

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Л.Р.Ладієва

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ

Курсовий проєкт

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістр,
за освітньою програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
технології хімічних виробництв» спеціальністю 151
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ
КПІ ім.. Ігоря Сікорського
2021

Рецензент: Шилович Т.Б., канд. техн. наук, доц., доцент кафедри ХПСМ
Відповідальний редактор Жученко А.І., д-р техн. наук, професор.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім.. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 24.06. 2021р.)

За поданням Вченої ради інженернохімічного факультету (протокол № 5 від 24. 05. 2021р.)

Електронне мережне навчальне видання
Ладієва Леся Ростиславівна, канд..техн.наук, доц.

Оптимальне керування системами

Курсовий проєкт

Оптимальне керування системами: Курсовий проєкт [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Л. Р. Ладієва; КПІ ім.. Ігоря Сікорського.- Електронні текстові дані(1 файл: 1,1 Мбайт).-Київ: КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2021, - 99с.

У курсовому проєкті розглядаються методи і алгоритми для розв'язку задач динамічної оптимізації. Приділено увагу методам варіаційного числення, принципу максимуму і динамічного програмування. Розглянуто використання методів оптимізації при проєктуванні систем, плануванні і аналізі функціонування існуючих систем, керуванні динамічними системами. Запропоновано задачі синтезу систем керування і оптимального програмного керування для конкретного технологічного процесу , а саме для лінійних і нелінійних об'єктів, для узагальненого і квадратичного критерію якості.

Курсовий проєкт призначений студентам, що спеціалізуються в області автоматизованого керування технологічними процесами та виробництвом, а також інших спеціальностей, які пов'язані з розробкою систем оптимізації.

© Л.Р.Ладієва,2021

© КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2021

Зміст

Вступ.....	4
1. Тематика курсового проєктування.....	5
2. Завдання.....	6
3. Вихідні дані для курсового проєкту.....	8
4. Оформлення курсового проєкту.....	8
5. Зміст пояснювальної записки курсового проєкту.....	9
6. Характеристика технологічного процесу як об'єкта керування.....	10
7. Математичне моделювання об'єкта керування.....	12
8. Розробка алгоритмів оптимального керування.....	13
Список рекомендованої літератури.....	98

Вступ

Метою виконання курсового проекту є формування навичок використання методів оптимізації при проектуванні систем, плануванні і аналізі функціонування існуючих систем, керуванні динамічними системами.

Студенти повинні вміти досліджувати і проектувати оптимальні системи керування технологічними процесами, а саме:

- вибирати прийнятний рівень моделювання, побудувати цільову функцію і модель у цілому, вибрати стратегію пошуку оптимального рішення
- вирішувати задачі динамічної оптимізації при наявності обмежень у формі рівностей і нерівностей
- вирішувати задачі синтезу систем керування і оптимального програмного керування для конкретного технологічного процесу , а саме для лінійних і нелінійних об'єктів, для узагальненого і квадратичного критерію якості.

1. Тематика курсового проектування

Тематика курсового проектування пов'язана зі спрямованістю курсу "Оптимальне керування системами». Це, у першу чергу, оптимізація технологічних процесів хіміко-технологічних, нафтохімічних, целюлозно-паперових, біохімічних і інших близьких по організації й оформленню виробництв.

Курсовий проєкт з оптимізації являє собою розробку системи оптимального керування технологічного процесу, вузла установки. Основними результатами курсового проєкту є розроблення і дослідження моделі і оптимальної системи керування (алгоритму керування) технологічного вузла, а також його функціональна схема автоматизації.

Прикладами тем курсових проєктів по оптимізації можуть бути:

1. Оптимальне керування процесу синтезу аміаку.
2. Оптимальне керування одержання хлорметану.
3. Оптимальне керування сушки-грануляції у виробництві амофосу.
4. Оптимальне керування процесів у багатокорпусній випарній установці біохімічного виробництва.
5. Оптимальне керування тепловим режимом черв'ячної машини.
6. Оптимальне керування процесу ферментації у виробництві кормових дріжджів.
7. Оптимальне керування процесу одержання технічного вуглецю з важких нафтопродуктів.
8. Оптимальне керування процесу сушіння молока в сушарках киплячого шару.
9. Оптимальне керування лінії гальванічного цинкування.
10. Оптимальне керування процесу варіння целюлози.
11. Оптимальне керування технологічних процесів розмільно-підготовчого

відділення целюлозно-паперового виробництва.

12. Оптимальне керування процесу одержання моторних масел.
13. Оптимальне керування технологічних процесів в апарату безперервної полімеризації капролактаму.
14. Оптимальне керування процесу мерсеризації целюлози у виробництві віскози.

2. Завдання

Перша частина:

- Для вибраного технологічного процесу сформулювати задачі оптимального керування. Обґрунтувати вибір критерію оптимальності.
- Вибрати прийнятний рівень моделювання і розробити математичну модель процесу.
- Вивести необхідні умови оптимальності, використовуючи варіаційний метод. Порівняти отриманий результат з спряженими рівняннями і умовами трансверсальності з використанням принципу максимуму.
- Розглянути оптимальне керування у замкненій системі. Синтезувати оптимальний лінійний регулятор. Розглянути можливість введення інтегральної складової в закон керування. Записати і розв'язати диференціальні нелінійні рівняння Ріккаті. Для розв'язку алгебраїчних рівнянь Ріккаті застосувати градієнтні методи нелінійного програмування. Привести динаміку коефіцієнтів підсилення регулятора і графіки поведінки системи.
- Побудувати оптимальну систему керування. Шляхом вибору матриць Q , R , S , і рішення вихідної системи, в оберненому часі спряженої системи знайти оптимальне програмне керування і оптимальні траєкторії вектора стану.
- Для об'єктів з розподіленими параметрами застосувати метод функції штрафів при градієнтному пошуку оптимуму у функціональному просторі

для обчислення керування і траєкторії перевodu. Записати: чисельний алгоритм рішення.

- Дати оцінку оптимальним траєкторіям отриманим у результаті пошуків.

Друга частина:

- Визначити лінію переключення для керування за мінімальним часом при обмеженні на керування, яке приведе систему у початок координат. Записати оптимальний закон керування.
- Застосувати метод функції штрафів при градієнтному пошуку оптимуму у функціональному просторі для обчислення керування і траєкторії перевodu. Записати чисельний алгоритм рішення.

3. Вихідні дані для курсового проєкту

Вихідними даними для курсового проєкту є відомості й матеріали, одержувані на практиці. Тому завдання на курсовий проєкт видається студентам перед виробничою практикою або на початку її проходження. Це індивідуальне завдання студента й записується він у щоденнику проходження практики. При цьому вказується тема (у вигляді індивідуального завдання студента), а також основні вихідні матеріали для виконання курсового проєкту у вигляді декомпозиції індивідуального завдання.

Студенти на виробничій практиці зобов'язані накреслити технологічну схему вузла або установки, основного технологічного апарата або машини, функціональну схему автоматизації по темі індивідуального завдання. Крім цього, вони повинні вивчити фізико-хімічні основи й технологію цього вузла або установки, виконати статичні розрахунки (матеріальний і тепловий або енергетичний баланс), зібрати матеріал по технічному оснащенню системи автоматизації (типи приладів, їхня вартість). Вивчити контрольовані й регульовані технологічні параметри, а також даного й аналогічних або близьких до пристрої виробництв, наявну літературу за технологією й автоматизації відповідного виробництва. Зібрати або, якщо можливо, експериментально одержати дані по динаміці технологічних процесів і апаратури автоматизації. Ці матеріали служать вихідними даними для курсового проєкту.

Остаточне завдання на курсовий проєкт видається керівником проєкту після подання студентом матеріалів виробничої практики на кафедру, на початку періоду курсового проєкту. Завдання на курсового проєкту видається на спеціальному бланку .

4. Оформлення курсового проєкту

Курсовий проєкт складається з пояснювальної записки й графічної частини. Пояснювальна записка звичайно має обсяг 30-40 сторінок машинописного тексту

й містить: введення ; характеристику технологічного процесу як об'єкта керування; аналіз стану оптимального керування технологічного процесу; постановку завдання оптимізації; математичне моделювання об'єкта керування; розробку автоматичної системи регулювання технологічного процесу; розробку системи оптимального керування технологічного процесу; висновки; список літератури й додатки.

Графічна частина курсового проєкту містить 2 аркуші формату А1: креслення технологічного апарата; функціональної схеми автоматизації; статичні й динамічні характеристики об'єкта й системи керування, оптимальні траєкторії переводу системи, графіки оптимального керування зі зворотнім зв'язком і оптимального програмного керування.

Записка оформляється у відповідності зі нормативним стандартом КПП імені Ігоря Сікорського.

Текст і малюнки виконуються на формах установленим ЕСКД. Титульний аркуш оформляється відповідно до стандарту

Для розрахунків і опису фізико-хімічних процесів обов'язкове використання одиниць у системі СИ.

5. Зміст пояснювальної записки курсового проєкту

Вступ

У вступі викладаються питання актуальності тематики курсового проєкту, місце й значення розглянутого технологічного вузла в його виробництві, що включає, мета й завдання виконуваної роботи.

Актуальність тематики визначається значенням для промисловості оптимального керування технологічного процесу або виробництва, соціальним або економічним ефектом розробки, впливом виконуваної роботи на технічний прогрес.

Розглянутий у курсовому проєкті технологічний процес або вузол входить

до складу виробництва або заводу. У вступі визначити місце й значення для виробництва розглянутого технологічного процесу, його вплив на ефективність виробництва.

Мета й завдання курсового проєкту висвітлюються з позицій розроблювальної системи автоматизації, її соціальної спрямованості (охорона навколишнього середовища, вивільнення людей зі шкідливих умов і т.д.), енергозбереження, впливу на технічний прогрес в області автоматизованого виробництва.

6. Характеристика технологічного процесу як об'єкта керування

При розгляді характеристики автоматизованого технологічного процесу варто приділити увагу наступним питанням:

- Фізико-хімічним основам технологічного процесу;
- Технології процесу, поєднав її з технологією виробництва;
- Опису основного устаткування;
- Аналізу контрольованих і регульованих технологічних параметрів.

Загальний обсяг розгляду не повинен перевищувати 10 сторінок.

Аналіз стану автоматизації технологічного процесу

Цей аналіз виконується на підставі матеріалів виробничої практики студентів і літературних даних. Метою аналізу є оцінка рівня автоматизації подібних автоматизованому виробництву, а також використання розроблених і апробованих систем автоматизації, керування, регулювання або їхніх елементів у даному проєкті. Виконувані розробки, як правило, будуються на підставі існуючих аналогічних розробок, що добре показали себе на практиці. Природно, при цьому вносяться корективи, що виправляють наявні недоліки або враховують розходження технології й апаратного оформлення. На підставі досягнутого для даних виробництв рівня автоматизації ставиться основне завдання автоматизації.

Для виконання аналізу можна використати системи автоматизації не тільки

виробництв, аналогічних автоматизованому, але й близьких за технологією й організацією. Варто звернути увагу на матеріали, опубліковані в монографіях, статтях, авторських посвідченнях і патентах.

Аналіз виконується з урахуванням застосування розроблених систем регулювання, керування й оптимізації в даній роботі. Матеріали, що отримуються в авторських посвідченнях і патентах; рекомендується використати лише в тих випадках, коли в реальних розробках доцільне придбання ліцензії або виплата авторської премії. Потрібно прагнути до патентної чистоти пропонованої розробки.

Крім того, варто звернути увагу на можливість поліпшення розробки, авторські права на яку закріплені авторськими посвідченнями або патентами. Якщо пропонуване вдосконалення істотно поліпшує розробку й експериментальне дослідження пропонованого вдосконалення покаже його ефективність, варто оформити заявку на пропонований винахід.

Постановка завдання автоматизації

На підставі виконаного аналізу фізико-хімічних основ і технології, а також стану оптимізації виробництва необхідно поставити основне завдання оптимального керування. Воно повинне бути коротким й містити пропонований рівень оптимізації і її спрямованість.

Основне завдання оптимізації в реальній роботі узгоджується із замовником і результати даної роботи рівняються з поставленим основним завданням. Варто мати на увазі, що при захисті проєкту, у тому числі й даному курсовому, виробляється оцінка якості рішення поставленого основного завдання.

Прикладом постановки основного завдання може бути: розробити систему оптимального керування процесів сушки-грануляції аммофоса з використанням ЕОМ і оптимальним керуванням основного процесу.

Після постановки основного завдання роблять її декомпозицію, тобто розбивають на ряд частинних завдань, що забезпечують рішення основної.

Прикладом декомпозиції поставленої вище завдання оптимізації можуть бути:

- Розробка статичної й динамічної моделі процесу сушки-гранулювання аммофоса.
- Виконати синтез і аналіз автоматичних систем регулювання процесів підтримки температури в барабанній сушарці й топленні.
- Розробити алгоритми оптимального керування процесом сушіння аммофоса.
- Виконати дослідження автоматичної системи регулювання температури й алгоритму оптимального керування шляхом імітаційного моделювання на ЕОМ.
- Розробити функціональну схему системи автоматизації процесу сушіння.

7. Математичне моделювання об'єкта керування

Синтез і аналіз автоматичної системи керування або алгоритмів керування розробляється методами математичного моделювання на підставі яких побудована теорія оптимального керування.

Синтез автоматичної системи керування алгоритму оптимального керування має на меті визначення закону регулювання моделі деякого коригувального пристрою або цільової функції при оптимальному керуванні. При цьому необхідно мати модель об'єкта керування, а також моделі датчиків, перетворювачів, виконавчих механізмів, регулювальних органів, ліній зв'язку. Найбільш складним і трудомістким є одержання моделі об'єкта керування.

Моделювання об'єкта керування може розроблятися аналітичним і експериментальним методами. Нерідко для об'єктів, що змінюють свої властивості згодом, використовуються адаптивні моделі, побудовані на базі параметричних і структурної поточних ідентифікацій.

У даному курсовому проєкті математична модель об'єкта керування

розробляється аналітичним методом . Отриману математичну модель потрібно досліджувати, тобто побудувати статичні (для статичної моделі) і динамічні (для динамічної моделі) характеристики.

Із цією метою виконується розробка програми дослідження на ЕОМ.

8. Розробка алгоритмів оптимального керування

Розробку алгоритмів оптимального керування можна робити декількома шляхами.

Основними методами розробки оптимальної системи керування є:

- завдання декількох варіантів оптимальної системи керування із наступним аналізом і відбором найкращого варіанта;
- синтез закону керування на підставі обраного критерію.

У даній роботі рекомендується перший шлях, тобто вибір кращого варіанта серед заданих.

Із цією метою на підставі літературних даних, матеріалів виробничої практики або логічних міркувань розробляється завдання декількох варіантів системи керування. Моделі цих варіантів програмуються на ЕОМ і виробляється їхнє дослідження. При цьому для кожної системи керування розробляється оптимізація настроювань регуляторів і забезпечується якість регулювання при оптимальних настроюваннях регуляторів. Для оптимізації настроювань регуляторів варто використати один з методів нелінійного програмування, наприклад симплексний метод [1]. Для виконання відбору кращого варіанта системи керування необхідно сформулювати критерій оцінки якості системи керування. Якщо не є яких-небудь вказівок по якості системи керування, вибирають інтегральний критерій якості.

При розробці алгоритму оптимального керування формулюються й досліджуються критерії керування (оптимізації). За обраним критерієм керування (оптимізації) складається формалізований алгоритм керування (оптимізації) на підставі математичних моделей елементів автоматичної системи керування у вигляді систем рівнянь.

По даній системі рівнянь розробляється методика їхнього рішення й складається блок-схема алгоритму оптимального керування. По даним блок-схеми алгоритму керування складається програма для машини-носія. Дослідження алгоритму керування на ЕОМ може вироблятися в діалоговому

режимі й у режимі пакетної обробки. При пакетній обробці всі методи дослідження заздалегідь вставляються в програму ЕОМ при діалоговому - оператор може задавати методику дослідження після виконання попередніх дій. У даній роботі рекомендується діалоговий режим дослідження.

Система автоматизації технологічного процесу. Система автоматизації містить у собі керування, регулювання й контроль технологічних процесів і параметрів. Основним технічним документом, що відбиває систему автоматизації технологічного процесу, є його функціональна схема автоматизації. На ній зображується технологічна схема процесу або виробництва із вказівкою в прийнятих позначеннях систем контролю, регулювання й керуванням також на яких технологічних лініях і апаратах установлюються датчики й регулювальні органи. Крім цього, за функціональною схемою автоматизації можна визначити рівень автоматизації, розташування вторинних вимірювальних приладів і регуляторів. Вона забезпечує взаємозв'язок технології й автоматизації виробничого процесу й служить підставою для розробки робочої документації по системі автоматизації, а також замовленої специфікації.

У пояснювальній записці курсового проєкту дається опис функціональної схеми автоматизації, представленої графічно на одному з аркушів роботи. Опис розробляється із прив'язкою до графічної схеми. Для прив'язки опису й специфікації на функціональній схемі зазначені позиції вимірювальних і регулюючих приладів. При описі систем контролю, регулювання й керування вказується призначення системи, її функції й приладове оснащення з позначенням позицій і номера аркуша, а також місця розташування вторинних вимірювальних приладів, регуляторів, мікропроцесорів і ЕОМ. При цьому пояснюється доцільність такого розташування. Розташовують зазначені технічні засоби автоматизації за місцем перебування датчиків або регулювальних органів, на місцевих щитах і в операторському або диспетчерському пунктах залежно від призначення й використання.

8.1. Оптимальні системи керування

Відома постановка задачі оптимального керування динамічними системами, що полягає в знаходженні траєкторії $\mathbf{U}(t) \{ t_0 < t < t_f \}$, яка приводить стан системи $\mathbf{X}(t)$ за допомогою мінімізації функціоналу вартості або якості

$$I = G[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t), t] dt$$

з заданими початковими умовами $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$ в кінцеву умову $N[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0$ оптимальним способом. З точки зору використання є два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу, та в часовому проміжку оптимізації для реального процесу. Очевидно, що ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану \mathbf{X}_0 . З-за дії можливих перешкод або неточностей моделі, на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан $\mathbf{X}(t)$, що відрізняється від очікуваного, отриманого по моделі $\mathbf{X}(t)$. При цьому також можливе відхилення кінцевих умов.

В випадку оптимального регулювання з необхідних умов впливає рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону регулювання

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}^* [\mathbf{X}(t), t]$$

Ця формула використовується для прямих розрахунків керуючого впливу $\mathbf{U}(t)$ по вимірним величинам станів $\mathbf{X}(t)$. Істотна властивість оптимального

регулювання впливає з того, що закон регулювання є незалежним відносно можливих початкових станів \mathbf{X}_0 . За відсутності несподіваних перешкод або неточностей моделі оптимальне керування та оптимальне регулювання для заданих початкових станів \mathbf{X}_0 дає однакові результати. Установлено, що при заданій постановці проблеми використання оптимального закону регулювання з-за своєї універсальності та легкості обчислень з точки зору практичного використання є більш бажаним, ніж застосування оптимальної траєкторії керування.

Важливим спеціальним випадком оптимального керування динамічними системами є лінійно-квадратична (ЛК) оптимізація (ЛКО), яка пов'язана з лінійними рівняннями станів та квадратичними функціоналами якості.

Почнемо дослідження окремої задачі керування, рішення якої дає закон лінійного керування з зворотнім зв'язком. Хай існує лінійна система, що характеризується диференціальним рівнянням

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t) * \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) * \mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (8.1.1)$$

і потрібно знайти керування, що мінімізує функцію вартості (при фіксованому t_f).

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} * \mathbf{x}^T(t_f) * \mathbf{S} * \mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2} * \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) * \mathbf{Q}(t) * \mathbf{X}(t) * \mathbf{U}^T(t) * \mathbf{R}(t) * \mathbf{U}(t)] dt \quad (8.1.2)$$

Зрозуміло, що без втрати єдності можна припустити, що матриці \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} - симетричні. Рішення цієї задачі можливо отримати за допомогою принципу максимуму або рівняння Гамільтона-Якобі.

Використаємо перший метод. Гамільтоніан має вигляд:

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = 1/2 * \mathbf{X}^T * \mathbf{Q} * \mathbf{X} + 1/2 * \mathbf{U}^T * \mathbf{R} * \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T * \mathbf{A} * \mathbf{X} + \boldsymbol{\lambda}^T * \mathbf{B} * \mathbf{U} \quad (8.1.3)$$

Для того, щоб скористатись принципом максимуму, необхідно, щоб для оптимального керування

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}} = 0 = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (8.1.4)$$

та

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} = -\boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (8.1.5)$$

при граничній умові

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} = \mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) \quad (8.1.6)$$

Далі вважаємо, що

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (8.1.7)$$

Відмітимо, що рівняння для оптимального керування можливе при умові, що існує матриця, обернена матриці $\mathbf{R}(t)$

Для отримання невід'ємної другої похідної необхідно, щоб $\mathbf{R}(t)$ та $\mathbf{Q}(t)$ були невід'ємно визначені. Таким чином, зрозуміло, що $\mathbf{R}(t)$ повинна бути додатньо визначеною.

Стан системи $\mathbf{X}(t_0)$ заданий при $t=t_0$, тоді як спряжений вектор $\boldsymbol{\lambda}(t)$ визначений в момент досягнення $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=0$. Таким чином, перш ніж визначати оптимальне керування, необхідно вирішити двоточкову крайову задачу (ДТКЗ).

Алгоритм розрахунку **оптимального програмного керування**:

1. При заданому постійному значенні керування U розраховуємо у прямому часі математичну модель процесу. Отримуємо траєкторії переходу.
2. У зворотному часі розраховуємо спряжену систему .
3. Отримуємо оптимальне керування $U(t)$. Підставляємо у математичну модель, яку розраховуємо у прямому часі. Отримуємо оптимальну траєкторію переходу. Умова кінцевого стану X входить у інтегральну складову функції вартості. За допомогою підбору матриці вагових коефіцієнтів Q , вагового коефіцієнту r система може потрапити у заданий кінцевий стан.

З'ясуємо, чи можна перетворити цей вираз в керування по замкненому контуру. Припустимо , що рішення для спряженого випадку аналогічно (8.1.6) :

$$\lambda(t)=P(t)X(t) \quad (8.1.8)$$

Підставляючи (8.1.8) в (8.1.1) та (8.1.7) отримаємо

$$X' = A(t)X(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)X(t) \quad (8.1.9)$$

Крім того, з (8.1.8) та (8.1.5) випливає

$$\lambda' = P'X(t) + P(t)X' = -Q(t)X(t) - A^T(t)P(t)X(t) \quad (8.1.10)$$

Об'єднуючи (8.1.9) та (8.1.10) одержуємо

$$[P' + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t)]X(t) = 0 \quad (8.1.11)$$

Поскільки це рівняння повинно виконуватись для ненульових $X(t)$, множник, що стоїть перед $X(t)$, повинен дорівнювати нулю.

Таким чином матриця \mathbf{P} , яка є симетричною матрицею розмірності $(n \times n)$ і яка містить в собі $n(n+1)/2$ різних членів, повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккаті :

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (8.1.12)$$

при граничній умові, заданої (8.1.6) та (8.1.8) :

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \quad (8.1.13)$$

Таким чином рішення матричного рівняння Ріккаті можна провести у зворотньому напрямку, від t_f до t_0 , побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (8.1.14)$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру з

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t) \quad (8.1.15)$$

Важливо відмітити, що всі складові вектора стану повинні бути досягаєми. На рис.8.1.1 показана структурна схема пристрою, що реалізує отримане рішення задачі про регулятор.

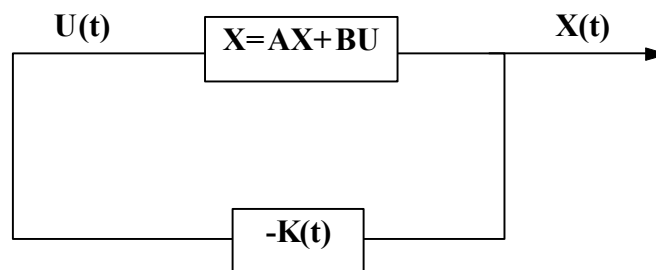


Рис.8.1.1. Оптимальний лінійний регулятор

Отримані залежності визначають оптимальний лінійний регулятор з залежним від часу матричним коефіцієнтом підсилення $\mathbf{K}(t)$.

Цей регулятор мінімізує функцію вартості на траєкторіях системи.

Приклад 1.

Динаміка системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -12x_1 - 14x_2 + U \end{cases} \quad \begin{matrix} X(t_0)=[1 \ 1]^T \\ X(t_f)=[0 \ 0]^T \end{matrix}$$

1. Для вибраної математичної моделі технологічного процесу сформулювати задачу оптимального керування. Обґрунтувати вибір критерію оптимальності за формою інтегрального квадратичного.
2. Отримати необхідні умови оптимальності використовуючи принцип максимуму. Порівняти отриманий результат зі спряженими рівняннями і умовами трансверсальності з використанням варіаційного числення.
3. Розглянути оптимальне керування у замкненій системі зі зворотнім зв'язком. Синтезувати оптимальний лінійний закон керування. Розглянути введення інтегральної складової в закон керування. Отримати нелінійні диференціальні рівняння Ріккати і умови трансверсальності.

Відповідь.

1. Диференціальні рівняння математичної моделі процесу представлені у просторі стану, канонічній формі, лінійні. Можливий канал керування $U \rightarrow x_1$, тобто U – керуючий вплив, а x_1 – регульований параметр. Для створення нелінійностей необхідно вибрати інтегральний квадратичний за формою критерій

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + rU^2)dt \rightarrow \min,$$

де r – ваговий коефіцієнт.

Квадратичне зваження стану дозволяє досягнути бажаної якості керування. Квадратичне зваження керування у деяких випадках замінює собою явні обмеження на величину керуючих впливів. Завдання дуже великих значень вагового коефіцієнта викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а дуже малих – призводить до неприпустимо великих значень U . Основне обмеження – умова додатної визначеності r .

2. Необхідні умови існування мінімуму для принципу максимуму:

канонічні рівняння Гамільтона

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial X(t_f)}$$

$$X' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

де H – гамільтоніан,

G – термінальна складова функції вартості,

$\lambda(t)$ – вектор еквівалентний множнику Лагранжа, розглядається як функція незалежної змінної t .

Визначимо гамільтоніан у вигляді

$$H(X, U, \lambda, t) = \frac{1}{2} q_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} q_{22} x_2^2 + \frac{1}{2} r U^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-12x_1 - 14x_2 + U)$$

Спряжені рівняння і умови трансверсальності

$$\lambda_1' = -q_{11}x_1 + 12\lambda_2 \quad \lambda_1(t_f) = 0$$

$$\lambda_2' = -q_{22}x_2 - \lambda_1 + 14\lambda_2 \quad \lambda_2(t_f) = 0$$

Рівняння зв'язку

$$\frac{\partial H}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0, \quad U^*(t) = -r^{-1}\lambda_2$$

Достатньою умовою мінімуму I є невід'ємність другої варіації I вздовж всіх траєкторій $\delta^2 I \geq 0$.

Для лінійної системи необхідні умови оптимальності є і достатніми. Використаємо варіаційне числення. Рівняння Ейлера - Лагранжа і умови трансверсальності.

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{t_f} = - \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{t_f},$$

де L – Лагранжіан,

$$L = \frac{1}{2} q_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} q_{22} x_2^2 + \lambda_1 (x_2 - x_1') + \lambda_2 (-12x_1 - 14x_2 + U - x_2')$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = q_{11} x_1 - 12\lambda_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_1'} = -\lambda_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = q_{22} x_2 + \lambda_1 - 14\lambda_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2'} = -\lambda_2,$$

$$q_{11} x_1 - 12\lambda_2 + \lambda_1' = 0 \quad \lambda_1' = -q_{11} x_1 + 12\lambda_2,$$

$$q_{22} x_2 + \lambda_1 - 14\lambda_2 + \lambda_2' = 0 \quad \lambda_2' = -q_{22} x_2 - \lambda_1 + 14\lambda_2,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} \Big|_{t_f} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} \Big|_{t_f} = 0; \quad \lambda_1(t_f) = 0; \lambda_2(t_f) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = rU + \lambda_2 = 0; \quad U^*(t) = -r^{-1} \lambda_2.$$

Порівняння результатів за принципом максимуму і варіаційним численням показало отримання однакових спряжених рівнянь, умов трансверсальності, оптимального керування.

Алгоритм розрахунку оптимального програмного керування:

1. При заданому постійному значенні керування U розраховуємо у прямому часі математичну модель процесу. Отримуємо траєкторії переходу.
2. У зворотному часі розраховуємо спряжену систему .

3. Отримуємо оптимальне керування $U(t)$. Підставляємо у математичну модель, яку розраховуємо у прямому часі. Отримуємо оптимальну траєкторію переходу.

Умова кінцевого стану X входить у інтегральну складову функції вартості. За допомогою підбору матриці вагових коефіцієнтів Q , вагового коефіцієнту r система може потрапити у заданий кінцевий стан.

Для розрахунку у прямому часі похідні у системі представляємо як різницю вперед

$$\begin{cases} \frac{x_{1\ v+1} - x_{1\ v}}{\tau} = x_{2\ v} \\ \frac{x_{2\ v+1} - x_{2\ v}}{\tau} = -12x_{1\ v} - 14x_{2\ v} + U_v \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{aligned} x_{1\ v+1} &= x_{1\ v} + \tau x_{2\ v} \\ x_{2\ v+1} &= x_{2\ v} + \tau(-12x_{1\ v} - 14x_{2\ v} + U_v) \end{aligned}$$

В спряжених рівняннях похідні представляємо, як різницю назад

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{1\ v} - \lambda_{1\ v-1}}{\tau} &= -q_{11}x_{1\ v} + 12\lambda_{2\ v} \\ \frac{\lambda_{2\ v} - \lambda_{2\ v-1}}{\tau} &= -q_{22}x_{2\ v} - \lambda_{1\ v} + 14\lambda_{2\ v} \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lambda_{1\ v-1} &= \lambda_{1\ v} - \tau(-q_{11}x_{1\ v} + 12\lambda_{2\ v}) \\ \lambda_{2\ v-1} &= \lambda_{2\ v} - \tau(-q_{22}x_{2\ v} - \lambda_{1\ v} + 14\lambda_{2\ v}), \\ U_v^*(t) &= -r^{-1}\lambda_{2\ v} \end{aligned}$$

Такий підхід забезпечить збіжність розв'язку двоточної крайової задачі.

3. Постановка задачі оптимального керування динамічними системами має два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування зі зворотнім зв'язком з необхідних умов рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону керування. Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон керування є незалежним відносно можливих початкових станів X_0 .

Оптимальний лінійний закон керування

$$U(t) = -k(t)X(t),$$

де $k(t) = R^{-1}B^TP$ – матриця коефіцієнтів підсилення, P – симетрична матриця коефіцієнтів Ріккати.

Нелінійне матричне диференціальне рівняння Ріккати:

$$P' = -PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q, \quad P(t_f) = S,$$

де Q, R, S – матриці вагових коефіцієнтів.

Виведемо рівняння Ріккати:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -14 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

Отримали:

$$\begin{aligned} p'_{11} &= 24p_{12} + p_{12}^2 - q_{11} & p_{11}(t_f) &= 0 \\ p'_{21} &= -p_{11} + (14)p_{12} + 12p_{22} + p_{12}p_{22} & p_{12}(t_f) &= 0 \\ p'_{22} &= 24p_{22} + p_{22}^2 - 2p_{12} - q_{22} & p_{22}(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Оптимальний закон керування

$$U^*(t) = -r^{-1} (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

Лінійні регулятори дозволяють звести до нуля з плином часу вплив на вихід об'єкту ненульових початкових умов чи короткострокових імпульсних виливів. У випадку постійних чи повільно змінюючих вхідних виливів такі регулятори не можуть забезпечити вимог рівності нулю відхилень регулюючих величин від заданих значень. Для того, щоб задовольнити такій вимозі, закон керування повинен мати не одну, а дві складові, одна з котрих залежить від вектора стану, а друга – від інтеграла вектора стану.

$$U^*(t) = -r^{-1} \left(p_{43}x_1 + p_{44}x_2 + p_{41} \int x_1 dt + p_{42} \int x_2 dt \right),$$

де $p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{44}$ – коефіцієнти Ріккаті.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Приклад 2.

Оптимальне програмне керування процесом випаровування

Вибір критерію оптимальності

Задача: мінімізувати витрату теплоносія та вивести значення концентрації розчину на заданий рівень.

Для вирішення даної задачі оберемо інтегральний квадратичний критерій якості. Необхідно підтримувати на певному рівні концентрацію на виході з випарного апарату. Тобто в критерій оптимальності включаємо мінімізацію відхилення від заданого концентрації розчину на виході з апарата μ_c і температури θ_c , а також витрат теплоносія G_b :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [q_{11}(\mu_c - \mu_c^{3d})^2 + q_{21}(\theta_c - \theta_c^{3d})^2 + rG_b^2] dt \rightarrow \min$$

Виведення необхідних умов оптимальності

Спочатку приведемо математичну модель процесу до наступного вигляду:

$$\frac{d\theta_c}{dt} = a_{11} \cdot \theta_c + b_1 \cdot G_b$$

$$\frac{d\mu_c}{dt} = a_{21} \cdot \theta_c + a_{22} \cdot \mu_c$$

де відповідно, маємо:

$$a_{11} = -1.053$$

$$b_1 = 18.86$$

$$a_{21} = 1.217 \cdot 10^{-7}$$

$$a_{22} = -7.246 \cdot 10^{-4}$$

$$b_2 = 0$$

Гамільтоніан матиме вигляд:

$$H = \frac{1}{2} \left[q(\mu_c - \mu_c^{зд})^2 + r G_b^2 \right] + \lambda_1 (a_{11} \cdot \theta_c + b_1 \cdot G_b) + \lambda_2 (a_{21} \cdot \theta_c + a_{22} \cdot \mu_c)$$

Запишемо умови оптимальності:

$$\lambda'_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_c} = -q_{11}(\theta_c - \theta_c^{зд}) - \lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{21}$$

$$\lambda'_2 = -\frac{\partial H}{\partial \mu_c} = -q_{12}(\mu_c - \mu_c^{зд}) - \lambda_1 a_{12} - \lambda_2 a_{22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial G_b} = r G_b + \lambda_1 b_1 = 0$$

Оптимальне керування:

$$G_b(t) = \frac{-\lambda_1 b_1}{r}$$

$$\lambda_1(t_f) = 0$$

$$\lambda_2(t_f) = 0$$

Рівняння системи в прямому часі

$$\begin{cases} \frac{\theta_c out^{v+1} - \theta_c out^v}{\tau} = a11 * \theta_c out^v + b1 * Gb^v \\ \frac{\mu c out^{v+1} - \mu c out^v}{\tau} = a21 * \theta_c out^v + a22 * \mu c out^v \end{cases}$$

Спряжена система в зворотному часі

$$\begin{cases} \frac{\lambda 1^v - \lambda 1^{v-1}}{\tau} = -q11(\theta_c out^v - \theta_c out^{3a_d}) - \lambda 1^v a11 - \lambda 2^v a21 \\ \frac{\lambda 2^v - \lambda 2^{v-1}}{\tau} = -q12(\mu c - \theta \mu c^{3d}) - \lambda_2 a_{22} \end{cases}$$

Розрахунок оптимального програмного керування

Розрахунок оптимального програмного керування виконано у програмному пакеті *MatLab*.

Для початку запишемо програмний код функції для розрахунку x_1 . Ініціалізуємо наші данні та розрахуємо за формулою x_1 .

```
function [x1,x2,t,N] = findx()  
x1 = [];  
x2 = [];  
x1(1) = 98;  
x2(1) = 170;  
N = 1200;  
a11 = -1.053;  
a12 = 0;  
b11 = 18,86;  
b12=0;  
F1 = 12.5;  
a21 = 1.217 · 10-7;  
a22 = -7.246 · 10-4;  
TAU = 0.5;  
t = 0:N-1;  
for s = 1:N-1  
x1(s+1) = (a11*x1(s) + a12*x2(s) + b12*F1)*TAU + x1(s);  
    x2(s+1) = (a21*x1(s) + a22*x2(s))*TAU+x2(s);  
end  
end
```

Запишемо програмний код функції для розрахунку λ_1 . Ініціалізуємо наші данні та розрахуємо за формулою λ_1 .

```

function [lam1,lam2] = findlambda(x1,x2,N)
lam1(N) = x1(N);
lam2(N) = x2(N);
q = 1;
a11 = -1.053;
a12 = 0;
b11 = 18,86;
b12=0;
F1 = 12.5;
a21 = 1.217 · 10-7;
a22 = -7.246 · 10-4;
TAU = 0.5;
for s = N:-1:1
    lam1(s+1) = lam1(s) - TAU*(-q*x1(s) - a11*lam1(s) -
a21*lam2(s));
    lam2(s+1) = lam2(s) - TAU*(-a12*lam1(s) - a22*lam2(s));
end
end

```

Запишемо програмний код функції для розрахунку G0. Ініціалізуємо наші данні та розрахуємо за формулою G0.

```

function [U_opt] = findUprav(N,lam2)
r = 1;
b12=0;
b11 = 18,86;
for i = 1:N
    U_opt(i) = -(r^1)*b11*lam2(i);
End

```

Після написання функцій для розрахунку відповідних параметрів, запишемо код основної програми де викличимо попередньо записані функції з розрахунками та побудуємо відповідні графіки.

```
[x1,x2,t,N] = findx();  
f1 = figure;  
f2 = figure;  
f3 = figure;  
f4 = figure;  
plot(t,x1)  
title('Изменение x1');  
grid on;  
figure(f1)  
plot(t,x2)  
title('Изменение x2');  
grid on;  
figure(f2)  
k= 1:1:1001;  
plot(k,lam1)  
title('Изменение  $\lambda_1$ ');  
figure(f3)  
plot(k,lam2)  
title('Изменение  $\lambda_2$ ');  
figure(f4)  
[U_opt] = findUprav(N,lam2);  
f5= figure;  
plot(t,U_opt)  
figure(f5)
```

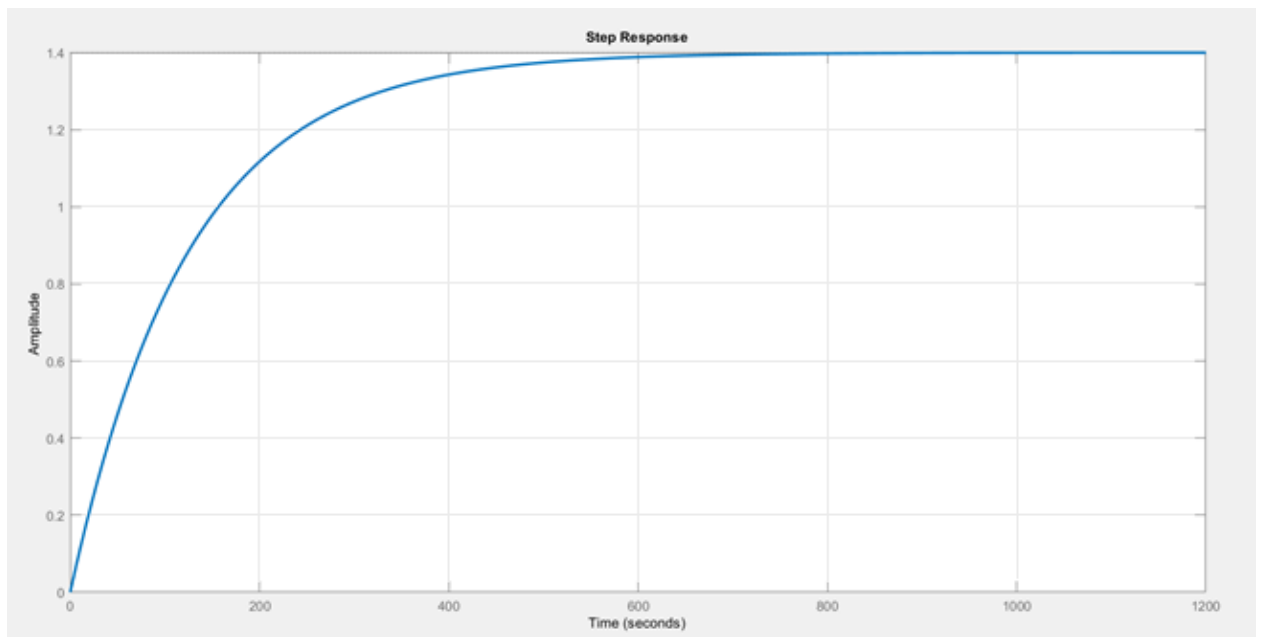


Рис.8.1.2. - Графік зміни μc

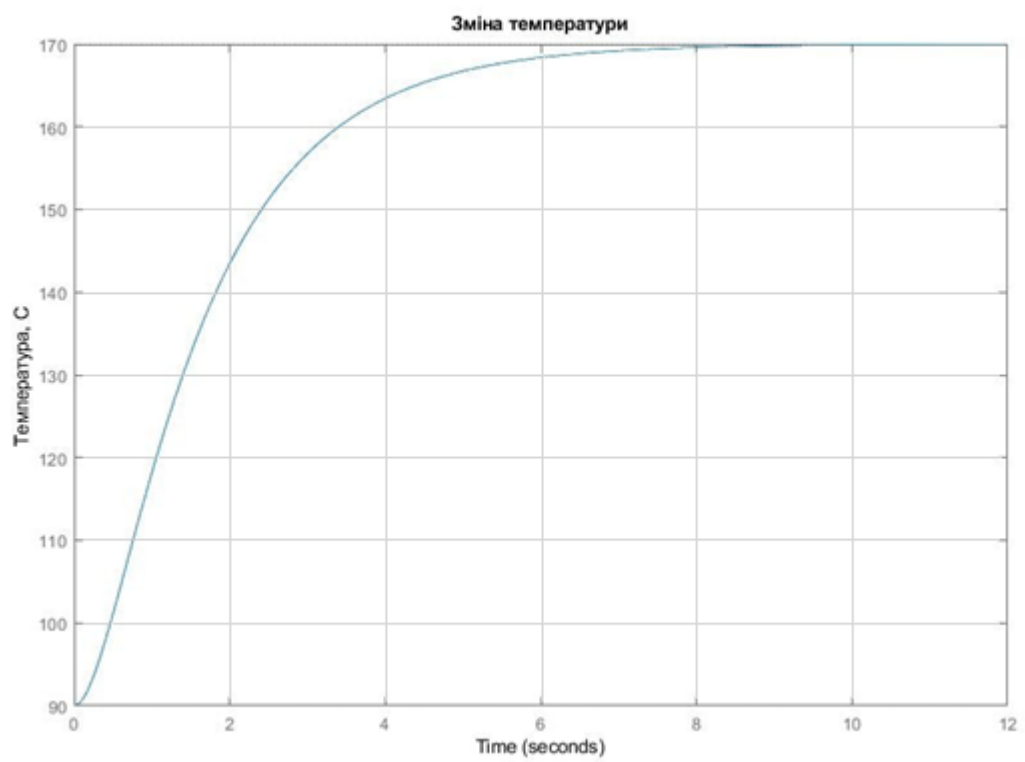


Рис. 8.1.3. - Графік зміни температури

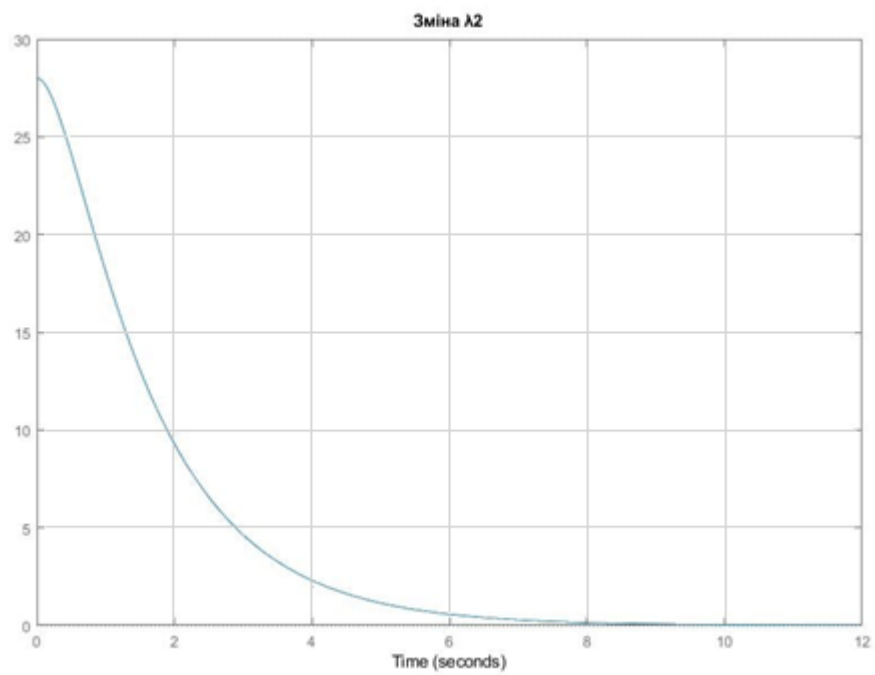


Рис. 8.1.4. - Графік зміни λ_1

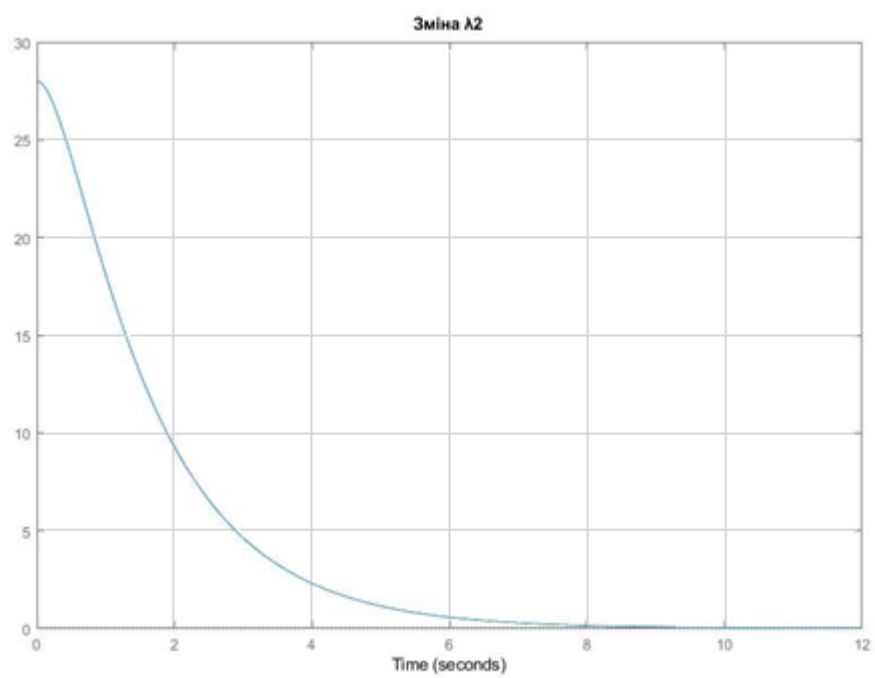


Рис.8.1.5. - Графік зміни λ_2

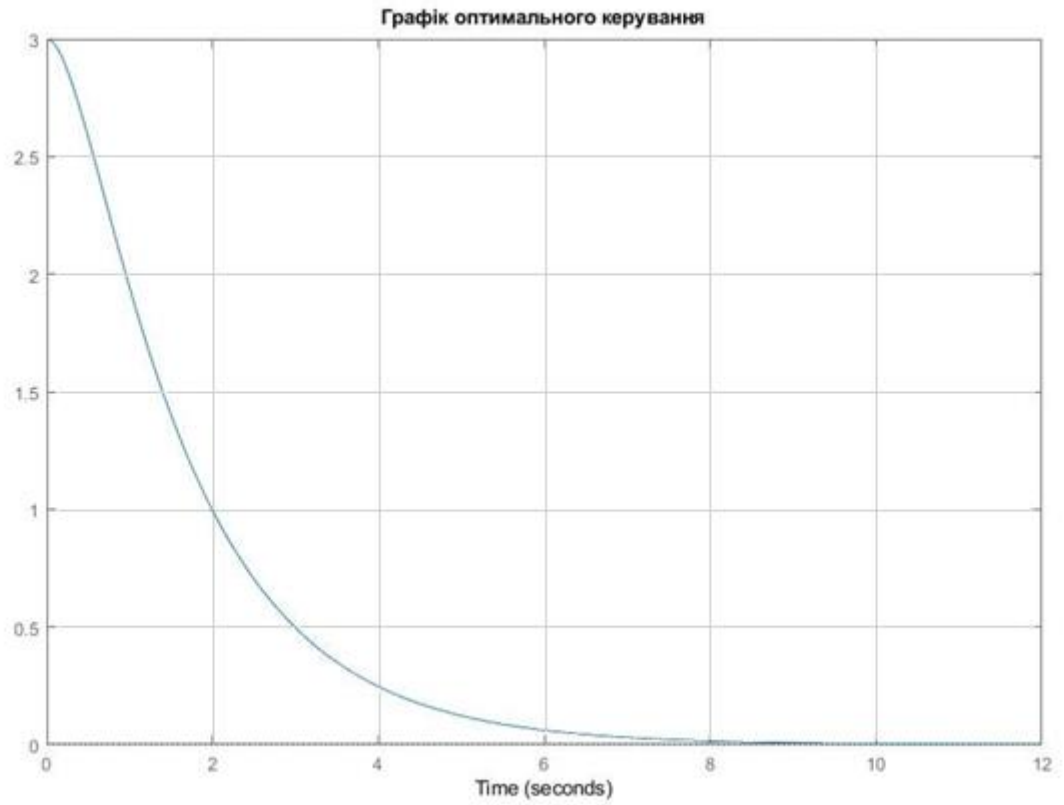


Рис. 8.1.6. – Графік оптимального керування G_0

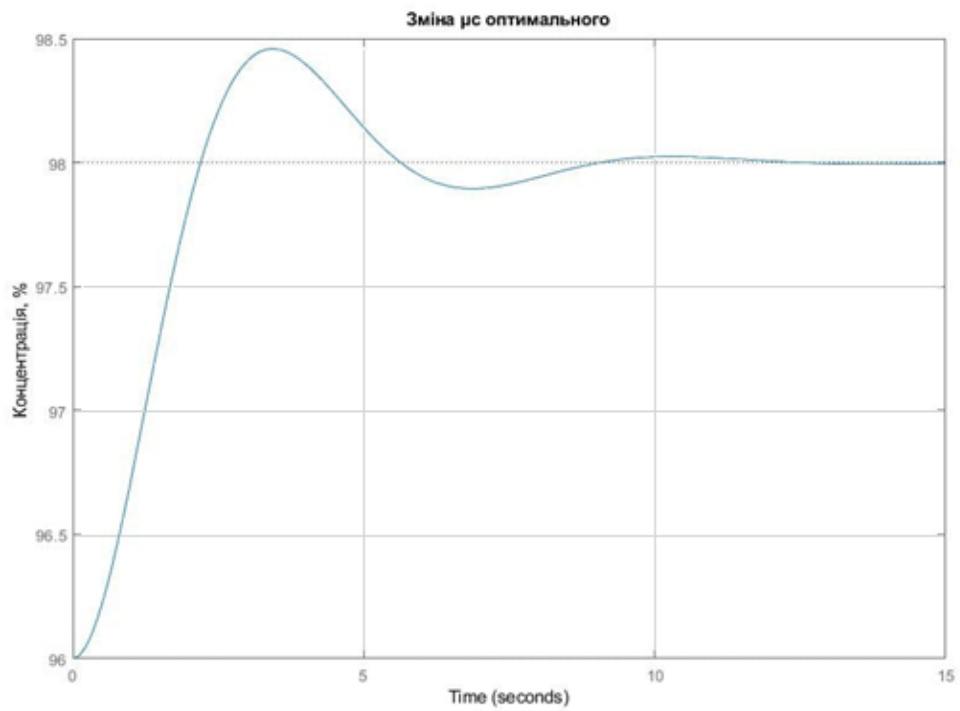


Рис. 8.1.7. Графік зміни x_{1opt}

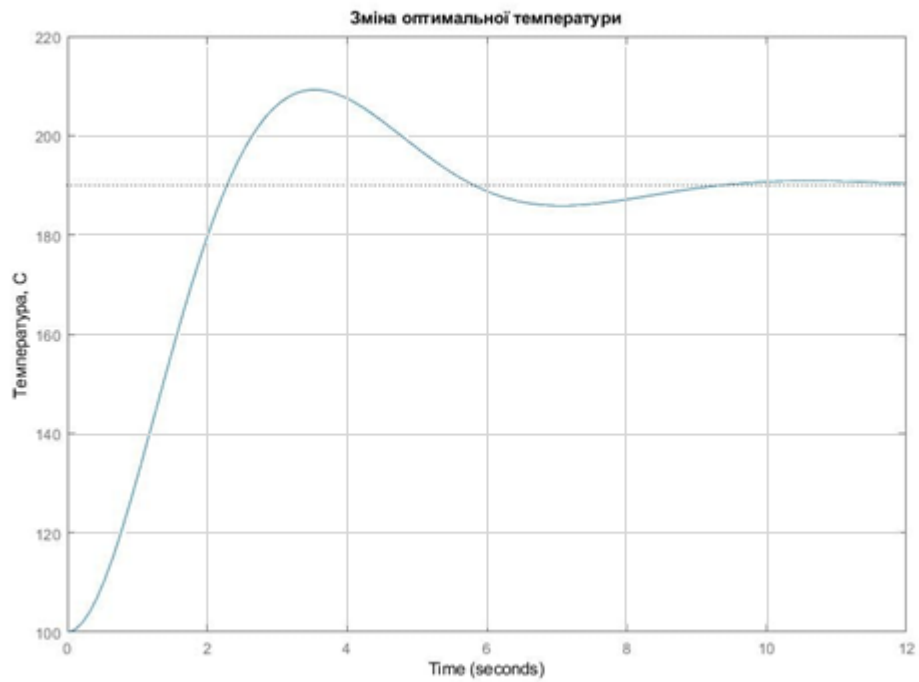


Рис. 8.1.8. - Графік зміни $x_{2\text{опт}}$

8.2. Проектування оптимального лінійно-квадратичного регулятора

В загальному випадку якість системи (приведеної на рис. 8.2.1.) керування можна характеризувати інтегральною оцінкою (1).

$$I = G[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t), t] dt \quad (8.2.1)$$

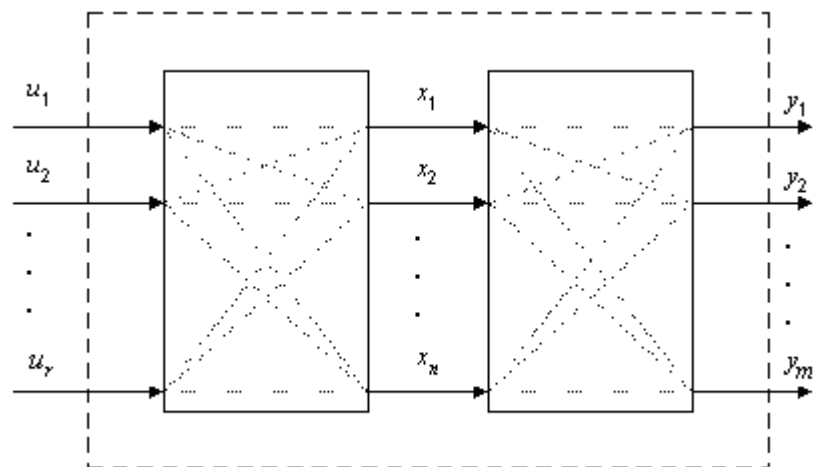


Рис. 8.2.1. Система керування

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU \quad - \quad \text{рівняння стану}; \quad (8.2.2)$$

$$Y = CX + DU \quad - \quad \text{рівняння виходу}. \quad (8.2.3)$$

Тут $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ – вектор змінних стану;

$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r]^T \in \mathfrak{R}^n$ – вектор керування;

$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T \in \mathfrak{R}^n$ – вектор параметрів, що змінюються;

A – характеристична матриця розміром $n \times n$; B – матриця розподілу керування розміром $n \times r$; C – матриця виходу розміром $m \times n$; D – матриця динаміки розміром $r \times r$. Вважається, що відомий початковий стан $X(t_0) = X_0$, де t_0 – початковий момент часу.

Потрібно забезпечити досягнення заданого цільового стану $X_d = 0$ з найменшими можливими витратами ресурсу керування (у випадку ненульового стану X_d приводиться до розгляду заміни вектора змінних стану на $X - X_d$). Якість керування визначається квадратичним критерієм якості:

$$J = \frac{1}{2} X(t_f)^T S_f X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (X^T Q X + U^T R U) dt, \quad (8.2.4)$$

де S_f, Q, R – матриці вагових коефіцієнтів.

Для розв'язку задачі запишемо гамільтоніан та рівняння для спряжених змінних:

$$H(X, U, \lambda, t) = \frac{1}{2} (X^T Q X + U^T R U) + \lambda^T (AX + BU), \quad (8.2.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -QX - A^T \lambda, \quad \lambda(t_f) = S_f X(t_f). \quad (6)$$

Необхідна умова $\partial H / \partial U = 0$ дає рівняння $RU + B^T \lambda = 0$, або

$$U = -R^{-1} B^T \lambda. \quad (8.2.7)$$

Підставляючи (8.2.7) в (8.2.2), (8.2.6), отримаємо систему:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= AX - BR^{-1}B^T \lambda, \quad X(t_0) = X_0; \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -QX - A^T \lambda, \quad \lambda(t_f) = S_f X(t_f).\end{aligned}\tag{8.2.8}$$

Дана система визначає лінійну доточкову крайову задачу, для розв'язання якої застосуємо *перетворення Ріккати*:

$$\lambda = PX, \tag{8.2.9}$$

де P – симетрична ($p_{ij} = p_{ji}$) додано визначена ($n \times n$) матриця. Скористувавшись (9), з (8) отримаємо:

$$\frac{dX}{dt} = AX - BR^{-1}B^T PX, \tag{8.2.10}$$

$$\frac{dP}{dt} + \frac{dX}{dt} P = -QX - A^T PX. \tag{11}$$

Тепер замінимо dX/dt в (8.2.11) його виразом (8.2.10):

$$\left(\frac{dP}{dt} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q \right) X = 0 \tag{8.2.12}$$

Для того щоб дане рівняння виконувалось при довільних X , необхідно, щоб обертався в нуль матричний множник при X . Таким чином, отримуємо *рівняння Ріккати*:

$$\frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q, \quad P(t_f) = S_f. \tag{8.2.13}$$

Умова трансверсальності отримається з порівняння (8.2.8) та (8.2.9). *Оптимальний закон керування із зворотнім зв'язком за станом*, або просто оптимальний лінійний регулятор, задається виразом:

$$U = -K(t)X, \tag{8.2.14}$$

де $K(t) = R^{-1}B^T P$.

Рівняння Ріккати (8.2.13) є матричним диференціальним нелінійним рівнянням. Аналітичний розв'язок рівняння такого виду ускладнений. Тому на практиці застосовують числові методи розв'язку (інтегрування) цих

рівнянь: прямий метод інтегрування, метод Калмана-Енглара, метод діагоналізації, метод Ньютона-Рафсона і інші.

Виведені залежності, визначають лінійний оптимальний регулятор з матричним коефіцієнтом підсилення K . Цей регулятор мінімізує критерій (8.2.4) на траєкторіях системи (8.2.2), при цьому:

1. Матричний коефіцієнт підсилення K може бути визначеним поза контуром керування, так як він не залежить ні від X , ні від U ; для визначення K необхідно розв'язати (8.2.13) в зворотному часі.
2. При постійних матрицях A, B, R, Q і при $t \rightarrow \infty$, P прямує до усталеного значення, яке можна знайти розв'язавши алгебраїчне нелінійне матричне рівняння:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (8.2.15)$$

Це в свою чергу забезпечує сталість матричного коефіцієнту підсилення регулятора K .

3. Пояснимо смисл критерію якості (8.2.4). Зрозуміло, що квадратичне зваження кінцевого стану дозволяє досягнути бажаної якості керування, але квадратичне зваження керування не так обґрунтовано, особливо якщо вартість ресурсів не велика. В деяких випадках квадратичне зваження заміняє собою явні обмеження на величину керуючих дій, та дозволяє отримати оптимальний закон зворотного зв'язку в аналітичному вигляді. Крім того, завдання занадто великих вагових матриць R викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а занадто малих – призводить до дуже великих значень U . Основним обмеженням являються вимоги додатної визначеності R і неможливість завдання явних обмежень на X, U .
4. Вводячи більш загальний, ніж (8.2.4), критерій якості

$$J = \frac{1}{2} X(t_f)^T S_f X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (X^T Q X + U^T R U + 2X^T N U) dt, \quad (8.2.16)$$

в якому враховуються взаємозв'язки між керуваннями та станом, можна показати, що оптимальний регулятор визначається, як і раніше, виразом (8.2.4) з коефіцієнтом підсилення

$$K = R^{-1} (B^T P + N^T) \quad (8.2.17)$$

причому P визначається рівнянням Ріккати:

$$\frac{dP}{dt} = -A^T P - PA - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) - Q, \quad P(t_f) = S_f. \quad (8.2.18)$$

Це більш загальний вираз для оптимального закону зворотного зв'язку буде використано для синтезу нелінійних регуляторів.

Якщо $t \rightarrow \infty$ рівняння (8.2.18) набуває вигляду:

$$A^T P + PA - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) + Q = 0, \quad (8.2.19)$$

а критерій якості

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U + 2X^T N U) dt. \quad (8.2.20)$$

Вимоги, що до існування оптимального лінійно квадратичного регулятора:

- пара матриць $[A, B]$ має бути повністю керована;
- мають виконуватися нерівності $R > 0$, $Q - NR^{-1}N^T \geq 0$;
- пара матриць $[Q - NR^{-1}N^T, A - BR^{-1}N^T]$ не може мати спостережувані моди з власними значеннями на дійсній осі.

Слід відмітити, що при практичній реалізації алгоритмів оптимального керування часто не представляється можливим отримати оптимальні точнісні характеристики оптимізації. Це, найчастіше, обумовлене тим, що при побудові вихідної математичної моделі процесу керування звичайно використовують наближені чи апроксимуючі моделі, що враховують основні домінуючі зв'язки і в той же час відрізняються від реальних. В реальних умовах похибка алгоритмів оптимізації може зростати (особливо на великих інтервалах часу), що приведе до нестійкості алгоритмів оптимізації. Явище нестійкості алгоритмів оптимізації пов'язане з умовами реалізації рівняння Ріккаті, розв'язок якого губить властивість симетричності.

Приклад 3.

Розглянемо приклад для системи з одним входом і одним виходом третього порядку, що описується рівняннями у просторі стану:

$$\frac{dX}{dt} = A(X - Xd) + B(U - Ud), \quad X(0) = [-0,1 \quad 0,1 \quad 0,5]^T,$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -60 & -41 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

і квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^{\infty} \left((X - X_d)^T Q (X - X_d) + (U - U_d)^T R (U - U_d) \right) dt,$$

де $X_d = [0,3 \ 0,2 \ 0,5]^T$; $U_d = 0,3$; $Q = I$; $R = 1/2$.

Наведемо приклад програми для розв'язку цієї задачі з назвою "Lin_Reg".

```
function Lin_Reg
disp('Матриця A:')
A = [0 1 0; 0 0 1; -10 -60 -41] % Введення матриці A
disp('Матриця B:')
B = [0; 0; 2] % Введення матриці B
% Параметри критерія якості:
disp('Матриця Q:')
Q = eye(3) % Формування одиничної матриці
disp('Матриця R:')
R = 1/2 % Введення матриці R
disp('Матриця N:')
N = [] % Введення матриці N
disp('Вектор початкових умов X0:')
x0 = [-0.1 0.1 0.3]' % Завдання вектора початкових умов
disp('Вектор заданих значень відхилень Xd:')
xd = [0.3 0.2 0.5]' % Завдання вектора заданих значень відхилень
disp('Вектор заданих значень відхилень керування Ud:')
ud = 0.3 % Завдання відхилень значень керування
disp('Час спостереження tf:')
tf = 30 % Завдання часу спостереження
disp('довжина кроку dt:')
dt = 0.01 % Завдання довжини кроку
disp('кількість кроків n:')
n = tf/dt
[K P E] = lqr(A,B,Q,R,N); % Синтез регулятора
```



```

disp('Матриця зворотнього зв'язку K:'); K
disp('Розв'язок рівняння Ріккати P:'); P
disp('Власні значення замкненої системи E:'); E
% Визначення розмірності задачі
SA = size(A); SA = SA(1); SB = size(B); SB = SB(2);
% Формування векторів x u
x = zeros(SA,n); u = zeros(SB,n-1);
% Формування початкового стану
x(:,1) = x0;
% Знаходження оптимального керування u та змінних стану x
for i=1:n-1,
    u(:,i) = ud-K*(x(:,i)-xd);
    x(:,i+1) = (A*(x(:,i)-xd)+B*(u(:,i)-ud))*dt+x(:,i);
end
% Подова динаміки змінних стану
plot(0:dt:tf-dt,x), grid
title('динаміка руху змінних стану'); xlabel('час, t');
ylabel('Змінні стану, X(t)'); legend('x_1','x_2','x_3')
% Побудова вектора керування
figure(2)
plot(dt:dt:tf-dt,u), grid
title('динаміка зміни керування'); xlabel('час, t');
ylabel('керування, u(t)'); legend('u')

```

Результат виконання програми

Матриця A:

A =

$$\begin{matrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 -10 & -60 & -41
 \end{matrix}$$

Матриця B :

$B =$

0

0

2

Матриця Q :

$Q =$

$1 \quad 0 \quad 0$

$0 \quad 1 \quad 0$

$0 \quad 0 \quad 1$

Матриця R :

$R =$

0.5000

Матриця N :

$N =$

$[]$

Вектор початкових умов x_0 :

$x_0 =$

-0.1000

0.1000

0.3000

Вектор заданих значень відхилень x_d :

$x_d =$

0.3000

0.2000

0.5000

Вектор заданих значень відхилень керування u_d :

$u_d =$

0.3000

Час спостереження t_f :

$t_f =$

30

Довжина кроку dt :

$dt =$

0.0100

Кількість кроків n :

$n =$

3000

Матриця зворотного зв'язку:

$K =$

0.1962 0.1760 0.0530

Розв'язок рівняння Ріккати:

$P =$

3.3996 2.1483 0.0490

2.1483 2.5551 0.0440

0.0490 0.0440 0.0133

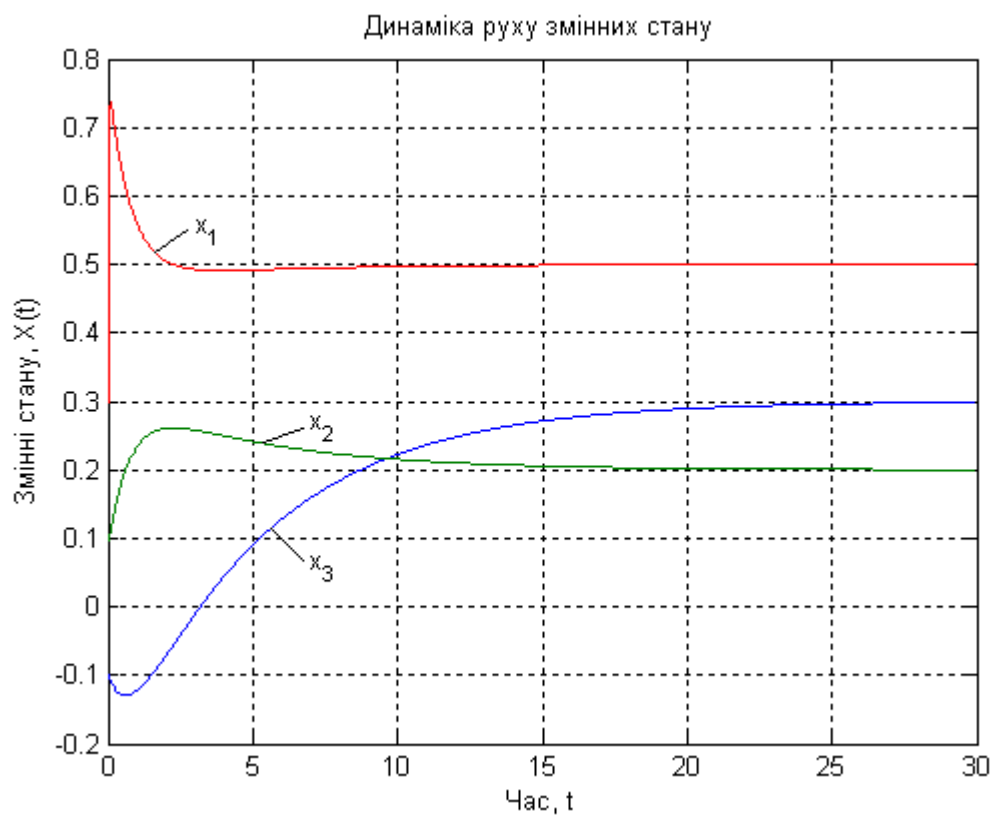
Власні значення замкненої системи:

$E =$

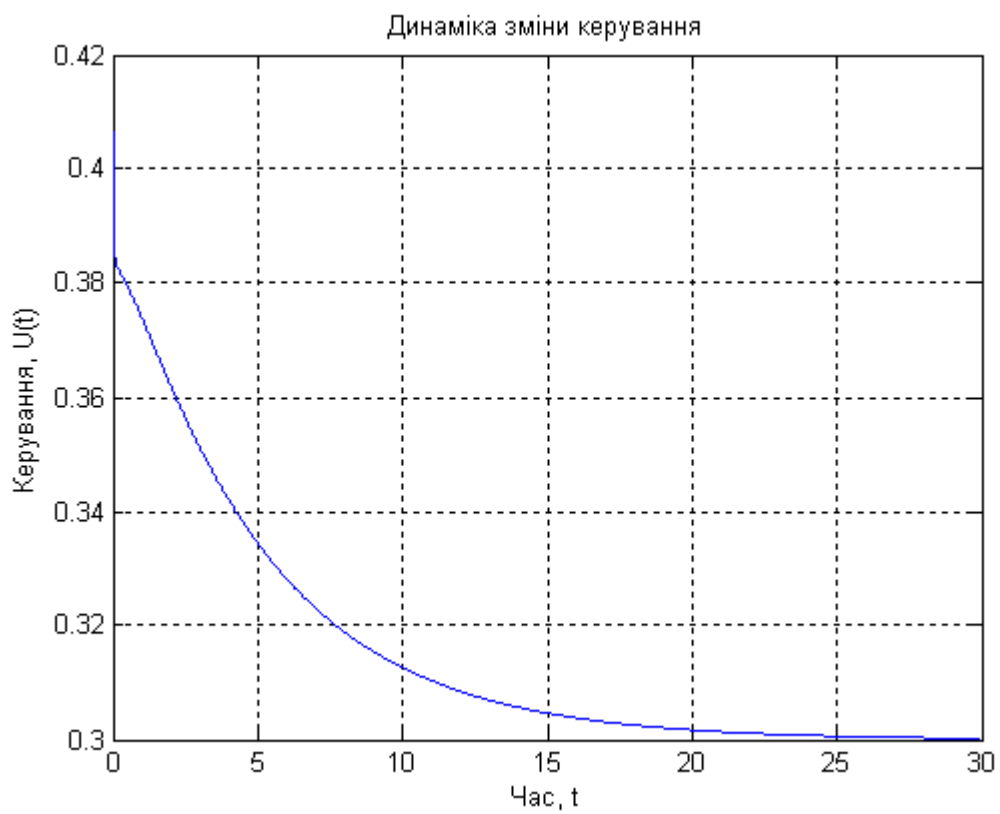
-39.5881

-1.3188

-0.1990



а)



б)

Рис. 8.2.2. Динаміка руху змінних стану а) і керування б)

Досліджували якість отриманого регулятора для наступних значеннях параметрів: $X(0) = [-0,1 \ 0,1 \ 0,5]^T$; $X_d = [0,3 \ 0,2 \ 0,5]^T$; $U_d = 0,3$; $Q = I$; $R = 1/2$; $N = 0$. Коефіцієнт підсилення K отриманий за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккаті. Виходи оптимального регулятора, показані на рис. 8.2.2 а). Оптимальне керування, представлене на рис. 8.2.2 б), забезпечує мінімальне значення статичної похибки для X_d , U_d за умови, що $t_f \rightarrow \infty$, причому R вибрано так щоб для $u(t)$ виконувалася фізична умова невід'ємності. Таким чином, якість отриманого регулятора суттєво залежить від вагових коефіцієнтів Q, R, N .

Розглянемо приклад порівняння системи з одним входом і одним виходом, третього порядку для звичайних систем і для систем з врахуванням зв'язку між станом та керуванням. Система описується рівняннями у просторі стану:

$$\frac{dX}{dt} = A(X - X_d) + B(U - U_d), \quad X(0) = [-0,1 \ 0,1 \ 0,3]^T,$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

і квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^{\infty} \left((X - X_d)^T Q (X - X_d) + (U - U_d)^T R (U - U_d) + 2(X - X_d)^T N (U - U_d) \right) dt,$$

де $X_d = [0,4 \ 0,2 \ 0,6]^T$; $U_d = 0,3$; $Q = I$; $R = 2$; $N = [1,1 \ 0,5 \ 0,4]^T$.

Наведемо приклад програми для розв'язку цієї задачі з назвою "Lin_RegN".

```
function Lin_RegN
disp('Матриця A:')
A = [0 1 0; 0 0 1; -3 -6 -4] % Введення матриці A
disp('Матриця B:')
B = [0 0 2]' % Введення матриці B
% Параметри критерію якості:
```

```

disp('Матриця Q:')
Q = eye(3) % Формування одиничної матриці
disp('Матриця R:')
R = 2 % Введення матриці R
disp('Матриця N:')
N = [1.1 0.5 0.4]' % Введення матриці N
disp('Вектор початкових умов x0:')
x0 = [-0.1 0.1 0.3]' % Завдання вектора початкових умов
disp('Вектор заданих значень відхилень xd:')
xd = [0.4 0.2 0.6]' % Завдання вектора заданих значень відхилень
disp('Вектор заданих значень відхилень керування ud:')
ud = 0.3 % Завдання відхилень значень керування
disp('Час спостереження tf:')
tf = 8 % Завдання часу спостереження
disp('Довжина кроку dt:')
dt = 0.001 % Завдання довжини кроку
disp('Кількість кроків n:')
n = tf/dt
disp('Синтез лінійного регулятора:')
[K P E] = lqr(A,B,Q,R); % Синтез регулятора
disp('Матриця зворотного зв'язку K:'); K
disp('Розв'язок рівняння Ріккаті P:'); P
disp('Власні значення замкненої системи E:'); E
disp('Синтез нелінійного регулятора:')
[Kn Pn En] = lqr(A,B,Q,R,N); % Синтез регулятора з нелінійною
складовою
disp('Матриця зворотного зв'язку Kn:'); Kn
disp('Розв'язок рівняння Ріккаті Pn:'); Pn
disp('Власні значення замкненої системи En:'); En
% Визначення розмірності задачі
SA = size(A); SA = SA(1); SB = size(B); SB = SB(2);
% Формування векторів x u
x = zeros(SA,n); u = zeros(SB,n-1); xn = zeros(SA,n); un = zeros(SB,n-1);
% Формування початкового стану
x(:,1) = x0; xn(:,1) = x0;

```

```

% Знаходження оптимального керування u та змінних стану x
for i=1:n-1,
    u(:,i) = ud-K*(x(:,i)-xd);
    x(:,i+1) = (A*(x(:,i)-xd)+B*(u(:,i)-ud))*dt+x(:,i);
    un(:,i) = ud-Kn*(xn(:,i)-xd);
    xn(:,i+1) = (A*(xn(:,i)-xd)+B*(un(:,i)-ud))*dt+xn(:,i);
end
% Побудова динаміки змінних стану
plot(0:dt:tf-dt,x), grid
hold on
plot(0:dt:tf-dt,xn,'--')
title('динаміка руху змінних стану'); xlabel('час, t');
ylabel('Змінні стану, X(t)');
legend('x_1','x_2','x_3','xn_1','xn_2','xn_3')
hold off
% Побудова вектора керування
figure(2)
plot(dt:dt:tf-dt,u), grid
hold on
plot(dt:dt:tf-dt,un,'--')
title('динаміка зміни керування'); xlabel('час, t');
ylabel('керування, U(t)'); legend('u','un')

```

Результат виконання програми

Матриця A:

$A =$

0	1	0
0	0	1
-3	-6	-4

Матриця B:

$$B =$$

$$0$$

$$0$$

$$2$$

Матриця Q :

$$Q =$$

$$1 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$

Матриця R :

$$R =$$

$$2$$

Матриця N :

$$N =$$

$$1.1000$$

$$0.5000$$

$$0.4000$$

Вектор початкових умов x_0 :

$$x_0 =$$

-0.1000

0.1000

0.3000

Вектор заданих значень відхилень x_d :

$x_d =$

0.4000

0.2000

0.6000

Вектор заданих значень відхилень керування u_d :

$u_d =$

0.3000

Час спостереження t_f :

$t_f =$

8

Довжина кроку dt :

$dt =$

$1.0000e-003$

Кількість кроків n :

$n =$

8000

Синтез лінійного регулятора:

Матриця зворотного зв'язку K :

$K =$

0.1583 0.2788 0.1860

Розв'язок рівняння Ріккаті P :

$P =$

1.8744	1.2503	0.1583
1.2503	2.1767	0.2788
0.1583	0.2788	0.1860

Власні значення замкненої системи E :

$E =$

-1.5642 + 0.4691i
-1.5642 - 0.4691i
-1.2436

Синтез нелінійного регулятора:

Матриця зворотного зв'язку K_n :

$K\eta =$

$0.5976 \quad 0.4726 \quad 0.3500$

Розв'язок рівняння Ріккати $P\eta$:

$P\eta =$

$1.5183 \quad 1.0589 \quad 0.0476$

$1.0589 \quad 2.0737 \quad 0.2226$

$0.0476 \quad 0.2226 \quad 0.1500$

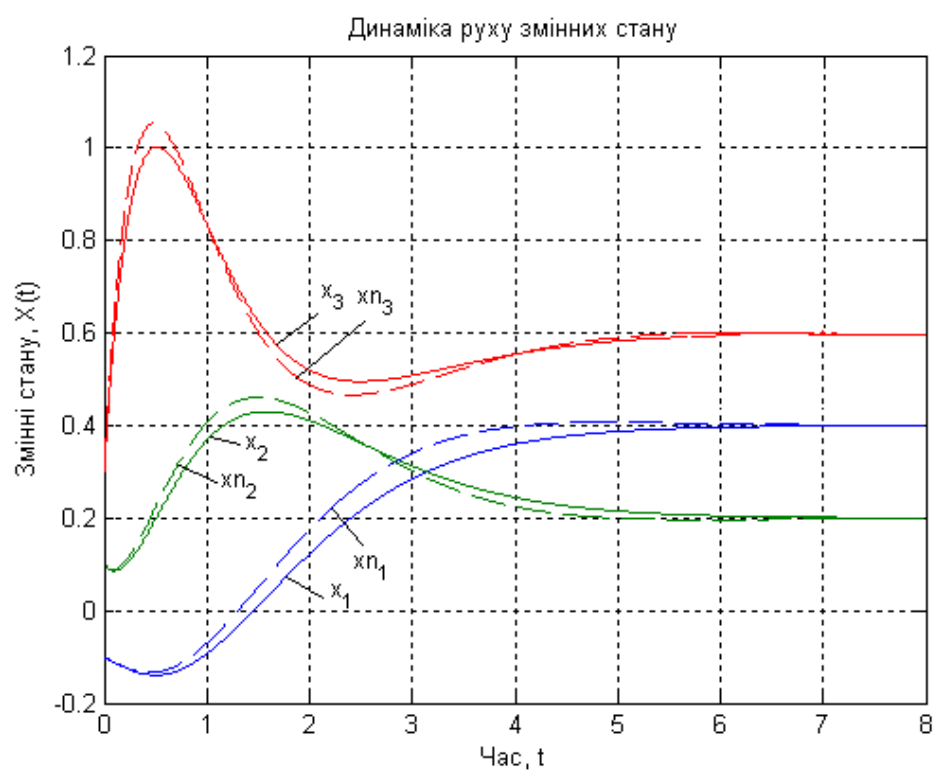
Власні значення замкненої системи $E\eta$:

$E\eta =$

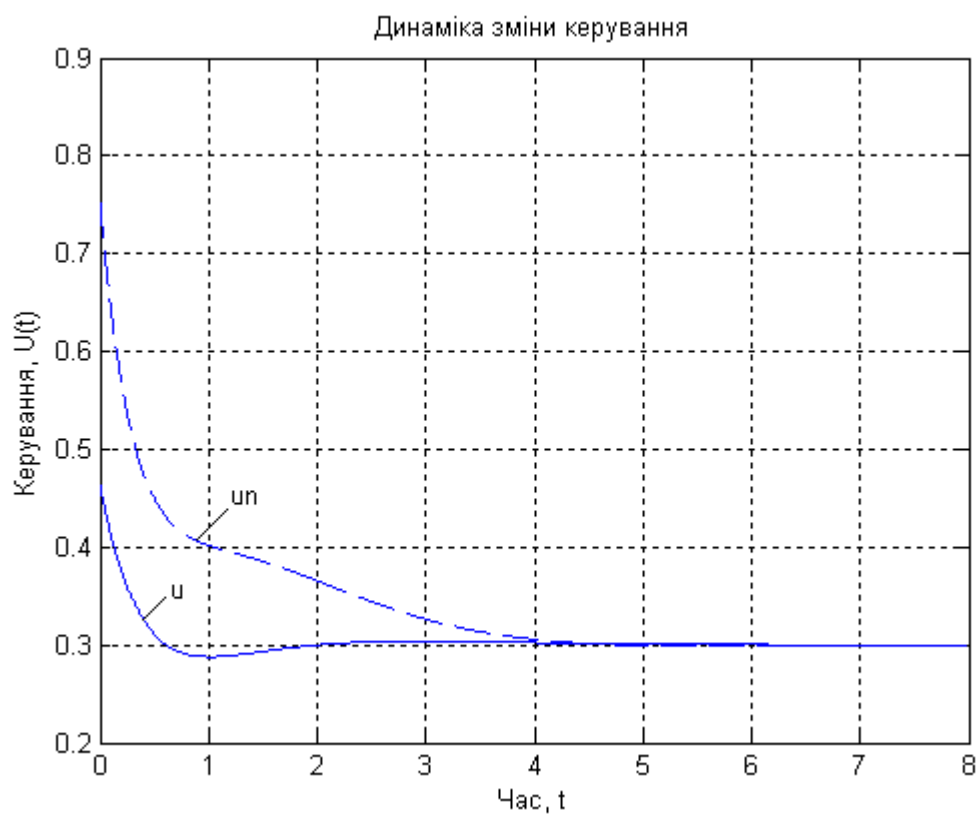
-2.7068

$-0.9966 + 0.7461i$

$-0.9966 - 0.7461i$



а)



б)

Рис.8.2.3. Динаміка руху змінних стану а) і керування б)

Дослідимо якість отриманих регуляторів для звичайної системи, та системи з урахуванням зв'язку між станом і керуванням (на графіках позначається штриховою кривою, а у програмі та формулах з індексом “ n ”) наступних значеннях параметрів:

$X(0) \equiv X_n(0) = [-0,1 \ 0,1 \ 0,3]^T$; $X_d \equiv X_{d_n} = [0,4 \ 0,2 \ 0,6]^T$;
 $U_d \equiv U_{d_n} = 0,3$; $Q = I$; $R = 2$; $N = [1,1 \ 0,5 \ 0,4]^T$. Коефіцієнт підсилення K отриманий за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккаті. Виходи оптимального регулятора, показані на рис. 8.2.3 а). Оптимальне керування, представлене на рис. 8.2.3 б), забезпечує мінімальне значення статичної похибки для $X_d \equiv X_{d_n}$, $U_d \equiv U_{d_n}$ за умови, що $t_f \rightarrow \infty$, причому R вибрано так щоб для $u(t)$ виконувалася фізична умова невід'ємності, а N вказує на наявність деякого взаємозв'язку між станом і керуванням. Як видно з графіків траєкторій змінних стану, якість регулятора з урахуванням взаємозв'язку між станом і керуванням по ряду параметрів краща, ніж без нього, та суттєво залежить від вагових коефіцієнтів Q, R, N .

Проектування оптимального лінійно-квадратичного регулятора за виходом системи

Для проектування лінійно-квадратичного регулятора по виходу системи, справедливі всі попередні до того твердження, окрім, що об'єкт керування описується рівняннями вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= AX + BU; \\ Y &= CX + DU; \end{aligned} \quad (8.2.21)$$

та критерій якості

$$J = \frac{1}{2} Y(t_f)^T S_f Y(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (Y^T Q Y + U^T R U + 2 Y^T N U) dt. \quad (8.2.22)$$

Додатково розв'язується наступне рівняння:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{N} \\ \bar{N}^T & \bar{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (8.2.23)$$

Вимоги, що до існування оптимального лінійно квадратичного регулятора:

- пара матриць $[A, B]$ має бути повністю керована;
- мають виконуватися нерівності $\bar{R} > 0$, $\bar{Q} - \bar{N}\bar{R}^{-1}\bar{N}^T \geq 0$;
- пара матриць $[\bar{Q} - \bar{N}\bar{R}^{-1}\bar{N}^T, A - B\bar{R}^{-1}\bar{N}^T]$ не може мати спостережувані моди з власними значеннями на дійсній осі.

Приклад 4.

Розглянемо прилад для системи з одним входом і одним виходом третього порядку, що описується рівняннями у просторі стану:

$$\frac{dX}{dt} = A(X - Xd) + B(U - Ud), \quad X(0) = [-0,1 \quad 0,1 \quad 0,5]^T,$$

$$Y - Yd = C(X - Xd) + D(U - Ud)$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -60 & -41 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]; \quad D = 0,$$

і квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^{\infty} \left((Y - Yd)^T Q (Y - Yd) + (U - Ud)^T R (U - Ud) \right) dt,$$

де $Xd = [0,1 \quad 0,2 \quad 0,3]^T$; $Yd = 0,5$; $Ud = 0,5$; $Q = I$; $R = 1/2$.

Наведемо приклад програми для розв'язку цієї задачі з назвою "Lin_Reg_Y".

```
function Lin_reg_Y;
A = [0 1 0; 0 0 1; -10 -60 -41] % Введення матриці A
B = [0; 0; 2] % Введення матриці B
C = [0 0 1] % Введення матриці C
D = 0 % Введення матриці D
```

```

% Параметри критерія якості:
disp('Матриця Q:')
Q = 1 % Введення матриці Q
disp('Матриця R:')
R = 1/2 % Введення матриці R
disp('Матриця N:')
N = [] % Введення матриці N
disp('Вектор початкових умов x0:')
x0 = [-0.1 0.1 0.5]' % Завдання вектора початкових умов
disp('Вектор заданих значень відхилень xd:')
xd = [0.1 0.2 0.3]' % Завдання вектора заданих значень відхилень
disp('Вектор заданих значень відхилень керування ud:')
ud = 0.25 % Завдання відхилень значень керування
disp('Вектор заданих значень відхилень вихідної величини yd:')
yd = 0.5 % Завдання відхилень значень вихідної величини
disp('Час спостереження tf:')
tf = 30 % Завдання часу спостереження
disp('довжина кроку dt:')
dt = 0.01 % Завдання довжини кроку
disp('Кількість кроків n:')
n = tf/dt
disp('Модель системи у просторі станів:')
Sys = ss(A,B,C,D) %Створення моделі системи у просторі станів
[K,P,E] = lqrg(A,B,C,D,Q,R,N); % Синтез регулятора
disp('Матриця зворотного зв'язку:'); K
disp('Розв'язок рівняння Ріккаті:'); P
disp('Власні значення замкненої системи:'); E
% Визначення розмірності задачі
SA = size(A); SA = SA(1); SB = size(B); SB = SB(2); SC = size(C); SC = SC(1);
% Формування векторів x u
x = zeros(SA,n); u = zeros(SB,n-1); y = zeros(SC,n-1);
% Формування початкового стану
x(:,1) = x0;
% Знаходження оптимального керування u, змінних стану x та виходу системи y

```



```

for i=1:n-1,
    u(:,i) = ud-k*(x(:,i)-xd);
    x(:,i+1) = (A*(x(:,i)-xd)+B*(u(:,i)-ud))*dt+x(:,i);
    y(:,i) = yd+c*(x(:,i)-xd);
end
% Побудова динаміки змінних стану
figure(1)
plot(0:dt:tf-dt,x), grid
title('динаміка руху змінних стану'); xlabel('час, t');
ylabel('Змінні стану, X(t)'); legend('x_1','x_2','x_3')
% Побудова виходу системи
figure(2)
plot(dt:dt:tf-dt,y), grid
title('динаміка виходу системи'); xlabel('час, t'); ylabel('Вихід, Y(t)'); legend('y')
% Побудова вектора керування
figure(3)
plot(dt:dt:tf-dt,u), grid
title('динаміка зміни керування'); xlabel('час, t');
ylabel('керування, U(t)'); legend('u')

```

Результат виконання програм

Матриця Q:

$$Q = 1$$

Матриця R:

$$R = 0.5000$$

Матриця N:

$$N = []$$

Вектор початкових умов x_0 :

$x_0 =$

-0.1000

0.1000

0.5000

Вектор заданих значень відхилень x_d :

$x_d =$

0.1000

0.2000

0.3000

Вектор заданих значень відхилень керування u_d :

$u_d =$

0.2500

Вектор заданих значень відхилень вихідної величини y_d :

$y_d =$

0.5000

Час спостереження tf :

$tf =$

30

Довжина кроку dt :

$dt =$

0.0100

Кількість кроків n:

$n =$

3000

Модель системи у просторі станів:

$a =$

	$x1$	$x2$	$x3$
$x1$	0	1	0
$x2$	0	0	1
$x3$	-10	-60	-41

$b =$

	$u1$
$x1$	0
$x2$	0
$x3$	2

$c =$

	$x1$	$x2$	$x3$
$y1$	0	0	1

$d =$

	$u1$
$y1$	0

Continuous-time model.

Матриця зворотнього зв'язку:

$K =$

-0.0000 0.0082 0.0489

Розв'язок рівняння Ріккати:

$P =$

0.0204	0.1223	-0.0000
0.1223	0.8176	0.0020
-0.0000	0.0020	0.0122

Власні значення замкненої системи:

$E =$

-39.5882
 -1.3180
 -0.1917

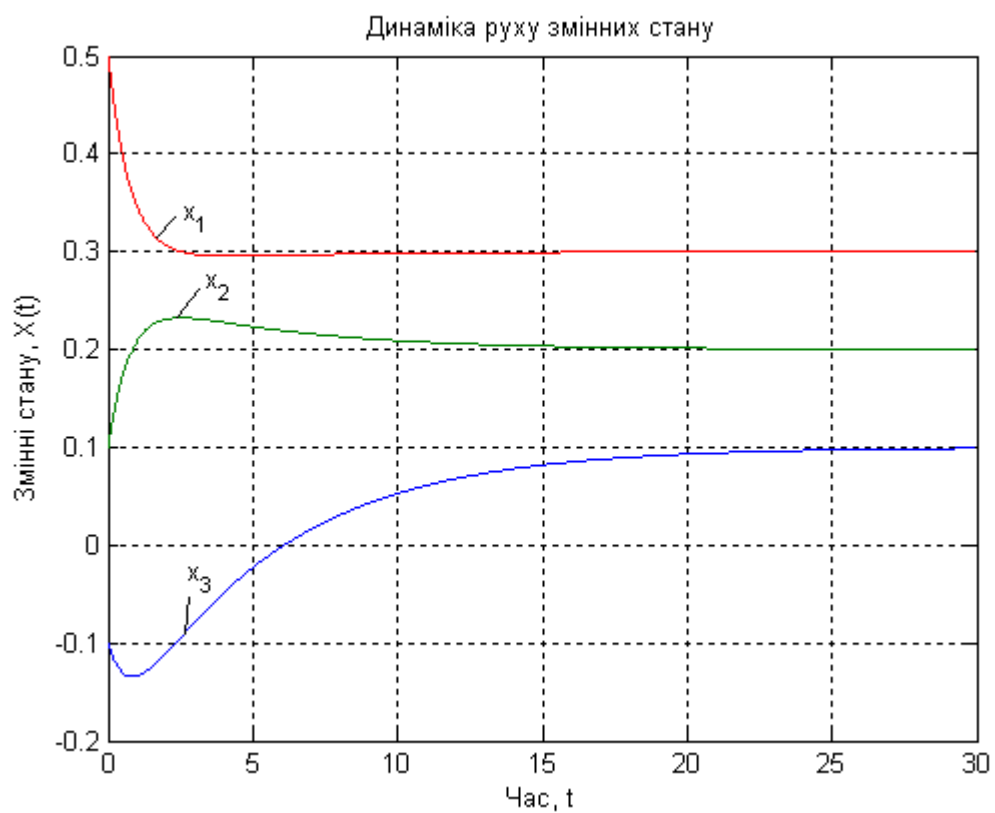
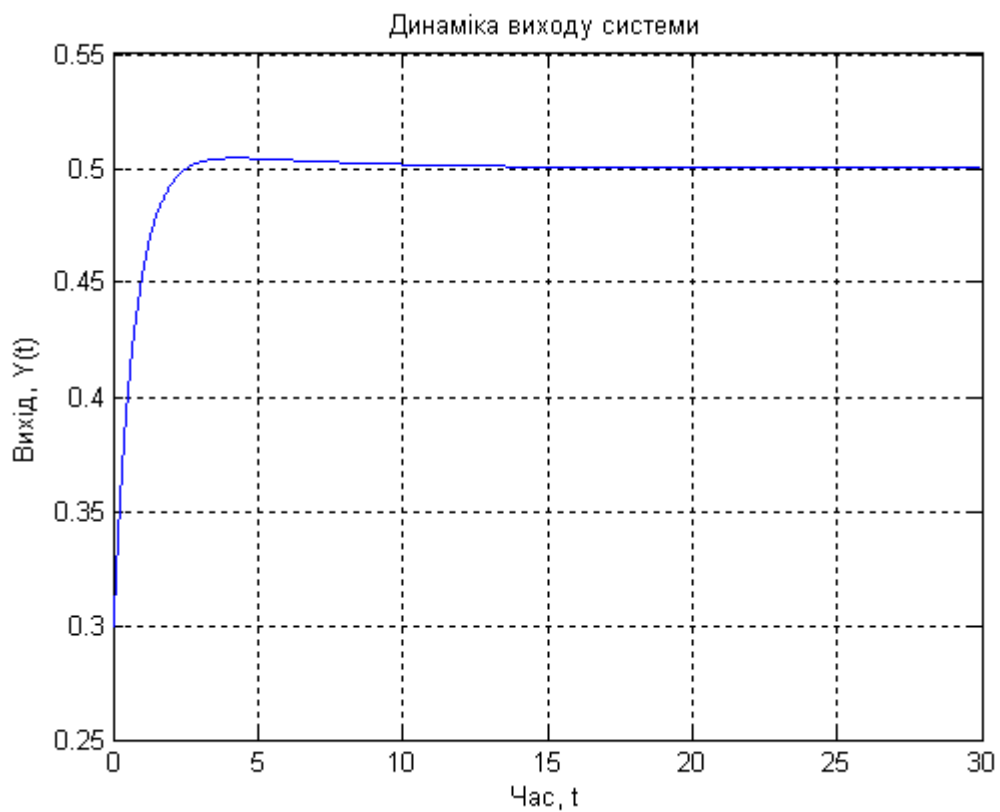
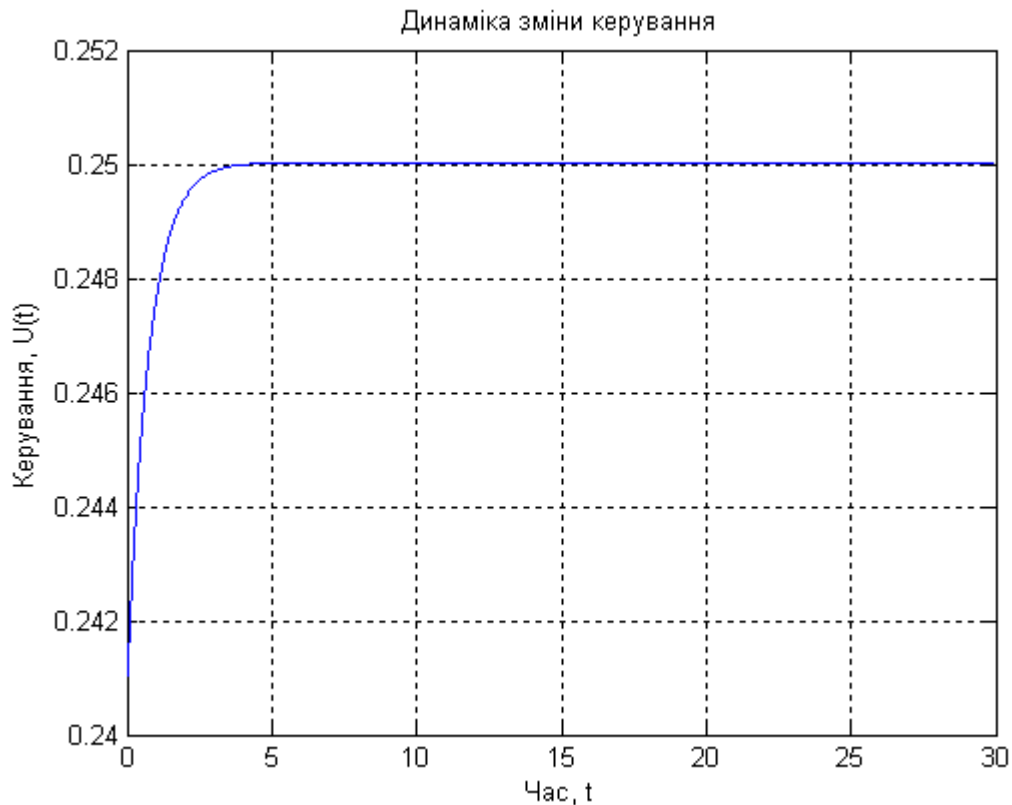


Рис. 8.2.4. Динаміка руху змінних стану



а)



б)

Рис.8.2.5. Динаміка виходу системи а) і керування б)

Досліджували якість отриманого регулятора для наступних значеннях параметрів: $X(0) = [-0,1 \ 0,1 \ 0,5]^T$; $X_d = [0,1 \ 0,2 \ 0,3]^T$; $Y_d = 0,5$; $U_d = 0,5$; $Q = I$; $R = 1/2$. Коефіцієнт підсилення K отриманий за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккати. Вихід оптимального регулятора, показан на рис. 8.2.4, змінні стану показані на рис. 8.2.5 а). Оптимальне керування, представлене на рис. 8.2.5 б), забезпечує мінімальне значення статичної похибки для X_d , Y_d , U_d за умови, що $t_f \rightarrow \infty$.

Розглянемо приклад порівняння системи з одним входом і одним виходом третього порядку для звичайних систем, і для систем з врахуванням зв'язку між станом та керуванням. Система описується рівняннями у просторі стану:

$$\frac{dX}{dt} = A(X - X_d) + B(U - U_d), \quad X(0) = [-0,1 \ 0,1 \ 0,3]^T$$

$$Y - Y_d = C(X - X_d) + D(U - U_d),$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & -4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = [0 \ 0 \ 1]; D = 0,$$

і квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^{\infty} \left((Y - Y_d)^T Q (Y - Y_d) + (U - U_d)^T R (U - U_d) + 2(Y - Y_d)^T N (U - U_d) \right) dt,$$

де $X_d = [0,4 \ 0,2 \ 0,6]^T$; $U_d = 0,3$; $Q = 1$; $R = 1/3$; $N = 0,2$.

Наведемо приклад програми для розв'язку цієї задачі з назвою "Lin_RegN_Y".

```
function Lin_RegN_Y
A = [0 1 0; 0 0 1; -5 -6 -4]; % Введення матриці A
B = [0 0 2]'; % Введення матриці B
C = [0 0 1]; % Введення матриці C
D = 0; % Введення матриці D
% Параметри критерія якості:
disp('Матриця Q:')
Q = 1 % Формування одиничної матриці
disp('Матриця R:')
R = 1/3 % Введення матриці R
disp('Матриця N:')
N = 0.2 % Введення матриці N
disp('Вектор початкових умов x0:')
x0 = [-0.1 0.1 0.3]' % Завдання вектора початкових умов
disp('Вектор заданих значень відхилень xd:')
xd = [0.4 0.2 0.6]' % Завдання вектора заданих значень відхилень
disp('Вектор заданих значень відхилень керування ud:')
ud = 0.3 % Завдання відхилень значень керування
disp('Вектор заданих значень відхилень вихідної величини yd:')
yd = 0.5 % Завдання відхилень значень вихідної величини
disp('Час спостереження tf:')
tf = 10 % Завдання часу спостереження
```



```

disp('довжина кроку dt:')
dt = 0.001 % Завдання довжини кроку
disp('кількість кроків n:')
n = tf/dt
disp('Модель системи у просторі станів:')
Sys = ss(A,B,C,D) %Створення моделі системи у просторі станів
disp('Синтез лінійного регулятора:')
[K P E] = lqrg(A,B,C,D,Q,R); % Синтез регулятора
disp('Матриця зворотного зв'язку K:'); K
disp('Розв'язок рівняння Ріккати P:'); P
disp('Власні значення замкненої системи E:'); E
disp('Синтез нелінійного регулятора:')
[Kn Pn En] = lqrg(A,B,C,D,Q,R,N); % Синтез регулятора з нелінійною
складовою
disp('Матриця зворотного зв'язку Kn:'); Kn
disp('Розв'язок рівняння Ріккати Pn:'); Pn
disp('Власні значення замкненої системи En:'); En
% Визначення розмірності задачі
SA = size(A); SA = SA(1); SB = size(B); SB = SB(2); SC = size(C); SC =
SC(1);
% Формування векторів x u y
x = zeros(SA,n); u = zeros(SB,n-1); y = zeros(SC,n-1); xn =
zeros(SA,n);
un = zeros(SB,n-1); yn = zeros(SC,n-1);
% Формування початкового стану
x(:,1) = x0; xn(:,1) = x0;
% Знаходження оптимального керування u та змінних стану x
for i=1:n-1,
    u(:,i) = ud-K*(x(:,i)-xd);
    x(:,i+1) = (A*(x(:,i)-xd)+B*(u(:,i)-ud))*dt+x(:,i);
    y(:,i) = yd+C*(x(:,i)-xd);
    un(:,i) = ud-Kn*(xn(:,i)-xd);
    xn(:,i+1) = (A*(xn(:,i)-xd)+B*(un(:,i)-ud))*dt+xn(:,i);
    yn(:,i) = yd+C*(xn(:,i)-xd);
end
% Побудова динаміки змінних стану

```

```

plot(0:dt:tf-dt,x), grid
hold on
plot(0:dt:tf-dt,xn,'--')
xlabel('Time'); ylabel('X(t)');
legend('x1','x2','x3','x1n','x2n','x3n')
hold off
% Побудова виходу системи
figure(2)
plot(dt:dt:tf-dt,y), grid
hold on
plot(dt:dt:tf-dt,yn,'--')
xlabel('Time'); ylabel('Y(t)'); legend('y','yn')
hold off
% Побудова вектора керування
figure(3)
plot(dt:dt:tf-dt,u), grid
hold on
plot(dt:dt:tf-dt,un,'--')
xlabel('Time'); ylabel('U(t)'); legend('u','un')
hold off

```

Результат виконання програми

Матриця Q:

$Q =$

1

Матриця R:

$R =$

0.3333

Матриця N :

$N =$

0.2000

Вектор початкових умов x_0 :

$x_0 =$

-0.1000

0.1000

0.3000

Вектор заданих значень відхилень x_d :

$x_d =$

0.4000

0.2000

0.6000

Вектор заданих значень відхилень керування u_d :

$u_d =$

0.3000

Вектор заданих значень відхилень вихідної величини y_d :

$y_d =$

0.5000

Час спостереження tf :

$tf =$

10

Довжина кроку dt :

$dt =$

$1.0000e-003$

Кількість кроків n :

$n =$

10000

Модель системи у просторі станів:

$a =$

	$x1$	$x2$	$x3$
$x1$	0	1	0
$x2$	0	0	1
$x3$	-5	-6	-4

$b =$

	$u1$
$x1$	0
$x2$	0
$x3$	2

$c =$

	$x1$	$x2$	$x3$
$y1$	0	0	1

$d =$

	$u1$
$y1$	0

Continuous-time model.

Синтез лінійного регулятора:

Матриця зворотного зв'язку K:

$K =$

-0.0000	0.5719	0.7517
-----------	----------	----------

Розв'язок рівняння Ріккати P:

$P =$

0.4766	0.6264	-0.0000
0.6264	1.2763	0.0953
-0.0000	0.0953	0.1253

Власні значення замкненої системи E:

$E =$

-4.0421

$-0.7307 + 0.8385i$

$-0.7307 - 0.8385i$

Синтез нелінійного регулятора:

Матриця зворотного зв'язку K_p :

$K_p =$

$0.0000 \quad 0.4154 \quad 1.1329$

Розв'язок рівняння Ріккати P_p :

$P_p =$

$0.3461 \quad 0.4441 \quad 0.0000$

$0.4441 \quad 0.9667 \quad 0.0692$

$0.0000 \quad 0.0692 \quad 0.0888$

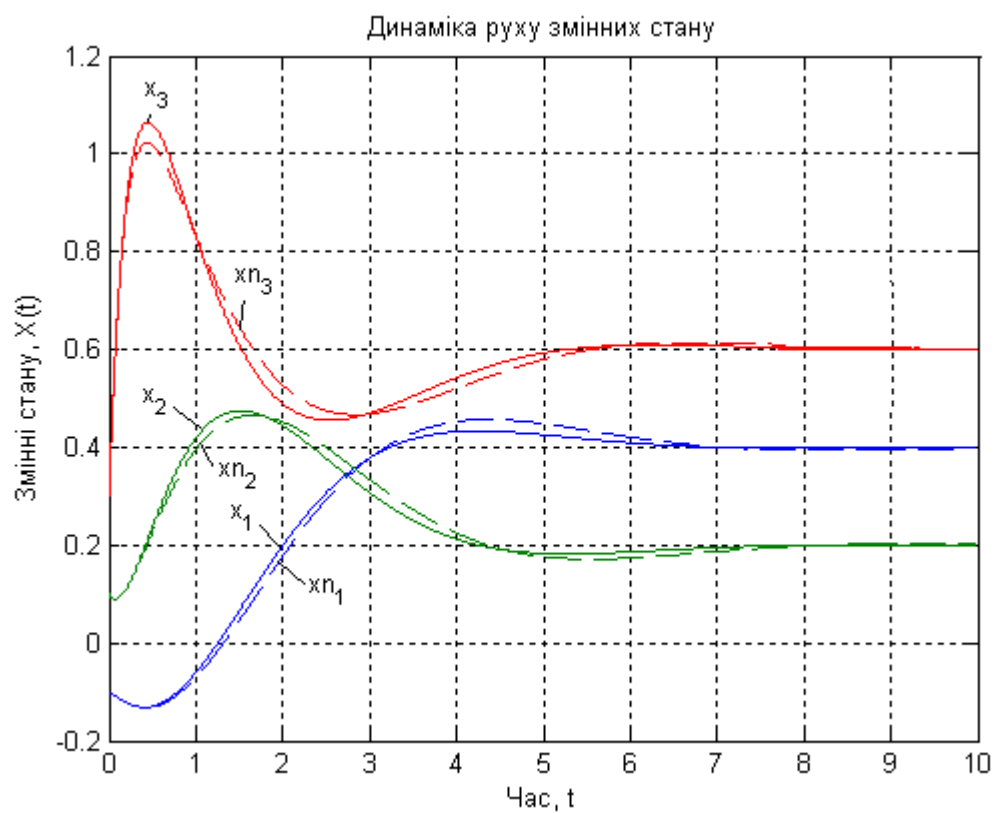
Власні значення замкненої системи E_p :

$E_p =$

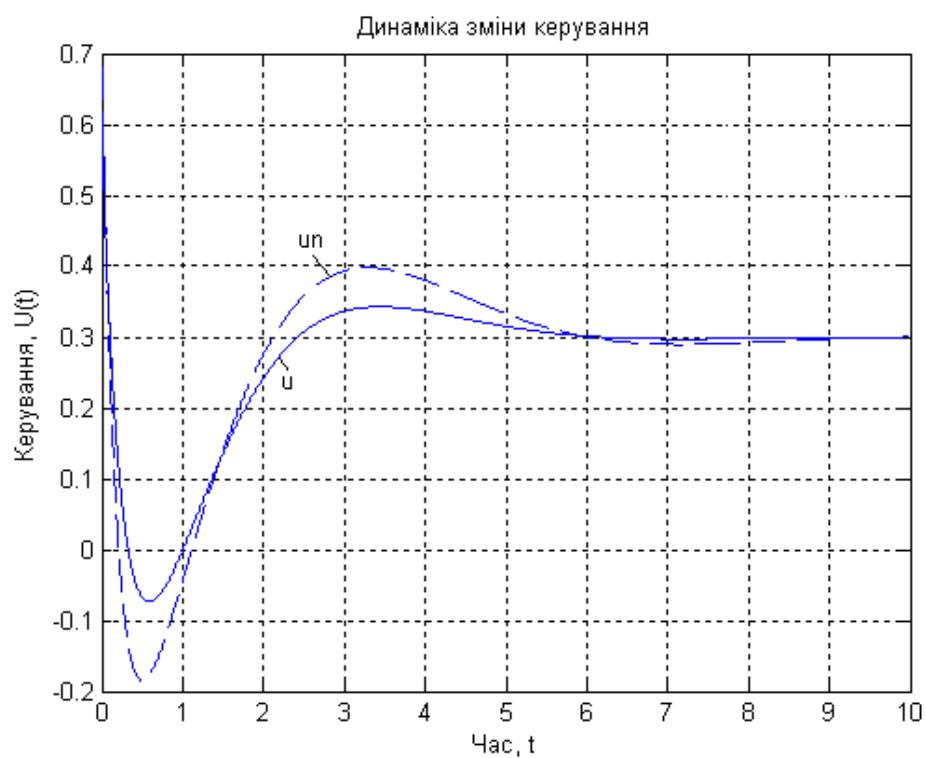
-5.1231

$-0.5714 + 0.8059i$

$-0.5714 - 0.8059i$



а)



б)

Рис. 8.2.6. Динаміка руху змінних стану а) і керування б)

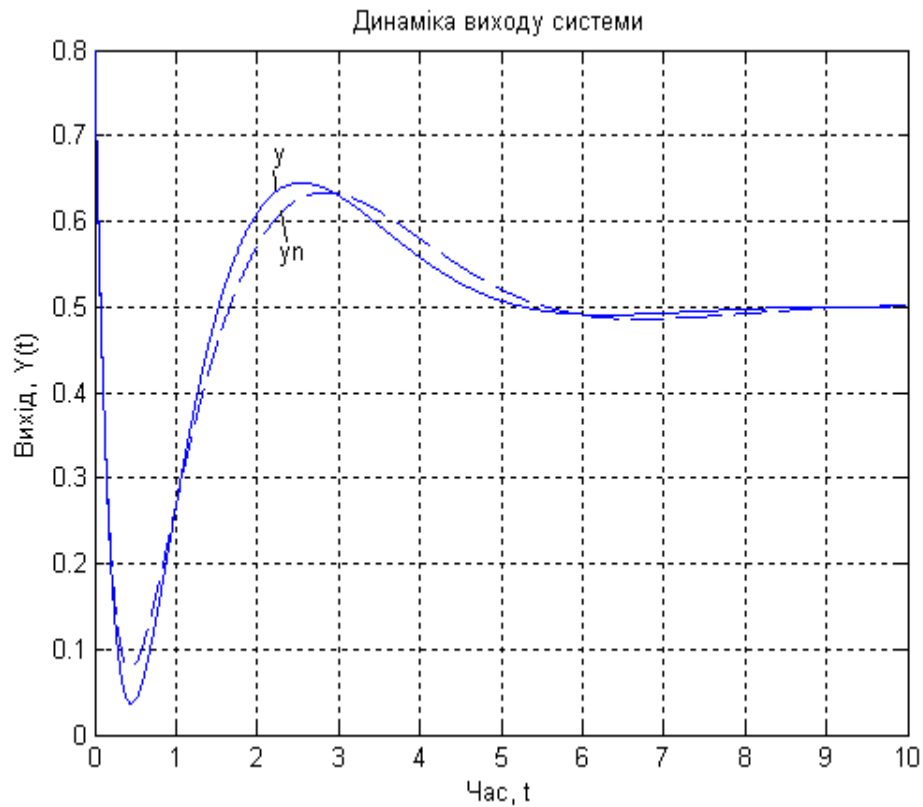


Рис. 8.2.7. Динаміка виходу системи

Досліджували якість отриманих регуляторів для звичайної системи та системи з урахуванням зв'язку між станом і керуванням (на графіках позначається штриховою кривою, а у програмі та формулах з індексом “ n ”) наступних значеннях параметрів:

$$X(0) \equiv X_n(0) = [-0,1 \quad 0,1 \quad 0,3]^T; Xd \equiv Xd_n = [0,4 \quad 0,2 \quad 0,6]^T;$$

$Ud \equiv Ud_n = 0,3$; $Q = 1$; $R = 1/3$; $N = 0,2$. Коефіцієнт підсилення K отриманий за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккаті. Виходи оптимального регулятора, показані на рис. 8.2.7, змінні стану показані на рис. 8.2.6 а). Оптимальне керування представлене на рис. 8.2.6 б). Як видно з графіків динаміки виходу системи з урахуванням зв'язку між станом і керуванням, дещо менше перерегулювання ніж для звичайної системи.

Проектування оптимального лінійно-квадратичного регулятора з інтегральною складовою

Відмічено, що задачі синтезу оптимального в квадратичному значенні закону керування для лінійної системи, мають розв'язки в вигляді лінійних регуляторів. Такі регулятори дозволяють звести до нуля з плином часу вплив на вихід об'єкту, при ненульових початкових умов, чи короткострокових імпульсних впливів. Але у випадку постійних чи повільно змінюючих вхідних впливів, такі регулятори не можуть забезпечити вимоги рівності нулю відхилень регулюючих величин від заданих значень. Для того, щоб вони задовольняли такій вимозі, закон керування повинен мати не одну, а дві складові, одна з котрих залежить від вектора стану, а друга – від інтеграла вектора стану.

Тому, бажано переформулювати постановку задачі синтезу таким чином, щоб у керуванні з'явилась інтегральна складова, яка знижує похибки керування.

Одним способом є безпосереднє введення похідної сигналу керування в критерій якості:

$$J = \frac{1}{2} X(t_f)^T S X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[X^T Q X + \left(\frac{dU}{dt} \right)^T R \frac{dU}{dt} + 2 X^T N \frac{dU}{dt} \right] dt. \quad (8.2.24)$$

При цьому необхідно продиференціювати рівняння динаміки:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = A \frac{dX}{dt} + B \frac{dU}{dt} \quad (8.2.25)$$

Після заміни змінних

$$V = \frac{dU}{dt}; \quad W_1 = X; \quad W_2 = \frac{dX}{dt}; \quad W = [W_1 \quad \vdots \quad W_2]^T \quad (8.2.26)$$

перейдемо до рівняння:

$$\frac{dW}{dt} = A_1 W + B_1 V, \quad (8.2.27)$$

$$\text{де } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}$$

та критерію якості

$$J = \frac{1}{2} [W^T S_1 W]_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [W^T Q_1 W + V^T R V + 2W^T N V] dt, \quad (8.2.28)$$

$$\text{де } Q_1 = \begin{bmatrix} Q & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}; S_1 = \begin{bmatrix} S & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Вираз для оптимального закону керування набуде вигляду:

$$V = -KW = -[K_1 \quad \vdots \quad K_2] \begin{bmatrix} W_1 \\ \cdots \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (8.2.29)$$

або через вихідні змінні

$$U = -K_2 X - \int_0^\infty \left(K_1 - \frac{dK_2}{dt} \right) X dt, \quad (8.2.30)$$

що складає лінійний регулятор з інтегральною складовою.

В усталеному стані K_1 та K_2 не залежать від часу і оптимальний регулятор прийме вигляд:

$$U = -K_2 X - K_1 \int_0^\infty X dt, \quad (8.2.31)$$

тобто лінійний регулятор з інтегральною складовою.

Приклад 5.

Розглянемо приклад для системи з одним входом і одним виходом третього порядку, що описується рівняннями у просторі стану:

$$\frac{dX}{dt} = A(X - Xd) + B(U - Ud), \quad X(0) = [-0,1 \quad 0,1 \quad 0,5]^T,$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

і квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^{\infty} \left[(X - Xd)^T Q (X - Xd) + \left(\frac{dU}{dt} \right)^T R \frac{dU}{dt} \right] dt,$$

де $Xd = [0,1 \quad 0,2 \quad 0,3]^T$; $Ud = 0,3$; $Q = I$; $R = 1/2$.

Наведемо приклад програми для розв'язку цієї задачі з назвою "Lin_Reg_Int".

```
function Lin_reg_Int
disp('Матриця A:')
A = [0 1 0; 0 0 1; -1 -6 -4] % Введення матриці A
disp('Матриця B:')
B = [0; 0; 2] % Введення матриці B
% Параметри критерія якості:
disp('Матриця Q:')
Q = 1/20000*eye(3) % Формування одиничної матриці
disp('Матриця R:')
R = 1/2 % Введення матриці R
disp('Матриця N:')
N = [] % Введення матриці N
disp('Вектор початкових умов x0:')
x0 = [0.1 0.1 0.1]' % Завдання вектора початкових умов
disp('Вектор заданих значень відхилень Xd:')
xd = [0.1 0.2 0.3]' % Завдання вектора заданих значень відхилень
disp('Вектор заданих значень відхилень керування Ud:')
ud = 0.3 % Завдання відхилень значень керування
disp('час спостереження tf:')
```

```

tf = 30 % Завдання часу спостереження
disp('Довжина кроку dt:')
dt = 0.01 % Завдання довжини кроку
disp('Кількість кроків n:')
n = tf/dt
disp('Матриця A1:')
A1 = [zeros(3) eye(3); zeros(3) A] % Формування матриці A1
disp('Матриця B1:')
B1 = [zeros(3,1); B] % Формування матриці B1
disp('Матриця Q1:')
Q1 = [Q zeros(3); zeros(3) zeros(3)] % Формування матриці Q1
[K P E] = lqr(A1,B1,Q1,R,N); % Синтез регулятора
disp('Матриця зворотнього з'язку:'); K
disp('Розв'язок рівняння Ріккати:'); P
disp('Власні значення замкненої системи:'); E
% Визначення розмірності задачі
SA = size(A); SA = SA(1); SB = size(B); SB = SB(2); SK = size(K); SK = SK(2);
% Формування векторів x, u та v
x = zeros(SA,n); u = zeros(SB,n-1); v = zeros(SA,n);
% Формування початкового стану
x(:,1) = x0;
% Відокремлення пропорційної та інтегральної частин матриці K
for i=SK/2:SK,
    K2(i) = K(i);
end
for i=1:SK/2,
    K1(i) = K(i);
    K2(1) = [];
end
% Знаходження оптимального керування u та змінних стану x
for i=1:n-1,
    v(:,i) = v(:,i)+K1*x(:,i)*dt;
    u(:,i) = ud-K2*(x(:,i)-xd)+v(i);
    x(:,i+1) = (A*(x(:,i)-xd)+B*(u(:,i)-ud))*dt+x(:,i);

```

```

end
% Побудова динаміки змінних стану
plot(0:dt:tf-dt,x), grid
title('динаміка руху змінних стану'); xlabel('час, t');
ylabel('змінні стану, X(t)'); legend('x_1','x_2','x_3')
% Побудова вектора керування
figure(2)
plot(dt:dt:tf-dt,u), grid
title('динаміка зміни керування'); xlabel('час, t');
ylabel('керування, U(t)'); legend('u')

```

Результат виконання програми

Матриця A:

$A =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Матриця B:

$B =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Матриця Q:

$Q =$

$$1.0e-004 \cdot$$

0.5000	0	0
0	0.5000	0
0	0	0.5000

Матриця R :

$R =$

0.5000

Матриця N :

$N =$

$[\]$

Вектор початкових умов x_0 :

$x_0 =$

0.1000

0.1000

0.1000

Вектор заданих значень відхилень x_d :

$x_d =$

0.1000

0.2000

0.3000

Вектор заданих значень відхилень керування ud :

$ud =$

0.3000

Час спостереження tf :

$tf =$

30

Довжина кроку dt :

$dt =$

0.0100

Кількість кроків n :

$n =$

3000

Матриця $A1$:

$A1 =$

0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & -4 \end{matrix}$$

Матриця $B1$:

$$B1 =$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Матриця $Q1$:

$$Q1 =$$

$$1.0e-004 *$$

$$\begin{matrix} 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Матриця зворотного зв'язку:

$$K =$$

$$\begin{matrix} 0.0100 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0576 & 0.0382 & 0.0095 \end{matrix}$$

Розв'язок рівняння Ріккати:

$P =$

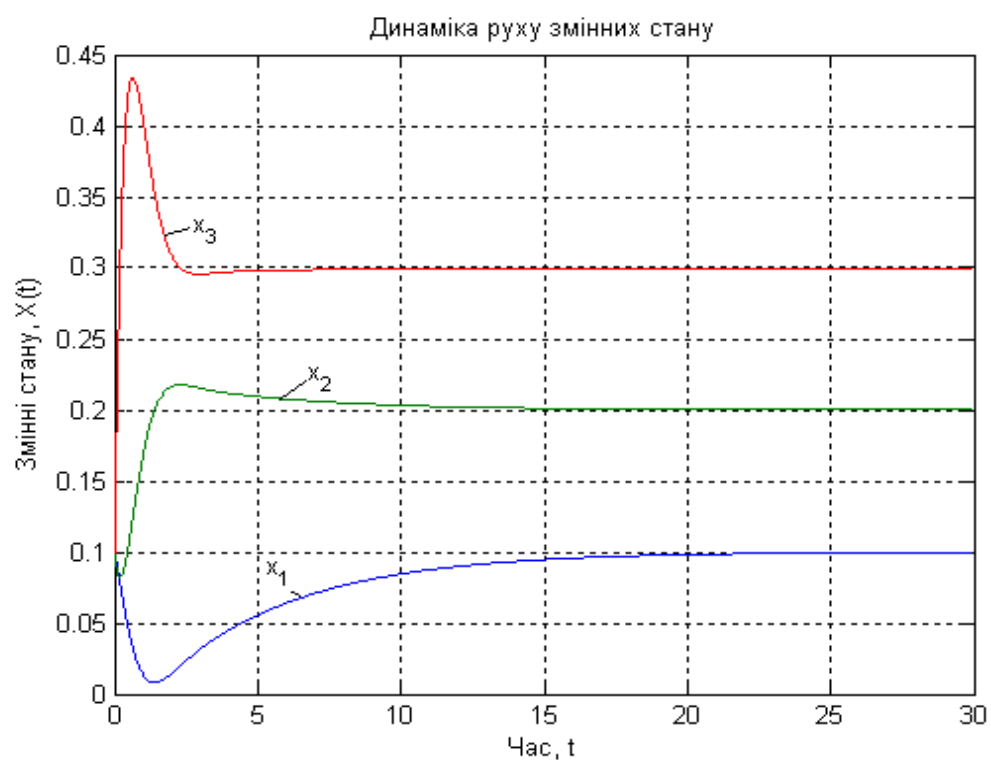
$1.0e+007 *$

0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0.2368	1.8843	-0.2368	-1.8843	-0.0000
0.0000	1.8843	0.0542	-1.8843	-0.0542	-0.0000
0.0000	-0.2368	-1.8843	0.2368	1.8843	0.0000
0.0000	-1.8843	-0.0542	1.8843	0.0542	0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

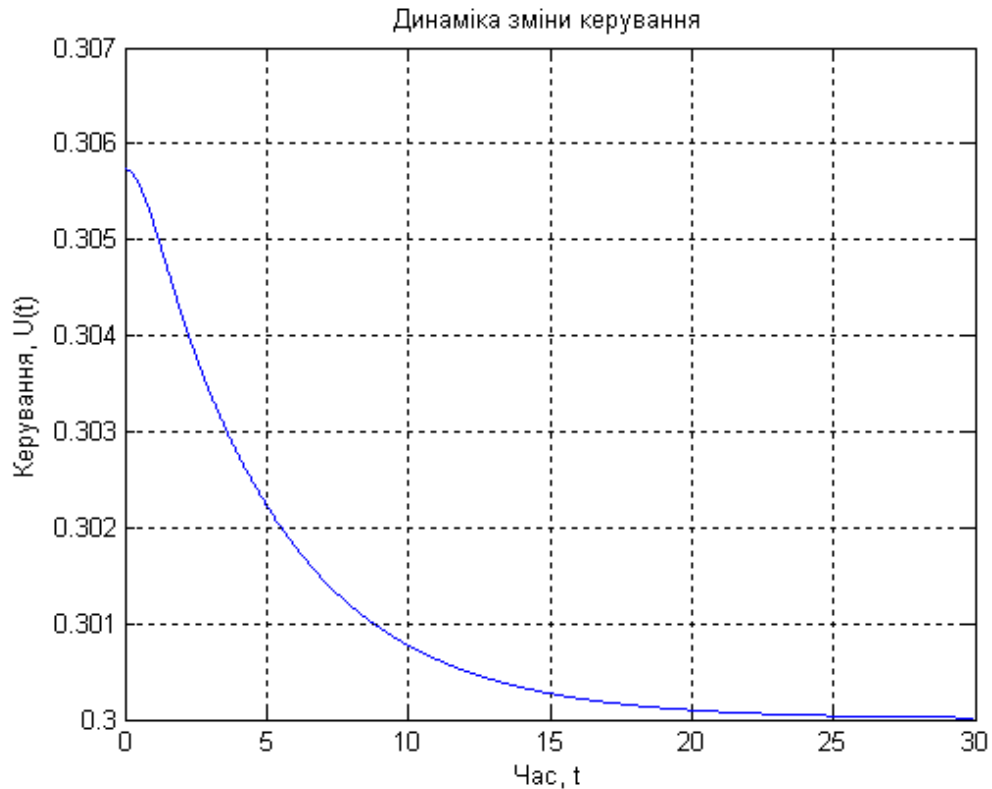
Власні значення замкненої системи:

$E =$

$-1.9053 + 1.2837i$
 $-1.9053 - 1.2837i$
 -0.1884
 -0.0201
 -0.0000
 -0.0000



a)



б)

Рис. 8.2.8. Динаміка руху змінних стану а) і керування б)

Отримано лінійний регулятор з інтегральною складовою для наступних значеннях параметрів: $X(0) = [-0,1 \ 0,1 \ 0,5]^T$; $X_d = [0,1 \ 0,2 \ 0,3]^T$; $U_d = 0,3$; $Q = I$; $R = 1/2$; $N = 0$. Коефіцієнт підсилення K отриманий за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккаті. Виходи оптимального регулятора, показані на рис. 8.2.8 а). Оптимальне керування представлено на рис. 8.2.8 б).

Якщо порівняти лінійний оптимальний регулятор з інтегральною складовою з звичайним ПІ – регулятором, то результати моделювання свідчать про значні переваги оптимального. Звичайні регулятори характеризуються значним перерегулюванням, в той же час оптимальна система практично не зазнає впливу збурень.

8.3. Розрахункові методи в задачах оптимального керування

Застосування градієнтних методів для розв'язання задач оптимального керування

Для лінійних систем з квадратичними функціями вартості отримана двоточкова крайова задача (ДТКЗ), яка є лінійною та може бути розв'язана шляхом використання принципу суперпозицій або шляхом переходу до нелінійного рівняння Ріккати, яке має обмеження лише у кінцевий момент часу. Для нелінійних систем відповідні ДТКЗ є нелінійними. Для розв'язання таких задач у загальному випадку повинні використовуватись ітеративні методи, наприклад градієнтні. Для нелінійних систем керування у загальному випадку неможливо оптимальний закон регулювання подати у вигляді добутку вектора стану та залежного від часу коефіцієнту підсилення. Більш того, оптимальне керування звичайно залежить, причому нелінійно, від початкового значення $\mathbf{X}(t_0)$ вектора стану. Це означає, що для більшості нелінійних систем керування доступними виявляються тільки такі закони керування, які не мають петлі зворотнього зв'язку.

Будемо мінімізувати функціонал

$$I = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] dt \quad (8.3.1)$$

для системи

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (8.3.2)$$

Почнемо з визначення гамільтоніана

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t] = F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] + \lambda^T(t) f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \quad (8.3.3)$$

Потім вважаємо умову:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} = -\lambda' = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{X}} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right] \lambda(t); \quad (8.3.4)$$

з граничною умовою

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial G[\mathbf{X}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{X}(t_f)}; \quad (8.3.5)$$

Отже, необхідно мінімізувати визначений гамільтоніан шляхом вибору значення \mathbf{U} . В таких випадках, коли будь-яке керування є припустимим, вихідним є рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}} = 0 = \frac{\partial F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}} \lambda(t) \quad (8.3.6)$$

Виберемо деяке керування замість невідомого оптимального керування; при цьому, звичайно, не буде виконуватись умова $d\mathbf{H}/d\mathbf{U}=0$. Задане обмеження у формі системи дифференціальних рівнянь (8.3.2) будемо розв'язувати відносно \mathbf{X} при цьому вибраному керуванні \mathbf{U} ; будемо також розв'язувати приєднану систему (8.3.4) в зворотному часі від t_f до t_0 з граничними умовами (8.3.5). Приріст першого порядку функції вартості (1) при відхиленні керування на $\Delta\mathbf{U}(t)$ від значення $\mathbf{U}(t)$, як це неважко помітити з (8.3.4), можна записати у вигляді :

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t]}{\partial \mathbf{U}(t)} \right\}^T \Delta \mathbf{U}(t) dt; \quad (8.3.7)$$

Якщо бажано забезпечити одержання найбільшого змінення ΔI , потрібно обчислити градієнт $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{U}$ і потім приріст $\Delta \mathbf{U}$ вибрати таким чином, щоб він був протилежним напрямку цього градієнту

$$\Delta \mathbf{U}(t) = -k(t) \frac{\partial \mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t]}{\partial \mathbf{U}(t)} \quad (8.3.8)$$

Відзначимо, що таке змінення забезпечує менше значення I при $k(t) > 0$, що і потрібно, тому що необхідно забезпечити мінімум значення I . Щоб почати пошук оптимального рішення, припустимо, що маємо деяке неоптимальне керування $U^N(t)$. В результаті розв'язку (8.3.2) знайдемо

$X^N(t)$, а із (8.3.4) з граничними умовами (8.3.5) отримаємо $\lambda^N(t)$. Потім у відповідності з (8.3.6) визначаємо вираз для $\partial H / \partial U^N(t)$, котрий приймає вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial U^N} = \frac{\partial F(X^N, U^N, t)}{\partial U^N} + \frac{\partial f^T(X^N, U^N, t)}{\partial U^N} \lambda^N \quad (8.3.9)$$

Після цього за (8.3.8) визначаємо приріст $\Delta U(t)$, де $k(t)$ - невід'ємна функція часу. Перший приріст ΔI^N функції I , якщо він є необхідним, обчислюється за формулою (8.3.7). Нове значення $U^{N+1}(t)$ керування U обчислюється звичайним чином :

$$U^{N+1}(t) = U^N(t) + \Delta U^N(t) \quad (8.3.10)$$

Ця процедура повторюється доти, поки або керування, або функція вартості стануть змінюватись лише незначно від ітерації до ітерації. Викладену послідовність обчислень з використанням градієнтного методу першого порядку в задачі з неперервним часом можна представити так :

1. Визначаємо гамільтоніан

$$H = F[X(t), U(t), t] + \lambda^T(t) f[X(t), U(t), t]$$

2. Вибираємо початкові значення $U(t), X(t_0)$

3. Для значень $U^N(t)$ та $X^N(t_0)$, які ми маємо, знаходимо $X^N(t)$ як розв'язок системи (8.3.2).

4. У зворотньому часі вирішуємо систему приєднаних рівнянь

$$\lambda'^N = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}^N(t)}; \lambda^N(t_f) = \frac{\partial G[\mathbf{X}^N(t_f)]}{\partial \mathbf{X}^N(t_f)};$$

5. Знаходимо приріст керування

$$\Delta \mathbf{U}^N(t) = -k^N \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}^N(t)}$$

6. Обчислюємо чергове значення керування

$$\mathbf{U}^{N+1}(t) = \mathbf{U}^N(t) + \Delta \mathbf{U}^N(t)$$

7. Повторюємо обчислення, починаючи з п.3. Обчислення повторюються доти, поки зміни керування від ітерації до ітерації не стануть незначними. Узагальнимо знайдені співвідношення для випадку, коли на деякі складові вектора стану накладені обмеження у фіксований кінцевий момент часу. Для цього розглянемо задачу мінімізації функції часу

$$I = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] dt \quad (8.3.11)$$

для системи, задано рівнянням

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]; \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (8.3.12)$$

Фінальні значення деяких складових вектора стану фіксовані шляхом введення обмеження у формі q-мірного векторного рівняння

$$\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0 \quad (8.3.13)$$

Можна сформулювати принцип максимуму для цієї задачі та одержати в результаті звичайним способом градієнтну процедуру. Головні труднощі при цьому полягають у тому, що розв'язок $\mathbf{X}^N(t)$ рівняння (8.3.12) при заданому законі керування $\mathbf{U}^N(t)$ не буде задовольняти умові (8.3.13). Тому обмеження (8.3.13) треба ввести в градієнтну процедуру. Для того, щоб одержати

розв'язок цієї задачі з фіксованим кінцевим значенням, можна скористатися методом функції штрафів. Для цього необхідно до функції вартості (8.3.11) додати штраф за порушення обмеження, що визначає кінцеве значення вектора стану. Таким чином, мінімізації підлягає значення нової функції вартості:

$$(8.3.14)$$

з обмеженням у формі рівності :

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (8.3.15)$$

Тут θ - додатньо визначена діагональна вагова матриця. При цьому очікується, що при необмеженому збільшенні θ наслідки порушення обмеження $N=0$ будуть ставати більш незначними. Невирішеною тут залишається така проблема : яким великим має бути значення θ ? У загальному випадку відповідь може бути отримана тільки на основі числових розрахунків. Градієнтні методи можна використовувати для розв'язання задач з нефіксованим кінцевим моментом часу та з обмеженнями на змінні стану або керування у формі нерівності. Рівняння, до яких приводить принцип максимуму при розв'язанні задач із змінним кінцевим моментом часу, мають наступні співвідношення (з невідомим значенням t_f)

$$\begin{aligned} H[\mathbf{X}(t_f), \mathbf{U}(t_f), \lambda(t_f), t_f] + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f} \nu &= 0 \\ \mathbf{I}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \nu &= 0; \\ N[\mathbf{X}(t_f), t_f] &= 0; \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

При кожній ітерації градієнтної процедури неможливо ввести умову $N[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0$ навіть для фіксованого значення t_f . Можливо врахувати це кінцеве обмеження у формі рівняння шляхом введення штрафів, після чого в переформульованій задачі вважати, що подібне кінцеве обмеження у формі

рівняння відсутнє. Аналогічно рівняння (8.3.16) та (8.3.17) не можуть бути використані безпосередньо у градієнтній процедурі тому, що для визначення \mathbf{N} відповідні спряжені рівняння необхідно інтегрувати у зворотньому часі від моменту t_f , а цей момент невідомий доти, поки не буде розв'язане рівняння (8.3.16).

Оскільки кінцевий момент часу невизначений, пропонується вибирати таке його значення, при якому функція вартості мінімальна по цій змінній, тобто $d\mathbf{I}/dt=0$. Може бути, що момент часу, визначений із умови $d\mathbf{I}/dt=0$, не є кінцевим і максимізує значення функції вартості, а не мінімізує його. Якщо виникають такі сумніви, можна знайти знак другого похідного $d^2\mathbf{I}/dt^2$ для точки, де $d\mathbf{I}/dt=0$. Таким чином, вихідну задачу мінімізації функції вартості

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] dt; \quad (8.3.19)$$

для системи

$$\mathbf{X}' = \mathbf{f}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]; \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (8.3.20)$$

з кінцевими значеннями

$$\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0 \quad (8.3.21)$$

де t_f - не визначено, треба переформулювати в іншу задачу, тобто: потрібно розглянути задачу мінімізації модифікованої функції вартості :

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{2} \|\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f), t_f]\|_0^2 + G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] dt \quad (8.3.22)$$

для систем, що описуються рівнянням (8.3.20), де t_f визначається з рівняння (8.3.23)

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt_f} = 0 = \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) \right\} \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) + F[\mathbf{X}(t_f), \mathbf{U}(t_f), t_f];$$

(8.3.23)

Необхідні обчислення при цьому виконуються звичайним чином як для градієнтної процедури у функціональному просторі, описано раніше. Розглянемо градієнтні процедури з обмеженими на керування у формі нерівності :

$$g[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \geq 0$$

(8.3.24)

та на змінні стану

$$h[\mathbf{X}(t), t] \geq 0$$

(8.3.25)

Можливий спосіб урахування подібних обмежень полягає в тому, щоб перетворити їх у еквівалентні обмеження у формі рівнянь. Наприклад, обмеження (8.3.24) можна замінити таким :

$$(y_i)^2 = g_i[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \quad i = 1, 2, 3, \dots, r;$$

(8.3.26)

яке приводить до того, що y_i буде більше або дорівнювати нулю тому, що величина $(y_i)^2$ невід'ємна. Змінна y_i розглядається як додаткова змінна керування, далі задача розв'язується звичайним чином. Тут немає можливості використати ці рівняння безпосередньо тому, що неможливо для g_i забезпечити значення більше нуля. Маємо деяке значення \mathbf{U}^N і розв'язуємо рівняння $\mathbf{X}'^N = \mathbf{f}^N$, щоб знайти \mathbf{X}^N , яке визначає значення g . Проте можна ввести штраф за порушення цієї нерівності. В результаті рівняння (8.3.26) замінюється штрафом у функції вартості, тому одержуємо

$$\mathbf{I} = \dots + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^r |g_i[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]|^p \mathbf{H}(g_i) dt + \dots$$

(8.3.27)

Тут P - будь-яке додатнє число, яке повинно бути вибрано, $H(g_i)$ - ступінчаста функція, визначена співвідношенням:

$$H(g_i) = \begin{cases} 0 & g_i \geq 0 \\ k_i & g_i < 0 \end{cases} \quad (8.3.28)$$

Шляхом вибору значень P та K_i можна змінювати значення штрафу за порушення обмеження на керування у формі нерівності. Врахування обмежень у формі нерівності на значення змінних стану здійснюється по-іншому, тобто замість рівняння (8.3.27) розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} = |\mathbf{h}_1(\mathbf{X}, t)|^{P_1} \mathbf{H}(\mathbf{h}_1) + |\mathbf{h}_2(\mathbf{X}, t)|^{P_2} \mathbf{H}(\mathbf{h}_2) + \dots + |\mathbf{h}_s(\mathbf{X}, t)|^{P_s} \mathbf{H}(\mathbf{h}_s), \quad \mathbf{x}_{n+1}(t_0) = 0, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t_f) = 0. \quad (8.3.29)$$

або диференціальні рівняння

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = |\mathbf{h}_1(\mathbf{X}, t)|^{P_1} \mathbf{H}(\mathbf{h}_1), \quad \mathbf{x}_{n+1}(t_0) = 0, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t_f) = 0 \quad (8.3.30)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+2} = |\mathbf{h}_2(\mathbf{X}, t)|^{P_2} \mathbf{H}(\mathbf{h}_2), \quad \mathbf{x}_{n+2}(t_0) = 0, \quad \mathbf{x}_{n+2}(t_f) = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+s} = |\mathbf{h}_s(\mathbf{X}, t)|^{P_s} \mathbf{H}(\mathbf{h}_s), \quad \mathbf{x}_{n+s}(t_0) = 0, \quad \mathbf{x}_{n+s}(t_f) = 0$$

Рівняння (8.3.29), (8.3.30) знову не можна використати у градієнтній процедурі, оскільки немає способу, який забезпечує виконання вказаних обмежень. Тому кінцеве значення змінних вводимо у функції штрафів; в результаті відповідну частину модифікованої функції вартості можна представити в один із способів:

$$\mathbf{I} = \dots + |\mathbf{x}_{n+1}(t_f)|^P \mathbf{K} + \dots, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t_0) = 0, \quad (8.3.31)$$

$$I = \dots + \sum_{i=1}^s |x_{n+1}(t_f)|^{P_i} K_i + \dots, x_{n+1}(t_0) = 0, i = 1, 2, \dots, s. \quad (8.3.32)$$

Для зручності обчислень значення степенів P часто приймають рівними 2, хоч це і не обов'язково. Після цього градієнтна процедура використовується звичайним способом.

Приклад 6.

Нехай система описується рівнянням: $x' = -x^2 + U$, $x(0) = 10$

Потрібно знайти керування, котре забезпечить мінімальне значення функції вартості

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + U^2) dt$$

Знаходимо гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} U^2 - \lambda x^2 + \lambda U$$

Приєднане рівняння приймає вигляд $\lambda' = -x + 2\lambda x$

з граничною умовою, а рівняння для градієнта

$$\frac{\partial H}{\partial U} = U + \lambda$$

Візьмемо в якості початкового значення керування Приймаємо $K=1$ Для реалізації градієнтного методу виконаємо наступні обчислення.

1. Для рівняння, що маємо $U^N(t)$, $t \in [0, 1]$, знаходимо $x^N(t)$ шляхом розв'язання рівняння

$$x'^N = -[x^N(t)]^2 + U^N(t), \quad x^N(0) = 10$$

2. При знайденому $x^N(t)$ визначимо $\lambda^N(t)$ з рівняння

$$\lambda'^N = -x^N(t) + 2\lambda^N(t)x^N(t), \quad \lambda^N(1) = 0$$

3. Обчислюємо

$$\frac{\partial H}{\partial U^N} = U^N(t) + \lambda(t)$$

4. Знаходимо приріст $\Delta U^N(t)$ та зміну ΔI^N по наступним формулам:

$$\Delta U^N(t) = -k \frac{\partial H}{\partial U^N} = -k U^N(t) - k \lambda^N(t)$$

$$\Delta I^N(t) = -k \int_0^1 \left[\frac{\partial H}{\partial U^N} \right]^2 dt = -k \int_0^1 [U^N(t) + \lambda^N(t)]^2 dt$$

5. Обчислюємо закон керування для наступної ітерації:

$$U^{N+1}(t) = U^N(t) + \Delta U^N(t)$$

6. Заміняємо $U^N(t)$ новим значенням та повторюємо обчислення, починаючи з пункту 1, до тих пір, поки прирощення $\Delta U^N(t)$ або $\Delta I^N(t)$ не стане досить малим від ітерації до ітерації.

Приклад 7.

Використаємо метод функції штрафів при градієнтному методі пошуку екстремума для розрахунку керування та траєкторії при переведенні лінійної системи $x'_1 = x_2(t)$, $x_2 = U(t)$, $|U(t)| \leq 1$, з стану $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 0$ в початок координат $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ за мінімальний час. Ця задача розв'язується як задача мінімізації функції вартості

$$I = \frac{1}{2} S_{11} x_1^2(t_f) + \frac{1}{2} S_{12} x_2^2(t_f) + t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} Q [U^2(t) - 1] H[1 - U^2(t)] dt$$

Рівняння для вектора стану, приєднані рівняння, а також вираз для $\frac{\partial H}{\partial U}$

мають вигляд:

$$\mathbf{X}'^N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}^N(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U^N(t), \quad \mathbf{X}^N(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda'^N = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^N(t), \quad \lambda^N(t_f) = \begin{bmatrix} S_{11} & X_1^N(t_f) \\ S_{22} & X_2^N(t_f) \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial H}{\partial U^N} = \lambda^N_2(t) - Q U^N(t) H(1 - [U^N(t)]^2)$$

Крім того, так як фінальний момент часу невідомий, для його визначення маємо додаткові співвідношення $H + dG/dt_f = 0$. Таким чином

$$\lambda^N_1(t_f) x^N_2(t_f) + \lambda^N_2(t_f) U(t_f) + 1/2 Q \{ [U^N(t_f)]^2 - 1 \} H \{ 1 - [U^N(t_f)]^2 \}$$

В якості критерія зупинки ітераційного процесу використовуємо:

$$\frac{dI^N}{dt_f} = 0 = S_{11} x^N_1(t_f) x'^N_1(t_f) + S_{22} x^N_2(t_f) x'^N_2(t_f) + 1 + 1/2 Q \{ [U^N(t_f)]^2 - 1 \}, \{ [1 - U^N(t_f)]^2 \}$$

Припустимо, що в якості початкового вибрали керування $U^0 = -1$. Розв'язуючи відповідну систему рівнянь, отримаємо:

$$U^0(t) = -1, \quad x^0_1(t) = 10 - \frac{t^2}{2}, \quad x^0_2(t) = -t, \quad 0 < t < \sqrt{10}$$

Припустимо, що це керування використовується на інтервалі часу тривалістю $\sqrt{10}$ с, потім керування змінюється та приймає значення $+1$. Рівняння для керування та вектора стану при цьому приймуть вигляд:

$$U^0(t) = 1, \quad x^0_1(t) = (t - 2\sqrt{10})^2/2, \quad x^0_2(t) = 1 - 2\sqrt{10}, \quad t > \sqrt{10}$$

Похідні по часу функції вартості, що розглядаємо записується наступним чином:

$$\frac{dI^0}{dt} = S_{11} \left(\frac{t^2}{2} - 10t \right) + S_{22}t + 1, \quad 0 < t < \sqrt{10}$$

$$\frac{dI^0}{dt} = S_{11}(t-2\sqrt{10})^3/2 + S_{22}(t-2\sqrt{10}) + 1, \quad t < \sqrt{10}$$

Значення t при якому похідна дорівнює нулю, може бути прийняте в якості значення фінального моменту часу. Коли початкове керування не співпадає з оптимальним, значення вектору стану в знайдений фінальний момент часу не є нульовим, тоді розв'язуємо приєднані рівняння:

$$\lambda'_1 = 0, \quad \lambda'_2 = -I_1(t), \quad \lambda^0_1(t_f) = S_{11}x^0_1(t_f), \quad \lambda^0_2(t_f) = S_{22}x^0_2(t_f)$$

в зворотньому часі від t_f до 0. Після чого визначаємо числове значення градієнта dH/dU^0 та знайдемо наступне значення керування:

$$U'(t) = U^0(t) = k \left[\frac{\partial H}{\partial U^0(t)} \right]$$

Цей процес розрахунків повторюється доки, доти не буде забезпечений малий приріст керувань.

Приклад 8. Керування за мінімальним часом при обмеженні на керування

Для визначення керування за мінімальним часом необхідно скористатися теоремою про N інтервалів переключення, та визначити час переключення. Розрахунки будемо проводити у *MatLab*.

Запишемо критерій оптимальності:

$$I = \frac{1}{2} S_{11} [\theta_c(t_f) - \theta_c^{3d}]^2 + \frac{1}{2} S_{11} [\mu_c(t_f) - \mu_c^{3d}]^2 + t_f$$

Накладемо обмеження на керування : G_b

$$G_{b.min} \leq G_b \leq G_{b.max}$$

$$G_{b.max} - G_b \geq 0$$

$$G_b - G_{b.min} \geq 0$$

Звідси перепишемо критерій:

$$I = \frac{1}{2} S_{11} [\theta_c(t_f) - \theta_c^{3d}]^2 + \frac{1}{2} S_{11} [\mu_c(t_f) - \mu_c^{3d}]^2 + t_f +$$

$$+ \int [Q(G_{b.\max} - G_b)(G_b - G_{b.\min})H(g_1g_2)] dt$$

Відповідно функція Гамільтона матиме вигляд:

$$H = Q(G_{b.\max} - G_b)(G_b - G_{b.\min})H(g_1g_2) + \lambda_1(a_{11}\theta c + b_1G_0) + \lambda_2(a_{21}\theta c + a_{22}\mu c)$$

Запишемо умови оптимальності:

$$\lambda'_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta c} = -\lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{21}$$

$$\lambda'_2 = -\frac{\partial H}{\partial \mu c} = -\lambda_1 a_{12} - \lambda_2 a_{22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial G_b} = -2QG_bH(g_1g_2) + QG_{b.\max}G_bH(g_1g_2) + QG_{b.\min}G_bH(g_1g_2) + \lambda_1 b_1$$

$$\lambda_1(t_f) = S_{11}(\mu c(t_f) - \mu_c^{3D})$$

$$\lambda_2(t_f) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t_f} &= 1 + S_{11}(\mu c(t_f) - \mu_c^{3D})x'_1(t_f) + \\ &+ Q(G_{b.\max} - G_b)(G_b - G_{b.\min})H(g_1g_2) = 0 \end{aligned}$$

Після обрахунків знайдемо час переключення τ_s та побудуємо графік лінії переключення. Загальний вигляд графіку наведено на рис. 8.3.1.

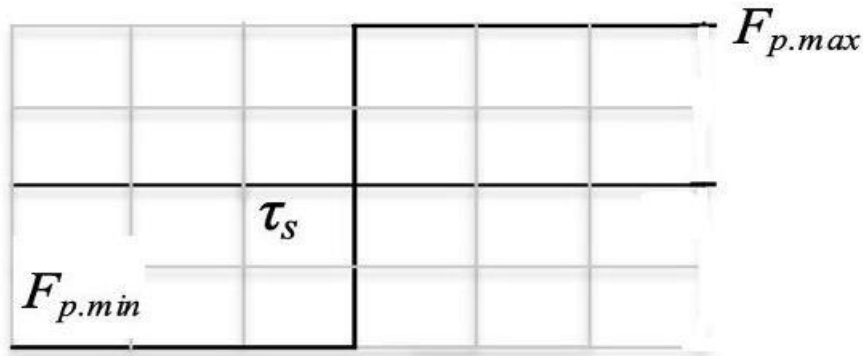


Рис.8.3.1 – Загальний графік лінії переключення

Лінія переключення керування матиме вигляд:

$$\zeta(\tau) = \int_0^r e^{-A(\tau-p)} b \operatorname{sign}[\lambda^T(t_f)e^{Apb}] dt$$

Коли вираз $[\lambda^T(t_f)e^{Apb}] = 0$ - це точка переключення.

Зробимо розрахунок для знаходження часу переключення та лінії переключення та побудуємо відповідний графік (рис. 8.3.2).

$$S_{11} = 0.0001$$

$$Q = 1$$

$$N = 3000$$

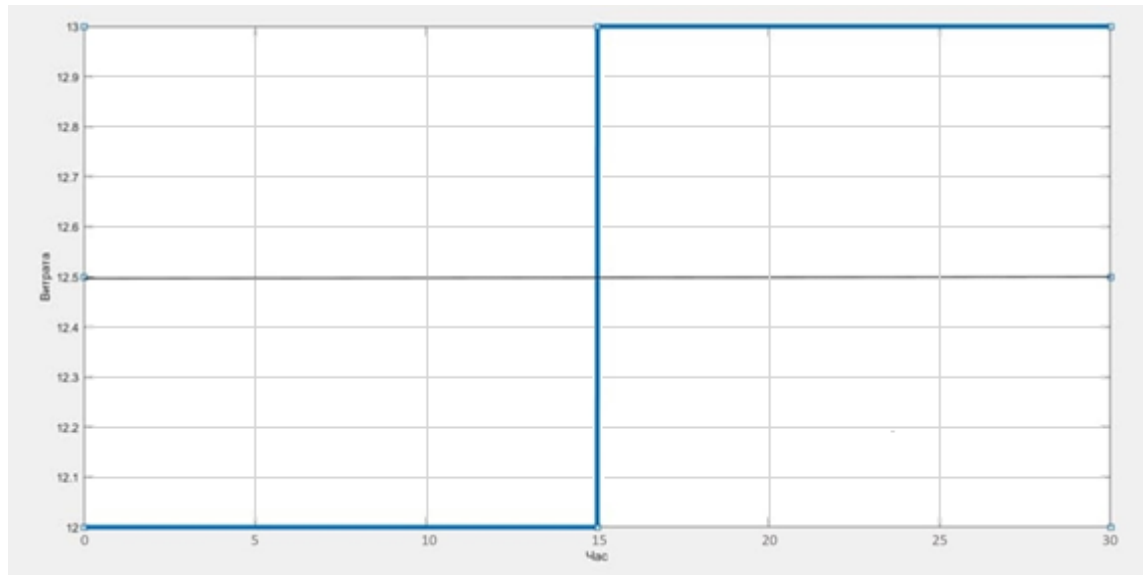


Рис.8.3.2. – Графік лінії переключення

В результаті виконання програми було отримано, що час переключення повинен становити 15.

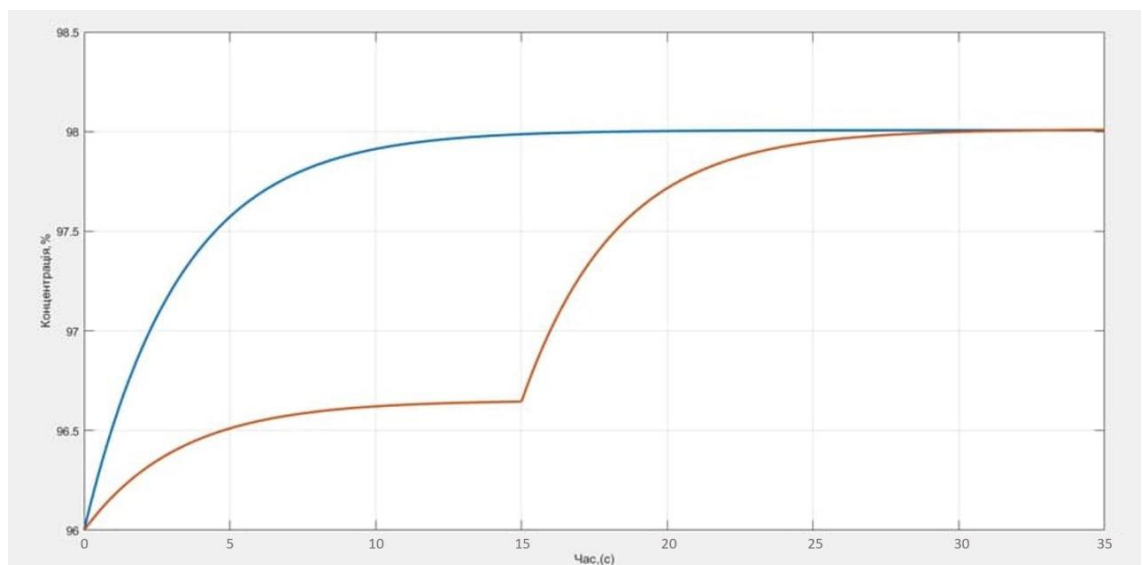


Рис.8.3.3 – Графік зміни змінних стану до переключення

Після 15 секунд система вийшла на заданий рівень, отже переключення не потрібно корегувати.

В момент переключення змінні стану мали такі значення:

$$\mu c = 96.4443$$

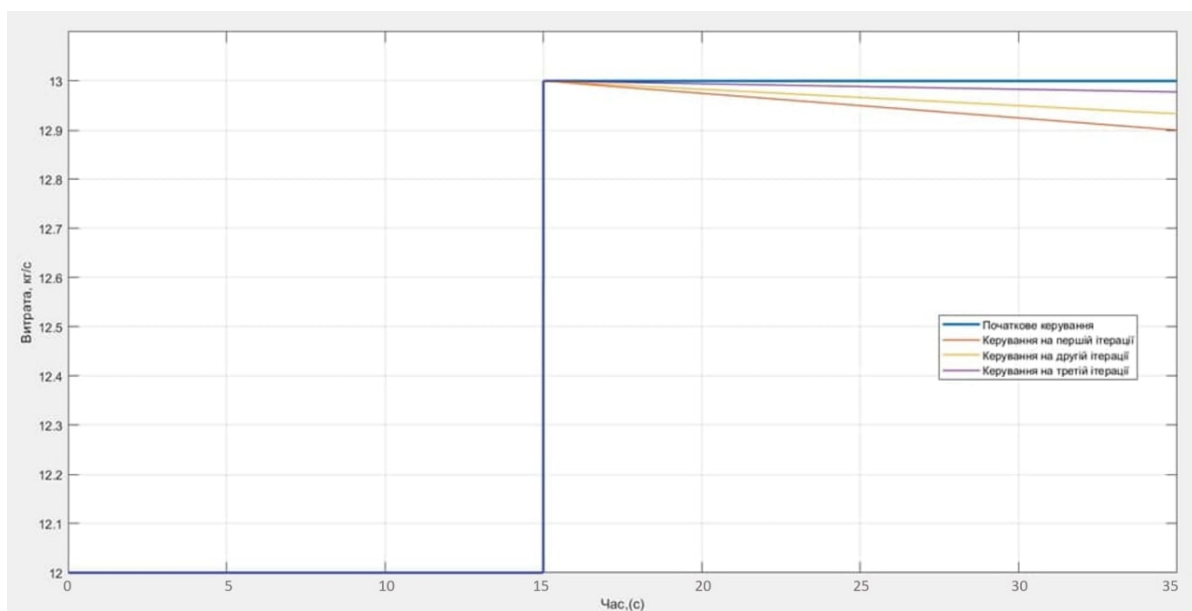


Рис.8.3.4 – Графік зміни керування витратою

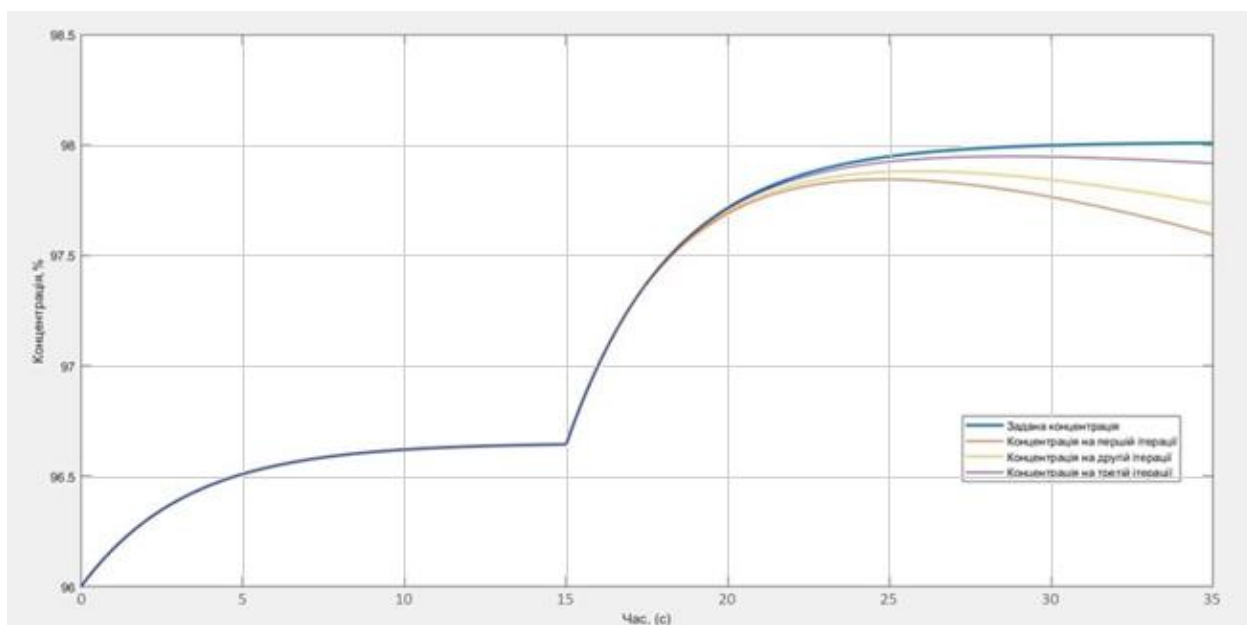


Рис.8.3.5 – Графік зміни концентрації при етапах керування

Рекомендована література

1. Базова

1. Ладієва Л.Р. Оптимізація систем керування: Навчальний посібник. – Електронне мережне навчальне видання, 2020. – 192с.
2. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування системами.: Навчальний посібник. – Електронне мережне навчальне видання, 2019 – 162с.
3. Жученко А.І. Динамічна оптимізація з використанням MATLAB та SIMULINK. / А.І. Жученко, Л.Р. Ладієва, Р.М. Дубік – К.: НТУУ “КПІ”, 2009. – 209 с.
4. Жученко А.І. Нелінійне програмування з використанням MATLAB. / А.І. Жученко, Л.Р. Ладієва, Р.М.Дубік – К.: НТУУ “КПІ”, 2007. – 140 с.
5. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування. : Метод. вказівки до виконання курсових робіт для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами”– К. : НТУУ ”КПІ“, 2012. – 58 с.
6. Ладієва Л.Р. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу “Математичні методи оптимізації” для студентів спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами ”– К.: НТУУ, “КПІ”,2013.-56 с.
7. Ладієва Л.Р. Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Математичні методи оптимізації” для студентів спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами – К.: НТУУ, “КПІ”,2015.-80 с.

2. Допоміжна

8. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392с.
9. Рей У. Методы управления технологическими процессами – М.: МИР, 1983. – 368с.