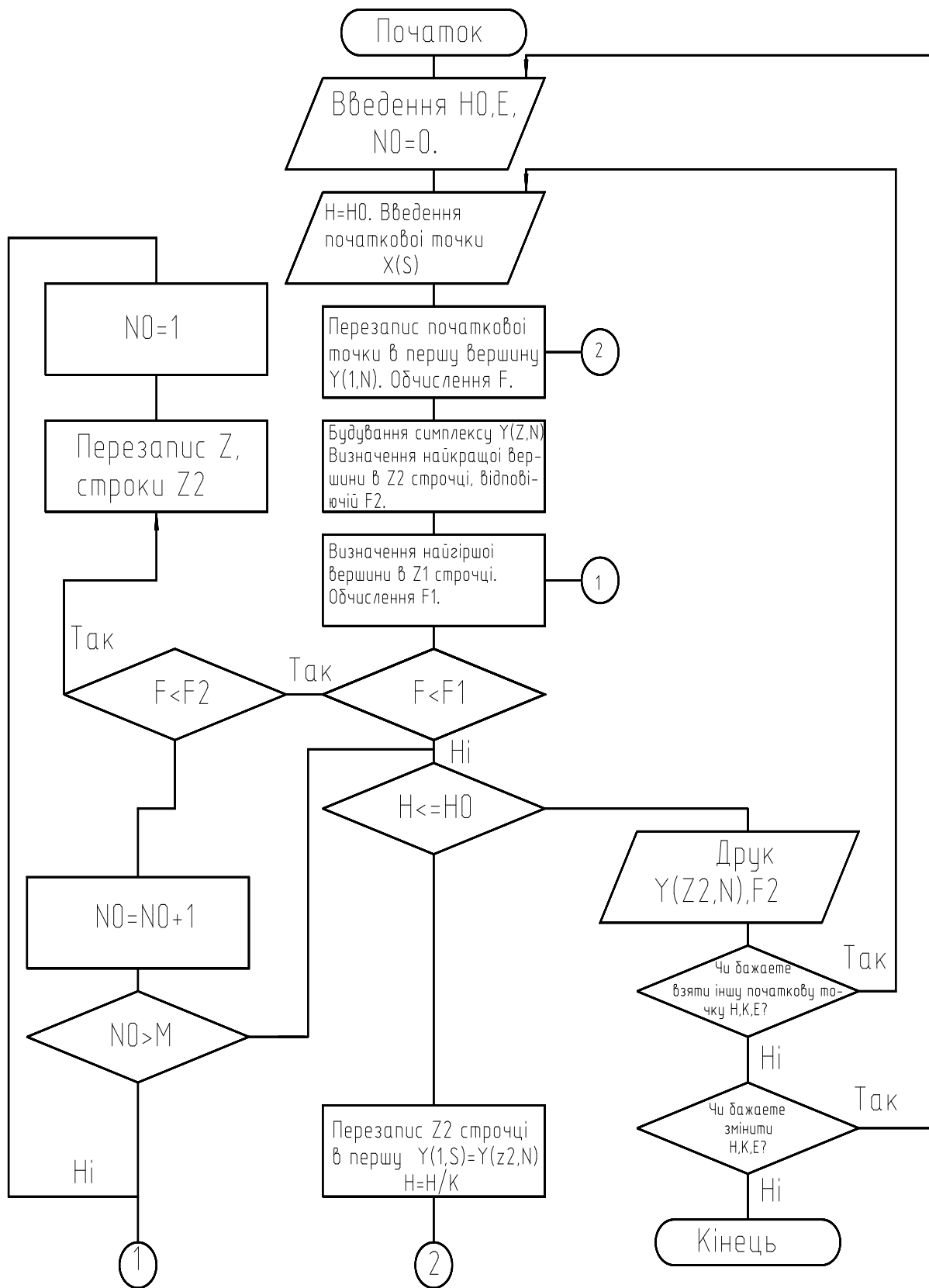
### Контрольні запитання

1. В чому заключається властивість спаду цільової функції при переході від ітерації до ітерації? Чому виконання цієї властивості необхідне для побудови ефективного алгоритму?

2. Чому квадратичні функції використовуються як основа для побудови алгоритмів нелінійної оптимізації?

3. Пояснити поняття квадратичного збігу.

4. Переваги та недоліки симплексного методу.



**Рис.5.7** Схема пошуку по симплексу

## 5.2.4 ПОШУК ПО ДЕФОРМОВАНОМУ БАГАТОГРАННИКУ

Практичні труднощі, які зустрічаються при використанні регулярних симплексів, а саме відсутність прискорення пошуку на скривлених байраках і хребтах, привели до необхідності деяких покращених методів. Нелдер і Мід [15] запропонували метод пошуку більш складний, порівняно з методом пошуку Спендлі, Хекста і Хімсворта, але став ефективнішим і легко здійснюваним на ЕОМ. В зв'язку з тим, що симплекс може змінювати свою форму і таким чином вже не буде залишатись симплексом, метод пошуку названо по деформованому багатограннику.

Алгоритм пошуку мінімуму за допомогою методу Нелдера і Міда може бути описаним наступним чином.

Нехай вектор  $X_i^{(k)} = [X_{i1}^{(k)}, \dots, X_{ij}^{(k)}, \dots, X_{in}^{(k)}]^T$ ,  $i = 1, \dots, n+1$

є  $i$ -ою вершиною в  $n$ -мірному просторі на  $k$ -ому етапі пошуку ( $k=0,1,\dots$ ) та нехай значення цільової функції в  $X_i^{(k)}$  дорівнює  $f(X_i^{(k)})$ . Крім того, відмітимо ті вектори  $X$  багатогранника, котрі дають максимальне та мінімальне значення  $f(X)$ . Визначимо

$$f(X_h^{(k)}) = \max \{f(X_l^{(k)}), \dots, f(X_{n+1}^{(k)})\}, \quad (5.27)$$

де  $X_l^{(k)} = X_i^{(k)}$ , та

$$f(X_l^{(k)}) = \min \{f(X_l^{(k)}), \dots, f(X_{n+1}^{(k)})\}, \quad (5.28)$$

Оскільки багатогранник в  $n$ -мірному просторі складається з  $n+1$  вершин  $X_1, \dots, X_{n+1}$ , нехай  $X_{n+2}$  буде центром тяжіння всіх вершин, виключаючи  $X_h$ .

Координати центру тяжіння визначаються формулою

$$X_{n+2}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n+1} X_{ij}^{(k)} \right) - X_{hj}^{(k)} \right], \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.29)$$

де  $j$ - координатний напрямок.

Початковий багатогранник звичайно вибирається у вигляді регулярного симплексу з точкою 1 в якості початку координат, початок координат можливо помістити в центр тяжіння. Процедура відшукування вершин в  $n$ -мірному просторі, в якій  $f(X)$  має краще значення, складається з наступних операцій.

1. Відображення- проектування  $X_h^{(k)}$  через центр тяжіння в відповідності співвідношенню

$$X_{n+3}^{(k)} = X_{n+2}^{(k)} + \alpha (X_{n+2}^{(k)} - X_h^{(k)}), \quad (5.30)$$

де  $\alpha > 0$ - коефіцієнт відображення;  $X_{n+2}^{(k)}$  - центр тяжіння, обчислений за формулою (5.29);  $X_n^{(k)}$  - вершина, в якій функція  $f(X)$  приймає найбільше з  $n+1$  її значень на  $k$ -ому етапі.

2. Розтяг, який заключається в наступному: якщо  $f(X_{n+3}^{(k)}) \leq f(X_i^{(k)})$ , то вектор  $(X_{n+3}^{(k)} - X_{n+2}^{(k)})$  розтягнеться у відповідності з співвідношенням

$$X_{n+4}^{(k)} = X_{n+2}^{(k)} + \gamma (X_{n+3}^{(k)} - X_{n+2}^{(k)}), \quad (5.31)$$

де  $\gamma > 1$ - коефіцієнт розтягу, якщо  $f(X_{n+4}^{(k)}) < f(X_l^{(k)})$ , то  $X_h^{(k)}$  замінюється на  $X_{n+4}^{(k)}$  і процедура продовжується знову з операції 1 при  $k=k+1$ . В протилежному випадку  $X_h^{(k)}$  замінюється на  $X_{n+3}^{(k)}$  і також здійснюється перехід до операції 1 при  $k=k+1$ .

3. Стискання. Якщо  $f(X_{n+3}^{(k)}) > f(X_i^{(k)})$ , для всіх  $i \neq h$ , то вектор  $(X_h^{(k)} - X_{n+2}^{(k)})$  стискається у відповідності з формулою

$$X_{n+5}^{(k)} = X_{n+2}^{(k)} + \beta(X_h^{(k)} - X_{n+2}^{(k)}), \quad (5.32)$$

де  $0 < \beta < 1$  - коефіцієнт стискання. Потім  $X_h^{(k)}$  замінюємо на  $X_{n+5}^{(k)}$  і повертаємося до операції 1 для продовження пошуку  $(k+1)$ -му кроці.

4. Редукція. Якщо  $f(X_{n+3}^{(k)}) > f(X_h^{(k)})$ , то всі вектори  $(X_i^{(k)} - X_l^{(k)})$   $i=1, \dots, n+1$ , зменьшуються в 2 рази з відліком від  $X_l^{(k)}$  у відповідності з формулою

$$X_i^{(k)} = X_l^{(k)} + 0.5(X_i^{(k)} - X_l^{(k)}), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (5.33)$$

Потім повертаються до операції 1 для продовження пошуку на  $(n+1)$ -му кроці.

Критерій закінчення пошуку, використаний Нелдером і Мідом, складається з перевірки умови

$$\frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} [f(X_i^{(k)}) - f(X_{n+2}^{(k)})]^2 \right\}^{1/2} \leq \varepsilon, \quad (5.34)$$

де  $\varepsilon$  - довільне мале число;  $f(X_{n+2}^{(k)})$  - значення цільової функції в центрі тяжіння  $X_{n+2}^{(k)}$ .

На рис. 5.8. зображена схема пошуку методом деформованого багатограннику. Деформований багатогранник в протилежність жорсткому симплексу адаптується до топографії цільової функції, витягуючись вздовж довгих нахилених площин, міняючи напрямки в зігнутих впадинах і стискаючись в околиці мінімуму. Коефіцієнт відображення  $\alpha$  використовується для проектування вершин з найбільшим значенням  $f(x)$  через центр тяжіння деформованого багатограннику. Коефіцієнт  $\gamma$  вводиться для розтягу вектору пошуку у випадку, коли відображення дає вершину із значенням  $f(x)$ , меншим ніж найменше значення  $f(x)$ , отримане до відображення. Коефіцієнт стискання  $\beta$  використовується для зменшення вектора, якщо операція відображення не привела до вершини із значенням  $f(x)$ , меншим ніж друге по величині (після найбільшого) значення  $f(x)$ , отримане до відображення. Таким чином, за допомогою операції розтягу або стискання розміри і форма деформованого багатогранника масштабується так, щоб вони задовільняли топологію розв'язаної задачі.

При оптимізації без обмежень Нелдер і Мід рекомендували в якості задовільних значень значення параметрів  $\alpha=1$ ,  $\beta=0.5$  та  $\gamma=2$ .

### Завдання

1. Методом Нелдера і Міда знайти оптимум для функції:

а)  $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2$ , починаючи з базисної точки  $X^{(0)} = [2 \quad 1]^T$ ;

б)  $f(X) = 4x_1^2 + x_2^2 - 40x_1 - 12x_2 + 136$ ,  $X^{(0)} = [4 \quad 8]^T$ ;

в)  $f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$ ,  $X^{(0)} = [3 \quad -10 \quad 1]^T$ ;

г)  $f(X) = (x_1x_2)^2(1-x_1)^2[1-x_1-x_2(1-x_1)^5]^2$ ,  $X^{(0)} = [-1.2 \quad 1]^T$ .

2. Шляхом підбору значень параметрів  $\beta$  і  $\gamma$  в алгоритмі Нелдера і Міда знайти їх оптимальні значення для функції.



$$\text{а) } f(X) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{б) } f(X) = (x_1^2 + 12x_2 + 1)^2 + (49x_1^2 + 49x_2^2 + 84x_1 + 2324x_2 - 681)^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{в) } f(X) = 100 \left[ x_{33} - \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \right]^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

3. Знайти мінімум функції Розенброка  $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ , починаючи

з базової точки  $X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 \end{bmatrix}^T$ , методом Нелдера і Міда. Побудувати траєкторію і вказати значення цільової функції  $f(x)$  в залежності від числа ітерацій.

4. Знайти координати точок мінімуму функції Хіммельблау

$$f(X) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

з точністю до трьох десятичних знаків, при пошуку скористатися наступними початковими точками:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}^T, \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad X^{(4)} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \end{bmatrix}^T,$$

$$X^{(5)} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

### Завдання для самостійної роботи

Знайти максимум функції

$$f(X) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

методом Нелдера і Міда.

### Контрольні запитання

1. Що буде вихідним симплексом у випадку пошуку Нелдера і Міда для функції  $f(X) = 2x_1^2 + x_2^4$ ? Яка із вершин виключається першою? другою?

2. Як впливають на збіг алгоритму значення коефіцієнтів  $\alpha, \beta, \gamma$ :

а) якщо  $\alpha > 1$  або  $\alpha < 1$ ; б) якщо  $0 < \beta < 0.4$  або  $\beta > 0.6$ ?

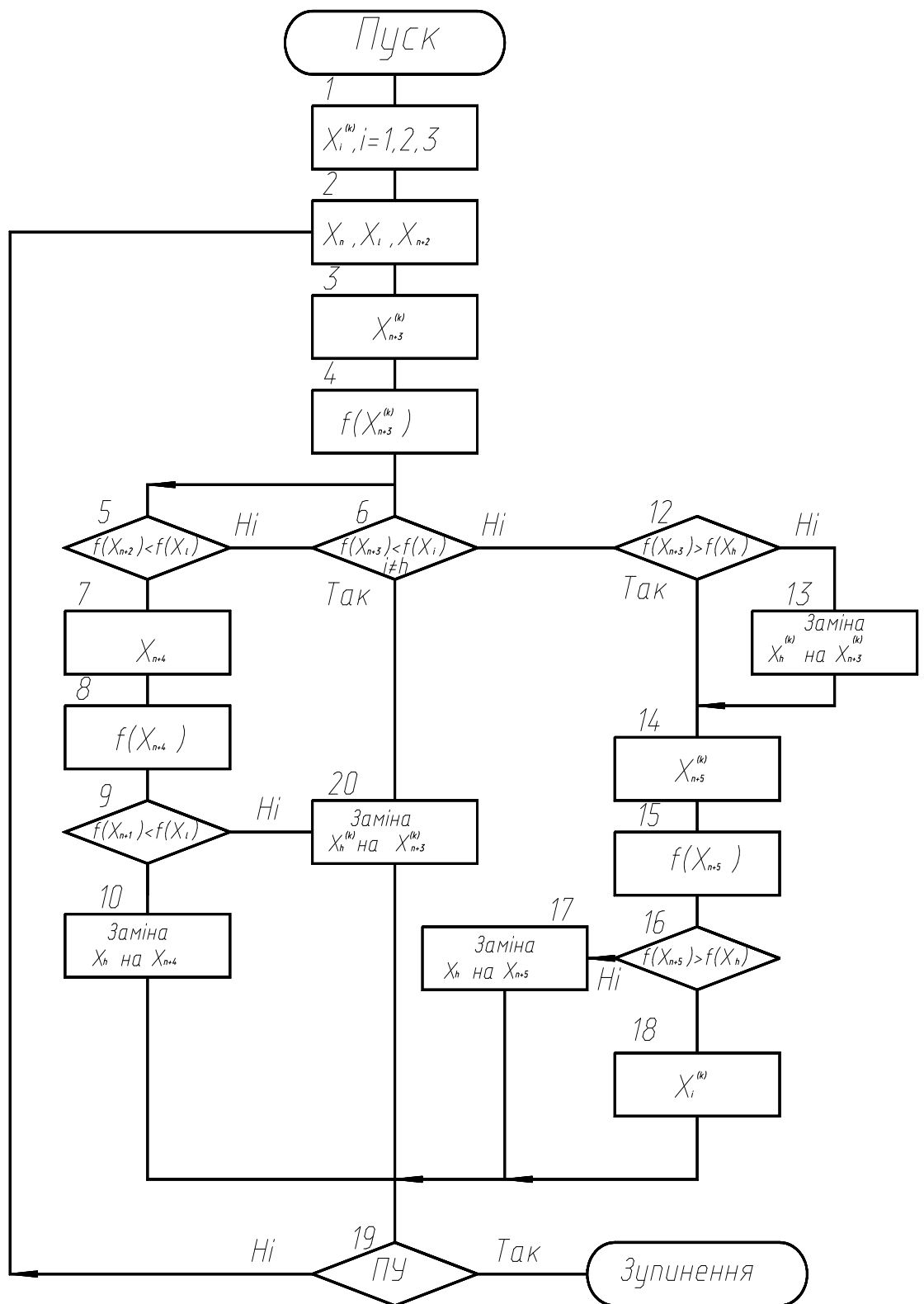


Рис.5.8. Схема пошуку мінімуму методом Нелдера і Міда.

## 5.2.5 МЕТОД ПАУЕЛЛА

Одним з найбільш ефективних з алгоритмів прямого пошуку є метод, розроблений Пауеллом . Як і попередні методи , метод Пауелла не потребує знаходження похідних оптимізованої функції . У випадку неунімодалної функції , пошук слід проводити з кількох вихідних точок.

У цьому методі мінімум де-якої квадратичної функції визначається при умові додатної визначеності матриці Гессе  $H(X) > 0$  шляхом проведення послідовних одномірних пошуків , починаючи з точки  $X_0^{(k)}$  , уздовж системи одержаних спряжених напрямків .

Нагадаємо, що в загальному випадку система  $N$  лінійно незалежних напрямків пошуку  $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots, M^{(n-1)}$ ; називається спряженою по відношенню до де-якої додатньо визначеної (квадратичної) матриці  $Q$  , якщо

$$(M^{(i)})^T \cdot Q \cdot M^{(j)} = 0, \quad 0 \leq i \neq j \leq n-1.$$

Сутність алгоритму Пауелла полягає в тому , що якщо на данім етапі пошуку визначається мінімум квадратичної функції  $f(X)$  уздовж кожного з  $\rho$  спряжених напрямків ( $\rho < h$ ) і якщо потім у кожному з напрямків робиться де-який крок , то повне переміщення від початку до  $\rho$ -го кроку спряжене до усіх піднапрямків пошуку.

Перехід з точки  $X_0^{(k)}$  в точку  $X_m^{(k)}$  визначається за формулою

$$X_m^{(k)} = X_0^{(k)} + \sum_{i=0}^{m-1} S_i^{(k)} M_i^{(k)}, i = 1, \dots, m-1. \quad (5.35)$$

У точці  $X_0^{(0)}$  початкові напрямки  $M_1^{(0)}, \dots, M_n^{(0)}$  беруться паралельними координатним вісям. Перший крок робиться у напрямку  $M_n^{(0)}$ , тобто мінімізується  $f(X_0^{(0)} + S \cdot M_n^{(0)})$  за  $S$  (за допомогою одномірного пошуку ) для обчислення  $S_0^{(0)}$ . Потім вважається  $X_1^{(0)} = X_0^{(0)} + S_0^{(0)} M_n^{(0)}$ . Потім уздовж кожного з  $n$  напрямків  $M_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$ , в свою чергу мінімізується  $f(X_i^{(0)} + S M_i^{(0)})$ , визначаються відповідно  $S_i^{(0)}$  і послідовно обчислюються за формулою (5.35) нові значення  $X_i^{(0)}$ .

Для цільової функції  $f(X) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$  координатні вісі мають напрямки (рис.5.9)

$$M_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вони ортогональні , тобто  $(M_1^{(0)})^T \cdot (M_2^{(0)}) = 0$ , але не спряженні , так як  $(M_1^{(0)})^T H M_2^{(0)} = 4 \neq 0$ . Розміщення відповідних мінімумів  $f(X)$  показано в наступній таблиці.

Ітерація	$(M_i^{(0)})^T$	$S_i^{(0)}$	$(X_{i+1}^{(0)})^T$	$f(X_{i+1}^{(0)})$
0	[0 1]	-1	[2 1]	7
1	[1 0]	-1,75	[0,25 1]	0,875
2	[0 1]	-0,875	[0,25 0,125]	0,109

**Теорема** Якщо при початковій точці  $X^{(0)}$  пошуку в напрямку  $M$  мінімум квадратичної цільової функції  $f(X)$  знаходиться в де-якій точці  $X^{(a)}$  та якщо при початковій точці  $X^{(1)} \neq X^{(0)}$  пошуку у тому самому напрямку  $M$  мінімум  $f(X)$  знаходиться в точці  $X^{(b)}$ , то при  $f(X^{(b)}) < f(X^{(a)})$  напрямок  $(X^{(b)} - X^{(a)})$  спряжено з  $M$ .

Для квадратичної функції  $f(X) = a + X^T b + \frac{1}{2} X^T H X$ , де  $H$  - додатньо визначена

матриця, слідує, що для першого пошуку  $M^T \nabla f(X^{(a)}) = M^T (H X^{(a)} + b) = 0$

для другого пошуку  $M^T \nabla f(X^{(b)}) = M^T (H X^{(b)} + b) = 0$ .

Віднімаючи, отримуємо  $M^T H (X^{(b)} - X^{(a)}) = 0$ , отож,  $M$  та  $(X^{(b)} - X^{(a)})$  спряжені. З рис.5.9 видно, що  $(X_3^{(0)} - X_2^{(0)})^T H (X_3^{(0)} - X_1^{(0)}) = 0$ ,

де  $X_0^{(0)}$  відповідає точці  $X^{(0)}$  у формулюванні теореми, а люба точка на прямій  $(X_3^{(0)} - X_2^{(0)})$  відповідає точці  $X^{(1)}$ . Для прикладу рис.5.9

$$[(0,25 - 0,25)(0,125 - 1)] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0,25 - 2,0) \\ (0,125 - 1,0) \end{bmatrix} = 0.$$

Таким чином, визначені два спряжених напрямки, в котрих потрібно вести пошук.

Напрямок  $M_1^{(0)}$  повинен бути замінений на напрямок вектору  $(X_3^{(0)} - X_1^{(0)})$ , що представляє собою повне переміщення з першого мінімуму.

Напрямки пошуку на наступному етапі такі:

$$M_1^{(1)} = M_2^{(0)};$$

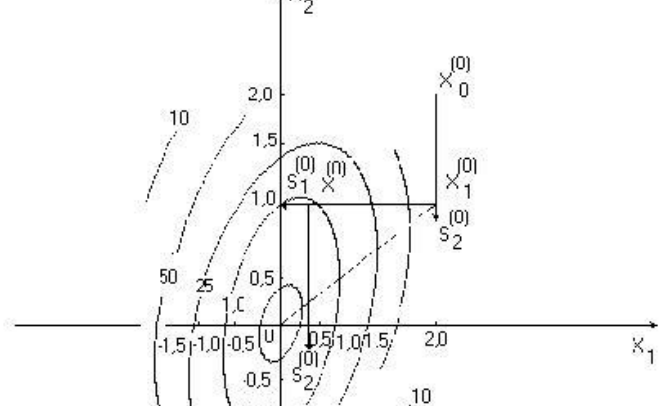
$$M_2^{(1)} = (X_3^{(0)} - X_1^{(0)}).$$

У загальному випадку на  $K$ -му етапі методу Пауелла використовується  $M$  лінійно незалежних напрямків пошуку; при цьому пошук починається в де-якій точці  $X_0^{(k)} = X_{n+1}^{(k-1)}$  та проводиться наступним чином.

**Крок 1** Починаючи з  $X_0^{(k)}$ , за допомогою якого-небудь одномірного пошуку визначається  $S_1^{(k)}$  так, щоб  $f(X_0^{(k)} + S_1 \cdot M_1^{(k)})$  приймала мінімальне значення та покладається  $X_1^{(k)} = X_0^{(k)} + S_1^{(k)} \cdot M_1^{(k)}$ . Починаючи з  $X_1^{(k)}$  визначається  $S_2^{(k)}$  так, щоб  $f(X_1^{(k)} + S_2^{(k)} \cdot M_2^{(k)})$ . Пошук продовжується послідовно в кожному напрямку, завжди починаючи з самої останньої точки послідовності, поки не будуть визначені усі  $S_i^{(k)}, i = 1, \dots, n$ ;

**Крок 2** Пауелл відмітив, що пошук, здійснюваний у відповідності з кроком 1, може привести до лінійно залежних напрямків пошуку. Напрямок повного переміщення на  $K$ -му етапі  $M^{(k)}$  повинно замінити попередній напрямок тільки в тому випадку, якщо вектор що замінить збільшує визначник матриці напрямків пошуку, оскільки тільки тоді новий набір напрямків буде більш ефективним. Після мінімізації  $f(X)$  в кожному з  $n$  напрямків, як на кроку 1, проводиться один допоміжний крок величиною  $(X_n^{(k)} - X_0^{(k)})$ , що відповідає повному переміщенню на  $K$ -етапі та що приводить у точку  $(2X_n^{(k)} - X_0^{(k)})$ .

**Крок 3** Проводиться перевірка, зменшується чи визначник матриці напрямків пошуку шляхом включення нового напрямку та відкидання старого. Напрямок пошуку, що відповідає максимальній зміні  $f(X)$   $\Delta^{(k)} = \max\{f(X_{i-1}^{(k)}) - f(X_i^{(k)})\}$ , позначили  $M_m^{(k)}$ . Покладемо  $f_1 = f(X_0^{(k)})$ ,  $f_2 = f(X_n^{(k)})$  та  $f_3 = f(2X_n^{(k)} - X_0^{(k)})$ , де



**Рис 5.9. Метод пошуку Пауелла**

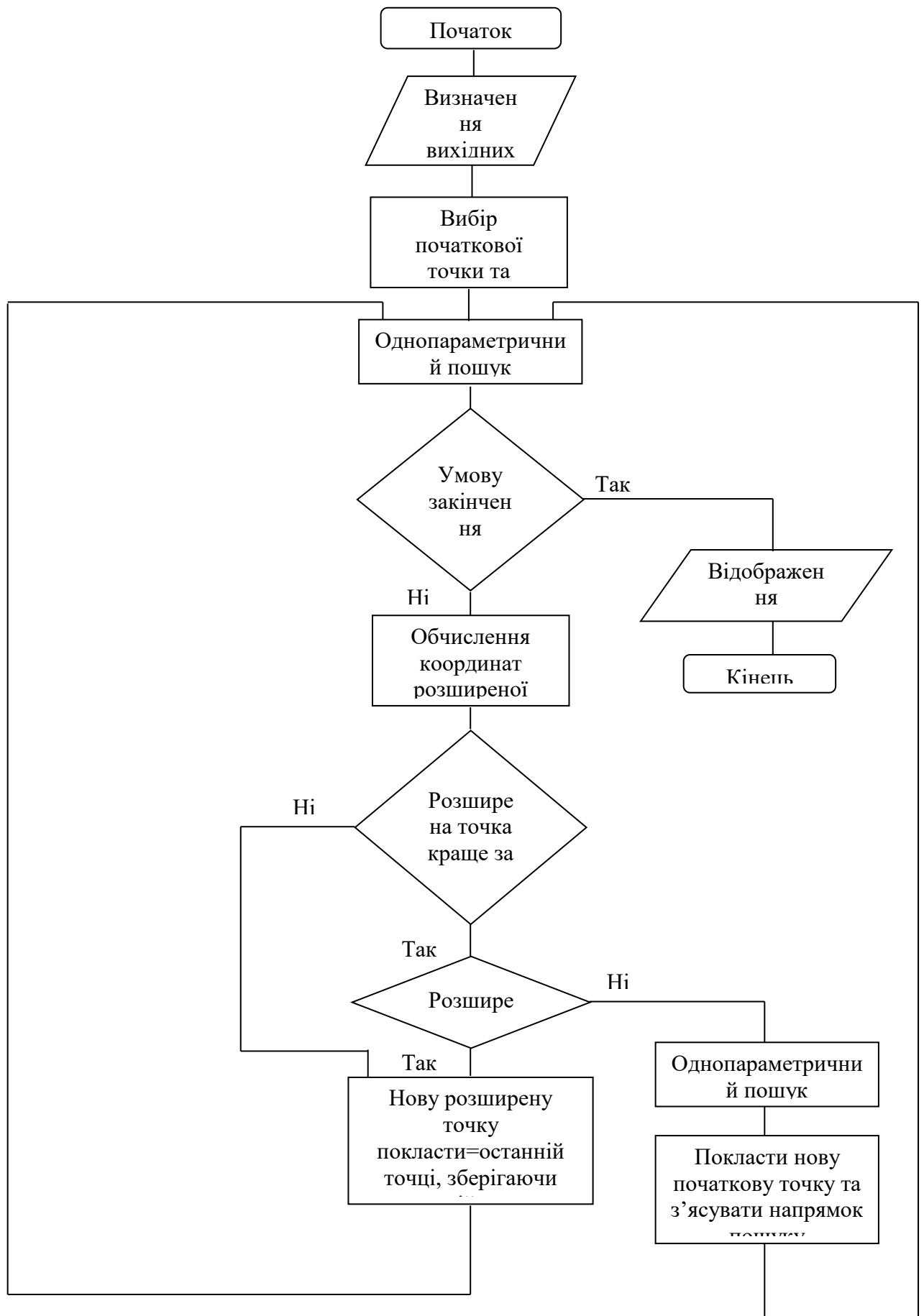


Рис. 5.10 Схема алгоритма Пауела

$X_0^{(k)} = X_n^{(k-1)}$  та  $X_n^{(k)} = X_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n S_i^{(k)} M_i^{(k)}$ . Якщо  $f_3 \geq f_1$  та (або)

$(f_1 - 2f_2 + f_3)(f_1 - f_2 - \Delta^{(k)})^2 \geq 0,5\Delta^{(k)}(f_1 - f_3)^2$ , то слід використовувати на (K+1)-м етапі ті ж напрямки  $M_1^{(k)}, \dots, M_n^{(k)}$ , що і на K-м етапі, та друкувати пошук з точки  $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$  (або з точки  $X_0^{(k+1)} = 2X_n^{(k)} - X_0^{(k)} = X_{n+1}^{(k)}$  в залежності від того, у якій точці  $X$  функція  $f(X)$  приймає найменше значення).

**Крок 4** Якщо текст не задовільний, то шукається мінімум  $f(X)$  у напрямку вектора  $M^{(k)}$ , проведеного з  $X_0^{(k)}$  у  $X_n^{(k)}$ ; точка цього мінімуму береться в якості початкової для наступного (K+1)-го етапу. Система напрямків, що використовується на (K+1)-м етапі, та ж, що і на K-м етапі за виключенням напрямку  $M_m^{(k)}$ , котрий замінюється на  $M^{(k)}$ .

Однак  $M^{(k)}$  поміщують в останній стовпець матриці напрямків, а не замість  $M_m^{(k)}$

$$[M_1^{(k+1)} M_2^{(k+1)} \dots M_n^{(k+1)}] = [M_1^{(k)} M_2^{(k)} \dots M_{m-1}^{(k)} M_{m+1}^{(k)} \dots M_n^{(k)} M^{(k)}]$$

**Крок 5** Критерій збіжності метода Пауелла. Зміна по кожній незалежній змінній повинна бути меншою, чим задана точність  $E_i, i = 1, \dots, n$  або  $\|X_n^{(k)} - X_0^{(k)}\| \leq 0,1E$ .

Показано, що процедура Пауелла буде збігатися до точки, в якій градієнт  $f(X)$  дорівнює нулю, якщо  $f(X)$  - строго опукла функція. Така точка являє собою локальний екстремум. На рис. 5.10 приведена схема алгоритма Пауелла.

Алгоритм пошуку Пауелла, являє собою таку послідовність операцій:

- 1) задаються координати початкової точки  $X_0^{(0)}$  та вихідні напрямки пошуку  $M_i^{(0)} (i = 1, 2, \dots, n)$ , паралельні координатним вісям;
- 2) здійснюється однопараметричний пошук в кожному напрямку, використовуючи квадратичну апроксимацію оптимізуючої функції;
- 3) потім визначаються наступні точки:
  - $X_n^{(k)}$  -остання точка однопараметричного пошуку;
  - $X_m^{(k)}$  - точка найбільшого покращання значення функції серед успішних однопараметричних пошуків;
  - $X_t^{(k)} = 2X_n^{(k)} - X_0^{(k)}$  -розширена точка ;
  - $X_0^{(k)}$  -вихідна точка ітерації,
- де  $k$  -номер ітерації, що зміниться при кожному новому напрямку пошуку;
- 4) якщо значення функції у розширеній точці  $X_t^{(k)}$  більш, ніж в вихідній точці  $X_0^{(k)}$ , остання точка  $X_n^{(k)}$  стає новою вихідною точкою та проводиться новий однопараметричний пошук в тому ж напрямку:

$$X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)},$$

$$M_i^{(k+1)} = M_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Якщо значення оптимізуючої функції у розширеній точці покращилось, виконується наступна перевірка:

$$\left[ f_0^{(k)} - 2f_n^{(k)} + f_t^{(k)} \right] \left[ f_0^{(k)} - f_n^{(k)} - \Delta \right]^2 \geq \frac{\Delta(f_0^{(k)} - f_t^{(k)})}{2}$$

де  $\Delta = |f_m^{(k)} - f_{m-1}^{(k)}|$ .

Дана умова визначає, чи не є функція відгуку у тій області “байраком”, тобто значення  $f_t^{(k)}$  краще, ніж  $f_0^{(k)}$  але в колишньому напрямку значення функції збільшується. Якщо умова виконується, попередній напрямок пошуку зберігається та новий однопараметричний пошук відновлюється, як згадано вище. Якщо умова не виконується, пошук здійснюється в новому напрямку  $\mu^{(k)}$ :

$\mu^{(k)} = X_n^{(k)} - X_0^{(k)}$  до тих пір, поки не буде знайдено найкраще значення функції.

Новий напрямок пошуку обирається наступним чином:

$$M_i^{(k+1)} = M_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$M_i^{(k+1)} = M_{i+1}^{(k)}, i = M, \dots, n-1;$$

$$M_n^{(k+1)} = \mu^{(k)};$$

### Приклад 5.1

Знайти точку мінімуму функції  $f(X) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2$ , за допомогою методу Пауелла. Якщо початкова точка  $X^{(0)} = [5 \ 2]^T$ , в якій  $f(X^{(0)}) = 314$ .

**Крок 1.**  $S^{(1)} = [1 \ 0]^T, S^{(2)} = [0 \ 1]^T$

**Крок 2.** Знайти оптимальне значення  $\lambda$ .  $\lambda^* = -0.81$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 0.81 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1.19 \end{bmatrix}; \quad f(X^{(1)}) = 250$$

Наступне значення  $\lambda^* = -3.26$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.74 \\ 1.19 \end{bmatrix}, \quad f(X^{(2)}) = 1.10$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.74 \\ 1.092 \end{bmatrix}, \quad f(X^{(3)}) = 0.72$$

**Крок 3.** Отримаємо  $S^{(3)} = X^{(3)} - X^{(1)} = [-3.25 \ -0.098]^T$ , після нормування отримаємо

$$S^{(3)} = \frac{S^{(3)}}{\|S^{(3)}\|} = [-0.99955 \ -0.33]^T.$$

Нехай  $S^{(3)} = S^{(2)}, S^{(2)} = S^{(1)}$  і перейдемо до кроку 2.

**Крок 4.** Знайдемо значення  $\lambda$ , при якому  $f(X^{(3)} + \lambda S^{(2)}) \rightarrow \min$

$$\lambda^* = 0.734, X^{(4)} = [1.006 \ 1.070]^T, f(X^{(4)}) = -2.86$$

**Крок 5.** Пошук завершується при виконанні умови

$$|X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)}| \leq E, i = 1, 2, \dots, n.$$

### Завдання

1. Знайдіть напрямок, ортогональний вектору  $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T$  в точці

$X = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Знайдіть напрямок, спряжений до M для цільової функції

$f(X) = x_1 + 2x_2^2 - x_1x_2$  у тій самій точці.

2. Випішіть чотири перших напрямки пошуку для методу Пауелла у випадку мінімізації  $f(X) = x_1^2 + \exp(x_1^2 + x_2^2)$ , починаючи з точки  $X^{(0)} = [2 \ 2]^T$ .



3. Знайдіть мінімуми функцій, використовуючи метод Пауелла.

а)  $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

б)  $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

в)  $f(X) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

г)  $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$

### Контрольні запитання

1. Оскільки метод Пауелла використовує спряжені напрямки, чи можна гарантувати відшукання мінімуму квадратичної цільової функції  $n$  змінних за  $n$  кроків?

2. Чи надасть метод Пауелла той самий набір напрямків пошуку, що й метод Розенброка, якщо розпочати з тієї самої початкової точки  $X$ ?

3. Поясніть, яким чином методом Пауелла отримують набір спряжених напрямків пошуку для трьохмірної задачі?

## 5.2.6 МЕТОД ПОШУКУ ХУКА-ДЖИВСА

Даний метод не потребує визначення похідних оптимізованої функції і припускає її унімодальність. Якщо функція не унімодальна або властивості її апріорно невідомі, пошук оптимуму слід проводити із кількох початкових точок.

Хук і Дживс запропонували логічно просту стратегію пошуку. Алгоритм складає два основних етапи: досліджуючий пошук навколо базисної точки та пошук за зразком, тобто є в напрямку, обраному для мінімізації.

Досліджуючий пошук. Досліджуючий пошук починається з обчислення значення функції  $f(x)$  у базисній точці, котра являє собою початковий вектор припустимих шукомих значень незалежних змінних на першому циклі. Потім у циклічному порядку змінюється кожна змінна (кожен раз тільки одна) на обрані величини приростів, поки всі параметри не будуть таким чином змінені. Якщо приріст не поліпшує цільову функцію, необхідно повернутися в попередню точку та зробити крок в протилежному напрямку з наступною перевіркою значення цільової функції. Після перебірки усіх  $N$  координат досліджуючий пошук завершується.

Пошук за зразком. Після проведення одного (чи більше) досліджуючого пошуку використовується стратегія пошуку за зразком. Пошук за зразком полягає у реалізації серії прискорюючих кроків уздовж прямої, що з'єднує отриману точку з попередньою базисною точкою. Нова точка зразку визначається у відповідності з формулою

$$X_p^{(k+1)} = X^{(k)} + (X^{(k)} - X^{(k-1)}) \quad (5.36)$$

де

$X^{(k)}$  - базисна точка;

$X^{(k-1)}$  - попередня базисна точка

$X_p^{(k+1)}$  - точка, побудована при русі за зразком.

Як тільки рух за зразком не призведе до зменшення цільової функції, точка  $X_p^{(k+1)}$  фіксується в якості тимчасової базисної точки та знову проводиться досліджуючий пошук. Для прискорення процесу оптимізації змінення розміру кроку  $\Delta X$  в пошуку за зразком здійснюється шляхом введення деякого множника за величиною  $\Delta X$ , що використовується у досліджуючих пошуках.

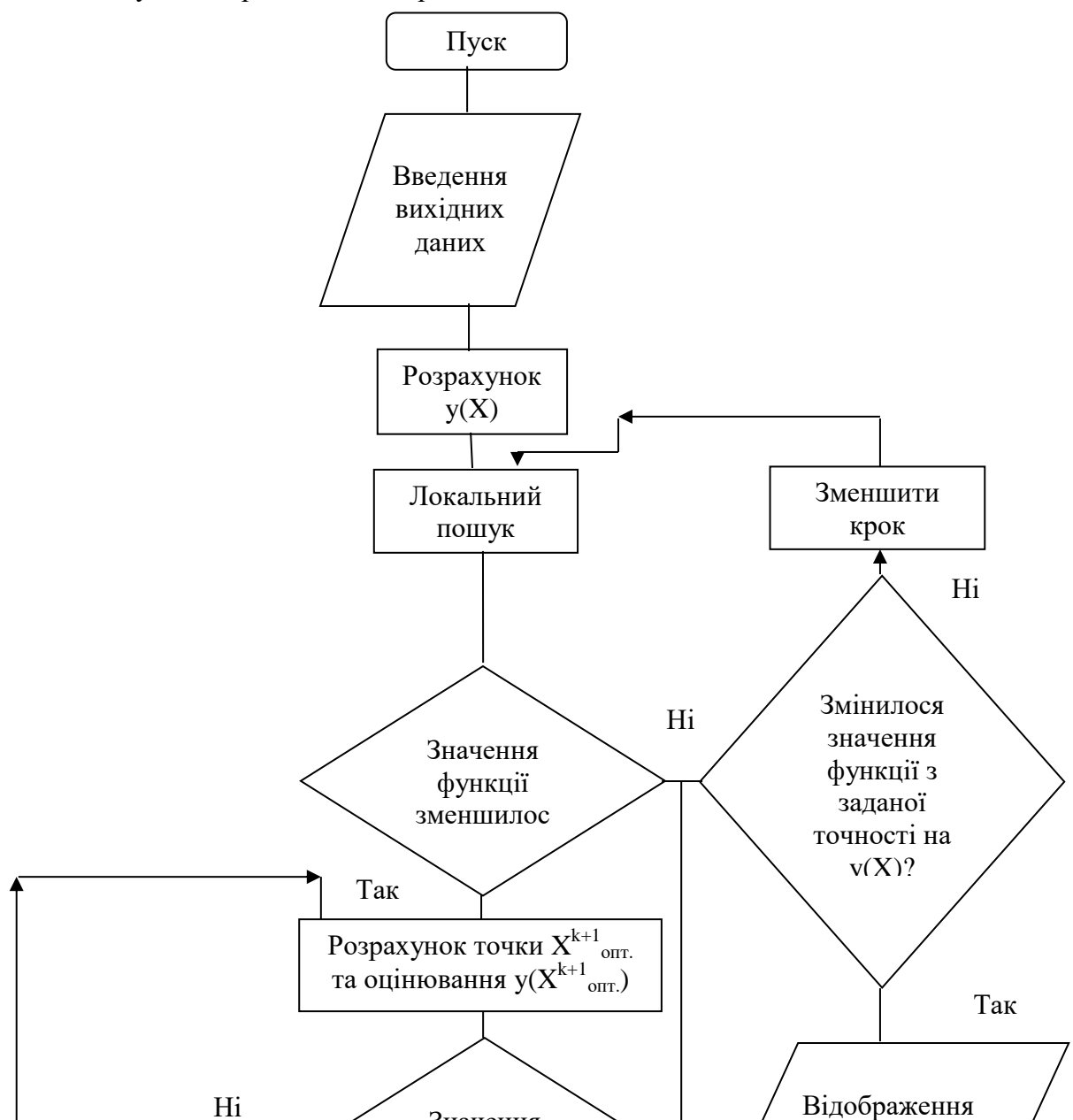
Пошук завершується, коли величина кроку стане достатньо малою.

### Опис алгоритму

Алгоритм пошуку оптимуму методом Хука та Дживса складається наступним чином (рис 5.11.):

- 1) Задається початкова точка та оцінюється значення функції, що оптимізується в цій точці;
- 2) Проводиться локальний пошук в цій точці за усіма напрямками  $X_i$  з кроком  $S_i$  з метою знайти точку  $X^{(k+1)}$ , де значення функції  $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$ ;
- 3) Якщо значення функції не зменшується в жодному з можливих напрямків, то перевіряється умова закінчення пошуку, що складаються в тому, що пошук завершується, якщо змінення оптимізуючої функції, викликані пошуковим рухом, менше наперед заданої точності визначення  $f(X)$ . Якщо пошук слід продовжити, то крок пошуку  $S_i$  зменшується та пошук відновлюється з точки  $X^{(k)}$ .
- 4) Якщо значення функції, що оптимізується зменшилось, то визначаються координати тимчасового оптимуму  $X_{\text{опт}}^{(k+1)}$ .  

$$X_{i,\text{опт}}^{(k+1)} = X_i^{(k+1)} + \alpha (X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}), i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.37)$$
де  $\alpha$  -фактор прискорення ( $\alpha \geq 1$ );
- 5) Якщо значення функції  $f(X_{\text{опт}}^{(k+1)})$  виявилось менше раніше знайденого мінімуму, то наступний локальний пошук здійснюється з точки  $X_{\text{опт}}^{(k+1)}$ . Визначається нова точка  $X_{\text{опт}}^{(k+2)}$  і до тих пір, поки функція, що оптимізується зменшується;
- 6) Якщо в черговій  $X_{\text{опт}}^{k+\tau}$  ( $\tau = 1, 2, \dots$ ) точці значення функції збільшилося, то локальний пошук слід провести з попередньої оптимальної точки.



**Рис 5.11. Схема алгоритма Хука і Дживса**

### Приклад 5.2

Максимізувати цільову функцію

$$f(X) = \frac{1}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}$$

починаючи з  $X^{(0)} = [2,00 \ 2,80]^T$  з початковим кроком  $\Delta x = [0,6 \ 0,84]^T$ ,

$$f(2,00 \ 2,80) = 0,059.$$

Досліджуючий пошук для визначення вдалого напрямку

$$x_1^{(1)} = 2,00 + 0,60 = 2,60 \qquad f(2,6 \ ; \ 2,80) = 0,048 \text{ (невдача)}$$

$$x_1^{(1)} = 2,00 - 0,60 = 1,40 \qquad f(1,40 \ ; \ 2,80) = 0,073 \text{ (успіх)}$$

$$x_2^{(1)} = 2,80 + 0,84 = 3,64 \qquad f(1,40 \ ; \ 3,64) = 0,052 \text{ (невдача)}$$

$$x_2^{(1)} = 2,80 - 0,84 = 1,96 \qquad f(1,40 \ ; \ 1,96) = 0,104 \text{ (успіх)}$$

Досліджуючий пошук виявився вдалим. Новим базисним вектором буде  $(1,40 \ ; \ 1,96)$ .

Тепер з точки  $(1,40 \ ; \ 1,96)$  проводиться пошук за зразком у відповідності з правилом акселерації

$$X_i^{(k+1)} = 2X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)}$$

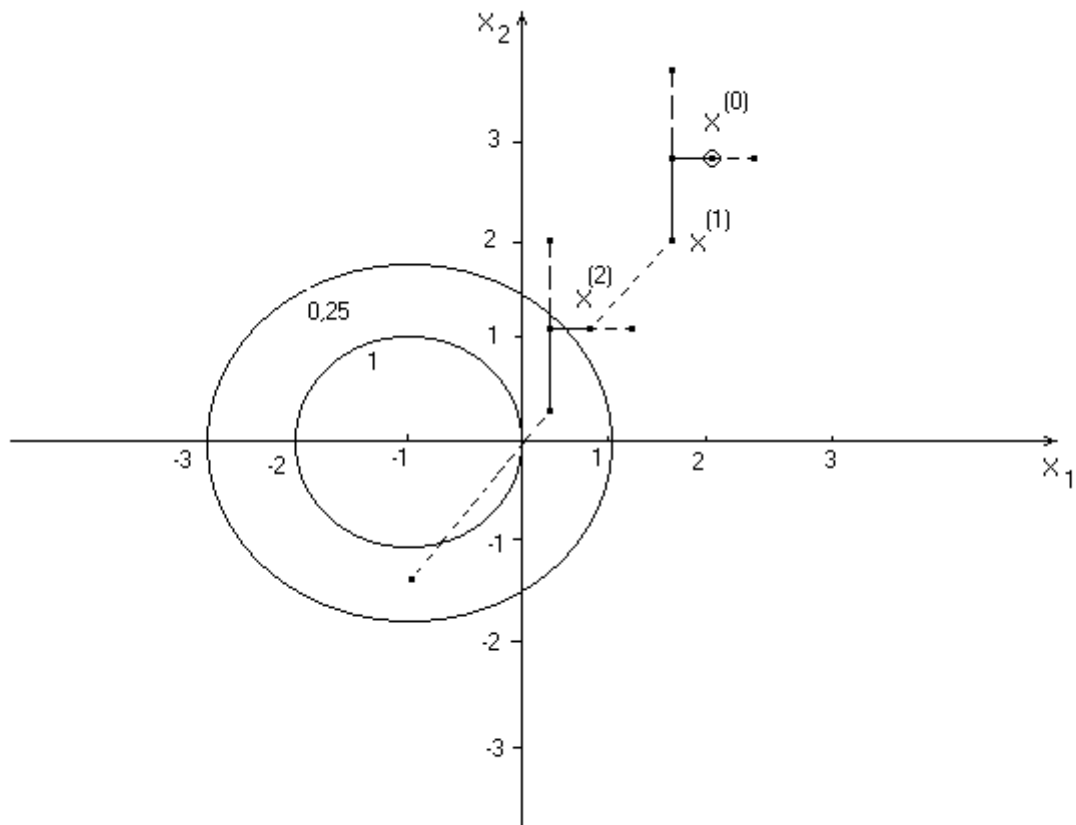
де  $X_i^{(k-1)}$  - попередній базисний вектор  $X$ . У даному випадку це початковий вектор  $X$ .

$$X_1^{(2)} = 2(1,40) - 2,00 = 0,80$$

$$X_2^{(2)} = 2(1,96) - 2,80 = 1,12,$$

$$f(0,8 \ ; \ 1,12) = 0,22$$

Далі знову проводиться досліджуючий пошук. Послідовні кроки метода реалізації показані на рис. 5.12.



**Рис. 5.12. Графік реалізації пошуку за методом Хука-Дживса, де**

**Кроки досліджуючого пошуку**

**Успіх**

-----

**Невдача**

**Кроки пошуку за зразком**

.....

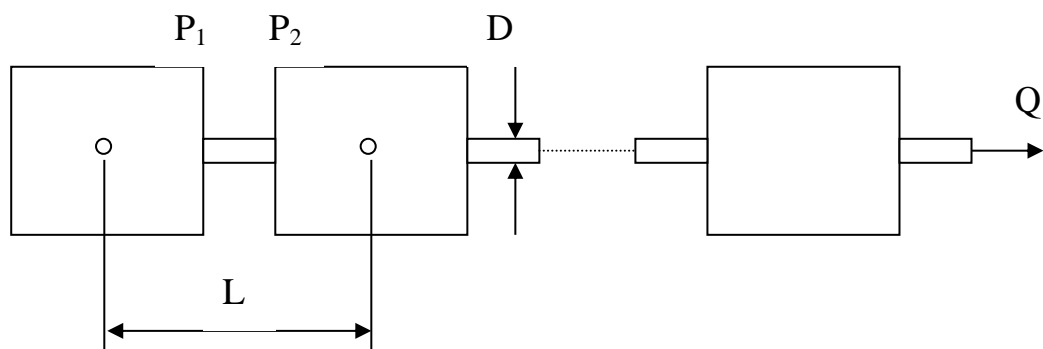
**Успіх**

+++++

**Невдача**

### Завдання

Система подачі газу по трубах, у якій компресорні станції розташовані на відстані  $L$  км, один від одного, зображена на рис. 5.13.



**Рис. 5.13. Схема газопроводу**

Сумарні витрати на експлуатацію газопроводу протягом року з'ясовуються за допомогою функції, грн.:

$$C(D, P_1, L, r) = 7,84 D^2 P_1 + 45 \cdot 10^4 + 36900 D + \frac{6,57 \cdot 10^6}{L} + \frac{772 \cdot 10^6}{L} (r^{0,219} - 1), \quad (5.38)$$

Витрати газу на одиницю часу, м<sup>3</sup>/г:

де  $f=0,008D^{-1/3}$  – коефіцієнт тертя. Нехай витрати газу на день складають  $100 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ . Використайте формулу (5.39) для виключення змінної  $P_1$  з (5.38). Потім за допомогою методу Хука-Дживса знайдіть такі значення параметрів системи, яким відповідає мінімум марних експлуатаційних витрат на одиницю часу.

2. Чому квадратичні функції використовуються як основа для побудови алгоритмів нелінійної оптимізації?

У матричному зображенні  $\hat{M}^{(k)} = a^{(k)} \cdot \delta$ .

Розглянемо К-й етап, пошук починається з  $X_0^{(k)}$  шляхом введення збурення, що дорівнює  $S_1^{(k)} \cdot \hat{M}_1^{(k)}$ , у першому координатному напрямку, де  $S_1$ -довжина кроку у напрямку  $\hat{M}_1$ . Якщо значення  $f(X_0^{(k)} + S_1^{(k)} \hat{M}_1^{(k)})$  дорівнює або менше, за  $f(X_0^{(k)})$ , крок рахується успішним та здобута спробна точка замінює  $X_0^{(k)}$ ,  $S_1^{(k)}$  множиться на множник  $\alpha > 0$  та вводиться збурення за напрямком  $\hat{M}_2^{(k)}$ . Якщо значення  $f(X_0^{(k)} + S_1^{(k)} \hat{M}_1^{(k)})$  більше за  $f(X_0^{(k)})$ , то крок рахується невдалим,  $X_0^{(k)}$  не замінюється,  $S_1^{(k)}$

множиться на множник  $\beta < 0$  та знову задається збурення за напрямком  $\hat{M}_2^{(k)}$ . Розенброк запропонував у загальному випадку брати значення параметрів такими:  $\alpha = 3$  та  $\beta = -0,5$ . Збурення за вибраним напрямком пошуку задаються до тих пір, поки по кожному з напрямків за успіхом не настане невдача. Остання отримана точка ставатиме початковою точкою наступного етапу,  $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$ . Нормований напрямок  $\hat{M}_1^{(k+1)}$  береться паралельним  $(X_0^{(k+1)} - X_0^{(k)})$ , а останні напрямки обираються ортонормованими один до одного та до  $\hat{M}_1^{(k+1)}$ .

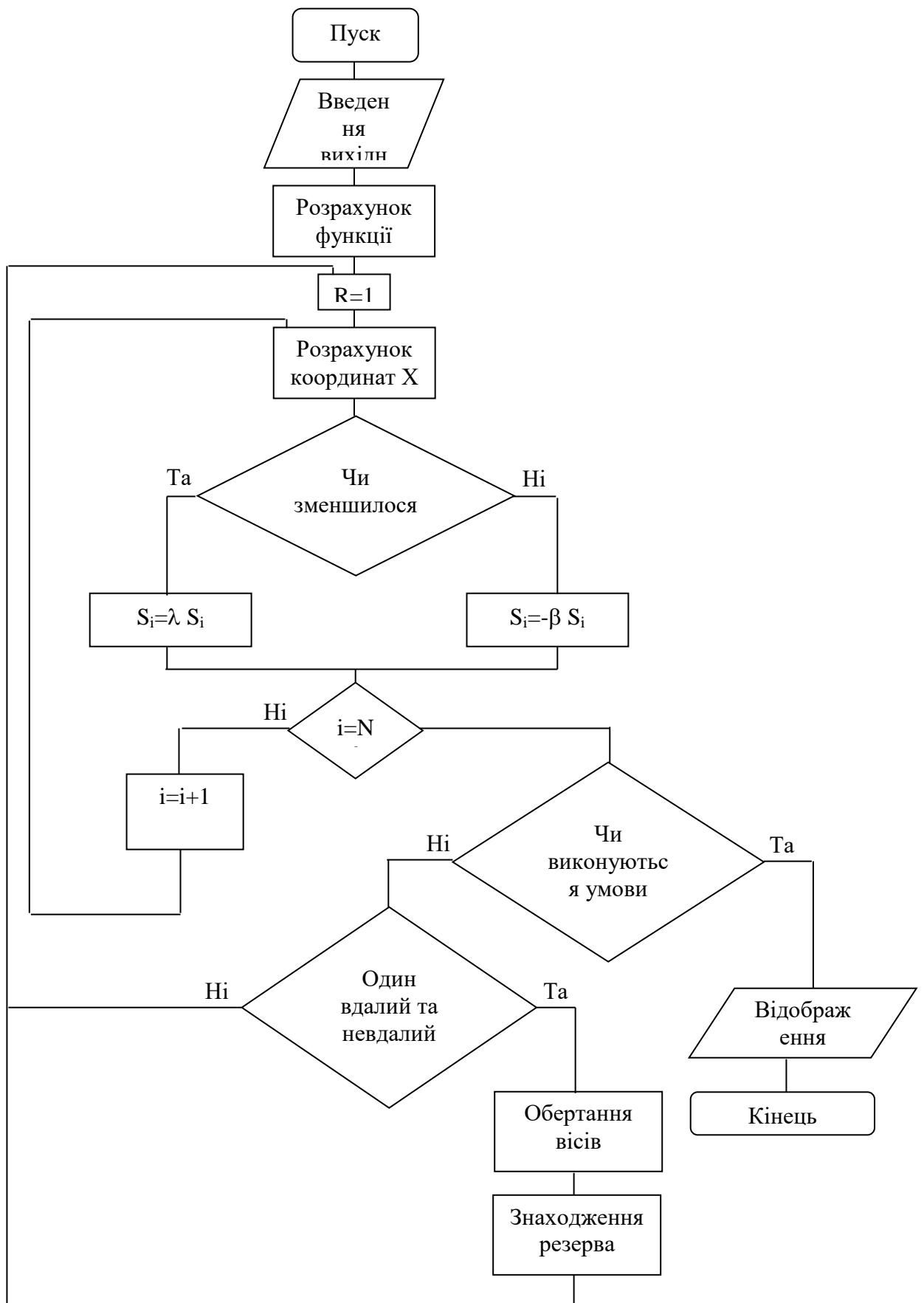


Рис. 5.14 Схеми алгоритма Розенброка



Після завершення К-го етапу або за допомогою оригінального методу Розенброку, або його модифікації з використанням ДСК у точці  $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$  визначаються вектори нових напрямків пошуку. Ортогональні напрямки пошуку обертаються по відношенню до попереднього напрямку так, що вони виявляються витягнутими уздовж байраку (або хребта), таким чином виключається взаємодія змінних. Вектори результуючого переміщення  $A_1, \dots, A_n$  визначаються наступним чином:

$(d_i^{(k)})$  являє собою алгебраїчну суму усіх успішних кроків (сумарне переміщення) у напрямку  $M_i^{(k)}$  на  $K$ -м етапі; в випадку методу ДСК має право рівність  $d_i^{(k)} = S_i^{*(k)}$ .

Таким чином,  $A_1^{(k)}$  являє собою повне переміщення з К-го етапу на (К+1)-й етап,  $A_2^{(k)}$  - повне переміщення, але без обліку переміщення, зробленого вчасно пошуку у напрямку  $M_1^{(k)}$  і т.д.

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_1^{(k+1)} &= \frac{D_1^{(k)}}{\|D_1^{(k)}\|}; \\
D_1^{(k)} &= A_1^{(k)}; \\
D_2^{(k)} &= A_2^{(k)} - \left[ \left( A_2^{(k)} \right)^T \cdot \widehat{M}_1^{(k+1)} \right] \cdot \widehat{M}_1^{(k+1)}; \\
\widehat{M}_2^{(k+1)} &= \frac{D_2^{(k)}}{\|D_2^{(k)}\|}, \\
&\dots\dots\dots \\
D_n^{(k)} &= A_n^{(k)} - \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left( A_n^{(k)} \right)^T \cdot M_i^{(k+1)} \right] \widehat{M}_i^{(k+1)}; \\
\widehat{M}_n^{(k+1)} &= \frac{D_n^{(k)}}{\|D_n^{(k)}\|},
\end{aligned} \tag{5.41}$$

де  $\|D_i^{(k)}\|$  - норма  $D_i$ . Також процедура пошуку, котра проводилась на К-м етапі, повторюється потім на (К+1)-м етапі, починаючи з точки  $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$ .

Метод Розенброка не забезпечує автоматичне закінчення пошуку після того, як буде знайдено екстремум  $f(X)$ . Пошук або проводиться на визначеному числі етапів, або закінчується, як тільки величина  $A_1$  ставатиме меншою визначеного значення на кількох послідовних етапах. На рис. 5.14 представлена схема алгоритма Розенброка.

Алгоритм складається з наступного:

- 1) Задається початкова точка та крок  $S_i (i = 1, 2, \dots, N)$  пошуку; оцінюються значення функції, що оптимізується;
- 2) Виконується крок  $S_1$  уздовж осі  $X_1$  та обчислюється значення функції. Якщо величина  $f(X)$  зменшилась, пошуковий рух признається вдалим та крок  $S_1$  збільшується в  $\alpha$  раз ( $\alpha \geq 1$ ). Якщо значення функції збільшилось, напрямок пошуку рахується невдалим та пошук продовжується в протилежному напрямку зі зменшенням за допомогою фактора  $\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ) кроком;
- 3) Аналогічна процедура здійснюється в відношенні інших незалежних змінних  $i = 2, 3, \dots, N$  до тих пір, поки за всіма змінними не буде досягнуто тимчасовий оптимум;
- 4) Потім здійснюється обернення вісей координат за наступним правилом:

$$M_{i,j}^{(k+1)} = \frac{D_{i,j}^{(k)}}{\left[ \sum_{l=1}^N (D_{l,j}^{(k)})^2 \right]^{1/2}},$$

де  $D_{i,1}^{(k)} = A_{i,1}^{(k)}$ ;

$$D_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - \sum_{l=1}^{j-1} \left[ \sum_{n=1}^j M_{n,l}^{(k+1)} \cdot A_{i,j}^{(k)} \cdot M_{i,l}^{(k+1)} \right], j = 2, 3, \dots, N,$$

$$A_{i,j}^{(k)} = \sum_{l=j}^N d_l^{(k)} \cdot M_{i,l}^{(k)}.$$

Тут  $k$  - номер ітерації;

$d_i$  – сумарна відстань в  $i$  - м напрямку, на котру були зсунені вісі до їх останнього обернення;

$d_i - M_{i,j}$  - елементи вектору напрямків;

- 5) Пошук продовжується аналогічно попередньому в кожному з  $i (i = 1, 2, \dots, N)$  напрямків, використовуючи нові координати вісей:

$$X_{Hi}^{(k)} = X_i^{(k)} + S_j^{(k)} \cdot M_{i,j}^{(k)},$$

де  $X_{Hi}^{(k)}$  - координата нової вісі  $X_i$ ;

- 6) Пошук закінчується при виконанні хоча б однієї з наступних умов: а) досягнуто необхідну точність обчислень значення оптимізуючої функції; б) досягнуто задане число розрахунків функції або обертів вісей координат.

### Завдання

1. Наприкінці кожного етапу Розенброка отримано наступні значення при пошуці мінімуму  $f(X)$ .

Результат		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>		

Початок	Початок	3	7
Невдача	Невдача	4	8
Успіх	Успіх	2	8
Успіх	Успіх	1.5	7.5
Невдача	Невдача	-1.5	10.5

а) Які два напрямки пошуку використовувались на цьому етапі?

б) Якими повинні бути два наступних напрямки?

2. Використовуйте пошук Розенброка для з'ясування мінімуму цільової функції

$$f(X) = 3x_1^2 + x_2^2$$

при  $\beta=0,5$  і  $\alpha=3$ , доки подальше покращення не буде неможливим.

3. Знайдіть мінімуми функцій, використовуючи метод Розенброка:

а)  $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

б)  $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

в)  $f(X) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

г)  $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$ ,

### Завдання для самостійної роботи

1. Задаючи для параметрів  $\alpha$  та  $\beta$  у методі Розенброка різні значення, знайдіть найбільш ефективні з них для випадків квадратичної функції

$$f(X) = 10x_1^2 + 0,1x_2^2$$

Повторіть те ж саме для

$$f(X) = 0,1x_1^2 + 10x_2^2$$

### Контрольні запитання

1. У чому різниця між методом Розенброка та методом Хука і Дживса?
2. Як обирають напрямки пошуку на початковому етапі?
3. Що є умовою закінчення етапу?
4. Як обчислюють вектори нових напрямків пошуку?
5. Як модифікували пошук Розенброка Девіс, Свенн та Кемпі?

## 6. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ.

### 6.1 ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ

В розділі 5 розглядалися методи, які дозволяють отримати рішення задачі на основі використання тільки значення цільової функції. Важливість прямих методів безперечна, оскільки в ряді практичних інженерних задач інформація про значення цільової функції являється єдиною надійною інформацією, яку має дослідник. З іншого боку, при використанні навіть найефективніших прямих методів для отримання рішення інколи потрібна надзвичайно велика кількість обчислень значень функції. Ця обставина призводить до необхідності розглядати методи, які ґрунтуються на використанні градієнту цільової функції і ґрунтуються на ітераційній процедурі, яка реалізується в відповідності з формулою

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}, \quad (6.1)$$

де  $X^{(k)}$  - поточне наближення до розв'язку  $X^*$ ;  $\Delta X^{(k)}$  - вектор переходу з точки  $X^{(k)}$  в точку  $X^{(k+1)}$ ;  $\lambda^{(k)}$  - параметр, який характеризує довжину кроку;  $S^{(k)}$  - напрямок пошуку в  $N$  - мірному просторі керуємих змінних  $X$ . Спосіб визначення значень  $S$  і  $\lambda$  на кожній ітерації пов'язаний з особливостями методу, який застосовується. Звичайно значення  $\lambda^{(k)}$  вибирається шляхом розв'язку задачі мінімізації  $f(X)$  в напрямку  $S^{(k)}$ , тому при реалізації вивчених методів необхідно використовувати ефективні алгоритми одномірної мінімізації.

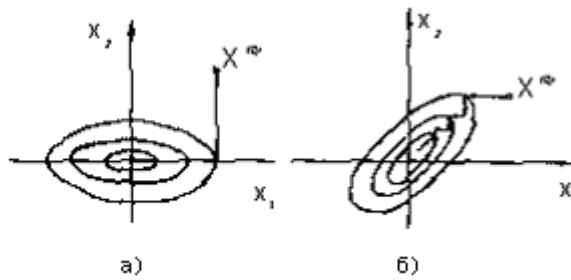
#### 6.1.1 МЕТОД РЕЛАКСАЦІЇ

Алгоритм методу полягає в знаходженні осьового напрямку, уздовж якого функція цілі зменшується найбільш суттєво. Для цього в початковій точці пошуку визначаються похідні оптимізуємої функції за всіма незалежними змінними. Осьовому напрямку з найшвидшим зменшенням цільової функції, очевидно, відповідає найбільша за модулем похідна. Якщо знак похідної від'ємний, то цільова функція зменшується в напрямку осі, якщо - додатний, то в зворотньому напрямку. В напрямі зменшення функції проводять кроки до тих пір, поки не буде отримано мінімальне значення за обраним напрямком в відповідності з формулою

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \operatorname{sgn} \frac{\partial f(X^{(p)})}{\partial X}, \quad (6.2)$$

де  $X^{(p)}$  - вектор точки, в якій останній раз проводились обчислення похідних цільової функції.

Тоді знов визначаються похідні по всім напрямкам за виключенням тієї, по якій здійснюється спуск і знов знаходиться осьовий напрямок найшвидшого зменшення функції цілі, проводяться подальші кроки. Графік руху від початкового стану до оптимуму показаний на рис. 6.1.



**Рис. 6.1. Залежність часу пошуку оптимуму методом релаксації від орієнтації системи координат.**

Суттєвою особливістю методу релаксації є залежність часу пошуку від орієнтації системи координат. Якщо в випадку (а) для досягнення мінімуму цільової функції необхідно тільки два цикла руху вздовж осьового напрямку, то для випадку (б) число таких циклів суттєво збільшується. Якщо у цільовій функції є "байраки", напрямки яких не співпадає з осьовими, тоді пошук призупиняється в будь-якій точці дна "байраку".

Швидкість руху до мінімуму залежить від того, на скільки вдало підібрано крок  $\lambda^{(k)}$  змін незалежних змінних, який повинен зменшуватись при наближенні до точки мінімуму. Коли величина кроку  $\lambda^{(k)}$  стане меншою від заданої точності визначення мінімуму  $\varepsilon$  в осьовому напрямку, пошук мінімуму можна закінчити.

Пошукова процедура методу релаксації наступна.

**КРОК 1.** Задати  $X^{(0)}$  - початкове наближення до точки мінімуму  $X^*$ ,  $H$  - початкове значення кроку,  $\varepsilon$  - параметр сходимості.

**КРОК 2.** Визначити  $f(X^{(0)})$ .

**КРОК 3.** Здійснити дослідницький пошук, знайти напрямки, в якому функція цілі найбільше зменшується.

**КРОК 4.** Перевірка знаходження осьового напрямку. Так - перейти до кроку 5. Ні - перейти до кроку 7.

**КРОК 5.** Провести пошук в осьовому напрямку.

**КРОК 6.** Перейти до кроку 3, використовуючи якості базової точки, знайдену на кроці 5.

**КРОК 7.** Перевірка на закінчення пошуку. Чи виконується нерівність  $H < \varepsilon$ ? Так - закінчити пошук. Ні - зменшити розмір кроку по формулі  $H = H/K$ . Перейти до кроку 3.

### Завдання

1. Мінімізувати наступні функції двох незалежних змінних методом релаксації:

$$a) f(X) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 360 \left[ (2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left[ 1 - \frac{(x_2 - 3x_1)^2}{8} \right];$$

$$б) f(X) = x_2 + \sin x_1;$$

$$в) f(X) = -(x_2 - x_1)^4 + (1 - x_1)^2;$$

$$г) f(X) = x_1^2 + x_1 - x_2^2 + x_2 - 4;$$

$$д) f(X) = \exp \left[ - (x_1 - 1)^2 \right] - \frac{(x_2^2 - 0.5)^2}{0.132};$$

2. Мінімізувати наступні функції методом релаксації:

$$a) f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2;$$

$$б) f(X) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2;$$

$$в) f(X) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$$

$$г) f(X) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2.$$

#### Завдання для самостійної роботи

В задачі, зв'язаній з проблемою прийняття рішення, бажано мінімізувати очікуваний ризик, який визначається наступним чином:

$$\mathcal{E}\{\text{ризик}\} = (1 - p)C_1[1 - F(b)] + pC_2\Theta\left[\frac{b}{2} + \frac{2\pi}{4}\right]F\left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right),$$

$$\text{де } F(b) = \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2} du; C_1 = 1.25 \cdot 10^5; C_2 = 15; \Theta = 2000; p = 0.25.$$

Знайти мінімальний очікуваний ризик і значення b.

Контрольні запитання

1. У чому суть методу релаксації?
2. Чому квадратичні функції використовуються як основа для побудови алгоритмів нелінійного програмування?

### 6.1.2 МЕТОД ГРАДІЄНТА

На відміну від методу релаксації в простому градієнтному методі кроки здійснюються у напрямку найшвидшого зменшення цільової функції, що прискорює процес пошуку.

Градієнт цільової функції  $f(X)$  в будь-якій точці  $X$  є вектор у напрямку найбільшого локального збільшення  $f(X)$ . Отже потрібно рухатись в напрямку, протилежному градієнту  $f(X)$ , оскільки від'ємний градієнт  $f(X)$  в точці  $X^{(k)}$  направлений в бік найбільшого зменшення  $f(X)$  по всім компонентам  $X$  і ортогонален лінії рівня  $f(X)$  в точці  $X^{(k)}$ . Напрямок, протилежний нормованому (одичинному) градієнту  $f(X)$ , який визначається в точці  $X^{(k)}$  за формулою

$$S^{(k)} = \frac{\nabla f(X^{(k)})}{\|\nabla f(X^{(k)})\|}, \quad (6.3)$$

де  $\nabla f(X^{(k)})$  - вектор - стовпець градієнту,

$$\nabla f(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_n} \end{pmatrix};$$

$\|\nabla f(X^{(k)})\|$  - довжина вектору,

$$\|\nabla f(X^{(k)})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_n}\right)^2}.$$

В основі простого градієнтного методу лежить формула переходу:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{\lambda^{(k)} \nabla f(X^{(k)})}{\|\nabla f(X^{(k)})\|} = X^{(k)} - \lambda^* \nabla f(X^{(k)}). \quad (6.4)$$

Від'ємний градієнт дає тільки напрям оптимізації, але не довжину кроку. Задача вибору стратегії зміни довжини кроку в градієнтному пошуку більш важлива, ніж в методі релаксації. Це пояснюється тим, що після кожного кроку тут визначаються похідні цільової функції, розрахунок яких зв'язаний з обчисленням значень цільової функції. Якщо, з одного боку, розмір кроку надто малий, то рух до оптимуму буде довгим через необхідність розрахунку цільової функції в багатьох точках. З іншого боку, якщо крок вибрано надто великим, в районі оптимуму можуть виникнути пошуки, які або не згасають, або згасають надто повільно. Характер пошуку оптимуму при малій і великій довжині кроку показано на

рис. 6.2.

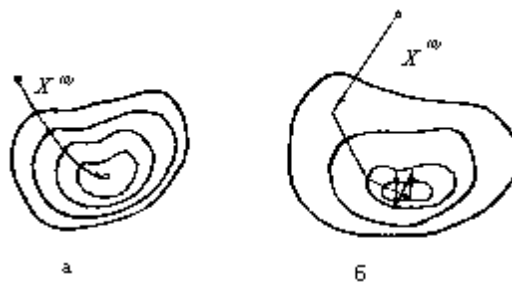


Рис. 6.2. Характер руху до оптимуму в методі градієнта з малою а) і великою б) довжиною кроку

В точці мінімуму всі складові вектору градієнту дорівнюють нулю. Тип стаціонарної точки може бути перевірений шляхом дослідження матриці Гессе (якщо її можливо отримати) цільової функції, взятої в данній стаціонарній точці. Якщо ця матриця не являється визначеною, тоді стаціонарна точка - сідлова.

В якості критерія закінчення послідовної процедури під час руху в напрямку найшвидшого спуску застосовуються різні правила, які ґрунтуються на значенні  $f(X)$  і значеннях  $X, \lambda, \nabla f(X)$ . Схема алгоритму метода зображена на рис. 6.3. Відмітимо, що робота алгоритму закінчується, коли модуль градієнта або модуль вектора  $\Delta X$  стає достатньо малим.

Якщо нелінійна цільова функція надто складна, щоб її можливо було продиференціювати аналітично, тоді складові градієнту, які є частинними похідними за оптимізованими змінними, апроксимуються різницевиими співвідношеннями:

де  $\Delta$ - невелике зміщення у напрямку  $X_i$ . Цю формулу часто називають наближенням січної. На деякій відстані від мінімуму різницева апроксимація похідних цілком прийнятна, однак поблизу мінімуму вона недостатньо задовільна. Наведемо алгоритм пошуку мінімуму методом градієнту.

**КРОК 1.** Задати  $X^{(0)}$  - початкове наближення до точки мінімуму  $X^*$ ;  $H$  - початкове значення кроку,  $\varepsilon$  - параметр збіжності.

**КРОК 2.** Визначити  $f(X^{(0)})$ .

**КРОК 3.** Визначити компоненти  $\nabla f(X^{(k)})$ .

**КРОК 4.** Покласти  $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla f(X^{(k)})$ .

**КРОК 5.** Чи виконуються нерівності  $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$ ? Так - перейти до кроку 3. Ні - перейти до кроку 6.

**КРОК 6.** Повернутись до попередньої вдалої точки  $X^{(k)}$ .

**КРОК 7.** Перевірка на відхилення пошуку. Чи виконується нерівність  $H < \varepsilon$ ? Так - припинити пошук. Ні - зменшити розмір кроку за формулою  $H = H/K$ . Перейти до кроку 3.



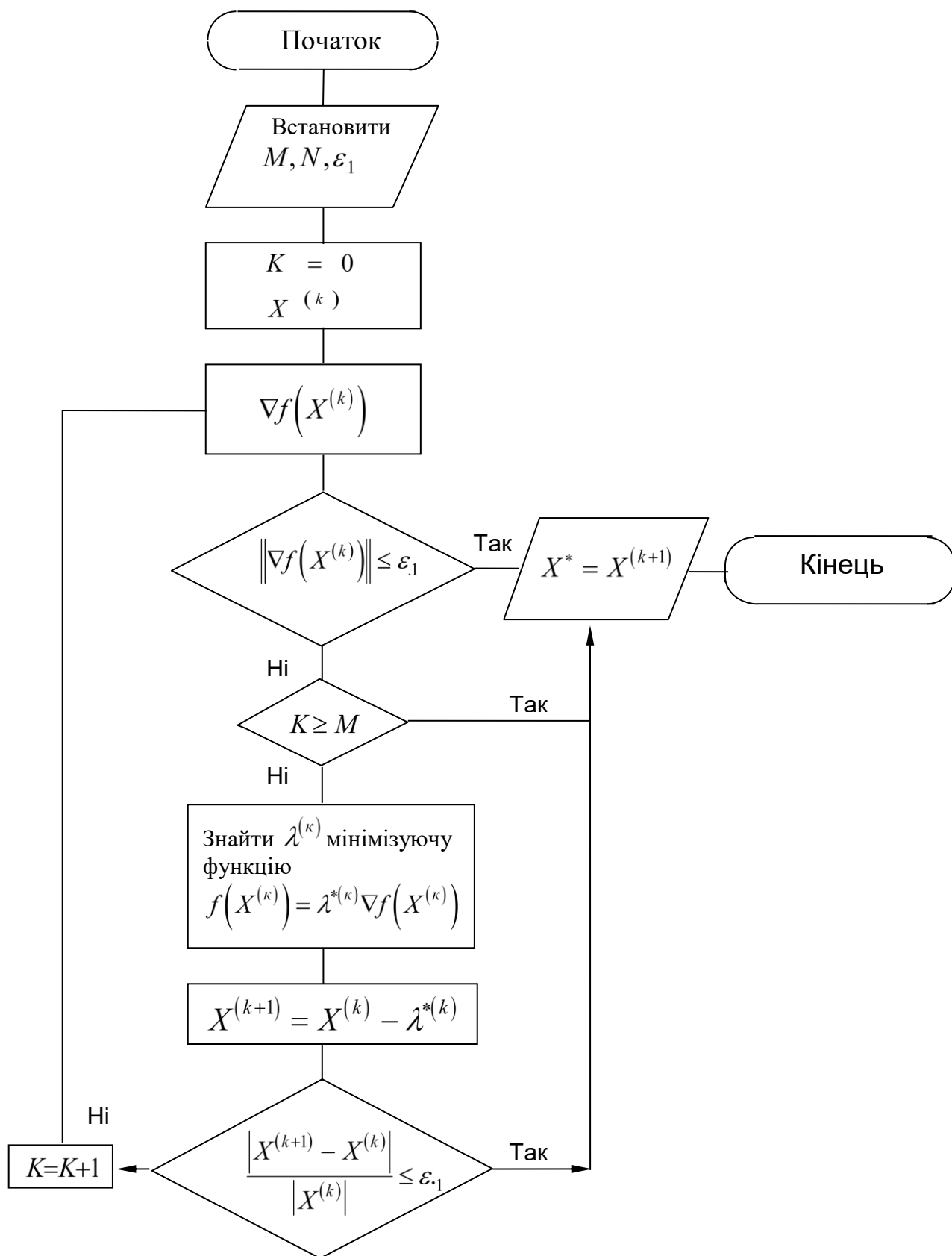


Рис. 6.3. Схема алгоритму градієнтного методу

Метод має недоліки: по-перше, виникає необхідність вибору підходящого значення  $\lambda$ ; по-друге, методу притаманна повільна збіжність в точці мінімуму внаслідок малих  $\Delta f$  навколо цієї точки; по-третє, при використанні методу можна знайти тільки локальний мінімум цільової функції.

### Завдання

1. Мінімізувати наступні функції двох незалежних змінних методом градієнту.

$$\text{а) } f(X) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 360 \left[ (2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left[ 1 - \frac{(x_2 - 3x_1)^2}{8} \right];$$

$$\text{б) } f(X) = x_2 + \sin x_1;$$

$$\text{в) } f(X) = -(x_2 - x_1)^4 + (1 - x_1)^2;$$

$$\text{г) } f(X) = x_1^2 + x_1 - x_2^2 + x_2 - 4;$$

$$\text{д) } f(X) = \exp[-(x_1 - 1)^2] - \frac{(x_2^2 - 0.5)^2}{0.132};$$

2. Мінімізувати наступні функції методом градієнту:

$$\text{а) } f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2;$$

$$\text{б) } f(X) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2;$$

$$\text{в) } f(X) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$$

$$\text{г) } f(X) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2.$$

### Завдання для самостійної роботи

Виконати один цикл пошуку максимуму функції  $f(X) = x_1 + x_2 - (x_1x_2)^2 - x_1^2 - 2x_2^2$  з початкової точки  $X^{(0)} = [1 \ 0]^T$ , використовуючи алгоритм градієнту з постійним кроком  $\lambda=1$ . Знайти значення косинусу кута між напрямком градієнту в початковій точці і в точці, яку було знайдено після першого кроку. Оцінити, як потрібно змінювати крок  $\lambda$  в другому циклі алгоритму градієнту з уточненням кроку.

### Контрольні запитання

1. В який локальний оптимум приведе пошук методом градієнту, якщо функція мультимодальна?
2. Як вплине помилка в визначенні однієї із складових градієнту на його значення і напрямки?
3. Як впливає масштабування змінних на збіжність методу градієнту і при якій формі ліній рівня можна отримати швидку збіжність?

## 6.1.3 МЕТОД НАЙШВИДШОГО СПУСКУ.

Застосування методу градієнту потребує на кожному кроці визначення значення всіх частинних похідних цільової функції по всім незалежним змінним. Якщо розрахунок одного значення даної функції потребує значного об'єму обчислень, тоді час пошуку оптимуму, особливо при великій кількості незалежних змінних, може бути великим.

Метод релаксації має переваги, тому-що під час спускання вздовж вибраного осового напрямку не потребує обчислення похідних. Однак рух здійснюється не в оптимальному напрямку, оскільки градієнт в загальному випадку не співпадає з осовим напрямком.

Поєднання методів релаксації і градієнту дає метод найшвидшого спуску, який заключається в наступному. Після того як в початковій точці знайдено градієнт цільової функції і тим самим визначено напрям її найшвидшого зменшення, в даному напрямку робиться крок спуску. Якщо значення функції в результаті цього кроку зменшилось, тоді робиться наступний крок в тому ж напрямку до тих пір, поки в цьому напрямку не буде знайдено мінімум, після чого обчислюються градієнт і визначається новий напрям найшвидшого зменшення цільової функції.

В порівнянні з методом градієнту метод найшвидшого спуску більш зручний, бо скорочується об'єм обчислень. Крім того, він вигідно відрізняється від методу релаксації тим, що перші кроки після визначення градієнту здійснюються в оптимальному напрямку.

При визначенні розміру кроку застосовують два загальних методи. В першому методі при переході з точки  $X^{(k)}$  в точку  $X^{(k+1)}$  цільова функція мінімізується за кроком  $\lambda$ , в другому методі довжина кроку  $\lambda$  вибирається фіксованою або змінюється від кроку до кроку. Функцію  $f(x)$  можна мінімізувати за допомогою одного з методів одномірного чисельного пошуку (наприклад, метод Фібоначчі або методу квадратичної апроксимації Когінса). Якщо в методі обирається фіксоване значення скаляра  $\lambda$  або ця величина змінна, то вона повинна контролюватись, щоб уникнути як різкого росту  $f(X)$ , так і надмірної кількості кроків. Важливою рисою методу найшвидшого спуску є те, що кожен новий напрямок руху до оптимуму ортогональний до попереднього пошуку  $S^{(k)}$ . Метод найшвидшого спуску дозволяє суттєво зменшити значення цільової функції, рухаючись з точок, які розташовані на великій відстані від точки мінімуму і тому часто використовується при реалізації градієнтних методів в якості початкової процедури. Наведемо алгоритм пошуку мінімуму методом найшвидшого спуску.

**Крок 1.** Задати  $X^{(0)}$  - початкове приближення до точки мінімуму  $X^*$ ;  $N$  - початкове значення кроку;  $K$  - кратність зменшення кроку;  $\varepsilon$  - параметр збіжності.

**Крок 2.** Обчислити  $f(X^{(0)})$ .

**Крок 3.** Обчислити компоненти  $\nabla f(X^{(k)})$ .

**Крок 4.** Покласти  $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{*(k)} \nabla f(X^{(k)})$ .

**Крок 5.** Чи виконується нерівність  $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$ ? Так - перейти до кроку 4. Ні - перейти до кроку 6.

**Крок 6.** Повернутися до попередньої вдалої точки  $X^{(k)}$ .

**Крок 7.** Перевіряється нерівність  $f(X^{(k)}) < f(X^{(0)})$ ? Так - перейти до кроку 3. Ні - перейти до кроку 8.

**Крок 8.** Перевірка закінчення пошуку. Чи виконується нерівність  $N < \varepsilon$ ? Так - припинити пошук. Ні - зменшити розмір кроку за формулою  $N = \frac{N}{K}$ . Перейти до кроку 3.

### Завдання

1. Мінімізувати наступні функції двох незалежних змінних методом найшвидшого спуску:

$$e) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 360 \left[ (2X_1 - 1)^2 + (2X_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{(X_2 - 3X_1)^2}{8} \right] \right\}$$

2. Мінімізувати наступні функції методом найшвидшого спуску:

$$\text{à)} \quad f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2;$$

$$\text{á)} \quad f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2;$$

$$\text{â)} \quad f(X) = 8X_1^2 + 4X_1X_2 + 5X_2^2;$$

$$\text{ã)} \quad f(X) = 2X_1^3 + 4X_1X_2^3 - 10X_1X_2 + X_2^3;$$

Порівняти швидкість збіжності методу зі швидкістю збіжності методів релаксації і градієнту.

### Завдання для самостійної роботи

Максимізувати  $f(X) = e^{-X_1 - X_2}(2X_1^2 + 3X_2^2)$  методом найшвидшого спуску. В якості початкової вибирається точка  $X^{(0)} = [2,5; 2,5]$ .

### Контрольні запитання

1. Якщо визначено напрямок градієнтного пошуку в точці  $X^{(k)}$ , як треба вибрати розмір кроку, щоб досягти наступної точки  $X^{(k+1)}$ ?
2. Що являється напрямком найшвидшого спуску в точці  $X = [1; 1]$  для цільової функції  $f(X) = X_1^2 + 2X_2^2$ ? Провести два кроки оптимізації.
3. Довести, чи являється метод найшвидшого спуску методом, який використовує спряжені напрямки при мінімізації квадратичної функції з додатньо визначеною матрицею Гессе.

## 6.2 МЕТОД ДРУГИХ ПОХІДНИХ. МЕТОД НЬЮТОНА

Напрямок пошуку, який відповідає найшвидшому спуску, інтерпретується як наслідок лінійної апроксимації цільової функції. Для визначення напрямку пошуку необхідно обчислити значення функції і її перших похідних. Однак рух в напрямку, протилежному градієнту, приводить в точку мінімуму лише у тому випадку, коли лінії рівня функції  $f(X)$  являють собою кола. Для побудови більш загальної стратегії пошуку потрібно застосувати інформацію про другі похідні цільової функції. Квадратичну апроксимацію цільової функції можна отримати, відкидаючи в ряді Тейлора члени третього і більш високих порядків:

$$f(X) = f(X^{(\hat{e})}) + \nabla f(X^{(\hat{e})}) \Delta X^{(\hat{e})} + \frac{1}{2} (\Delta X^{(\hat{e})})^T \nabla^2 f(X^{(\hat{e})}) \Delta X^{(\hat{e})} \quad (6.5)$$

де  $\nabla f(X^{(\hat{e})})$  - вектор-строка градієнту;  $\nabla^2 f(X^{(\hat{e})})$  - матриця Гессе  $f(X)$ ,  $H(X)$ , яка представляє собою квадратичну матрицю других частинних похідних  $f(X)$ , взятих в точці  $X^{(k)}$ :

$$\nabla^2 f(X^{(\hat{e})}) = H(X^{(\hat{e})}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X^{(\hat{e})})}{\partial X_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^{(\hat{e})})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^{(\hat{e})})}{\partial X_n \partial X_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^{(\hat{e})})}{\partial X_n^2} \end{vmatrix}.$$

Мінімум функції  $f(X)$  в напрямку  $\Delta X^{(k)}$  визначається диференціюванням  $f(X)$  по кожному із компонентів  $\Delta X$  і прирівнюванням до нуля отриманих виразів. Останнє призводить до

$$\Delta X^{(\hat{e})} = -[\nabla^2 f(X^{(\hat{e})})]^{-1} \nabla f(X^{(\hat{e})}) \quad (6.6)$$

де  $[\nabla^2 f(X^{(\hat{e})})]^{-1}$  - матриця, обернена до матриці Гессе  $H(X^{(k)})$ .

Застосування схеми квадратичної апроксимації призводить до реалізації оптимізаційного методу Ньютона за формулою

$$X^{(h+1)} = X^{(h)} - [\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} \nabla f(X^{(h)}) \quad (6.7)$$

Якщо  $f(X)$  - квадратична функція, то для досягнення мінімуму  $f(X)$  достатньо тільки одного кроку. Але у випадку загальної нелінійної цільової функції мінімуму  $f(X)$  неможливо досягнути за один крок, тому рівняння (6.7) шляхом введення спеціального параметру величини кроку  $\lambda$  приводить до виду

$$X^{(h+1)} = X^{(h)} - \lambda^{(h)} \frac{[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]}{\|[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]\|} \quad (6.8)$$

де  $\|[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]\|$  - довжина вектору, яка дорівнює квадратному кореню добутку квадратів складових вектору.

Співвідношення  $\frac{\lambda^{(h)}}{\|[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]\|}$  - просто деякий скаляр  $\lambda^{*(k)}$ , тому рівняння (6.8) записують наступним чином:

$$X^{(h+1)} = X^{(h)} - \lambda^{*(h)} H^{-1}(X^{(h)}) \nabla f(X^{(h)}) \quad (6.9)$$

де  $S^{(h)} = H^{-1}(X^{(h)}) \nabla f(X^{(h)})$  - вектор напрямку пошуків.

Критерієм, який гарантує збіжність методу Ньютона при припущенні, що функція  $f(X)$  двічі диференційована, є те, що матриця, обернена матриці Гессе цільової функції, повинна бути додатньо визначеною:

$$[\nabla^2 f(X^{(k)})]^{-1} = H^{-1}(X^{(k)}) > 0 \quad (6.10)$$

Якщо в деякій точці  $\nabla^2 f(X^{(k)})^{-1}$  від'ємно визначена, то вказаний напрямок є напрямком підйому. Метод Ньютона має переваги, які містяться в квадратичній збіжності навколо мінімуму цільової функції (якщо  $H(X) > 0$  і цільову функцію можна достатньо добре апроксимувати квадратичною функцією), тобто саме там, де особливо проявляються слабкі сторони методів найшвидшого спуску. Навпаки, в області, далекій від мінімуму, методи найшвидшого спуску можуть виявитись кращими. Обернена матриця Гессе  $H^{-1}(X^{(k)})$  може апроксимуватись на кожних  $n$  кроках проектуємою матрицею  $R^{(k)}$ , так що в сутності здійснюється (приблизно) пошук Ньютона. Приведемо основні кроки алгоритму методу проєкцій.

**Крок 1.** Почати в точці  $X^{(0)}$  і встановити проєктуючу матрицю  $R^{(0)}=1$ .

**Крок 2.** Для  $K$ -го кроку проєктуюча матриця визначається за формулою:

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} + \frac{(\Delta X^{(k)} - R^{(k)} \Delta g^{(k)})^T (\eta^{(k)} \Delta g^{(k)})^T}{(\Delta g^{(k)})^T \eta^{(k)} (\Delta g^{(k)})},$$

де  $\Delta g^{(k)} = \nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})$ .

**Крок 3.** Якщо  $R^{(k)} \Delta f(X^{(k)}) \neq 0$ , то встановити  $S^{(k)} = -R^{(k)} \nabla f(X^{(k)})$  і мінімізувати  $f(X)$  в напрямку  $S^{(k)}$ ; точка мінімуму -  $X^{(k+1)}$ . Повторити крок 2. Після того як пройдено  $n$  напрямку пошуку, почати знову з кроку 1 при  $X^{(0)}=X^{(n)}$ . Якщо  $R^{(k)} \nabla f(X^{(k)}) = 0$  і  $\nabla f(X^{(k)}) = 0$ , то закінчити пошук. Якщо  $R^{(k)} \nabla f(X^{(k)}) = 0$ , а  $\nabla f(X^{(k)}) \neq 0$ , то почати з кроку 1, встановивши  $X^{(0)}=X^{(k)}$ .

### Приклад 6.1

Розглядається функція Розенброка  $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$  і початкова точка

$$X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5], \quad f(X^{(0)}) = 8,5. \text{ Мінімум функції відповідає точці } X = [1 \quad 1]^T.$$

Визначити напрямки пошуку за допомогою методу найшвидшого спуску і метода Ньютона.

Метод найшвидшого спуску

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2x_1 \\ 200(x_2 - x_1^2)^2 \end{bmatrix}; \quad \nabla f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0,685 \\ 0,729 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 - 0,685 \lambda \\ 0,5 - 0,729 \lambda \end{bmatrix}$$

Звідси

$$f(X^{(k+1)}) = f(\lambda) = 100 \left[ 0,5 - 0,729 \lambda - (0,5 + 0,685 \lambda)^2 \right]^2 + (1,5 + 0,685 \lambda)^2$$

Мінімум  $f(\lambda)$  по  $\lambda$  досягається в точці  $\lambda=0,164$ .

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0,612 & 0,381 \end{bmatrix}^T \quad f(X) = 2,6.$$

Потім визначається новий вектор  $S^{(k+1)}$

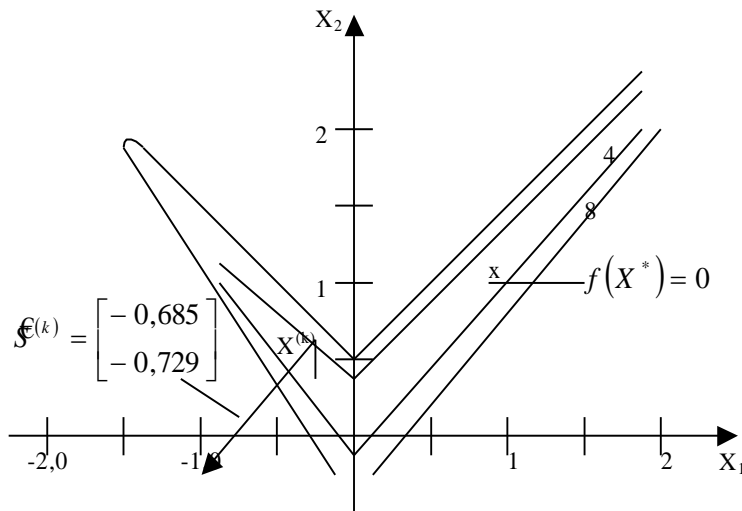


Рис. 6.4. Напрямки пошуку методами найшвидшого спуску і Ньютона

**Метод Ньютона**

$$\nabla^2 f(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} (-400 X_2 + 1200 X_1^2 + 2) & (-400 X_1) \\ (-400 X_1) & 200 \end{bmatrix}_{X^{(k)}} = \begin{bmatrix} 102 & 200 \\ 200 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X^{(k)} = -[\nabla^2 f(X^{(k)})]^{-1} \nabla f(X^{(k)}) = \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0,51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,22 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,53 \\ 0,28 \end{bmatrix} \quad f(X) = 2,33.$$

**Завдання**

Мінімізувати методом Ньютона наступні функції:

$$\text{à)} \quad f(X) = (X_1^2 + 12X_1 - 1)^2 + (49X_1^2 + 49X_2^2 + 84X_1 + 232X_2 - 681)^2, \quad X^{(0)} = [1 \quad 1]^T;$$

$$\text{á)} \quad f(X) = 100 \left[ X_3 - \left( \frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 \right]^2 + (1 - X_1)^2 + (1 - X_2)^2, \quad X^{(0)} = [1,2 \quad 2 \quad 0]^T;$$

$$\text{â)} \quad f(X) = (X_1^2 + X_2 - 11)^2 + (1 - X_1)^2 + (1 - X_2)^2, \quad X^{(0)} = [1,2 \quad 2 \quad 0]^T;$$

$$\text{ã)} \quad f(X) = (X_1 + 10X_2)^2 + 5(X_3 - X_4)^2 + (X_2 - 2X_3)^4 + 10(X_1 - X_4)^4; \quad X^{(0)} = [3 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T;$$

$$\text{ä)} \quad f(X) = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(1 - X_1)^2} [1 - X_1 - X_2(1 - X_1)^5]^2, \quad X^{(0)} = [-1,2 \quad 1]^T.$$

2. На прикладах порівняти методи, які ґрунтуються на використанні похідних першого і другого порядку.

Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати цільову функцію  $f(X) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$  методом Ньютона, де  $U_i = C_i - X_1(1 - X_2^i)$ ,  $C_1 = 1,5$ ;  $C_2 = 2,25$ ;  $C_3 = 2,625$ ;  $X^{(0)} = [2 \quad 0,2]^T$ . Як початкову вибрати точку  $X^{(0)} = [2 \quad 0,2]^T$ .

### Контрольні запитання

1. Розглянути наступні цільові функції:

$$\text{à)} \quad f(X) = 1 + X_1 + X_2 + \frac{4}{X_1} + \frac{9}{X_2};$$

$$\text{á)} \quad f(X) = (X_1 + 5)^2 + (X_2 + 8)^2 + (X_3 + 7)^2 + 2X_1^2X_2^2 + 4X_1^2X_3^2.$$

Чи буде метод Ньютона збігатись для цих функцій?

2. Що можна сказати про збіжність методу Ньютона, виходячи з розгляду матриці Гессе цільової функції?

3. Скільки потрібно буде кроків для досягнення мінімуму цільової функції методом Ньютона.

## 6.3 МЕТОД СПРЯЖЕНОГО ГРАДІЄНТУ

Метод Ньютона не має високої надійності при визначенні точки мінімуму з віддаленої точки, однак є ефективним у випадках, коли точка  $X^{(k)}$  знаходиться поблизу точки мінімуму. Серед методів, які характеризуються високою надійністю при визначенні точки мінімуму  $X^*$  з віддаленої точки  $i$ , з іншого боку, швидко збігаються в околі мінімуму, можна виділити клас алгоритмів, в основі яких лежить побудова спряжених напрямків. В загальному випадку система  $n$  лінійно незалежних напрямків пошуку  $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n-1)}$  зветься спряженою по відношенню до деякої додатньо визначеної (квадратичної) матриці  $H$ , якщо

$$(S^{(i)})^T H S^{(j)} = 0, \quad i \neq j \leq n - 1 \quad (6.11)$$

Спряженість - поняття, аналогічне ортогональності; дійсно, коли  $H = I$ , де  $I$  - одинична матриця, то у відповідності з рівнянням (6.11)  $(S^{(i)})^T S^{(j)} = 0$ . Якщо використовуються

спряжені напрямки, то будь-яка квадратична функція  $n$  змінних, що має мінімум, може бути мінімізованою за  $n$  кроків, по одному в кожному серед спряжених напрямків. В методі спряженого градієнту Флетчера-Рівса будується послідовність напрямків пошуку  $S$ , які є лінійними комбінаціями  $\nabla f(X^{(\hat{e})})$  - поточного напрямку найшвидшого спуску і  $S^{(0)}, \dots, S^{(k-1)}$  - попередніх напрямків пошуку, причому вагові коефіцієнти підбирають так, щоб зробити напрямки пошуку спряженими. Згадані коефіцієнти такі, що для визначення нового напрямку пошуку в точці  $X^{(k)}$  використовуються тільки поточний і передостанній градієнти.

Спочатку вибирають початкову точку простору проектування і шляхом обчислення компонент вектору градієнту визначається напрямок найшвидшого спуску. Потім в напрямку найшвидшого спуску ведеться одновірний пошук. Визначивши мінімум у цьому напрямку, визначають новий напрямок, який дещо відрізняється від напрямку вектору градієнту і визначається з відношення

$$S^{(\hat{e}+1)} = -\nabla f(X^{(\hat{e}+1)}) + S^{(\hat{e})} \frac{\nabla^T f(X^{(\hat{e}+1)}) \nabla f(X^{(\hat{e}+1)})}{\nabla^T f(X^{(\hat{e})}) \nabla f(X^{(\hat{e})})} \quad (6.12)$$

Після  $(n+1)$ -ї ітерації ( $k=n$ ) процедура циклічно повторюється з заміною  $X^{(0)}$  на  $X^{(n+1)}$ . Схема алгоритму методу Флетчера-Рівса показана на рис.6.5.

Перевага цього алгоритму полягає в тому, що він дозволяє використовувати переваги градієнтних методів, які з'являються при дослідженні цільової функції з розривними похідними. Так як  $n+1$  напрямків пошуку різняться від напрямків векторів градієнту, то пошук не зависає іна зламі, а йде вздовж лінії, яка поєднує точки зламів лінії рівня, яка, як правило, проходить через точку оптимуму. Крім того, тут потрібна оберненість матриць, програма методу потребує обмеженої пам'яті ЕОМ. Наведений метод застосовується і до неквадратичної функції, так як якщо пошук здійснюється поблизу мінімуму, то можна чекати на досягнення квадратичної збіжності.

### Приклад 6.2

Знайти за допомогою методу Флетчера-Рівса точку мінімуму функції

$$f(X) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1, \quad X^{(0)} = [0 \ 0]^T$$

#### Крок 1.

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 4x_2 + 1 \\ 6x_2 - 4x_1 \end{bmatrix}$$

$$S^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = -[1 \ 0]^T$$

#### Крок 2. Пошук вздовж напрямку:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f(X^{(0)}); \quad \alpha^{(0)} = \frac{1}{8},$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### Крок 3. $k=1$

$$S^{(1)} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} [1 \ 0]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

#### Крок 4. Пошук вздовж напрямку:



$$X^{(2)} = X^{(1)} + \alpha^{(1)} S^{(1)}; \quad \alpha^{(1)} = \frac{1}{4}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X^{(2)}) = [0 \quad 6]^T$$

Таким чином  $X^{(2)}=X^*$ . Рішення отримане у результаті проведення двох одномірних пошуків, оскільки цільова функція квадратична.

### Завдання

1. Починаючи з точки  $X^{(k)}=[1 \ -2,3]^T$ , визначити точку  $X^{(k+1)}$  методом спряженого градієнту для наступних цільових функцій:

а)  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ ;

б)  $f(X) = 2X_1^2 + 2X_1X_2 + 3X_2^3 + X_3$ ;

в)  $f(X) = \exp(X_1^2 + X_2^2 - X_3 - X_1 + 4)$ .

2. Мінімізувати за допомогою методу Флетчера-Рівса наступні функції, починаючи з вектора  $X^{(0)}=[2 \ -2,5 \ 2 \ -2,5]^T$ :

а)  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$ ;

б)  $f(X) = (X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$ ;

в)  $f(X) = X_1^3 + X_2 + X_3^3 + X_4 + 16X_1^2X_2 + 8X_2^2X_3 + X_3^2X_4 + 2$ .

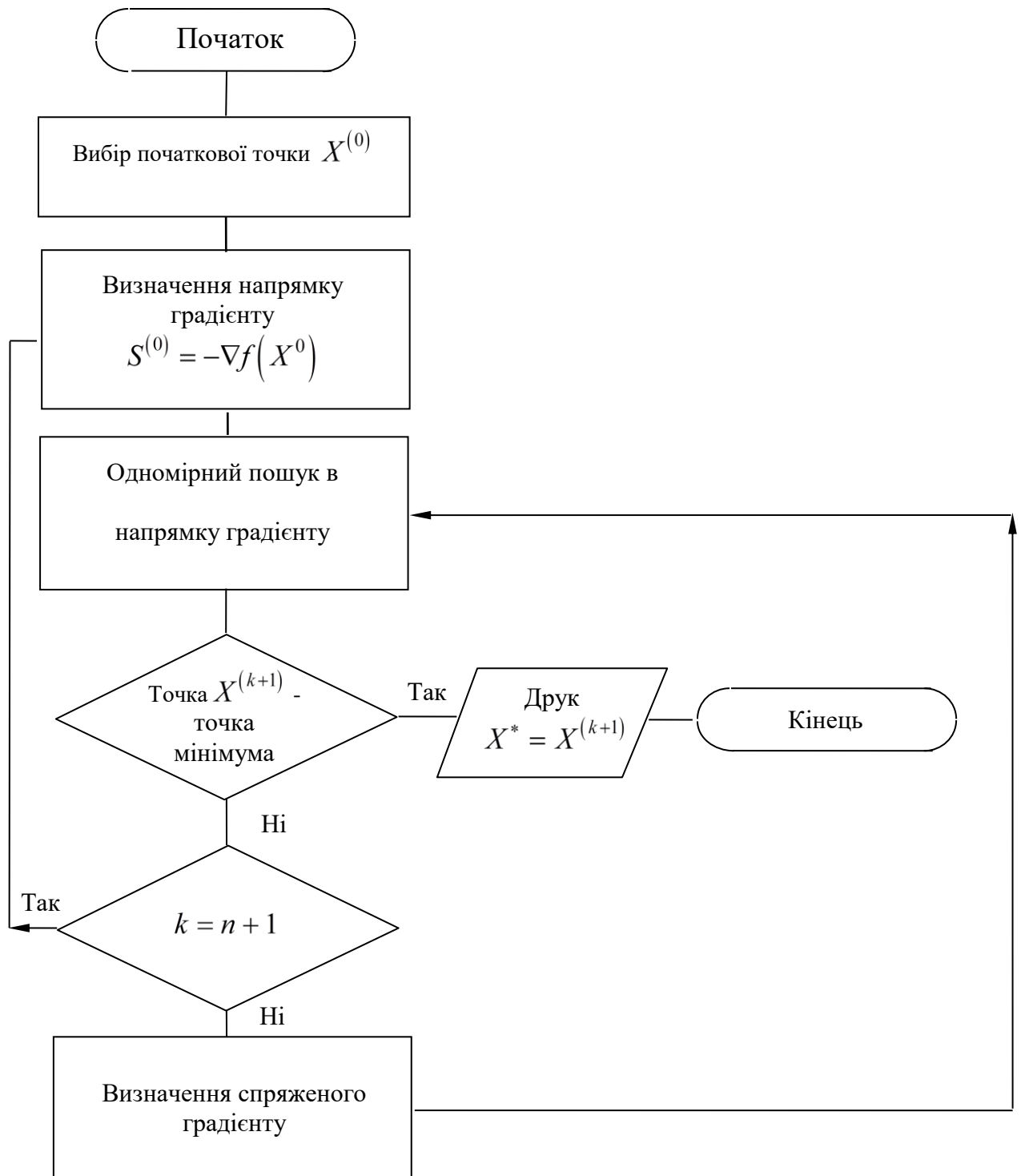


Рис. 6.5. Схема алгоритму методу Флетчера - Рівса

3. Використовуючи метод Флетчера-Рівса з початковою точкою  $X^{(0)} = [9 \ -7 \ 11]^T$  мінімізувати функцію  $f(X) = 3(X_1 - 1)^2 + 2(X_2 - 2)^2 + (X_3 - 2)^2$ .

#### Завдання для самостійної роботи

1. Максимізувати наступну цільову функцію

$$f(X) = X_1^3 \exp[X_2 - X_1^2 - 10(X_1 - X_2)^2].$$

Порівняти траєкторії оптимізації в просторі  $X$  при використанні методів:

- а) найшвидшого спуску,
- б) Ньютона,
- в) Флетчера-Рівса.

2. Щомісячні витрати, які пов'язані з експлуатацією компресору на газопроводі, визначаються формулою:

$$C = \frac{KQZ}{10^6 Z} \left( \ln \frac{P_1}{P_2} + b \right) + K_1 D^2 \left[ \frac{P_1}{2(S - P_1)} + \frac{P_1^2}{4(S + P_1)^2} \right]$$

де  $C$  - експлуатаційні витрати грн/рік;  $Q$  - кількість накачуваного газу  $m^3/c$ ;  $L$  - відстань між компресорними станціями, м;  $P_1, P_2$  - тиск відповідно на виході і всасуванні, Па;  $D$  - діаметр трубопроводу, м;  $K_1, K_2, Z, S, b$  - константи. Крім того:

$$Q = K_2 \frac{D^{2.5} (P_1^2 - P_2^2)^{0.54}}{L^{0.54} Z^{0.54}} \text{ при значеннях } Z=1, K=1370, L=20, b=1,476; K_1=0,081; K_2=1,13;$$

$S=100$  визначити  $P_1$  і  $P_2$ , мінімізувати  $C$  за допомогою методу Флетчера-Рівса.

#### Контрольні запитання

- 1. Умова спряженості незалежних напрямків.
- 2. З'ясувати, чи можливо, щоб ортогональний напрямок був спряженим.
- 3. Чи є напрямки  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  і  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ортогональними? Спряженими?

## 6.4 МЕТОДИ ЗМІННОЇ МЕТРИКИ

Існує клас методів, які називаються методами змінної метрики, або квазіньютонівськими, які апроксимують матрицю Гессе або обернену до неї. Квазіньютонівські методи мають лише перші похідні. в більшості цих методів використовують спряжені напрямки. Новий вектор  $X$  визначається за вектором попереднього кроку за допомогою рівняння:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} S^{(k)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \eta(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)}) \quad (6.13)$$

де матриця  $\eta(X^{(k)})$  являє собою апроксимацію  $H^{-1}(X)$ .

При використанні  $H^{-1}(X)$  необхідно точно визначити другі похідні  $f(X)$  і обернути матрицю  $H(X)$ , тоді як в методах змінної метрики для обчислення  $\eta X^{(k)}$  використовуються різні співвідношення, що не потребують ні того, ні іншого.

Співвідношення, що пов'язують точки  $X^{(k+1)}$  і  $X^{(k)}$  у випадку квадратичної цільової функції, наступні:

$$\nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)}) = H(X^{(k)})(X^{(k+1)} - X^{(k)}) \quad (6.14)$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на  $H^{-1}(X^{(k)})$ , отримаємо:

$$X^{(k+1)} - X^{(k)} = H^{-1}(X^{(k)}) [\nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})] \quad (6.15)$$

У достатньо великій групі методів  $H^{-1}(X^{(k+1)})$  апроксимується за допомогою інформації, яка була отримана на  $K$ -му кроці:

$$H^{-1}(X^{(\hat{e}+1)}) \approx \omega \cdot \eta^{(\hat{e}+1)} = \omega(\eta^{(\hat{e})} + \Delta \eta^{(\hat{e})}) \quad (6.16)$$

де  $\omega$  - масштабний множник, константа, яка звичайно дорівнює одиниці.

Вибір  $\Delta \eta^{(k)}$  по суті визначає метод змінної метрики. Для забезпечення збіжності матриця  $\omega \eta^{(k)}$  повинна бути додатньо визначеною і задовольняти рівняння (6.15) в тому

випадку, коли вона замінює  $H^{-1}$ . На  $(k+1)$  кроці відомі значення  $X^{(k)}$ ,  $\nabla f(X^{(k)})$ ,  $\nabla f(X^{(k+1)})$  і  $\eta^{(k)}$ . Потрібно визначити  $\eta^{(k+1)}$  так, щоб задовольняти співвідношення

$$\eta^{(\hat{k}+1)} \Delta g^{(\hat{k})} = \frac{1}{\omega} \Delta X^{(\hat{k})} \quad (6.17)$$

Хай  $\Delta \eta^{(k)} = \eta^{(k+1)} - \eta^{(k)}$ . Тоді рівняння

$$\eta^{(\hat{k})} \Delta g^{(\hat{k})} = \frac{1}{\omega} \Delta X^{(\hat{k})} - \eta^{(\hat{k})} \Delta g^{(\hat{k})} \quad (6.18)$$

Потрібно вирішити відносно  $\Delta \eta^{(k)}$ :

$$\Delta \eta^{(\hat{k})} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta \tilde{O} y^T}{y^T \Delta g^{(\hat{k})}} - \frac{\eta^{(\hat{k})} \Delta g^{(\hat{k})} Z^T}{Z^T \Delta g^{(\hat{k})}} \quad (6.19)$$

де  $y$  і  $Z$  - довільні вектори.

## 6.4.1 АЛГОРИТМ БРОЙДЕНА

Якщо для  $\omega=1$  в рівнянні (6.19) вибирається спеціальна лінійна комбінація двох напрямків  $\Delta X^{(k)}$  і  $\eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$ , а саме  $y=Z=\Delta X^{(k)} - \eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$ , то використовується алгоритм Бройдена, в якому  $\Delta \eta^{(k)}$  являється

$$\Delta \eta^{(h)} = \frac{[(\Delta X^{(h)}) - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})] [\Delta X^{(h)} - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})]^T}{[\Delta X^{(h)} - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})]^T (\Delta g^{(h)})} \quad (6.20)$$

де  $(\Delta X^{(k)}) = X^{(k+1)} - X^{(k)}$ ;  $(\Delta g^{(k)}) = \nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})$ .

Коли для кожного напрямку пошуку  $\lambda^{(k)}$  представляє собою скаляр, що мінімізує  $f(X)$  в цьому напрямку, то даний метод дає спряжені напрямки пошуку. У випадку, коли цільова функція не є квадратичною, використання рівняння (6.20) може привести до наступних негативних явищ:

1. Матриця  $\eta$  може перестати бути додатньо визначеною;
2. Обчислюване значення  $\Delta \eta^{(k)}$  може стати необмеженим (інколи навіть у випадку квадратичної функції) внаслідок помилок при заокругленні.
3. Якщо  $\Delta X^{(k)} = -\lambda^{*(k)} \eta(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})$  випадково співпадає з напрямком попереднього етапу, тоді матриця  $\eta(X^{(k)})$  стає невизначеною.

### Завдання

1. Мінімізувати алгоритмом Бройдена наступні цільові функції:

а)  $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5]^T$ ;

б)  $f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2$ ,  $X^{(0)} = [8 \quad 9]^T$ ;

в)  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4$ ,  $X^{(0)} = [4 \quad 4]^T$ .

2. Мінімізувати алгоритмом Бройдена наступні цільові функції:

а)  $f(X) = \left\{ 12 + X_1^2 + \frac{1 + X_2^2}{X_1^2} + \frac{X_1^2 X_2^2 + 100}{(X_1 X_4)^4} \right\} \frac{1}{10}$ ,  $X^{(0)} = [0,5 \quad 0,5]^T$ ;

а)  $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2 + 90(X_4 - X_3^2)^2 + (1 - X_3)^2 +$   
 $+ 10,1[(X_2 - 1)^2 + (X_4 - 1)] + 19,8(X_2 - 1)(X_4 - 1)$ ,  $X^{(0)} = [-3 \quad -1 \quad -3 \quad -1]^T$ .

### Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати алгоритмом Бройдена наступні цільові функції:

$$\text{à)} \quad f(X) = X_1^3 \exp[X_2 - X_1^2 - 10(X_1 - X_2)^2];$$

$$\text{á)} \quad f(X) = (0,35 + 0,4X_1 + 0,31X_2)^4 (0,85 - 0,6X_1 + 0,85X_2)^4 \exp[2 - (0,35 - 0,4X_1 + 0,35X_2)^4];$$

$$\text{â)} \quad f(X) = X_1^2 \exp[1 - X_1^2 - 20,25(X_1 - X_2)^2].$$

### Контрольні запитання

1. Чому додатня визначеність матриці  $\eta^{(k)}$  є необхідною умовою при рішенні задач мінімізації за допомогою методів змінної метрики?
2. Вивести рекурентне рівняння для визначення матриці напрямків за допомогою алгоритму Бroyдена, якщо необхідно максимізувати, а не мінімізувати цільову функцію.
3. Як найпростішим засобом використовувати алгоритм Бroyдена для максимізації, а не для мінімізації?

## 6.4.2 МЕТОД ДЕВІДОНА-ФЛЕТЧЕРА-ПАУЕЛЛА

Якщо в рівнянні (6.19) береться  $y = \Delta X^{(k)}$ ,  $Z = \eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$ , то матрицю  $\eta^{(k+1)}$  визначаємо за допомогою алгоритму Девідону-Флетчера-Пауелла (ДФП):

$$\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} + A^{(k)} - B^{(k)} = \eta^{(k)} + \frac{(\Delta X^{(k)})(\Delta X^{(k)})^T}{(\Delta X^{(k)})^T (\Delta g^{(k)})} - \frac{\eta^{(k)} (\Delta g^{(k)}) (\Delta g^{(k)})^T (\eta^{(k)})^T}{(\Delta g^{(k)})^T \eta^{(k)} (\Delta g^{(k)})} \quad (6.21)$$

Початкова матриця  $\eta$  звичайно вибирається у вигляді одиничної матриці  $\eta^{(0)} = I$  (але може бути і будь-якою симетричною додатньо визначеною матрицею), так що початковий напрямок мінімізації - напрям найшвидшого спуску. Під час оптимізації має місце поступовий перехід від градієнтного напрямку до ньютонівського; при цьому використовуються перевага кожного з них на відповідному етапі. Рекурентне співвідношення (6.21) на практиці цілком задовольняє, якщо помилка в розрахунку  $f(X)$  невелика. Роль матриці  $A^{(k)}$  полягає в забезпеченні того, щоб  $\eta \rightarrow H^{-1}$ , тоді як матриця  $B^{(k)}$  забезпечує додатню визначеність на всіх етапах і в межах виключає початкову матрицю  $\eta^{(0)}$ .

Використаємо формулу (6.21) на кількох етапах, починаючи з  $\eta^{(0)}$ :

$$\eta^{(1)} = I + A^{(0)} - B^{(0)},$$

$$\eta^{(2)} = \eta^{(1)} + A^{(1)} - B^{(1)} = I + (A^{(0)} + A^{(1)}) - (B^{(0)} + B^{(1)}),$$

.....

$$\eta^{(\hat{e}+1)} = I + \sum_{i=0}^{\hat{e}} A^{(i)} - \sum_{i=0}^{\hat{e}} B^{(i)}$$

У випадку квадратичної функції сума матриць  $A^{(i)}$  повинна дорівнювати  $H^{-1}$  при  $k=n-1$ , а сума матриць  $B^{(i)}$  - будується так, щоб вона скоротилась з матрицею, яка була обрана в якості початкової матриці  $\eta^{(0)}$  (тут - одиничної матриці). Потрібно визначити, що у випадку квадратичної цільової функції в алгоритмі ДФП використовується спряжені напрямки. Щоб кінцевий напрямок  $S^{(n-1)}$  був спряжений по відношенню до всіх попередніх напрямків, повинна виконуватись рівність  $(X^{(n-1)})^T H S^{(n-1)} = 0$  або при  $S^{(n-1)} = -\eta^{(n-1)} \nabla f(X^{(n-1)})$ :

$$(X^{(n-1)})^T H \eta^{(n-1)} \nabla f(X^{(n-1)}) = 0 \quad (6.22)$$

У випадку загальної цільової функції ефективність методу ДФП є скоріше наслідком використання спряжених напрямків, чим близькою до апроксимації  $H^{-1}$  матрицею  $\eta$ . В деяких задачах неможливо досягнути мінімуму цільової функції за допомогою методів змінної метрики, якщо ступінь точності одномірного пошуку недостатня, тому рекомендується, щоб точність одномірного пошуку була по крайній мірі еквівалентна точності, яка потрібна для закінчення основного алгоритму. Схема алгоритму методу ДФП показана на рис.6.6. .

Метод ДФП протягом ряду років продовжує залишатись найбільш широко застосовуваним при рішенні різноманітних задач. Основним недоліком методів такого типу є необхідність зберігати в пам'яті ЕОМ матрицю  $\eta$  порядку  $n \times n$ .

### Приклад 6.3

За допомогою метода Девідона-Флетчера-Пауелла знайти точку мінімуму функції

$$f(X) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1, \quad X^{(0)} = [0 \ 0]^T$$

**Крок 1.** Нехай  $S^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = -[1 \ 0]^T$

**Крок 2.** Пошук приведе до  $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}^T$

**Крок 3.**  $k = 1, \quad \eta^{(1)} = \eta^{(0)} + A^{(0)} - B^{(0)}$

$$\eta^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{(0)} - B^{(0)} = \frac{\Delta X^{(0)} (X^{(0)})^T}{(\Delta X^{(0)})^T \Delta g^{(0)}} - \frac{\eta^{(0)} \Delta g^{(0)} \Delta^T g^{(0)} \eta^{(0)}}{\Delta^T g^{(0)} \eta^{(0)} \Delta g^{(0)}}$$

$$\Delta X^{(0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta g^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$A^{(0)} - B^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T}$$

$$A^{(0)} - B^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\eta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,325 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad S^{(1)} = -\eta^{(1)} \nabla f(X^{(1)}) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^T$$

**Крок 4.** Пошук вздовж прямої:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda^{(1)} S^{(1)}, \lambda^{(1)} = \frac{5}{16}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T - \frac{5}{16} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}^T$$

#### Завдання

1. Мінімізувати наступні цільові функції методом ДФП:

а)  $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5]^T$ ;

а)  $f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2$ ,  $X^{(0)} = [8 \quad 9]^T$ ;

а)  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4$ ,  $X^{(0)} = [4 \quad 4]^T$ .

2. Мінімізувати наступні цільові функції методом ДФП:

а)  $f(X) = (X_1 + 10X_2)^2 + 5(X_3 - X_4)^2 + (X_2 - 2X_3)^2 + 10(X_1 - X_4)^4$ ,  $X^{(0)} = [3 \quad -10 \quad 1]^T$ ;

а)  $f(X) = 3(X_1 - 1)^2 + 2(X_2 - 2)^2 + (X_3 - 3)^2$ ,  $X^{(0)} = [9 \quad -7 \quad 11]^T$ .

**Завдання для самостійної роботи**

Вивчити вплив  $\varepsilon$  - параметру збіжності для пошуку вздовж прямої на процедуру розрахунків за методами Флетчера-Рівса, Бройдена, Девідона-Флетчера-Пауелла. Використовуючи кожен з перерахованих методів для рішення задачі мінімізації функції вигляду Вуда

$$f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2 + 90(X_4 - X_3^2)^2 + (1 - X_3)^2 + 10,1[(X_2 - 1)^2 + (X_4 - 1)^2] + 19,8(X_2 - 1)(X_4 - 1), \quad X^{(0)} = [-3 \quad -1 \quad -3 \quad -1]^T$$

при  $\varepsilon_2 = \alpha \varepsilon_1$ ;  $\alpha = 0,01; 0,1; 1$  і  $10$ .

### Контрольні запитання

1. Чи використовуються в алгоритмі ДФП спряжені напрямки?
2. Роль матриць  $A^{(k)}$  і  $B^{(k)}$  в рекурентному відношенні для обчислення матриці  $\eta^{(k+1)}$ .
3. Що є початковим напрямком мінімізації цільових функцій методом ДФП?

## 6.4.3 АЛГОРИТМ ПІРСОНА

Пірсон запропонував кілька методів обчислення матриці  $\eta$ , які використовують спряжені напрямки пошуку. Алгоритм Пірсона можна отримати, задаючи різним чином вектори  $u$  і  $Z$  в рівнянні (6.19).

### 1. Алгоритм Пірсона №2.

Покладемо в рівнянні (6.19)  $u=Z=\Delta X^{(k)}$ , а  $\omega=1$ . Тоді

$$\eta^{(h+1)} = \eta^{(h)} + \frac{(\Delta X^{(h)} - \eta^{(h)} \Delta g^{(h)})(\Delta X^{(h)})^T}{(\Delta X^{(h)})^T (\Delta g^{(h)})}, \quad \eta^{(0)} = R^{(0)},$$

де  $R^{(0)}$  - довільна додатньо визначена симетрична матриця.

Якщо через кілька кроків матриця напрямку стає поганою, коливаючись між додатньо і від'ємно визначеною, повтор початку алгоритму через кожні  $n$  кроків (тобто прирівнювання  $\eta^{(n+1)}$  до  $R^{(0)}$  після кожних  $n$  кроків) допомагає уникнути труднощів такого роду.

### 2. Алгоритм Пірсона №3.

Покладемо в рівнянні (6.19)  $u=Z=\eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$ , а  $\omega=1$ . Тоді

$$\eta^{(h+1)} = \eta^{(h)} + \left[ (\Delta X^{(h)}) - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)}) \right] \cdot \frac{\left[ \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)}) \right]^T}{(\Delta g^{(h)})^T \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})}.$$

### Завдання

1. Мінімізувати алгоритмом Пірсона наступні функції:

а)  $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2, \quad X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5]^T;$

б)  $f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2, \quad X^{(0)} = [8 \quad 9]^T;$

в)  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4, \quad X^{(0)} = [4 \quad 4]^T.$

Порівняти траєкторії оптимізації в просторі  $X$  при використанні методів змінної метрики.

2. Мінімізувати наступні цільові функції алгоритмом Пірсона і порівняти їх траєкторії оптимізації в просторі  $X$ :

а)  $f(X) = 3(X_1 - 4)^2 + 5(X_2 + 3)^2 + 7(2X_3 + 1)^2;$

б)  $f(X) = 1 - 2X_1 - 2X_2 - 4X_1X_2 + 10X_1^2 + 2X_2^2;$

в)  $f(X) = X_1^4 + X_2^4 + 2X_1^2X_2^2 - 4X + 3;$

г)  $f(X) = (X_1^2 + X_2 - 11)^2 + (X_1 + X_2^2 - 7)^2;$

д)  $f(X) = X_1^3 + X_2^3 - 3X_1 - 2X_2 + 2.$



### Завдання для самостійної роботи

Вивести рекурентне рівняння для визначення матриць напрямків за допомогою алгоритмів Пірсона.

### Контрольні запитання

1. Як уникнути труднощів в зв'язку з тим, що матриця напрямків  $\eta$  в процесі пошуку перестає бути додатньо визначеною?

## 6.5 МЕТОД ГОЛДШТЕЙНА-ПРАЙСА

Замість апроксимації оберненої матриці Гессе  $H^{-1}(X^{(k+1)})$ , як це робиться в методі Девідона-Флетчера-Пауелла, можна апроксимувати матрицю  $H(X^{(k+1)})$ , а потім побудувати обернену до неї. В алгоритмі Голдштейна та Прайса для оцінки  $H(X^{(k)})$  потрібна лише інформація про  $f(X^{(k)})$  та  $\nabla f(X^{(k)})$  [5].

Алгоритм мінімізує  $f(X)$ , якщо вона уявляє собою опуклу цільову функцію, при умові виконання де-яких обмежень. На К-му етапі алгоритм реалізує наступні кроки (величини  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  та  $\tau > 0$  задаються заздалегідь):

**Крок 1.** Обчислити в якості апроксимації  $\tilde{H}(X^{(k)})$  розмірності  $n \times n$ ,  $j$ -й стовпець котрий визначається за формулою

$$\nabla f(X^{(k)} + Q^{(k)} I_j) - \nabla f(X^{(k)}),$$

$$\text{де } Q^{(k)} = \tau \|\varphi(X^{(k-1)})\|, k > 0,$$

$$Q^{(0)} = \tau;$$

$I_j$  –  $j$ -й стовпець одиничної матриці  $I$  розмірності  $n \times n$ .

$\varphi(X^{(k)})$  -вектор-стовпець, визначається за формулою

$$\varphi(X^{(k)}) = \begin{cases} -\nabla f(X^{(k)}), \text{ якщо } K = 0, \text{ або } \tilde{H}(X^{(k)}) \text{ невизначена,} \\ \text{або } [\nabla^T f(X^{(k)}) \tilde{H}^{-1}(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})] \leq 0, \text{ так що} \\ \tilde{H}^{-1} \text{ не є додатньо визначеною;} \\ -H^{-1}(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)}) \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

$\tilde{H}(X^{(k)})$  не обов'язково симетрична матриця і якщо

$$[\nabla^T f(X^{(k)}) \tilde{H}^{-1}(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})] \leq 0,$$

та запропонований напрямок пошуку  $\varphi(X^{(k)})$  та напрямок градієнту  $\nabla f(X^{(k)})$  відрізняються більш ніж на  $90^\circ$ . Оскільки пошук проводиться в “мінус”-напрямку, то від'ємний знак при квадратичній формі проводить до компоненти в напрямку додатного градієнта.

**Крок 2.** Обчислюється

$$\lambda^{(k)} \text{ обирається таким чином, щоб } \delta \leq F(X^{(k)}, 1) \text{ або } \delta \leq F(X^{(k)}),$$

$$\lambda^{(k)} \leq 1 - \delta, \quad \lambda^{(k)} \neq 1.$$

Ці критерії потрібні для того, щоб не допускати кроки пошуку, котрі далеко виходять за область лінійної зміни цільової функції у околі  $X^{(k)}$ , запропоновану при апроксимації  $H(X)$ .

**Крок 3.** Береться  $X^{(K+1)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} \varphi(X^{(k)})$ .

**Крок 4.** Процес закінчується, коли  $\|\varphi(X^{(k)})\| < E$ .

Якщо матриця  $\hat{H}(X^{(k)})$  невизначена або не приводить до “напрямку униз”, метод Голдштейна-Прайса зводиться до методу найшвидшого спуску. Параметр  $\tau$  треба обирати так, щоб матриця  $\hat{H}(X^{(k)})$  апроксимувала  $H(X^{(k)})$  як можливо ближче. Величина  $\delta$  обирається так, щоб значення  $f(X^{(k)})$ ,  $K=1,2,\dots$  уявляли собою монотонно зменшуючу послідовність; чим ближче значення  $\delta$  до  $1/2$ , тим в більшій мірі  $f(X^{(k)} + \lambda \varphi(X^{(k)}))$  наближається до свого мінімуму за  $\lambda$ .

Алгоритм Голдштейна та Прайса за своєю ефективністю у відношенні об’єму обчислень  $f(X)$  та  $\nabla f(X)$  еквівалентним алгоритму Флетчера-Пауелла.

Для випадку рішення задач з погано обраними масштабами змінних метод виявляється менш задовільним, оскільки при цьому фактично здійснюється рух за методом найшвидшого спуску. Для даного алгоритму властиво порівняно мале число кроків одномірного пошуку на кожному новому етапі руху.

В методі Голдштейна-Прайса, як і в методах змінної матрики, можуть іноді зустрічатись від’ємні кроки або ці методи можуть закінчуватись в нестационарній точці.

Якщо матриця  $\tilde{H}$  робиться майже невизначеною, то напрямки пошуку можуть бути обрані так, як в випадку якби в задачі були погано обрані масштаби змінних, не дивлячись на те, що це не так.

### Завдання

1. Мінімізуйте наступні функції методом Голдштейна-Прайса:

а)  $f(X) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 2)^2$ ,  $X^{(0)} = [3 \ 4]^T$ ,

б)  $f(X) = 3(x_1 + 1)^2 + 6(x_2 - 2)^2$ ,  $X^{(0)} = [0 \ 0]^T$ ,

в)  $f(X) = 10x_1^2 + 2(x_2 - 5)^2$ ,  $X^{(0)} = [1 \ 2]^T$

2. Мінімізуйте наступні функції методом Голдштейна-Прайса:

а)  $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1,2 \ 0]^T$ ,

б)  $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1,2 \ 0]^T$ ,

в)  $f(X) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$ ,  $X^{(0)} = [-1,2 \ 0]^T$

### Завдання для самостійної роботи

1. Максимізуйте наступну цільову функцію:

$$f(X) = x_1^3 \exp[x_2 - x_1^2 - 10(x_1 - x_2)^2]$$

методом Голдштейна-Прайса. Порівняйте траєкторію оптимізації у просторі  $X$  при використанні

а) методу Голдштейна-Прайса;

б) методу Флетчера-Пауелла

4. Мінімізуйте суму квадратів відхилень

$$F = \sum_{i=1}^n (Y, \text{яке спостерігалося} - Y \text{ передбачене})_i^2, \quad \text{де } Y \text{ передбачене} = \frac{K_1}{K_1 - K_2} (e^{-K_2 t} - e^{-K_1 t})$$

для наступних даних:

T	Y
0,5	0,263
1,0	0,455
1,5	0,548

### Контрольні запитання

1. Що являє собою початковий напрямок пошуку в методі Голдштейна-Прайса?
2. Чи використовує алгоритм Голдштейна-Прайса спряжені напрямки?
3. У якому випадку в методі Голдштейна-Прайса можуть зустрітися негативні кроки та як їх уникнути?
4. Як у найпростіший засіб використати алгоритм для максимізації, а не мінімізації?

## 6.6 ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ

Як критерій для оцінювання алгоритмів градієнтних методів нелінійного програмування при відсутності обмежень часто розглядаються наступні:

1. Успіх в досягненні оптимального рішення (в межах заданої ступені точності) для широкого класу задач.
2. Число необхідних визначень цільової функції.
3. Машинний час, який потрібен для реалізації алгоритмів (в межах бажаної ступені точності).

Метод зветься збігаючимся, якщо виконується нерівність:

$$\frac{|\varepsilon^{(\hat{e}+1)}|}{|\varepsilon^{(\hat{e})}|} \leq 1 \quad (6.24)$$

де  $\varepsilon = X^{(k)} - X^*$ , де  $X^{(k)}$  - результат K-ої ітерації;  $X^*$  - рішення виконується на кожній ітерації.

Оскільки при розрахунках частіше застосовують кінцеві десятичні дробі, навіть самий ефективний алгоритм потребує нескінченної послідовності ітерацій. Тому, в першу чергу, інтерес представляють асимптотичні властивості збіжності вивчаємих методів. Алгоритм має збіжність порядку r, якщо

$$\frac{|\varepsilon^{(\hat{e}+1)}|}{|\varepsilon^{(\hat{e})}|^N} = C,$$

де C - постійна величина.

Якщо r=1 чи r=2, то алгоритм характеризується лінійною чи квадратичною швидкістю збіжності відповідно. При r=1 і C=0 алгоритм характеризується суперлінійною швидкістю збіжності.

Швидкість збіжності найпростіших градієнтних методів, методу найшвидшого спуску залишається недопустимо низькою при рішенні ряду практичних задач. Метод найшвидшого спуску часто використовується при реалізації градієнтних методів як початкової процедури. Результати досліджень градієнтних методів [17] показали переваги квазіньютонівських методів. Однак точність розрахунків на ЕОМ здійснює більший вплив на реалізацію квазіньютонівських методів, ніж на реалізацію методів спряжених градієнтів. Це дозволило зробити висновок про те, що у розрахунках на мікроЕОМ

(подібних до тих, що використовуються в управлінні технологічними процесами) метод Флетчера-Рівса може виявитись більш ефективним. Д. Хімелблау [13] провів дослідження сходимості градієнтних методів. Процедура ДФП представляється кращою в змісті загального методу нелінійного програмування при відсутності обмежень по відношенню до отримання вірних значень вектору  $X$  в точці мінімуму цільової функції. Метод Ньютона завжди видавався легшим; що стосується інших методів, то, за виключенням методу Флетчера-Рівса, який не спрацьовує в деяких тестах, всі вони видались рівної ефективності. Використання методів змінної метрики з перезавданням матриці  $\eta$  є найбільш придатним на ранніх етапах оптимізації, тоді як віднова від перезавдання віддається перевага на більш пізніх етапах, коли  $X$  буває настільки близько до  $X^*$ , що ефективними стають властивості спряженості алгоритмів змінної метрики. На основі порівняння часу рішення найліпшими видались алгоритми ДФП; слухними - алгоритми Флетчера-Рівса, Пірсона №3; надійними - алгоритм Пірсона №2.

## **7. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ**

При рішенні задач нелінійного програмування з обмеженнями зустрічаються більші труднощі, ніж при рішенні задач безумовної оптимізації за тієї причини, що рішення, яке потрібно віднайти повинне відповідати додатковим вимогам, тобто задовольняти фігуруючим в задачі умовам. Для рішення задач нелінійного програмування, що має обмеження, часто застосовують один з наступних підходів:

- 1) перебудова задачі нелінійного програмування з обмеженнями в еквівалентну їй послідовність задач безумовної оптимізації за допомогою штрафних функцій;
- 2) використання методів лінійного програмування для рішення задач нелінійного програмування з застосуванням процедури послідовної лінійної апроксимації [15].
- 3) використання методу ковзного допуску, що дозволяє покращити значення цільової функції [13].

### **7.1 МЕТОДИ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ**

В основу методів штрафних функцій в області нелінійного програмування покладена ідея перебудови загальної нелінійної задачі (3.1)-(3.3) в послідовність задач без обмежень шляхом додавання до цільовій функції однієї або кількох функцій, які встановлюють обмеження для того, щоб обмеження, як такі, в задачі оптимізації не фігурували. В цьому випадку мінімізація може здійснюватись за допомогою більш простих алгоритмів. При використанні методів штрафних функцій отримується оптимальний ефект за рахунок постійного компромісу між необхідністю задоволення обмежень і процесом мінімізації  $f(x)$ , який досягається шляхом присвоєння належної ваги цільової функції і функціям, які визначають обмеження. Методи штрафних функцій можна поділити на 2 класи: параметричні і непараметричні методи. Параметричні методи характеризуються наявністю одного чи кількох певним чином підібраних параметрів, які входять у склад штрафної функції в якості вагових коефіцієнтів. Параметричні методи розпадаються на 3 категорії: методи внутрішньої точки; методи зовнішньої точки; комбіновані методи. При використанні методів внутрішньої точки рівень цільової функції утримується вдалині від межі припустимої області (тобто точка  $X^{(k)}$  постійно знаходиться всередині припустимої області) за допомогою штрафної функції. Методи зовнішньої точки, навпаки, генерують послідовність точок, які виходять за межі припустимої області, але дають в межах припустимі рішення. Штрафна функція не дозволяє вектору  $X$  надто відходити від межі припустимої області. Формально перебудова задачі, яку представлено співвідношеннями (3.1)-(3.3), в задачу мінімізації обмежень проводиться шляхом переходу до задачі мінімізації:

$$P(X^{(\hat{e})}, \rho^{(\hat{e})}) = f(X^{(\hat{e})}) + \sum_{i=1}^m \rho_i^{(\hat{e})} H(h_i(X^{(\hat{e})})) + \sum_{i=m+1}^p \rho_i^{(\hat{e})} G(g_i(X^{(\hat{e})})) \quad (7.1)$$

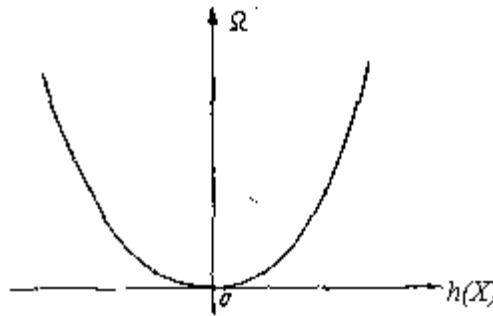
де  $P(X^{(k)}, \rho^{(k)})$  - узагальнена приєднана функція чи штрафна функція;  $\rho_i^{(k)} \geq 0$  - вагові коефіцієнти;  $K$  - кількість завершених етапів обчислювального оптимізаційного процесу. При будь-якому виборі функціоналів  $H(h_i(X))$  і  $G(g_i(X))$  потрібно, щоб:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\hat{e} \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^p \rho_i^{(\hat{e})} G(g_i(X^{(\hat{e})})) &= 0 \\ \lim_{i=1}^m \rho_i^{(\hat{e})} H(h_i(X^{(\hat{e})})) &= 0 \\ \lim_{\hat{e} \rightarrow \infty} |P(X^{(\hat{e})}, \rho^{(\hat{e})}) - f(X^{(\hat{e})})| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

В міру розвитку процесу оптимізованого пошуку вплив входячих в  $P(X^{(k)}, \rho^{(k)})$  функцій обмежень на значення даної приєднаної функції постійно слабне, а в межі повністю зникає. Значить, екстремум  $P(X)$  співпадає з екстремумом  $f(X)$ .

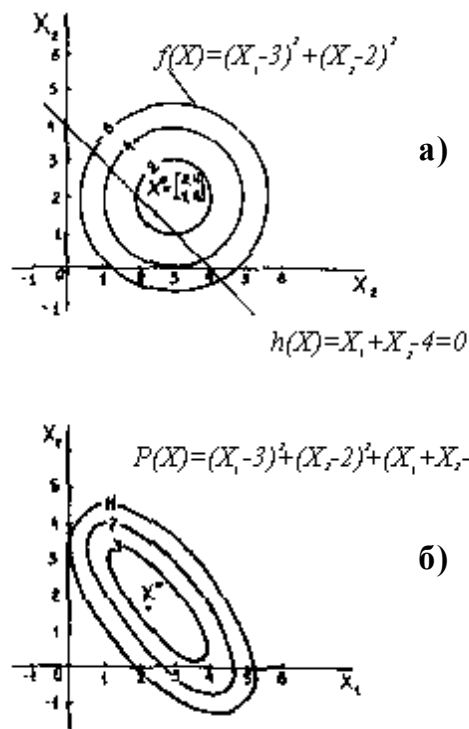
### 7.1.1 ОСНОВНІ ТИПИ ШТРАФІВ

Для обліку обмежень-рівностей часто використовують квадратичний штраф (Рис.7.1):



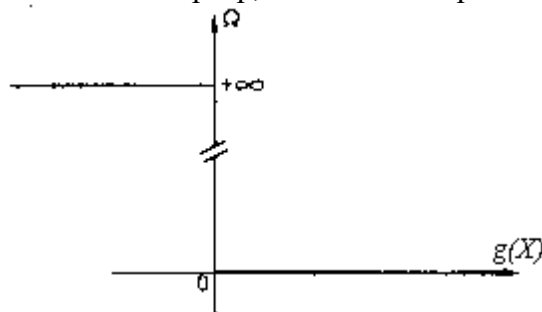
**Рис.7.1. Квадратичний штраф**

При мінімізації цей штраф запобігає відхиленню значення  $h(X)$  від нуля. На Рис.7.2 графічно показана штрафна функція, отримана шляхом додавання до  $f(X)$  квадратичним штрафом (з ваговим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці).



**Рис.7.2. Лінії рівня цільової а) та штрафної функції б)**

При врахуванні обмежень-нерівностей використовують різні типи штрафів. Простішим серед них є нескінченний бар'єр, показаний на рис.7.3.



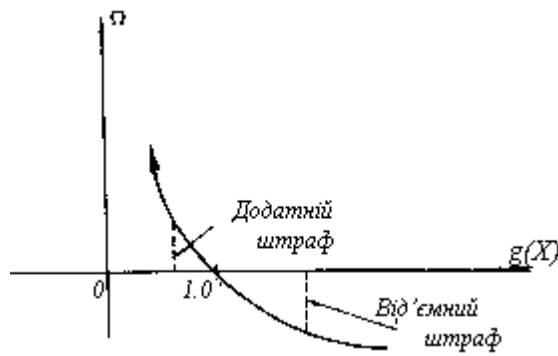
**Рис.7.3. Нескінчений штраф**

Відповідний вираз приймає нескінченно великі значення в неприпустимих точках і нульове значення - в припустимих. У даному випадку штрафна функція  $P(X, \rho)$  - розривна на межі припустимої області. В машинній реалізації нескінченних штрафів використовують велике додатнє число. Наприклад, цей штраф використовується у формулі

$$\Omega = 10^{20} \sum_{j \in g} |g_j(X)| \quad (7.4)$$

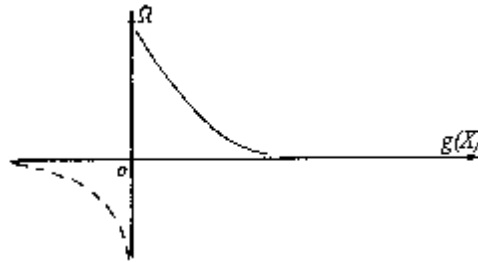
де  $g$  - множина індексів порушень обмежень,  $g_j(X) < 0$  при  $j \in g$ . Іншим широко використовуваним типом штрафу є логарифмічний центр (рис.7.4).

$$\Omega = -\rho \ln[g(X)] \quad (7.5)$$



**Рис.7.4. Логарифмічний штраф**

Цей штраф додатний при всіх  $X$  таких, що  $0 < g(X) < 1$  і від'ємний при  $g(X) > 1$ . Логарифмічний штраф - бар'єрна функція, не визначена в неприпустимих точках (тобто для  $X$  таких, що  $g(X) < 0$ ). Ітераційний процес починається з припустимої точки початкової при додатньому значенні  $\rho$ . Після рішення кожної підзадачі безумовної мінімізації параметр  $\rho$  зменшується і в межах прагне до нуля. Штраф, заданий оберненою функцією рис.7.5.



**Рис.7.5. Штраф, заданий оберненою функцією**

$$\Omega = \rho \left[ \frac{1}{g(X)} \right] \quad (7.6)$$

Штраф, заданий оберненою функцією, не має від'ємних значень в припустимій області. Цей штраф є бар'єром; можливі труднощі, які пов'язані з появою неприпустимих точок.

## 7.1.2 МЕТОД ПОСТУПОВОЇ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

Алгоритм методу поступової безумовної мінімізації (МПБМ), розвинутий Фіакко і Мак-Корміком, який застосовується для рішення задачі нелінійного програмування вигляду (3.1)-(3.3), в якій  $f(X)$  і  $g(X)$  ( $i=m+1, \dots, p$ ) можуть бути нелінійними функціями незалежних змінних, а  $h_i(X)$  ( $i=1, \dots, m$ ) повинні бути лінійними функціями незалежних змінних. При таких умовах гарантується збіжність послідовності проміжних рішень до оптимального рішення задачі нелінійного програмування. Метод МПБМ в основному приводиться до рішення деякої послідовності задач без обмежень, причому в межах знаходиться мінімум початкової вихідної задачі нелінійного програмування. В варіанті метода 1967 р. задачу перетворюють в послідовність задач без обмежень, використовуючи штраф, заданий оберненою функцією і шляхом побудови  $P$ - функції вигляду

$$P(X^{(\hat{e})}, r^{(\hat{e})}) = f(X^{(\hat{e})}) + (r^{(\hat{e})})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m h_i^2(X^{(\hat{e})}) + r^{(\hat{e})} \sum_{i=m+1}^p \frac{1}{g_i(X^{(\hat{e})})} \quad (7.7)$$

де значення вагових коефіцієнтів  $r$  додатні і утворюють монотонно зменшуючу послідовність  $\{r \mid r^{(0)} > r^{(1)} > \dots > 0\}$ .

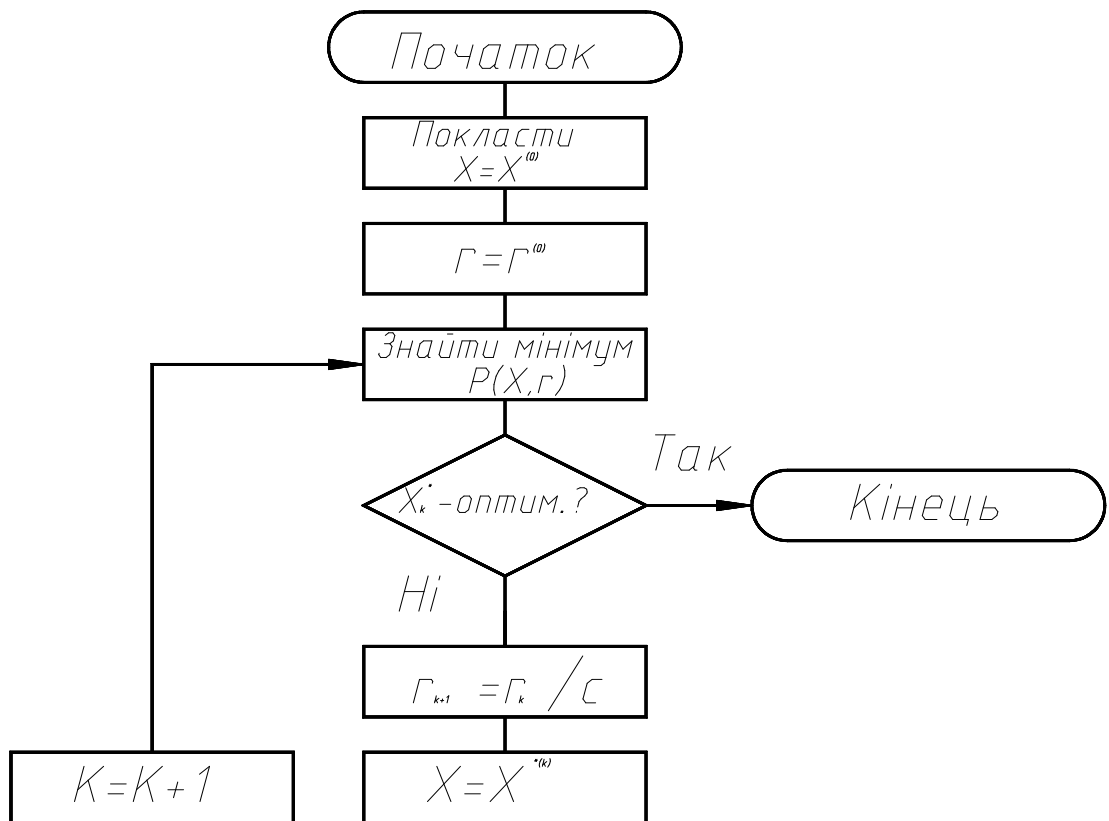
У варіанті МПБМ 1970 р. застосовується логарифмічний штраф

$$P(X^{(\hat{e})}, r^{(\hat{e})}) = f(X^{(\hat{e})}) + \frac{1}{r^{(\hat{e})}} \sum_{i=1}^m h_i^2(X^{(\hat{e})}) - r^{(\hat{e})} \sum_{i=m+1}^p \ln g_i(X^{(\hat{e})}) \quad (7.8)$$

Як і у варіанті (7.7) тут використовується квадратичний штраф для урахування обмежень-рівностей. Процедура мінімізації функцій (7.7) і (7.8) починається з внутрішньої (або граничної) точки, тобто з точки  $X^{(0)}$ , в якій всі граничні умови у вигляді нерівностей задоволені. Після визначення  $r^{(0)}$  точка  $X^{(1)}$  розраховується мінімізацією  $P(X, r^{(0)})$ . Потім визначається  $r^{(1)}$  і знаходиться  $X^{(2)}$  і т.д. Швидкість збіжності залежить від початкового вибору  $r^{(0)}$  і від способу редуцирування даного параметру. Одним з способів вибору початкового значення  $r^{(0)}$ , який було запропоновано Фіакко і Мак-Корміком, є  $r^{(0)}=1$ . При цьому вказано, що ефективність алгоритму не зміниться значно, якщо послідовність  $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(k)}$  індуціювати простим співвідношенням

$$r^{(\hat{e})} = \frac{r^{(\hat{e}-1)}}{C}$$

де  $C > 1$  є константою (завжди вважають  $C=4$ ). На рис.7.6 показано схему методу.



**Рис.7.6. Схема алгоритма МПБМ**

#### Завдання

- Мінімізувати  $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$  при обмеженнях:  
 $g_1(X) = X_1 + 1 \geq 0$ ;



$$g_2(X)=1-X_2\geq 0;$$

$$g_3(X)=4X_2-X_1-1\geq 0;$$

$$g_4(X)=1-0,5X_1-X_2\geq 0;$$

Записати для цієї задачі штрафні функції, використовуючи: логарифмічний штраф; штраф, який задано оберненою функцією. Дослідити кожну із функцій у точках  $X^{(0)}=[-1 \ 1]^T$  та  $[-0,5 \ 0,5]^T$ , звернувши увагу на труднощі, що зустрічаються.

2. Мінімізувати функцію  $f(X) = -X_1^2 - X_2^2$  при обмеженнях

$$X_1 \geq 0;$$

$$X_2 \geq 0;$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3.$$

3. Використовуючи МПБМ, мінімізувати функцію  $f(X) = \frac{4}{X_1} + \frac{9}{X_2} + (X_1 + X_2)$  при обмеженнях

$$X_1 \geq 0;$$

$$X_2 \geq 0;$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4.$$

4. Мінімізувати функцію  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$  при обмеженнях

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 3;$$

$$X_1 X_2 X_3 \geq 3;$$

$$X_1 > 0;$$

$$X_2 \geq 0;$$

$$X_3 \geq 0;$$

5. Мінімізувати функцію  $f(X) = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - 1)^2$  при обмеженнях

$$y_1(X) = \frac{X_1^2}{4} + X_2^2 + 1 \geq 0,$$

$$h_2(X) = X_1 - 2X_2 + 1 = 0$$

а) побудувати функцію  $P(X, r)$  при  $r=0,04$ . Зобразити побудовану  $P$ -функцію графічно;

б) визначити напрямки оптимізаційного пошуку з початкової внутрішньої точки

$$X^{(n)} = [0,748 \ 0,548]^T;$$

в) знайти вектор  $X^{(1)}$ ;

г) Чи може одна з точок  $X^{(k)}$  виявитися зовні припустимої області.

### 7.1.3 МЕТОД РОЗЕНБРОКА

Непараметрична схема методу штрафних функцій запропонована Розенброком. Метод співмножників є спробою запобігти погіршенню зумовленості допоміжних підзадач у звичайній схемі методу штрафних функцій.

Метод Розенброка дає змогу знайти максимум або мінімум нелінійної функції багатьох змінних  $f(X)$  при нелінійних обмеженнях у вигляді нерівностей:

оптимізувати  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при обмеженнях  $G_k \leq X_k \leq H_k \quad (k=1, 2, \dots, m)$ .

Внутрішні змінні  $X_{n+1}, \dots, X_m$  є незалежними функціями зовнішніх незалежних змінних  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Верхні і нижні обмеження  $H_k$  і  $G_k$  можуть бути константами або функціями незалежних змінних.

Опис алгоритму. Алгоритм ґрунтується на методі Розенброка за відсутності обмежень [5], за допомогою якого здійснюється пошук оптимуму доти, поки не будуть виконані умови закінчення пошуку або не буде досягнута гранична зона навколо обмежень. Граничні зони знаходять так:

нижня зона

$$G_k \leq X_k \leq (G_k + (H_k - G_k)10^{-4})$$

верхня зона

$$H_k \geq X_k \geq (H_k - (H_k - G_k)10^{-4})$$

$$K=1,2,\dots,m.$$

Метод потребує завдання початкової точки, яка задовольняє обмеженням і не лежить у граничних зонах.

Алгоритм включає кілька кроків: (рис 7.7)

**Крок 1.** Знайти найкраще поточне значення функції цілі  $f_0$  у точці, для якої виконується обмеження, і найкраще поточне значення функції цілі  $f_1$  у точці, де також задовольняються обмеження і не порушені межі граничних зон. Спочатку  $f_0$  і  $f_1$  порівнюються до значення функції цілі у початковій точці.

**Крок 2.** Якщо поточне значення функції цілі  $f(X)$  гірше за  $f_0(X)$  або не задовольняються обмеження, крок вважають невдалим і процедура пошуку продовжується згідно з методом Розенброка при безумовній оптимізації.

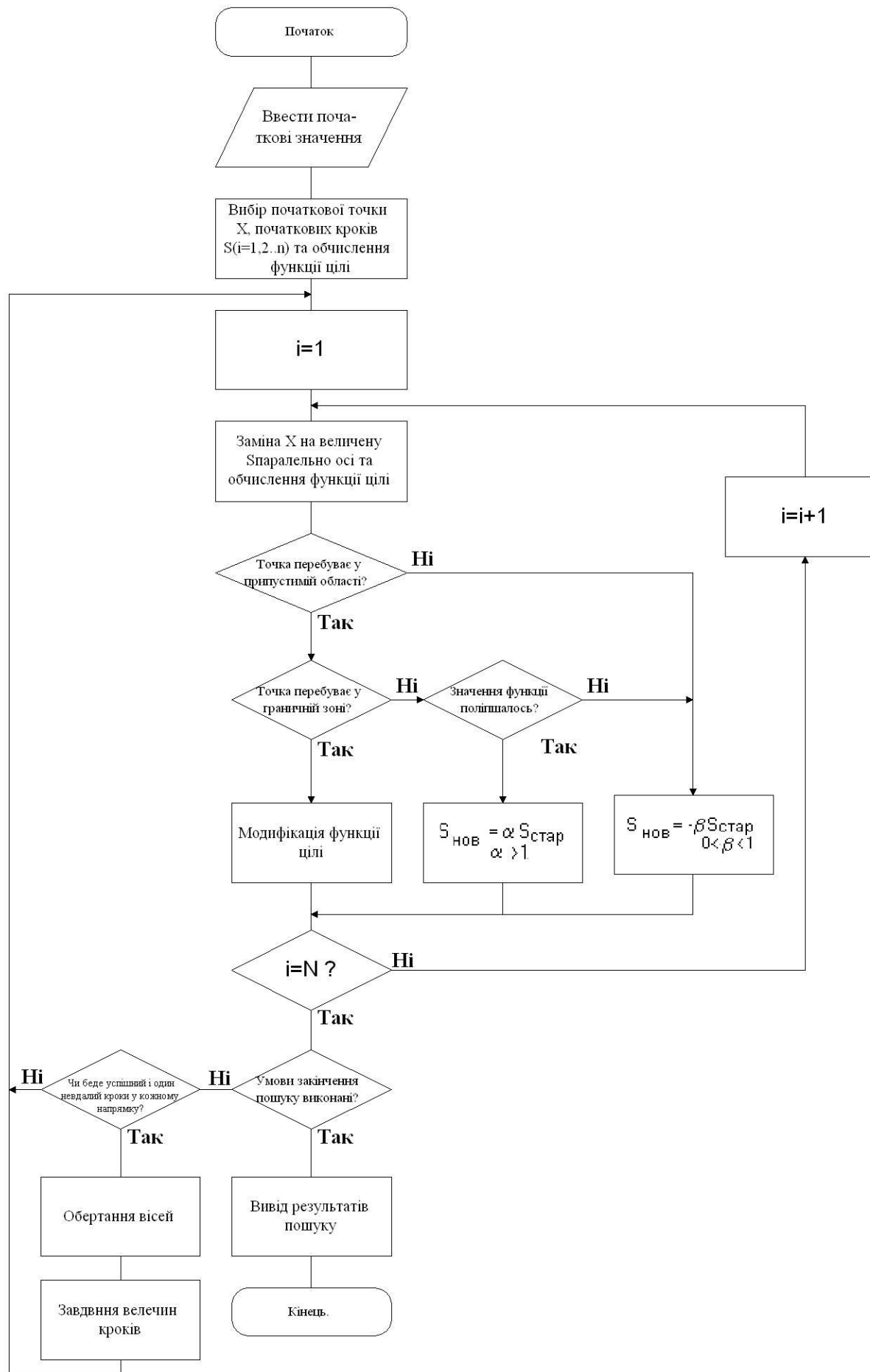


Рис. 7.7 Схеми алгоритма методу Розенброка

**Крок 3.** Якщо поточна точка лежить в середині граничної зони, функція цілі модифікується так:

$$f(X^{(k+1)}) = f(X^{(k)}) - (f(X^{(k)}) - f_1(X))(3\lambda - 4\lambda^2 + 2\lambda^3),$$

де  $\lambda = Q/W$ ;  $Q$  - відстань від точки до межі зони;  $W$  - ширина граничної зони.

Звідси маємо:

Для нижньої зони:

$$\lambda = \frac{G_k + (H_k - G_k)10^{-4}}{(H_k - G_k)10^4};$$

Для верхньої зони:

$$\lambda = \frac{X_k - (H_k - (H_k - G_k))10^{-4}}{(H_k - G_k)10^4}.$$

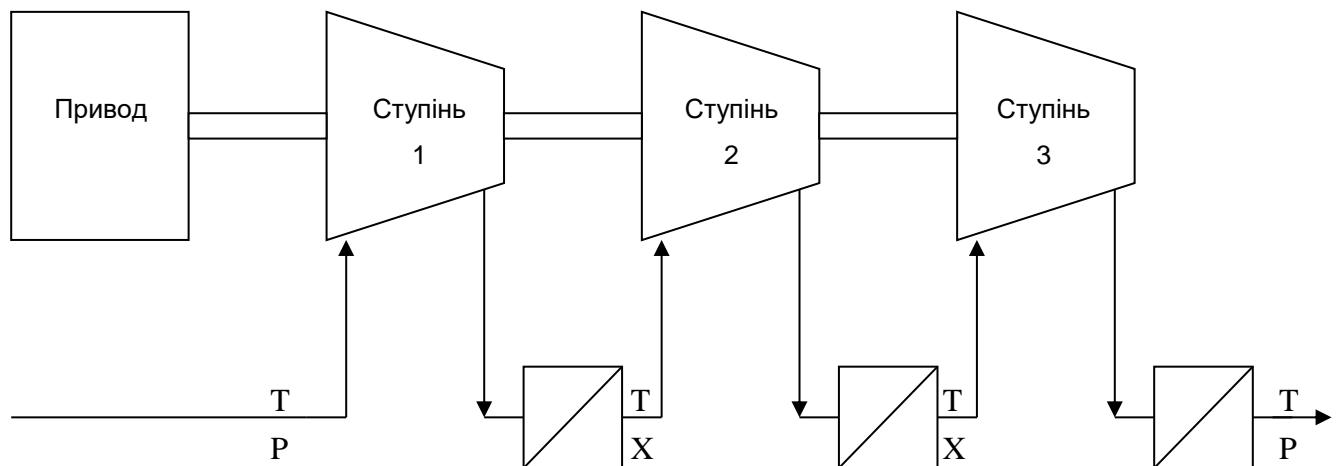
На внутрішній поверхні граничної зони  $\lambda=0$ , тобто функція не модифікується:  $f(X^{(k+1)}) = f(X^{(k)})$ . Якщо точка перебуває на межі,  $\lambda=1$ , отже  $f(X^{(k+1)}) = f_1(X)$ . Таким чином, значення функції змінюється на найкраще поточне значення функції у припустимій області, а не в граничній зоні.

**Крок 4.** Якщо поліпшення функції цілі отримано без порушення зон або обмежень,  $f(X)$  прирівнюється до  $f_1(X)$  і пошук триває.

**Крок 5.** Пошук закінчується при виконанні умов його зупинки.

#### Завдання для самостійної роботи

Триступеневий компресор, зображений на рис. 7.8., призначений для стиснення газу, що поступає під тиском 1 атм у кількості  $N$  моль/год, до тиску 64 атм. Припускається, що стиснення двостороннє й адіабатичне; після кожної його стадії газ охолоджується до початкової температури  $T$ . Потрібно вибрати значення тиску на проміжних стадіях процесу, яке мінімізує споживання енергії.



**Рис. 7.8. Схема багатоступеневого компресора**

Для двостороннього адіабатичного стиснення з охолодженням початкової температури  $T$  робота газу визначається за формулою

$$W = NRT \left( \frac{K}{K-1} \right) \left( \frac{P_{вих}}{P_{вх}} \right)^{\frac{(K-1)}{K}} - NRT \left( \frac{K}{K-1} \right), \text{ де } R - \text{універсальна газова стала; } K = C_p/C_v -$$

коефіцієнт Пуассона.

При триступеновому стисненні повна робота газу визначається за формулою

$$W_{повн} = NRT \left( \frac{K}{K-1} \right) \left\{ \left( \frac{X_1}{1} \right)^\alpha + \left( \frac{X_2}{X_1} \right)^\alpha + \left( \frac{64}{X_2} \right)^\alpha - 3 \right\}, \text{ де } \alpha = (K-1)/K; X_1 - \text{вихідний тиск}$$

на першому ступені;  $X_2$  – вихідний тиск на другому ступені.

Якщо для даного газу  $\alpha = 1/4$ , то при фіксованих  $T$  і  $N$  оптимальні тиски  $X_1$  і  $X_2$  можна здобути, розв'язуючи методом Розенброка таку задачу:

$$\text{Мінімізувати } f(X) = X_1^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{X_2}{X_1} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{64}{X_2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

при обмеженнях  $X_1 \geq 1, X_2 \geq 1, 64 \geq X_2$ .

### Контрольні запитання

Назвіть основні відміни методу співмножників від інших методів, побудованих на перетворенні задачі, наприклад методу штрафних функцій.

## 7.1.4 МЕТОД ФЛЕТЧЕРА - ПАУЕЛЛА

Параметричний метод внутрішньої точки, який об'єднує метод Флетчера - Пауелла за відсутності обмежень з методом бар'єрних поверхонь (МБП), дозволяє ефективно розв'язувати задачі нелінійного програмування за наявності обмежень.

Метод бар'єрних поверхонь побудовано на використанні штрафної функції вигляду

$$P(X, r) = f(X) + r \sum_{i=1}^p \frac{\omega_i}{g_i(X)} \quad (7.9)$$

де  $r$  – параметр, значення якого зменшується з кожним циклом;

$\omega_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) – додатні вагові коефіцієнти.

Співвідношення (7.9) перетворює задачу нелінійного програмування за наявності обмежень на задачу без обмежень з набагато складнішою структурою, але яка характеризується наявністю досить сильних бар'єрів уздовж межі припустимої області.

Побудувавши штрафну функцію і визначивши внутрішню точку, переходимо до реалізації процедури мінімізації  $P(X, r)$  при заданому початковому значенні  $r^{(0)}$ . кінцева для першого етапу обчислювальної процедури точка  $X$  стає вихідною (стартовою) точкою для мінімізації функції  $P$  при зменшеному значенні  $r$ . Кінцевий етап мінімізації реалізується при дуже малому значенні  $r$ , так що вихідна точка  $X$  з точністю до встановленого допуску може опинитись або на одній з обмежувальних поверхонь, або відразу на кількох поверхнях, що задані обмеженнями задачі. На кожному етапі безумовної мінімізації користуються методом Флетчера – Пауелла.

На початковій стадії оптимізаційного процесу кут між  $\nabla f(X^{(0)})$  і  $\nabla P(X^{(0)}, r^{(0)})$  має бути гострим, а значення  $r$  – збільшуватись або зменшуватись шляхом множення або ділення початкового значення цього параметра на деяке число доти, поки кут між  $\nabla f(X^{(k)})$  і  $\nabla P(X^{(k)}, r^{(k)})$  не стане тупим. Окрім цього, повинна виконуватись умова  $r^{(0)} \geq 10^{-4}$ . На практиці вважають  $r^{(0)} = 50$ . Рекомендовано при переході від одного етапу обчислювального процесу до іншого помножити поточне значення  $r$  на 0.1, що забезпечує поступове зменшення параметра.

Значення  $\omega_i$  вибирають з таким розрахунком, щоб всі доданки в (1.7) після масштабування стали величинами одного порядку.

Коли обмеження-нерівності зводять до Р-функції вигляду

$$P_1 = f(X) + k \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{g_i(X)}, \quad (7.10)$$

$$P_2 = f(X) + k \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{g_i^2(X)}, \quad (7.11)$$

$\omega_i$  потрібно вважати рівним нулю доти, поки не виявиться порушення хоча б одне обмеження. За значення  $k$  рекомендується вибрати значення множника Лагранжа, асоційованого з першим з порушених обмежень. Наприклад, у виразі для  $P_1$  (стосовно активних обмежень  $g_i(X) \geq 0$ )

$$K = \frac{g_i^2(X) (\nabla' f(X) \nabla g_i(X))}{\nabla' g_i(X) \nabla g_i(X)}, \quad (7.12)$$

де значення градієнтів  $f(X)$  і  $g(X)$  обчислені в останній з поточних припустимих точок.

Програма, що реалізує метод Флетчера-Пауелла, дозволяє розв'язати задачу мінімізації  $f(X)$ ,  $X \in R$  за наявності обмежень типу рівностей

$$H_k(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Алгоритм, що реалізується програмно, є послідовністю таких операцій.

**Крок 1.** Формується нова функція цілі з вихідної функції і обмежень:

$$F = f(X) - \sum_{k=1}^m \lambda_k H_k + B \sum_{k=1}^m H_k^2,$$

де  $\lambda_k$ ,  $B$ -константи.

**Крок 2.** Задається початкова точка пошуку і знаходяться значення функції  $f(X)$  та її похідних, а також  $H_k$ . Похідні можуть бути визначені алгоритмічно або чисельними методами. Величина  $\lambda_k$  обчислюється розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^m \left( \lambda_g \frac{\partial H_g}{\partial X_i} \frac{\partial H_k}{\partial X_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} \right), \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Зазвичай вважають  $B = 30$ .

**Крок 3.** Реалізується процедура пошуку оптимуму Флетчера-Пауелла для функції  $F$  без урахування обмежень. Коефіцієнти  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) перераховуються для кожної нової ітерації. Коли пошук завершено,  $H_k=0$ ,  $f(X)=F$ .

Завдання

Знайти мінімуми функцій, використовуючи метод Флетчера-Пауелла:

$$a) f(X) = -\frac{x_1^2 x_2^2 x_3^2}{81}$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1^3 + x_2^2 + x_3 - 13 = 0,$$

$$h_2(X) = x_2^2 x_3^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0,$$

$$x_i \geq 0;$$

$$б) f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1(1 + x_2^2) + x_2^4 - 4 - 3\sqrt{2} = 0,$$

$$0 \leq x_i \leq 3;$$

$$в) f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1^2 x_4 + \sin(x_4 - x_5) 2\sqrt{2} = 0,$$

$$h_2(X) = x_2 - x_3^4 x_4^2 - 8 - \sqrt{2} = 0;$$

$$з) f(X) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

при обмеженні

$$h(X) = x_1 + x_2 - 5 = 0;$$

$$д) f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7 = 0,$$

$$h_2(X) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - \frac{9}{2} = 0.$$

### Контрольне запитання

Відміна методу Флетчера-Пауелла від методу послідовної безумовної оптимізації.

## 7.2 МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

### Проективні методи.

Методи лінійного програмування вдало застосовується для розв'язування задач великої розмірності при лінійних обмеженнях у вигляді рівностей і нерівностей, тому є очевидним спосіб розв'язування задач нелінійного програмування за допомогою процедури лінеарізації, реалізованої за схемою ітераційного процесу. Проективні методи /інколи їх ще називають методами припустимих напрямків, або градієнтними методами з великою довжиною кроку/ полягають у такому: лінійні чи лінеаризовані обмеження утворюють лінійну різноманітність, що визначається перетином обмежень, на які можна спроеціювати вибраний напрямок пошуку S у просторі розв'язків. Всі проективні методи припускають реалізацію на кожному K-му етапі такої послідовності кроків:

- 1) алгоритм починає працювати у припустимій точці  $X^{(k)}$ ,
- 2) визначається припустимий напрям  $S^{(k)}$ ,
- 3) у припустимому напрямку вибирається крок довжиною  $\lambda^{(k)}$ , що мінімізує  $f(X)$ , але водночас зберігає вектор  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}$  припустимим.

Алгоритм проективних методів розрізняється способом визначення напрямку  $S^{(k)}$ , але пошук розпочинається з припустимого розв'язку і розвивається /при лінеаризованих обмеженнях / у напрямі, що забезпечує зменшення цільової функції при збереженні поточної точки X всередині припустимої області. Проективні методи не вимагають, щоб усі обмеження у вигляді нерівностей були замінені еквівалентною системою обмежень у вигляді рівностей шляхом введення послаблювальних змінних /подібно тому, як це має місце в лінійному програмуванні/, вони на кожному ітераційному кроці підключають до обчислювального процесу якомога меншу кількість нерівностей з числа активних

обмежень. У випадку, коли на перетин підмножини обмежень проєціюється градієнт цільової функції у точці  $X^{(k)}$ , метод оптимізації називається методом проєкції градієнта.

### Метод проєкції градієнта

Одним з ефективних і широко використовуваних проєктивних методів є метод проєкції градієнта, або метод Розена. Цей метод мінімізації є методом найшвидшого спуску. Він застосовується у поєднанні з ортогональним проєктуванням від'ємного градієнта на лінійне різноманіття обмежень або їх апроксимації. У припустимій точці  $X^{(k)}$  обмеження, що мають вигляд рівностей (активні обмеження), лінеаризуються (якщо вони є нелінійними) і тимчасово замінюються відповідними гіперплощинами.

Поняття “зведений базис” або “базис за наявності обмежень” означає сукупність лінійно незалежних гіперплощин, перетини яких обмежують область пошуку. Основною особливістю методу є те, що він перетворює (проєціює) градієнт цільової функції так, що його складові лежать в  $(n-l)$  – вимірному різноманітті (визначає припустиму область, в якій задовольняються  $l$  обмежень у вигляді рівностей).

Проєкція градієнта цільової функції  $\nabla f(X^{(k)})$  на активні обмеження визначає новий напрям пошуку  $S^{(k+1)}$ :

$$S^{(k+1)} = P_l \nabla f(X^{(k)}) = \nabla f(X^{(k)}) - A_l^t (A_l A_l^t)^{-1} A_l \nabla f(X^{(k)}), \quad (7.13)$$

де  $P_l$  –  $n$ -мірна квадратна проєціююча матриця, що обчислюється з допомогою співвідношення

$$P_l = I - A_l^t (A_l A_l^t)^{-1} A_l,$$

$A_l$  – матриця розміром  $n \times l$  частинних похідних активних обмежень,

$$A_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(X^{(k)})}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial g_1(X^{(k)})}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_l(X^{(k)})}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial g_l(X^{(k)})}{\partial X_n} \end{bmatrix}.$$

Вираз  $(A_l A_l^t)^{-1} A_l \nabla f(X^{(k)}) = U$  можна розглядати як вектор-стовпець, елементами якого є множники Лагранжа (так звані тіньові параметри). Новий напрям визначається так:

$$S^{(k+1)} = \nabla f(X^{(k)}) - A_l^t U. \quad (7.14)$$

Якщо якась зі складових  $U_i$  від'ємна, відповідне обмеження у вигляді нерівності можна виключити із зведеного базису до того, як буде продовжений пошук. Якщо активні обмеження нелінійні, то складові вектора нового напрямку лежатимуть на гіперплощинах, дотичних до обмежень у точці  $X^{(k)}$ . Якщо активні обмеження лінійні, складові вектора нового напрямку  $S^{(k+1)}$  лежатимуть на самих обмеженнях.

Для задачі нелінійного програмування з лінійними обмеженнями алгоритм починає роботу з припустимої точки і продовжує ефективно діяти як метод найшвидшого спуску доти, поки не буде досягнута точка, для якої стають активними одне або кілька обмежень. Якщо задача містить обмеження у вигляді рівностей, то активні обмеження мають місце на кожному етапі обчислювального процесу.

### Основний алгоритм проєкції градієнта

Задані припустимі точка  $X^{(k)}$  і похибка збіжності  $\varepsilon > 0$ .

**Крок 1.** Обчислити проєціюючу матрицю  $P = I - A_l^t (A_l A_l^t)^{-1} A_l$  у припущенні, що вектори  $A_l$  лінійно незалежні і вектор у напрямку проєкції  $\nabla f(X^{(k)})$

$$S^{(k)} = - \frac{P_l \nabla f(X^{(k)})}{\| P_l \nabla f(X^{(k)}) \|}. \quad (7.15)$$

**Крок 2.** Якщо  $P_l \nabla f(X^{(k)}) = 0$ , то обчислити множники Лагранжа:



$$U = (A_e A^T)^{-1} A_e \nabla f(X^{(K)})$$

Якщо  $U_l \geq 0$  для всіх значень  $i=1, \dots, l$ , то  $X^{(k)}$  – шуканий роз’вязок, оскільки він задовольняє умові Куна-Таккера. У противному разі добираємо таке значення  $U_m < 0$ , для якого значення виразу  $\|a_m\| U_m$  від’ємне і максимальне за модулем, нехтуємо і відповідною гіперплощиною, викреслюємо у матриці  $A_l$   $m$ -й рядок і переходимо до кроку 1.

Якщо  $P_l \nabla f(X^{(k)}) \neq 0$ , перейти до кроку 3.

**Крок 3.** Визначити максимальну довжину кроку

$$\lambda^* = \max \{ \lambda \mid X^{(k)} + \lambda S^{(k)} \in R \},$$

де  $R = \{ X \mid g_i(X) \geq 0 \text{ і } h_i(X) = 0, i=1, \dots, P \}$ .

**Крок 4.** Роз’вязати задачу одновимірного пошуку:

Мінімізувати (ф) при  $0 \leq \lambda^{(k)} \leq \lambda^*$ . Значення  $\lambda^*$  – максимальна довжина кроку, який можна зробити у напрямку  $S^{(k)}$  з точки  $X^{(k)}$ , не виходячи за межі області  $R$ .

Якщо  $\lambda^{(k)} < \lambda^*$ , то число обмежень у вигляді рівностей, що задовольняються у точці  $X^{(k+1)}$  додатково з  $l$  обмеженнями, які враховувались у точці  $X^{(k)}$  у вигляді рівностей, повинні братись **до уваги нелінійні обмеження, зображені у вигляді рівностей**.

**Крок 5.** Взяти  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda^* S^{(k)}$  і перейти до кроку 1.

Таким чином, на кожному етапі обчислювального процесу можливі такі варіанти:

- 1) сукупність активних обмежень може залишатися без змін;
- 2) до цих обмежень можна додати одне активне обмеження;
- 3) із сукупності активних обмежень одне обмеження може бути виключене.

У програмі, що реалізує метод Розена, обмежились роз’вязанням задачі нелінійного програмування з лінійними обмеженнями для максимізації нелінійної функції

$$f(X) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

при лінійних обмеженнях на незалежні змінні

$$g_i(X) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Опис алгоритму (рис 7.9.):

1. задаються координати початкової точки, що задовольняють обмеження, і крок пошуку.

2. Обчислюються значення похідних у початковій точці

$\frac{\partial f}{\partial X_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) і компоненти нормалізованого вектора напрямку

$$S_i = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_i}}{\sqrt{\sum_{g=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_g} \right)^2}}.$$

Якщо  $\frac{\partial f}{\partial X_i} \leq E_i$  ( $E$  – попередньо задане число), пошук припиняється і потрібна точка вважається знайденою.

3. Обчислюються координати нової точки:

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \lambda_i S_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Розраховується значення функції цілі. Потім аналізуються такі можливості:

а/ якщо є покращання значення функції цілі без порушення обмежень, крок пошуку подвоюється, компоненти нового вектора напряму обчислюються у здобутій точці і процес пошуку триває ;

б/ якщо значення функції у новій точці не покращилось, крок пошуку зменшується вдвічі і пошук продовжується з попередньої точки;

в/ якщо значення функції у новій точці покращилось, але при цьому порушені одне чи кілька обмежень, необхідно повернутися до попередньої точки, яка знаходиться у перебуває області, і крок пошуку змінити так, щоб нова точка потрапила на порушені в результаті попереднього кроку обмеження. Після цього визначається новий вектор напряму вздовж обмежень:

$$S_i = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^l U_k \frac{\partial g_k}{\partial X_i}}{\sqrt{\sum_{g=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^l \left( U_k \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \right) \right)^2}}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

де  $l$  – кількість порушених обмежень.

Параметри  $U_k / k=1,2,\dots,l$  / можна знайти з таких  $l$  рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^l \left( U_g \frac{\partial g_i}{\partial X_i} \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \right) = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} \right).$$

Якщо  $\frac{\partial f}{\partial X_j} + \sum_{k=1}^l \left( U_k \frac{\partial g_k}{\partial X_j} \right) \leq E$  для  $j=1,2,\dots,n$ , пошук вважається завершеним. У

протилежному разі пошук відновлюється у новому напрямку.

Завдання для самостійної роботи

Система, що складається з трьох послідовно з'єднаних теплообмінників (рис.7.10), реалізує звичайний поетапний процес теплообміну без повторних циклів.

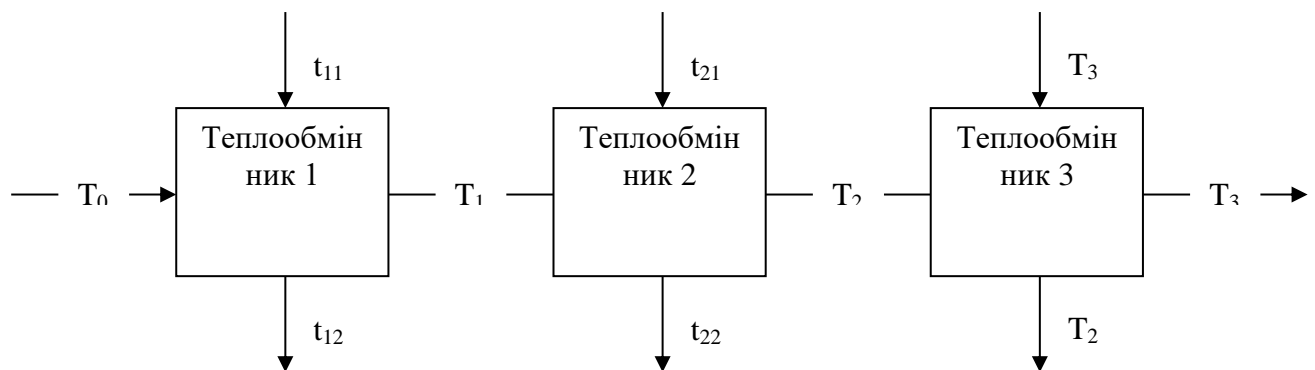


Рис. 7.10. Схема поетапного процесу теплообміну

Процес теплообміну здійснюється так: холодна рідина нагрівається у кожному теплообміннику гарячою рідиною, потік якої перпендикулярний до потоку рідини, що нагрівається. Припустимо, що кожен з теплообмінників можна описати з допомогою стаціонарної моделі:

$$WC_p (T_n - T_{n-1}) = \alpha_n F_n (t_{n1} - T_n)$$

Вважатимемо, що швидкість усіх потоків однакова й дорівнює  $W$ , а також припустимо, що теплоємність рідини у будь-якому вузлі системи постійна і дорівнює  $C_p$ . Задача полягає у визначенні площі поверхні теплообміну  $F$  для кожного з теплообмінників такою, щоб сумарна площа, яка забезпечує теплообмін у системі, була мінімальною. Наводимо постійні коефіцієнти моделі:

$$T_0=37,7\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_0=260\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$WC_p=34\cdot 10^5\text{ Дж/град}$$

$$t_{11}=149\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_{21}=205\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_{31}=315\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha_1=1200\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{град)}$$

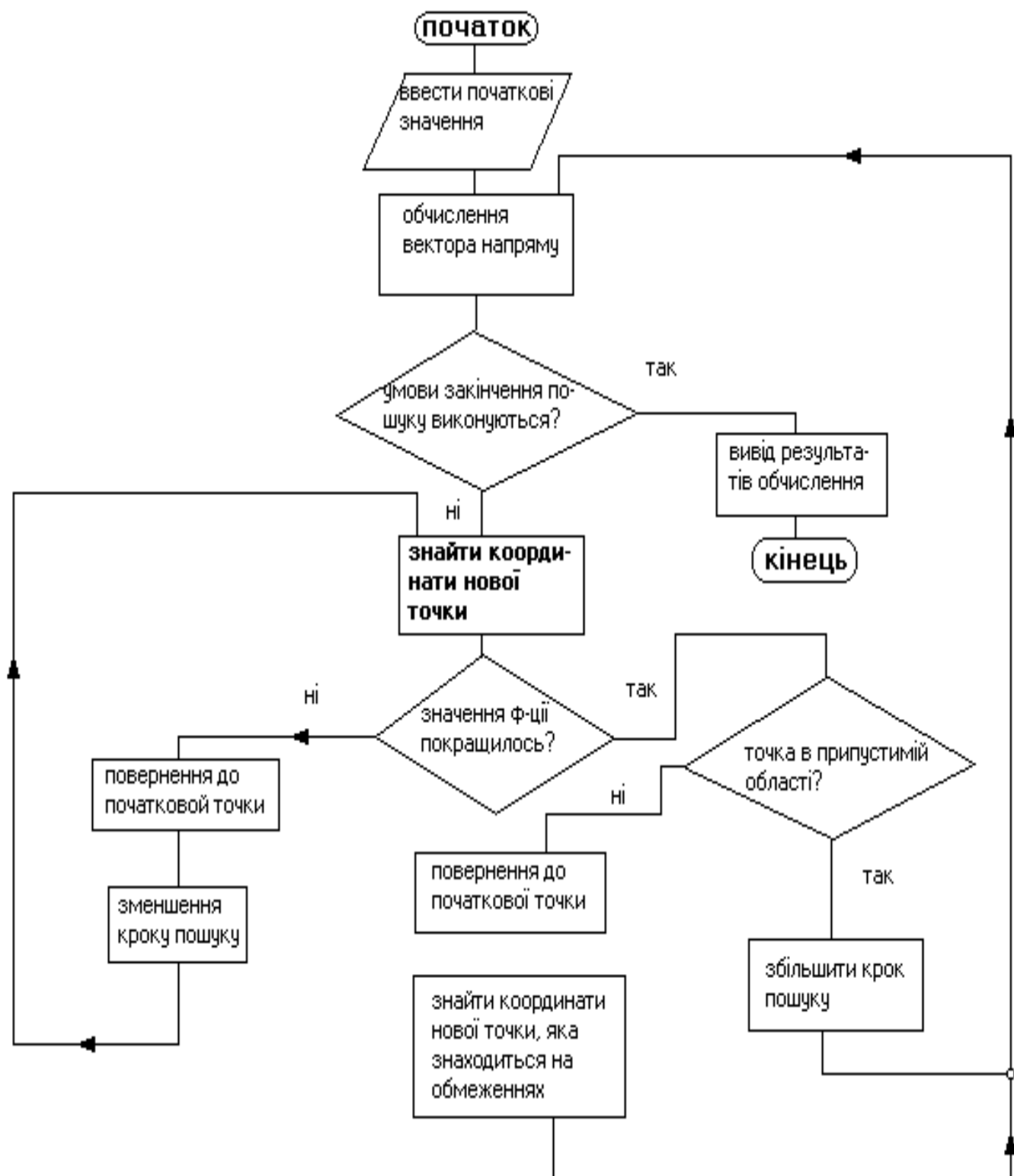
$$\alpha_2=800\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{град)}$$

$$\alpha_3=400\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{град)}$$

### Контрольні запитання

1. Чи обов'язково проєціююча матриця має бути додатньо визначеною?

2. Яким чином завдання межі значень змінних краще за все використати у методі



проекцій градієнта?

**Рис 7.9. Схема алгоритму методу Розена**

### 7.3. МЕТОДИ ПРЯМОГО ПОШУКУ В ЗАДАЧАХ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як і в задачах безумовної оптимізації, необхідність розробки методів прямого пошуку, коли використовуються лише цільова функція і обмеження, пов'язана з тим, що доводиться розв'язувати задачі, в яких функції розривні або недиференційовані. Всі методи прямого пошуку вимагають, щоб обмеження задачі були задані лише у вигляді нерівностей через труднощі одержання припустимої точки в задачі з обмеженнями у вигляді рівностей.

Найпростіший спосіб виключення обмеження у вигляді рівності полягає у розв'язанні його відносно однієї зі змінних з наступним виключенням цієї змінної шляхом підстановки здобутого виразу у співвідношення, що описують задачу. При цьому слід пам'ятати, що верхні й нижні межі значень змінних, які виключаються, зберігаються в задачі у вигляді обмежень-нерівностей.

#### Приклад 7.1

Мінімізувати  $f(X)=X_1^2+4X_2^2+X_3^2$

при обмеженнях  $h_1(X)=X_1+X_2-2=0$ ;  $-1\leq X_1\leq 1$ ;  $0\leq X_2\leq 2$ ;  $0\leq X_3\leq 2$ .

З першого обмеження  $X_1$  можна виразити  $X_1=2-X_2$ . Після підстановки виразу  $X_1$  через  $X_2$  цільова функція набуває вигляду

$$f(X)=(2-X_2)^2+4X_2^2+X_3^2.$$

Оскільки значення  $X_1$  повинно знаходитись у визначених межах, необхідно виконання нерівностей

$$-1\leq 2-X_2\leq 1.$$

Задача зменшення розмірності набуде вигляду:

Мінімізувати  $f(X)=(2-X_2)^2+4X_2^2+X_3^2$ ;

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1 \leq X_2 \leq \sqrt{3}; \\ 0 \leq X_3 \leq 2. \end{cases}$$

Якщо не враховувати межі значень змінної  $X_1$ , то оптимальним розв'язком останньої задачі буде  $X_2^*=X_3^*=0$ . Звідси  $X_1^*=2$ , що суперечить початковим умовам.

Замість алгебраїчної підстановки зручніше й надійніше включати до програми обчислення цільової функції й обмежень у вигляді нерівностей вирази, отримані при розв'язуванні рівнянь-обмежень відносно якоїсь невідомої як визначення цієї змінної. Можна також здійснювати виключення обмежень-рівностей неявним чином, розв'язуючи чисельно рівняння відносно залежних змінних при заданих значеннях незалежних оптимізуючих змінних.

Алгоритми методів прямого пошуку починають працювати з припустимої точки. Звичайно користуються такими трьома способами відшукування припустимої точки: випадковий пошук, мінімізація штрафної функції за відсутності обмежень і послідовна мінімізація за наявності обмежень. Теоретично найпростіший спосіб дістати початкову припустиму точку полягає у генерації за допомогою датчика псевдовипадкових чисел (така програма є у програмному забезпеченні обчислювальних машин) пробної точки і в перевірці її на припустимість підстановкою в обмеження. За заданими верхніми й нижніми межами кожної змінної розраховуються

$$X_i=X_i^{(L)}+r_i(X_i^{(U)}-X_i^{(L)}), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Тут  $r_i$  – випадкові числа, рівномірно розподілені в межах інтервалу  $[0,1]$ .

Отримана точка перевіряється на припустимість обчисленням функції, що входять до обмежень задачі. Процес продовжується доти, поки не буде знайдено точку, яка задовольняє всім обмеженням. Для задач великої розмірності або з вузькою припустимою областю необхідно використовувати інші способи пошуку припустимої точки.

Застосування методів прямого пошуку до задач з обмеженнями полягає у тому, що нескладний спосіб зменшення кроку пошуку, коли прийнятий крок приводить до неприпустимої точки, забезпечує здобуття припустимої пробної точки. Потрібно, щоб пошук починався з припустимої точки і щоб наступні базові точки залишались припустимими: це забезпечує можливість скорочення кроку на кожному етапі. Якщо множина напрямів пошуку не піддається корекції, то рух уздовж обмежувальних поверхонь виключається і результати виявляються незадовільними. Ці труднощі можна подолати істотним розширенням множини напрямів пошуку або переходом до процедур випадкового пошуку напрямів.

### Метод комплексів

Метод комплексів, що був запрограмований Боксом у 1964 р., є модифікацією симплексного методу Нелдера і Міда, але дає можливість враховувати обмеження.

Задача оптимізації полягає в мінімізації функції

$f(X)=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , де  $X$  визначається явними обмеженням

$$X_i^{(L)} \leq X_i \leq X_i^{(U)}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7.16)$$

А також неявними обмеженнями

$$g_j(X) \leq b_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (7.17)$$

Якщо цільова функція  $f(X)$  опукла і функція  $g_j(X)$  також опукла, то задача матиме єдиний розв'язок.

Даний метод є ітераційним. У першу чергу необхідно вибрати  $K$  точок, що задовольняють обмеження, а також обчислити цільову функцію в усіх  $K$ . Множина цих точок називається комплексом. Бокс виявив, що число  $K$  має бути більшим за  $n+1$  числа точок, які використовуються в симплексному методі Нелдера – Міда, і прийняв  $K=2n$ . Байлс наводить у роботі хороші результати, здобуті при  $K=n+2$ . Припускається, що точка  $X_1$ , яка задовольняє всім обмеження, задана. Решта точок, що задовольняють нерівності (7.16), може бути вибрана так:

$$X_{ij}=X_i^{(L)}+r(X_i^{(U)}-X_i^{(L)}) \quad (7.18)$$

при  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=2, 3, \dots, k$ .

Тут  $r$ -псевдовипадкова рівномірно розподілена змінна в інтервалі  $[0;1]$ .

Якщо точки, що вибираються згідно з рівнянням (7.18), задовольняють нерівність (7.17), то вони приймаються за початкові точки комплексу, у противному разі точка зсувається на половину відстані до центру ваги множини вже прийнятих точок:

$$X_i = \frac{1}{2}(X_i + X_c). \quad (7.19)$$

де  $X_c = \frac{1}{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} X_l$  - центр ваги.

Після того як множину з  $K$  припустимих точок побудовано, у кожній з них обчислюється цільова функція і точка, для якої значення функції найбільше, відкидається. Нову точку дістають шляхом відображення виключеної точки через центр ваги залишкових точок

$$X_r = X_c + \alpha(X_c - X_h). \quad (7.20)$$

Тут  $X_h$  – точка з найбільшим значенням функції. Параметр  $\alpha$  задає відстань відображення:  $\alpha > 1$  відповідає розтягу,  $\alpha < 1$  – стисненню.

Коли знайдено нову точку, обчислено значення цільової функції та функцій, що входять в обмеження, можливі такі випадки.

1. Нова точка припустима, і значення цільової функції в ній не збігається з максимальним значенням в усій сукупності точок. У цьому разі вибираємо точку з максимальним значенням функції і знову виконуємо операцію відображення.

2. Нова точка припустима, і значення цільової функції в ній збігається з максимальним значенням для всієї сукупності точок. Замість того, щоб виконувати відображення, пересунемо цю точку на половину відстані до попередньо знайденого центру ваги.

3. Нова точка неприпустима. Зменшуємо у два рази відстань до обчисленого раніше центру ваги. Процедура пошуку триває доти, поки многогранник не буде стягненим у центр ваги в межах заданої точності й /або/ поки різниця між значеннями цільової функції у вершинах не стане достатньо малою.

Бокс рекомендує вибирати  $\alpha=1,3$ . Вибір  $\alpha > 1$  компенсує

стискання комплексу, зумовлене скороченням у два рази відстані до центру ваги.

Задано початкову строго припустиму точку  $X_1$ , параметр відображення  $\alpha$  і параметр обчислень  $\varepsilon$  і  $\delta$ . Для ітераційної процедури методу комплексів необхідні такі кроки.

**Крок 1.** побудова початкового комплексу, що складається з  $K$  припустимих точок. Для кожної точки  $K = 1, 2, \dots, K-1$ :

а) випадковим чином визначити координати  $X_{ik}$ ;

б) якщо  $X_k$  – неприпустима точка

$$X_k = \frac{X_k + X_c}{2};$$

цю процедуру повторяти доти, поки  $X_k$  не стане припустимою;

в) якщо  $X_k$  – припустима точка, повторювати п.а доти, поки  $k=K$ ;

г) обчислити  $f(X_k)$  для  $K=0, 1, \dots, K-1$ .

**Крок 2.** Відображення комплексу:

а) вибрати точку  $X_h$ , для якої  $f(X_h) = \max f(X_k) \equiv F_{\max}$ ;

б) знайти центр ваги  $X_c$  і нову точку  $X_r = X_c + \alpha(X_c - X_h)$ ;

в) якщо  $X_r$  – неприпустима точка і  $f(X_r) \geq F_{\max}$ , зменшити в два рази відстань між  $X_r$  і центром ваги  $X_c$ ; продовжувати пошук, поки  $f(X_r) < F_{\max}$ ;

г) якщо  $X_r$  – неприпустима точка і  $f(X_r) < F_{\max}$ , перейти до кроку 4.

Д) якщо  $X_r$  – неприпустима точка, перейти до кроку 3.

**Крок 3.** Коректування для забезпечення припустимості:

а) якщо  $X_r < X^{(L)}$ , покласти  $X_r = X^{(L)}$ ;

якщо  $X_r > X^{(U)}$ , покласти  $X_r = X^{(U)}$ ;

б) якщо  $X_r$  – неприпустима точка, зменшити вдвічі відстань до центра ваги; процедуру продовжувати, поки  $X_r$  не стане припустимою точкою.

**Крок 4.** Перевірка умов закінчення обчислень:

а) покласти

$$\bar{f} = \frac{1}{K} \sum_k f(X_k) \quad \text{і} \quad \bar{X} = \frac{1}{K} \sum_k X_k;$$

б) якщо  $\sum_k (f(X_k) - \bar{f})^2 \leq \varepsilon$  і  $\sum_k (X_k - \bar{X}) \leq \delta$ ,

обчислення припинити; у противному разі перейти до виконання п. А кроку 2.

Схема алгоритму методу комплексів зображена на рис.7.11.

### Завдання

Використайте метод комплексів для реалізації функцій:



$$\begin{array}{ll}
a) f(X) = x_1^2 + x_2^2, & \text{при } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 5; \\
б) f(X) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2, & \text{при } x_1^2 + 2x_2 \leq 1, x_1 + 2x_2 \leq 1; \\
в) f(X) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2, & \text{при } x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_2 + x_1 \geq 4; \\
г) f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, & \text{при } 1 - x_2^{-1}x_3 \geq 0, x_1 - x_3 \geq 0, x_1 - x_2^2 + x_2x_3 - 4 = 0, \\
& 0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 3.
\end{array}$$

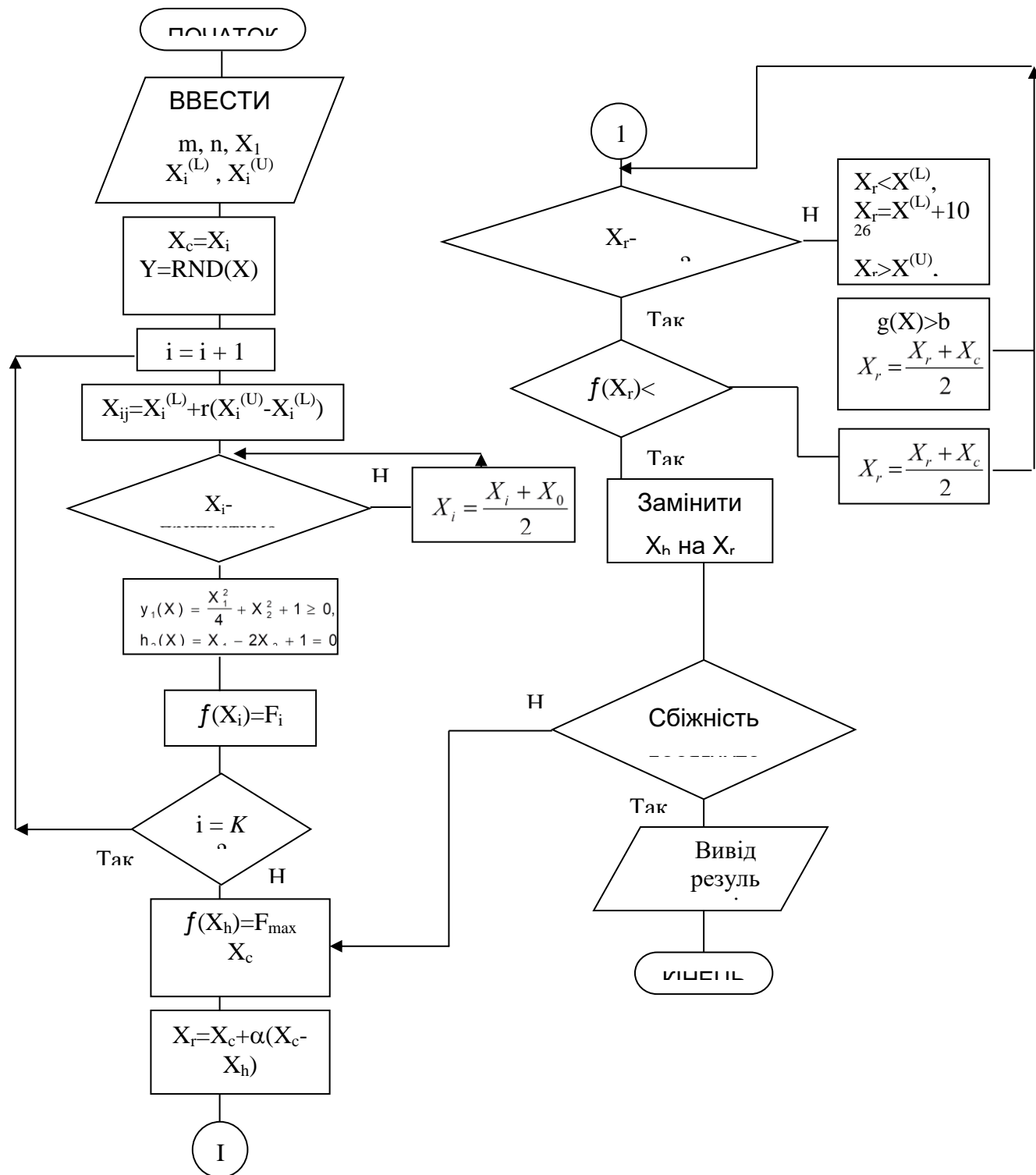
### Завдання для самостійної роботи

Спроекувати прямокутну конструкцію у формі паралелепіпеда з відкритою передньою стінкою. Конструкція повинна мати об'єм  $16000\text{м}^3$ . Периметр її основи не повинен перевищувати 220м, глибина – бути більшою за 60 метрів, а ширина – за 80 метрів. Крім того, ширина не повинна перевищувати потроєної глибини, а висота –  $2/3$  ширини. Вартість  $1\text{м}^2$  гофрованого матеріалу, з якого виготовляють дах і три стінки конструкції – 1 грн.

Визначити розміри конструкції таким чином, щоб мінімізувати вартість матеріалів.

### Контрольні запитання

1. Чому необхідно виключити обмеження у вигляді рівностей при використанні методів прямого пошуку?
2. З якої причини використовується більше ніж  $N+1$  точка у алгоритмі комплексів?
3. Навіщо необхідна опуклість для вдалого застосування алгоритму комплексів?
4. Чому в алгоритмі комплексів використовується процедура повернення?
- б) Визначити напрямок оптимізаційного пошуку з початкової внутрішньої точки  $X^{(0)} = [0,748 \ 0,548]^T$ ;
- в) Знайти вектор  $X^{(1)}$ ;
- г) Чи може одна з точок  $X^{(k)}$  бути поза допустимої області?



**Рис 7.11. Схема алгоритму методу комплексів**

## 8. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ В ОДНОКРОКОВИХ ПРОЦЕДУРАХ ВИБОРУ РІШЕНЬ

Розглянемо задачу мінімізації функції вартості

$$J = F(X, U) \quad (8.1)$$

шляхом підбору значення вектора **u** при обмеженні у формі наступної рівності:

$$f(X, U) = 0 \quad (8.2)$$

Тут  $X$  – вектор стану,  $f$  –  $n$ -вектор,  $U$  –  $m$ -вектор, а  $F$  – скалярна функція. Сформульована проблема є задачею нелінійного програмування чи задачею однокрокового рішення. Можна ввести

$$L(X, \lambda, U) = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) \quad (8.3)$$

Розрахуємо та прирівняємо нульовому вектору градієнт виразу (8.3) відносно вектора  $U$ :

$$\frac{\partial L}{\partial U} = \frac{\partial F(X, U)}{\partial U} + \left[ \frac{\partial f^T(X, U)}{\partial U} \right] \lambda = 0 \quad (8.4)$$

Таким самим чином можна отримати співвідношення

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial F(X, U)}{\partial X} + \frac{\partial f^T(X, U)}{\partial X} \lambda = 0 \quad (8.5)$$

Останні дві рівності є першою необхідною умовою мінімуму функції  $J$ . В доповнення до цього повинна виконуватись також і наступна умова:  
матриця

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

повинна бути невід’ємно визначеною впродовж “траєкторії”  $f(X, U)=0$ . В загальному випадку взагалі не вдається розв’язати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Так як, при  $f(X, U)=0$  маємо  $J=L$ , то поклавши  $\partial L / \partial X = 0$ , приблизно одержимо

$$\Delta J = \left[ \frac{\partial L}{\partial U} \right]^T \Delta U \quad (8.7)$$

Якщо зараз необхідно забезпечити найбільшу зміну  $\Delta J$  значення функції  $J$ , то можна розрахувати градієнт  $\partial L / \partial U$  та нове значення  $J$  знайти після введення приросту  $\Delta U$ , напрямком якого протилежний одержаному градієнту:

$$\Delta U = -K \left[ \frac{\partial L}{\partial U} \right] \quad (8.8)$$

В результаті маємо, що зміна значення функції визначається виразом

$$\Delta J = -K \left[ \frac{\partial L}{\partial U} \right]^T \left[ \frac{\partial L}{\partial U} \right] \quad (8.9)$$

Ця процедура розрахунку починається з неоптимального вектора керування  $U^N$ . Для цього вектора керування треба знайти значення  $x^N$  вектора  $X$ , яке задовольняє рівності, тобто

$$f(X^N, U^N) = 0 \quad (8.10)$$

Далі з (8.5) для забезпечення виконання умови  $\partial J / \partial x^N = 0$  знаходимо значення невизначеного множника

$$\lambda^N = - \left[ \frac{\partial f^T(X^N, X^N)}{\partial X^N} \right]^{-1} \frac{\partial F(X^N, U^N)}{\partial X^N} \quad (8.11)$$

Нарешті, на основі (8.3) розрахуємо градієнт

$$\frac{\partial L}{\partial U^N} = \frac{\partial f(X^N, U^N)}{\partial U^N} + \left[ \frac{\partial f^T(X^N, U^N)}{\partial X^N} \right] \lambda^N \quad (8.12)$$

Цей вектор буде нульовий тільки в тому випадку, коли виконується відмічена вище умова мінімуму. Одержане значення градієнта зараз дозволяє знайти за формулою (8.8) такий приріст вектора  $U$ , при якому забезпечується найшвидший спуск, а саме

$$\Delta U^N = -K \left[ \frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right] \quad (8.13)$$

Нове значення вектора  $U$ , таким чином, визначається за формулою

$$U^{N+1} = U^N + \Delta U^N \quad (8.14)$$

В свою чергу дане значення дозволяє знайти нові значення  $X^{N+1}$ ,  $\lambda^{N+1}$  векторів  $X$ ,  $\lambda$  і так далі. Ці розрахунки повторюються до тих пір, доки зміни значення функції вартості

$$\Delta J^N = -K \left[ \frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right]^T \left[ \frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right] \quad (8.15)$$

на двох сусідніх кроках даного ітераційного процесу не буде менше деякої заданої малої величини.

### Приклад 8.1

З метою ілюстрації послідовності розрахунків при використанні даного градієнтного методу розглянемо задачу мінімізації функції  $J = X^2 + U^2$  при обмеженні у формі рівності

$XU=1$ . Ця задача може бути легко вирішена аналітично. Вираз (8.3) тут має вигляд  $L=X^2+U^2+\lambda(XU-1)$ , а рівняння  $\partial H/\partial U=\partial H/\partial X=0$  призводять до рішення  $U=\pm 1$ ,  $X=\pm 1$ ,  $\lambda=-2$ ,  $J_{\min}=2$ . Припустимо, що рішення цієї задачі невідоме. Виберемо початкове значення  $U=U^0$ . Згадані вище рівняння з (8.10) по (8.15) для даного прикладу приймають наступний вигляд

$$f(X^N, U^N) = 0 = X^N U^N - 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2X + \lambda U = 0; \quad \lambda^N = - \left[ \frac{\partial f^T}{\partial X^N} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial X^N} = - \frac{2X^N}{U^N},$$

$$\frac{\partial L}{\partial U^N} = \frac{\partial F}{\partial U^N} + \left[ \frac{\partial f^T}{\partial U^N} \right] \lambda^N = 2U^N + X^N \lambda^N,$$

$$\Delta U^N = -K \frac{\partial L}{\partial U^N} = -K(2U^N + X^N \lambda^N) = -2K \left[ U^N - \frac{1}{(U^N)^3} \right],$$

$$\Delta J^N = -K \left[ \frac{\partial L}{\partial U^N} \right]^T \left[ \frac{\partial L}{\partial U^N} \right] = -K(2U^N + X^N \lambda^N)^2,$$

$$U^{N+1} = U^N - \Delta U^N$$

Таким чином для даної задачі послідовні значення керування одержуються шляхом рішення різницевого рівняння

$$U^{N+1} = U^N - 2K \left[ U^N - \frac{1}{(U^N)^3} \right]$$

Послідовні етапи обчислень при використанні приведеної вище градієнтної процедури “першого порядку” полягає в наступному:

1. Обчислити чергове значення вектора  $U^i$ .
2. З рівняння  $f(X^i, U^i)=0$  знаходимо  $X^i$ .
3. Вектор  $\lambda^i$  визначаємо за формулою

$$\lambda^i = - \left[ \frac{\partial f^T(X^i, U^i)}{\partial X^i} \right]^{-1} \frac{\partial F(X^i, U^i)}{\partial X^i}$$

4. Знаходимо похідні

$$\frac{\partial L(X^i, U^i, \lambda^i)}{\partial U^i} = \frac{\partial F(X^i, U^i)}{\partial U^i} + \frac{\partial f^T(X^i, U^i)}{\partial X^i} \lambda^i$$

5. Обчислюємо чергове значення вектора

$$U^{i+1} = U^{(i)} - K^i \left[ \frac{\partial L(X^i, U^i, \lambda^i)}{\partial U^i} \right]$$

6. Ця послідовність обчислень повторюється, якщо значення керування  $U$  змінюється від ітерації до ітерації і обчислення припиняються, коли значення  $U$  практично не змінюється.

У деяких випадках виявляється можливим отримати явне рівняння (8.2) відносно  $n$ -вектора  $X$ , представивши тим самим його компоненти у вигляді функції від  $m$  – мірного вектора  $U$ . Підставивши знайдене рівняння у (8.1), прийдемо до виразу скалярного показника якості, що має тільки  $m$  компонент вектора керування. У цьому випадку немає необхідності звертатися до методу множників Лагранжу. Але такий спосіб часто є нереалізованим.

Розглянемо ще один підхід, відомий як метод проекції градієнта. В околі точки, що визначається деякими номінальними значеннями  $\bar{X}$  і  $\bar{U}$  векторів  $X$  і  $U$ , для функції (8.2) можна ввести лінійну апроксимацію і записати

$$f(X, U) \approx f(\bar{X}, \bar{U}) + \left[ \frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right] (X - \bar{X}) + \left[ \frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] (U - \bar{U}) = 0 \quad (8.16)$$

Якщо припустити, що умова (8.2) виконується при  $X = \bar{X} + \Delta X$  і  $U = \bar{U} + \Delta U$ , то складову  $f(\bar{X}, \bar{U})$  в останньому виразі можна опустити. Це припущення приводить до наступної системи лінійних рівнянь відносно  $\Delta \bar{X}$  і  $\Delta \bar{U}$ :

$$\left[ \frac{\partial f(X, U)}{\partial \bar{X}} \right] \Delta \bar{X} + \left[ \frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] \Delta \bar{U} = 0 \quad (8.17)$$

де  $\Delta \bar{X} = X - \bar{X}$ ,  $\Delta \bar{U} = U - \bar{U}$ . Цю систему можна вирішити відносно вектора приросту  $\Delta \bar{X}$ , оскільки матриця  $\partial f / \partial X$  повинна мати обернену. Отримані рішення можна підставити у (8.1) і знайти градієнт функції вартості  $F$  чи  $J$  при указаних обмеженнях. У геометричній інтерпретації цей спосіб зведеться до обчислень проекції градієнта, обчисленого без урахування обмежень на  $m$ -мірному просторі значень вектора керування, що визначається як перетин  $n$  гіперплощин (8.17).

$$\Delta J = \left[ \frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^T \Delta \bar{X} + \left[ \frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right]^T \Delta \bar{U} \quad (8.18)$$

На підставі (17) цей вираз можна переписати:

$$\Delta J = \left\{ - \left[ \frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^T \left[ \frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] + \left[ \frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right]^T \right\} \Delta \bar{U} \quad (8.19)$$

Матриці, що заключені у квадратні дужки у формулі (8.19), співпадають з відповідними матрицями в (8.4) і (8.5), що ілюструє еквівалентність двох розглянутих підходів.

При застосуванні метода градієнта другого порядку чи метода Ньютона, приріст вектора керування визначається співвідношенням

$$\Delta U^{-N} = - \left[ \frac{d^2 F(U^N)}{(dU^N)^2} \right]^{-1} \frac{dF(U^N)}{dU^N} \quad (8.20)$$

Спряжений метод градієнту, що описаний вище, зберігає кращі якості методів градієнту першого і другого порядку і зменшує їх недоліки. Замість обчислення матриці

$\left[ \frac{d^2 F}{\partial U^2} \right]^{-1}$  він передбачає побудову послідовності векторів напрямків  $S^1, S^2, \dots$ , котрі є спряженими з валовою матрицею  $\frac{\partial^2 F(U)}{(\partial U)^2}$ , тобто

$$(S^i)^T \left[ \frac{d^2 F(U^i)}{(\partial U^i)^2} \right] S^j = 0, \quad i \neq j \quad (8.21)$$

Потім реалізується пошук вздовж кожного вектора  $S^N$  з метою знайти оптимальну довжину кроку у тому напрямку, в якому повинен продовжуватись рух. Таким чином, використовується співвідношення

$$U^{N+1} = U^N - K^N S^N \quad (8.22)$$

де  $K^N$  – додатня скалярна величина, що вибирається оптимально.

$$K^N = \min_{K_n} F(U^N - K^N S^N) \quad (8.23)$$

В результаті реалізується оптимальний градієнтний метод. На практиці обчислення оптимального значення для скаляра  $K^N$  може виявитися складним. У цьому випадку можна виділити декілька передбачуваних значень для  $K^N$  в околі значення цієї величини на попередньому кроку і вибрати з них таке значення, котре забезпечує мінімум (8.23). Обчислення реалізується таким чином:

1. Вибираємо значення  $U^i$ .
2. Визначаємо  $S^i = \frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i}$
3. Знаходимо  $K^i$ , при якому функція  $F(U^i - K^i S^i)$  має мінімальне значення.
4. Обчислюємо нове значення  $U^{i+1} = U^i - K^i S^i$ .
5. Вибираємо новий напрямок руху вздовж вектора

$$S^{i+1} = - \frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} + S^i \frac{\left( \frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} \right)^T \left( \frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} \right)}{\left( \frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i} \right)^T \left( \frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i} \right)}$$



6. Повторюємо обчислення на новому кроці ітераційної процедури, починаючи з пункту 3, доки не виконаються умови збіжності алгоритму.

Розглянемо вирішення задачі мінімізації функції (8.1) при обмеженні (8.2) і додатковому обмеженні у формі  $q$  нерівностей  $g(X)=0$ , де  $q \leq n-1$ . Скориставшись методом множників Лагранжу, запишемо

$$L(X, \lambda, \Gamma, U) = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) + \Gamma^T g(X)$$

Записавши умови  $\partial L / \partial U = 0$  і  $\partial L / \partial X = 0$ , отримаємо нелінійні алгебраїчні вектори рівняння, котрі визначають необхідні умови мінімуму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(X, U)}{\partial U} + \left[ \frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \right]^T \lambda &= 0, & f(X, U) &= 0 \\ \frac{\partial F(X, U)}{\partial X} + \left[ \frac{\partial f(X, U)}{\partial X} \right]^T \lambda + \left[ \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]^T \Gamma &= 0; & g(X) &= 0 \end{aligned}$$

Використати градієнтну процедуру тут неможливо тому, що хоча при будь-якому заданому  $U$  можна знайти таке значення вектора  $X$ , котре буде задовольняти рівнянню  $f(X, U)=0$ , але це значення, як правило, не забезпечить виконання умови  $g(X) \geq 0$ .

Щоб уникнути цих труднощів, можна застосувати метод штрафних функцій.

Відповідно методу штрафних функцій, обмеження у формі рівності на значення вектора стану може бути введене у вихідну функцію вартості за допомогою квадратичного штрафу

$$J = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) + g^T(X) N g(X)$$

де  $N$  – додатньо визначена діагональна вагова матриця.

## 9. ІЄРАРХІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Витрати на технічні обчислення, необхідні для розв'язання задач оптимізації, ростуть непропорційно сильніше стосовно до зростання порядку вектора рішення; тому при розв'язанні комплексних задач з декількома сотнями або тисячами змінних може бути доцільно розкласти задачу на багато оптимізованих задач більш низького порядку, котрі, у даному випадку можуть бути обчислені на паралельно працюючих обчислювальних пристроях. Особливо при керуванні процесами в реальному часі ця методика може бути зв'язана з подальшими перевагами:

- велика надійність при відмові приладу.
- виконання керування при розподіленні процесів у просторі.
- координація слабко зв'язаних часткових процесів, оптимізованих незалежно один від одного.

### 9.1. ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Декомпозиційні методи оптимізації дозволяють звести глобальну задачу оптимізації до рішення окремих блоків або сукупності окремих блоків істотно меншої розмірності. При створенні подібних методів головне завдання полягає в ліквідації або урахуванні взаємного впливу блоків або формуванні локальних задач оптимізації.

Розглянемо представлення ієрархічних методик оптимізації при оптимальному керуванні статичними процесами.

При цьому поширення відповідних методик на більш загальні проблемні питання не представить концептуальних труднощів. Вихідним пунктом є статичний процес, котрий може бути описаний наступним рівнянням стану:

$$g(X, U) = 0 \quad (9.1)$$

Постановка задачі керування полягає у визначенні величин  $U \in R^m$  керування і величин стану  $X \in R^n$ . Таким чином щоб функція якості  $f(X, U)$ , з урахуванням (9.1) була мінімізована.

Розкладання загального процесу (9.1) на  $N$  часткових процесів, може бути формально визначено, як

$$g_i(x_i, u_i, \pi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (9.2)$$

причому  $x_i \in R^{n_i}$  або  $u_i \in R^{m_i}$  являють собою вектори стану і керування частковим процесам. Порядки часткових процесів складають  $n_i$  або  $m_i$ , і тоді

$$X^T = [x_1 \dots x_N]^T; \quad U = [u_1 \dots u_N]^T$$

$$n = n_1 + \dots + n_N; \quad m = m_1 + \dots + m_N$$

Вектори  $\pi_i$  містять усі зв'язки часткових систем, котрі, без обмеження спільності, можуть бути прийняті лінійними

$$\pi_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (9.3)$$

при цьому  $C_{ij}$  являють собою відповідні матриці зв'язку.

Загальна функція якості також підрозділяється на часткові системи

$$f(X, U) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i, u_i, \pi_i). \quad (9.4)$$

У той час, як рівняння (9.2) – (9.4) пропонують формальну підставу для поділу загальної системи, специфічне розкладання на часткові системи залежить від кожного даного конкретного випадку застосування.

Математична задача оптимізації для розділеної системи формулюється тепер так:

мінімізація (9.4) з урахуванням (9.2), (9.3), відповідна функція Лагранжа буде виглядати наступним чином:

$$L(x_i, u_i, \pi_i, \lambda_i, k_i) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i, u_i, \pi_i) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^T g_i(x_i, u_i, \pi_i) + \sum_{i=1}^N k_i^T (\pi_i - \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j) \quad (9.5)$$

при цьому  $k_i, \lambda_i$  представляють множники Лагранжа.

Одержувані звідси умови оптимальності першого порядку для  $i = 1 \dots N$  будуть мати вигляд:

$$L_{\pi_i} = 0 = \frac{\partial f_i}{\partial \pi_i} + \frac{\partial g_i^T}{\partial \pi_i} \lambda_i + k_i \quad (9.6)$$

$$L_{u_i} = 0 = \frac{\partial f_i}{\partial u_i} + \frac{\partial g_i^T}{\partial u_i} \lambda_i \quad (9.7)$$

$$L_{x_i} = 0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial g_i^T}{\partial x_i} \lambda_i - \sum_{j=1}^N C_{ji}^T k_j \quad (9.8)$$

$$L_{\lambda_i} = 0 = g_i \quad (9.9)$$

$$L_{k_i} = 0 = \pi_i - \sum_{j=1}^N C_{ij}^T x_j \quad (9.10)$$

Приклад 9.1. Розглядається мінімізація функції якості

$$f(X, U) = x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 + 2u_2^2 \quad (9.11)$$

з урахуванням умов процесу

$$g_1(X, U) = 3x_1 + x_2 + u_1 + 2 = 0 \quad (9.12)$$

$$g_2(X, U) = x_1 + 2x_2 + u_2 + 1 = 0 \quad (9.13)$$

Оптимальне розв'язок цієї задачі буде

$x_1^* = 0.55422$ ,  $x_2^* = -0.19277$ ,  $u_1^* = -0.14458$ ,  $u_2^* = -0.06024$  з множниками Лагранжа  $\lambda_1^* = 0.28916$ ,  $\lambda_2^* = 0.24096$  і мінімальним значенням функції  $f^* = f(X^*, U^*) = 0.41$ .

Розщеплення сусідніх умов процесу на два часткових процеса з змінними  $(x_1, u_1)$  і  $(x_2, u_2)$  і сполученнями  $\pi_1 = x_2$  і  $\pi_2 = x_1$  представлено на рис.9.1. Функція Лагранжа розділених позицій задачі має вигляд:

$$L(x, u, \pi, \lambda_k) = x_1^2 + u_1^2 + \lambda_1(3x_1 + \pi_1 + u_1 + 2) + k_1\pi_1 - k_1\pi_2 + 2x_2^2 + 2u_2^2 + \lambda_2(\pi_2 + 2x_2 + u_2 + 1) + k_2\pi_2 - k_2\pi_1$$

звідки легко вивести необхідні умови оптимальності першого порядку.

На рис.9.2 показана структура розв'язання ієрархічної оптимізації. Ця структура припускає, що загальна задача оптимізації розщеплюється на незалежні одна від одної часткові задачі  $\pi_i, i = 1, \dots, N$ , які містять змінні для часткової задачі  $b_i$  і глобальні змінні  $a$ . У той час як,  $b_i$  представляють розв'язувані змінні часткових задач,  $a$  встановлюється (визначається) координатором, який знаходиться вгорі.

Припасування змінних задач до змінних координатора  $a$ , або частковим змінним  $b_i$  і визначення часткових задач повинно при цьому проводитися так, щоб для певного значення  $a = a^*$  розв'язання часткових задач, відповідали початковим станам глобальних задач

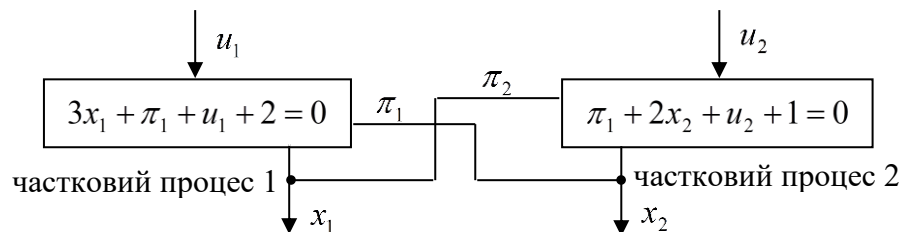
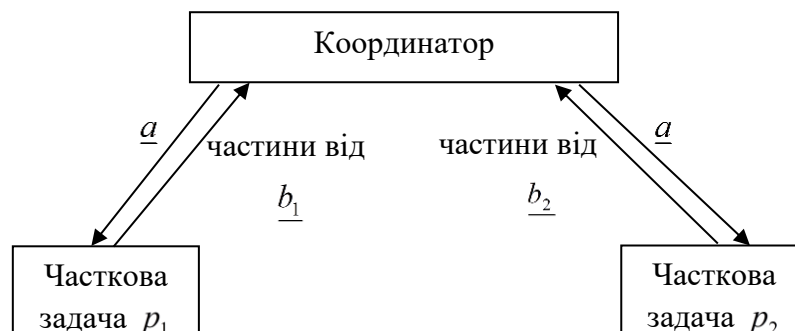


Рис.9.1. Розщеплення задачі в прикладі 9.1



### Рис.9.2. Структура ієрархічної оптимізації.

В основі ієрархічної оптимізації рис.9.2 лежить наступний хід дій:

а) Оберіть стартове (початкове) значення  $a^{(0)}$ ; введіть ітераційний індекс  $l = 0$ .  
 б) Розв'яжіть незалежні один від одного часткові задачі для визначення локальної розв'язуваної змінної  $b_i^l$ , при використанні  $a^{(l)}$ . Розв'язок часткових задач може в даному випадку, йти паралельно у часі за допомогою паралельного обчислення.

в) Поновіть  $a^{(l+1)}$  при використанні  $b_i^{(l)}$ ,  $i = 1, \dots, N$

г) Якщо  $a^{(l)} \approx a^*$ ; зупинка (стоп)

д) Введіть  $l := l + 1$ , йдіть на (б).

Питання, пов'язані з ієрархічною структурою рішення, наступні:

- Як повинні бути класифіковані змінні  $x_i, u_i, \pi_i, \lambda_i, k_i$  при загальній постановці задачі в координуючих змінних **a** і часткових змінних  $b_i$ ?
- Як варто визначати часткові задачі?
- Як виглядає оновлення координуючих змінних **a** (чи в)) і умови виходу з циклу (крок г)) вище приведенного алгоритму?

В залежності від відповіді на ці істотні питання, можуть бути прийняті два різних методи ієрархічної оптимізації.

## 9.2. ЦІЛЬОВА КООРДИНАЦІЯ (КООРДИНАЦІЯ МЕТИ)

При координації мети виходять з наступних встановлених змінних

$$a = k; b_i = [x_i^T u_i^T \lambda_i^T \pi_i^T]^T$$

щоб визначити незалежні часткові задачі, бажано привести функцію Лагранжа (9.5) до форми:

$$L(a, b_1, b_2, \dots, b_N) = \sum_{i=1}^N L_i(a, b_i) \quad (9.14)$$

при цьому враховують, що:

$$\sum_{i=1}^N k_i^T \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_j^T C_{ji} x_i \quad (9.15)$$

дійсна, завдяки чому можна фактично одержати (9.14) у вигляді:

$$L_i(a, b_i) = f_i(x_i, u_i, \pi_i) + \lambda_i^T g_i(x_i, u_i, \pi_i) + k_i^T \pi_i - \sum_{j=1}^N k_j^T C_{ji} x_i \quad (9.16)$$

з (9.14), таким чином, досягається, що  $\partial L / \partial b_i = \partial L_i / \partial b_i$  і необхідні умови (9.6)-(9.9) тепер для  $N$  незалежних часткових задач виконуватимуться. Форма вираження цих часткових задач може бути отримана безпосередньо з (9.16).

$N$  часткових задач, при використанні методу координації мети, встановлюються наступним чином:

Для заданого  $k$  мінімізація відносно  $x_i, u_i, \pi_i$

$$J_i(x_i, u_i, \pi_i) = f_i(x_i, u_i, \pi_i) + k_i^T \pi_i - \sum_{j=1}^N k_j^T C_{ji} x_i \quad (9.17)$$

з урахуванням

$$g_i(x_i, u_i, \pi_i) = 0 \quad (9.18)$$

причому  $\pi_i$  тут додаткові керуючі змінні. Таке визначення часткових задач пояснює також походження назви методу: координатор модифікує за допомогою  $k$  цільову функцію (9.17) часткових задач, щоб одержати з незалежних часткових рішень загальне (глобальне) рішення, що цікавить.

Але тепер необхідно відповісти також на питання після оновлення координуючих змінних  $a = k$  і після виконання умови виходу з циклу. Для цього згадаємо, що розв'язок часткових задач призводить до виконання необхідних умов оптимальності (9.6)-(9.9), таким чином залишається лише одна умова (9.10), для виконання якої слід подбати в координаторі. Це може бути здійснено, наприклад, за допомогою наступної формули актуалізації

$$k^{l+1} = k^{(l)} + \alpha L_k(\pi^{(l)}, x^{(l)}) = k^{(l)} + \alpha(\pi^{(l)} - Cx^{(l)}) \quad (9.19)$$

де  $C = (C_{ij})$  ототожнюється,  $\alpha$  - являє собою величину кроку, що обирається, а  $\pi^{(l)}, x^{(l)}$  можуть бути отримані з розв'язку часткових задач. Рівняння (9.19) за допомогою кроків поступово дає максимізацію функції Лагранжа  $L$ . Ітерації зупиняються і шукане рішення практично досягнуте, якщо:

$$\left| \pi_i^{(l)} - \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j^{(l)} \right| < \varepsilon \quad i = 1, \dots, N \quad (9.20)$$

при цьому  $\varepsilon > 0$  константа виходу з циклу.

Корисно вказати на те, що в процесі ітерації починається розщеплення зв'язків часткових систем. Фактично  $\pi_i$  в часткових системах використовується як незалежна величина керування, таким чином рівняння (9.3) виконується не під час ітерації, а тільки при успішному виході з циклу (9.20). Сума модифікованих функцій якості (9.17) складе:

$$\sum_{i=1}^N J_i(x_i^l, u_i^l, \pi_i^l) = f(x_i^l, u_i^l, \pi_i^l) + k^{(l)T} (\pi^{(l)} - Cx^{(l)}) \quad (9.21)$$

так, що, лише при успішному виході з циклу, вона стає рівною початковій глобальній функції якості.

*Приклад 9.2.* Розглянемо постановку задачі з приклада 9.1 і почнемо ієрархізацію за методом координації мети. Для заданих змінних координації  $k_1^{(l)}, k_2^{(l)}$  дві часткові задачі можуть бути представлені наступним чином:

$$\begin{aligned} \text{Мінімізувати} \quad J_1(x_1, u_1, \pi_1) &= x_1^2 + u_1^2 + k_1^{(l)} \pi_1 - k_2^{(l)} x_1 \\ 3x_1 + \pi_1 + u_1 + 2 &= 0 \\ \text{Мінімізувати} \quad J_2(x_2, u_2, \pi_2) &= 2x_2^2 + 2u_2^2 + k_2^{(l)} \pi_2 - k_1^{(l)} x_2 \\ \pi_2 + 2x_2 + u_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Розв'язок цих часткових задач дає:

$$x_1^{(l)} = \frac{3}{2}k_1^l + \frac{1}{2}k_2^l; \quad u_1^{(l)} = \frac{1}{2}k_2^l; \quad \pi_1^l = -5k_1^l - \frac{3}{2}k_2^l - 2;$$

$$x_2^{(l)} = \frac{1}{2}k_2^l + \frac{1}{4}k_1^l; \quad u_2^{(l)} = \frac{1}{4}k_2^l; \quad \pi_2^l = -\frac{1}{2}k_1^l - \frac{5}{4}k_2^l - 1;$$

Рівняння координатора отримаємо згідно (9.19)

$$k_1^{(l+1)} = k_1^{(l)} + \alpha(\pi_1^{(l)} - x_2^{(l)})$$

$$k_2^{(l+1)} = k_2^{(l)} + \alpha(\pi_2^{(l)} - x_1^{(l)})$$

Підставляючи розв'язок часткових задач у рівняння координатора, легко на даному прикладі показати, що ієрархічна ітеративна процедура для  $0 < \alpha < 0.2345$  збігається з рішенням приведеної в прикладі 9.1 загальної задачі.

### 9.3 КООРДИНАЦІЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ

Той факт, що при координації мети при ітеративній процедурі не мають місце припустимі проміжні розв'язки, виявляється недоліком цього методу при використанні в реальному часі. При ієрархічній оптимізації з координацією за допомогою моделі цей недолік відсутній. При цьому виходять з наступного положення:

$$a = X$$

$$b_i = [u_i^T k_i^T \pi_i^T \lambda_i^T]^T$$

тобто з того, що координатор часткових систем представляє вектор стану  $X$ . Власне кажучи, вимагається тільки перенести в координуючий вектор змінні стану, що приймають участь в рівняннях зв'язку (9.3), в той час, як інші змінні станів можуть бути перенесені на часткові задачі. Але тут ми для простоти віднесли всі змінні стану до вектора координації.

Завдяки вищевказаному порядку змінних, функція Лагранжа (9.5) перетвориться прямо в форму (9.4) з наступними частковими функціями Лагранжа

$$L_i(a, b_i) = f_i(x_i, u_i, \pi_i) + \lambda_i^T g_i(x_i, u_i, \pi_i) + k_i^T (\pi_i - \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j) \quad (9.22)$$

звідки отримуються наступні  $N$  часткових задач

Для заданого  $X$  мінімізація відносно  $u_i, \pi_i$

$$J_i(u_i, \pi_i) = f_i(x_i, u_i, \pi_i) \quad (9.23)$$

з урахуванням

$$g_i(x_i, u_i, \pi_i) = 0 \quad (9.24)$$

$$\pi_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j \quad (9.25)$$

таке формулювання часткової задачі дозволяє одержати змінні зв'язки шляхом прямого застосування (9.25), так що змінні керування  $u_i$  залишаються єдиними змінними оптимізації часткових задач. Тоді вони мають однозначний зміст, коли число значень керування кожної з часткових систем не менш, ніж число відповідних змінних стану. В протилежному випадку координування за допомогою моделі не застосовується.

Варто врахувати, що цільова функція часткової задачі на противагу до координації мети залишається незмінною, але зате зв'язки часткових моделей жорстко фіксуються координатором; звідси виникає і назва методу ієрархізації. Завдяки фіксації зв'язків, модельна координація в стані, під час процедури ітеративного розв'язку, отримати проміжні розв'язки, що виконують усі супутні умови.

Обчислені часткові задачі ведуть до виконання умов (9.6)-(9.10) загальної постановки задачі, так що необхідно виконати ще тільки (9.8) шляхом оновлення змінних координатора. Цього можна досягти за допомогою формули оновлення:

$$x^{(l+1)} = x^{(l)} - \alpha L_x(x^{(l)}, u^{(l)}, \pi^{(l)}, \lambda^{(l)}, k^{(l)}) = x^{(l)} - \alpha \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g^T}{\partial x} \lambda - Ck J^{(l)} \right] \quad (9.26)$$

де  $\alpha$  є ширина кроку, що обирається. Рівняння (9.26) забезпечує шляхом послідовних кроків мінімізацію функції Лагранжа  $L$  по відношенню до вектора стану  $X$ . Ітерації зупиняють і шуканий розв'язок практично досягнутий якщо

$$\left| x^{(l+1)} - x^{(l)} \right| < \varepsilon \quad (9.27)$$

при цьому  $\varepsilon > 0$  є константа закінчення циклу обчислень.

### Приклад 9.3.

Розглядаємо постановку задачі з 9.1 і проводимо ієрархізацію по методу координації за допомогою моделі. Для заданих змінних координації  $x_1^{(l)}, x_2^{(l)}$  можна записати дві часткові задачі у вигляді:

<i>Мінімізація</i>	$J_1(u_1, \pi_1) = x_1^{(l)^2} + u_1^2$ $3x_1^{(l)} + \pi_1 + u_1 + 2 = 0$ $\pi_1 - x_2^{(l)} = 0$
<i>Мінімізація</i>	$J_2(u_2, \pi_2) = 2x_2^{(l)^2} + 2u_2^2$ $\pi_2 + 2x_2^{(l)} + u_2 + 1 = 0$ $\pi_2 - x_1^{(l)} = 0$

Розв'язок цих часткових задач відбувається і виглядає наступним чином:

$$u_1^{(l)} = -3x_1^{(l)} - x_2^{(l)} - 2; \quad \lambda_1^{(l)} = 6x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + 4; \quad k_1^{(l)} = -6x_1^{(l)} - 2x_2^{(l)} - 4$$

$$u_2^{(l)} = -x_1^{(l)} - 2x_2^{(l)} - 1; \quad \lambda_2^{(l)} = 4x_1^{(l)} + 8x_2^{(l)} + 4; \quad k_2^{(l)} = -4x_1^{(l)} - 8x_2^{(l)} - 4$$

Рівняння координатора виглядає згідно (9.26) так:

$$x_1^{(l+1)} = x_1^{(l)} - \alpha [2x_1 + 3\lambda_1 - k_2]^{(l)}$$

$$x_2^{(l+1)} = x_2^{(l)} - \alpha [4x_2 + 2\lambda_2 - k_1]^{(l)}$$

Шляхом введення розв'язків часткових задач в рівняння координатора легко показати, в даному прикладі, ієрархічна ітеративна процедура для  $0 < \alpha < 0.054$  погоджується з рішенням даним в прикладі 9.1.

Альтернативна можливість координації полягає в тому, щоб вирішити необхідні умови (9.8) по змінним координатора і прийняти їх за рівняння оновлення. У згаданому прикладі складаються тоді наступні рівняння координатора:

$$x_1^{(l+1)} = \alpha(-1.5\lambda_1^{(l)} + 0.5k_2^{(l)}) + (1 - \alpha)x_1^{(l)}$$

$$x_2^{(l+1)} = \alpha(-0.5\lambda_1^{(l)} + 0.5k_1^{(l)}) + (1 - \alpha)x_2^{(l)}$$

при цьому  $\alpha \geq 0$  являє собою сталу, котра впливає на збіжність ітеративного алгоритму.

Поряд із двома, представленими тут ієрархічними методами, існують і інші можливості поділу змінних і рівнянь оновлень, котрі при визначених обставинах, можуть

виявитися ще більш вдалимими. Якщо, при постановці задачі, будуть введені також умови типу нерівності, то варто стежити за тим, щоб визначено існував завжди розв'язок для часткових задач.

## 10. ПОДАЛЬША ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

### 10.1. КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

При всіх нетривіальних задачах оптимізації область, що допускається  $X \in R^n$  містить нескінченно багато кандидатів для шуканого мінімуму. Навпроти, для задачі комбінаторної оптимізації мова йде про те, щоб серед маси кандидатів вибрати ті, котрі мінімізують значення функції якості. Може здатися, що задачі оптимізації цього роду легко розв'язуються. (Адже необхідно тільки порівняти між собою обчислювальну безліч кандидатів). При пошуку ефективних точних методів рішення широкого класу дискретних задач треба враховувати можливість відсутності таких методів, визнавши, що існують важкорозв'язувані задачі. У переборних задачах, як правило, мається кінцева безліч варіантів, серед яких потрібно знайти рішення. Але з ростом число векторів швидко росте і задача стає практично нерозв'язаною. Крім того, як правило виключається також систематичне використання викладеними раніше методиками, що дають недостатню ефективність і однозначні уявлення про градієнти. Для випадків комбінаторної оптимізації повинні бути розвинуті відповідні нові методики, що, при нових умовах задач, забезпечують систематичний і ефективний пошук мінімуму.

Корисним методом представлення (зображення) об'єднання багатьох подібних груп задач комбінаторної оптимізації є теорія графів, що за останні роки значно розвинута і формалізована. Але докладний виклад методу комбінаторної оптимізації не вкладається в рамки цього посібника [75,141,187]. Нашою задачею тут, в більшій мірі, є продемонструвати за допомогою прикладів вигляд і застосування постановки комбінаторних задач, а також їхня відмінність від постановки аналітичних задач.

#### Приклад 10.1

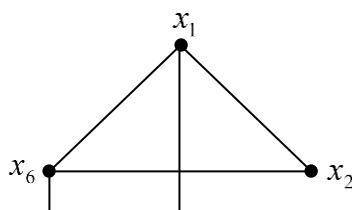
(Вузлове фарбування графа). Розглянемо планування в часі визначеної кількості подій, без небажаного їхнього перетинання (перехлеста). Нехай, наприклад,  $x_1, \dots, x_6$  шість одногодинних лекцій, що повинні прослухати сім груп слухачів, яких цікавлять наступні лекції

$$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_6\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_1, x_6\}.$$

Кожна лекція, у даному випадку, збігається в часі з іншими лекціями. Проводиться пошук оптимального планування часу для мінімізації загальної тривалості так, щоб кожній групі слухачів дати можливість взяти участь (прослухати) ті лекції, що їх цікавлять. Очевидно, що при постановці цієї задачі є безліч альтернативних планів. Найгірше з точки зору мінімізації загальної тривалості, планування в часі, полягає в тому, щоб розташувати лекції послідовно  $(x_1), (x_2), \dots, (x_6)$  (загальна тривалість 6 годин). Більш гарний варіант (розв'язок), з загальною тривалістю 4 годин, виглядає як  $(x_1 x_3), (x_2 x_4), (x_5), x_6$ . Який же мінімальний загальний час?

Для систематичного розгляду цієї задачі, розглянемо граф з шістьма вузлами  $x_1, \dots, x_6$ . Два вузли зв'язують між собою лінією (прямою гранню), якщо обидва вони належать до області інтересів визначеної групи слухачів.

Тим самим, задача зводиться до більш загальної задачі вузлового фарбування графа:





Скільки потрібно мінімально фарб, щоб зв'язані один з одним вузли мали завжди різні (з'єднання) кольори?

Розв'язок цієї задачі, для нашого приклада, буде: 3 кольори (тобто загальна тривалість 3 години), а саме:  $(x_1)$ ,  $(x_2, x_5)$ ,  $(x_3, x_4, x_6)$ .

### Приклад 10.2

(Задача найкоротшого шляху). Розглянемо граф, грані якого (направлені або ненаправлені) оцінені певним чином (наприклад довжина або тривалість у часі). Постановка задачі полягає в тому, щоб визначити найбільш сприятливі з точки зору витрат з'єднання між двома вузлами графа. Ця задача пошуку найкоротшого шляху (відрізка) з'єднання, при наявності безлічі альтернатив.

Можна ставити зворотню задачу, тобто шукати замість найкоротшого шляху, між двома вузлами, найдовший. Постановка задачі пошуку найдовшого шляху знаходиться в тісному зв'язку з методом сітьового планування і може, у багатьох випадках приводити до відповідних розв'язків з меншою витратою обчислень, ніж при лінійному програмуванні.

### Приклад 10.3

(Мінімальне оснащення графа)

(граф мінімального оснащення)

П'ять населених пунктів  $a_1, \dots, a_5$  повинні бути з'єднані з очисною установкою за допомогою відповідних водовідвідних каналів. Можливі варіанти з'єднань показані на графі рис. 10.2

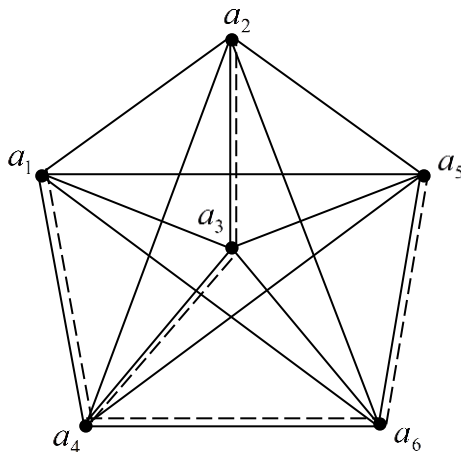


Рис. 10.2: Графи з'єднань до прикладу 10.3

Вартість (витрати на) з'єднання до прикладу 10.3					Таблиця 10.1
	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	1307.2	683.4	850	1790.8	1409.7
$a_2$		490	1040.3	860	1000
$a_3$			561	840	864
$a_4$				1309.8	673.2
$a_5$					620

Конструктивні витрати на окремі грані (види) з'єднань наведені в таблиці 10.1. Ведеться пошук варіанта прокладки водовідвідних каналів, що вимагає мінімальних витрат.

Ця задача розв'язується за допомогою загальної задачі визначення мінімальної величини оснащення графа. На рис.10.2 підкреслене рішення вищенаведеного прикладу. У цьому випадку вартість (величина) витрат =3027.6.

#### Приклад 10.4.

Організаційні задачі в подвійних графах. Групі студентів  $S_1, \dots, S_5$  повинні бути видані теми дипломних робіт. На кафедрі лежить перелік шести робочих тем  $T_1, \dots, T_6$ . Кожен студент вибрав наступні теми, що його цікавлять.

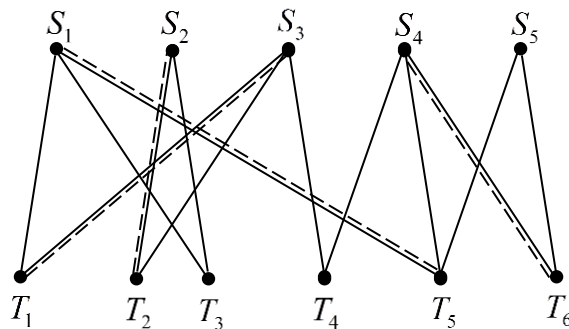


Рис.10.3: Подвійний граф до прикладу 10.4

$$S_1 : T_1, T_3, T_5$$

$$S_2 : T_2, T_3$$

$$S_3 : T_1, T_2, T_4$$

$$S_4 : T_4, T_5, T_6$$

$$S_5 : T_5, T_6$$

Вимагається знайти розподіл тем, при якому можливо більше число студентів одержить бажану тему.

Для формалізації цієї проблеми вузлами  $S_1, \dots, S_5$  і  $T_1, \dots, T_6$ , причому вузли  $S_i$  пов'язують з вузлами  $T_j$ , у роботі над якою зацікавлений студент  $S_i$  (дивись рис.10.3). Задача тоді може бути зведена до організаційної задачі в “подвійних” графах, причому необхідно знайти максимальне число граней без загальних вузлів. Граф називається подвійним, якщо для фарбування кожного з його вузлів (дивіться приклад 10.4) досить 2-х кольорів.

Неоднозначне рішення розглянутого приклада показано на рис.10.3 подвійним пунктиром і призводить до забезпечення чотирьох студентів  $S_1, \dots, S_4$  бажаними темами. Студент  $S_5$  змушений буде задовольнитися темою, що йому не бажана.

## 10.2 ТЕОРІЯ ІГОР

У процесі попереднього викладення, ми виходили з мінімізації або максимізації функції якості по відношенню до єдиного вирішального параметру. Тепер вже в політиці, економіці, техніці й іграх для 2-х чоловіків зустрічаються ситуації, при яких значення функції якості можуть бути піддані впливу двох істотних параметрів із протилежними (конкуруючими) цілями. Тоді мова йде про теорію з двома гравцями.

Для формалізації цих випадків ми визначаємо функцію якості  $f(x_A, x_B)$ , при цьому головні змінні  $x_A$  встановлюються гравцем А, а головні змінні В встановлюються гравцем В. Тепер гравець А намагається мінімізувати функцію  $f_1$ , в той час як гравець В має за мету максимізувати цю функцію. Обидва гравця знають мету супротивника. Для наочності ми прийнемо, що функція  $f(x_A, x_B)$  представляє грошові відношення й А повинний платити В, після того, як буде встановлено, після завдання  $x_A^*$  і  $x_B^*$  значення  $f(x_A^*, x_B^*)$ . Отже, гравець А хоче  $f(x_A, x_B)$  мінімізувати, однак, він знає, що супротивник прагне до зворотного результату. Якщо гравець А повинний грати першим, він, внаслідок цього, спробує мінімізувати виграш свого супротивника вирішуючи наступну мінімаксну задачу:

$$\min_{X_A} \max_{X_B} f(x_A, x_B)$$

Якщо б гру починав гравець В, то він повинний був-би вирішувати задачу мінімакса

$$\min_{X_B} \max_{X_A} f(x_A, x_B)$$

Тим самим для цього простого випадку ми одержимо сідлову точку

$$f(x_A^*, x_B) \leq f(x_A^*, x_B^*) \leq f(x_A, x_B^*)$$

що встановлює оптимальну стратегію для двох гравців.

Задачі теорії ігор стають цікавіші, але і складнішими, якщо розглядаються багатоступінчасті ігри (наприклад, шахи й інші ігри для двох) або так звані диференціальні ігри. Для останніх мова йде про мінімаксімалізацію функції якості, з урахуванням динамічних граничних умов, на увазі динамічної оптимізації. Відомим прикладом з теорії диференціальних ігор є проблема переслідування-втікання, при якій рухомий об'єкт з визначеними динамічними властивостями (максимальна швидкість, здатність відхилятися і т.п) переслідує в 2-х або 3-х мірному просторі, інший рухомий об'єкт, що намагається врятуватися втечею. Спеціальна література по теорії ігор велика і представляє широкий спектр можливих застосувань.

Динамічна оптимізація - метод керування, при якому процес не тільки підтримується на оптимальному рівні в сталому режимі, але і перехід з одного режиму в інший, здійснюється найкращим чином. Функція оптимальності стає функцією часу, і завдання оптимального управління зводиться до максимізації або мінімізації певного критерію в часі. Динамічна оптимізація має деяку схожість із статичною, однак вона більш складна, так як пов'язана з необхідністю визначати функцію часу, а не окремі величини.

До динамічної оптимізації, згідно з визначенням, відносять завдання визначення значень керуючих впливів, що є функціями часу і забезпечують досягнення заданих

критеріїв управління для технологічних процесів в перехідних режимах. визначати функцію часу, а не окремі величини.

## 11. Варіаційне числення в оптимальному управлінні

### 11.1 Формулювання проблеми варіаційного числення

Варіаційне числення являє собою розділ математичного аналізу, пов'язаний з проблемами оптимізації при умовах більш загального характеру, ніж ті, які розглядаються в звичайній теорії знаходження максимумів і мінімумів деяких функцій. Воно має справу з максимізацією або мінімізацією функціоналів, коли потрібно визначити не окремі значення функції, а всю функцію загалом.

Розроблено біля 150 років Ейлером. У варіаційному численні трьома основними проблемами є: задача Лагранжа, задача Майєра і задача Больца.

Задача Лагранжа з однією незалежною змінною пов'язана з визначенням функції  $U(t)$ , яка забезпечує мінімум інтеграла від даної функції.

Сформулюємо цю задачу.

Дано: 1) Система диференціальних рівнянь

$$X' = f(X, U, t) \quad (11.1.1)$$

або в більш загальній формі

$$\varphi_i(X, X', U, t) = 0 \quad (11.1.2)$$

де  $X$  -  $(n + 1)$  - мірний вектор, а  $U$  -  $(r + 1)$  - мірний вектор;

2) Система початкових умов

$$x_i(t_0) = a_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (11.1.3)$$

3) Критерій

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (11.1.4)$$

де  $F(X, U, t)$  - безперервна функція аргументів.

Потрібно знайти функцію  $U(t)$ , яка забезпечує мінімум  $I$  серед всіх функцій  $U(t)$ , що задовольняють умовам, заданим рівняннями (11.1.1) і рівністю (11.1.3).

Задача Майєра пов'язана з визначенням функції  $U(t)$ , що мінімізує дану функцію, що містить деякі змінні, кінцеві значення яких заздалегідь задані. Сформулюємо цю задачу.

Дано:

1) система диференціальних рівнянь вигляду (11.1.1)

2) система початкових умов вигляду (11.1.3)

3) система кінцевих умов

$$x_j(t_f) = b_j \quad (11.1.5)$$

де  $j$  належить деякій підмножині цілих чисел  $1, 2, \dots, m$ , а  $t_f$  не задане;

4) критерій:

$$I = G(X(t), t) \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (11.1.6)$$

Потрібно визначити функцію  $U(t)$  мінімізуючу  $I$  серед всіх функцій  $U(t)$ , що задовольняють умовам (11.1.1), (11.1.3) і (11.1.5).

А. Особливий випадок. Коли критерій має вигляд:

$$I = G(t) \Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0 \quad (11.1.7)$$

задача зводиться до перетворення деякого початкового стану до бажаного кінцевого стану за мінімальний час.

Задача Больца пов'язана з визначенням функції  $U(t)$ , що мінімізує суму, що складається з інтеграла від функції і функції, що обчислюється в кінцевій точці, причому

ці функції містять деякі змінні, кінцеві величини яких заздалегідь не задані. Сформулюємо цю задачу.

Дано:

- 1) система диференціальних рівнянь (11.1.1)
- 2) система початкових умов (11.1.3)
- 3) система кінцевих умов (11.1.5)
- 4) критерій

$$I = G(X, U, t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (11.1.8)$$

Потрібно визначити функцію  $U(t)$ , що мінімізує  $I$  відносно всіх функцій  $U(t)$ , що задовольняють умовам (11.1.1), (11.1.3) і (11.1.5).

Якщо під  $X$  мати на увазі вектор стану процесу, а під  $U$  - вектор управління, то управління по мінімуму інтеграла зводиться до задачі Лагранжа. Точно так само управління кінцевим станом і управління по мінімуму часу перехідного процесу можна назвати задачею Майєра. До задачі Больца може бути зведене управління по мінімуму інтеграла при обмеженні кінцевого стану або управлінні по мінімуму часу переходу в кінцевий стан при наявності обмеження на величину інтеграла.

Із сказаного виходить, що формулювання задачі Больца є найбільш загальним, однак завжди можна ввести деякі допоміжні змінні, які перетворюють задачу Майєра і навпаки. Хоч існує багато проблем оптимального управління, які, як це здається на перший погляд не відносяться ні до однієї з трьох перерахованих проблем, однак завжди можна вдатися до того або іншого математичного прийому, що дозволяє звести первинну задачу до однієї з розглянутих вище.

## 11.2. Основна задача мінімізації. Випадок закріплених кінцевих точок

Розглянемо задачу мінімізації інтеграла:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(x, x', t) dt, \quad (11.2.1)$$

де  $x=x(t)$  - двічі диференційована функція, що задовольняє умовам  $x(t_0)=x_0$  і  $x(t_f)=x_{tf}$ ;  $f$  - безперервна функція аргументів  $x, x', t$ .

Знайдемо функцію  $x(t)$ , що мінімізує інтеграл в рівнянні (11.2.1). Геометрична інтерпретація задачі полягає у визначенні такої кривої  $x(t)$ , що з'єднає точки  $x(t_0)$  і  $x_{tf}$ , вздовж якої інтеграл від даної функції  $f(x, x', t)$  був би мінімальним.

У термінах теорії управління, якщо  $x$  - вихід керованої системи, то інтеграл (11.2.1) визначає якість управління системою, причому треба прагнути до того, щоб цей інтеграл мав мінімум. Інтервал часу, при якому інтеграл має мінімум, повинен бути вибраний. Мається на увазі будь-який інтеграл, протягом якого керована система переміститься від одного існуючого режиму роботи до іншого.

Такий істотний режим роботи являє собою особливі умови тільки для тих змінних, які повинні бути безперервними.

Нехай  $x(t)$  - функція, що забезпечує мінімум, а  $\bar{x}(t)$  - функція, близька до  $x(t)$ .

Тоді  $x(t)$  і  $\bar{x}(t)$  зв'язані співвідношеннями:

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \omega(t); \quad (11.2.2)$$

$$\bar{x}'(t) = x'(t) + \varepsilon \omega'(t) \quad (11.2.3)$$

де  $\varepsilon$  - малий параметр, а  $\omega$  - довільна функція, що диференціюється для якої:

$$\omega(t_0)=\omega(t_f)=0 \quad (11.2.4)$$

оскільки кінцева точка передбачається закріпленою як показано на рис. 11.1.

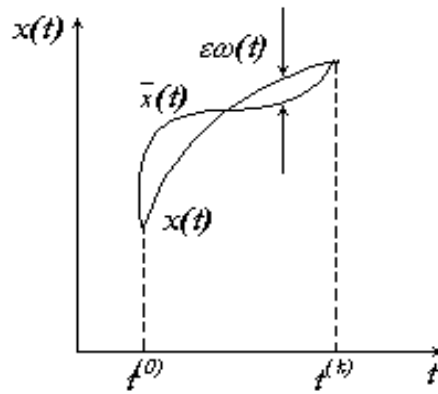


Рис. 11.1. Оптимальна траєкторія із закріпленими крайніми точками

З умови (1.2.4) слідує, що

$$\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$$

$$\bar{x}(t_f) = x(t_f) = x_f$$

тобто всі функції близькі до  $x(t)$ , мають необхідні кінцеві значення функцій, по відношенню до яких проводиться мінімізація. При відповідному виборі  $\omega(t)$  і  $\varepsilon$  за допомогою виразу вигляду (11.2.2) можна представити будь-яку функцію, що диференціюється, що має необхідні кінцеві значення. Вертикальне відхилення довільної кривої  $\bar{x}(t)$  від діючої кривої, що забезпечує мінімум, позначено на рис.11.1 через  $\varepsilon\omega(t)$ . Незалежно від вибору  $\omega(t)$  мінімізуюча функція  $x(t)$  є членом цього сімейства, якщо вибрати величину параметра  $\varepsilon$ , яка дорівнює нулю. Заміняючи  $x$  і  $x'$  в рівнянні (11.2.1) відповідно на  $\bar{x}(t)$  і  $\bar{x}'(t)$  отримуємо

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon\omega, x' + \varepsilon\omega', t) dt \quad (11.2.5)$$

Розкладаючи підінтегральний вираз в формі (11.2.5) в ряд Тейлора знайдемо

$$f(x + \varepsilon\omega, x' + \varepsilon\omega', t) = f(x, x', t) + \varepsilon\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \text{члени що утримують } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \quad (11.2.6)$$

Тоді функцію критерію можна переписати у вигляді:

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ f(x, x', t) + \varepsilon\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \text{члени що містять } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt, \quad (11.2.7)$$

Необхідною умовою для максимуму або мінімуму  $I$  є

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (11.2.8)$$

звідси витікає, що

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right) dt = 0 \quad (11.2.9)$$

Інтегрування за частинами другого члена в цьому інтегралі дає:

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} dt = \omega \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \omega \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) dt \quad (11.2.10)$$

Звідки

$$I'(0) = \omega \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \omega \left[ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right] dt \quad (11.2.11)$$

При цьому рівняння (11.2.11) зводиться до вигляду:

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] dt = 0 \quad (11.2.12)$$

Оскільки рівняння (11.2.12) повинне бути справедливе для всіх  $\omega$ , то необхідна умова для екстремума  $I$  приймає вигляд:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) = 0 \quad (11.2.14)$$

Це рівняння другого порядку відоме під назвою диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа. Його рішення визначає функцію, що доставляє мінімум інтеграла, що розглядається, при умові, що цей мінімум існує. Рівняння

$$\omega(t) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} = 0 \quad \text{для } t=t_0, t_f \quad (11.2.15)$$

називається умовою трансверсальності. Для випадку, коли  $x(t_0)$  і  $x(t_f)$  фіксовані  $\omega(t_0) = \omega(t_f) = 0$ . Рівняння (11.2.14), (11.2.15) визначають двоточкову крайову задачу (ДКТЗ), рішення якої представляє допустиму оптимальну траєкторію. Комбінації граничних умов представлені графічно на рис. 11.2.

Для багатомірного випадку отримаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\nabla_x f - \frac{d}{dt} (\nabla_{x'} f) = 0 \quad (11.2.15)$$

$$\text{де} \quad \nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \nabla_{x'} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1'} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n'} \end{bmatrix}$$

Величина  $\delta I$ , що дорівнює добутку  $I'(0)\varepsilon$ , представляє диференціал функції  $I(\varepsilon)$  при  $\varepsilon=0$  і називається першою варіацією функціонала  $I$ .

Оскільки можна припустити, що

$$\varepsilon \omega(t) = \delta x, \quad (11.2.16)$$

тоді помноживши (11.2.11) на (отримаємо:

$$\delta I = I'(0)\varepsilon = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \delta x dt \quad (11.2.17)$$

де  $x$  - варіація функції  $x(t)$ .

Умова того, що функція  $x(t)$  - екстремаль функціонала  $I$ , може бути сформульована як вимога рівності нулю першої варіації функціонала  $\delta I$ .

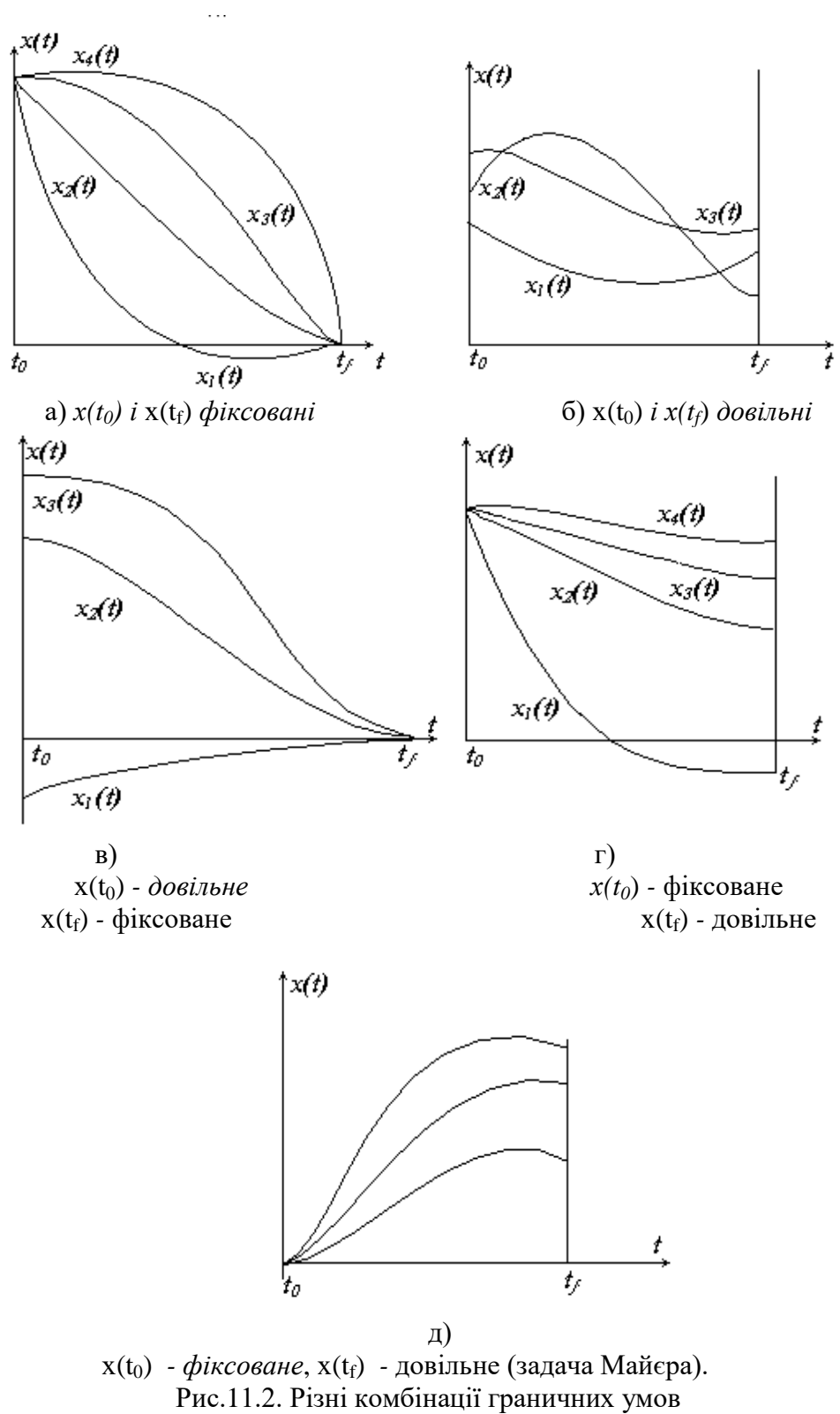


Рис.11.2. Різні комбінації граничних умов

*Приклад 11.2.1.* Потрібно знайти рівняння лінії, що мінімізує функціонал (граничні умови не визначені)

$$I(x) = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} (x')^2 + xx' + x' + x \right] dt$$

Для цієї задачі рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд



$$x' + 1 - x' - x'' = 0 = 1 - x''$$

Розв'язок може бути отриманий безпосереднім інтегруванням:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Тепер для визначення  $c_1$  і  $c_2$  потрібно додати умови трансверсальності до заданих граничних умов. Оскільки розглянута задача має змінні точки початку і досягнення, то

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = x' + x + 1 = 0 \quad \text{для } t=0,2.$$

Таким чином з розв'язку для  $x$  і її похідної отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = t + c_1 + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 + 1 = 0 \quad \text{для } t=0,2.$$

Тепер з системи спільних рівнянь

$$c_1 + c_2 = -1, \quad 3c_1 + c_2 = -5$$

можна знайти  $c_1$  і  $c_2$ , а саме:  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = 1$ . Таким чином екстремаль, що задовільняє даним граничним умовам, має вигляд

$$x(t) = t^2/2 - 2t + 1.$$

Фактичне значення екстремума може бути отримане при підстановці в задану функцію вартості і виконання інтегрування при цьому  $I_{\min} = 3/4$

Достатні умови Лежандра.

Якщо екстремаль функціонала (11.2.1) є мінімальною, то для будь-якої її точки виконується умова:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \geq 0 \quad (1.2.18)$$

якщо екстремаль функціонала - максимальна, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \leq 0 \quad (1.2.19)$$

Достатні умови можуть бути виражені через другу варіацію функціонала  $I$

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (\delta x)^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \right] + (\delta x') \frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \right\} dt \quad (11.2.20)$$

тобто друга варіація являє собою квадратичний член в розкладі  $\Delta I$ .

Якщо друга варіація  $\delta^2 I < 0$  - максимум.

### 11.3 Випадок рухомих кінцевих точок

Розглянемо задачу мінімізації з кінцевою точкою траєкторії, що лежить на кривій. Протягом інтервалу часу управління зовнішні збурення передбачаються постійними. Нехай  $\bar{x}(t)$  буде функцією, яка забезпечує мінімум інтегрального критерію (11.2.1).

Передбачається, що кінцева точка траєкторії лежить на кривій  $x = c(t)$ . Нехай  $\bar{x}(t)$  функція, мало відрізняється від  $x(t)$ , взаємозв'язок  $x(t)$  і  $\bar{x}(t)$  визначається рівняннями (11.2.2) і (11.2.3).

Довільна функція  $\omega(t)$  задовольняє початковій умові.

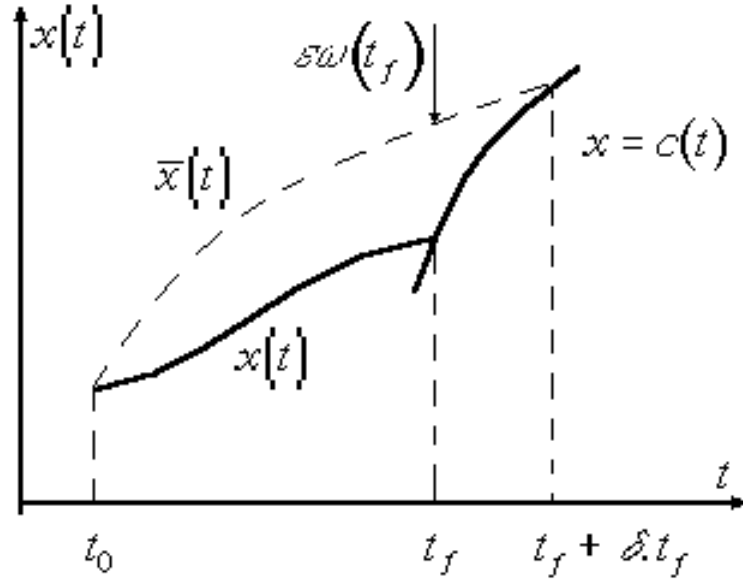


Рис.11.3. Оптимальна траєкторія з рухомими крайніми точками

$$\omega(t_0) = 0, \quad (11.3.1)$$

але кінцева умова ще не визначена. Це приводить до відповідних граничних умов для руху від одного стану до іншого.

Замінюючи в рівнянні (11.2.1)  $x$  і  $x'$  відповідно через  $\bar{x}$  і  $\bar{x}'$  і верхню границю інтегрування на  $t_f + \varepsilon \delta t_f$  отримаємо :

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \omega, x' + \varepsilon \omega', t_f + \varepsilon \delta t_f) dt \quad (11.3.2)$$

Варіація  $\delta t_f$  виникає тому, що кінцева точка траєкторії не закріплена, а лежить на кривій  $x=c(t)$ .

Розкладемо в ряд Тейлора  $f$  обмежуючись першими похідними

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ f(x, x', t_f) + \varepsilon \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \varepsilon \delta t_f \frac{\partial f}{\partial t_f} \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ f(x, x', t_f) + \varepsilon \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right] dt + \varepsilon \delta t_f f(t_f) \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

Слідуючи тим же міркуванням, що і у випадку із закріпленими кінцями, можна показати, що необхідною умовою для екстремума функціонала  $I$  є:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right\} dt + \delta t_f f(x, x', t_f) \quad (11.3.4)$$

Інтегруючи за частинами другий член підінтегрального виразу після деяких перетворень отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \omega \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right) \right] dt + \omega(t_f) \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_f} - \omega(t_0) \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_0} + f(t_f) \delta t_f = 0 \quad (11.3.5)$$

Знайдемо відношення між  $\delta t_f(t_f)$  і  $\omega(t_f)$ , що дає можливість отримати необхідні умови. В момент досягнення множини цілей лінія  $c(t)$  і оптимальна траєкторія  $x(t)$  перетинаються.

Тоді,використовуючи  $\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \omega(t)$ ,

$$\bar{t}_f = t_f + \varepsilon \delta(t_f)$$

$$\text{отримаємо } x(t_f + \varepsilon \delta t_f) + \varepsilon \omega(t_f + \varepsilon \delta t_f) = c(t_f + \varepsilon \delta t_f)$$

Продиференціюємо обидві частини останнього виразу по  $\varepsilon$  і, прирівнявши  $\varepsilon=0$ , отримаємо :

$$x'(t_f) \delta t_f + \omega(t_f) = c'(t_f) \delta t_f. \quad (11.3.6)$$

Виключаючи  $\omega(t_f)$  із рівнянь (11.3.5) і (11.3.6), отримаємо :

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] dt + \left\{ f(t_f) + [c'(t_f) - x'(t_f)] \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \omega(t_0) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_0} = 0. \quad (11.3.7)$$

Так як  $\delta t_f$  довільне, то із рівняння (11.3.7) слідує, що :

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] dt = 0 \quad (11.3.8)$$

$$\left\{ f(t_f) + [c'(t_f) - x'(t_f)] \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \omega(t_0) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_0} = 0 \quad (11.3.9)$$

Враховуючи, що рівняння (11.3.8) повинно бути справедливим для всіх  $\omega$ , отримаємо диференціальне рівняння Ейлера - Лагранжа для даної варіаційної задачі у вигляді:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) = 0 \quad (11.3.10)$$

аналогічно рівнянню (11.2.4). Однак у разі незакріпленої кінцевої точки розв'язок рівняння Ейлера Лагранжа повинно задовольняти рівнянню (11.3.9). Якщо  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'}$  має кінцеве значення при  $t = t_0$ , то рівняння (11.3.9) зводиться до

$$f(t_f) = [x'(t_f) - c'(t_f)] \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_f} \quad (11.3.11)$$

і називається **умовою трансверсальності**.

Відмітимо, що рівняння (11.3.11) може і не задовільнятися при  $t = t_0$ , тому що  $\omega(t_0) = 0$ . Необхідно тільки, щоб при  $t = t_0$   $x$  було неперервним, а  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'}$  скінченним.

В задачах регулювання, протягом деякого інтервалу часу, процес змінюється і спостерігається перехід від одного істотного робочого режиму до іншого. Таким чином, кінцева крива  $x = c(t)$  є горизонтальною прямою і

$$c'(t_f) = 0 \quad (11.3.12)$$

Умова трансверсальності (11.3.11) тепер приймає вигляд:

$$f(t_f) = x'(t_f) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_f} \quad (11.3.13)$$

Таким чином умова трансверсальності (11.3.11) встановлює зв'язок між кутовими коефіцієнтами дотичних до екстремалі  $x(t)$  і лінії  $x = c(t)$ .

**Приклад 11.3.2.** Потрібно мінімізувати

$$I(x) = \int_0^{t_f} [1 + (x')^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

при  $x(0) = 1$ , так що  $x(t_f) = c(t_f) = 2 - t_f$

Відмітимо, що функція вартості являє собою довжину дуги, а це означає, що повинна бути мінімізована відстань між точкою і лінією. Використовуючи рівняння Ейлера-Лагранжа, отримаємо, що оптимальна траєкторія має вигляд  $x = a t + b$ . Для оцінки довільних постійних  $a$  і  $b$  виберемо відповідним чином умови трансверсальності.

Потім приймемо  $x(0) = 1$ , тоді  $\omega(t_0) = 0$ .

Оскільки  $t_f$  не визначене, то  $(v)$  переходить в

$$f(t_f) + (c'(t_f) - x'(t_f)) \left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_{t_f} = 0$$

таким чином при невизначеному часі досягнення  $t_f$  нами отримано  $x' = 1$ .

Із розв'язку рівняння Ейлера-Лагранжа при визначеній початковій умові отримаємо, що  $x(t=0)=1$  тобто  $b=1$  і  $x'(t=t_f)=a=1$ .

Тому оптимальна траєкторія  $x(t)=t+1$ , а час досягнення  $t_f = 1/2$ .

Відмітимо, що оптимальна траєкторія перетинає безліч цілей під прямим кутом. Взагалі, оптимальна траєкторія не виявляється дотичною по відношенню до безлічі цілей. Ця умова відсутності дотичності фактично і є умова трансверсальності.

Розглянули умови наявності локального мінімуму.

Припустимо траєкторія  $X^*(t)$  доставляє абсолютний мінімум функціоналу; тоді окрім виконання рівнянь Ейлера - Лагранжа і умови Лежандра, повинна виконуватися умова

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} f(X(t), X'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(X^*(t), X^{*'}(t), t) dt \geq 0 \quad (11.3.14)$$

відносно довільної траєкторії  $X(t)$ .

Припустимо, що  $X^*(t)$  - мінімізуюча траєкторія, тоді для траєкторії  $X(t)$  виконується умова (11.3.14). Крім того, враховуючи міркування, які привели нас до виразу

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \text{ отримаємо } \left. \frac{d\Delta I}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \geq 0.$$

Якщо визначена так звана функція Вейерштрасса, тобто

$$E(X^*, X^{*'}, X', t) = f(X^*, X', t) - f(X^*, X^{*'}, t) - (X' - X^{*'}) \frac{\partial f}{\partial X'}(X^*, X^{*'}, t)$$

де  $X^{*'} -$  похідна неоптимальної функції, то можна показати, що необхідною умовою для  $\Delta I \geq 0$  у виразі (11.3.4) є

$$E(X^*, X^{*'}, X', t) \geq 0 \quad (11.3.15)$$

на траєкторії  $X^*(t)$  для довільного  $t$ . Вираз (11.3.15) являє собою умову Вейерштрасса.

*Приклад 11.3.3.* Функція задовольняє граничним умовам:

$x(0) = 0$  і  $x(1) = 1$  і функціонал вигляду

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x'} dt$$

де  $f = \frac{1}{x'}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x'} = -(x')^{-2}$ ,  $x' = k$ ,  $k$  - стала, таким чином

$x = kt + x(0)$ , граничні умови виконуються при  $k = 1$ , тому розв'язок  $x = t$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial t}{\partial x'} \right) = 0$$

Припустимо отриманий розв'язок оптимальний, тоді він повинен бути таким, що мінімізує.

**Умова Лежандра.**  $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \geq 0$  приймає числові значення  $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} = \frac{2}{(x')^3}$ .

Вздовж оптимальної траєкторії, де  $x' = 1$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} = 2$  умова Лежандра виконується.

**Умова Вейерштрасса.**

Функція Вейерштрасса

$$E = \frac{1}{x'} - 1 + (x' - 1) = \frac{1}{x'} + x' - 2$$

звідки видно, що умова  $E \geq 0$  не задовільняється, якщо  $x' < 0$ .

Тому умова Вейерштрасса не виконується. Таким чином розв'язок  $x = t$  забезпечує локальний мінімум.

#### 11.4. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі рівності і множники Лагранжа

Ситуація, коли на співвідношення між скалярними елементами траєкторії стану накладені обмеження -- ситуація, яка майже завжди виникає в фізичних задачах.

Розглянемо задачу оптимізації функції вартості

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(X, X', t) dt \quad (11.4.1)$$

з додатковими обмеженнями типу рівності в формі  $m$ -мірного векторного простору

$$\varphi_k[X(t), X'(t), t] = 0, \quad k = 1, \dots, m \text{ и } m < n \quad (11.4.2)$$

де функції  $\varphi_k$  двічі диференційовані.

Ця задача еквівалентна задачі мінімізації функціонала без обмежень,

$$I = \int_{t_0}^{t_f} [f(X, X', t) + \lambda^T(t) \varphi(X, X', t)] dt \quad (11.4.3)$$

$$\Phi(X, X', \lambda(t), t) = f(X, X', t) + \lambda^T \varphi(X, X', t)$$

де  $m$ -мірний вектор  $\lambda(t)$  — вектор, еквівалентний множнику Лагранжа, який розглядається як функція незалежної змінної  $t$ .

Для випадку без обмежень справедливо

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \omega' \right) dt = 0 \quad (11.4.4)$$

Однак функція  $X(t)$  задовільняє також  $\varphi(X, X', t) = 0$ .

Це означає, що  $\omega(t)$  не може бути вибрана довільно. Вона повинна бути такою, що

$$\bar{\varphi}(x + \varepsilon \omega, x' + \varepsilon \omega', t) = 0 \quad (11.4.5)$$

Із рівняння (11.4.5) слідує  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$  або припустивши, як і раніше  $x + \varepsilon \omega = \bar{x}$ ,

$x' + \varepsilon \omega' = \bar{x}'$ , отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \omega' = 0 \quad (11.4.6)$$

Тепер вирази (1.6.4) і (1.6.6) можна об'єднати, ввівши множник  $\lambda(t)$  і створити єдину необхідну умову вигляду

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} + \lambda^T(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \right) \omega(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}'} + \lambda^T(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}'} \right) \omega'(t) \right] dt = 0 \quad (11.4.7)$$

Якщо  $\lambda(t)$  вибрати так, що вираз із співмножником  $\omega'(t)$  дорівнює нулю, то перший доданок в інтегралі також повинен дорівнювати нулю, оскільки функція  $\omega(t)$  довільна.

Необхідна умова (11.6.7) при інтегруванні за частинами перетворюється до вигляду

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i'} \right) + \sum_{k=1}^m \left[ \lambda_k \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i'} \right) \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i'} \lambda_k'(t) \right] = 0 \quad (11.4.8)$$

що відповідає 
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}'} \right) = 0$$

*Приклад 11.4.4.* Задано диференціальне рівняння системи  $\theta'' = u(t)$ , яке можна інтерпретувати як момент інерції ракети у вільному просторі; потрібно мінімізувати

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 (\theta'')^2 dt \quad \text{так, щоб} \quad \theta(t=0) = 1, \quad \theta(t=2) = 0,$$

$$\theta'(t=0) = 1, \quad \theta'(t=2) = 0.$$

Для того, щоб записати задачу в термінах простору станів, припустимо

$$x_1(t) = \theta(t), \quad x_1' = x_2(t), \quad x_2' = u(t)$$

Тепер диференціальне рівняння системи прийме вигляд

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + b u(t),$$

де 
$$\mathbf{X}^T = [x_1 \ x_2], \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b^T = [0 \ 1]$$

Якщо застосувати (11.6.3) ( $u(t)$  розглядається як змінна стану  $x_3$ ) задача зводиться до мінімізації функціоналу

$$I = \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda^T(t) \left[ \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + b u(t) - \mathbf{X}' \right] \right\} dt = \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1(t) [x_2(t) - x_1'] + \lambda_2(t) [u(t) - x_2'] \right\} dt$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа приймуть вигляд

$$\lambda_1' = 0, \quad \lambda_2' = -\lambda_1(t), \quad u(t) = -\lambda_2(t)$$

Остаточне рішення, отримане за допомогою диференціальних рівнянь і граничних умов, рівне

$$x_1 = \frac{1}{2} t^3 - \frac{7}{4} t^2 + t + 1,$$

$$x_2 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{7}{2} t + 1, \quad u = 3t - \frac{7}{2}$$

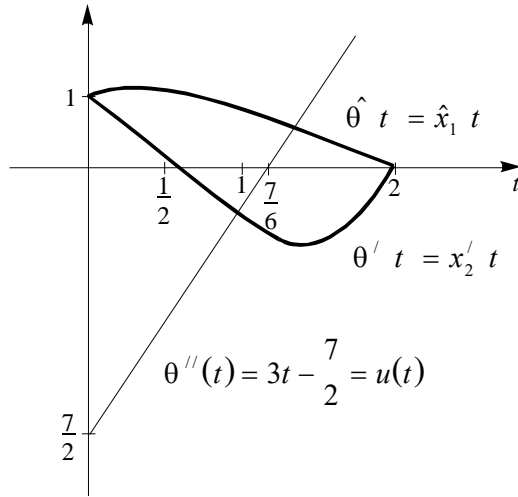


Рис.11.4. Структурна схема, оптимальне рівняння і змінні стани для системи.

### 11.5. Задача управління кінцевим станом

Розглянемо систему першого порядку  $\varphi(x, x', t) = 0$  ( $x' = f(x, u, t)$ ), яка починає рух із точки  $x_1(t_0) = x_1$  і протягом заданого часу  $[t_0, t_f]$  повинна керуватися так, щоб мінімізувати функцію  $I = G(x_{t_f})$ .

При цьому кінцева точка  $x_{t_f} = x(t_f)$  вважається вільною. Можна вважати, що справжня задача еквівалентна задачі знаходження траєкторії  $x(t)$ , яка задовольняє заданим граничним умовам і мінімізує деякий еквівалентний показник якості

$$I_1 = G(x_{t_f}) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \varphi(x, x', t) dt \quad (11.5.1)$$

Розглянемо варіації виду  $\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \omega(t)$ , при  $\omega(t_0) = 0$ , знаходимо, що

$$I_1 = G[x_{t_f} + \varepsilon \omega(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \varphi[x + \varepsilon \omega, x' + \varepsilon \omega', t] dt$$

Прийнявши  $\left. \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$  і інтегруючи за частинами, отримуємо рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x'} \right) = 0 \quad (11.5.2)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \omega(t) \right|_{t=t_f} + \left. \frac{\partial F_1(x, x', t)}{\partial x'} \omega(t) \right|_{t=t_f} = 0 \quad (11.5.3)$$

де  $F_1 = \lambda(t) \varphi(x, x', t)$ .

Так як величина  $\omega(t_f)$  довільна, отримуємо наступні умови трансверсальності

$$\left. \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right|_{t=t_f} = - \left. \frac{\partial F_1(x, x', t)}{\partial x'} \right|_{t=t_f} \quad (11.5.4)$$

Разом з умовами (11.4.2) і (11.4.4) повинна виконуватися також умова Вейерштрасса  $E \geq 0$ .

Враховуючи вираз

$E(x^*, x^{*'}, x', t) = F(x^*, x', x, t) - F(x^*, x^{*'}, t) - (x' - x^{*'}) \frac{\partial F}{\partial x'}(x^*, x^{*'}, t)$  і (1.4.3) знайдемо

$$E = \lambda(t) \varphi(x^*, x', t) - \lambda(t) \varphi(x^*, x^{*'}, t) - (x' - x^{*'}) \lambda(t) \quad (11.5.5)$$

Для  $n$ -мірного простору  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\varphi(X, X', t) = 0$  перша необхідна умова оптимальності визначається сукупністю рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F_1}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F_1}{\partial X'} \right) = 0 \quad (11.5.6)$$

де  $F_1 = \lambda^T(t) \phi(X, X', t)$ .

Умови трансверсальності

$$\left. \frac{\partial G}{\partial X} \right|_{t_f} = - \left. \frac{\partial F}{\partial X'} \right|_{t_f} \quad (11.5.7)$$

і умови Вейерштрасса

$$E = \lambda^T(t) \phi(X^*, X', t) - \lambda^T(t) \phi(X^*, X^{*'}, t) - (X' - X^{*'})^T \lambda(t) \quad (11.5.8)$$

Якщо  $G$  явно залежить від  $t_f$ , тобто кінцевий момент часу  $t_f$  наперед не визначений, тоді вираз (11.4.1) набуде вигляду

$$I_1 = G(X_{t_f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) \phi(X, X', t) dt \quad (11.5.9)$$

Це означає, що можлива варіація  $t_f$ , позначена через  $\delta t_f$ .

Умови трансверсальності в граничній точці

$$\left[ \frac{\partial G}{\partial t} + F_1 - x' \frac{\partial F_1}{\partial x'} \right]_{t=t_f} \delta t_f + \left[ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x'} \right]_{t=t_f} \delta x_{t_f} = 0 \quad (11.5.10)$$

У разі  $n$  змінних умови трансверсальності запишуться

$$\left[ \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + F_1 - \sum_{i=1}^n x_i' \frac{\partial F_1}{\partial x_i'} \right]_{t_f} \delta t_f + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial x_i'} \right]_{t=t_f} \delta x_{t_{fi}} = 0 \quad (11.5.11)$$

де  $\delta x_{t_{fi}}$  —  $i$ -та складова вектора  $\delta x_{t_f}$ .

Для задачі оптимальної швидкодії  $G(X_{t_f}, t_f) = t_f$  и  $I_1 = t_f + \int_{t_0}^{t_f} F_1(X, X', t) dt$ , де  $t_f$

невідомо і повинно бути знайдено, необхідні умови для цієї задачі ті ж, що і для задачі з фіксованим часом і функціоналом

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_f} F(X, X', t) dt.$$

Відмінність в умові трансверсальності (11.4.11), то згідно з виразом (11.4.11) можна отримати умову

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i' \frac{\partial F_1}{\partial x_i'} - F_1 \right) \Big|_{t=t_f} = 1, \quad (11.5.12)$$

коли  $X(t_f)$  фіксоване.

Якщо  $\varphi_i = x_i' - f_i(X, U, t) = 0$ , то вираз (1.4.12) зводиться до вигляду

$$\left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) x_i'(t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(X, X', t) \right]_{t=t_f} = 1$$

або



$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(x^*, u^*, t) \Big|_{t=t_f} = 1 \quad (11.5.13)$$

Дійсно, якщо функція  $F_1(\lambda, X, X', u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x'_i - f_i(X, U))$  явно не залежить від часу, то із виразів (11.4.12), (11.4.13) слідує

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(X^*, U^*, t) \equiv 1 \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (11.5.14)$$

це справедливо, коли  $f(X, U)$  не залежить явно від часу.

### 11.6. Задача оптимального управління з узагальненим показником якості. Задача Больца

Розглянемо системи вигляду

$$X' = f(X, U, t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (11.6.1)$$

Потрібно знайти таку функцію управління на інтервалі  $t_0 \leq t \leq t_f$ , яка по-перше, переводить систему із початкового стану в кінцевий, для якого зберігається умова

$$\rho[X(t_f), t_f] = 0 \quad (11.6.2)$$

і по-друге, забезпечує мінімум показника якості

$$I = G[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (11.6.3)$$

$$F_1(X, X', U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(X, X', U, t) \quad (11.6.4)$$

де  $\varphi_i(X, X', U, t) = x'_i - f_i(X, U, t)$ ;

$\lambda_i(t)$  - множник Лагранжа.

#### 1. Рівняння Ейлера-Лагранжа

Виписавши  $\frac{\partial F_2}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x'_i} \right) = 0$  в явном вигляді, отримаємо

$$\lambda'_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad k=1, \dots, n, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u_j} = 0, \quad j=1, \dots, r \quad (11.6.5)$$

Ці  $n+r$  рівнянь разом з  $n$  рівняннями системи (11.5.1) і умовою  $\zeta(u) = 0$  дають  $2n+r+1$  рівнянь для  $2n+r+1$  невідомих  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, u_1, \dots, u_r$ .

Якщо  $F_1$  — відома функція часу, то

$$-F_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x'_i} x'_i = \text{const} \quad (11.6.6)$$

яке зводиться до наступного

$$-F_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \text{const} \quad (11.6.7)$$

#### 2. Умова Лежандра існування мінімуму функціонала

$$[F_{2_{u_i u_j}}] \geq 0 \quad (11.6.8)$$

#### 3. Умова Вейєрштраса

З виразів (11.5.4) і рівнянь (11.5.5) знайдемо

$$-F(X^*, U^*, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(X^*, U^*, t) \geq -F(X^*, U^*, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(X^*, U^*, t) \quad (11.6.9)$$

Це означає, що  $U^*$  потрібно вибрати так, щоб величина  $H = -F + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$  досягала максимуму в кожній точці оптимальної траєкторії.

Останнє припущення, що функція  $H$  диференціюється, означає, що в кожній точці оптимальної траєкторії повинна виконуватися наступна умова:

$$\left( -\frac{\partial F}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \bigg|_{u_i=u_i^*} = 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (11.6.10)$$

Рівняння (11.5.10) відповідає останнім  $r$  рівнянням Ейлера-Лагранжа (11.5.5). Крім того, вимога  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \bigg|_{u=u_i}$  дає умову Лежандра.

#### 4. Умови трансверсальності

Якщо функції  $G$  і  $\rho$  не залежать від кінцевого часу  $t_f$ , то припустивши  $R = G + \alpha \rho$  (де  $\alpha$  — постійний множник), отримаємо умову трансверсальності при  $t_f$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} = -\frac{\partial F}{\partial x_i'} \bigg|_{t=t_f} \quad (11.6.11)$$

Коли  $G$  і  $\rho$  залежать від  $t_f$ , виконується умова

$$\left[ \delta R + \left( F_2 - \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i'} x_i' \right) \delta t + \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i'} \delta x_i \right]_{t=t_f} = 0 \quad (11.6.12)$$

де  $\delta R = \sum \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t$  для всіх нескінченно малих варіацій  $\delta x_i$  і  $\delta t$  з врахуванням  $\rho[x(t_f), t_f] = 0$ .

Звернемо увагу на одну граничну умову, яка витікає з умови трансверсальності (11.5.11).

Для класу задач, де  $F \equiv 0$  і  $G$  не залежать від  $x_f$  і де кінцева точка повинна лежати на поверхні  $\rho(x) = 0$ , маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_i'} \bigg|_{t=t_f} \quad \text{при} \quad F_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

Якщо  $\varphi_i = x_i' - f_i$ , то маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} = -\lambda_i(t_f) \quad (11.6.13)$$

Це означає, що градієнт функції  $\rho(x)$  повинен вказувати напрямом, протилежний вектору  $\lambda(t_f)$ .

Інакше кажучи, для цього класу задач гранична умова така, що  $\lambda(t_f)$  перпендикулярно гіперповерхності  $\rho(x_f)$ . Приклад — задачі, оптимальні по швидкодії.

### 11.7. Лінійноквадратична оптимізація

Відома постановка задачі оптимального керування динамічними системами, що полягає в знаходженні траєкторії  $\mathbf{U}(t) \{ t_0 < t < t_f \}$ , яка приводить стан системи  $\mathbf{X}(t)$  за допомогою мінімізації функціоналу вартості або якості

$$I = G[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t), t] dt$$

з заданими початковими умовами  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$  в кінцеву умову  $\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0$  оптимальним способом. З точки зору використання є два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу, та в часовому проміжку оптимізації для реального процесу. Очевидно, що ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану  $\mathbf{X}_0$ . З-за дії можливих перешкод або неточностей моделі, на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан  $\mathbf{X}(t)$ , що відрізняється від очікуваного, отриманого по моделі  $\mathbf{X}(t)$ . При цьому також можливе відхилення кінцевих умов.

В випадку оптимального регулювання з необхідних умов випливає рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону регулювання

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}^*[\mathbf{X}(t), t]$$

Ця формула використовується для прямих розрахунків керуючого впливу  $\mathbf{U}(t)$  по виміряним величинам станів  $\mathbf{X}(t)$ . Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон регулювання є незалежним відносно можливих початкових станів  $\mathbf{X}_0$ . За відсутності несподіваних перешкод або неточностей моделі оптимальне керування та оптимальне регулювання для заданих початкових станів  $\mathbf{X}_0$  дає однакові результати. Установлено, що при заданій постановці проблеми використання оптимального закону регулювання з-за своєї універсальності та легкості обчислень з точки зору практичного використання є більш бажаним, ніж застосування оптимальної траєкторії керування.

Важливим спеціальним випадком оптимального керування динамічними системами є лінійно-квадратична (ЛК) оптимізація (ЛКО), яка пов'язана з лінійними рівняннями станів та квадратичними функціоналами якості.

Розглянемо задачу оптимального керування, припустимо, що потрібно мінімізувати функцію вартості / при фіксованому  $t_f$  /

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t)] dt, \quad (11.7.1)$$

для узагальненої системи з змінними в часі параметрами і яка задається рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{U}(t) \quad (11.7.2)$$

при умові, що  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$  - вектор початкового стану.

Об'єднаємо функцію вартості та обмеження у формі диференційного рівняння за допомогою множника Лагранжа. Тоді

$$I' = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{X}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t) + \lambda^T(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{U}(t) - \mathbf{X}'] \right\} dt \quad (11.7.3)$$

Точний характер використаної функції вартості залежить від вигляду конкретної задачі, що розв'язується. Тому вагові матриці  $\mathbf{R}(t)$  та  $\mathbf{Q}(t)$  звичайно обираються з фізичних міркувань. Крім того, без втрати спільності припускається, що  $\mathbf{R}(t)$  та  $\mathbf{Q}(t)$  - симетричні. Вектор керування  $\mathbf{U}(t)$  розглядаємо так само, якби це був вектор стану. Далі скористаємось рівняннями Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}'} \right) = 0 \quad (11.7.4)$$

де

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \lambda^T(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) - \mathbf{x}'],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t) \lambda(t), & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}'} &= -\lambda(t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t) \lambda(t), & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}'} &= 0 \end{aligned}$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа для цієї задачі мають вигляд:

$$\lambda' = -\mathbf{A}^T(t) \lambda(t) - \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) \quad (11.7.5)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \lambda(t) \quad (11.7.6)$$

Через те, що  $\mathbf{x}(t_f)$  не визначений, умова трансверсальності в момент досягнення

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_f} = \mathbf{l}(t_f) = 0 \quad (11.7.7)$$

Відмітимо, що рівняння для оптимального керування можливе при умові, що існує матриця, обернена матриці  $\mathbf{R}(t)$

Для отримання невід'ємної другої похідної необхідно, щоб  $\mathbf{R}(t)$  та  $\mathbf{Q}(t)$  були невід'ємно визначені. Таким чином, зрозуміло, що  $\mathbf{R}(t)$  повинна бути додатньо визначеною.

Стан системи  $\mathbf{x}(t_0)$  заданий при  $t=t_0$ , тоді як спряжений вектор  $\lambda(t)$  визначений в момент досягнення  $\lambda(t_f)=0$ . Таким чином, перш ніж визначити оптимальне керування, необхідно вирішити двоточкову крайову задачу (ДТКЗ).

З'ясуємо, чи можливо перетворити керування (11.7.6) по замкненому контуру  $\mathbf{u}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$ , тобто знайдемо оптимальний закон регулювання. Припустимо, що рішення для спряженого випадку

$$\lambda(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

Підставляючи (11.7.8) в (11.7.2) та (11.7.6), отримаємо

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (11.7.9)$$

Крім того, з (11.7.8) та (11.7.5) випливає

$$\lambda' = \mathbf{P}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{x}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (11.7.10)$$

Об'єднуючи (11.7.9) та (11.7.10) одержуємо

$$[\mathbf{P}' + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)]\mathbf{x}(t) = 0 \quad (11.7.11)$$

Оскільки ця рівність повинна виконуватись для ненульових  $\mathbf{x}(t)$ , то множник  $[\cdot]$ , що стоїть перед  $\mathbf{x}(t)$ , повинен дорівнювати нулю. Таким чином матриця  $\mathbf{P}$ , що є симетричною матрицею розмірності  $(n \times n)$  і яка містить в собі  $n(n+1)/2$  різних членів, повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккати:

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (11.7.12)$$

при граничній умові  $\mathbf{P}(t_f)=0$

Таким чином, розв'язання матричного рівняння Ріккати можливо проводити в оберненому часі, від  $t_f$  до  $t_0$ , побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (11.7.13)$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (11.7.14)$$

*Приклад 11.7.5.:*

Синтезувати систему оптимального керування об'єктом

$$T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} + x = kU, \quad x(t_0) = x_0$$

з критерієм

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + rU^2) dt$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{T_2}x_1 - \frac{T_1}{T_2}x_2 + \frac{k}{T_2}U \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{bmatrix}$$

Далі використаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\Phi = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}rU^2 + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2\left(-\frac{1}{T_2}x_1 - \frac{T_1}{T_2}x_2 + \frac{k}{T_2}U - x_2'\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1'}\right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_1 - \frac{1}{T_2}\lambda_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} = -\lambda_1, \quad \lambda_1' = \frac{1}{T_2}\lambda_2 - x_1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \lambda_1 - \frac{T_1}{T_2}\lambda_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2'} = -\lambda_2, \quad \lambda_2' = -\lambda_1' + \frac{T_1}{T_2}\lambda_2$$

$$\text{або} \quad \lambda' = A^T \lambda(t) - Q(t) X(t)$$

$$\text{Тоді} \quad \lambda' = \begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_2} \\ 1 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1' = \frac{1}{T_2}\lambda_2 - x_2, & \frac{\partial \Phi}{\partial U} = rU + \lambda_2 \frac{k}{T_2} = 0 \\ \lambda_2' = -\lambda_1' + \frac{T_1}{T_2}\lambda_2, & U = -\frac{1}{r} \frac{k}{T_2} \lambda_2 \end{cases}$$

Для оптимального закону регулювання

$$U = -\frac{1}{r} \frac{k}{T_2} (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

Матричне рівняння Ріккати

$$P' = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$$

запишемо в вигляді

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_2} \\ 1 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{bmatrix} r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad r = 1 \\
\begin{cases} P'_{11} = \frac{2}{T_2} P_{12} + \left(\frac{k}{T_2}\right)^2 P_{12}^2 - 1 & P_{11}(t_f) = 0 \\ P'_{12} = -P_{11} + \left(\frac{T_1}{T_2}\right) P_{12} + \frac{1}{T_2} P_{22} + \left(\frac{k}{T_2}\right)^2 P_{12} P_{22} & P_{12}(t_f) = 0 \\ P'_{22} = \frac{2T_1}{T_2} P_{22} + \left(\frac{k}{T_2}\right)^2 P_{22}^2 - 2P_{12} & P_{22}(t_f) = 0 \end{cases} \\
U^*(t) = -\frac{1}{r} \frac{k}{T_2} (P_{12} x_1 + P_{22} x_2)
\end{aligned}$$

### 11.8. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі нерівностей

У багатьох фізичних задачах, що представляють інтерес для фахівців в області управління, є різні обмеження в формі нерівностей на вектор управління

$$\Gamma_{\min} \leq \Gamma(X, X', t) \leq \Gamma_{\max} \quad (11.8.1)$$

Для рішення задачі з обмеженнями в формі нерівностей є декілька методів, один з яких метод заміни змінних. Виконується перетворення обмеження (11.8.1) в обмеження типу рівності шляхом введення нових змінних стану  $\gamma_i$ , що задовільняють рівнянням

$$(\Gamma_{\max_i} - \Gamma_i)(\Gamma_i - \Gamma_{\min_i}) = \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11.8.2)$$

Легко довести, що рівняння (11.8.2) еквівалентно (11.8.1) і навпаки. Тепер, щоб ввести обмеження (11.6.2) і (11.8.2) в (11.6.1), можна використати множники Лагранжа. Далі стає можливим використати звичайні необхідні умови екстремума.

**Приклад 11.8.6.:** Розглянемо ту ж динаміку системи, що і в попередньому прикладі:

$$x'_1 = x_2(t), \quad x'_2 = u(t)$$

при наявності початкових умов  $x_1(t_0) = x_0$ ,  $x_2(t_0) = v_0$  задача заключається в тому, щоб знайти таке управління, яке максимізує  $x_1(t_f)$  для фіксованого  $t_f$  при граничній умові  $x_2(t_f) = v_f$  і обмеженнях типу нерівність на скалярне управління  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ .

Перетворимо обмеження типу нерівність в обмеження типу рівність, ввівши нову змінну  $\alpha(t)$ :  $(u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2 = 0$

Таким чином, задача може бути представлена як задача мінімізації  $I = -x_1(t_f)$  при наявності обмежень типу рівність

$$x'_1 = x_2(t), \quad x_1(t_0) = x_0, \quad x_1(t_f) \text{ — довільно,}$$

$$x'_2 = u(t), \quad x_2(t_0) = v_0, \quad x_2(t_f) = v_f, \quad (u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2 = 0.$$

Функція вартості з множниками Лагранжа прийме вигляд

$$I_1 = -x_1(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (-x_1' + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(u - x_2') + \lambda_3((u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2)) dt$$

$$\text{Із рівняння Ейлера-Лагранжа} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial X'} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \quad X^T = [x_1, x_2, u]$$

$$\text{при } \Phi = \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(u - x_2) + \lambda_3((u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2) - x_1' \quad \text{знаходимо}$$

$$\lambda_2' = 0, \quad \lambda_2' = -\lambda_1$$

$$0 = -\lambda_2 + \lambda_3(2u - u_{\max} - u_{\min}), \quad 0 = \alpha \lambda_3.$$

Таким чином, ми прийшли до двоточечної крайової задачі, рішення якої визначає оптимальні змінні стану і управління:

$$x_1' = x_2(t), \quad x_1(t_0) = x_0,$$

$$x_2' = x(t), \quad x_2(t_0) = v_0,$$

$$\lambda_1' = 0, \quad \lambda_1(t_f) = -1,$$

$$\lambda_2' = -\lambda_1(t), \quad x_2(t_f) = v_f,$$

$$\alpha(t) \lambda_3(t) = 0,$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_3(t)(2u(t) - u_{\max} - u_{\min})$$

$$\alpha^2(t) = (u(t) - u_{\min})(u_{\max} - u(t))$$

Дана ДТКЗ є нелінійною через введення останніх трьох рівнянь і отримати рішення аналітично вельми важко. В звичайному варіанті  $u_{\min} = -1$ ,  $u_{\max} = 1$ .

В цьому випадку можна показати, що  $\alpha(t) = 0$ ,

$$u(t) = -\text{sign} \lambda_2(t),$$

$$\text{де} \quad \text{sign} \lambda_2 = +1, \quad \lambda_2 > 0,$$

$$\text{sign} \lambda_2 = -1, \quad \lambda_2 < 0.$$

Облік обмежень на управління в формі нерівностей

$$g[X(t), U(t), t] \geq 0$$

можна здійснити також використовуючи метод функції штрафів, тобто введенням штрафу за порушення нерівності

$$I = \int \dots + g[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]^p H(g) dt$$

Тут  $p$  — довільне додатне число;  $H(g)$  — модифікована ступінчата функція Хевісайда

$$H(g) = \begin{cases} 0, & g \geq 0 \\ k, & g < 0 \end{cases}.$$

Шляхом вибору значень  $p$  і  $k$  можна змінити значення штрафу за порушення обмеження на управління

$$(u_{\max} - u)(u - u_{\min}) \geq 0$$

$$u_{\max} = 1, \quad u_{\min} = -1$$

$$(1 - u)(u + 1) = (1 - u^2) > 0$$

Функції штрафу на обмеження по управлінню може мати вигляд

$$\theta = [u(t) - u_b]^2 h[u(t) - u_b] + [u_H - u(t)]^2 h[u_H - u(t)],$$

$h$  функція Хевісайда.

### 11.9. Варіаційний метод

В застосованому до цього часу методі при виведенні необхідних умов оптимальності траєкторії  $x$  вводилося відхилення від  $\bar{x}$  на величину  $\varepsilon\omega$ , а потім визначались необхідні умови із рівняння

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

яке повинно виконуватися незалежно від  $\omega$ .

Другий метод, що називається варіаційним, заключається в виділенні лінійної частини  $\Delta I = I(x + \varepsilon\omega) - I(x)$  і твердженні, що вона також повинна дорівнювати нулю при  $\varepsilon = 0$  незалежно від  $\omega$ . Лінійна частина  $\Delta I$ , яку ми позначаємо  $\delta I$ , називається першою варіацією  $I$  (при  $x$ ), диференціалом Гато. У варіаційному методі для визначення необхідних умов використовуються диференціали, а не похідні. Розглянемо виведення необхідних умов мінімуму функціонала варіаційним методом

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(x, x', t) dt \quad (11.9.1)$$

при фіксованому часі  $t_f$  закінчення.

Припускається, що  $\bar{x}(t)$  і  $\bar{x}'(t)$  представлені сімейством кривих

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon\omega(t), \quad \bar{x}'(t) = x'(t) + \varepsilon\omega'(t) \quad (11.9.2)$$

де  $x(t)$  — оптимальна крива, а  $\omega(t)$  — варіація від  $\bar{x}(t)$ , що залежить від  $t$ .

Підставивши (11.9.2) в (11.9.1) і розклавши  $\varphi(x, x', t)$  в ряд Тейлора в околі точки  $\varepsilon = 0$ , отримаємо

$$f[x(t) + \varepsilon\omega(t), x'(t) + \varepsilon\omega'(t), t] = f(x, x', t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon\omega(t) + \frac{\partial f}{\partial x'} \varepsilon\omega'(t) + 0(\omega, \omega') \quad (11.9.3)$$

де через  $0(\omega, \omega')$  позначаються члени високих порядків по  $\omega(t)$  і  $\omega'(t)$ .

Відмітимо, що

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_0}^{t_f} \{f[x(t) + \varepsilon\omega(t), x'(t) + \varepsilon\omega'(t), t] - f[x, x', t]\} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon\omega(t) + \frac{\partial f}{\partial x'} \varepsilon\omega'(t) + 0(\omega, \omega') \right\} dt \end{aligned} \quad (11.9.4)$$

Визначимо тепер першу варіацію  $x(t)$  і  $x'(t)$

$$\varepsilon\omega(t) = \delta x, \quad \varepsilon\omega'(t) = \delta x' \quad (11.9.5)$$

Таким чином

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial x'} \delta x' + 0(\omega, \omega') \right] dt \quad (11.9.6)$$

Перша варіація  $y$  має вигляд

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial x'} \delta x' \right] dt \quad (11.9.7)$$

Необхідна умова існування екстремума при  $\bar{x}(t) = x(t)$ , тобто при  $\varepsilon = 0$ , заключається в тому, що перша варіація  $\delta I$  повинна дорівнювати нулю.

Використовуючи цю умову у виразі (11.9.7), а також ввівши деякі спрощення при інтегруванні за частинами, отримаємо



$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right] \delta x dt + \left. \frac{\partial f}{\partial x'} \delta x \right|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (11.9.8)$$

Для того, щоб (11.9.8) дорівнювало нулю незалежно від варіації, необхідно, щоб

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0 \quad (11.9.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} \delta x = 0 \quad \text{для } t = t_0, t_f \quad (11.9.10)$$

Аналогічно можна показати, що друга варіація (11.9.1), яка позначена  $\delta^2 I$ , має вигляд

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (\delta x)^2 \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x'} \right) \right] + (\delta x')^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x')^2} \right\} dt \quad (11.9.11)$$

тобто друга варіація представляє собою квадратичний член в розкладі  $\Delta I$  (11.9.6).

Контрольні запитання до розділу 1.

1. Класичні задачі варіаційного числення.
2. Рівняння, які лежать у основі рішення варіаційних задач.
3. Які рівняння вирішують двоточкову крайову задачу?
4. Умови трансверсальності. Вірогідні комбінації граничних умов.
5. Достатні умови існування оптимума.
6. Необхідні умови оптимальності для задач з змінним часом досягнення.
7. Векторна форма необхідних умов оптимальності.
8. Лагранжіан для задач з обмеженнями у формі рівностей. Спряжені змінні.
9. Лінійноквадратична оптимізація.
10. У чому різниця оптимального керування від оптимального регулювання?
11. Матричне нелінійне рівняння Ріккати.
12. У чому суть варіаційного метода? Диференціал Гато.

## Опуклі та вгнуті функції

Для випадку множинних оптимумів в теорії оптимізації виділяється важливий клас унімодальних функцій, а саме клас опуклих та вгнутих функцій, які досліджують перевірку, чи є функція унімодальною. Вимога унімодальності функції є значно більш слабкою, ніж вимога вгнутості чи опуклості, оскільки унімодальність не потребує ні неперервності, ні єдиної похідної.

**Опукла функція.** Функція  $N$  змінних  $f(X)$ , визначена на опуклій більшості  $D$ , зветься опуклою функцією тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок  $X^{(1)}$  і  $X^{(2)} \in D$  і  $0 < \lambda < 1$  виконується нерівність

$$f(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda)X^{(2)}) \leq \lambda f(X^{(1)}) + (1 - \lambda)f(X^{(2)})$$

**Вгнута функція.** Функція  $f(X)$  - вгнута на множині  $D$  тоді і тільки тоді, коли  $-f(X)$  є опуклою функцією на цій множині.

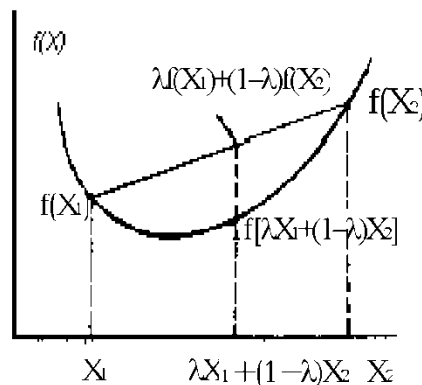
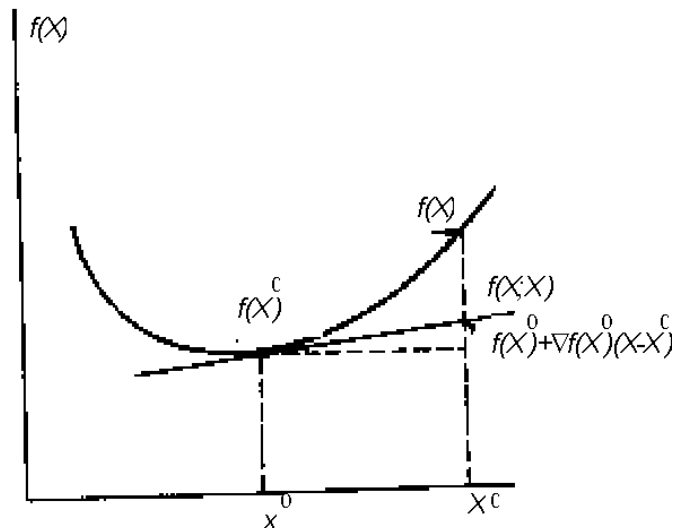


Рис. А.1 Опукла функція

Рисунок А.1 ілюструє визначення опуклої функції для випадку однієї змінної.

### Властивості опуклих функцій

- 1) Хорда, яка поєднує дві будь-які криві графіку опуклої функції, завжди проходить над (та вище) кривою в інтервалі між двома цими точками.
- 2) Тангенс кута нахилу дотичної або перша похідна  $f'(X)$ , зростає чи хоча б не убаває при збільшенні  $X$ .
- 3) Друга похідна  $f''(X)$  - завжди невідомих на розглядаємому інтервалі.
- 4) Лінійна апроксимація  $f(X)$  в будь-якій точці інтервалу дозволяє завжди отримувати нижню оцінку дійсного значення функції (рис.А.1).
- 5) Для опуклої функції локальний мінімум завжди є глобальним.



## Рис. А.2 Лінійна апроксимація опуклої функції

Лінійна апроксимація функції  $f(X)$  в точці  $X_0$  будується шляхом виключенням членів другого і більш високого порядку їх розкладанням функції у ряд Тейлора:

$$f(X, X_0) = f(X_0) + \nabla f(X_0)(X - X_0)$$

З властивості 4 випуклої функції випливає, що  $f(X) \geq f(X_0) + \nabla f(X_0)(X - X_0)$  для всіх  $X$ .

Градiєнти функції  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  визначається як вектор

$$\nabla f(X_1, \dots, X_N) = \left[ \frac{\partial f}{\partial X_1} \quad \frac{\partial f}{\partial X_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial X_N} \right]^T.$$

матриця Гессе для функції  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  є симетрична матриця порядку  $n \times n$ :

$$H(X) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \right] = \nabla^2 f.$$

### Перевірка функції на опуклість

Функція  $f(X)$  - опукла, якщо її матриця Гессе додатньо визначена або додатньо напіввизначена для всіх значень  $X$

### Оптимізація процесу приготування моторних мастил

Якість моторних мастил визначається великим об'ємом властивостей і вимог до них. З математичної точки зору моторні мастила являють собою систему, що характеризується сукупністю вихідних показників критеріальних властивостей, оптимізація яких доцільна за допомогою узагальненого критерію якості.

Задачу оптимізації процесів, що характеризуються декількома відгуками, зазвичай зводять до задачі оптимізації за одним критерієм з обмеженнями у вигляді рівностей або нерівностей.

Для розв'язання задачі оптимізації процесів з великою кількістю відгуків зручно використовувати запропоновану Харрінгтоном в якості узагальненого критерію оптимізації так звану узагальнену функцію бажаності  $D[I]$ .

Для побудови узагальненої функції бажаності  $D$  пропонували перетворити виміряні значення відгуків в безрозмірну шкалу бажаності  $d$ .

Для побудови шкали бажаності використовували метод якісних оцінок з інтервалом значень бажаності від нуля до одиниці. Значення  $d = 0$  /або  $D = 0$ / відповідає абсолютно неприйнятному значенню даного відгуку; а  $d = 1$  ( $D = 1$ ) - найкращому значенню відгуку, причому подальше його покращення, або неможливе, або не викликає інтересу.

Шкала  $D$  являє собою безрозмірну шкалу, за допомогою якої будь-який відгук може бути перетворений так, щоб його можна було інтерпретувати в термінах корисності або бажаності для будь-якого специфічного застосування.

Для односторонніх обмежень виду  $y \leq y_{\max}$  або  $y \geq y_{\min}$  зручною формою перетворення  $y$  в  $d$  служить експоненціальна залежність:  $d = \exp(-\exp(-y^l))$ .

У виразі  $y^l = b_0 + b_1 y$  коефіцієнти  $b_0$  і  $b_1$  можна визначити, якщо задати для двох значень властивості  $y$  відповідні значення бажаності  $d$  переважно в інтервалі  $0.2 < d < 0.8$ .

Нелінійне перетворення  $y$  в  $y^l$  застосовується, якщо дана властивість має велику вагу.

Якщо який-небудь один відгук  $d$  є абсолютно незадовільним, узагальнена функція бажаності  $D$  повинна дорівнювати 0 незалежно від рівня інших відгуків.

В якості відгуків серед гостівських показників якості моторних мастил обрані:

- в'язкість мастила при температурі  $100^\circ \text{C}$ ,  $50^\circ \text{C}$ ,  $\frac{\text{мм}^2}{\text{с}}$
- температура спалаху у відкритому вогні,  $^\circ \text{C}$
- зольність, %.

Для порівняння оцінки якості різних композицій узагальнену функцію бажано визначати по формулі:

$$D = \sqrt[3]{d_1 d_2 d_3} \quad (\text{Б.1.1})$$

де  $d_1 d_2 d_3$  - часткові функції бажаності.

Для побудови часткових функцій бажаності, тобто властивостей суміші, залежних від співвідношення компонентів, використовувались симплекс-гратчасті плани Шеффе [2]. Експериментальні точки представляють  $\{q, n\}$  грати на симплексі, де  $q$  - число компонентів суміші;  $n$  - ступінь полінома. При  $q=3$  правильний симплекс - рівносторонній трикутник. Кожна точка трикутника відповідає одному визначеному складу потрібної системи і навпаки, кожний склад представляється одною визначеною

точкою. Склад може бути виражений у мольних, вагових або об'ємних долях або відсотках. Вершини трикутника відповідають чистим речовинам, сторони – подвійним системам.

При вивченні діаграми склад – властивість 3-х компонентних сумішей цікавило дослідити залежність властивостей від складу не у всій області зміни концентрації компонентів  $0 \leq X_i \leq 1$ , а у локальній ділянці діаграми.

Щоб мати можливість застосовувати плани, що використовуються для вивчення повних діаграм, провели перенормування і прийняли склади у вершинах  $A_j, j = 1, 2, 3$  за самостійні псевдокомпоненти так, щоб для усієї області локального симплекса виконувалась вимога

$$\sum_{i=1}^3 Z_i = 1$$

Планування експериментів здійснювалось в системі координат псевдокомпонентів. Для переходу від псевдокомпонента  $Z_i$  до вихідних компонентів  $X_i$  використовували формулу

$$X_i^{(u)} = X_i^{(1)} + Z_2^{(u)}(X_i^{(2)} - X_i^{(1)}) + Z_3^{(u)}(X_i^{(3)} - X_i^{(1)}) \quad (\text{Б.1.2})$$

Для отримання рівнянь регресії був складений симплекс-гратчатий план відносно псевдокомпонента у експериментальних точках. Рівняння регресії другого і неповного третього порядків виявились неадекватними. Оскільки плани Шеффе більш високого порядку не є D – оптимальними, була реалізована D – оптимальні симплексні грати Кіфера для полінома третього порядку (табл.Б.1).

**Таблиця Б.1**

Номер досліджу	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	Y
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	100	0	0	$Y_1$
2	0	1	0	90	10	0	$Y_2$
3	0	0	1	90	0	10	$Y_3$
4	0.723 6	0.276 4	0	97.23 6	2.764	0	$Y_{112}$
5	0.276 4	0.723 6	0	92.76 4	7.236	0	$Y_{122}$
6	0.723 6	0	0.276 4	97.23 6	0	2.764	$Y_{113}$
7	0.276 4	0	0.723 6	92.76 4	0	7.236	$Y_{133}$
8	0	0.723 6	0.276 4	90	7.23	2.764	$Y_{223}$
9	0	0.276 4	0.723 6	90	2.764	7.23	$Y_{233}$
10	0.333	0.333	0.333	93.34	3.33	3.33	$Y_{123}$
11	0.22	0.22	0.56	92.18	2.22	5.6	$Y_{11}$
12	0.22	0.56	0.22	92.18	5.6	2.22	$Y_{12}$
13	0.56	0.22	0.22	95.56	2.22	2.22	$Y_{13}$

Розраховані коефіцієнти рівнянь регресії третього порядку температури спалаху і зольності:

$$y_2 = 170 z_1 + 168 z_2 + 165 z_3 - 185.6 z_2 z_3 + 6.17 z_1 z_2 (z_1 - z_2) + 15.6 z_1 z_3 (z_1 - z_3) + 937.4 z_2 z_3 (z_2 - z_3) + 552.4 z_1 z_2 z_3 \quad (\text{Б.1.3})$$

$$y_3 = 0.08 z_1 + 0.09 z_2 + 0.08 z_3 - 0.09 z_2 z_3 - 0.03 z_1 z_2 (z_1 - z_2) + 0.48 z_2 z_3 (z_2 - z_3) + 0.29 z_1 z_2 z_3 \quad (\text{Б.1.4})$$

Точки 11, 12, 13 служать для перевірки адекватності отриманих рівнянь регресії.

Для всіх контрольних точок значення критерію Стюдента виявились менші за табличні, отже рівняння регресії для температури спалаху і зольності адекватні експерименту.

Залежність в'язкості мастил вивчалась від складу і температури.

Розраховані коефіцієнти рівнянь регресії третього порядку в'язкості при 100°C.

$$\hat{y}_1 = 7.98 z_1 + 7.93 z_2 + 7.858 z_3 - 0.061 z_1 z_3 - 8.86 z_2 z_3 + 0.15 z_1 z_2 (z_1 - z_3) + 0.38 z_1 z_3 (z_1 - z_3) + 44.42 z_2 z_3 (z_2 - z_3) + 26.29 z_1 z_2 z_3 \quad (\text{Б.1.5})$$

і при 50°C

$$\hat{y}_1 = 38.36 z_1 + 38.06 z_2 + 37.32 z_3 + 1.18 z_1 z_2 - 40.81 z_2 z_3 - 4.98 z_1 z_2 (z_1 - z_2) + 3.2 z_1 z_3 (z_1 - z_3) + 218.11 z_2 z_3 (z_2 - z_3) + 117.88 z_1 z_2 z_3 \quad (\text{Б.1.6})$$

Для зручності розрахунку коефіцієнта  $\beta$  від температури скористались лінійним перетворенням

$$T_1 = (T - 50) / 50$$

Лінійна залежність  $\beta_i$  від безрозмірного параметру  $T_1$

$$\beta_j = \beta_{1j} + \beta_{2j} T_1.$$

Тоді

$$\beta_{1j} = \frac{\beta_j^{(50)} + \beta_j^{(100)}}{2}$$

$$\beta_{2j} = \frac{\beta_j^{(100)} - \beta_j^{(50)}}{2}$$

$$\beta_j = \beta_j^{(50)} + \frac{\beta_j^{(100)} - \beta_j^{(50)}}{2 \cdot 50} T$$

Кінцеве рівняння регресії в'язкості розчину від температури і складу має вигляд:

$$y_1 = (-19.95 + 0.16T) z_1 + (-19.8 + 0.16T) z_2 + (-19.6 + 0.16T) z_3 + (22.1 - 0.18T) z_2 z_3 - 0.38 z_1 z_2 (z_1 - z_2) - 0.9 z_1 z_3 (z_1 - z_3) + (-111.1 + 0.89T) \cdot z_2 z_3 (z_2 - z_3) + (-65.7 + 0.53T) z_1 z_2 z_3 \quad (\text{Б.1.7})$$

Рівняння зв'язку псевдокоординат  $Z_j$  з натуральними змінними мають вигляд:

$$\begin{cases} 1z_1^{(1)} + 0z_1^{(2)} + 0z_1^{(3)} = 1 \\ 0.9z_1^{(1)} + 0.1z_1^{(2)} + 0z_1^{(3)} = 0 \\ 0.9z_1^{(1)} + 0z_1^{(2)} + 0.1z_1^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (\text{Б.1.8})$$

$$\begin{cases} 1z_2^{(1)} + 0z_2^{(2)} + 0z_2^{(3)} = 0 \\ 0.9z_2^{(1)} + 0.1z_2^{(2)} + 0z_2^{(3)} = 1 \\ 0.9z_2^{(1)} + 0z_2^{(2)} + 0.1z_2^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (\text{Б.1.9})$$

Розв'язавши системи (Б.1.8) і (Б.1.9) отримали

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &= 1 & z_2^{(1)} &= 0 & z_1 &= 1 - 10x_2 - 10x_3 \\ z_1^{(2)} &= -9 & z_2^{(2)} &= 10 & z_2 &= 10x_2 \\ z_1^{(3)} &= -9 & z_2^{(3)} &= 0 & z_3 &= 10x_3 \end{aligned}$$

Для побудови часткових функцій бажаності спочатку встановимо перетворення вимірних властивостей у в безмірну рівномірну шкалу  $y^i$ :

Обмеження носять характер

$$\begin{aligned} v &\leq v_{\max} & y_1 &\leq y_{1\max}, \\ t_{ecn} &> t_{ecn\min} & y_2 &> y_{2\min}, \\ z &\leq z_{\max} & y_3 &\leq y_{3\max} \end{aligned}$$

Коефіцієнти  $b_0$  і  $b_1$  визначити по даним таблиці Б.2.

**Таблиця Б.2**

	$Y_1, \text{мм}^2/\text{с}$		$Y_2, ^\circ\text{C}$		$Y_3, \%$	
Значення властивостей	7,5	9	180	165	0,075	1,65
Числові позначки по шкалі бажаності	0,63	0,2	0,63	0,2	0,63	0,2

Часткові функції бажаності мають вигляд

$$d_1 = \exp(-\exp(6.28 - .0734 y_1^i)) \quad (\text{Б.1.10})$$

$$d_2 = \exp(-\exp(-12.4 + 0.7 y_2^i)) \quad (\text{Б.1.11})$$

$$d_3 = \exp(-\exp(0.8 - 0.7 y_3^i)) \quad (\text{Б.1.12})$$

Значення часткових функцій бажаності для всіх точок плану, визначаються по цим формулам, наведеним в таблиці Б.3.

**Таблиця Б.3**

Номер композиції	$d_1$	$d_2$	$d_3$	D
1	2	3	4	5
1	0.519	0.383	0.63	0.5
2	0.532	0.33	0.628	0.48
3	0.55	0.25	0.63	0.44
4	0.53	0.344	0.628	0.49
5	0.523	0.368	0.629	0.495
6	0.541	0.286	0.63	0.46
7	0.529	0.346	0.63	0.486
8	0.356	0	0.636	0
9	0.536	0.307	0.628	0.45
10	0.536	0.315	0.629	0.473

Узагальнена функція бажаності визначена і має вигляд

$$D = \exp\left\{-\frac{1}{3}(\exp(6.28 - 0.734 y_1) + \exp(-12.4 + 0.7 y_2) + \exp(0.8 - 0.7 y_3))\right\} \quad (\text{Б.1.13})$$

Найбільше значення узагальненої функції бажаності отримано у п'ятому досліді  $D=0,495$ .

Хороші результати отримані в дослідях 4, 7.

Оптимальний склад композиції по узагальненій функції бажаності може бути вибраний з рівняння регресії узагальненої функції бажаності від факторів, що визначаються з використанням нелінійних методів програмування.

## Додаток Б.2.

### Оптимізація плівкового апарату роторного типу в технологічному режимі нагрівання

Досліджувалася можливість оптимізації роботи плівкових апаратів роторного типу (ПАРТ) у режимі нагрівання за мінімумом питомої собівартості процесу переробки при зануренні лопатів ротора в рідину.

При оптимізації функція мети для ПАРТ може бути представлена як собівартість процесу нагрівання:

$$C = a_1 Q_{\Pi} + a_2 N_2 + C_{\Pi P} + C_0' \quad (\text{Б.2.1})$$

де  $a_1$  - вартість 1 Дж тепла, підведеного з паром, грн;  $Q_{\Pi}$  - кількість тепла, що сприймається розчином від пари, що гріє, Дж/год,  $a_2$  - вартість 1 квт-год електроенергії, що витрачається на перемішування рідини, грн;  $N_2$  - потужність електродвигуна, витрачена на перемішування розчину, квт;  $C_{\Pi P}$  - виробничі витрати (амортизаційні відрахування, вартість ремонту й інш.), грн/год;  $C_0'$  - постійна складова собівартості, грн/год.

При експлуатації теплових апаратів (до яких відносяться і ПАРТ) виробничі витрати найчастіше умовно вважають постійною величиною. Цю величину можна представити у вигляді добутку:

$$C_{\Pi P} = a_0 Q_0 \quad (\text{Б.2.2})$$

Тут  $a_0$  - коефіцієнт, що враховує питому вартість виробничих витрат, віднесених до 1 Дж тепла, що сприймається розчином, Дж/год,

$$Q_0 = Q_{0\Pi} + Q_{0Д} \quad (\text{Б.2.3})$$

де  $Q_{0\Pi}, Q_{0Д}$  - фіксована кількість тепла, що сприймається рідиною від гріючої пари і в результаті дисипації, Дж/год.

З урахуванням виразів (Б.2.2) і (Б.2.3) рівняння (Б.2.1) приймає вигляд:

$$C = a_1 Q_{\Pi} + a_2 N_2 + a_0 (Q_{0\Pi} + Q_{0Д}) + C_0' \quad (\text{Б.2.4})$$

За інших рівних умов тепло  $Q_{\Pi}$  і  $Q_{0\Pi}$  залежить від інтенсивності тепловіддачі:

$$\frac{Q_{\Pi}}{Q_{0\Pi}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_{2_0}}, \text{ звідки } Q_{0\Pi} = Q_{\Pi} \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2}, \quad (\text{Б.2.5})$$

тут  $\alpha_2, \alpha_{2_0}$  - коефіцієнти тепловіддачі від стінки корпусу до розчину, що нагрівається, при поточному і фіксованому кількостях підведеного тепла, Вт/(м<sup>2</sup>·°С).

Тепло  $Q_{Д}$  і  $Q_{0Д}$ , як відомо, прямо пропорційно потужності електродвигуна:



$$\frac{Q_D}{Q_{OD}} = \frac{N_2}{N_{2_0}} \text{ чи } Q_{OD} = Q_D \frac{N_{2_0}}{N_2} \quad (\text{Б.2.6})$$

де  $Q_D$  -тепло дисипації, що сприймається розчином при перемішуванні розчину, Дж/год;  $N_{2_0}$  -потужність електродвигуна витрачена на перемішування при фіксованій частоті обертів ротора, кВт.

Після підстановки виразів (Б.2.5) і (Б.2.6) у рівняння (Б.2.4) останнє приймає вигляд:

$$C = a_1 Q_{II} + a_2 N + a_0 \left( Q_{II} \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + Q_D \frac{N_{2_0}}{N_2} \right) + C_0' \quad (\text{Б.2.7})$$

#### Випадок 1

Загальна кількість тепла, що сприймається розчином:

$$Q = Q_{II} + Q_D, \text{ звідки } Q_D = Q - Q_{II} \quad (\text{Б.2.8})$$

Підставляючи співвідношення (Б.2.8) у формулу (Б.2.7), одержимо:

$$C = a_1 Q_{II} + a_2 N + a_0 \left[ Q_{II} \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + (Q - Q_{II}) \frac{N_{2_0}}{N_2} \right] + C_0' \quad (\text{Б.2.9})$$

При частоті обертів  $n < 11,6$  об/с тепло дисипації, сприймаєме розчином, незначне, і ним практично можна знехтувати, вважаючи:

$$Q_{II} \approx Q$$

(Б.2.10)

З урахуванням умови (Б.2.10) залежність (Б.2.9) перетвориться до вигляду :

$$C = a_1 Q + a_2 N + a_0 Q \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + C_0' \quad (\text{Б.2.11})$$

(Б.2.11)

Функцію мети для ПАРТ одержимо, розділивши рівняння (Б.2.11) на  $Q$  й віднісши  $a_1$  в  $C_0$  :

$$R = a_2 \frac{N}{Q} + a_0 \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + C_0 \quad (\text{Б.2.12})$$

(Б.2.12)

Тут  $R = C / Q$ ,  $C_0 = C_0' / Q$  - питома собівартість процесу нагрівання в ПАРТ і її постійна складова, грн/Дж.

Вхідні в рівняння (Б.2.12) коефіцієнти  $\alpha_{2_0}$  і  $\alpha_2$  можна знайти по формулі [ ]:

$$\text{Nu} = 0,01105 \text{ Re}_{II}^{0,21} \text{ Re}_{II}^{0,62} \text{ Pr}^{0,78} z^{0,12} \left( \frac{\Delta}{2} \right)^{-0,23} \quad (\text{Б.2.13})$$

$$\text{Re}_{II} = \frac{4\Gamma_v}{\nu} \quad \text{Re}_{II} = \frac{\rho n d_p^2}{\mu} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

де  $z$  - число лопатів ротора;  $\Delta$  - величина проміжку, мм, при  $\text{Re}_{II} = 19,7 \cdot 10^{-5} \dots 27,5$ ,  
 $\text{Re}_{II} = 68,7 \cdot 10^{-3} \dots 36500$  і  $\text{Pr} \leq 33600$ .

Відносне значення тепловіддачі було отримано з виразу (Б.2.13.):

$$\frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} = \left( \frac{d_p}{d_{p_0}} \right) \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,21} \left( \frac{n_0}{n} \right)^{0,62} \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{1,24} \left( \frac{z_0}{z} \right)^{0,12} \left( \frac{\Delta_0}{\Delta} \right)^{-0,23} \quad (\text{Б.2.14})$$

Тут  $d_p$  -діаметр ротора;  $\Gamma$  -щільність зрошення, м<sup>2</sup>/с; індексом “О” позначені фіксовані значення параметрів.

При  $z = z_0 = const$  і  $\Delta = \Delta_0 = const$  рівняння (Б.2.14) спрощується:

$$\frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,21} \left( \frac{n_0}{n} \right)^{0,62} \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{0,24} \quad (\text{Б.2.15})$$

Використовуючи дані роботи [3] і припускаючи, що  $\Gamma = a\Gamma_{\min}$  ( $a$  - сталый коефіцієнт) при  $n < 11,6$  об/с залежність від частоти обертів ротора можна записати у вигляді :

$$\Gamma = 9,1 \cdot 10^{-6} n^{1,2} \quad (\text{Б.2.16})$$

$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma} = \left( \frac{n_0}{n} \right)^{1,2} \quad (17), \quad \text{чи} \quad \frac{n_0}{n} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,833} \quad (\text{Б.2.18})$$

При оптимізації по частоті обертів ротора (тобто по основному керуючому впливу) при  $d_p = d_{p_0} = const$  вираз (Б.2.15) з урахуванням формули (Б.2.17):

$$\frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} = \left[ \left( \frac{n_0}{n} \right)^{1,2} \right]^{0,21} \left( \frac{n_0}{n} \right)^{0,62} \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{0,24} = \left( \frac{n_0}{n} \right)^{0,872} \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{0,24} \quad (\text{Б.2.19})$$

Можлива також оптимізація по щільності зрошення. У цьому випадку при  $d_p = d_{p_0} = const$  рівняння (Б.2.15) з урахуванням співвідношення (Б.2.18) можна записати так:

$$\frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,21} \left[ \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,833} \right]^{0,62} \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,73} \quad (\text{Б.2.20})$$

При проектуванні ПАРТ виникає також необхідність оптимізації по основному конструктивному параметру-діаметру ротора. Тоді, при обраних  $n = n_0 = const$ ,  $\Gamma = \Gamma_0 = const$  залежність (Б.2.15) перетвориться до вигляду :

$$\frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} = \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{0,24} \quad (\text{Б.2.21})$$

Для розрахунку потужності електродвигуна, що витрачається на переміщення в ПАРТ працюючому в режимі нагрівання [2], при  $Re_{\Pi} = (1...6) 10^5$ ,  $Re_{\Pi} = (5...30) 10^3$ ,  $Fr_{\Pi} = 2,9...8,9$  і  $z/3 = 1...2,66$  можна скористатися критеріальним рівнянням:

$$K_N = C Re_n^{0,58} Re_{\Pi}^{-1} Fr^{0,73} \left( \frac{z}{3} \right)^{0,58} \quad (\text{Б.2.22})$$

чи

$$N_2 = C_1 \frac{\rho v^{0,42}}{g^{0,73}} \Gamma^{0,58} n^{3,46} d_p^{3,73} \left( \frac{z}{3} \right)^{0,58} \quad (\text{Б.2.23})$$

$$Fr_{\Pi} \frac{n^2 d_p}{g}$$

де  $C$  і  $C_1$  - постійні, залежні від сили зчеплення рідини зі стінкою корпусу апарата, для води  $C = 110$ , а  $C_1 = 0,246$ ;  $g$  - прискорення вільного падіння  $m^2 / c$ .

Функція мети для ПАРТ при його оптимізації по частоті обертів ротора має вигляд:

$$R = a_2 \frac{N_2}{Q} + a_0 \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + C_0 = \frac{5,72 \cdot 10^{-3}}{i'_1 - i'_0} \frac{\nu^{0,42}}{g^{0,73}} d_P^{2,73} n^{2,955} + a_0 \left( \frac{n_0}{n} \right)^{0,882} \left( \frac{d_{P_0}}{d_P} \right)^{0,24} + C_0$$

(Б.2.24)

Криві залежності  $R = f(n)$  мають виражений екстремальний характер.

При оптимізації ПАРТ по щільності зрошення, рівняння (Б.2.12) з урахуванням формул (Б.2.16), (Б.2.20) і (Б.2.23) може бути записане так:

$$R = a_2 \frac{N_2}{Q} + a_0 \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + C_0 = \frac{1,38 \cdot 10^{-10}}{i'_1 - i'_0} \frac{\nu^{0,42}}{g^{0,73}} d_P^{2,73} \Gamma^{2,46} + a_0 \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,73} + C_0$$

(Б.2.25)

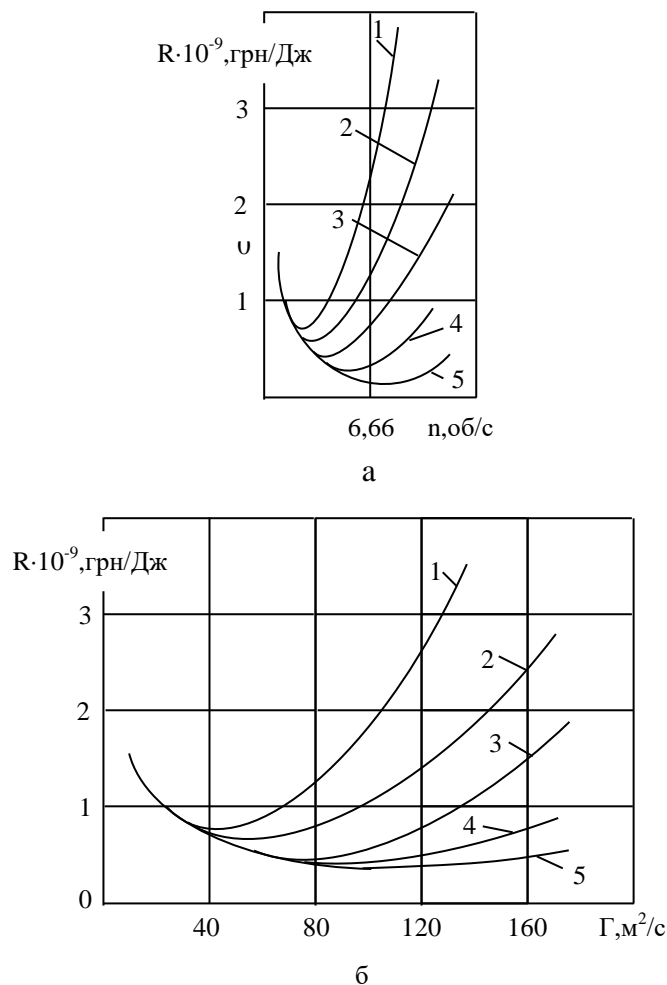
На графіках залежностей  $R = f(n)$  і  $R = f(\Gamma)$  чітко видно точки мінімуму питомої собівартості процесу, що зі збільшенням діаметру ротора зміщаються вліво, убик зменшення числа обертів чи щільності зрошення.

Оптимізацію ПАРТ по діаметру ротора можна проводити при фіксованій частоті його обертів. Тоді залежність (Б.2.12) з урахуванням виразів (Б.2.16), (Б.2.21) і (Б.2.23) приймає вигляд :

$$R = \frac{5,73 \cdot 10^{-3}}{i'_1 - i'_0} \frac{\nu^{0,42}}{g^{0,73}} n^{2,955} d_P^{2,73} + a_0 \left( \frac{d_{P_0}}{d_P} \right)^{0,24} + C_0$$

(Б.2.26)

У рівнянні (Б.2.26) також має місце протилежна спрямованість складових питомої собівартості, однак їхня нелінійність у ньому виражена слабо.



**Рис.Б.1. Графік залежностей  $R = f(n)$  і  $R = f(\Gamma)$  при різних значеннях діаметра ротора, м: 1 – 1,0; 2 – 0,75; 3 – 0,5; 4 – 0,25; 5 – 0,1.**

### Випадок 2

Кількість тепла, що сприймається розчином від гріючої пари:

$$Q_{\Pi} = Q - Q_g, \quad (\text{Б.2.27})$$

Підставивши (Б.2.27) у рівняння (Б.2.7) у вигляді різниці:

$$C = a_1(Q - Q_g) + a_2 N_2 + a_0 \left[ (Q - Q_g) \frac{\alpha_{2_0}}{\alpha_2} + Q_g \frac{N_{2_0}}{N_2} \right] + C_0' \quad (\text{Б.2.28})$$

Зі збільшенням числа обертів ротора кількість тепла, що сприймається рідиною за рахунок дисипації, швидко росте, при одночасному відносно повільному приросту тепла за рахунок тепловіддачі з боку пари, що гріє. При великих числах обертів, коли  $n \geq 11,6 \frac{\text{об}}{\text{с}}$ , це відставання стає настільки значним, що з достатньої для практичних розрахунків точністю можна приймати:

$$Q \approx Q_d, \quad (\text{Б.2.29})$$

Тоді з урахуванням (Б.2.10) рівняння (Б.2.28) приймає вигляд:

$$C = a_2 N_2 + a_0 Q \frac{N_{2_0}}{N_2} + C_0', \quad (\text{Б.2.30})$$

Розділивши праву і ліву частини рівняння (Б.2.30) на  $Q$  одержимо функцію мети, сформульовану як питома собівартість процесу переробки в ПАРТ при  $n \geq 11,6 \frac{\text{об}}{\text{с}}$ .

$$R = a_2 \frac{N_2}{Q} + a_0 \frac{N_{2_0}}{N_2} + C_0', \quad (\text{Б.2.31})$$

Для розрахунку потужності електродвигуна, що працює в режимі нагрівання можна скористатися критеріальним рівнянням (Б.2.22).

Використавши рівняння (Б.2.23), можна одержати відносну величину потужності електродвигуна, затрачувану на перемішування рідини. Для цього позначимо індексом “0” фіксовані значення технологічних і конструктивних параметрів, а без індексу поточні їхні значення. Тоді

$$\frac{N_{2_0}}{N_2} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,58} \cdot \left( \frac{n_0}{n} \right)^{3,46} \cdot \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{3,73} \cdot \left( \frac{z_0}{z} \right)^{0,58} \quad (\text{Б.2.32})$$

при сталому числі лопат  $z = z_0 = \text{const}$  рівняння (Б.2.32.) спрощується.

Як відомо між щільністю зрошення і числом обертів ротора існують визначені взаємозалежності. Для заданої рідини такі взаємозалежності в першому наближенні можуть бути отримані з дослідних даних [Тананайко, Зубриц] по визначенню:

$$\Gamma_{\min} = 0,09 \nu \text{We}^{1,18} \text{Fr}^{-0,23} (1 - \cos \theta)^{0,642} z^{-0,21} \left( \frac{\Delta}{2} \right)^{0,125}, \quad (\text{Б.2.33})$$

чи

$$\Gamma_{\min} = 0,09 \nu \left[ \frac{\sigma_{жГ}}{\rho g \left( \frac{3\nu^2}{4g} \right)^{2/3}} \right]^{1,18} \cdot \left( \frac{n^2 d_p}{g} \right)^{-0,23} \cdot (1 - \cos \theta)^{0,642} z^{-0,21} \left( \frac{\Delta}{2} \right)^{0,125}, \quad (Б.2.34)$$

де  $\sigma_{жГ}$  - поверхневий натяг, н/м,  $\theta$  - крайовий кут змочування.

Вважаючи, що щільність зрошення для умови занурення лопат у шар рідини дорівнює:

$$\Gamma = a \Gamma_{\min} \quad (Б.2.35)$$

де  $a$  - сталий коефіцієнт.

При фіксованих значеннях  $z$  і  $\Delta$  задовільна апроксимація досягається рівнянням:

$$\Gamma = \frac{311 \cdot 10^{-6}}{n^{0,46} d_p^{0,23}}, \quad (Б.2.36)$$

з рівняння (Б.2.36) можна одержати наступні взаємозалежності:

$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma} = \left( \frac{n}{n_0} \right)^{0,46} \quad (Б.2.37)$$

$$\left( \frac{n}{n_0} \right) = \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^{2,17} \quad (Б.2.38)$$

При оптимізації по  $n$  при  $d_p = d_{p_0} = const$  рівняння (Б.2.32) з урахуванням (Б.2.37) приймає вигляд:

$$\frac{N_{2_0}}{N_2} = \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^{0,46} \right]^{0,58} \left( \frac{n_0}{n} \right)^{3,46} \sim \left( \frac{n_0}{n} \right)^{3,19} \quad (Б.2.39)$$

Можлива також оптимізація по другому керуючому впливу по щільності зрошення  $\Gamma$ . У цьому випадку при  $d_p = d_{p_0} = const$  і  $n \geq 11,6 \frac{об}{с}$ , рівняння (Б.2.32) з урахуванням (Б.2.38.) приймає вигляд:

$$\frac{N_{2_0}}{N_2} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{0,58} \left[ \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{2,18} \right]^{3,46} \sim \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^{6,97} \quad (Б.2.40)$$

При проектуванні нових ПАРТ виникає так само необхідність оптимізації по основному конструктивному параметру-діаметру ротора. Для обраних  $n = n_0 = const$  і відповідності їм  $\Gamma = \Gamma_0 = const$  рівняння (Б.2.32) може бути представлене в наступному вигляді:

$$\frac{N_{2_0}}{N_2} = \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{3,73} \quad (Б.2.41)$$

Функція мети представлена рівнянням (Б.2.31.) з урахуванням вищевикладеного при оптимізації ПАРТ по  $n$  може бути перетворена до наступного вигляду:

$$R = a_2 \frac{N_2}{Q} + a_0 \frac{N_{2_0}}{N_2} + C_0 = \frac{1,3 \cdot 10^{-3}}{i_1' - i_0'} \cdot \frac{\nu^{0,42}}{g^{0,73}} d_p^{2,83} n^{3,65} + a_0 \left( \frac{n_0}{n} \right)^{3,19} + \left( \frac{d_{p_0}}{d_p} \right)^{3,73} + C_0$$

(Б.2.42)

Наявність конфліктної ситуації у функції мети, представленій рівнянням (Б.2.25.) у наявності того, що має місце виражена протилежна спрямованість складових питомої собівартості і їхня нелінійність. Для того, щоб остаточно переконатися в наявності екстремумів у розглянутому рівнянні і що вони потрібної природи, був проведений чисельний аналіз. Як видно з рис.Б.2 зі збільшенням  $d_p$  екстремальні точки зміщуються вліво, у бік менших чисел обертів. Інші графіки теж підтверджують наявність екстремумів.

Для отримання оптимальних значень керуючих параметрів  $n, \Gamma$  і основного конструктивного параметра  $d_p$  використали метод дослідження функцій класичного аналізу шляхом прирівнювання до нуля перших похідних цільової функції. Отримані екстремальні точки були перевірені на достовірність за допомогою матриці Гессе.

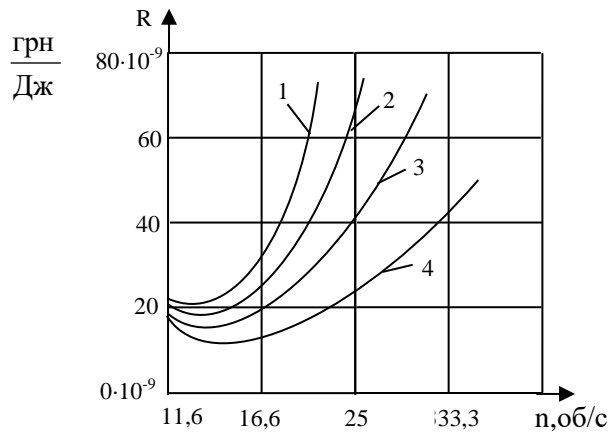


Рис.Б.2.  $R = f(n)$  при  $d_p, \text{ м}$ :  
1 – 1,0; 2 – 0,75; 3 – 0,5; 4 – 0,25

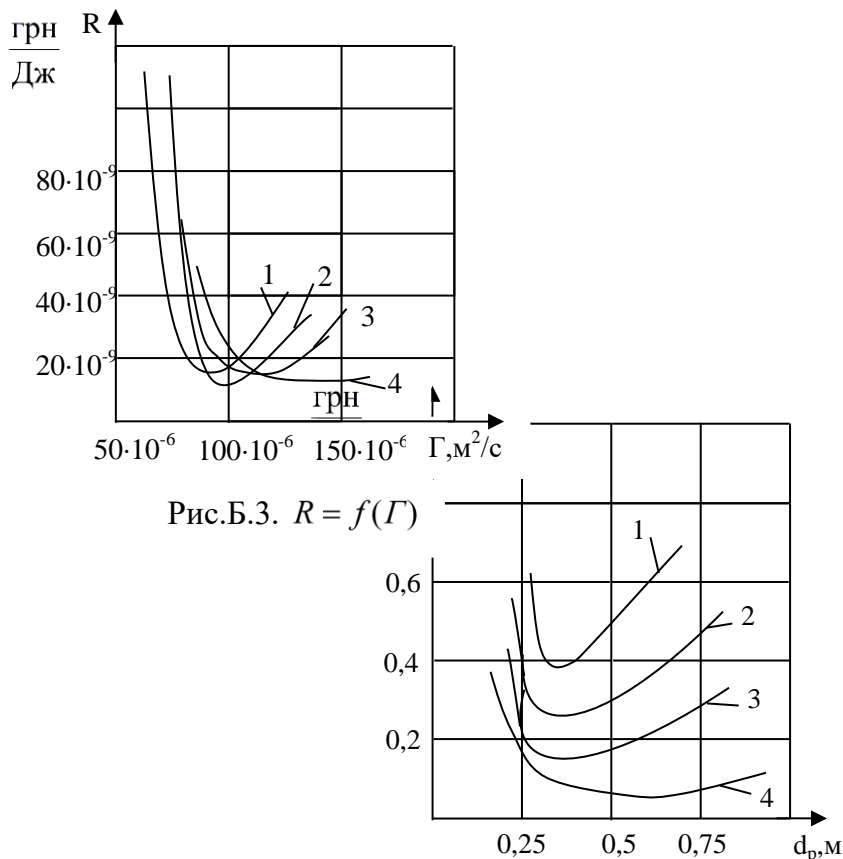


Рис.Б.3.  $R = f(\Gamma)$

Рис.Б.4.  $R = f(d_p)$  при  $n \text{ об/с}$   
1 – 50; 2 – 33,4; 3 – 25; 4 – 16,7

### Оптимізація плівкового апарата роторного типу в режимі випаровування

Найбільш часто критерієм, що зустрічається для керування випарними апаратами є собівартість процесу випарювання, що пояснюється великою питомою вагою енерговитрат вартості готового продукту. При чому якщо процес розглядається як лінійна система, в якості критерію можна вибрати квадратичний критерій якості

$$I(X, U) = \frac{1}{2} U^T R U + \frac{1}{2} X^T Q X, \quad (\text{Б.3.1})$$

де  $R, Q$  – додатньо визначені матриці вагових коефіцієнтів.

Друга складова функції якості може враховувати обмеження на якість вихідного продукту.

Але вибір критерію оптимальності диктується інтересами всієї технологічної лінії виробництва. Прикладом використання технологічного критерію є випадок, коли ПАРТ представляє “вузьке” місце в виробництві. Задача збільшення продуктивності апарату вирішується шляхом забезпечення умов, при яких в плівкових апаратах роторного типа можлива передача більшої кількості тепла через поверхню нагрівання від гріючої пари до плівки рідини.

Тому в якості критерію керування ПАРТ, коли це в інтересах оптимального керування процесами всієї технологічної лінії виробництва, доцільно вибрати технологічний критерій – продуктивність при заданій концентрації абсолютно сухих речовин у розчині вихідного продукту

$$I = S_K \rightarrow \max \quad (\text{Б.3.2})$$

при  $b_K = b_{K30}$

де  $S'_K$  - витрати рідини на вихід з апарату, кг/с

$b_K$  - концентрація кінцевого продукту, кг/кг.

Керуючими збуреннями вибрано число обертів ротора і витрати охолоджуючої води на конденсатор. Вибір числа обертів ротора пояснюється намаганням ефективно використовувати плівкові апарати роторного типа за рахунок забезпечення найкращих умов теплообміну в ПАРТ, що досягається при зануренні лопатів ротора у шар рідини. Збільшення числа обертів ротора викликає значну турбулізацію плівки рідини. Границі зміни швидкості обертання ротора вибрані 5,83-25 об/с. На витрати охолоджуючої води також накладені обмеження, що пов'язані з забезпеченням нормального функціонування ПАРТ в режимі випаровування з пропускною здатністю обладнання.

З урахуванням обмежень, що накладаються на керуючі збурення і пов'язаних з ефективним використанням і можливостями технологічного обладнання, задача оптимізації технологічного режиму роботи ПАРТ може бути представлена наступним чином:

$$I = S_K \rightarrow \max$$

$$b_K = b_{K30}, \quad (\text{Б.3.3})$$

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}, \quad G_{b\min} \leq G_b \leq G_{b\max}.$$

Визначення оптимальних технологічних режимів роботи ПАРТ основане на рівняннях математичної моделі статички процесу випаровування [ ].

Рівняння теплового балансу парової рубашки має вигляд

$$G_{II}(i''_{II} - i'_K) - \alpha_{II} F_{CT.H} (\Theta_{II} - \Theta_{CT.K}) = 0 \quad (\text{Б.3.4})$$

де  $G_{\Pi}, i''_{\Pi}, \Theta_{\Pi}$  - відповідно витрати гріючої пари, її ентальпія і температура,

$\alpha_{\Pi}$  - коефіцієнт тепловіддачі від гріючої пари до стінки корпусу апарату,

$F_{CT.H}, \Theta_{CT.K}$  - відповідно площа зовнішньої поверхні і температура стінки корпусу.

Оскільки товщина стінки корпусу порівняна з товщиною плівки рідини, температура стінки і її теплоємність вважалися однаковими для будь-якої точки об'єму стінки і рівняння теплового балансу стінки представлена як

$$\alpha_{\Pi} F_{CT.H} (\Theta_{\Pi} - \Theta_{CT.K}) - \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{\Pi\Lambda}) = 0 \quad (Б.3.5)$$

де  $\alpha_{\Pi\Lambda}, \Theta_{\Pi\Lambda}$  - коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки і температура плівки,

$F_{CT.BH}$  - внутрішня поверхня стінки корпусу.

В рівнянні теплового балансу для плівки рідини, крім тепла, переданого від гріючої пари, враховувалось тепло підведене за рахунок енергії дисипації, котра залежить від потужності, що витрачається на перемішування

$$S_0 c_0 \Theta_0 + \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{\Pi\Lambda}) + LN - Wr_{\Pi} - S_K c_K \Theta_{\Pi\Lambda} = 0 \quad (Б.3.6)$$

де  $S_0, c_0, \Theta_0$  - відповідно витрати вихідної рідини, її питома теплоємність і температура;

$L$  - розмірний коефіцієнт;

$W, r_{\Pi}$  - кількість води, що випаровується і схована теплота пароутворення,

$S_K, c_K$  - витрати рідини на виході з апарату і питома теплоємність.

Рівняння теплового балансу конденсатора представлені

$$\begin{aligned} Wr_{\Pi} - K_T F_K (\Theta_2 - \Theta_{b_2}) &= 0, \\ K_T F_K (\Theta_2 - \Theta_{b_2}) + G_b c_b (\Theta_{b_1} - \Theta_{b_2}) &= 0, \end{aligned} \quad (Б.3.7)$$

де  $K_T, F_K$  - коефіцієнт теплопередачі від вторинної пари до охолоджуючої води і поверхня теплообміну;

$\Theta_2$  - температура вторинної пари;

$\Theta_{b_1}, \Theta_{b_2}$  - температура охолоджуючої води на вході і виході з конденсатора,

$G_b, c_b$  - витрати охолоджуючої води і її теплоємність.

Рівняння матеріального балансу по абсолютно сухій речовині має вигляд

$$S_0 b_0 - S_K b_K = 0 \quad (Б.3.8)$$

де  $S_K = S_0 - W$ .

Для перетворення задачі умовної оптимізації у безумовну введена функція

$$\begin{aligned} L = & -S_K + \lambda_1 [G_{\Pi} (i''_{\Pi} - i'_{\Pi}) - \alpha_{\Pi} F_{CT.H} (\Theta_{\Pi} - \Theta_{CT.K})] + \lambda_2 [\alpha_{\Pi} F_{CT.H} (\Theta_{\Pi} - \Theta_{CT.K}) - \\ & - \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{\Pi\Lambda})] + \lambda_3 [S_0 c_0 \Theta_0 + \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{\Pi\Lambda}) + LN - \\ & - \beta F_M (\zeta_1 \Theta_{\Pi\Lambda} - \zeta_2 \Theta_2) r_{\Pi} - S_K c_K \Theta_{\Pi\Lambda}] + \lambda_4 [\beta F_M (\zeta_1 \Theta_{\Pi\Lambda} - \zeta_2 \Theta_2) r_{\Pi} - G_b c_b (\Theta_{b_2} - \Theta_{b_1})] + \\ & + \lambda_5 [S_0 b_0 - S_K b_K] + \frac{1}{r} (b_K - b_{K30})^2 + r \left( \frac{1}{n - n_{\min}} + \frac{1}{n_{\max} - n} \right) + r \left( \frac{1}{G_b - G_{b \min}} + \frac{1}{G_{b \max} - G} \right) \end{aligned} \quad (Б.3.9)$$

де  $\lambda$  -

множники Лагранжа

$r$  - вагові коефіцієнти.

Задача оптимізації (Б.3.2) представлена як задача мінімізації. За допомогою штрафних функцій враховувались обмеження на кінцеву концентрацію і керуючі збурення.

Виходячи з необхідних умов оптимальності отримали систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi}} = \lambda_1 (G_{\Pi} c_{\Pi} - \alpha_{\Pi} F_{CT.H}) + \lambda_2 \alpha_{\Pi} F_{CT.H} = 0 \quad (Б.3.10)$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \Theta_{II}} &= \lambda_1 \alpha_{II} F_{CT.H} + \lambda_2 (\alpha_{II} F_{CT.H} - \alpha_{III} F_{CT.BH}) + \lambda_3 \alpha_{III} F_{CT.BH} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_{III}} &= \lambda_2 \alpha_{III} F_{CT.BH} + \lambda_3 (-\alpha_{III} F_{CT.BH} - \beta F_M \zeta_1 r - S_K c_K) + \lambda_4 \beta F_M \zeta_1 r_{II} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} &= (\lambda_3 - \lambda_4) \beta F_M \zeta_2 r_{II} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b_K} &= \lambda_5 S_K + \frac{2}{r} (b_K - b_{K30}) = 0\end{aligned}$$

Із зміною числа обертів ротора змінюється коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки рідини в режимі випаровування, який з використанням критеріальної залежності для апарату з жорстко закріпленими лопатями [ ] представлений у емпіричному вигляді

$$\alpha_{III} = K_1 S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (Б.3.11)$$

Оскільки поставлена умова забезпечення найкращих умов теплообміну, складовою частиною математичної моделі задачі керування ПАРТ в режимі випаровування є гідродинаміка течії плівки рідини. Відомо, між числом обертів ротора і густиною зрошення існує взаємозв'язок. Тому витрати вихідної рідини повинні відслідковувати зміну швидкості обертання ротора. При зміні числа обертів в діапазоні від 11,6 об/с і вище витрати вихідної рідини можна обчислити за формулою [ ]

$$S_0 = \frac{c_2}{n^{0,46}} \quad (Б.3.12)$$

а при зміні швидкості обертів ротора у нижньому інтервалі (5,83-11,6) об/с  $S_0$  обчислюється за формулою

$$S_0 = c_1 n^{1,2} \quad Б.3.13)$$

де  $c_1, c_2$  - сталі коефіцієнти.

Для відповідних числа обертів ротора і витрат вихідної рідини обчислюється коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки рідини в режимі випаровування по критеріальній залежності [ ], представлений у емпіричному вигляді

$$\alpha_{III} = 1,4497 \cdot 10^{-7} \lambda \rho^{-0,59} \left( \frac{v^2}{g} \right)^{-0,333} d_p^{0,775} v^{-0,853} \alpha^{-0,439} \rho_{II}^{-0,039} r_{II}^{-0,039} q^{0,039} S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (Б.3.14)$$

де  $v, \rho, \rho_{II}$  – кінематична в'язкість і густина рідини, густина пара;

$\lambda, \alpha$  – відповідно, коефіцієнт теплопровідності і температуропроводності;

$d_p$  – діаметр ротора.

При постійних теплофізичних властивостях рідини і конструктивних параметрах коефіцієнт тепловіддачі може мати вигляд

$$\alpha_{III} = K_1 S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (Б.3.15)$$

З урахуванням залежності (Б.3.12) і (Б.3.13) коефіцієнт тепловіддачі можна представити: при  $n \geq 11,6$  об/с

$$\alpha_{III} = K_{22} n^{0,393} \quad (Б.3.16)$$

в діапазоні (5,83 – 11,6) об/с

$$\alpha_{III} = K_{21} n^{1,371} \quad (Б.3.17)$$

Потужність на перемішування, що витрачається на привід ротора з жорстко закріпленими лопатями за допомогою критеріальної залежності [ ] також може бути представлена емпіричними залежностями

для  $Re_{\Pi} > 5 \cdot 10^3$

$$N_2 = 129 \nu^{0,42} \rho^{0,42} g^{-0,73} d_p^{3,15} \left( \frac{z}{3} \right)^{0,58} S_0^{0,58} n^{3,46} \quad (Б.3.18)$$

$$Re_{\Pi} < 5 \cdot 10^3$$

$$N = 0,94 \cdot 10^6 \nu^{1,16} \rho^{0,42} g^{-0,73} d_p^{1,15} \left( \frac{z}{3} \right)^{0,58} S_0^{0,58} n^3 \quad (Б.3.19)$$

Де  $Re_{\Pi} = \frac{nd_p^2}{\nu}$  — центробіжне число Рейнольдса.

З урахуванням залежностей (Б.3.12) і (Б.3.13) і при умові постійності теплофізичних властивостей рідини і конструктивних параметрів ПАРТ отримали

$$N_2 = K_3 S_0^{0,58} n^{3,46}, \quad (Б.3.20)$$

при  $n \geq 11,6$  об/с

$$N_2 = K_{32} n^{3,193} \quad (Б.3.21)$$

при  $n$  у діапазоні (5,83 – 11,6) об/с

$$N_2 = K_{31} n^{4,15} \quad (Б.3.22)$$

Підставивши залежності коефіцієнта тепловіддачі і потужності, що витрачається на перемішування від числа обертів ротора отримали для  $n \geq 11,6$  об/с і  $Re_{\Pi} > 5 \cdot 10^3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial n} = & 0,393 K_{22} n^{-0,607} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{ПЛ})(\lambda_3 - \lambda_2) + LK_{32} 3,193 n^{2,193} \lambda_3 - \\ & - r \left[ \frac{1}{(n - n_{\min})^2} - \frac{1}{(n_{\max} - n)^2} \right] \end{aligned} \quad (Б.3.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G_b} = -c_b (\Theta_{b_2} - \Theta_{b_1}) \lambda_4 - r \left[ \frac{1}{(G_{b_2} - G_{b_{\min}})^2} - \frac{1}{(G_{b_{\max}} - G_b)^2} \right] \quad (Б.3.24)$$

Для пошуку мінімуму цільової функції (Б.3.9) реалізовано градієнтну процедуру першого порядку

$$n^{нов} = n^{стар} - k \frac{\partial L}{\partial n} \quad (Б.3.25)$$

де  $k$  – крок градієнтного пошуку.

Послідовні етапи обчислень  $G_b^{нов} = G_b^{стар} - k \frac{\partial L}{\partial G_b}$  при використанні приведеної вище градієнтної процедури полягають у наступному:

1. Обчислюємо чергові значення  $n^N, G_b^N$ .
2. Для цих значень розв'язуємо рівняння математичної моделі процесу (Б.3.4) – (Б.3.8).
3. Вектор  $\lambda^N$  знаходимо вирішивши систему (Б.3.10).
4. Визначаємо похідні  $\frac{\partial L}{\partial n^N}$  і  $\frac{\partial L}{\partial G_b^N}$ .
5. Обчислюємо чергове значення вектора керування

$$n^{N+1} = n^N - k^N \frac{\partial L}{\partial n^N}$$

$$G_b^{N+1} = G_b^N - k^N \frac{\partial L}{\partial G_b^N}$$

6. Ця послідовність обчислень повторюється до тих пір, поки значення  $n$  і  $G_b$  змінюються і поки не виконаються умови

$$\left| n^{N+1} - n^N \right| \leq \varepsilon_1,$$

$$\left| G_b^{N+1} - G_b^N \right| \leq \varepsilon_2.$$

В якості початкового значення вагового коефіцієнту використали одиницю ( $r^{(0)} = 1$ ). Для цього значення реалізувався пошук мінімуму (Б.3.9) за допомогою градієнтної процедури.

Після рішення кожної підзадачі безумовної мінімізації вагові коефіцієнти зменшувались за допомогою співвідношення  $r^{(k)} = r^{(k-1)} / 4$ .

Для контролю за збіжністю алгоритму застосували умову

$$\left| S_k^{(k)} - S_k^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon_3 \quad (\text{Б.3.26})$$

Пошук починався з внутрішньої точки, тобто точки в якій всі обмежуючі умови у вигляді нерівностей виконувались ( $n = 15$  об/с  $G_b = 1,75$  кг/с). Задача оптимізації вирішувалась при різних значеннях конструктивних параметрів, результати яких представлені у табл. Б.4.

**Таблиця Б.4**

Кількість підзадач безумовної мінімізації	Кількість кроків на першій ітерації	$d_p$ , м	$z$	$n^{onm}$ , об/с	$G_b^{onm}$ , кг/с	$S_k$ , кг/с
3	7	0,6	3	13,763	1,9159	0,0446
3	7	0,6	5	11,5022	1,82915	0,22275
4	5	0,6	6	11,0262	1,2353	0,3705
5	5	0,6	7	10,7919	1,2501	0,36184
5	8	0,6	8	10,7881	1,9260	0,35877

## Список використаної і рекомендованої літератури

1. Балакирев В.С., Володин В.М., Цирлин А.М. Оптимальное управление процессами химической технологии. – М.: Химия, 1978. – 383 с.
2. Цирлин А.М. Оптимальное управление технологическими процессами. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.
3. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации химической технологии. – М.: Химия, 1975. – 576 с.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
5. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
6. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2 кн. – М.: Мир, 1986. – 670 с.
7. Уальд Д.Д. Методы поиска экстремума. – М.: Наука, 1967. – 218 с.
8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
9. Численные методы условной оптимизации /Под ред. Ф.Гилла и У.Мюррэя. – М.: Мир, 1977. – 290 с.
10. Papageorgiou M. Optimierung: statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung. – München, Wien: Oldenbourg, 1991. – 587 с.
11. Островский Г.М., Бережинский Т.А. Оптимизация химико-технологических процессов. Теория и практика. – М.: Химия, 1984. – 240 с.
12. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
13. Sage A.P. Optimum systems control / Sage A.P., White C.C. - Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall. Inc., 1977, 2<sup>nd</sup> ed. - 413p.
14. Ravindran A. Engineering Optimization Methods and Application /A. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. / - Publication John Wiley and sons, Inc, NJ, 2006, 2<sup>nd</sup> ed.- 688p.
15. Robert F. Stengel Optimal Control and Estimation (Dover Books on Mathematics) Paperback – September 20, 1994 672 p.

## Список використаної літератури до додатків

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. – М.: Высш.шк., 1985. – 327 с.
2. Ладиева Л.Р., Солтысюк О.В. Оптимизация состава моторных масел // Химическое машиностроение. – Киев: Техника, 1992. – вып.55.
3. Ладиева Л.Р. Оптимизация пленочного аппарата роторного типа в режиме нагрева // Химические технологии. – Киев: Наукова думка, 1979. - №1. – с.42-43.
4. Зубрий О.Г., Тананайко Ю.М., Цирлин А.М. Изучение процесса теплопередачи к высоковязким жидкостям при обработке их в роторном аппарате // Вестник КПИ. – Киев: Вища школа, 1968. - №5. с.72-75.
5. Чернобыльский И.И., Тананайко Ю.М., Зубрий О.Г. Минимальная плотность орошения в роторном пленочном аппарате // Вестник КПИ. – Киев: Вища школа, 1973. - №10. – с.57-59.
6. Марченко А.Н., Соляник О.Н. Расход мощности на привод ротора тонкопленочного роторного испарителя // Химическая промышленность Украины. – 1967. - №6. – с.26-28.
7. Ладиева Л.Р. Оптимизация пленочного аппарата роторного типа в режиме испарения // Химическое машиностроение – Киев: Техника, 1982. – вып.36. – с.107-112.



ВСТУП.....	3
1. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	4
1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	4
1.1.1 ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖ СИСТЕМИ.....	5
1.1.2 КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ.....	5
1.1.3 НЕЗАЛЕЖНІ ЗМІННІ.....	6
1.1.4 МОДЕЛЬ СИСТЕМИ.....	6
1.2 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ У ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ ....	6
1.3 ВИБІР КРИТЕРІЇВ ОПТИМАЛЬНОСТІ.....	6
1.4 СПОСОБИ ФОРМУВАННЯ ЗВЕДЕНОГО КРИТЕРІЮ ОПТИМАЛЬНОСТІ. ..	8
1.5 ТИПОВІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ .....	12
1.6 ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І МЕТОДИ ЇХ РІШЕННЯ.....	16
1.6.1. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ І ОБМЕЖЕНЬ .....	16
1.6.2. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ І ЛІНІЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ.....	17
1.6.3. ГЛОБАЛЬНИЙ І ЛОКАЛЬНИЙ ОПТИМУМИ .....	18
Лагранжу.....	19
2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСИЧНОГО АНАЛІЗУ .....	20
2.1. МЕТОД ПОШУКУ БЕЗУМОВНИХ ЕКСТРЕМУМОВ .....	20
2.2. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	20
2.3. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	24
2.4. МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕННЯМИ ТИПУ РІВНОСТІ.....	27
2.4.1. МЕТОД ПРЯМОЇ ПІДСТАНОВКИ.....	27
2.4.2. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА. ....	30
2.4.3. ОПТИМАЛЬНИЙ СТАТИЧНИЙ ПРОЦЕС КЕРУВАННЯ .....	35
3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. ....	38
3.1 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТА ЇХ ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.....	38
3.1.1 СТАНДАРТНА ФОРМА ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ. ...	40
3.2 СИМПЛЕКС-МЕТОД - АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛП. ....	41
3.2.1 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ПРОЦЕДУРИ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ.....	42
3.3 ДВОЕТАПНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД. ....	46
3.4 АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ НА ЧУТЛИВІСТЬ.....	50
3.4.1 СИМПЛЕКС-МНОЖНИКИ. ....	50
3.4.2 ПОДВІЙНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД.....	57
3.5 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА .....	60
3.5.1 ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВОГО РІШЕННЯ .....	61
3.5.2 ЗНАХОДЖЕННЯ ЗМІННОЇ ДЛЯ ВКЛЮЧЕННЯ У БАЗИС. ....	63
3.5.3 ДИСБАЛАНС І ВИРОДЖЕНІСТЬ У ТРАНСПОРТНІЙ ЗАДАЧІ.....	67
Споживач .....	67
3.6 ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ .....	68
3.6.1 ПРЯМА І ДВОЇСТА ЗАДАЧА .....	68
3.6.2 ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ.....	72
3.6.3 АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ З ПОГЛЯДУ ПОДВІЙНОСТІ .....	75
4. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ .....	77
4.1 ГРАДІЄНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ.....	77
4.2 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ.....	78
4.3 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ .....	79
4.4 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ВИГЛЯДІ РІВНОСТЕЙ І НЕРІВНОСТЕЙ. УМОВИ КУНА - ТАККЕРА .....	79

4.5 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ .....	84
5. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЯКІ НЕ ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ .....	85
5.1 ФУНКЦІЯ ОДНОЇ ЗМІННОЇ .....	85
5.1.1 МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ .....	85
5.1.2 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ.....	91
5.2 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ .....	94
5.2.1 МЕТОД СКАНУВАННЯ.....	94
5.2.2 МЕТОД ГАУСА-ЗЕЙДЕЛЯ.....	96
5.2.3 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД.....	97
5.2.4 ПОШУК ПО ДЕФОРМОВАНОМУ БАГАТОГРАННИКУ .....	103
5.2.5 МЕТОД ПАУЕЛЛА.....	107
5.2.6 МЕТОД ПОШУКУ ХУКА-ДЖИВСА.....	113
5.2.7 МЕТОД РОЗЕНБРОКА.....	118
Результат .....	122
6. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ. ....	124
6.1 ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ.....	124
6.1.1 МЕТОД РЕЛАКСАЦІЇ .....	124
6.1.2 МЕТОД ГРАДІЄНТА.....	126
6.1.3 МЕТОД НАЙШВИДШОГО СПУСКУ. ....	130
6.2 МЕТОД ДРУГИХ ПОХІДНИХ. МЕТОД НЬЮТОНА .....	132
6.3 МЕТОД СПРЯЖЕНОГО ГРАДІЄНТУ.....	135
6.4 МЕТОДИ ЗМІННОЇ МЕТРИКИ .....	139
6.4.1 АЛГОРИТМ БРОЙДЕНА.....	140
6.4.2 МЕТОД ДЕВІДОНА-ФЛЕТЧЕРА-ПАУЕЛЛА.....	141
6.4.3 АЛГОРИТМ ПІРСОНА.....	144
6.5 МЕТОД ГОЛДШТЕЙНА-ПРАЙСА .....	145
6.6 ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ.....	147
7. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ .....	148
7.1 МЕТОДИ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ.....	148
7.1.1 ОСНОВНІ ТИПИ ШТРАФІВ.....	149
7.1.2 МЕТОД ПОСТУПОВОЇ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ.....	151
7.1.3 МЕТОД РОЗЕНБРОКА.....	153
7.1.4 МЕТОД ФЛЕТЧЕРА - ПАУЕЛЛА.....	157
7.2 МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ.....	159
7.3. МЕТОДИ ПРЯМОГО ПОШУКУ В ЗАДАЧАХ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ...166	
8. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ В ОДНОКРОКОВИХ ПРОЦЕДУРАХ ВИБОРУ РІШЕНЬ .....	172
9. ІЄРАРХІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	177
9.1. ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	177
9.2. ЦІЛЬОВА КООРДИНАЦІЯ (КООРДИНАЦІЯ МЕТИ) .....	180
9.3 КООРДИНАЦІЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ .....	182
10. ПОДАЛЬША ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ .....	184
10.1. КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	184
10.2 ТЕОРІЯ ІГОР .....	187
11. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ В ОПТИМАЛЬНОМУ КЕРУВАННІ.....	187
11.1 ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.....	187
ЧИСЛЕННЯ.....	187.

11.2. ОСНОВНА ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ. ВИПАДОК ЗАКРІПЛЕНИХ КІНЦЕВИХ ТОЧОК.....	188
11.3. ВИПАДОК РУХОМИХ КІНЦЕВИХ ТОЧОК.....	192
11.4. ДИНАМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ФОРМІ РІВНОСТЕЙ І МНОЖНИКИ ЛАГРАНЖА.....	196
11.5. ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ КІНЦЕВИМ СТАНОМ.....	198
11.6. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ. ЗАДАЧА БОЛЬЦА.....	200
11.7. ЛІНІЙНОКВАДРАТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	202
11.8. ДИНАМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ У ФОРМІ НЕРІВНОСТЕЙ.....	205
11.9. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.....	207
Додадок А.....	209
Опуклі та вгнуті функції.....	209
Додаток Б.....	211
Приклади технічних застосувань.....	211
Додаток Б.1.....	211
Оптимізація процесу приготування моторних мастил.....	211
Додаток Б.2. ....	216
Оптимізація плівкового апарату роторного типу в технологічному режимі нагрівання.....	215
Додаток Б.3.....	222
Оптимізація плівкового апарату роторного типу в режимі випаровування.....	222
Список використаної і рекомендованої літератури.....	227
Список використаної літератури до додатків.....	227