

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦІЇ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані  
технології»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2021

Математичні методи в задачах автоматизації [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук, Т. А. Дунаєва. – Електронні текстові дані (1 файл: 5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 384 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 24.06.2021 р.)  
за поданням Вченої ради Інженерно-хімічного факультету (протокол № 5 від 24.05.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦІЇ

**Укладачі:** *Жученко Анатолій Іванович, д-р. техн. наук, проф.  
Ярощук Людмила Дем'янівна, канд. техн. наук, доц.  
Дунаєва Тамара Альбінівна, канд. техн. наук, доц.*

**Відповідальний редактор** *Панов Є. М. д.т.н., професор, декан ІХФ*

**Рецензенти:** *Волощук Володимир Анатолійович,  
д.т.н., проф., в.о. зав. кафедри автоматизації теплоенергетичних  
процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського  
Корнієнко Богдан Ярославович,  
д.т.н., проф., проф. кафедри автоматики та управління в технічних  
системах КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Запропонований навчальний посібник містить матеріал тих розділів математики, що пов'язані з функціонуванням дискретних систем керування (квантування сигналів у часі, дискретне перетворення Лапласа, застосування z-перетворення, операції з матрицями), з теорією ймовірностей та математичною статистикою (основні поняття, комбінаторика, повторні випробування, закони розподілу ймовірностей та числові характеристики випадкових величин, дисперсійний та кореляційний аналіз), з теорією та практикою застосування графів (поняття зв'язності та ізоморфізму, матриці неорієнтованих та орієнтованих графів, операції над графами, дерева, алгоритми Крускала, Пріма, Дейкстри, дослідження поведінки складних систем). Посібник призначений для проведення лекцій, підготовки до практичних занять та для самостійної роботи студентів, містить додатки з таблицями найбільш вживаних для зазначеної тематики функцій та завдання для роботи з графами.

Призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» усіх форм навчання.

© А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук, Т. А. Дунаєва, 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

## ПЕРЕДМОВА

Упровадження в життя сучасних комп'ютерних технологій стало звичайним явищем. Комп'ютери працюють не тільки у космосі, на промислових підприємствах, транспорті, у засобах зв'язку, а і вдома: пральні машини, кухонні комбайни, телефони і таке інше.

Створення ефективних та надійних комп'ютерних систем не можливе без відповідного математичного забезпечення їх роботи. У зв'язку з цим у даному навчальному посібнику розглянуто деякі важливі розділи математики, які складають основу сучасної теорії комп'ютерних систем і дуже важливі для засвоєння основних фахових дисциплін спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

У *першому розділі* наведено загальне поняття про дискретну систему та розглянуто питання, пов'язані з її функціонуванням, зокрема квантування сигналу за часом та математичний опис цього процесу за допомогою ґратчастих функцій, їх різниць та сум, а також різницевих рівнянь.

*Другий розділ* присвячено дискретному перетворенню Лапласа як математичному апаратові, на базі якого розв'язують певні задачі теорії комп'ютерних систем. Наведено поняття та теореми дискретного перетворення Лапласа, сформульовані умови існування цього перетворення, показано методи визначення прямого та оберненого перетворень.

У *третьому розділі* висвітлено метод  $z$ -перетворення як один з ефективних методів аналізу та синтезу комп'ютерних систем. Подано визначення  $z$ -перетворення, сформульовано та доведено його теореми, наведено методи обчислення прямого та оберненого  $z$ -перетворення. Окремо викладено застосування методу  $z$ -перетворення для розв'язання систем різницевих рівнянь.

*У четвертому розділі* розглянуто матриці та операції з ними. Визначено поняття матриці та її видів. Наведено правила виконання алгебраїчних операцій з матрицями, їх диференціювання та інтегрування. Подано методи обчислення визначників, мінорів, алгебраїчних доповнень, рангів і слідів матриці. Особливу увагу приділено методам обернення матриці, методу розв'язання систем алгебраїчних рівнянь за допомогою обернення матриці. Наведено поняття характеристичного рівняння матриці, її власних значень та векторів, наведені методи їх обчислення.

*П'ятий розділ* присвячено лінійним перетворенням матриць, зокрема їх діагоналізації й перетворенню до різних видів канонічних форм.

*У шостому розділі* подано теорему Келі-Гамільтон та її застосування для обернення матриці, обчислення матричних поліномів та функцій. Обчислено експоненціальну матричну функцію з урахуванням різних виглядів матриці.

*Сьомий розділ* ознайомить студентів з основними поняттями та базовим математичним апаратом теорії ймовірностей.

*У восьмому розділі* розглянуто основи математичної статистики, зокрема способи отримання вибірових даних, а також застосування дисперсійного та кореляційного аналізів до експериментальних даних.

*Дев'ятий розділ* містить основні визначення теорії графів, в ньому наведено поняття зв'язності та ізоморфізму, описано матриці неорієнтованих та орієнтовних графів, обходи графів, операції над графами, мости та точки роз'єднання, дерева.

*У десятому розділі* подано алгоритми пошуку остовного дерева мінімальної вартості Крускала та Пріма, для ілюстрації задачі пошуку найкращого шляху між двома об'єктами описано алгоритм Дейкстри, досліджено поведінку складних систем за допомогою алгоритмів теорії графів.

Видання є розширеним перевиданням навчального посібника:

Жученко А.І., Ярощук Л.Д. Спеціальні розділи математики для дослідження комп'ютерних систем: Навч. посіб. – К. : ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2002. -208 с.

Текст запропонованого посібника доповнює попереднє видання матеріалом, що висвітлює операції з графами.

Розділи 1-6 написані А. І. Жученком, розділи 7 та 8 – Л. Д. Ярощук, 9 та 10 – Т. А. Дунаєвою.

# 1. КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

## 1.1. Поняття комп'ютерної системи

Сучасні системи автоматичного керування є, як правило, комп'ютерними. До їх складу входять [1-7] (рис. 1.1) технологічний об'єкт керування ТОК;

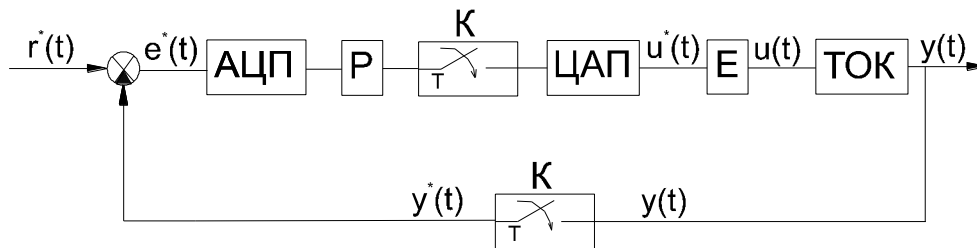


Рис. 1.1. Структурна схема комп'ютерної системи керування

цифровий модулятор  $P$  (комп'ютер); квантувач  $K$  (імпульсний елемент, ключ), який перетворює неперервний сигнал (наприклад, від вимірювального пристрою) в аналоговий; аналогово-цифровий перетворювач АЦП для перетворення аналогового сигналу у цифровий код і цифро-аналоговий перетворювач ЦАП для зворотного перетворення сигналу; екстраполятор  $E$ , що поновлює неперервний сигнал.

## 1.2. Квантування сигналу за часом

Всі математичні та логічні дії, необхідні для керування ТОК, здійснюються у комп'ютері  $P$ , який оперує дискретними сигналами. Сам ТОК, як правило, є неперервним об'єктом. В зв'язку з цим виникає потреба у перетворенні неперервного вихідного сигналу  $y(t)$  ТОК у дискретний [4]. Ця операція здійснюється квантувачем  $K$ , який замикається на протязі часу  $p$ , причому  $p \ll T$ .

Процес такого перетворення неперервного сигналу у дискретний називається *квантуванням за часом*. Процес квантування ілюструється на рис. 1.2.

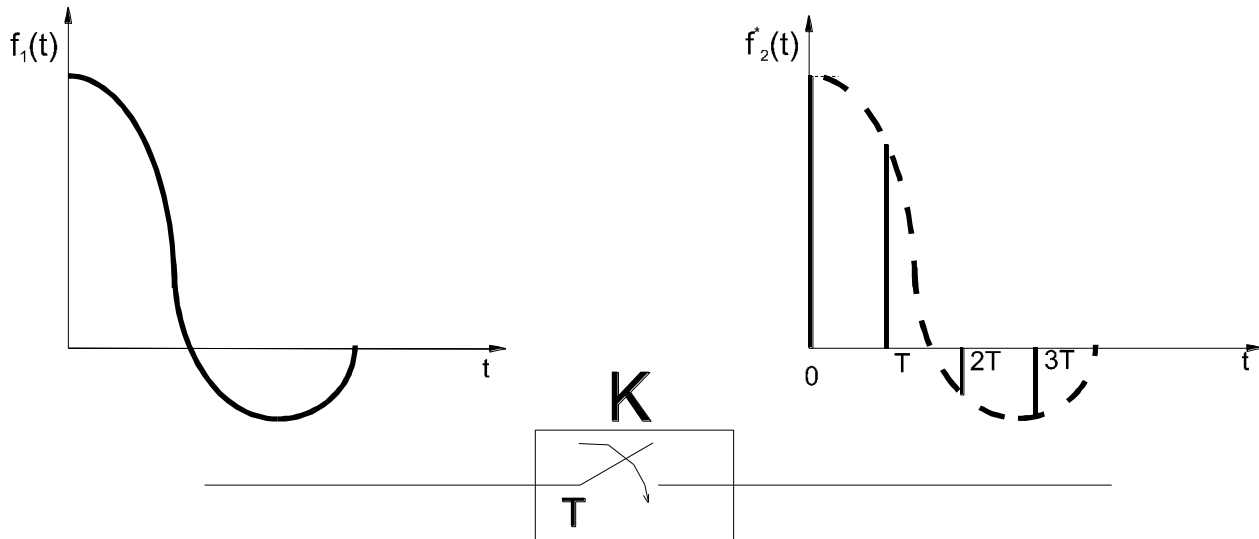


Рис. 1.2. Квантування сигналу за часом.

У момент часу  $t = 0$  квантувач  $K$  замикається на  $p$  сек. і  $f_2(t) = f_1(t)$  на протязі цього інтервалу. Через  $p$  сек.  $K$  розмикається і його вихідний сигнал  $f_2(t)$  стає рівним нулю. Цей процес повторюється через рівний період часу  $T$ , який називається *періодом квантування*. В результаті квантування вихідний сигнал  $f_2(t)$  представляє собою послідовність імпульсів тривалістю  $p$  сек. з періодом квантування  $T$  сек.

### 1.3. Ґратчасті функції

Якщо імпульси кінцевої тривалості замінити імпульсами нескінченно малої тривалості та нескінченної висоти, але скінченної площі, то модель процесу квантування за часом може бути зображена так, як показано на рис. 1.3.

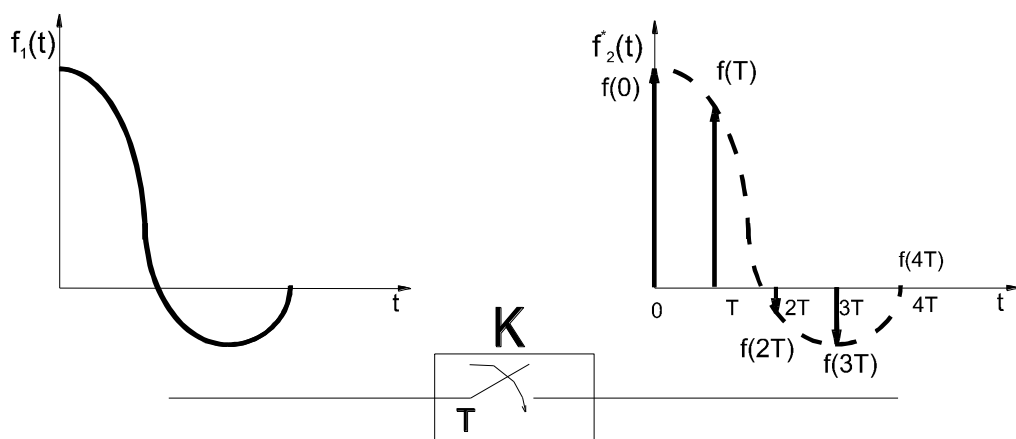


Рис. 1.3. Квантування сигналу за часом

Результат проходження неперервного сигналу  $f(t)$  через такий квантувач будемо позначати  $f^*(t)$ . Така модель справедлива завжди, коли сталі часу системи, на яку впливає сигнал  $f^*(t)$ , набагато більше тривалості  $p$  імпульсів.

Коли дискретна система реагує на значення впливу, прикладеного до входу квантувача, тільки у рівновіддалені один від одного дискретні моменти часу, такий процес може бути представлений так званою *гратчастою функцією*, тобто функцією, значення якої визначаються тільки при дискретних рівновіддалених значеннях незалежної змінної. У проміжку між цими значеннями незалежної змінної гратчаста функція дорівнює нулю. Гратчасту функцію будемо позначати  $f(kT)$ , де  $T$  – період квантування, а  $k$  – ціле число. Ординати гратчастої функції називаються *дискретами*.

Для того щоб дістати гратчасту функцію  $f(kT)$  за заданою неперервною функцією  $f(t)$ , необхідно в останній замінити  $t$  на  $kT$ . Так, наприклад, неперервній функції  $e^{\alpha t}$  відповідає гратчаста функція

$$f(kT) = f(t) \big|_{t=kT} = e^{\alpha T k}. \quad (1.1)$$



Приклад 1.1. Зобразити графічно гратчасту функцію, яка відповідає  $f(t) = 2t$  при: а)  $T = 1$ ; б)  $T = 2$ .

Вводимо заміну змінної  $t = kT$ . Дістанемо

$$f(kT) = 2kT.$$

При значенні  $T = 1$  маємо

$$f_1(k) = 2k.$$

При значенні  $T = 2$  буде

$$f_2(k) = 4k.$$

Відповідні гратчасті функції зображено на рис. 1.4а та 1.4б

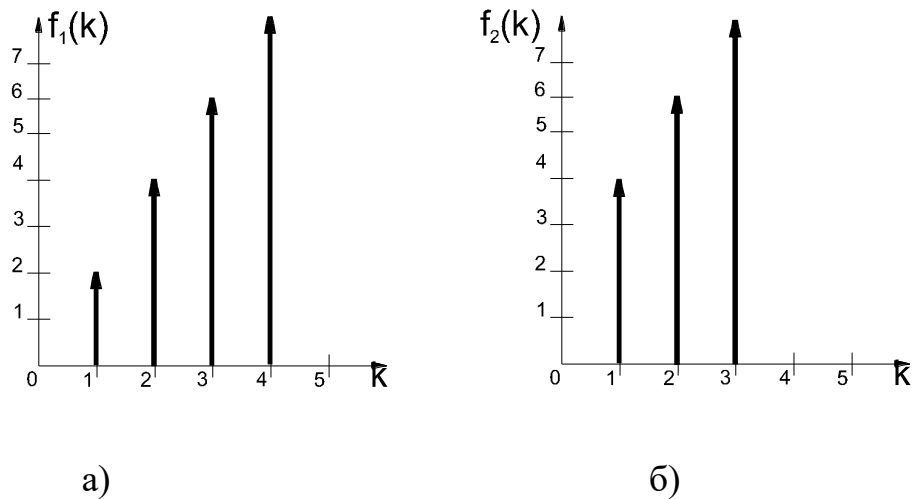


Рис. 1.4. Гратчаста функція  $f(t) = 2t$  при : а)  $T = 1$ ; б)  $T = 2$

Очевидно, що одній і тій самій гратчастій функції можуть відповідати різні неперервні або розривні функції, якщо тільки їх ординати у дискретні моменти часу  $t = kT$  дорівнюють дискретамгратчастої функції (рис. 1.5.). Ці функції називаються *огинаючими* гратчастої функції.

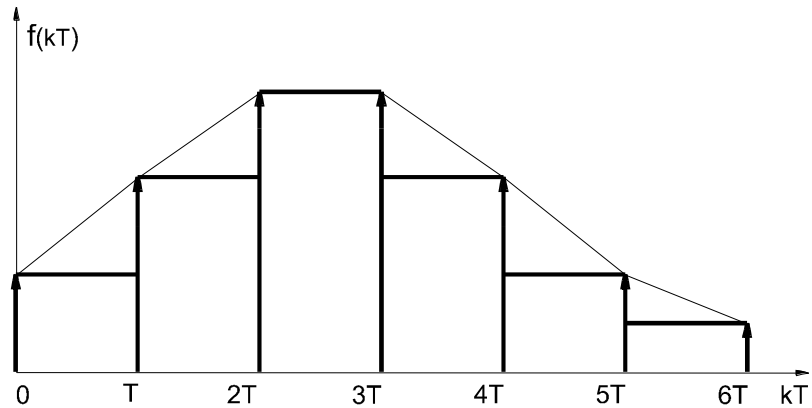


Рис. 1.5. Гратчаста та відповідні неперервні або розривні функції

Як видно з рисунку 1.5., гратчаста функція не може повністю відобразити властивості неперервної функції.

*Приклад 1.2.* Зобразити графічно гратчасту функцію, яка відповідає неперервній  $f(t) = \sin \omega t$  при а)  $T = \pi/6\omega$ ; б)  $T = \pi/5,6\omega$ .

Вводимо заміну змінної  $t = kT$ . Тоді  $f(kT) = \sin \omega kT$ .

Якщо  $T = \pi/6\omega$ , дістанемо

$$f_1(kT) = \sin \pi k/6.$$

Графік цієї функції буде мати вигляд (рис. 1.6,а).

Для  $T = \pi/5,6\omega$  гратчасту функцію  $f_2(kT) = \sin \pi k/5,6$  зображена на рис. 1.6, б.

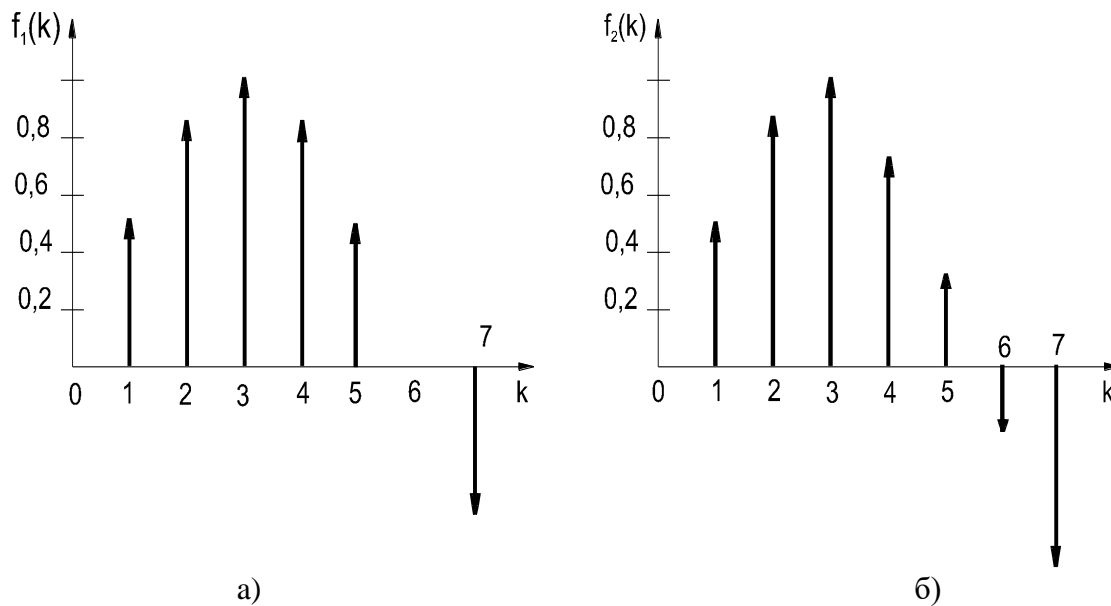


Рис 1.6. Ґратчаста функція  $f(kT) = \sin \omega kT$  при а)  $T = \pi/6\omega$ ; б)  $T = \pi/5,6\omega$

Як бачимо, незважаючи на несуттєву різницю у значенні періоду квантування  $T$ , властивість періодичності функції  $f(kT) = \sin \omega kT$  зберіглася тільки для випадку а). Функція, побудована для випадку б), не є періодичною.

Треба підкреслити, що ґратчасті функції необов'язково утворюються з відповідних неперервних функцій. Будь-яку числову послідовність можна розглядати як ґратчасту функцію.

Найчастіше зручно вважати період квантування  $T$  таким, що дорівнює 1. Це дає змогу записувати ґратчасту функцію  $f(kT)$  як функцію тільки цілочисленого аргументу  $k$ , тобто  $f(k)$ . Такий перехід можливий, тому що будь-який період квантування  $T$  можна вважати таким, що дорівнює одиниці умовного часу, так само, як  $60 \text{ с} = 1 \text{ хв}$ ,  $60 \text{ хв} = 1 \text{ год}$  і т.д. Цьому крокові можна дати й суто математичне обґрунтування. Введемо нову змінну  $\Theta = t/T$  так, що  $f(t) = f(\Theta T)$ . Ґратчаста функція, що відповідає  $f(\Theta)$ , буде  $f(k)$ , тобто вона співпадає з  $f(\Theta)$  при значеннях нової незалежної змінної  $\Theta = k$ . Так, наприклад, після заміни незалежної змінної у функції  $f(t) = e^{\alpha t}$  дістанемо

$$f(\Theta) = e^{\alpha T \Theta} = e^{\beta \Theta},$$

де  $\beta = \alpha T$ .

Відповідна ґратчаста функція буде

$$f(k) = e^{\beta k}.$$

Ґратчасті функції  $f(k)$  визначені при цілочислених значеннях незалежної змінної. Надалі будемо використовувати саме такі ґратчасті функції, тобто  $f(k)$ , а не  $f(kT)$ .

#### 1.4. Різниці та суми ґратчастих функцій

Швидкість зміни ґратчастої функції характеризується її першою різницею, яка є аналогом похідної неперервної функції [8,9].

*Різницю 1-го порядку, або першу різницю*, ґратчастої функції  $f(k)$  позначають через  $\Delta f(k)$ , вона дорівнює

$$\Delta f(k) = f(k + 1) - f(k). \quad (1.2)$$

Геометрично перша різниця  $\Delta f(k)$  представляє собою різницю між  $(k + 1)$ -ю та попередньою  $k$ -ю ординатами ґратчастої функції (рис. 1.7.)

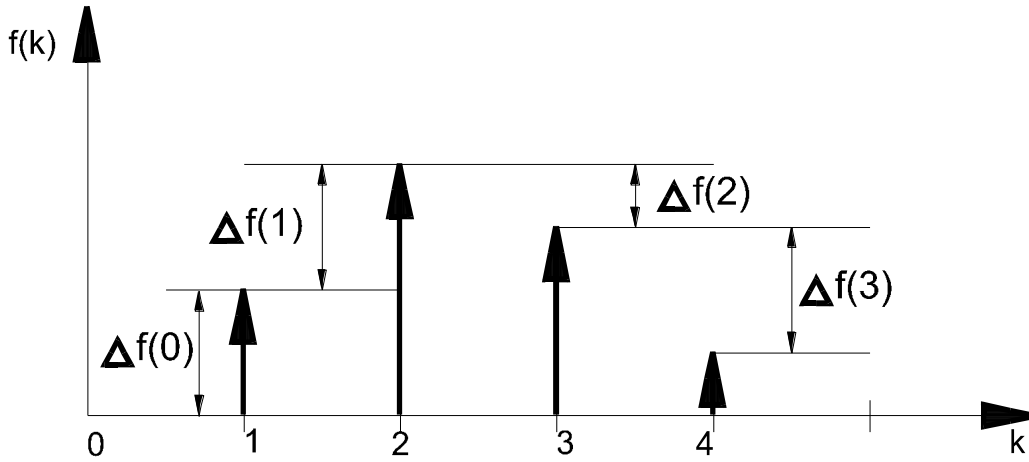


Рис. 1.7. Різниці 1-го порядку

Різниця 2-го порядку, або друга різниця  $\Delta^2 f(k)$ , дорівнює

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k), \quad (1.3)$$

або після підстановки значень  $\Delta f(k+1)$  та  $\Delta f(k)$  з (1.2) та приведення подібних членів дістанемо

$$\Delta^2 f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k). \quad (1.4)$$

Різниця  $n$ -го порядку, або  $n$ -а різниця, визначається рекурентним співвідношенням

$$\Delta^n f(k) = \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k). \quad (1.5)$$

Для  $n = 3, 4, \dots$ , представляючи різниці лінійними комбінаціями відповідних ґратчасхтих функцій, маємо

$$\Delta^3 f(k) = f(k+3) - 3f(k+2) + 3f(k+1) - f(k). \quad (1.6)$$

$$\Delta^4 f(k) = f(k+4) - 4f(k+3) + 6f(k+2) - 4f(k+1) + f(k). \quad (1.7)$$

У загальному випадку

$$\Delta^n f(k) = \sum_{\nu=0}^n (-1) \binom{n}{\nu} f(k+n-\nu) \quad (1.8)$$

де  $\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$  – біноміальні коефіцієнти.

*Приклад 1.3.* Для ґратчастої функції

$$f(k) = \alpha k,$$

де  $\alpha$  – сталий коефіцієнт, визначити  $n$ -ну різницю,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Згідно з формулою (1.2)

$$\Delta f(k) = \alpha(k+1) - \alpha k = \alpha.$$

За виразом (1.3)

$$\Delta^2 f(k) = \alpha - \alpha = 0$$

Решта різниць також дорівнює нулю.

*Приклад 1.4.* Для ґратчастої функції

$$f(k) = k^3$$

визначити  $n$ -ну різницю,  $n = 1, 2, 3 \dots$

За формулою (1.2) :

$$\Delta f(k) = (k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Згідно (1.3)

$$\Delta^2 f(k) = 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1 - 3k^2 - 3k - 1 = 6k + 6.$$

За виразом (1.5), якщо  $n = 3$ , дістанемо

$$\Delta^3 f(k) = 6(k+1) + 6 - 6k - 6 = 6.$$

Четверта різниця  $\Delta^4 f(k) = 0$ , як і решта різниць при  $n \geq 4$ .

Приклад 1.5. Для ґратчастої функції

$$f(k) = e^{\alpha k}$$

знайти  $n$ -ну різницю,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Виконаємо розрахунки, використовуючи формули (1.2), (1.3), (1.5).

Перша різниця

$$\Delta f(k) = e^{\alpha(k+1)} - e^{\alpha k} = (e^{\alpha} - 1)e^{\alpha k}.$$

Друга різниця

$$\Delta^2 f(k) = (e^{\alpha} - 1)e^{\alpha(k+1)} - (e^{\alpha} - 1)e^{\alpha k} = (e^{\alpha} - 1)^2 e^{\alpha k}.$$

Третя різниця

$$\Delta^3 f(k) = (e^{\alpha} - 1)^2 e^{\alpha(k+1)} - (e^{\alpha} - 1)^2 e^{\alpha k} = (e^{\alpha} - 1)^3 e^{\alpha k}.$$

Узагальнюючи отримані результати, дістанемо формулу для розрахунку різниці довільного  $n$ -го порядку:

$$\Delta^n f(k) = (e^{\alpha} - 1)^n e^{\alpha k}.$$

Суму ґратчастої функції обчислюють за виразом

$$S(k) = \sum_{m=0}^{k-1} f(m) = \sum_{m=1}^k f(k-m) \quad (1.9)$$

вона відіграє щодо ґратчастої функції таку саму роль, що й інтеграл для неперервних функцій.

## 1.5. Різницеві рівняння

Співвідношення між ґратчастою функцією  $y(t)$  та її різницями різних порядків  $\Delta^{\mu}y(k)$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) визначає *рівняння у кінцевих різницях*, або *різницеве рівняння* [9]. Якщо це співвідношення лінійне, то таке різницеве рівняння називається *лінійним*.

Лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами можна представити у формі

$$b_n \Delta^n y(k) + b_{n-1} \Delta^{n-1} y(k) + \dots + b_1 \Delta y(k) + b_0 y(k) = f(k), \quad (1.10)$$

де  $f(k)$  є відомою заданою функцією, а  $y(k)$  – шуканою функцією, яка представляє собою розв’язок різницевого рівняння.

Якщо у різницевому рівнянні (1.10) замінити різниці ґратчастої функції  $y(k)$  їх значенням з (1.8), то дістанемо іншу форму запису різницевого рівняння

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = f(k), \quad (1.11)$$

яка часто виявляється більш зручною. Коефіцієнти  $b_\mu$  та  $a_\mu$  цих різницевих рівнянь зв’язані між собою співвідношенням [9]

$$a_{n-l} = \sum_{v=0}^l b_{n-v} (-1)^{l-v} \binom{n-v}{l-v},$$

$$b_{n-l} = \sum_{v=0}^l a_{n-v} \binom{n-v}{l-v}. \quad (1.12)$$

Різницеве рівняння (1.11) можна розглядати як рекурентне співвідношення, яке дозволяє при заданих значеннях  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  послідовно розрахувати  $y(k+n)$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Тому рівняння (1.11) іноді називають рекурентним рівнянням. Ця обставина відрізняє різницеве рівняння від диференціального.

Різницеві рівняння (1.10) та (1.11) з правою частиною називаються *неоднорідними*. Якщо  $f(k) = 0$ , то рівняння називається *однорідним*.

Різницеве рівняння, яке містить  $y(k)$  та  $y(k+n)$ , називається *різницевою рівнянням  $n$ -го порядку*. Таким чином, рівняння (1.11) при  $a_0 \neq 0$  та  $a_n \neq 0$  є *неоднорідним різницевою рівнянням  $n$ -го порядку*. Порядок різницевого рівняння може не співпадати з порядком найвищої різниці, яка входить у нього, якщо різницеве рівняння записане у формі (1.10).



Початкові або у загальному випадку граничні умови для різницевого рівняння  $n$ -го порядку задаються у вигляді значень ґратчастої функції  $y(k)$  та її різниць від 1-ї до  $(n-1)$ -ї при  $k=0, 1, \dots, n-1$ , якщо воно має форму (1.11).

*Приклад 1.6.* Визначити порядок різницевого рівняння

$$\Delta^3 y(k) + 4\Delta^2 y(k) + 5\Delta y(k) + 2y(k) = 1$$

та розв'язати його при нульових початкових умовах.

Скористаємося формулами (1.2), (1.3) та (1.6):

$$\Delta^3 y(k) = y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k),$$

$$\Delta^2 y(k) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k),$$

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$$

і підставимо різниці у наше рівняння. Маємо:

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) + 4y(k+2) - 3y(k+1) + 4y(k) + 5y(k+1) - 5y(k) + 2y(k) = 1$$

Після приведення подібних членів дістанемо

$$y(k+3) + y(k+2) = 1.$$

Після заміни  $m = k + 2$  рівняння приймає вигляд

$$y(m+1) + y(m) = 1,$$

звідси зрозуміло, що це різницеве рівняння 1-го порядку.

Для розв'язання цього рівняння перепишемо його у вигляді

$$y(m+1) = 1 - y(m).$$

З цієї формули при початковій умові  $y(0) = 0$ , послідовно задаючи  $m = 0, 1, 2, \dots$ , можна знайти шукані розв'язки різницевого рівняння.

## Контрольні запитання

1. З яких елементів складається комп'ютерна система керування?
2. Які види квантування сигналів ви знаєте?
3. Що таке ґратчасті функції і як їх отримати з відповідних неперервних функцій?
4. Як розрахувати різниці та суми ґратчастих функцій? Чому вони відповідають для функцій неперервних?
5. Чи можна розрахувати похідні та інтеграли ґратчастих функцій?
6. Як сформулювати різницеві рівняння?
7. Які види різницевих рівнянь ви знаєте?

## 2. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

### 2.1. Визначення дискретного перетворення Лапласа

Дискретне перетворення Лапласа, або *D-перетворення*, є функціональним перетворенням ґратчастих функцій  $f(k)$  і визначається співвідношенням [2,10-12]

$$F^*(s) = D\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-sk}, \quad (2.1)$$

де  $s = \sigma + j\omega$  – комплексне число, яке називається *параметром перетворення*. Якщо порівняти (2.1) з визначенням звичайного перетворення Лапласа функції  $f(t)$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.2)$$

то легко бачити аналогію між ними. Інтегралу з нескінченною границею у (2.2) відповідає нескінченна сума – ряд у (2.1); неперервній змінній  $t$  – дискретна змінна  $k$  і, нарешті, довільній неперервній функції  $f(t)$  – ґратчаста функція  $f(k)$ .

За аналогією із звичайним перетворенням Лапласа назовемо функцію  $f(k)$  – *оригіналом*, а  $F^*(s)$  – *зображенням*. Відповідність між оригіналом та зображенням ґратчастих функцій будемо записувати умовно у вигляді

$$F^*(s) = D\{f(k)\} \xrightarrow{\cdot} f(k) \quad (2.3)$$

Тут символ  $D\{f(k)\}$  вказує на операцію перетворення функції  $f(k)$  подібно тому, як символ  $L\{f(t)\}$  вказує на операцію перетворення функції  $f(t)$ .

Перетворення  $f(k)$  у  $F^*(s)$  називають *прямим D-перетворенням*.

З визначення *D-перетворення* (2.1) видно, що зображення ґратчастих функцій є функціями  $e^s$ . Це характерна властивість *D-перетворення*.

Щоб підкреслити цю обставину і відрізнити зображення ґратчастої функції (2.1) від зображення відповідної неперервної функції (2.2), перше зображення має позначку «\*».

Розглянемо  $F^*(s)$  на площині комплексної змінної  $s$ . Покажемо, що  $F^*(s)$  є періодичною функцією вздовж уявної вісі з періодом  $2\pi$ , тобто

$$F^*(s) = F^*(s + 2\pi j). \quad (2.4)$$

Як вказувалося вище, зображення  $F^*(s)$ , є функцією  $e^s$ . Розглянемо функцію  $e^{s+2\pi j}$ . Користуючись формулою Ейлера, маємо

$$e^{s+2\pi j} = e^s e^{2\pi j} = e^s (\cos 2\pi + j \sin 2\pi) = e^s,$$

звідки і випливає твердження (2.4). Якщо функція  $F^*(s)$  періодична з періодом  $2\pi$  вздовж уявної вісі, то тоді доцільно вибрати на  $s$ -площині смугу шириною  $2\pi$ , яка була б симетричною відносно дійсної вісі так, щоб  $-\pi < \text{Im}(s) \leq \pi$  (рис. 2.1) ( $\text{Im}(s)$  – уявна частина комплексної змінної  $s$ ) та обмежитись дослідженням функції  $F^*(s)$  саме у цій смузі. Ця смуга називається *основною* на відміну від решти подібних смуг шириною  $2\pi$ , які називаються *додатковими*.

У загальному випадку функція  $F^*(s)$  усередині будь-якої смуги може мати особливі точки, наприклад, полюси, в яких  $F^*(s)$  перетворюється у нескінченність. В основній смузі кожному комплексному полюсу  $s_v = \sigma_v + j\omega_v$  обов'язково відповідає (рис. 2.1) спряжений полюс  $s_{v+1} = \sigma_v - j\omega_v$ , тому що коефіцієнти  $F^*(s)^*$  у випадку  $f(k)$  завжди дійсні. Ця обставина і є причиною вибору смуги  $-\pi < \text{Im}(s) \leq \pi$  основною. У решті смуг уявні частини цих полюсів відрізняються на величину  $\pm 2\pi j$ .

Якщо  $s_{v,v+1} = \sigma_v + j\pi$ , тобто  $\omega_v = \pi$ , то полюси лежать на границях смуги. У цьому випадку треба враховувати один з цих полюсів, наприклад,  $s_v = \sigma_v + j\pi$  (рис. 2.1). У подальшому, кажучи про особливі точки  $s_v$  зображення  $F^*(s)$ , будемо мати на увазі особливі точки, які лежать в основній смузі.

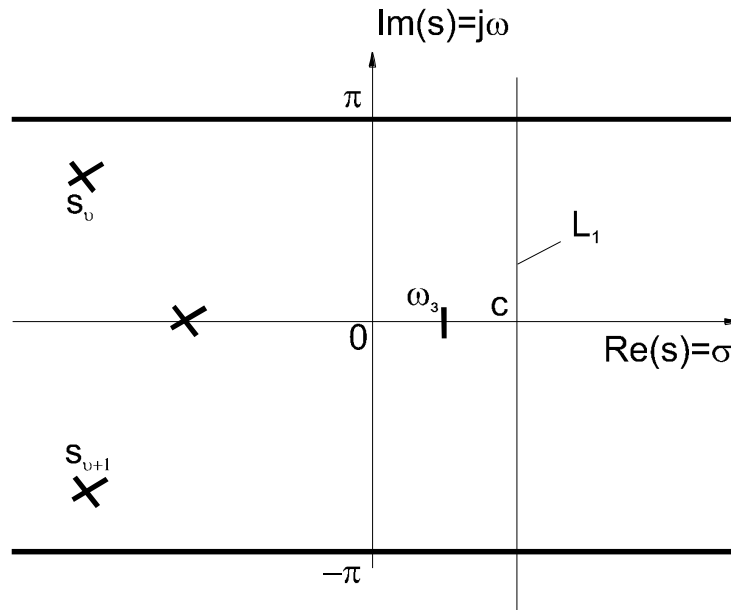


Рис. 2.1. Основна смуга дослідження  $F^*(s)$  на  $s$ -площині

## 2.2. Умова існування дискретного перетворення Лапласа

Як випливає з (2.1) зображення ґратчастої функції являє собою суму нескінченного ряду. Для того щоб це зображення існувало, необхідно, щоб ряд (2.1) був збіжним. Покажемо, що коли цей ряд збіжний при  $\text{Re}(s) = \sigma_0$  ( $\text{Re}(s)$  – дійсна частина комплексного числа  $s$ ), то він також є абсолютно та рівномірно збіжним, причому за всіх значень  $s$ , які задовольняють умову  $\text{Re}(s) > \sigma_0$ .

Розглянемо ряд (2.1) при  $\text{Re}(s) = \sigma_0$ :

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-sk} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-(\sigma_0 + j\omega)k}. \quad (2.5)$$

За умовою цей ряд збіжний. Із збіжності ряду випливає, що його загальний член  $e^{-(\sigma_0 + j\omega)k} f(k)$  прямує до нуля при  $k \rightarrow \infty$  та обмежений при будь-якому  $k > 0$ , тобто

$$\left| e^{-(\sigma_0 + j\omega)k} f(k) \right| = e^{-\sigma_0 k} |f(k)| < M. \quad (2.6)$$

Сформуємо тепер ряд для  $\text{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$ . Для нього

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| e^{-(\sigma + j\omega)k} f(k) \right| = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sigma k} |f(k)|. \quad (2.7)$$

Цей вираз можна представити у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sigma_0 k} |f(k)| e^{-(\sigma - \sigma_0)k}. \quad (2.8)$$

Коли  $\sigma > \sigma_0$ , значить  $e^{-(\sigma - \sigma_0)} < 1$  при  $k > 0$ . Враховуючи нерівність (2.6), члени ряду (2.8) менше членів ряду збіжної геометричної прогресії  $\sum M e^{-(\sigma - \sigma_0)k}$ . Отже, ряд (2.8) збіжний. Але члени ряду (2.5) за абсолютною величиною більше членів ряду (2.8) та (2.1) при  $\text{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$ . Таким чином, ряд (2.1) збіжний абсолютно, значить він збіжний також рівномірно при  $\text{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$ . Очевидно, якщо ряд (2.1) розбіжний при  $\text{Re}(s) = \sigma_3$ , то він буде розбіжним при будь-якому  $\text{Re}(s) = \sigma < \sigma_3$ . Значення  $\sigma_3$ , для якого за умови  $\sigma > \sigma_3$  ряд (2.1) збіжний, а за умови  $\sigma < \sigma_3$  розбіжний, називається *абсцисою збіжності*. Абсциса збіжності  $\sigma_3$ , отже, являє собою нижню границю значень  $\sigma$ , за яких ряд (2.1) збіжний.

Якщо для даної ґратчастої функції  $f(k)$  абсциса збіжності  $\sigma_3 < \infty$ , то ряд (2.1) збіжний при усіх значеннях  $s$ , що задовольняють умову  $\text{Re}(s) = \sigma > \sigma_3$ . У цьому випадку ґратчаста функція  $f(k)$  називається *такою, що перетворюється*. Усякій ґратчастій функції  $f(k)$ , що перетворюється, відповідає зображення  $F^*(s)$ .

Якщо ж для даної ґратчастої функції  $f(k)$  абсциса збіжності  $\sigma_3 = \infty$ , то ряд (2.1) розбіжний при будь-якому  $s$ . У цьому випадку зображення  $f(k)$  не існує.

*Приклад 2.1.* Нехай  $f(k) = 1(k)$  (рис. 2.2). Зображення цієї “сталі” ґратчастої функції буде

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} 1 = 1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots \quad (2.9)$$

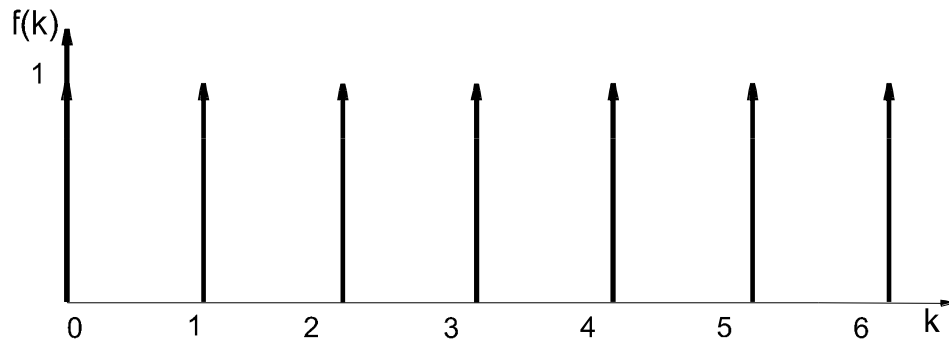


Рис. 2.2. Ґратчаста функція  $f(k) = 1(k)$

Як бачимо, цей ряд представляє собою геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює  $e^{-s}$ . Сума такої прогресії буде

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} = \frac{e^s}{e^s - 1}.$$

Отже,

$$F^*(s) = D\{1(k)\} = \frac{e^s}{e^s - 1}. \quad (2.10)$$

Таким чином, функція  $f(k) = 1(k)$  є такою, що перетворюється.

Для визначення абсциси збіжності треба скористатися правилом збіжності будь-якої геометричної прогресії, а саме

$$|q| < 1, \quad (2.11)$$

де  $q$  – знаменник геометричної прогресії.

Абсциса збіжності  $\sigma_3$  для нашого приклада розраховується з нерівності

$$|e^{-s}| < 1. \quad (2.12)$$

Нерівність (2.12) виконується при  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , звідси  $\sigma_3 = 0$ .

*Приклад 2.2.* Нехай  $f(k) = e^{\alpha k}$ , де  $\alpha$  – дійсне число. Відповідне зображення цієї функції буде

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} e^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(\alpha-s)k} = 1 + e^{2(\alpha-s)} + e^{3(\alpha-s)} + \dots$$

Це геометрична прогресія, знаменник  $q$  якої  $e^{\alpha-s}$ . Нерівність (2.11) виконується при  $\alpha < \operatorname{Re}(s)$ . Отже, абсциса збіжності для цього приклада  $\sigma_3 = \alpha$ .

Зображення  $F^*(s)$  визначаємо як суму геометричної прогресії

$$F^*(s) = D\{e^{\alpha k}\} = \frac{1}{1 - e^{\alpha-s}} = \frac{e^s}{e^s - e^{\alpha}}. \quad (2.13)$$

*Приклад 2.3.* Розглянемо функції  $f_1(k) = k!$  та  $f_2(k) = e^{\alpha k^2}$ . Їх зображення визначаються так

$$F_1^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k! e^{-sk} = 1 + e^{-s} + 2e^{-2s} + 6e^{-3s} + \dots,$$

$$\begin{aligned} F_2^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k^2} e^{-sk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k(\alpha k - s)} = \\ &= 1 + e^{(\alpha-s)} + e^{2(2\alpha-s)} + e^{3(3\alpha-s)} + \dots \end{aligned}$$

Ці ряди будуть збіжними, тільки коли  $\sigma_3 = \infty$ . Отже, зображення цих гратчастих функцій не існує. Таким чином, існування абсциси збіжності  $\sigma_3 < \infty$  забезпечує існування зображення.



Як випливає з (2.6), якщо ґратчаста функція задовольняє умову

$$|f(k)| < Me^{\sigma_0 k}, \quad (2.14)$$

тобто коли темп її зростання небільше темпу зростання  $e^{\sigma_0 k}$ , то абсциса збіжності  $\sigma_3 < \sigma_0$  і зображення цієї функції існує.

### 2.3. Теорема дискретного перетворення Лапласа

Важливу роль при використанні  $D$ -перетворення відіграють теореми, які встановлюють відповідність між операціями, що виконуються в області оригіналів та зображень. Ці теореми дають змогу досить просто, обминаючи безпосереднє підсумовування рядів, яке часто виявляється складним, знайти зображення багатьох ґратчастих функцій [10-12]. Крім того, вони дозволяють застосувати  $D$ -перетворення до розв'язка різницевих рівнянь та до дослідження сталих та перехідних процесів у дискретних системах.

*Теорема 2.1. Лінійність оригіналів та зображень.* Нехай деяка ґратчаста функція  $f(k)$  представляє собою лінійну комбінацію  $n$  ґратчастих функцій  $f_v(k)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ):

$$f(k) = \sum_{v=1}^n a_v f_v(k), \quad (2.15)$$

Зображення яких  $f_v(k)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) відомо

$$F_v(s) = D\{f_v(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f_v(k). \quad (2.16)$$

Необхідно знайти  $F^*(s) = D\{f(k)\}$ .

З визначення  $D$ -перетворення (2.1) дістанемо:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \sum_{v=1}^n a_v f_v(k).$$

Змінюючи порядок підсумовування, маємо:

$$F^*(s) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f_{\nu}(k).$$

У результаті з урахуванням (2.16) дістанемо

$$F^*(s) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} F_{\nu}^*(s), \quad (2.17)$$

або

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} F_{\nu}^*(s) \xrightarrow{\div} \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} f_{\nu}(k). \quad (2.18)$$

Таким чином, зображення лінійної комбінації гратчастих функцій дорівнює лінійній комбінації зображень цих функцій.

*Приклад 2.4.* Знайти зображення функції  $f(k) = sh\alpha k$ , де  $\alpha$  – сталий коефіцієнт.

Зважаючи на те, що

$$sh\alpha k = \frac{1}{2}(e^{\alpha k} - e^{-\alpha k}),$$

застосуємо теорему лінійності оригіналів та зображень:

$$F^*(s) = D\{sh\alpha k\} = \frac{1}{2}D\{e^{\alpha k}\} - \frac{1}{2}D\{e^{-\alpha k}\}.$$

Враховуючи (2.13), дістанемо

$$D\{e^{\alpha k}\} = \frac{e^s}{e^s - e^{\alpha}},$$

$$D\{e^{-\alpha k}\} = \frac{e^s}{e^s - e^{-\alpha}},$$

.....

тоді

$$\begin{aligned}
 F^*(s) &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^s}{e^s - e^\alpha} - \frac{e^s}{e^s - e^{-\alpha}} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^s(e^s - e^{-\alpha}) - e^s(e^s - e^\alpha)}{(e^s - e^{-\alpha})(e^s - e^\alpha)} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^s(e^\alpha - e^{-\alpha})}{e^{2s} - e^s(e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1} = \frac{e^s \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}}{e^{2s} - 2e^s \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})}{2} + 1} = \\
 &= \frac{e^s sh\alpha}{e^{2s} - 2e^s ch\alpha + 1}
 \end{aligned}$$

Отже,

$$D\{sh\alpha k\} = \frac{e^s sh\alpha}{e^{2s} - 2e^s ch\alpha + 1}. \quad (2.19)$$

*Теорема 2.2. Теорема перестановки.* Нехай  $f(k)$  – комплекснозначна функція

$$f(k) = f_1(k) + jf_2(k),$$

де  $f_1(k) = \text{Re}[f(k)]$  – дійсна частина,  $f_2(k) = \text{Im}[f(k)]$  – уявна частина.

Для визначення  $F^*(s) = D\{f(k)\}$  скористаємося теоремою лінійності. Маємо

$$D\{f(k)\} = D\{f_1(k)\} + jD\{f_2(k)\},$$

звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
 \text{Re}[D\{f(k)\}] &= D\{f_1(k)\} = D\{\text{Re}[f(k)]\} \\
 \text{Im}[D\{f(k)\}] &= D\{f_2(k)\} = D\{\text{Im}[f(k)]\},
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

тобто дійсна (уявна) частина зображення комплекснозначної функції дорівнює зображенню дійсної (уявної) її частини

*Приклад 2.5.* Знайти  $F^*(s) = D\{e^{j\omega k}\}$ . Користуючись формулою Ейлера

$$e^{j\omega k} = \cos \omega k + j \sin \omega k.$$

Звідси, враховуючи теорему перестановки, дістанемо

$$D\{e^{j\omega k}\} = D\{\cos \omega k\} + jD\{\sin \omega k\}. \quad (2.21)$$

З другого боку, згідно теореми лінійності оригіналів та зображень, можна записати

$$D\{e^{j\omega k}\} = \frac{e^s}{e^s - e^{j\omega}}.$$

Вводячи заміну  $e^{j\omega} = \cos \omega + j\sin \omega$ , маємо

$$D\{e^{j\omega k}\} = \frac{e^s}{e^s - \cos \omega - j\sin \omega} = \frac{e^s(e^s - \cos \omega) + je^s \sin \omega}{(e^s - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}.$$

Виділяючи дійсну та уявну частини та враховуючи (2.21), запишемо

$$\begin{aligned} D\{\operatorname{Re}(e^{j\omega k})\} &= D\{\cos \omega k\} = \frac{e^s(e^s \cos \omega)}{(e^s - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}, \\ D\{\operatorname{Im}(e^{j\omega k})\} &= D\{\sin \omega k\} = \frac{e^s \sin \omega}{(e^s - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}, \end{aligned}$$

Звідси після розкриття дужок у знаменнику дістанемо

$$D\{\sin \omega k\} = \frac{e^s \sin \omega}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1}, \quad (2.22)$$

$$D\{\cos \omega k\} = \frac{e^s(e^s - \cos \omega)}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1}, \quad (2.23)$$

*Теорема 2.3. Теорема зсуву в області оригіналів.* Нехай відома  $F^*(s) = D\{f(k)\}$ .

Треба знайти зображення ґратчастої функції  $f(k + \tau)$ ,

де  $\tau$  – ціле додатне число. За визначенням

$$D\{f(k + \tau)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k + \tau).$$

Виконаємо підстановку  $k + \tau = m$ . Тоді

$$D\{f(k + \tau)\} = \sum_{m=\tau}^{\infty} e^{-s(m-\tau)} f(m) = \sum_{m=\tau}^{\infty} e^{s\tau} e^{-sm} f(m).$$

Винесемо  $e^{s\tau}$  за знак підсумовування та почнемо останнє з  $m = 0$  (при цьому для збереження знака рівності відніmemo відповідну суму членів ряду). Отже,

$$D\{f(k + \tau)\} = e^{s\tau} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} e^{-sm} f(m) - \sum_{m=0}^{\tau-1} e^{-sm} f(m) \right].$$

Враховуючи, що результат підсумовування не залежить від позначення змінної підсумовування, а значить, перша сума повторює вираз (2.1), дістанемо

$$D\{f(k + \tau)\} = e^{s\tau} [F^*(s) - \sum_{m=0}^{\tau-1} e^{-sm} f(m)] \quad (2.24)$$

Зокрема, якщо

$$f(0) = f(1) = \dots = f(\tau - 1) = 0 \quad (2.25)$$

тобто коли, ґратчаста функція при  $k < \tau$  тотожно дорівнює нулю, то з (2.24) випливає

$$D\{f(k + \tau)\} = e^{s\tau} F^*(s) \quad (2.26)$$

Тепер знайдемо зображення, яке відповідає функції  $f(k - \tau)$ . Аналогічно попередньому

$$D\{f(k - \tau)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k - \tau).$$

Підставляючи  $k - \tau = m$ , маємо

$$D\{f(k - \tau)\} = \sum_{m=-\tau}^{\infty} e^{-s(m+\tau)} f(m) = e^{-s\tau} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} e^{-sm} f(m) + \sum_{m=-\tau}^{-1} e^{-sm} f(m) \right]$$

Остаточно буде

$$D\{f(k - \tau)\} = e^{-s\tau} [F^*(s) + \sum_{m=1}^{\tau} e^{sm} f(-m)] \quad (2.27)$$

Якщо ґратчаста функція  $f(k)$  тотожно дорівнює нулю при від'ємних значеннях незалежної змінної, тобто

$$f(-1) = f(-2) = \dots = f(-\tau) = 0, \quad (2.28)$$

то з (2.24) дістанемо

$$D\{f(k - \tau)\} = e^{-s\tau} F^*(s). \quad (2.29)$$

Таким чином, якщо виконуються умови (2.22) або (2.25) відповідно, то зсув аргумента ґратчастої функції на  $\pm \tau$  відповідає множенню її зображення на  $e^{\pm s\tau}$ . Цю теорему в залежності від знака зсуву часто називають також *теоремою упередження або запізнювання*.

*Приклад 2.6.* Нехай  $f(k) = 1(k - \tau)$ , причому  $f(k) \equiv 0$  при  $k < \tau$ . Треба знайти  $F^*(s) = D\{f(k)\}$ .

Як відомо з (2.10)

$$D\{1(k)\} = \frac{e^s}{e^s - 1}.$$

Згідно теореми зсуву (2.26)

$$F^*(s) = D\{1(k - \tau)\} = e^{-s\tau} \frac{e^s}{e^s - 1} = \frac{1}{e^{s(\tau-1)}(e^s - 1)}.$$

При  $\tau = 1$  маємо

$$D\{1(k - 1)\} = \frac{1}{e^s - 1}. \quad (2.30)$$

*Теорема 2.4. Зображення періодичної ґратчастої функції.* Нехай ґратчаста функція  $f(k)$  періодична з періодом  $M$ , тобто

$$f(k) = f(k + M),$$

де  $M$ – період (число дискрет). Застосуємо  $D$ -перетворення до обох частин рівняння :

$$F^*(s) = D\{f(k + M)\}.$$

У правій частині цього виразу можна скористатися теоремою зсуву (2.24).

Тоді

$$F^*(s) = e^{sM} \left[ F^*(s) - \sum_{m=0}^{M-1} e^{sm} f(m) \right],$$

звідки

$$F^*(s) = \frac{e^{sM}}{e^{sM} - 1} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-sm} f(m). \quad (2.31)$$

Суму у (2.31) можна розглядати як зображення ґратчастої функції, яка співпадає з початковою в інтервалі  $(0, M - 1)$  та дорівнює нулю поза цим інтервалом.

Для симетричної періодичної ґратчастої функції

$$f(k + N) = -f(k),$$

де  $N$  – напівперіод, аналогічним чином дістанемо

$$F^*(s) = \frac{e^{sN}}{e^{sN} - 1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-sm} f(m) \quad (2.32)$$

*Приклад 2.7.* Знайдемо зображення функції

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } 8k_0 \leq k < 8k_0 + 4 \\ -1 & \text{при } 8k_0 + 4 \leq k \leq 8k_0 + 8 \end{cases} \quad (2.33)$$

де  $k_0$  – будь-яке ціле число та  $f(k + 8) = f(k)$ . Ця періодична функція симетрична з напівперіодом  $N = 4$  (рис. 2.3).

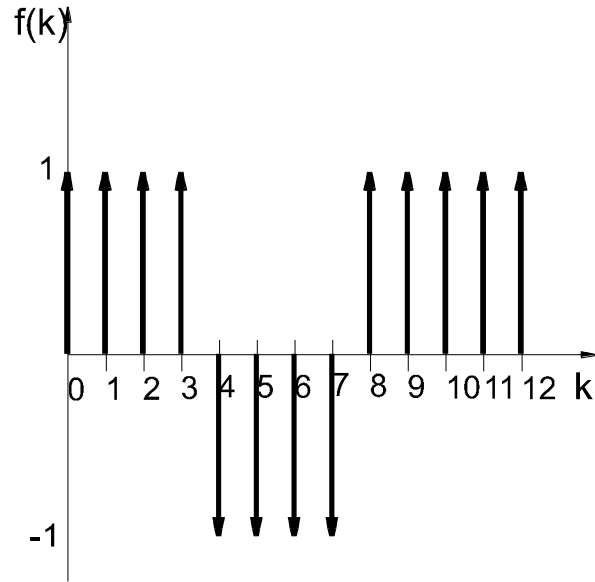


Рис. 2.3. Ґратчаста функція (2.30)

Згідно (2.32)

$$F^*(s) = \frac{e^{4s}}{e^{4s} + 1} \sum_{m=0}^3 e^{-sm} = \frac{e^{4s}}{e^{4s} + 1} \frac{1 - e^{-4s}}{1 - e^{-s}} = \frac{e^s}{e^s - 1} \frac{e^{4s} - 1}{e^{4s} + 1}.$$

*Теорема 2.5. Теорема зсуву в області зображень.* Замінімо у співвідношенні (2.1)  $s$  на  $s \pm \lambda$ .

Тоді

$$F^*(s \pm \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s \pm \lambda)k} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} [e^{\mp \lambda k} f(k)],$$

Звідки випливає

$$F^*(s \pm \lambda) = D\{e^{\mp \lambda k} f(k)\} \quad (2.34)$$

Отже, зсув аргументу в області зображень на  $\pm \lambda$  відповідає множенню оригіналу на  $e^{\pm \lambda k}$ .



Приклад 2.8. Знайти  $D$ -зображення для  $f(k) = e^{\lambda k} \text{sh} \alpha k$ . З (2.19) відомо, що

$$\text{sh} \alpha k = \frac{e^s \text{sh} \alpha}{e^{2s} - 2e^s \text{ch} \alpha + 1}.$$

Тоді з (2.34) маємо

$$\begin{aligned} F^*(s) &= D\{e^{\lambda k} \text{sh} \alpha k\} = \frac{e^{(s-\lambda)} \text{sh} \alpha}{e^{2(s-\lambda)} - 2e^{(s-\lambda)} \text{ch} \alpha + 1} = \\ &= \frac{e^s e^\lambda \text{sh} \alpha}{e^{2s} - 2e^s e^\lambda \text{ch} \alpha + e^{2\lambda}} \end{aligned}$$

Теорема 2.6. Зображення різниць. Перша різниця ґратчастої функції дорівнює

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k).$$

Використовуючи теореми лінійності (2.17) та зсуву (2.24), дістанемо

$$D\{\Delta f(k)\} = e^s [F^*(s) - f(0) - F^*(s)],$$

або

$$D\{\Delta f(k)\} = (e^s - 1)F^*(s) - e^s f(0). \quad (2.35)$$

Для другої різниці

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k).$$

На підставі теореми зсуву та з урахування (2.35) маємо

$$\begin{aligned} D\{\Delta f(k+1)\} &= e^s [D\{\Delta f(k)\} - \Delta f(0)] = \\ &= e^s [(e^s - 1)F^*(s) - e^s f(0) - e^s \Delta f(0)] \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} D\{\Delta^2 f(k)\} &= e^s [(e^s - 1)F^*(s) - e^s f(0)] - e^s \Delta f(0) - \\ &\quad - (e^s - 1)F^*(s) + e^s f(0), \end{aligned}$$

або остаточно

$$D\{\Delta^2 f(k)\} = (e^s - 1)^2 F^*(s) - e^s (e^s - 1) f(0) - e^s \Delta f(0).$$

Продовжуючи цей процес для третьої, четвертої і т.д. різниць, для  $n$ -ї різниці можна записати

$$D\{\Delta^n f(k)\} = (e^s - 1)^n F^*(s) - e^s \sum_{v=0}^{n-1} (e^s - 1)^{n-1-v} \Delta^v f(0) \quad (2.36)$$

У формулі (2.36) треба вважати, що  $\Delta^0 f(0) = f(0)$ .

Якщо співвідношення (2.36) розв'язати відносно  $F^*(s)$ , то воно виявляється дуже зручним для обчислення зображень деяких функцій. З (2.36) дістанемо

$$F^*(s) = \frac{e^s}{e^s - 1} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\Delta^v f(0)}{(e^s - 1)^v} + \frac{1}{(e^s - 1)^n} D\{\Delta^n f(k)\} \quad (2.37)$$

*Приклад 2.9.* Треба знайти  $D\{f(k)\}$ , якщо  $f(k) = k$ . Розрахуємо першу різницю

$$\Delta f(k) = (k+1) - k = 1.$$

Друга різниця буде

$$\Delta^2 f(k) = 0.$$

Нулю будуть дорівнювати і решта різниць більш високого порядку. Тому приймемо  $n = 2$  та, маючи на увазі, що  $f(0) = 0$  та  $\Delta f(0) = 1$ , з формули (2.37) дістанемо

$$D\{k\} = \frac{e^s}{(e^s - 1)^2} \quad (2.38)$$

*Приклад 2.10.* Для функції  $f(k) = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2!}$  знайти  $F^*(s) = D\{f(k)\}$ .

Визначимо різниці:

$$\Delta f(k) = \binom{k+1}{2} - \binom{k}{2} = \frac{(k+1)k}{2!} - \frac{k(k-1)}{2!} = k;$$

$$\Delta^2 f(k) = (k+1) - k = 1.$$

Третя та інші різниці вищого порядку дорівнюють нулю.

Прийmemo  $n = 3$ . Пам'ятаючи, що  $f(0) = 0$ ,  $\Delta f(0) = 0$ ,  $\Delta^2 f(0) = 1$ , дістанемо з (2.37)

$$F^*(s) = \frac{e^s}{(e^s - 1)^3}. \quad (2.39)$$

*Приклад 2.11.* Знайти  $D\{f(k)\}$ , якщо  $f(k) = k^2$ .

Розрахуємо різниці:

$$\Delta f(k) = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1;$$

$$\Delta^2 f(k) = [2(k+1)+1] - (2k+1) = 2.$$

Третя та інші різниці більш високого порядку будуть дорівнювати нулю. Тоді, задаючи  $n = 3$  та враховуючи, що  $f(0) = 0$ ,  $\Delta f(0) = 1$ ,  $\Delta^2 f(0) = 2$ , з формули (2.37) дістанемо

$$D\{k^2\} = \frac{e^s}{(e^s - 1)^2} + \frac{2e^s}{(e^s - 1)^3} = \frac{e^s}{(e^s - 1)^3}(e^s + 1) \quad (2.40)$$

Якщо у формулі (2.36)  $f^v(0) = 0$  при  $v = 0, 1, \dots, (n - 1)$ , що еквівалентне  $f(0) = f(1) = \dots = f(n - 1) = 0$ , то з (2.36) отримуємо досить простий вираз:

$$D\{\Delta^n f(k)\} = (e^s - 1)^n F^*(s). \quad (2.41)$$

Отже, у цьому випадку операція знаходження  $n$ -ї різниці в області оригіналів відповідає в області зображень множенню на  $(e^s - 1)^n$ .

*Теорема 2.7. Зображення суми.* Сума гратчастої функції визначається виразом

$$S(k) = \sum_{m=0}^{k-1} f(m) \quad (2.42)$$

Складемо першу різницю цієї суми

$$\Delta S(k) = \Delta \sum_{m=0}^{k-1} f(m) = S(k+1) - S(k) = \sum_{m=0}^k f(m) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m) = f(k)$$

Згідно теореми про зображення різниць (2.36) зображення цієї різниці буде

$$D\{S(k)\} = D\{f(k)\} = F^*(s) = (e^s - 1)D\{S(k)\}, \quad (2.43)$$

тому що значення суми при  $k = 0$  дорівнює нулю. З виразу (2.43) дістанемо

$$D\{S(k)\} = D\left\{\sum_{m=0}^{k-1} f(m)\right\} = \frac{F^*(s)}{e^s - 1} \quad (2.44)$$

Отже, підсумовуванню в області оригіналів в області зображень відповідає ділення на  $(e^s - 1)$ .

Продовжуючи вказаний процес, можна показати, що  $n$ -кратному підсумовуванню в області оригіналів в області зображень відповідає ділення на  $(e^s - 1)^n$ .

*Приклад 2.12.* Необхідно знайти оригінал, який відповідає зображенню

$$F^*(s) = \frac{e^s}{(e^s - 1)(e^s - e^\alpha)}.$$

Беручи до уваги, що

$$F_1^*(s) = \frac{e^s}{e^s - e^\alpha} \xrightarrow{\div} e^{\alpha k},$$

будемо вважати, що згідно (2.44)

$$\frac{F_1^*(s)}{e^s - 1} \xrightarrow{\div} \sum_{m=0}^{k-1} e^{\alpha m}.$$

Відомо, що

$$\sum_{m=0}^{k-1} e^{\alpha m} = \frac{e^{\alpha k} - 1}{e^\alpha - 1}.$$

Отже,

$$F^*(s) = \frac{e^s}{(e^s - 1)(e^s - e^\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - e^\alpha} (1 - e^{\alpha k}). \quad (2.45)$$

Теорема про зображення суми дозволяє також досить просто розраховувати суми ґратчастих функцій.

*Приклад 2.13.* Знайдемо суму  $S(k) = \sum_{m=0}^{k-1} m$ .

Раніше (2.38) визначено, що

$$D\{k\} = \frac{e^s}{(e^s - 1)^2}.$$

Тоді згідно теореми про зображення суми (2.44) маємо співвідношення

$$\frac{e^s}{(e^s - 1)^3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{k-1} m.$$

Але раніше (2.39) отримано

$$\frac{e^s}{(e^s - 1)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{k(k-1)}{2!}.$$

Звідси дістанемо

$$\sum_{m=0}^{k-1} m = \frac{k(k-1)}{2!}. \quad (2.46)$$

Зрозуміло, що суму  $\sum_{m=0}^{k-1} m$  можна було знайти й іншим шляхом, наприклад, як суму арифметичної прогресії.

Розглянуті приклади застосування теореми про зображення різниць та сум свідчать, що множник  $(e^s - 1)$  у дискретному перетворенні Лапласа відіграє роль параметра перетворення  $s$  у звичайному перетворенні Лапласа.

*Теорема 2.8. Диференціювання за  $s$ . Продиференціюємо основне співвідношення (2.1) за  $s$  декілька разів:*

$$\begin{aligned}\frac{dF^*(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k) \right] = - \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-sk} f(k), \\ \frac{d^2 F^*(s)}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left[ - \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-sk} f(k) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-sk} f(k), \\ \frac{d^3 F^*(s)}{ds^3} &= \frac{d}{ds} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-sk} f(k) \right] = - \sum_{k=0}^{\infty} k^3 e^{-sk} f(k).\end{aligned}$$

Зрозуміло, що після диференціювання  $n$  разів будемо мати

$$\frac{d^n F^*(s)}{ds^n} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} [(-1)^n k^n f(k)].$$

Порівнюючи цей вираз з (2.1), запишемо

$$D\{k^n f(k)\} = (-1)^n \frac{d^n F^*(s)}{ds^n}. \quad (2.47)$$

Отже, множення оригіналу на  $k^n$  відповідає  $n$ -кратному диференціюванню зображення за  $s$ .

*Приклад 2.14.* Нехай  $f(k) = k^2$ . Як відомо (2.40),

$$D\{k^2\} = \frac{e^s}{(e^s - 1)^3} (e^s + 1).$$

Застосовуючи теорему про диференціювання за  $s$  (2.47) до цього виразу, дістанемо

$$D\{k^3\} = - \frac{d}{ds} \left[ \frac{e^s}{(e^s - 1)^3} (e^s + 1) \right] = \frac{e^s}{(e^s - 1)^4} (e^{2s} + 4e^s + 1) \quad (2.48)$$

Приклад 2.15. Нехай  $f(k) = k^n$ . Зобразимо функцію  $f(k)$  у вигляді

$$f(k) = k^n 1(k).$$

Тоді, застосовуючи теорему про диференціювання за  $s$  та пам'ятаючи (2.10), запишемо

$$D\{k^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[ \frac{e^s}{e^s - 1} \right].$$

Користуючись формулами диференціювання дробу, останній вираз може бути представлений так

$$D\{k^n\} = \frac{e^s}{(e^s - 1)^{n+1}} R_n^*(s), \quad (2.49)$$

де

$$R_0^*(s) = 1,$$

$$R_1^*(s) = 1,$$

$$R_2^*(s) = e^s + 1, \quad (2.50)$$

$$R_3^*(s) = e^{2s} + e^s + 1,$$

$$R_4^*(s) = e^{3s} + 11e^{2s} + 11e^s + 1$$

і т.д.

Загалом  $R_n^*(s)$  можна зобразити у вигляді визначника

$$R_n^*(s) = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 - e^s & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 - e^s & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.51)$$

*Теорема 2.9. Диференціювання за  $e^{-s}$ . Продиференціюємо основне співвідношення (2.1)  $n$  разів за  $e^{-s}$ . Маємо*

$$\frac{d^n F^*(s)}{de^{-sn}} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)e^{-(k-n)} f(k).$$

Позначаючи факторіальну функцію  $k^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)$  та множачи обидві частини рівняння на  $e^{-sn}$ , дістанемо

$$e^{-sn} \frac{d^n F^*(s)}{de^{-sn}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} [k^{(n)} f(k)],$$

Звідси випливає

$$D\{k^{(n)} f(k)\} = e^{-sn} \frac{d^n F^*(s)}{de^{-sn}}. \quad (2.52)$$

Отже, множення оригіналу на  $k^{(n)}$  відповідає  $n$ -кратному диференціюванню зображення за  $e^{-s}$  та множенню результату диференціювання на  $e^{-sn}$ .

*Теорема 2.10. Інтегрування за  $s$ . Нехай ґратчаста функція  $f(k)$  задовольняє умову  $f(0) = 0$  та  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} = 0$ . Інтегруючи обидві частини основного співвідношення (2.1) від  $s$  до  $\infty$ , маємо*

$$\int_s^{\infty} F^*(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} \left[ \frac{f(k)}{k} \right].$$

Повторюючи інтегрування  $n$  разів, дістанемо

$$\int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty} F^*(s) (ds)^n = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \left[ \frac{f(k)}{k^n} \right]. \quad (2.53)$$

Отже,

$$D\left\{ \frac{f(k)}{k^n} \right\} = \int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty} F^*(s) (ds)^n. \quad (2.54)$$



При цьому припускаємо, що  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k^n} = 0$ .

Отже, ділення оригіналу на  $k^n$  відповідає  $n$ -кратному інтегруванню зображення від  $s$  до  $\infty$ .

*Приклад 2.16.* Нехай  $f(k) = 1(k - 1)$ ,  $f(0) = 0$ . Зображення  $1(k - 1)$  дорівнює (2.30)  $1/(e^s - 1)$ . Згідно (2.51) маємо

$$D\left\{\frac{1(k-1)}{k}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{ds}{e^s - 1} = \ln \frac{e^s}{e^s - 1}. \quad (2.55)$$

Якщо  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} = a \neq 0$ , то, додаючи до обох частин рівняння (2.53)  $a$ , дістанемо

$$D\left\{\frac{f(k)}{k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \frac{f(k)}{k} = a + \int_s^{\infty} F^*(s) ds. \quad (2.56)$$

*Приклад 2.17.* Нехай  $f(k) = \sin \omega k$ . Зображення  $\sin \omega k$  згідно з (2.22)

$$D\{\sin \omega k\} = \frac{e^s \sin \omega}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1}.$$

Величину  $a$  з формули (2.56) визначають так:

$$a = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \omega k}{k} = \omega.$$

Отже, згідно формулою (2.56), маємо

$$D\left\{\frac{\sin \omega k}{k}\right\} = \omega + \int_s^{\infty} \frac{e^s \sin \omega}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1} ds.$$

Відомо, що

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} \frac{e^s}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1} ds &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \omega}} \operatorname{arctg} \frac{e^s - \cos \omega}{\sqrt{1 - \cos^2 \omega}} \Big|_s^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\sin \omega} \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{e^s - \cos \omega} \end{aligned}$$

Отже,

$$D\left\{\frac{\sin \omega k}{k}\right\} = \omega + \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{e^s - \cos \omega}. \quad (2.57)$$

*Теорема 2.11. Диференціювання по параметру.* Нехай оригінал та зображення містять параметр  $\lambda$ , не залежний від  $k$  та  $s$ :

$$F^*(s, \lambda) \xrightarrow{\div} f(k, \lambda),$$

або в явній формі

$$F^*(s, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k, \lambda). \quad (2.58)$$

Диференціюючи цей вираз за  $\lambda$ , дістаємо

$$\frac{\partial F^*(s, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \left[ \frac{\partial f(k, \lambda)}{\partial \lambda} \right],$$

або

$$\frac{\partial F^*(s, \lambda)}{\partial \lambda} \xrightarrow{\div} \frac{\partial f(k, \lambda)}{\partial \lambda}, \quad (2.59)$$

тобто диференціювання за параметром перестановно з  $D$ -перетворенням.

*Приклад 2.18.* З (2.13) відомо

$$D\{e^{\alpha k}\} = \frac{e^s}{e^s - e^\alpha}.$$

Диференціюючи за параметром  $\alpha$ , згідно (2.59) дістанемо:

$$D\left\{\frac{\partial e^{\alpha k}}{\partial \alpha}\right\} = D\{ke^{\alpha k}\} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{e^s}{e^s - e^\alpha} \right] = \frac{e^s e^\alpha}{(e^s - e^\alpha)^2}. \quad (2.60)$$

*Теорема 2.12. Інтегрування за параметром.* Проінтегруємо основне співвідношення (2.58) за параметром

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} F^*(s, \lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k, \lambda) d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \left[ \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(k, \lambda) d\lambda \right],$$

звідки дістаємо

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} F^*(s, \lambda) d\lambda \xrightarrow{\cdot} \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(k, \lambda) d\lambda, \quad (2.61)$$

тобто інтегрування за параметром перестановно з  $D$ -перетворенням.

*Приклад 2.19.* Скористаємось попереднім прикладом:

$$D\{e^{\alpha k}\} = \frac{e^s}{e^s - e^\alpha}.$$

Інтегруючи за параметром  $\alpha$ , згідно з теоремою (2.61) дістаємо:

$$D\left\{\int_0^\alpha e^{\alpha k} d\alpha\right\} = D\left\{\frac{e^{\alpha k} - 1}{k}\right\} = \int_0^\alpha \frac{e^s}{e^s - e^\alpha} d\alpha,$$

але

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{a - e^\alpha} = \frac{1}{a} [\alpha - \ln(a - e^\alpha)].$$

Отже,

$$D\left\{\frac{e^{\alpha k} - 1}{k}\right\} = \alpha - \ln \frac{e^s - e^\alpha}{e^s - 1}. \quad (2.62)$$

*Теорема 2.13.* Множення зображень (теорема згортки у дійсній області). Ця теорема дає можливість визначати оригінал добутку зображень, якщо відомі оригінали співмножників.

Нехай

$$F_1^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-sm} f_1(m),$$

$$F_2^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f_2(k).$$

Перемножимо  $F_1^*(s)$  та  $F_2^*(s)$ :

$$\begin{aligned}
F_1^*(s)F_2^*(s) &= \left[ \sum_{m=0}^{\infty} e^{-sm} f_1(m) \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f_2(k) \right] = \\
&= [f_1(0) + e^{-s} f_1(1) + e^{-2s} f_1(2) + e^{-3s} f_1(3) + \dots] \times \\
&\times [f_2(0) + e^{-s} f_2(1) + e^{-2s} f_2(2) + e^{-3s} f_2(3) + \dots] = \\
&= f_1(0)f_2(0) + e^{-s} f_1(1)f_2(0) + e^{-2s} f_1(2)f_2(0) + e^{-3s} f_1(3)f_2(0) + \\
&+ \dots + e^{-s} f_1(0)f_2(1) + e^{-2s} f_1(1)f_2(1) + e^{-3s} f_1(2)f_2(1) + \\
&+ e^{-4s} f_1(3)f_2(1) + \dots + e^{-2s} f_1(0)f_2(2) + e^{-3s} f_1(1)f_2(2) + \\
&+ e^{-4s} f_1(2)f_2(2) + e^{-5s} f_1(3)f_2(2) + \dots + e^{-3s} f_1(0)f_2(3) + \\
&+ e^{-4s} f_1(1)f_2(3) + e^{-5s} f_1(2)f_2(3) + e^{-6s} f_1(3)f_2(3) + \dots = \\
&= f_1(0)f_2(0) + e^{-s} [f_1(1)f_2(0) + f_1(0)f_2(1)] + e^{-2s} [f_1(2)f_2(0) + \\
&+ f_1(0)f_2(1) + f_1(1)f_2(2)] + e^{-s} [f_1(3)f_2(0) + f_1(2)f_2(1) + \\
&+ f_1(1)f_2(2) + f_1(0)f_2(3)] + \dots
\end{aligned}$$

У скороченому вигляді можна записати так

$$\begin{aligned}
F_1^*(s)F_2^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \left[ \sum_{m=0}^k f_1(m)f_2(k-m) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \\
&\left[ \sum_{m=0}^k f_1(k-m)f_2(m) \right]
\end{aligned}$$

Це означає, що

$$F_1^*(s)F_2^*(s) \rightarrow \sum_{m=0}^k f_1(m)f_2(k-m) = \sum_{m=0}^k f_1(k-m)f_2(m). \quad (2.63)$$

Ця формула називається *формулою згортки у дійсній області*.

Наведемо інше доведення цієї теореми. Перемножимо  $F_1^*(s)$  та  $F_2^*(s)$ :

$$F_1^*(s)F_2^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-sm} F_2^*(s) f_1(m).$$

Але згідно з теоремою зсування (2.39)

$$e^{-sm} F_2^*(s) \xrightarrow{\cdot} \begin{cases} 0 & \text{при } k < m, \\ f_2(k-m) & \text{при } k \geq m, \end{cases}$$

Отже

$$F_1^*(s) F_2^*(s) \xrightarrow{\cdot} \sum_{m=0}^k f_1(m) f_2(k-m).$$

Зробивши заміну у правій частині цього співвідношення, дістанемо іншу форму теореми згортки, що безпосередньо випливає з рівноправності ґратчастих функцій  $f_1(k)$  та  $f_2(k)$ .

Теорема згортки часто застосовується для визначення оригіналу по зображенню, коли останнє можна зобразити у вигляді добутку двох простіших зображень.

*Приклад 2.20.* Необхідно знайти оригінал, якому відповідає зображення

$$F^*(s) = \frac{e^s}{(e^s - e^\alpha)(e^s - e^\beta)}.$$

Це зображення може мати вигляд добутку двох зображень

$$\begin{aligned} F_1^*(s) &= \frac{1}{e^s - e^\alpha} \xrightarrow{\cdot} e^{\alpha(k-1)} \quad (k \geq 1), \\ F_2^*(s) &= \frac{e^s}{e^s - e^\beta} \xrightarrow{\cdot} e^{\beta k} \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

На підставі теореми згортки (2.63) маємо

$$F^*(s) = F_1^*(s) F_2^*(s) \xrightarrow{\cdot} \sum_{m=1}^k e^{\alpha(m-1)} e^{\beta(k-m)}.$$

*Теорема 2.14.* Сума дискрет, або ординат ґратчастої функції. Нехай абсциса збіжності  $f(k)$  від'ємна ( $\sigma_3 < 0$ ). Тоді, беручи в основному співвідношенні (2.1)  $s = 0$ , дістаємо

$$F^*(0) = \lim_{s \rightarrow 0} F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k). \quad (2.64)$$

Отже, сума дискрет, або ординат ґратчастої функції дорівнює значенню її зображення при  $s = 0$ .

Приклад 2.21. Нехай  $f(k) = e^{-\beta k}$ . Тоді

$$F^*(s) = \frac{e^s}{e^s - e^{-\beta}}, \quad \sigma_3 < 0.$$

На підставі теореми про суму дискрет маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta k} = F^*(0) = \frac{1}{1 - e^{-\beta}},$$

що, відповідає формулі суми нескінченно спадної геометричної прогресії.

*Теорема 2.15. Кінцеве значення ґратчастої функції.* Застосуємо теорему про суму дискрет (2.64) до першої різниці  $\Delta f(k)$ . Зображення цієї різниці згідно з (2.35) дорівнює

$$D\{\Delta f(k)\} = (e^s - 1)F^*(s) - e^s f(0).$$

Згідно з теоремою про суму дискрет (2.64) маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k) = \lim_{s \rightarrow 0} (e^s - 1)F^*(s) - f(0).$$

Але

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) - f(0).$$

Порівняння двох останніх виразів дає

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{s \rightarrow 0} (e^s - 1)F^*(s). \quad (2.65)$$

Приклад 2.22. Нехай  $f(k) = 1(k)$ . Зрозуміло, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 1$ . Перевіримо це за

допомогою теореми про кінцеве значення (2.65) для такого зображення:

$$D\{1(k)\} = \frac{e^s}{e^s - 1}.$$

Згідно з теоремою (2.65)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1(k) = \lim_{s \rightarrow 0} (e^s - 1) \frac{e^s}{e^s - 1} = 1.$$

*Теорема 2.16. Початкове значення ґратчастої функції.* Розглянемо різницю

$$\Delta f(k-1) = f(k) - f(k-1).$$

За теоремою зсунення (2.27) її зображення буде таким

$$\begin{aligned} D\{\Delta f(k-1)\} &= e^{-s} [(e^s - 1)F^*(s) - e^s f(0)] = \\ &= (1 - e^{-s})F^*(s) - f(0) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Спрямуємо  $s$  до  $\infty$ . Зважаючи на те, що

$$\lim_{s \rightarrow \infty} D\{\Delta f(k-1)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} \Delta f(k-1) = 0,$$

з (2.66) дістаємо

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - e^{-s})F^*(s),$$

або остаточно

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} F^*(s). \quad (2.67)$$

З цієї теореми випливає, що коли зображення  $F^*(s)$  правильне, тобто степінь чисельника менший степені знаменника, то

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} F^*(s) = 0.$$

Щодо застосування теорем 2.15 та 2.16 треба зробити таке зауваження. Якщо функція  $f(k)$  відома, то для розрахування її кінцевого та початкового значення нема потреби використовувати ці теореми. Мова йде про той випадок, коли сама функція  $f(k)$  невідома, але відоме її зображення  $F^*(s)$ .

## 2.4. Обернене дискретне перетворення Лапласа

Пряме  $D$ -перетворення розв'язує задачу визначення зображення  $F^*(s)$  за оригіналом  $f(k)$ . Розв'язок оберненої задачі зводиться до знаходження оригіналу  $f(k)$  за зображенням  $F^*(s)$ . Співвідношення, яке у загальному вигляді характеризує операцію визначення оригіналу за його зображенням, запишемо у вигляді

$$f(k) = D^{-1}\{F^*(s)\}. \quad (2.68)$$

Це перетворення зображення у відповідний йому оригінал називається *оберненим  $D$ -перетворенням*, або скорочено  *$D^{-1}$ -перетворенням* [10,12].

Розглянемо зображення

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k). \quad (2.69)$$

Припустимо, що особливі точки  $s_v$  зображення  $F^*(s)$  (тобто точки, в яких  $F^*(s)$  дорівнює нулю або нескінченності) лежать лівіше відрізка прямої  $L_1$  завдовжки  $2\pi$ , паралельно уявній осі та розташовані на відстані  $c$  вправо від неї (рис.2.1). Величина  $c$  – довільна додатна стала, більша за абсцису збіжності  $\sigma_z$ .

Помножимо обидві частини виразу (2.69) на  $e^{sm}$  ( $m$  – ціле число) та проінтегруємо їх вздовж відрізка  $L_1$ , тобто від  $c - j\pi$  до  $c + j\pi$ :

$$\begin{aligned} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) e^{sm} ds &= \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} f(k) \right] e^{sm} ds = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} e^{-s(k-m)} ds \end{aligned} \quad (2.70)$$

Перестановка операцій інтегрування та підсумовування законна, тому що  $c$  більше за абсцису збіжності  $f(k)$ .



Якщо  $k \neq 0$ , то

$$\begin{aligned}
 \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} e^{-s(k-m)} ds &= -\frac{e^{-s(k-m)}}{k-m} \Big|_{c-j\pi}^{c+j\pi} = \\
 &= \frac{e^{-c(k-m)}}{k-m} [e^{j\pi(k-m)} - e^{-j\pi(k-m)}] = \\
 &= \frac{e^{-c(k-m)}}{k-m} [\cos j\pi(k-m) + j \sin j\pi(k-m) - \cos j\pi(k-m) + \\
 &+ j \sin j\pi(k-m)] = \frac{e^{-c(k-m)}}{k-m} 2 \sin j\pi(k-m) = 0
 \end{aligned}$$

Коли  $k = m$ ,

$$\int_{c-j\pi}^{c+j\pi} ds = (c + j\pi) - (c - j\pi) = 2\pi j.$$

Тоді вираз (2.70) перепишемо у вигляді

$$\int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) e^{sm} ds = f(m) 2\pi j,$$

а далі, замінюючи змінну  $m$  на  $k$ , остаточно маємо

$$f(k) = D^{-1}\{F^*(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(s) e^{sk} ds. \quad (2.71)$$

Ця формула називається *формулою обернення*. Вона аналогічна формулі обернення у звичайному перетворенні Лапласа.

## 2.5. Обчислення оберненого дискретного перетворення Лапласа

Розрахунковою формулою для обчислення оберненого  $D$ -перетворення є співвідношення (2.71). Однак його пряме використання досить складне. Тому, використовуючи теорему про лишки, вираз (2.71) записують так [9]

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{L_1} F^*(s) e^{sk} ds = \sum_v \operatorname{Re} s_v \left[ F^*(s) e^{s(k-1)} \right], \quad (2.72)$$

де символом  $\text{Res}[\dots]$  позначено лишок відповідної функції, а підсумовування ведуть для всіх точок  $v$ -полюсів функції  $F^*(s)$ .

Отже, обчислення оберненого  $D$ -перетворення ведеться у два етапи. На першому визначають значення лишків функції  $F^*(s)e^{s(k-1)}$  в усіх полюсах  $F^*(s)$ . Якщо полюс  $F^*(s)$  простий, то розрахунок виконують за формулою

$$\text{Res}_{s_\nu}[F^*(s)e^{s(k-1)}] = \lim_{s \rightarrow s_\nu} [F^*(s)(e^s - e^{s_\nu})e^{s(k-1)}]. \quad (2.73)$$

Якщо  $F^*(s)$  має полюс  $s_\nu$  кратністю  $r_\nu$ , відповідний лишок визначають так

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s_\nu}[F^*(s)e^{s(k-1)}] &= \\ &= \frac{1}{(r_\nu - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_\nu} \frac{d^{r_\nu-1}}{ds^{r_\nu-1}} [F^*(s)(e^s - e^{s_\nu})^{r_\nu} e^{s(k-1)}]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

На другому етапі розраховують функцію  $f(k)$  як суму визначених лишків.

*Приклад 2.23.* Дано зображення

$$F^*(s) = \frac{e^s}{e^s - e^\alpha}.$$

Щоб знайти відповідний оригінал, перш за все треба обчислити лишки функції  $F^*(s)e^{s(k-1)}$  в усіх полюсах функції  $F^*(s)$ . Отже, необхідно знати полюси  $F^*(s)$ . Прирівняємо знаменник  $F^*(s)$  до нуля:

$$e^s - e^\alpha = 0.$$

Звідси єдиний полюс даної  $F^*(s)$  це  $s = \alpha$ . Це полюс простий, тому використовуючи формулу (2.73), дістаємо

$$\begin{aligned} f(k) &= \operatorname{Res}[F^*(s)e^{s(k-1)}] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \alpha} \left[ \frac{e^s}{e^s - e^\alpha} (e^s - e^\alpha) e^{s(k-1)} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \alpha} e^{sk} = e^{\alpha k} \end{aligned}$$

(Порівняйте результат з (2.13)).

*Приклад 2.24.* Дано

$$F^*(s) = \frac{e^s (1 - e^\alpha)^2}{(e^s - 1)(e^s - e^\alpha)^2}.$$

Знаходимо полюси  $F^*(s)$ , прирівнюючи знаменник до нуля

$$(e^s - 1)(e^s - e^\alpha)^2 = 0.$$

Звідси  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = \alpha$  ( $r_2 = 2$ ).

Розрахуємо лишки. З формули (2.73)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1[F^*(s)e^{s(k-1)}] &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{e^s (1 - e^\alpha)^2}{(e^s - 1)(e^s - e^\alpha)^2} (e^s - 1) e^{s(k-1)} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{(1 - e^\alpha)^2}{(e^s - e^\alpha)^2} e^{sk} \right] = 1 \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (2.74), маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_2[F^*(s)e^{s(k-1)}] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{d}{de^s} \left[ \frac{e^s (1 - e^\alpha)^2}{(e^s - 1)(e^s - e^\alpha)^2} (e^s - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. e^{s(k-1)} \right] = (1 - e^\alpha)^2 \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{d}{de^s} \left[ \frac{e^{sk}}{(e^s - 1)} \right] = \\ &= (1 - e^\alpha)^2 \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{ke^{s(k-1)}(e^s - 1) - e^{sk}}{(e^s - 1)^2} = \\ &= ke^{\alpha(k-1)}(e^\alpha - 1) - e^{\alpha k} \end{aligned}$$

У результаті дістаємо

$$f(k) = \operatorname{Re} s_1[\dots] + \operatorname{Re} s_2[\dots] = 1 + k e^{\alpha(k-1)} (e^\alpha - 1) - e^{\alpha k}.$$

### Контрольні запитання

1. Як визначають дискретне перетворення Лапласа?
2. Що таке пряме та обернене  $D$ -перетворення?
3. Чи завжди існує дискретне перетворення Лапласа? Що таке абсциса збіжності?
4. Для чого призначені теореми  $D$ -перетворення?
5. У чому полягає теорема  $D$ -перетворення про лінійність оригіналів та зображень?
6. У чому полягає теорема перестановки  $D$ -перетворення?
7. У чому полягає теорема зсунення в області оригіналів?
8. Як розрахувати  $D$ -зображення періодичної ґратчастої функції?
9. У чому полягає теорема зсунення в області зображень?
10. У яких випадках можна розрахувати  $D$ -перетворення ґратчастої функції, використовуючи зображення різниць?
11. Чому в області зображень відповідає підсумовування в області оригіналів?

### 3. Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

#### 3.1. Визначення z-перетворення

Дискретне перетворення Лапласа є ірраціональною функцією відносно комплексної змінної  $s$ , оскільки воно містить множник  $e^{-sT}$ . Це викликає певні труднощі у розрахунках. Тому було б бажаним перетворити ірраціональну функцію  $F^*(s)$  в раціональну  $F(z)$  шляхом заміни комплексної змінної  $s$  на іншу комплексну змінну  $z$  [10-12]. Вибір такої заміни очевидний:

$$z = e^{sT}, \quad (3.1)$$

хоча і заміна  $z = e^{-sT}$  відповідає тим самим вимогам. Розв'язуючи рівняння (3.1) відносно  $s$ , дістанемо

$$s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (3.2)$$

У цих рівняннях  $T$  – період квантування;  $z$  – комплексна змінна, дійсна та уявна частини якої визначаються як

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= e^{T\sigma} \cos \omega T, \\ \operatorname{Im}(z) &= e^{T\sigma} \sin \omega T, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $s = \sigma + j\omega$ .

Якщо в основне співвідношення  $D$ -перетворення

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-sk}$$

підставити (3.1), то маємо функцію  $\operatorname{Re}(z) = e^{T\sigma} \cos \omega T$ ,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}, \quad (3.4)$$

яка є раціональною функцією відносно  $z$ .

Функцію  $F(z)$  можна визначити як  $z$ -перетворення функції  $f(t)$ , тобто

$$F(z) = Z\{f(t)\} = \left[ F^*(s) \right] \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z}, \quad (3.5)$$

де  $Z\{\dots\}$  – оператор  $z$ -перетворення.

Оскільки  $z$ -перетворення функції  $f(t)$  виникає із перетворення Лапласа функції  $f^*(t)$  заміною  $z = e^{-sT}$ , то у загальному випадку для будь-якої функції  $f(t)$ , яка має  $D$ -перетворення, існує також і  $z$ -перетворення.

За допомогою  $z$ -перетворення описується поведінка квантованої за часом функції тільки у дискретні моменти часу. При  $z$ -перетворенні на відміну від неперервного перетворення Лапласа однозначної відповідності між  $f(t)$  та  $F(z)$  немає. Оскільки рівняння (3.4) справедливе тільки для дискретних моментів часу, додавання до  $f(t)$  будь-якої функції  $g(t)$ , наприклад,  $g(t) = A \sin(2\pi t/T)$ , яка дорівнює нулю у ці моменти, не змінює вида  $z$ -перетворення.

### 3.2. Методи обчислення $z$ -перетворення

Розглянемо декілька методів розрахунку  $z$ -перетворення [10-12]. Початковим матеріалом для такого розрахунку, як правило, служить відоме перетворення Лапласа.

Згідно з методом, який використовує перетворення Лапласа,  $z$ -перетворення квантованої функції утворюється з перетворення Лапласа цієї функції шляхом підстановки (3.1).

*Приклад 3.1.* Визначимо  $z$ -перетворення для одиничної ступінчастої функції  $f(k) = 1(k)$ .  $D$ -перетворення цієї функції таке

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k) e^{-sTk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sTk},$$

де ряд збіжний, коли  $|e^{-sT}| < 1$ , або  $s > 0$ . Тоді

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}}.$$

Виконуючи підстановку  $e^{sT} = z$ , дістаємо

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (3.6)$$

*Метод підсумовування рядів* базується на основному співвідношенні (3.4)  $z$ -перетворення.

*Приклад 3.2.* Знайдемо  $z$ -перетворення експоненціальної функції  $f(t) = e^{-at}$ , де  $a$  – дійсне число.

Підставимо  $f(t)$  у (3.4)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-aTk} z^{-k}.$$

Цей нескінченний ряд збіжний для всіх значень  $z$ , які задовільняють умові

$$\left| e^{-aT} z^{-1} \right| < 1.$$

Визначимо суму цієї геометричної прогресії:

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (3.7)$$

Приклад 3.3. Визначимо  $z$ -перетворення функції  $f(t) = \sin \omega t$ .

Пам'ятаючи, що

$$\sin \omega T k = \frac{e^{j\omega T k} - e^{-j\omega T k}}{2j},$$

з основного співвідношення (3.4) дістаємо

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{j\omega T k} - e^{-j\omega T k}}{2j} z^{-k}$$

Цей нескінченний ряд збіжний при  $|z^{-1}| < 1$  і тоді

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1 - e^{-j\omega T} z^{-1} - 1 + e^{j\omega T} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega T} z^{-1})(1 - e^{-j\omega T} z^{-1})} = \frac{1}{2j} \frac{z^{-1}(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{1 - z^{-1}(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + z^{-2}} = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z^{-1}(\cos \omega T + j \sin \omega T - \cos \omega T + j \sin \omega T)}{1 - z^{-1}(\cos \omega T + j \sin \omega T + \cos \omega T - j \sin \omega T) + z^{-2}} = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}, \end{aligned}$$

або в остаточному вигляді

$$F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (3.8)$$

Приклад 3.4. Розрахуємо  $z$ -перетворення для лінійної функції  $f(t) = t$ .

З основного співвідношення (3.4) маємо

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k T z^{-k} = T z^{-1} + 2T z^{-2} + 3T z^{-3} + \dots$$

Помножимо обидві частини цього виразу на  $z^{-1}$ :

$$z^{-1} F(z) = T z^{-2} + 2T z^{-3} + 3T z^{-4} + \dots$$



Віднімаючи останнє рівняння з попереднього, дістаємо

$$(1 - z^{-1})F(z) = Tz^{-1} + Tz^{-2} + Tz^{-3} + \dots = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Звідси

$$F(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2},$$

або остаточно

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}. \quad (3.9)$$

*Метод розкладення на елементарні дроби* застосовують у тих випадках, коли функції, що перетворюються, можуть бути представлені у вигляді суми експонент. Згідно з цим методом необхідно, перш за все, знати перетворення Лапласа вказаних неперервних функцій. Якщо це перетворення є дробово-раціональною функцією комплексної змінної  $s$ , то шляхом розкладання на елементарні дроби вона може бути виражена як сума доданків типу  $A/(s + a)$ . Кожному з таких доданків відповідає часова функція  $Ae^{-aT}$ , для якої  $z$ -перетворення обчислюють за формулою (3.7).

*Приклад 3.5.* Знайти  $z$ -перетворення функції, якій відповідає перетворення Лапласа

$$F(s) = \frac{a}{s(s+a)}. \quad (3.10)$$

Розкладемо  $F(s)$  на елементарні дроби:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}. \quad (3.11)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів  $A$  та  $B$  скористаємося методом невизначених множників.

Для цього приведемо останній вираз до загального множника

$$F(s) = \frac{(A+B)s + Aa}{s(s+a)}. \quad (3.12)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $s$  у чисельниках виразів (3.10) та (3.12)

$$\left. \begin{array}{l} s^0 \\ s^1 \end{array} \right| \begin{array}{l} Aa = a, \\ A + B = 0. \end{array}$$

З цієї системи рівнянь дістаємо  $A = 1$ ,  $B = -1$ .

Підставляємо ці значення у (3.11)

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}.$$

Цьому виразу відповідає часова функція

$$f(t) = 1(t) - e^{-at}.$$

Далі, використовуючи (3.6) та (3.7), маємо

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

Зводячи до загального знаменника, дістаємо

$$F(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} \quad (3.13)$$

*Приклад 3.6.* Відомо

$$F(s) = Z\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad (3.14)$$

Треба знайти відповідні  $z$ -перетворення.

Розкладемо  $F(s)$  на елементарні дроби

$$F(s) = \frac{A}{s + ja} + \frac{B}{s - ja}. \quad (3.15)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів  $A$  та  $B$  скористаємося методом лишків.

Приведемо (3.15) до загального знаменника

$$F(s) = \frac{A(s - ja) + B(s + ja)}{s^2 + a^2} \quad (3.16)$$

Полюсами  $F(s)$  будуть  $s_1 = -ja$ ,  $s_2 = ja$ . Для визначення коефіцієнта  $A$  візьмемо  $s = s_1 = -ja$  та прирівняємо чисельники виразів (3.14) та (3.16)

$$a = A(s - ja) \Big|_{s=-ja} = -2Aja.$$

Звідси  $A = -0,5j$ .

Для знаходження коефіцієнту  $B$  приймемо  $s = s_2 = ja$  і знову прирівняємо ті самі чисельники

$$a = B(s + ja) \Big|_{s=ja} = 2Aja, \quad B = \frac{1}{2j}.$$

Тепер вираз (3.15) має вигляд

$$F(s) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - ja} - \frac{1}{s + ja} \right).$$

Йому відповідає часова функція

$$f(t) = \frac{1}{2j} (e^{-ja} - e^{ja}),$$

що з врахуванням (3.7) дає

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{jaT}} - \frac{z}{z - e^{-jaT}} \right) = \\
&= \frac{1}{2j} \frac{z(z - e^{-jaT} - z + e^{jaT})}{(z - e^{jaT})(z - e^{-jaT})} = \\
&= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{jaT} - e^{-jaT})}{z^2 - z(e^{jaT} + e^{-jaT}) + 1} = \\
&= \frac{1}{2j} \frac{z(\cos aT + j \sin aT - \cos aT + j \sin aT)}{z^2 - z(\cos aT + j \sin aT + \cos aT - j \sin aT) + 1},
\end{aligned}$$

або остаточно

$$F(z) = \frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1} \quad (3.17)$$

Згідно з методом, що використовує обчислення лишків функції  $F(s)$ , розрахункова формула має такий вигляд

$$F(z) = \sum_v \operatorname{Res} \left[ \frac{F(s)}{1 - e^{s_v} z^{-1}} \right], \quad (3.18)$$

де сума лишків  $\operatorname{Res}[\dots]$  знаходиться по всіх полюсах  $v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) функції  $F(s)$ .

Для простих полюсів  $F(s)$  лишки обчислюють за формулою

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{F(s)}{1 - e^{s_v} z^{-1}} \right] = \lim_{s \rightarrow s_v} \left[ \frac{F(s)}{1 - e^{s_v} z^{-1}} (s - s_v) \right]. \quad (3.19)$$

Якщо функція  $F(s)$  має кратний полюс  $s_v$  з кратністю  $r_v$ , то

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{F(s)}{1 - e^{s_v} z^{-1}} \right] = \frac{1}{(r_v - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_v} \frac{d^{r_v-1}}{ds^{(r_v-1)}} \left[ \frac{F(s)}{1 - e^{s_v} z^{-1}} (s - s_v)^{r_v} \right] \quad (3.20)$$

*Приклад 3.7.* Знайти  $z$ -перетворення, якщо

$$F(s) = \frac{a - b}{(s + a)(s + b)}.$$

Спочатку визначимо полюси  $F(s)$ . Їх два:  $s_1 = -a$ ;  $s_2 = -b$ .

Тоді формула (3.18) набуває вигляду

$$F(z) = \text{Res}_1[\dots] + \text{Res}_2[\dots]$$

Полюси  $F(s)$  прості, тому далі для обчислення лишків користуємося формулою (3.19).

$$\begin{aligned} \text{Res}_1[\dots] &= \lim_{s \rightarrow -a} \left[ \frac{a-b}{(s+a)(s+b)(1-e^{-sT}z^{-1})} (s-s_1) \right] = \\ &= \frac{a-b}{(b-a)(1-e^{-aT}z^{-1})} = -\frac{z}{z-e^{-aT}}. \\ \text{Res}_2[\dots] &= \lim_{s \rightarrow -b} \left[ \frac{a-b}{(s+a)(s+b)(1-e^{-sT}z^{-1})} (s-s_2) \right] = \\ &= \frac{a-b}{(a-b)(1-e^{-bT}z^{-1})} = \frac{z}{z-e^{-bT}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$F(z) = \frac{z}{z-e^{-bT}} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{z(e^{-bT} - e^{-aT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})} \quad (3.21)$$

*Приклад 3.8.* Розглянемо задачу з прикладу (3.6).

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Полюси  $F(s)$ :  $s_1 = ja$ ;  $s_2 = -ja$ . З формули (3.19)

$$\begin{aligned} \text{Res}_1[\dots] &= \lim_{s \rightarrow ja} \left[ \frac{a}{(s+ja)(s-ja)(1-e^{jaT}z^{-1})} (s-ja) \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{1-e^{jaT}z^{-1}} = \frac{1}{2j} \frac{z}{z-e^{jaT}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}_2[...]&= \lim_{s \rightarrow -ja} \left[ \frac{a}{(s+ja)(s-ja)(1-e^{-jaT})} (s+ja) \right] = \\ &= -\frac{1}{2j} \frac{1}{1-e^{-jaT}} \frac{1}{z^{-1}} = -\frac{1}{2j} \frac{z}{z-e^{-jaT}}\end{aligned}$$

Підсумуємо:

$$\begin{aligned}F(z) &= \text{Res}_1[...] + \text{Res}_2[...] = \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z-e^{jaT}} - \frac{z}{z-e^{-jaT}} \right)\end{aligned}$$

Після нескладних перетворень остаточно маємо

$$F(z) = \frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}, \quad (3.22)$$

що повністю збігається з (3.17).

### 3.3. Теорема z-перетворення

Зважаючи на те, що комплексні змінні  $z$  та  $s$  зв'язані між собою співвідношенням (3.1), багато теорем  $D$ -перетворення дійсні і для  $z$ -перетворення. Це стосується, наприклад, теорем лінійності оригіналів та зображень, перестановки, диференціювання по параметру та інших. Розглянемо тепер деякі теореми, які або не розглядалися у  $D$ -перетворенні, або мають деякі особливості у  $z$ -перетворенні.

*Теорема 3.1. Множення на константу.* Нехай нам відоме зображення  $F(z) = Z\{f(t)\}$ . Знайдемо  $Z\{af(t)\}$ .

З визначення  $z$ -перетворення (3.4)

$$Z\{af(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} af(kT)z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = aF(z) \quad (3.23)$$

*Теорема 3.2. Зсув у часовій області. Якщо  $F(z) = Z\{f(t)\}$ , то за визначенням  $z$ -перетворення можна записати*

$$Z\{f(t - nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT)z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT)z^{-(k-n)}.$$

Зважаючи на те, що  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , маємо

$$Z\{f(t - nT)\} = z^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} f(kT - nT)z^{-(k-n)} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^{-n} F(z), \quad (3.24)$$

де  $m = k - n$ .

Якщо треба знайти  $Z\{f(t + nT)\}$ , то

$$Z\{f(t + nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT)z^{-(k+n)}$$

Вводячи заміну  $m = k + n$ , дістаємо

$$Z\{f(t + nT)\} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^n \left[ \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} \right],$$

або у остаточному вигляді

$$Z\{f(t + nT)\} = z^n \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right]. \quad (3.25)$$

*Приклад 3.9. Знайти  $z$ -перетворення функції  $f(k) = 1(k - 1)$ .*

Використовуючи теорему про зсув у часовій області (3.24) та зображення (3.6), маємо

$$Z\{1(k - 1)\} = z^{-1} Z\{1(k)\} = z^{-1} \frac{z}{z - 1} = \frac{1}{z - 1} \quad (3.26)$$

*Теорема 3.3. Множення оригіналу на експоненту (зміщення в області зображень). Нехай  $f(t)$  має  $z$ -перетворення  $F(z)$ . Треба знайти  $Z\{e^{\pm at} f(t)\}$ .*

Скористаємось визначенням (3.4):

$$Z\{e^{\pm at} f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{\pm aTk} z^{-k}.$$

Припустімо, що  $z_1 = ze^{\pm aT}$ . Тоді

$$Z\{e^{\pm at} f(t)\} = \sum f(kT)z_1^{-k} = F(z_1).$$

Отже,

$$Z\{e^{\pm at} f(t)\} = F(ze^{\pm aT}) \quad (3.27)$$

*Приклад 3.10.* Знайти  $z$ -перетворення функції  $f(t) = e^{at} \sin \omega t$ .

Скористаємося формулою (3.27) та відомим зображенням (3.22).

Тоді

$$Z\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{ze^{aT} \sin \omega T}{z^2 e^{2aT} - 2ze^{aT} \cos \omega T + 1} \quad (3.28)$$

*Теорема 3.4. Теорема про початкове значення.* Треба знайти  $f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT)$ , якщо відоме зображення  $F(z)$  функції  $f(t)$ .

За визначенням (3.4)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

Спрямуємо  $z$  до  $\infty$ . Тоді

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT). \quad (3.29)$$

*Теорема 3.5. Теорема про кінцеве значення.* Відоме  $z$ -перетворення  $F(z)$  функції  $f(t)$ . Необхідно знайти  $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ .

Розглянемо два ряди із скінченною кількістю членів:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f(kT)z^{-k} &= f(0) + f(T)z^{-1} + \dots + f(nT)z^{-n}, \\ \sum_{k=0}^n f[(k-1)T]z^{-k} &= f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots + f[(n-1)T]z^{-n} = \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \end{aligned}$$



В останньому ряді немає члена  $f(-T)$  при  $k = 0$ , тому що  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Визначимо границю при  $z \rightarrow 1$  різниці цих рядів:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{k=0}^n f(kT) z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right] = \\ = \sum_{k=0}^n f(kT) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = f(nT) \end{aligned}$$

Спрямуємо  $n \rightarrow \infty$ , тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{k=0}^n f(kT) z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right].$$

Змінюючи порядок знаходження границь та враховуючи, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} = F(z),$$

дістаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) \quad (3.30)$$

*Приклад 3.11.* Визначити кінцеве значення функції  $f(kT)$ ,  $z$ -перетворення якої має вигляд

$$F(z) = \frac{0,792z^2}{(z-1)(z^2 - 0,416z + 0,208)}.$$

Застосовуючи формулу (3.30), маємо

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{0,792z^2}{(z-1)(z^2 - 0,416z + 0,208)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,792}{z^2 - 0,416z + 0,208} = 1. \end{aligned}$$

*Теорема 3.6. Згортка у часовій області.* Нехай функції  $f_1(t)$  та  $f_2(t)$  мають  $z$ -перетворення відповідно  $F_1(z)$  та  $F_2(z)$  та  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Визначити  $z$ -перетворення згортки цих функцій, тобто

$$Z\left\{\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT-nT)\right\}.$$

За визначенням (3.4)

$$\begin{aligned} Z\left\{\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT-nT)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT-nT)z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)f_2(kT-nT)z^{-k} \end{aligned}$$

Заміна  $k$  на  $\infty$  у внутрішній сумі пояснюється тим, що за умовою задачі

$$f_2(kT-nT) = 0 \text{ при } n > k.$$

Візьмемо  $m = k - n$  та змінимо порядок підсумовування:

$$\begin{aligned} Z\left\{\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT-nT)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f_2(mT)z^{-m} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(mT)z^{-m} = F_1(z)F_2(z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Нижню границю внутрішньої суми змінено з  $-n$  на  $0$  з тієї ж причини, що і вище, тобто тому що  $f_2(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Неважко помітити, що теорема про згортку у часовій області аналогічна відповідній теоремі  $D$ -перетворення. Однак, необхідно пам'ятати, що обернене  $z$ -перетворення (обо  $D$ -перетворення) добутку двох функцій не дорівнює добутку відповідних оригіналів, тобто

$$Z^{-1}\{F_1(z)F_2(z)\} \neq f_1(kT)f_2(kT).$$

*Теорема 3.7. Згортка в області зображень.* Нехай  $F_1(z)$  та  $F_2(z)$  –  $z$ -перетворення функцій  $f_1(kT)$  та  $f_2(kT)$  відповідно. Необхідно знайти  $Z\{f_1(kT)f_2(t)\}$ .

З визначення  $z$ -перетворення

$$Z\{f_1(kT)f_2(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)f_2(kT)z^{-k}. \quad (3.32)$$

Для абсолютної збіжності цього ряду необхідно, щоб модуль  $z$  був більшим за найбільше із значень  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  та  $\sigma_1\sigma_2$ , тобто  $|z| = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2)$ , де  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  – радіуси збіжності відповідно  $F_1(z)$  та  $F_2(z)$ .

Функцію  $f_1(kT)$  можна записати у вигляді відповідного оберненого  $z$ -перетворення (див. 3.40)

$$f_1(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F_1(\xi) \xi^{k-1} d\xi,$$

де  $\Gamma$  - коло, що включає всі особливі точки  $F_1(\xi)\xi^{k-1}$ . Отже  $|\xi| > \sigma_2$ . Підставляючи цей вираз у (3.32), дістаємо

$$Z\{f_1(t)f_2(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F_1(\xi) \xi^{k-1} d\xi f_2(kT) z^{-k}$$

Змінюючи порядок підсумовування та інтегрування, маємо

$$Z\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{\xi} d\xi \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) (\xi^{-1} z)^{-k}. \quad (3.33)$$

Зважаючи на те, що

$$F_2(\xi^{-1} z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) (\xi^{-1} z)^{-k}$$

абсолютно збігається для  $|\xi^{-1} z| > \sigma_2$ , або  $|\xi| < |z|/\sigma_2$   $|\xi| < |z|/\sigma_2$ , то вираз (3.33) набирає вигляду

$$Z\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{\xi} F_2(z\xi^{-1}) d\xi \quad (3.34)$$

з урахуванням умови

$$\sigma_1 < |\xi| < z/\sigma_2.$$

*Приклад 3.12.* Визначимо  $z$ -перетворення функції  $f(t) = te^{-at}$ , застосовуючи теорему про згортку в області зображень.

Нехай  $f_1(t) = t$  та  $f_2(t) = e^{-at}$ . Тоді згідно (3.7) та (3.9)

$$F_1(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}, |z| > 1 = \sigma_1;$$

$$F_2(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}, |z| > e^{-aT} = \sigma_2.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (3.34), дістаємо

$$Z\{te^{-at}\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{T\xi}{\xi(\xi-1)^2} \frac{z\xi^{-1}}{z\xi^{-1} - e^{-aT}} d\xi, \quad (3.35)$$

де  $\Gamma$  – коло, що лежить у кільці

$$1 < |\xi| < \frac{|z|}{e^{-aT}} = |z|e^{aT}, |z| > 1.$$

Отже, контур інтегрування у виразі (3.35) включає у себе тільки ті полюси підінтегральної функції, які відповідають  $\xi = 1$ . Застосовуючи теорему про лишки до виразу (3.35), маємо

$$\begin{aligned} Z\{te^{-at}\} &= \text{Res} \left. \frac{Tz\xi^{-1}}{(\xi-1)^2(z\xi^{-1} - e^{-aT})} \right|_{\xi=1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{Tz\xi^{-1}}{(z\xi^{-1} - e^{-aT})^2} \right] \Big|_{\xi=1} = \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}. \end{aligned}$$

### 3.4. Обернене $z$ -перетворення

Перетворення Лапласа неперервної функції та його обернене перетворення є однозначними, тобто якщо  $F(s)$  є перетворенням Лапласа функції  $f(t)$ , то  $f(t)$  є оберненим перетворенням Лапласа функції  $F(s)$ , яке визначають за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (3.36)$$

де  $c$  – абсциса збіжності, яку вибирають таким чином, щоб особливі точки підінтегральної функції  $F(s)e^{st}$  лежали зліва від неї.

Обернене  $z$ -перетворення не обов'язково дорівнює  $f(t)$ . Коректний результат оберненого  $z$ -перетворення функції  $F(z)$  є функція  $f(kT)$ , яка дорівнює  $f(t)$  тільки у моменти квантування  $t = kT$ . Для  $z$ -перетворення одиничної ступінчастої функції  $f_1(t) = 1(t)$ , яке дорівнює  $F(z) = z/(z - 1)$  і відповідає послідовності одиничних імпульсів, обернене  $z$ -перетворення може бути будь-якою функцією, наприклад  $f_2(t)$ , значення якої дорівнюють одиниці у моменти часу  $t = 0, T, 2T, \dots$  (рис. 3.1). Неоднозначність оберненого  $z$ -перетворення є одним з обмежень, про яке необхідно пам'ятати, застосовуючи апарат  $z$ -перетворення.

Обернене  $z$ -перетворення позначають так

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}. \quad (3.37)$$

Загальний метод його визначення базується на перетворенні формули (3.36).

Підставимо  $t = kT$  у вираз (3.36). Маємо:

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{sTk} ds. \quad (3.38)$$

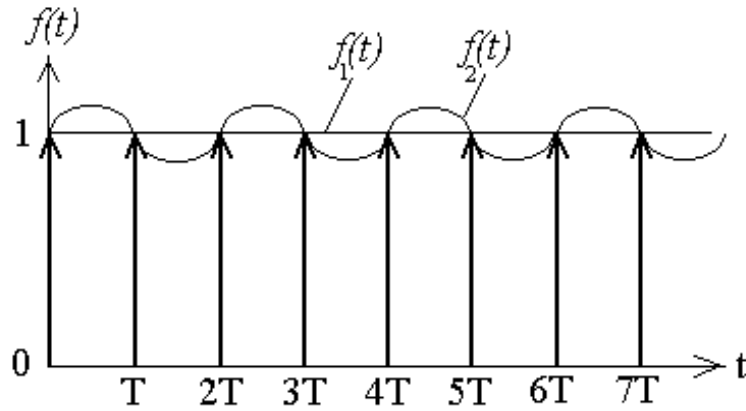


Рис.3.1. Графіки функцій, яким відповідає  $z$ -перетворення  $F(z) = z/(z - 1)$ .

Як показано на рис. 3.2, а, інтеграл (3.38) береться вздовж прямої лінії  $\sigma = c$ , що проходить від  $-j\infty$  до  $+j\infty$ . Ця пряма пересікає періодичні смуги на  $s$ - площині, отже, інтеграл (3.38) можна зобразити у вигляді суми інтегралів, кожний з яких береться у межах однієї періодичної смуги.

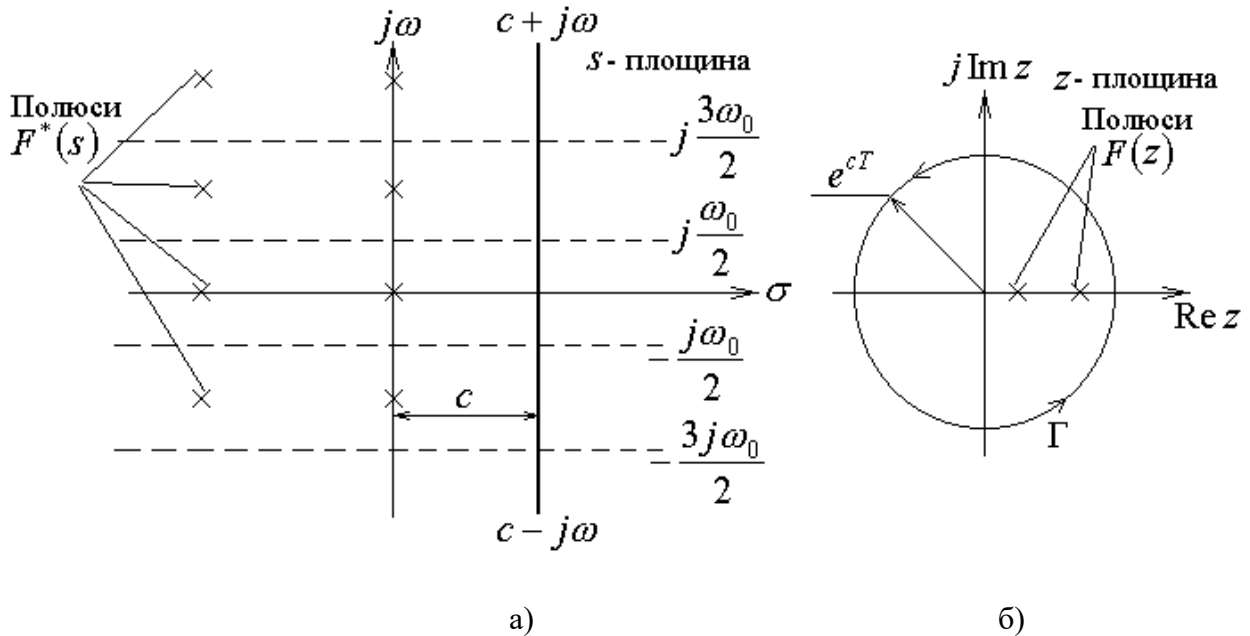


Рис.3.2. Розташування полюсів та областей інтегрування на а)  $s$ -площині та б)  $z$ -площині

Тоді

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{c+j\omega_0\left(n-\frac{1}{2}\right)}^{c+j\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)} F(s) e^{sTk} ds,$$

де  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Замінюючи  $s$  на  $s + jn\omega_0$ , де  $n$  – ціле число, дістаємо

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F(s + jn\omega_0) e^{sTk} ds.$$

Поміняємо порядок підсумовування та інтегрування:

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_0) e^{sTk} ds. \quad (3.39)$$

Враховуючи, що

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_0),$$

вираз (3.39) перепишемо так

$$f(kT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(s) e^{sTk} ds.$$

Підставляючи  $z = e^{sT}$  та пам'ятаючи, що

$$\begin{aligned} F(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} &= F(z), \\ e^{sTk} &= z^k, \\ ds &= d\left[\frac{1}{T} \ln z\right] = \frac{1}{T} z^{-1} dz, \end{aligned}$$

остаточно дістаємо

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz. \quad (3.40)$$

Ця формула називається *формулою обернення  $z$ -перетворення*.

Лінія інтегрування від  $s = c - j\omega_0/2$  до  $s = c + j\omega_0/2$  перетворюється у коло  $|z| = e^{cT}$  на  $z$ -площині (рис. 3.2, б), зважаючи на те, що  $F^*(s)$  на  $s$ -площині не має особливих точок на лінії інтегрування  $s = c + j\omega$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$  або справа від неї, то всі особливі точки функції  $F(z)z^{k-1}$  повинні лежати на  $z$ -площині усередині кола  $\Gamma$ ,  $|z| = e^{cT}$ .

### 3.5. Обчислення оберненого $z$ -перетворення

Для обчислення  $z$ -перетворення існує декілька функціонально рівноцінних методів. Доцільність застосування того чи іншого метода залежить від конкретного вигляду функції  $F(z)$ .

*Метод розкладення на елементарні дроби* базується на ідеї, що  $z$ -перетворенню вигляду  $A_i z / (z - e^{a_i T})$  відповідає оригінал  $f_i(kT) = A_i e^{a_i kT}$   $i = 1, 2, \dots, n$ . У такому разі, розклавши  $F(z)$  на  $n$  елементарних дроби, шукане обернене  $z$ -перетворення  $f(kT)$  може бути представлене як сума  $n$  доданків вигляду  $A_i e^{a_i kT}$ . Враховуючи, що  $F(z)$ , здебільшого, містить множник  $z$  у чисельнику, доцільно розкладати на елементарні дроби не  $F(z)$ , а  $F(z)/z$ , після чого ліву та праву частину отриманого виразу множать на  $z$  і користуються таблицями  $z$ -перетворення.



Приклад 3.13. Дано

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})},$$

де  $a$  – додатна константа,  $T$  – період квантування.

Для визначення відповідного оригіналу  $f(kT)$  розкладемо  $F(z)/z$  на елементарні дробі:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1 - e^{-aT}}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-aT}}.$$

Коефіцієнти розкладу розраховують так, як наведено ранішеу прикладах 3.5 або 3.6. Тоді

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}},$$

що відповідає

$$f(kT) = 1 - e^{-aTk}. \quad (3.41)$$

Отже,

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-aTk}) \delta(t - kT), \quad (3.42)$$

де  $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$ .

Нагадаємо, що функція  $f(t)$  не може бути визначена з оберненого  $z$ -перетворення, тому що невідомі значення функції між моментами квантування.

Метод розкладу у степеневий ряд оснований на формулі (3.4), що визначає  $z$ -перетворення

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

Функція  $F(z)$  є дробово-раціональною, тобто  $F(z) = M(z)/N(z)$ . Якщо чисельник  $M(z)$  поділити на знаменник, то дістаємо нескінченний ряд за від'ємними степенями  $z$ :

$$F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

Порівнюючи два останні вирази, маємо

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f(T), \quad a_2 = f(2T), \quad \dots$$

Звідси впливає алгоритм розрахунку, який полягає у тому, що спочатку треба поділити чисельник функції  $F(z)$  на її знаменник. Значення коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2$  і т. д. вважати значеннями функцій  $f(0), f(T), f(2T)$  і т. д. відповідно. Отримані дані необхідно узагальнити і записати формулу для  $f(kT)$ .

*Приклад 3.14.* Розглянемо  $F(z)$  з попереднього приклада, зобразивши її у вигляді

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}.$$

Поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{l|l} \frac{(1 - e^{-aT})z}{(1 - e^{-aT})z - (1 - e^{-2aT}) + e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-1}} & \frac{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}{(1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} +} \\ \hline \frac{(1 - e^{-2aT}) - e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - e^{-2aT}) - (1 + e^{-aT})(1 - e^{-2aT})z^{-1} + e^{-aT}(1 - e^{-2aT})z^{-2}} & + (1 - e^{-3aT})z^{-3} + \dots \\ \hline \frac{(1 - e^{-3aT})z^{-1} - e^{-aT}(1 - e^{-2aT})z^{-2}}{(1 - e^{-3aT})z^{-1} + (1 + e^{-aT})(1 - e^{-3aT})z^{-2} - e^{-aT}(1 - e^{-3aT})z^{-3}} & \\ \hline \dots & \end{array}$$

Отже,

$$F(z) = (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + (1 - e^{-3aT})z^{-3} + \dots,$$

звідси легко бачити, що

$$f(kT) = 1 - e^{-aTk},$$

тобто отримуємо такий самий результат, що й у попередньому прикладі.

*Метод, що використовує формулу обернення (3.40), передбачає використання теореми лишків, згідно з якою*

$$f(kT) = \sum_v \text{Res}_v F(z) z^{k-1}, \quad (3.43)$$

де підсумовування лишків ведеться по всіх полюсах  $v$  функції  $F(z)$ .

Якщо полюс  $z_v$  простий, то

$$\text{Res}_v [F(z) z^{k-1}] = \lim_{z \rightarrow z_v} [F(z) z^{k-1} (z - z_v)] \quad (3.44)$$

Коли полюс  $z_v$  має кратність  $r_v$ , то

$$\text{Res}_v [F(z) z^{k-1}] = \frac{1}{(r_v - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_v} [F(z) z^{k-1} (z - z_v)^{r_v}] \quad (3.45)$$

*Приклад 3.15.* Знову розглянемо функцію

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}.$$

Ця функція має два простих полюси  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = e^{-aT}$ . Тоді, використовуючи формулу (3.43), маємо

$$f(kT) = \text{Res}_1[\dots] + \text{Res}_2[\dots]$$

За формулою (3.44)

$$\text{Res}_1[\dots] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})} z^{k-1} (z - 1) \right] = 1.$$

$$\text{Res}_2[\dots] = \lim_{z \rightarrow e^{-aT}} \left[ \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})} z^{k-1} (z - e^{-aT}) \right] = -e^{-aTk}.$$

Отже,

$$f(kT) = 1 - e^{-aTk},$$

що співпадає з результатом, отриманим двома попередніми методами.

### 3.6. Розв'язання різницевого рівняння за допомогою $z$ -перетворення

Розглянемо різницеве рівняння довільного  $n$ -го порядку

$$a_0 y(k) + a_1 y(k+1) + \dots + a_n y(k+n) = f(k) \quad (3.46)$$

з граничними умовами

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \dots, y(n-1) = y_{n-1}. \quad (3.47)$$

Перетворимо рівняння (3.46) за допомогою  $z$ -перетворення, використовуючи теорему зсуення (3.25)

$$Z\{y(k+l)\} = z^l Y(z) - \sum_{r=0}^{l-1} y(r) z^{-(r-l)},$$

та пам'ятаючи про граничні умови (3.47), маємо

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n) Y(z) &= F(z) + \\ + (a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n) y_0 &+ \\ + (a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_n z^{n-1}) y_1 &+ \dots + a_n z y_{n-1}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = G(z),$$

$$a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = H_1(z),$$

$$a_2 z + \dots + a_n z^{n-1} = H_2(z),$$

.....

$$a_n z = H_n(z).$$

Тоді зображення  $Y(z)$  можна подати у вигляді

$$Y(z) = \frac{F(z) + \sum_{i=1}^n H_i(z)y_{i-1}}{G(z)}. \quad (3.48)$$

Подальше завдання полягає у визначенні оригіналу (тобто ґратчастої функції) за знайденим зображенням (3.48). Для цього можна скористатися методами, що розглядалися вище.

### Контрольні запитання

1. Як визначають  $z$ -перетворення?
2. Які переваги  $z$ -перетворення у порівнянні з дискретним перетворенням Лапласа?
3. Яким чином можна перейти від  $D$ -зображення функції до відповідного  $z$ -перетворення?
4. Які методи обчислення  $z$ -перетворення ви знаєте?
5. У чому полягає метод отримання  $z$ -перетворення шляхом підсумовування рядів?
6. У чому полягає метод обчислення  $z$ -перетворення за допомогою розкладання на елементарні дроби відповідного  $D$ -зображення?
7. У чому полягає метод отримання  $z$ -перетворення, який використовує обчислення лишків?
8. Для чого потрібні теореми  $z$ -перетворення?
9. У чому полягає теорема згортки у часовій області?
10. У чому суть теореми згортки в області зображень?
11. Як розрахувати кінцеве значення ґратчастої функції за відомим її  $z$ -перетворенням?

12. Чи є однозначним перехід від ґратчастої функції до її  $z$ -перетворення і навпаки?

13. У чому полягає метод оберненого  $z$ -перетворення за допомогою розкладання останнього на елементарні дроби?

14. Як виконати обернене  $z$ -перетворення шляхом його розвинення у степеневий ряд?

15. Як розрахувати обернене  $z$ -перетворення, використовуючи формулу обернення?

16. Яким чином розв'язують різницеві рівняння за допомогою  $z$ -перетворення?

## 4. МАТРИЦІ ТА ОПЕРАЦІЇ З НИМИ

### 4.1. Поняття матриці та її види

Матрицею  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times m$  або просто  $(n \times m)$  – вимірною матрицею, називається таблиця, що містить  $n$  рядків та  $m$  стовпчиків, елементами якої є дійсні або комплексні числа [8,9]. Матриця записується так

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]. \quad (4.1)$$

Якщо  $n = m$ , то матриця називається *квадратною*, в решті випадків – *прямокутною*.

Якщо  $n = 1$ , матриця перетворюється у вектор-рядок

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m], \quad (4.2)$$

а якщо  $m = 1$ , у вектор-стовпець

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

які, таким чином, є окремим випадком матриці.

Дві матриці  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  та  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  дорівнюють одна одній ( $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ) у тому і тільки у тому випадку, коли вони мають однаковий вимір та рівні відповідні елементи  $a_{ij} = b_{ij}$  для всіх  $i$  та  $j$ .

Якщо ненульові елементи квадратної матриці  $\mathbf{A}$  розташовані на її діагоналі, а решта елементів дорівнюють нулю, то така матриця носить назву *діагональної* та записується так:

$$\mathbf{A} = \text{diag}[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{nn}]. \quad (4.4)$$

Окремим випадком діагональної матриці є матриця *одинична*  $\mathbf{I}$  з діагональними елементами  $a_{ii} = 1$ .

*Блокова діагональна* матриця представляє собою матрицю, яка може бути розбита на квадратні підматриці, що містять ненульові елементи, розташовані на головній діагоналі, а решта підматриць складається тільки з нулів

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} = \text{diag}[\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2 \ \dots \ \mathbf{A}_n]. \quad (4.5)$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, розташовані вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *нижньою (верхньою) трикутною матрицею*.

Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю носить назву *нульової* матриці.

Матриця  $\mathbf{A}^T$  виміром  $m \times n$ , рядки якої є стовпчиками, а стовпчики – рядками матриці  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times m$ , називається *транспонованою* по відношенню до  $\mathbf{A}$  матрицею. Елементи  $a_{ij}^T$  матриці  $\mathbf{A}^T$  визначаються за елементами  $a_{ij}$  матриці  $\mathbf{A}$  із співвідношення

$$a_{ij}^T = a_{ji}. \quad (4.6)$$

Матриця  $\mathbf{A}$  є *симетричною*, якщо  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , та *кососиметричною*, коли  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ .



Матрицю, *спряжену* до  $\mathbf{A}$ , позначають  $\bar{\mathbf{A}}$  та формують шляхом заміни кожного елемента  $\mathbf{A}$  на комплексне спряжене число. Якщо всі елементи  $\mathbf{A}$  – дійсні числа, то  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ . Якщо всі елементи  $\mathbf{A}$  – суто уявні числа, то  $\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$ .

Якщо матриця  $\mathbf{A}$  містить комплексні числа, то матриця, що задовольняє умову  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , називається *ермітовою*. Для матриць, які складаються тільки з дійсних елементів, поняття симетричної та ермітової матриці однозначні.

Вираз

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

називається *квадратичною формою*.

Якщо  $Q(\mathbf{x}) > 0$  для всіх  $\mathbf{x} \neq 0$ , то матриця  $\mathbf{A}$  називається *додатньовизначеною*.

Якщо  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  для всіх  $\mathbf{x} \neq 0$ , тобто  $Q(\mathbf{x}) = 0$  для деяких  $\mathbf{x}$ , матриця  $\mathbf{A}$  називається *додатно напіввизначеною*.

Матриця  $\mathbf{A}$  є *від'ємно визначеною*, якщо  $Q(\mathbf{x}) < 0$ , та *від'ємно напіввизначеною*, якщо  $Q(\mathbf{x}) \leq 0$  для всіх  $\mathbf{x} \neq 0$ .

Якщо для деяких  $\mathbf{x}$   $Q(\mathbf{x}) > 0$ , а для інших  $Q(\mathbf{x}) < 0$ , то матриця  $\mathbf{A}$  називається *невизначеною*.

## 4.2. Алгебраїчні операції з матрицями

Додавання та віднімання матриць виконується поелементно, тобто якщо  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  та  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  – обидві  $n \times m$ -вимірні матриці, то  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  та  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  є матрицями того ж виміру, причому елементи цих матриць обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, \\ d_{ij} &= a_{ij} - b_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для того, щоб помножити матрицю  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  на скаляр  $\alpha$  необхідно кожний елемент  $a_{ij}$  помножити на цей скаляр:

$$\alpha \mathbf{A} = \mathbf{A} \alpha = [\alpha a_{ij}]. \quad (4.8)$$

Матриця  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  виміром  $n \times t$  може бути помножена на матрицю  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  виміром  $p \times q$ , коли кількість стовпчиків  $t$  матриці  $\mathbf{A}$  дорівнює кількості рядків  $p$  матриці  $\mathbf{B}$ . У цьому випадку матриці  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  називають *конформними*. Якщо матриця  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, q$ ) є добутком матриць  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  тобто  $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ , то елементи матриці  $\mathbf{C}$  розраховуються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad (4.9)$$

звідки зрозуміло, що вимір матриці  $\mathbf{C}$  –  $n \times q$ .

*Приклад 4.1.* Дані матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Тоді за формулою (4.9)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + 3 \times 4 & 2 \times 5 + 3 \times 8 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 & 4 \times 3 + 5 \times 4 & 4 \times 5 + 5 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 34 \\ 14 & 32 & 60 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 3 \times (-5) \\ 4 \times 4 + 5 \times (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

$$10\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 50 \end{bmatrix}.$$

Добутки  $\mathbf{BA}$ ,  $\mathbf{CA}$  та  $\mathbf{CB}$  не існують.

Ділення на матрицю не існує. Операція, аналогічна діленню, називається *оберненням* матриці. Про це мова пізніше.

Нульову матрицю можна додавати та множити:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Операція множення одиничної матриці виглядає так

$$\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}.$$

Для матриць залишаються в силі наступні алгебраїчні закони

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B},$$

$$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C},$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{A}.$$

Треба підкреслити, що із існування добутку  $\mathbf{AB}$  зовсім не випливає існування добутку  $\mathbf{BA}$ . Більш того, якщо навіть існує, то у загальному випадку. Рівність у цьому співвідношенні можлива тільки для квадратних матриць. При цьому дві квадратні матриці називаються *комутивними*.

Для транспонованих матриць справедливі співвідношення

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T,$$

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

#### 4.3. Визначники, мінори та алгебраїчні доповнення матриць

*Визначник* може бути розрахований тільки для квадратної матриці. Він складається з елементів цієї матриці та позначається  $|\mathbf{A}|$ , або  $\det \mathbf{A}$ .

Визначник  $\det \mathbf{A}$  має наступні властивості:

- 1) при множенні на скаляр  $\lambda$  будь-якого стовпчика (рядка) визначник  $\det \mathbf{A}$  множиться на  $\lambda$ ;
- 2) зміна місцями двох сусідніх стовпчиків (рядків) змінює знак  $\det \mathbf{A}$  на протилежний;
- 3) якщо будь-які два стовпчики (рядки) матриці  $\mathbf{A}$  рівні між собою, то  $\det \mathbf{A} = 0$ ;
- 4) додавання до будь-якого стовпчика (рядка) матриці  $\mathbf{A}$  будь-якого іншого стовпчика (рядка), помноженого на довільний скалярний множник, залишає  $\det \mathbf{A}$  без зміни;
- 5) якщо стовпчики (рядки) матриці  $\mathbf{A}$  лінійно залежні, то  $\det \mathbf{A} = 0$ ;
- 6) якщо  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  мають вимір  $n \times m$ , то  $\det (\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}$ ;
- 7)  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$ ;
- 8) для діагональної матриці  $\mathbf{A} = \text{diag}[a_{11}a_{22}\dots a_{nn}]$   $\det \mathbf{A} = a_{11} \times \dots \times a_{nn}$ ;
- 9) для блочної діагональної матриці  $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_n]$   $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 \times \det \mathbf{A}_2 \times \dots \times \det \mathbf{A}_n$ ;
- 10) для будь-якої трикутної матриці  $\mathbf{A}$   $\det \mathbf{A}$  дорівнює добутку її діагональних елементів.

Визначники низького порядку  $n$  розраховується наступним чином:

$$n = 1: \quad \det \mathbf{A} = a_{11};$$

$$n = 2: \quad \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$n = 3: \quad \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Для обчислення будь-якого визначника  $n$ -го порядку необхідно знайти алгебраїчну суму  $n!$  доданків, кожен з яких представляє собою добуток  $n$  елементів.

Розрахунок визначників більш високого порядку здійснюється, як правило, шляхом зниження порядку визначника.

Для цього існує декілька правил, наприклад, *правило Крамера*, відоме з елементарної математики.

*Правил* обчислення визначника з вибором головного елемента дозволяє знизити на 1 порядок визначника, що розраховується. Нехай необхідно знайти визначник матриці  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times m$ . Для цього вибирають деякий елемент матриці  $a_{pq} \neq 0$ , який називають *головним елементом*. Потім формують визначник виміром  $(n-1) \times (n-1)$ , кожен елемент якого є визначником виміром  $2 \times 2$ . Визначник  $2 \times 2$  складається з головного елемента  $a_{pq}$ , елемента  $p$ -го рядка, елемента  $q$ -го стовпчика та четвертого елемента, розташованого у четвертому куті квадрата, утвореного вказаними трьома елементами. Якщо визначник  $(n-1) \times (n-1)$  дорівнює  $|\mathbf{A}_{n-1}|$ , то

$$\det \mathbf{A} = \frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{a_{pq}^2} \quad (4.10)$$

*Приклад 4.2.* Нехай матриця  $\mathbf{A}$  буде  $4 \times 4$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Головним елементом матриці  $\mathbf{A}$  виберемо  $a_{23} \neq 0$ .

Тоді

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{a_{23}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

Матриця  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times n$  містить  $n^2$  елементів  $a_{ij}$ . Мінором  $M_{pq}$  називається визначник виміром  $(n-1) \times (n-1)$ , сформований з елементів матриці  $\mathbf{A}$  викресленням  $p$ -го рядка та  $q$ -го стовпчика.

Приклад 4.3. Дано матрицю  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Треба знайти мінори  $M_{12}$ ,  $M_{22}$  та  $M_{32}$ . Маємо

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Кожний елемент  $a_{pq}$  матриці  $\mathbf{A}$  має своє алгебраїчне доповнення, яке відрізняється від відповідного мінора  $M_{pq}$  своїм знаком:

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}. \quad (4.12)$$

Приклад 4.4. Для матриці з попереднього приклада маємо

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \times 5 = -5;$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \times 4 = 4;$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \times 1 = -1.$$

Визначник матриці  $\mathbf{A}$  можна розрахувати за допомогою алгебраїчних доповнень. Для цього достатньо вибрати будь-який рядок  $k$  матриці  $\mathbf{A}$ . Тоді

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{kj} C_{kj} \quad (4.13)$$

Замість рядка можна вибрати будь-який  $l$  – й стовпчик  $\mathbf{A}$  і тоді

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{il} C_{il} \quad (4.14)$$

*Приклад 4.5.* Знайдемо визначник для матриці  $\mathbf{A}$  з прикладу 4.3. Для розв’язку задачі виберемо другий стовпчик ( $l = 2$ ). Тоді згідно з формулою (4.14) та даних, отриманих у прикладі 4.4, дістанемо

$$\det \mathbf{A} = 4 \times (-5) + 0 \times 4 + 0 \times (-1) = -20.$$

#### 4.4. Ранг та слід матриці

*Ранг* матриці  $\mathbf{A}$  позначається як  $r_{\mathbf{A}}$  або  $rank(\mathbf{A})$ , є найбільший порядок ненульового визначника, сформованого з  $\mathbf{A}$ . Ранг матриці виміром  $n \times m$ , як правило, дорівнює меншому з  $n$  або  $m$ .

Якщо матриця  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times n$  має ранг  $n$ , кажуть, що  $\mathbf{A}$ - неособлива (несингулярна, невироджена). У протилежному випадку матриця  $\mathbf{A}$  особлива (сингулярна).

Ранг добутку матриць не може бути більшим за найменший ранг матриць-множників.

*Слідом* матриці  $\mathbf{A}$ , що позначається  $Tr(\mathbf{A})$ , називається сума її діагональних елементів:

$$Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (4.15)$$

Якщо  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  є конформними квадратними матрицями, то

$$\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Tr}\mathbf{A} + \text{Tr}\mathbf{B},$$

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA}).$$

Приклад 4.6. Дано

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Знайти ранг матриці та слід цих матриць.

$\det \mathbf{A} = -112$ , отже,  $r_{\mathbf{A}} = 3$  ( $\mathbf{A}$  – неособлива матриця) та  $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 6$ .

$\det \mathbf{B} = 0$  без розрахунків, тому що 1-й та 2-й стовпчики матриці  $\mathbf{B}$  лінійно залежні. Значить  $r_{\mathbf{B}} < 3$ . Сформуємо шляхом викреслення, наприклад, 2-го стовпчика та 3-го рядка, матрицю  $\mathbf{B}_1$  виміром  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det \mathbf{B} = -22$ , отже,  $r_{\mathbf{B}} = 2$ ,  $\text{Tr}(\mathbf{B}) = 4$ .

#### 4.5. Диференціювання та інтегрування векторів і матриць

Якщо матриця  $\mathbf{A}$  складається з елементів, які є функціями деякої скалярної величини, наприклад, часу  $t$ , диференціювання та інтегрування матриці базується на поелементній основі, тобто якщо  $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$ , то

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{A}} = \left[ \dot{a}_{ij}(t) \right] \quad \text{та} \quad \int \mathbf{A}(\tau) d\tau = \left[ \int a_{ij}(\tau) d\tau \right].$$

Нехай вектор  $\mathbf{x}$  є функцією вектора параметрів  $\mathbf{a} = [a_1 a_2 \dots a_n]^T$  та існують частинні похідні  $\mathbf{x}$  по кожному з параметрів.



Визначимо оператор частинної похідної як вектор

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1} \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_n} \end{bmatrix}$$

Оскільки цей оператор є вектором-стовпчиком, він не може бути застосований до вектора

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

Тому застосуємо оператор до вектора-рядка  $\mathbf{x}^T$ . Результатом є матриця

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_p}{\partial a_1} & \frac{\partial x_p}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_p}{\partial a_n} \end{bmatrix}$$

Тепер застосуємо оператор  $\partial/\partial a$  до скалярного добутку двох векторів

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}^T \mathbf{W} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_p \end{bmatrix} = V_1 W_1 + V_2 W_2 + \dots + V_p W_p,$$

дістаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{V}^T \mathbf{W}] &= \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{W} + \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{V} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial a_1} W_1 + \frac{\partial V_2}{\partial a_1} W_2 + \dots + \frac{\partial V_p}{\partial a_1} W_p \\ \frac{\partial V_1}{\partial a_2} W_1 + \frac{\partial V_2}{\partial a_2} W_2 + \dots + \frac{\partial V_p}{\partial a_2} W_p \\ \dots \\ \frac{\partial V_1}{\partial a_n} W_1 + \frac{\partial V_2}{\partial a_n} W_2 + \dots + \frac{\partial V_p}{\partial a_n} W_p \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial a_1} V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial a_1} V_2 + \dots + \frac{\partial W_p}{\partial a_1} V_p \\ \frac{\partial W_1}{\partial a_2} V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial a_2} V_2 + \dots + \frac{\partial W_p}{\partial a_2} V_p \\ \dots \\ \frac{\partial W_1}{\partial a_n} V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial a_n} V_2 + \dots + \frac{\partial W_p}{\partial a_n} V_p \end{bmatrix} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Коли елементи вектора  $\mathbf{V}$  не залежать від параметрів  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , а також  $\mathbf{W} = \mathbf{a}$ , то вираз (4.16) набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{V}^T \mathbf{W}] = \mathbf{V} \quad (4.17)$$

Коли, навпаки, елементи вектора  $\mathbf{W}$  не залежать від параметрів  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  та  $\mathbf{V} = \mathbf{a}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{a}^T \mathbf{W}] = \mathbf{W}. \quad (4.18)$$

При заміні векторів  $\mathbf{V}$  та  $\mathbf{W}$  на матриці  $\mathbf{F}$  та  $\mathbf{G}$  останні два рівняння залишаються справедливими:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{F} \mathbf{a}] = \mathbf{F}^T, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{a}^T \mathbf{G}] = \mathbf{G}. \quad (4.20)$$

Для квадратної матриці  $\mathbf{A}$  мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] &= \mathbf{A} \mathbf{y}. \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} [\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}] = 2\mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (\mathbf{A} - \text{симетрична матриця}).$$

#### 4.6. Методи обернення матриці

Величина, обернена скаляру  $a$ , є  $\frac{1}{a}$ , або  $a^{-1}$ . Аналогічно для довільної матриці  $\mathbf{A}$  повинна існувати *обернена їй матриця*  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , така що

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad (4.22)$$

де  $\mathbf{I}$  – одинична матриця.

Враховуючи властивість конформності добутку, зрозуміло, що оберненню підлягає тільки квадратна матриця. Крім того,  $\mathbf{A}$  повинна мати ненульовий визначник, тобто  $\mathbf{A}$  – неособлива матриця.

Існує декілька методів обернення матриць.

Згідно *методу, що використовує спрєднану матрицю*, обернення матриці  $\mathbf{A}$  виконується за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^T / \det \mathbf{A}, \quad (4.23)$$

де матриця  $\mathbf{C}$  складається з алгебраїчних доповнень матриці  $\mathbf{A}$ .

Матриця  $\mathbf{C}^T$ – приєднана по відношенню до  $\mathbf{A}$  матриця, іноді позначається  $adj\mathbf{A}$ . Тоді записують

$$\mathbf{A}^{-1} = adj\mathbf{A} / \det\mathbf{A}. \quad (4.24)$$

*Приклад 4.7.* Дано матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Треба знайти  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Спочатку знаходимо алгебраїчні доповнення матриці  $\mathbf{A}$ :  $c_{11} = 4$ ;  $c_{12} = -3$ ;  $c_{21} = -2$ ;  $c_{22} = 1$ , з яких складемо матрицю  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Значить,

$$adj\mathbf{A} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Визначник  $\det\mathbf{A} = -2$ . Нарешті, користуючись формулою (4.24), дістанемо

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Обернення матриці *методом розбиттяїї на клітини* передбачає, що коли матриця  $\mathbf{S}$  може бути представлена у вигляді

$$\mathbf{S} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right],$$

то обернену матрицю  $\mathbf{S}^{-1}$  формуємо так

$$\mathbf{S}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{array} \right], \quad (4.25)$$

де

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{L} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BN}, \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{NCA}^{-1}, \\ \mathbf{K} &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BM}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Приклад 4.8. Дано матрицю

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайти  $\mathbf{S}^{-1}$ .

Спочатку розіб'ємо матрицю  $\mathbf{S}$  на клітини виміром  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далі послідовно визначаємо:

$$1) \mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2) \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix};$$

$$3) \mathbf{CA}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$4) \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix};$$

$$5) \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -10 & -5 \end{bmatrix};$$

$$6) \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}}{-100} = \begin{bmatrix} 0,05 & -0,09 \\ -0,1 & -0,02 \end{bmatrix};$$

$$7) \mathbf{L} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BN} = -\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,05 & -0,09 \\ -0,1 & -0,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,23 \\ -0,1 & 0,58 \end{bmatrix};$$

$$8) \mathbf{M} = -\mathbf{NCA}^{-1} = -\begin{bmatrix} 0,05 & -0,09 \\ -0,1 & -0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,13 & 0,14 \\ 0,14 & -0,08 \end{bmatrix};$$

$$9) \mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BM} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,13 & 0,14 \\ 0,14 & -0,08 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,11 & -0,58 \\ 1,06 & 0,68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 & -0,42 \\ -0,06 & 0,32 \end{bmatrix};$$

$$10) \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,11 & -0,42 & 0,35 & -0,23 \\ -0,06 & 0,32 & -0,1 & 0,58 \\ 0,13 & 0,14 & 0,05 & -0,09 \\ 0,14 & -0,08 & -0,1 & -0,02 \end{bmatrix}.$$

Щоб перевірити правильність розрахунків треба перемножити матриці  $\mathbf{S}$  та  $\mathbf{S}^{-1}$ :

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,11 & -0,42 & 0,35 & -0,23 \\ -0,06 & 0,32 & -0,1 & 0,58 \\ 0,13 & 0,14 & 0,05 & -0,09 \\ 0,14 & -0,08 & -0,1 & -0,02 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, розрахунки проведені вірно.

У відповідності до *методу облямовування* процес обернення матриці  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times n$  виконують за  $n$  кроків.

Припустімо, на попередньому кроці розрахована матриця  $\mathbf{A}_{m-1}^{-1}$ . На її основі формуємо матрицю  $\mathbf{A}_m$ , яка підлягає подальшому оберненню

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m-1}^{-1} & \mathbf{U}_m \\ \mathbf{V}_m & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

де вектор-рядок  $\mathbf{V}_m$  виміром  $1 \times (m-1)$  та вектор-стовпчик  $\mathbf{U}_m$  виміром  $(m-1) \times 1$  вибираються з матриці  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{V}_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{m,m-1}], \quad \mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{m-1,m} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Далі обчислюють вектори  $\boldsymbol{\gamma}_m = -\mathbf{V}_m \mathbf{A}_{m-1}^{-1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_m = -\mathbf{A}_{m-1}^{-1} \mathbf{U}_m$  та скаляр

$$\alpha_m = a_{mm} + \boldsymbol{\gamma}_m \mathbf{U}_m.$$

Елементи  $d_{ij}$  оберненої матриці  $\mathbf{A}_m^{-1}$  визначають за формулами

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + \frac{\gamma_{mj} \beta_{im}}{\alpha_m},$$

$$d_{im} = \frac{\beta_{im}}{\alpha_m},$$

$$d_{mj} = \frac{\gamma_{mj}}{\alpha_m},$$

$$d_{mm} = \frac{1}{\alpha_m},$$

де  $\gamma_{mj}$  ( $j=1,2,\dots,m-1$ ),  $\beta_{im}$  ( $i=1,2,\dots,m-1$ ) - елементи векторів  $\boldsymbol{\gamma}_m$  та  $\boldsymbol{\beta}_m$  відповідно;  $d_{ij}^0$  - відповідний елемент матриці  $\mathbf{A}_{m-1}^{-1}$ .

На першому кроці  $\mathbf{A}_1^{-1} = 1/a_{11}$ .

*Приклад 4.9.* Знайти матрицю, обернену до  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



1-й крок ( $m = 1$ ).  $\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{a_{11}} = 1$ .

2-й крок ( $m = 2$ ). Сформуємо матрицю  $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

тобто  $V_2 = -1$ ,  $U_2 = 1$ ,  $a_{22} = 0$ .

Обчислюємо  $\gamma_2$ ,  $\beta_2$  та  $\alpha_2$  (при  $m = 2$ ,  $\gamma_2$  та  $\beta_2$  – скалярні величини):

$$\gamma_2 = -V_2 A_1^{-1} = -(-1) \times 1 = 1,$$

$$\beta_2 = -A_1^{-1} U_2 = -1 \times 1 = -1,$$

$$\alpha_2 = a_{22} + \gamma_2 U_2 = 0 + 1 \times 1 = 1.$$

Розрахуємо елементи матриці  $\mathbf{A}_2^{-1}$ :

$$d_{11} = d_{11}^0 + \frac{\gamma_2 \beta_2}{\alpha_2} = 1 + \frac{1 \times (-1)}{1} = 0,$$

$$d_{12} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$d_{21} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$d_{22} = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Значить,

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3-й крок ( $m = 3$ ). Матриця  $\mathbf{A}_3$  буде мати вигляд

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

значить,  $\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $a_{33} = 2$ .

Тоді

$$\gamma_3 = -\mathbf{V}_3 \mathbf{A}_2^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{U}_3 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 = a_{33} + \gamma_3 \mathbf{U}_3 = 2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 + 6 = 8.$$

Елементи матриці  $\mathbf{A}_3^{-1}$  будуть такі:

$$d_{11} = d_{11}^0 + \frac{\gamma_{31} \beta_{13}}{\alpha_3} = 0 + \frac{(-1) \times 3}{8} = -\frac{3}{8};$$

$$d_{12} = d_{12}^0 + \frac{\gamma_{32} \beta_{13}}{\alpha_3} = -1 + \frac{1 \times 3}{8} = -\frac{5}{8};$$

$$d_{13} = \frac{\beta_{13}}{\alpha_3} = \frac{3}{8};$$

$$d_{21} = d_{21}^0 + \frac{\gamma_{31} \beta_{23}}{\alpha_3} = 1 + \frac{(-1) \times 0}{8} = 1;$$

$$d_{22} = d_{22}^0 + \frac{\gamma_{32} \beta_{23}}{\alpha_3} = 1 + \frac{1 \times 0}{8} = 1;$$

$$d_{23} = \frac{\beta_{23}}{\alpha_3} = 0;$$

$$d_{31} = \frac{\gamma_{31}}{\alpha_3} = -\frac{1}{8};$$

$$d_{32} = \frac{\gamma_{32}}{\alpha_3} = \frac{1}{8};$$

$$d_{33} = \frac{1}{8}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Перевірка шляхом розрахунку матриці  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$  підтверджує правильність отриманих результатів.

Обернення матриці *методом розбиттяїї на добуток двох трикутних матриць* розглянемо на прикладі.

*Приклад 4.10.* Треба знайти матрицю, обернену до  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зобразимо цю матрицю у вигляді добутку двох трикутних матриць

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11}c_{12} & b_{11}c_{13} \\ b_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22} & b_{21}c_{13} + b_{22}c_{23} \\ b_{31} & b_{31}c_{12} + b_{32} & b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23} + b_{33} \end{bmatrix}.$$

Розрахуємо невідомі  $b_{ij}$  та  $c_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ , прирівнявши елементи останньої матриці відповідним елементам матриці **A**. Дістанемо

$$b_{11} = 1; b_{21} = 2; b_{31} = 3;$$

$$b_{11}c_{12} = 4; b_{11}c_{13} = 3;$$

$$b_{21}c_{12} + b_{22} = 1; b_{21}c_{13} + b_{22}c_{23} = 0;$$

$$b_{31}c_{12} + b_{32} = -1; b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23} + b_{33} = 1.$$

$$\text{Звідси } b_{22} = -7; b_{32} = -13; b_{33} = \frac{22}{7}; c_{12} = 4; c_{13} = 3;$$

$$c_{23} = \frac{6}{7}; c_{33} = \frac{22}{7}.$$

Отже,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 3 & -13 & \frac{22}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначимо обернені матриці для трикутних матриць **B** та **C** з тотожності

а)  $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$  та б)  $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ .

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 3 & -13 & \frac{22}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 2b_{11} - 7b_{21} & -7b_{22} & 0 \\ 3b_{11} - 13b_{21} + \frac{22}{7}b_{31} & -13b_{22} + \frac{22}{7}b_{32} & \frac{22}{3}b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зрівнявши відповідні елементи, маємо  $b_{11} = 1$ ;  $b_{21} = \frac{2}{7}$ ;  $b_{31} = \frac{5}{22}$ ;

$$b_{22} = -\frac{1}{7}; \quad b_{32} = -\frac{13}{22}; \quad b_{33} = \frac{7}{22},$$

тобто

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{22} & -\frac{13}{22} & \frac{7}{22} \end{bmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} + 4c_{22} & c_{13} + 4c_{23} + 3c_{33} \\ 0 & c_{22} & c_{23} + \frac{6}{7}c_{33} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Порівнявши відповідні елементи, дістаємо

$$c_{11} = 1; c_{12} = -4; c_{13} = \frac{3}{7}; c_{22} = 1; c_{23} = -\frac{6}{7}; c_{33} = 1;$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тепер обчислимо обернену матрицю

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{22} & -\frac{13}{22} & \frac{7}{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{7}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{5}{22} & -\frac{13}{22} & \frac{7}{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перевірити правильність отриманих результатів можна, як завжди, обчисливши добуток  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ .

При виконанні операцій обернення матриць треба пам'ятати, що для добутку матриць справедлива рівність

$$(\mathbf{ABC} \dots \mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \dots \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}. \quad (4.29)$$

Якщо  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ , то така матриця  $\mathbf{A}$  називається *ортогональною*.

Для прямокутних матриць **A** існує матриця, яка носить назву *псевдо-оберненої* та розраховується за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \quad (4.30)$$

#### 4.7. Розв'язання системи алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

## Система алгебраїчних рівнянь вигляду

[illegible]

може бути представлена у матричній формі

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{B}, \quad (4.32)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Тоді розв'язок системи (4.31) може бути записаний таким чином:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (4.33)$$

Це означає, що для розв'язку системи (4.31) необхідно спочатку знайти обернену матрицю  $\mathbf{A}^{-1}$ , а потім помножити її на матрицю  $\mathbf{B}$ .

Приклад 4.11. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Представимо її у вигляді (4.32). Тоді

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Визначимо  $\mathbf{A}^{-1}$  за формулою  $\mathbf{A}^{-1} = \text{adj}\mathbf{A} / \det\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Для обчислення  $\text{adj}\mathbf{A}$  розрахуємо алгебраїчні доповнення матриці  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 22; \quad \mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17; \quad \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

Отже,

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

З формули (4.33)

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Таким чином,

$$x_1 = -1,5; x_2 = 0,5; x_3 = 2.$$

#### 4.8. Характеристичне рівняння та власні значення матриці

Для матриці  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times n$  рівняння

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \\ &= (-\lambda)^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

називається *характеристичним рівнянням*. Корені цього рівняння  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  називаються *власними значеннями* матриці  $\mathbf{A}$ . Поліном  $D(\lambda)$  може бути представлений у вигляді

$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0, \quad (4.35)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - корені характеристичного рівняння (власні значення). У загальному випадку деякі з цих коренів можуть бути рівними.

Якщо є  $p < n$  різних коренів, поліном  $D(\lambda)$  приймає вигляд

$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p} = 0 \quad (4.36)$$

При цьому кажуть, що корінь  $\lambda_1$  має *кратність* (порядок)  $m_1$ , корінь  $\lambda_2$  - кратність (порядок)  $m_2$  і т.д.

Власні значення матриць мають такі *властивості*:

1) коли коефіцієнти характеристичного рівняння - скалярні величини, власні значення або дійсні, або утворюють комплексно-спряжені пари;

2) слід матриці  $\mathbf{A}$  визначається як сума її власних значень

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n; \quad (4.37)$$

3) визначник матриці  $\mathbf{A}$  зв'язаний з власними значеннями співвідношенням

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n; \quad (4.38)$$

- 4) якщо матриця  $\mathbf{A}$  не вироджена та має власні значення  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , то  $1/\lambda_i$  є власними значеннями матриці  $\mathbf{A}^{-1}$ ;
- 5) якщо  $\lambda_i$  - власне значення матриці  $\mathbf{A}$ , то воно ж є власним значенням матриці  $\mathbf{A}^T$ ;
- 6) якщо  $\mathbf{A}$  - дійсна симетрична матриця, то всі її власні значення дійсні;
- 7) для квадратних матриць  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{AB}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{BA}); \quad (4.39)$$

у цьому випадку власні значення матриці  $\mathbf{AB}$  співпадають з власними значеннями матриці  $\mathbf{BA}$ .

*Приклад 4.12.* Знайти власні значення матриці  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Запишемо характеристичне рівняння (4.34)

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} (\lambda-1) & -5 \\ 0 & (\lambda-2) \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \end{aligned}$$

Звідси  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ .

## 4.9. Власні вектори матриці та методи їх обчислення

Вектор  $\mathbf{p}_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) виміром  $n \times 1$ , який задовольняє матричному рівнянню

$$\lambda_i \mathbf{p}_i = \mathbf{A} \mathbf{p}_i, \quad (4.40)$$

або

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad (4.41)$$

де  $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$  – власні значення матриці  $A$ , називається *власним вектором* матриці  $A$ , відповідним власному значенню  $\lambda_i$ .

Для різних власних значень матриці  $\mathbf{A}$  її власні вектори можуть бути визначені *безпосередньо* з рівняння (4.41), яке можна представити у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

[illegible]

$$\text{де } \mathbf{p}_i = [p_{i1} \quad p_{i2} \quad \dots \quad p_{in}]^T.$$

*Приклад 4.13.* Дано матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,233 \\ -0,465 & -0,097 \end{bmatrix}.$$

Необхідно знайти вектори  $\mathbf{p}_1$  та  $\mathbf{p}_2$  методом безпосереднього розв'язку рівняння (4.41).

Перш за все, треба розрахувати власні значення матриці **A**, які у даному випадку будуть  $\lambda_1 = 0,135; \lambda_2 = 0,368$ . Тепер складемо систему рівнянь (4.42):

$$\begin{cases} (0,6-\lambda_i)p_{i1}+0,233p_{i2}=0, \\ -0,465p_{i1}-(0,097+\lambda_i)p_{i2}=0. \end{cases} \quad (4.43)$$

При  $\lambda_1 = 0,135$  маємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,465p_{11} + 0,233p_{12} = 0, \\ -0,465p_{11} - 0,233p_{22} = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння – лінійно залежні, тому система цих рівнянь має нескінченну кількість розв’язків. Це значить, що з цієї нескінченної кількості можна вибрати будь-який розв’язок, який задовольняє умові  $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}$ . Тому приймаємо  $\mathbf{p}_{11} = 1$ , тоді  $\mathbf{p}_{12} = -2$ . Отже,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Тепер у систему (4.43) підставимо  $\lambda_2 = 0,368$ . Це приводить до рівнянь

$$\begin{cases} 0,233p_{21} + 0,233p_{22} = 0, \\ -0,465p_{21} - 0,465p_{22} = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння теж лінійно залежні, тому, діючи аналогічно, приймаємо  $\mathbf{p}_{21} = 1$ . Тоді  $\mathbf{p}_{22} = -1$ . Значить,

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Для різних власних значень власні вектори матриці  $\mathbf{A}$  можна також розрахувати з використанням будь-якого ненульового стовпчика приєднаної матриці  $\text{adj}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Застосування цього методу розглянемо на прикладі.

*Приклад 4.14.* Розв’яжемо попередній приклад. Передусім складемо матрицю  $\text{adj}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ :

$$\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_i - 0,6 & -0,233 \\ 0,465 & \lambda_i + 0,097 \end{bmatrix}.$$

Розрахуємо приєднану матрицю  $adj(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ . Для цього визначимо алгебраїчні доповнення матриці  $\mathbf{A}$

$$c_{11} = \lambda_i + 0,097; \quad c_{12} = -0,465;$$

$$c_{21} = 0,233; \quad c_{22} = \lambda_i - 0,6.$$

Сформуємо матрицю  $\mathbf{C}$  з алгебраїчних доповнень

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_i + 0,097 & -0,465 \\ 0,233 & \lambda_i - 0,6 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$adj(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_i + 0,097 & 0,233 \\ -0,465 & \lambda_i - 0,6 \end{bmatrix}.$$

Підставимо  $\lambda_1 = 0,135$  та  $\lambda_2 = 0,368$

$$adj(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0,233 & 0,233 \\ -0,465 & -0,465 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$adj(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0,465 & 0,233 \\ -0,465 & -0,233 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Оберемо  $\mathbf{p}_1$  рівним стовпчику приєднаних матриці (4.44), поділеному на загальний множник, отже,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно з виразу (4.45) дістаємо

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Тобто результати повністю співпадають з результатами попереднього прикладу.

Наведемо деякі важливі *властивості власних векторів*:

- 1) ранг матриці  $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ , де  $\lambda_i (1, 2, \dots, n)$  – різні власні значення матриці  $\mathbf{A}$ , дорівнює  $n - 1$  (це було проілюстровано у прикладі (4.13);
- 2) власний вектор  $\mathbf{p}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  визначається будь-яким ненульовим стовпчиком матриці  $\text{adj}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ , де  $\lambda_i$  - просте власне значення матриці  $\mathbf{A}$ ;
- 3) якщо матриця  $\mathbf{A}$  має  $n$  різних власних значень, то система з  $n$  власних векторів  $\mathbf{p}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  лінійно незалежна;
- 4) якщо  $\mathbf{p}_i$  - власний вектор матриці  $\mathbf{A}$ , то  $k\mathbf{p}_i$  є також власний вектор, де  $k$  – скалярний множник.

Якщо одне або декілька власних значень матриці є кратними коренями характеристичного рівняння, повна система з  $n$  лінійно незалежних власних векторів може існувати або не існувати.

Число лінійно незалежних власних векторів, відповідних деякому власному значенню  $\lambda_i$  кратності  $m_i$ , дорівнює *дефекту*  $d_i$  матриці  $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ . Дефект  $d_i$  матриці  $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$  визначається так

$$d_i = n - r_i, \quad (4.46)$$

де  $n$  – вимір матриці  $\mathbf{A}$ , а  $r_i$  – ранг матриці  $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ .

Завжди існує  $d_i$  лінійно незалежних власних векторів, відповідних  $\lambda_i$ . Крім того,  $1 \leq d_i \leq m_i$ .

Власні вектори матриці  $\mathbf{A}$  з кратними власними значеннями визначають наступними методами.

Для відповідного  $\lambda_i$ , що має кратність  $m_i$  у випадку повної виродженості ( $d_i = m_i$ ) існує повна система з  $m_i$  власних векторів. Ці власні вектори визначаються ненульовими стовпчиками матриці

$$\frac{1}{(m_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{m_i-1}}{d\lambda^{m_i-1}} [\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})] \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad (4.47)$$

*Приклад 4.15.* Знайти власні вектори матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці  $\mathbf{A}$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5) = 0,$$

значить, власні значення цієї матриці  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$  та  $\lambda_3 = 5$ . Отже, власне значення  $\lambda_1 = 3$  має кратність  $m_1 = 2$ ,  $\lambda_3 = 5$  є простим.

Щоб визначити дефект матриці  $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$  для  $\lambda_1 = 3$ , утворимо матрицю

$$\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-4 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-4 \end{bmatrix} \Big|_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ця матриця має ранг 1. Отже, дефект цієї матриці буде

$$d_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2.$$

Зважаючи на те, що кратність власного значення  $\lambda_1 = 3$  становить  $m_1 = 2$ , то матриця  $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$  повністю вироджена, значить, розрахунковою для цього випадку є формула (4.47).

Перед тим, як користатися нею, обчислимо алгебраїчні доповнення матриці  $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ :

$$c_{11} = (\lambda - 3)(\lambda - 5); \quad c_{12} = 2(\lambda - 4); \quad c_{13} = 2(\lambda - 3);$$

$$c_{21} = 0; \quad c_{22} = (\lambda - 3)(\lambda - 4); \quad c_{23} = \lambda - 3;$$

$$c_{31} = 0; \quad c_{32} = \lambda - 3; \quad c_{33} = (\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Тепер сформуємо з алгебраїчних доповнень матрицю  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (\lambda - 3)(\lambda - 5) & 2(\lambda - 4) & 2(\lambda - 3) \\ 0 & (\lambda - 3)(\lambda - 4) & \lambda - 3 \\ 0 & \lambda - 3 & (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 3)(\lambda - 5) & 0 & 0 \\ 2(\lambda - 4) & (\lambda - 3)(\lambda - 4) & \lambda - 3 \\ 2(\lambda - 3) & \lambda - 3 & (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{bmatrix}.$$

Згідно з (4.47)

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{d\lambda} \text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \right] \Big|_{\lambda = \lambda_1} = \\ & = \frac{d}{d\lambda} \begin{bmatrix} (\lambda - 3)(\lambda - 5) & 0 & 0 \\ 2(\lambda - 4) & (\lambda - 3)(\lambda - 4) & \lambda - 3 \\ 2(\lambda - 3) & \lambda - 3 & (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{bmatrix} \Big|_{\lambda = \lambda_1} = \end{aligned}$$



$$= \left[ \begin{array}{ccc} 2\lambda - 8 & 0 & 0 \\ 2 & 2\lambda - 7 & 1 \\ 2 & 1 & 2\lambda - 7 \end{array} \right]_{\lambda=\lambda_1} = \left[ \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Два останні стовпчики цієї матриці лінійно залежні, тому власними векторами будуть

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ та } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

причому  $\mathbf{p}_1$  являє собою перший стовпець матриці, кожний елемент якого поділений на 2.

Для власного значення  $\lambda_3 = 5$  відповідний власний вектор визначається одним з розглянутих вище методів – або безпосередньо з рівняння  $(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_3 = 0$ , або з використанням довільного ненульового стовпчика матриці  $\text{adj}(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A})$ . В результаті маємо

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

У випадку *простої виродженості*, коли дефект матриці  $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$  дорівнює  $1 (d_i = 1)$ , існує тільки один власний вектор, відповідний  $\lambda_i$ , незалежно від кратності  $\lambda_i$ . Цей власний вектор  $\mathbf{p}_{i1}$  можна визначити тим же методом, що і у випадку простих власних значень.

Решту  $m_i - 1$  векторів, відповідних власному значенню  $\lambda_i$  кратності  $m_i$ , називають *узагальненими власними векторами* та визначають з системи  $m_i - 1$  рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_{i2} = -\mathbf{p}_{i1} \\ (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_{i3} = -\mathbf{p}_{i2} \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_{im_i} = -\mathbf{p}_{i(m_i-1)} \end{array} \right. . \quad (4.48)$$

*Приклад 4.16.* Дано матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Її характеристичним рівнянням буде

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0,$$

отже,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . Значить, власне значення  $\lambda_1 = -1$  має кратність  $m_1 = 2$ .

Для визначення дефекту розглянемо матрицю

$$\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ 2 & \lambda_1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ця матриця має ранг **1**. Таким чином, дефект матриці  $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$  згідно формули (4.46) також дорівнює **1**. Це означає, що можна знайти тільки один незалежний власний вектор, наприклад, з використанням матриці

$$\text{adj}(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Цей власний вектор буде

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Власний вектор  $\mathbf{p}_2$ , який буде узагальненим вектором, знайдемо з системи (4.48), яка у цьому випадку буде мати такий вигляд

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1,$$

тобто

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{bmatrix} -2p_{21} - 2p_{22} \\ 2p_{21} + 2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Приймаючи  $p_{21} = 0$ , дістаємо  $p_{22} = 0,5$ . Таким чином,

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

### Контрольні запитання

1. Що називають матрицею?
2. Які види матриць ви знаєте?
3. Яким чином виконують алгебраїчні операції з матрицями?
4. Що таке обернена матриця?
5. Як розраховують мінори та алгебраїчні доповнення матриць?
6. Яким чином визначають ранг чи слід матриці?
7. У чому полягає метод обернення матриці, який використовує приєднану матрицю?
8. Як виконують обернення матриці методом розбиттяїї на клітини?
9. Як обчислити обернену матрицю методом облямовування?

10. Яким чином розраховують обернену матрицю шляхом розбиття її на добуток двох трикутних матриць?

11. Як розв'язується система алгебраїчних рівнянь з використанням оберненої матриці?

12. Що таке характеристичне рівняння матриці?

13. Як розрахувати власні значення матриці?

14. Що таке власні вектори матриці і як їх розраховують?

## 5. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦЬ

### 5.1. Поняття лінійного перетворення матриці

Динаміку автоматичних систем керування у просторі станів математично описують рівнянням стану вигляду [5, 11-13]

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (5.1)$$

де  $\mathbf{x}(k)$  –  $n$ -вимірний вектор стану у  $k$ -й момент часу,  $\mathbf{u}$  –  $m$ -вимірний вектор входів,  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  – матриці виміром  $n \times n$  та  $n \times m$  відповідно. У ряді випадків виникає необхідність перетворити рівняння (5.1) до вигляду

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k), \quad (5.2)$$

де  $\mathbf{z}$  – новий  $n$ -вимірний вектор стану. Це перетворення здійснюють за лінійним законом

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\mathbf{z}(k), \quad (5.3)$$

або

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k). \quad (5.4.)$$

У результаті перетворення матриця  $\mathbf{A}_1$  набуває особливої структури, що полегшує розв'язок задач аналізу та синтезу систем керування. При цьому матриця  $\mathbf{A}_1$  повинна мати такі ж власні значення, що і матриця  $\mathbf{A}$ . Таке лінійне перетворення називається *перетворенням подібності* і здійснюється за формулами

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad (5.5)$$

або

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}, \quad (5.6)$$

де матриці  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{M}$  виміром  $n \times n$  повинні бути неособливими. Вони мають різний



вигляд в залежності від структури  $\mathbf{A}_1$ .

## 5.2. Діагоналізація матриці

Під *діагоналізацією матриці* треба розуміти перехід від матриці  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times n$  довільного вигляду до матриці  $\mathbf{\Lambda}$  виміром  $n \times n$  вигляду

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

де  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  – власні значення матриці  $\mathbf{A}$ . При цьому рівняння (5.2) набуває вигляду

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}(k) + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}(k), \quad (5.8)$$

де  $\mathbf{\Gamma}$  – матриця виміром  $n \times m$ .

Перехід від змінних  $\mathbf{x}(k)$  у рівнянні (5.1) до змінних  $\mathbf{z}(k)$  у рівнянні (5.8) здійснюється за формулою (5.3). Якщо матриця  $\mathbf{P}$  неособлива, то з виразу (5.3) маємо

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(k). \quad (5.9)$$

Помножимо на  $\mathbf{P}^{-1}$  ліву та праву частину рівняння (5.1). Дістанемо

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k).$$

Враховуючи (5.3) та (5.9), маємо

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{z}(k) + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k).$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням (5.8), запишемо

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}, \quad (5.10)$$

$$\Gamma = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}. \quad (5.11)$$

Існує декілька способів визначення матриці  $\mathbf{P}$ . Скористаємось одним з них, який задає матрицю  $\mathbf{P}$  такою, що складається з власних векторів  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  матриці  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \quad (5.12)$$

Доведемо правомірність цього.

За визначенням власний вектор відповідає співвідношенню

$$\lambda_i \mathbf{p}_i = \mathbf{A} \mathbf{p}_i; i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.13)$$

З цього рівняння маємо таку систему

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{p}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_1 \\ \lambda_2 \mathbf{p}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_n \mathbf{p}_n &= \mathbf{A} \mathbf{p}_n. \end{aligned}$$

З цієї системи утворюємо матричне рівняння

$$[\lambda_1 \mathbf{p}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{p}_n] = [\mathbf{A} \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{A} \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A} \mathbf{p}_n],$$

або

$$[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n].$$

Останнє рівняння можна записати у формі

$$\mathbf{P} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{A} \mathbf{P},$$

звідки випливає формула (5.10).



Коли матриця **A** записана у канонічній формі, як матрицю перетворення **P** можна використовувати матрицю Вандермонда

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Треба підкреслити, що діагоналізація матриці **A** можлива тільки у тому випадку, коли її власні значення мають різні значення.

*Приклад 5.1.* Діагоналізувати матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перш за все, знайдемо власні значення матриці **A**:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

Далі визначаємо власні вектори:  $\mathbf{p}_1 = [1 \quad -5]^T$ ,  $\mathbf{p}_2 = [0 \quad 1]^T$ . Значить матриця перетворення

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця  $\mathbf{P}^{-1}$  буде

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 5.3. Перетворення матриці до форми Жордана

Якщо матриця  $A$  у рівнянні (5.1) (за виключенням симетричної матриці) має кратні власні значення, вона не може бути приведена до діагонального вигляду. Однак перетворення подібності (5.10) дозволяє перетворити матрицю  $A$  до так званої *форми Жордана*, тобто майже до діагональної матриці. Коли, наприклад, матриця  $A$  має власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3$ , причому останні три однакові, тоді відповідна матриця у формі Жордана буде виглядати так

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & | & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ - & + & - & + & & & \\ 0 & | & \lambda_2 & | & 0 & 0 & 0 \\ & + & - & - & - & - & - \\ 0 & & 0 & | & \lambda_3 & 1 & 0 \\ & & & | & & & \\ 0 & & 0 & | & 0 & \lambda_3 & 1 \\ & & & | & & & \\ 0 & & 0 & | & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right]. \quad (5.15)$$

Якби якась матриця мала власні значення  $\lambda_1$  кратності 4, тоді відповідна форма Жордана виглядала б таким чином:

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right]. \quad (5.16)$$

У матриці  $\Lambda$  (5.15), розділеній на частини пунктирними лініями, підматриці, що утворені кожним власним значенням, називаються *клітинами Жордана*.

Визначимо матрицю  $\mathbf{P}$ , яка перетворює матрицю  $\mathbf{A}$  з кратними власними значеннями на форму Жордана. Матрицю  $\mathbf{P}$ , як і раніше, сформуємо з власних векторів матриці  $\mathbf{A}$ , тобто за виразом (5.12). Власні вектори, відповідні різним власним значенням матриці  $\mathbf{A}$ , розраховуємо звичайним способом. Власні вектори, відповідні клітині Жордана порядку  $m(m < n)$ , знаходимо з використанням клітини Жордана, яка має вигляд

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m] \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m],$$
$$\begin{aligned} \lambda_j \mathbf{p}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}_1 + \lambda_j \mathbf{p}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{p}_2 + \lambda_j \mathbf{p}_3 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{p}_{m-1} + \lambda_j \mathbf{p}_m &= \mathbf{A} \mathbf{p}_m. \end{aligned}$$

Перетворимо цю систему рівнянь до вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_1 = 0, \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1, \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2, \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_m = -\mathbf{p}_{m-1}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

З цих рівнянь визначаємо узагальнені власні вектори  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m$ . Доповнюючи ці вектори  $n - m$  власними векторами, розрахованими для  $n - m$  різних власних значень, формуємо матрицю  $\mathbf{P}$  за формулою (5.12).

*Приклад 5.2.* Дана матриця

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Знайти відповідну їй матрицю у формі Жордана.

Власні значення матриці  $\mathbf{A}$  дорівнюють:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ .

Для визначення власних векторів складемо повну систему рівнянь типу (5.18)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_1 = 0, \\ (\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_2 = 0, \\ (\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2. \end{array} \right.$$

Розв'язком цієї системи є

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сформуємо матрицю перетворення  $\mathbf{P}$  за правилом (5.12)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & -3 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця  $\mathbf{P}^{-1}$  буде

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8/3 & 0 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Згідно (5.10) маємо

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8/3 & 0 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & -3 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, ми отримали матрицю у формі Жордана.

#### 5.4. Перетворення матриці до канонічної форми

У рівнянні (5.2) матриця  $\mathbf{A}_1$  має канонічну форму, якщо її структура така

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  – коефіцієнти характеристичного рівняння матриці  $\mathbf{A}$  з рівняння (5.1)

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (5.20)$$

При цьому матриця  $\mathbf{B}_1$  являє собою

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Для переходу від матриці  $\mathbf{A}$  з рівняння (5.1) до матриці  $\mathbf{A}_1$  (5.19) введемо невироджене перетворення

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{M} \mathbf{x}(k), \quad (5.22)$$

де  $\mathbf{M}$  формується з  $n$ -вимірних векторів рядків

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

З (5.22) випливає, що

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}(k). \quad (5.24)$$

Розпишемо вираз (5.22) докладніше

$$\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Звідси

$$z_1(k) = \mathbf{M}_1 \mathbf{x}(k)$$

Збільшимо на 1 аргумент (час або крок):

$$z_1(k+1) = \mathbf{M}_1 \mathbf{x}(k+1).$$

Замість  $\mathbf{x}(k+1)$  підставимо вираз (5.1)

$$z_1(k+1) = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}_1 \mathbf{B} \mathbf{u}(k). \quad (5.26)$$

Розпишемо докладніше рівняння (5.2) для даного випадку

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \\ \vdots \\ z_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (5.27)$$

З цього рівняння видно, що  $z_1(k+1) = z_2(k)$ . Тоді з урахуванням (5.26) маємо право записати

$$z_2(k) = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}_1 \mathbf{B} \mathbf{u}(k). \quad (5.28)$$

Оскільки згідно з (5.22)  $\mathbf{z}(k)$  є функцією тільки  $\mathbf{x}(k)$ , то вираз (5.28) може бути справедливим тільки при умові

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (5.29)$$

Отже,

$$z_1(k+1) = z_2(k) = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k). \quad (5.30)$$

Знову збільшимо на 1 значення аргументу  $k$ , і виконуючи аналогічні перетворення, запишемо

$$z_2(k+1) = z_3(k) = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}_1 \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(k). \quad (5.31)$$

за умови

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

Повтор цієї процедури  $n - 1$  раз дає результат

$$z_{n-1}(k) = z_n(k) = \mathbf{M}_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(k). \quad (5.33)$$

за умови

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (5.34)$$

Тому, об'єднуючи отримані результати (5.30), (5.31) та (5.33), маємо

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k). \quad (5.35)$$

Отже, для довільного  $\mathbf{x}(k)$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

При цьому матриця  $\mathbf{M}_1$  задовольняє умову

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{B} = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} = \dots = \mathbf{M}_1 \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (5.37)$$

З урахуванням виразів (5.1), (5.22) та (5.24) запишемо

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{M} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{u}(k) = \\ &= \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}(k) + \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Порівнюючи (5.38) з (5.2), дістаємо

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1}, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{M} \mathbf{B}. \quad (5.40)$$



Враховуючи (5.21) та (5.36), вираз (5.40) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \mathbf{B} \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Оскільки  $\mathbf{M}_1$  - вектор-рядок виміром  $1 \times n$ , останній вираз приймає вигляд

$$\mathbf{M}_1 [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1].$$

Звідси знаходимо

$$\mathbf{M}_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{S}^{-1}, \quad (5.41)$$

де

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]. \quad (5.42)$$

Таким чином, алгоритм визначення матриці  $\mathbf{A}_1$  у канонічній формі, відповідній матриці  $\mathbf{A}$ , полягає у наступному:

- 1) за виразом (5.42) сформувати матрицю  $\mathbf{S}$ ;
- 2) розрахувати обернену матрицю  $\mathbf{S}^{-1}$ ;
- 3) сформувати матрицю  $\mathbf{M}_1$  згідно (5.41);
- 4) визначити матрицю  $\mathbf{M}$  з (5.36);
- 5) обчислити обернену матрицю  $\mathbf{M}^{-1}$ ;
- 6) використовуючи перетворення подібності (5.39), розрахувати матрицю  $\mathbf{A}_1$ .

Визначена таким чином матриця  $\mathbf{A}_1$  у канонічній формі буде відповідати початковій матриці  $\mathbf{A}$  тоді, коли власні значення обох матриць будуть однаковими. Доведемо, що це саме так.

Власні значення матриці  $\mathbf{A}$  визначаються з характеристичного рівняння

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (5.43)$$

а матриці  $\mathbf{A}_1$  – з характеристичного рівняння

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = 0, \quad (5.44)$$

Запишемо  $\mathbf{A}_1$  з урахуванням (5.39) та виконаємо нескладні перетворення:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{MAM}^{-1}) &= \det(\lambda \mathbf{MM}^{-1} - \mathbf{MAM}^{-1}) = \\ &= \det[\mathbf{M}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{M}^{-1}] = \det \mathbf{M} \times \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \times \det \mathbf{M}^{-1} = \\ &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Отже, рівняння, з яких визначають власні значення матриць  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{A}_1$ , однакові, значить, однакові і самі власні значення.

*Приклад 5.3.* Дано матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Звести матрицю  $\mathbf{A}$  до канонічної форми.

Формуємо матрицю  $\mathbf{S}$  за виразом (5.42):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Розраховуємо обернену матрицю  $\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$ . Згідно (5.41) матриця  $\mathbf{M}_1$  буде

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ а матриця } \mathbf{M} \text{ за виразом (5.36) – } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця  $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Тепер можна визначити матрицю  $\mathbf{A}_1$  за

формулою (5.39):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Для перевірки правильності розрахунку треба записати характеристичне рівняння матриці  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Коефіцієнти цього рівняння  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -5$ . Порівнюючи їх з останнім рядком матриці (5.45) та пам'ятаючи про структуру матриці  $\mathbf{A}_1$  з (5.19), робимо висновок про правильність проведених розрахунків.

### 5.5. Перетворення матриці до спряженої канонічної форми

У деяких задачах синтезу автоматичних систем виникає необхідність перетворення початкового рівняння стану

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (5.46)$$

та рівняння виходу

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (5.47)$$

відповідно на рівняння

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}_1\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}_1u(k) \quad (5.48)$$

та

$$y(k) = \mathbf{C}_1\mathbf{z}(k). \quad (5.49)$$

При цьому матриця  $\mathbf{A}_1$  повинна мати структуру

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

а матриця  $\mathbf{C}_1$  –

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Тут  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  – коефіцієнти характеристичного рівняння матриці  $\mathbf{A}$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Якщо матриця має структуру (5.50), то кажуть, що матриця має *спряжену канонічну форму*.

Нехай перетворення змінних  $\mathbf{x}(k)$  у  $\mathbf{z}(k)$  здійснюється за формулою

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{P} \mathbf{x}(k), \quad (5.52)$$

де  $\mathbf{P}$  – матриця перетворення виміром  $n \times n$ , яка підлягає визначенню.

Тоді

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{z}(k). \quad (5.53)$$

Знайдемо формулу перетворення матриці  $\mathbf{A}$  у матрицю  $\mathbf{A}_1$  та матриці  $\mathbf{B}$  у  $\mathbf{B}_1$ .

Для цього рівняння (5.46) помножимо зліва на матрицю  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{P} \mathbf{B} u(k).$$

З урахуванням (5.52) та (5.53) маємо

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{z}(k) + \mathbf{P} \mathbf{B} u(k). \quad (5.54)$$

Порівнюючи (5.48) та (5.54), дістаємо

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}, \quad (5.55)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{P} \mathbf{B}. \quad (5.56)$$

Якщо у вираз (5.47) підставити (5.52), будемо мати

$$y(k) = \mathbf{C}_1 \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$$

Порівнюючи цей вираз з (5.49), запишемо

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \mathbf{P}. \quad (5.57)$$

Для визначення матриці перетворення **P** прийmemo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

де **p<sub>i</sub>** - матриця-рядок виміром  $1 \times n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . З виразу (5.55) можна записати

$$\mathbf{PA} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -a_0 \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_1 - a_1 \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2 - a_2 \mathbf{p}_n \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n-1} - a_{n-1} \mathbf{p}_n \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Згідно (5.57), враховуючи (5.51) та (5.58), запишемо

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \mathbf{p}_n.$$

Тоді рівняння (5.58) приймає вигляд

$$\begin{bmatrix} -a_0 \mathbf{C} \\ \mathbf{p}_1 - a_1 \mathbf{C} \\ \mathbf{p}_2 - a_2 \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n-1} - a_{n-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{p}_2 \mathbf{A} \\ \mathbf{p}_3 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

З цього рівняння дістаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{n-1} &= a_{n-1} \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{A}, \\ \mathbf{p}_{n-2} &= a_{n-2} \mathbf{C} + \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{A} = a_{n-2} \mathbf{C} + a_{n-1} \mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{A}^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{p}_2 &= a_2 \mathbf{C} + a_3 \mathbf{C} \mathbf{A} + \dots + a_{n-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-3} + \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-2}, \\ \mathbf{p}_1 &= a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C} \mathbf{A} + \dots + a_{n-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-2} + \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Останню систему рівнянь можна записати у матричній формі

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

*Приклад 5.4.* Дано матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайти спряжену канонічну матрицю, відповідну **A**.

Розрахуємо коефіцієнти характеристичного рівняння матриці  $A$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0.$$

Звідси  $a_0 = -2, a_1 = -5$ .

Сформуємо матрицю ***P*** за виразом (5.60)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Розрахуємо  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Тепер використаємо перетворення подібності (5.55)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи результат з (5.50), робимо висновок про правильність проведених розрахунків.

### **Контрольні запитання**

1. Для чого призначені лінійні перетворення матриць?
2. Що таке перетворення подібності?
3. Як виконують діагоналізацію матриці? Наведіть умови діагоналізації.
4. У яких випадках та яким чином здійснюють перетворення матриці на форму Жордана?
5. Яку форму матриці називають канонічною і яким чином виконують перетворення до неї?
6. Яким чином здійснюють перетворення матриці на спряжену канонічну форму?

## 6. ТЕОРЕМА КЕЛІ-ГАМІЛЬТОНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

### 6.1 Теорема Келі-Гамільтона

Характеристичний поліном матриці  $\mathbf{A}$  записують у вигляді:

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (6.1)$$

Відповідний матричний поліном буде:

$$D(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} \quad (6.2)$$

*Теорема Келі-Гамільтона* говорить про те, що кожна квадратна матриця задовільняє своєму характеристичному рівнянню, тобто:

$$D(\mathbf{A}) = 0 \quad (6.3)$$

Доведемо це для випадку, коли матриця  $\mathbf{A}$  може бути діагоналізована, тобто представлена у вигляді діагональної матриці  $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Перехід до діагональної форми матриці здійснюється за перетворенням подібності:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$$

Звідси можна записати:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}$$

Тоді  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^3 \mathbf{P}^{-1}$ , ...,  $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^n \mathbf{P}^{-1}$ . Підставивши ці вирази у рівняння (6.2), маємо:

$$D(\mathbf{A}) = \mathbf{P} \left[ (-1)^n \mathbf{\Lambda}^n + a_{n-1} \mathbf{\Lambda}^{n-1} + a_{n-2} \mathbf{\Lambda}^{n-2} + \dots + a_1 \mathbf{\Lambda} + a_0 \mathbf{I} \right] \mathbf{P}^{-1}.$$

Кожний елемент у квадратних дужках представляє собою діагональну матрицю.



Значить,  $D(\mathbf{A})$  – теж діагональна матриця, кожний  $i$ -й елемент якої обчислюється за формулою:

$$\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \dots + a_1\lambda_i + a_0,$$

який, в свою чергу дорівнює нулю, тому що  $\lambda_i$  – корінь характеристичного рівняння. Отже,

$$D(\mathbf{A}) = \mathbf{P}[0]\mathbf{P}^{-1} = 0.$$

Приклад 6.1. Дано матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Знайдемо характеристичний поліном (6.1):

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

Відповідний матричний поліном буде:

$$D(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тепер розглянемо більш загальне доведення теореми Келі-Гамільтона з використанням приєднаної матриці. Нехай  $\mathbf{A}$  – матриця виміром  $n \times n$  з  $n$  власними значеннями  $\lambda_i$  (деякі з них можуть бути рівними).

Розглянемо приєднану матрицю  $\text{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ . Як відомо, її елементи сформовані з визначників  $(n-1)$ -го порядку, отриманих викресленням рядків та стовпчиків матриці  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ . Отже, найвища степінь  $\lambda$ , яка може міститися у  $\text{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ , є  $n-1$ . Це означає, що можна записати

$$\text{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{B}_{n-1}\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0, \quad (6.4)$$

де  $\mathbf{B}_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  – невідомі матриці виміром  $n \times n$ , які не містять  $\lambda$ .

Пам'ятаючи, що

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})}{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})},$$

можна записати:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \text{adj}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}),$$

або

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \text{adj}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{I} \quad (6.5)$$

Підстановка рівняння (6.4) у ліву частину виразу (6.5) дає

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \text{adj}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = & -\mathbf{B}_{n-1} \lambda^n + (\mathbf{A} \mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_{n-2}) \lambda^{n-1} + \\ & + (\mathbf{A} \mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-3}) \lambda^{n-2} + \dots + (\mathbf{A} \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \lambda^2 + \\ & + (\mathbf{A} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) \lambda + \mathbf{A} \mathbf{B}_0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Підставляючи у праву частину рівняння (6.5) вираз (6.1), маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\lambda) \mathbf{I} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{I} = & (-\lambda)^n \mathbf{I} + a_{n-1} \lambda^{n-1} \mathbf{I} + a_{n-2} \lambda^{n-2} \mathbf{I} + \dots + \\ & + a_1 \lambda \mathbf{I} + a_0 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\lambda$ , у виразах (6.6) та (6.7), дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}_{n-1} &= (-1)^n \mathbf{I}, \\ \mathbf{A} \mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{B}_{n-2} &= a_{n-1} \mathbf{I}, \\ \mathbf{A} \mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{B}_{n-3} &= a_{n-2} \mathbf{I}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{A} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0 &= a_1 \mathbf{I}, \\ \mathbf{A} \mathbf{B}_0 &= a_0 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Якщо перше рівняння цієї системи помножити на  $\mathbf{A}^n$ , друге – на  $\mathbf{A}^{n-1}$  і т. д., сума правих частин рівнянь дасть  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ . Значить, сума лівих частин рівнянь теж  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ . Виконаємо підсумовування лівих частин, одночасно перегруповуючи члени рівнянь:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{A}) = & \left(-\mathbf{A}^n \mathbf{B}_{n-1} + \mathbf{A}^n \mathbf{B}_{n-1}\right) + \left(-\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}_{n-2} + \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}_{n-2}\right) + \\ & + \left(-\mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B}_{n-3} + \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B}_{n-3}\right) + \dots + \left(-\mathbf{A}^2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}^2 \mathbf{B}_1\right) + \\ & + \left(-\mathbf{A} \mathbf{B}_0 + \mathbf{A} \mathbf{B}_0\right) \equiv 0\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = 0,$$

що і треба було довести.

## 6.2. Обернення матриць

На підставі теореми Келі-Гамільтона, використовуючи вирази (6.2) та (6.3), запишемо

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = 0 \quad (6.9)$$

Вважаючи, що  $\mathbf{A}^{-1}$  існує, помножимо обидві частини (6.9) на  $\mathbf{A}^{-1}$ . Отримаємо

$$(-1)^n \mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \dots + a_1 \mathbf{I} + a_0 \mathbf{A}^{-1} = 0$$

Звідси обернену матрицю  $\mathbf{A}^{-1}$  можна розрахувати з формули

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left[ (-1)^n \mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \dots + a_1 \mathbf{I} \right] \quad (6.10)$$

*Приклад 6.2.* Знайти матрицю  $\mathbf{A}^{-1}$ , якщо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Сформуємо характеристичний поліном:

$$\mathbf{D}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

Тоді, замінюючи  $\lambda$  на  $\mathbf{A}$ , маємо

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 5\mathbf{I}.$$

З формули (6.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{5}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = -\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) = \\ &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### 6.3. Обчислення значень матричних поліномів

Розглянемо два методи обчислення матричних поліномів за допомогою теореми Келі-Гамільтона.

*Метод 1.* Нехай дано матрицю  $\mathbf{A}$  виміром  $n \times n$  і необхідно обчислити матричний поліном  $P(\mathbf{A})$  степеня  $m$

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + p_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \dots + p_n\mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I} \quad (6.11.)$$

причому  $m > n$ .

Використаємо теорему Келі-Гамільтона (6.2), вважаючи коефіцієнт перед  $\mathbf{A}^n$  додатним:

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = 0 \quad (6.12)$$

Звідси

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \dots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I} \quad (6.13)$$

Помножимо ліву та праву частини (6.13) на  $\mathbf{A}$ , дістаємо

$$\mathbf{A}^{n+1} = -a_{n-1}\mathbf{A}^n - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1\mathbf{A}^2 - a_0\mathbf{A}$$

Підставимо сюди  $\mathbf{A}^n$  з (6.13), маємо

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} &= -a_{n-1} \left( -a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2} \mathbf{A}^{n-2} - \dots - a_1 \mathbf{A} - a_0 \mathbf{I} \right) - \\ &- a_{n-2} \mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1 \mathbf{A}^2 - a_0 \mathbf{A} = \\ &= b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + b_{n-2} \mathbf{A}^{n-2} + \dots + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I},\end{aligned}\quad (6.14)$$

де  $b_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_{n-2}$ ;  $b_{n-2} = a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}$ ;  $b_1 = a_{n-1}a_1 - a_0$ ;  $b_0 = a_{n-1}a_0$ .

Діючи аналогічно, для будь-якого  $\mathbf{A}^l$  ( $l \leq m - n$ ) можна записати

$$\mathbf{A}^l = l_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + l_{n-2} \mathbf{A}^{n-2} + \dots + l_1 \mathbf{A} + l_0 \mathbf{I}, \quad (6.15)$$

де коефіцієнти  $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$  розраховують аналогічно  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

Підставляючи (6.15) у (6.11), отримуємо матричний поліном  $P(\mathbf{A})$  степені  $n - 1$ , що суттєво спрощує обчислення.

*Приклад 6.3* Дано матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обчислити матричний поліном

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 + 3\mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}. \quad (6.16)$$

З попереднього приклада відомо, що характеристичний поліном матриці  $\mathbf{A}$  має вигляд

$$D(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

Відповідний матричний поліном буде

$$D(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 5\mathbf{I} = 0$$

Звідси

$$\mathbf{A}^2 = 5\mathbf{A} - 5\mathbf{I}. \quad (6.17)$$

Вирахуємо  $\mathbf{A}^3$ , помноживши (6.17) на  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^3 = 5\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A}.$$

Замість  $\mathbf{A}^2$  підставимо (6.17):

$$\mathbf{A}^3 = 5(5\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) - 5\mathbf{A} = 20\mathbf{A} - 25\mathbf{I}. \quad (6.18)$$

Визначимо  $\mathbf{A}^4$ , підносячи у квадрат (6.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^4 &= (5\mathbf{A} - 5\mathbf{I})^2 = 25\mathbf{A}^2 - 50\mathbf{A} + 25\mathbf{I} = \\ &= 25(5\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) - 50\mathbf{A} + 25\mathbf{I} = 75\mathbf{A} - 100\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Тепер знайдемо  $P(\mathbf{A})$ , підставляючи у (6.16) вирази (6.17), (6.18) та (6.19)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) &= 75\mathbf{A} - 100\mathbf{I} + 60\mathbf{A} - 75\mathbf{I} + 10\mathbf{A} - 10\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{I} = \\ &= 146\mathbf{A} - 184\mathbf{I}. \end{aligned}$$

У числовому вигляді дістаємо

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) &= 146 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 184 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 438 & 146 \\ 146 & 292 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 184 & 0 \\ 0 & 184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 254 & 146 \\ 146 & 108 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Метод 2.* Матричному поліному (6.11) можна поставити у відповідність скалярний поліном  $P(\lambda)$  степені  $m$  та записати його у вигляді

$$P(\lambda) = Q(\lambda)P_1(\lambda) + R(\lambda), \quad (6.20)$$

де  $P_1(\lambda)$  – поліном степеня  $n$  ( $n < m$ ),  $Q(\lambda)$  – поліном степеня  $m - n$ ,  $R(\lambda)$  – залишковий поліном степеня  $n - 1$  або меншої.

Поліноми  $Q(\lambda)$  та  $R(\lambda)$  визначають як результат ділення  $P(\lambda)$  на  $P_1(\lambda)$ .

Наприклад,  $P(\lambda) = 3\lambda^4 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$ , а  $P_1(\lambda) = \lambda^2 - 3$ .

Поділимо  $P(\lambda)$  на  $P_1(\lambda)$

$$\begin{array}{r|l}
 3\lambda^4 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^2 - 3 \\
 \hline
 3\lambda^4 - 9\lambda^2 & \\
 \hline
 11\lambda^2 + \lambda + 1 & \\
 -11\lambda^2 - 33 & \\
 \hline
 \lambda + 34 & 
 \end{array}$$

Отже,

$$P(\lambda) = (3\lambda^2 + 11)(\lambda^2 - 3) + (\lambda + 34)$$

Значить,  $Q(\lambda) = 3\lambda^2 + 11$  та  $R(\lambda) = \lambda + 34$ .

Подібно (6.20) матричний поліном (6.11) може бути записаний так:

$$P(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})P_1(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}).$$

Якщо у цьому виразі замість  $P_1(\mathbf{A})$  використати характеристичний поліном  $D(\mathbf{A})$ , який згідно теореми Келі-Гамільтона дорівнює нулю, дістаємо

$$P(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) \quad (6.21)$$

Коефіцієнти залишкового поліному  $R(\mathbf{A})$  можна визначити діленням скалярних поліномів  $P(\lambda)$  на  $D(\lambda)$ .

*Приклад 6.4.* Розглянемо попередній приклад.

Скалярний поліном, відповідний  $P(\mathbf{A})$  (6.11), буде

$P(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$ . Характеристичний поліном матриці  $\mathbf{A}$

$D(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$ . Розділимо  $P(\lambda)$  на  $D(\lambda)$

$$\begin{array}{r|l}
\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^2 - 5\lambda + 5 \\
\hline
\lambda^4 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 & \lambda^2 + 8\lambda + 37 \\
\hline
8\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 & \\
- 8\lambda^3 - 40\lambda^2 + 40\lambda & \\
\hline
37\lambda^2 - 39\lambda + 1 & \\
- 37\lambda^2 - 185\lambda + 185 & \\
\hline
146\lambda + 184 &
\end{array}$$

Отже,  $R(\lambda) = 146\lambda - 184$ , що відповідає  $R(\mathbf{A}) = 146\mathbf{A} - 184\mathbf{I}$ . Таким чином, згідно (6.21)

$$P(\mathbf{A}) = 146\mathbf{A} - 184\mathbf{I},$$

що співпадає з результатом попереднього приклада.

#### 6.4. Обчислення матричних функцій

Скалярна функція  $f(x)$  може бути представлена у вигляді нескінченного ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (6.22)$$

Якщо у правій частині цього рівняння виділити якусь функцію  $D(x)$ , то  $f(x)$  записують так

$$f(x) = D(x) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k + R(x), \quad (6.23)$$

де коефіцієнти  $\beta_k$  визначаються в результаті ділення членів ряду (6.22) на  $D(x)$ .

Аналогічно можна зобразити функцію квадратної матриці  $\mathbf{A}$ , якщо у виразі (6.23) замінити скалярну змінну  $x$  на матрицю  $\mathbf{A}$ :

$$f(\mathbf{A}) = D(\mathbf{A}) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \mathbf{A}^k + R(\mathbf{A}). \quad (6.24)$$



З урахуванням теореми Келі-Гамільтона  $D(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  і тоді

$$f(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}). \quad (6.25)$$

Якщо матриця  $\mathbf{A}$  –  $(n \times n)$ -вимірна матриця, то залишок  $R(\mathbf{A})$  можна записати так

$$R(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}. \quad (6.26)$$

Відповідний залишковий скалярний поліном  $R(x)$  буде

$$R(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}.$$

Якщо замість скалярної змінної  $x$  використати власне значення  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  матриці  $\mathbf{A}$ , то враховуючи, що  $D(\lambda_i) = 0$ , з рівняння (6.23) дістаємо

$$R(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.27)$$

Якщо власні значення матриці  $\mathbf{A}$  різні, вираз (6.27) являє собою систему з  $n$  алгебраїчних рівнянь з  $n$  невідомими коефіцієнтами  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ . Розв'язок цієї системи визначає всі  $\alpha_i$ , що дає змогу на підставі (6.25) записати

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i. \quad (6.28)$$

*Приклад 6.5.* Визначити  $\sin \mathbf{A}$ , якщо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці  $\mathbf{A}$  буде

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0,$$

звідки визначають власні значення:  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$ .

Матриця  $\mathbf{A}$  має вимір  $2 \times 2$ , тобто  $n = 2$ , тому з формули (6.29) запишемо

$$\sin \mathbf{A} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}. \quad (6.29)$$

Система рівнянь (6.27) має такий вигляд

$$\begin{aligned}\alpha_0 - 3\alpha_1 &= \sin(-3) \\ \alpha_0 - 2\alpha_1 &= \sin(-2)\end{aligned}$$

Звідси знаходимо  $\alpha_0 = 3\sin(-2) - 2\sin(-3)$ ;  $\alpha_1 = \sin(-2) - \sin(-3)$ .

Підставляємо  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$  у (6.30):

$$\begin{aligned}\sin \mathbf{A} &= [3\sin(-2) - 2\sin(-3)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [\sin(-2) - \sin(-3)] \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3\sin(-2) - 2\sin(-3) & 0 \\ 0 & 3\sin(-2) - 2\sin(-3) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -3\sin(-2) + 3\sin(-3) & \sin(-2) - \sin(-3) \\ 0 & -2\sin(-2) + 2\sin(-3) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin(-3) & \sin(-2) - \sin(-3) \\ 0 & \sin(-2) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Коли якесь власне значення  $\lambda_i$  матриці  $\mathbf{A}$  є кратним, наведена вище процедура повинна бути модифікованою, тому що при цьому рівняння (6.27) будуть повторюватись і, значить, рівняння у системі не будуть незалежними, що не дає змогу її розв'язати. Однак, якщо  $D(\lambda_i) = 0$ , то очевидно, що

$$\left. \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} = 0$$

Продиференціюємо (6.23) по  $\lambda$ , замінюючи  $x$  на  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} &= \left\{ \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k + D(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k \right] \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_i} + \\ &+ \left. \frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i}.\end{aligned}$$

Для власного значення  $\lambda_i$  кратністю  $m_i$  перші  $m_i - 1$  похідні від  $D(\lambda)$  існують і, отже,

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i); \left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i};$$

$$\left. \frac{d^2 f(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^2 R(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_i}; \dots; (6.30)$$

$$\left. \frac{d^{m_i-1} f(\lambda)}{d\lambda^{m_i-1}} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^{m_i-1} R(\lambda)}{d\lambda^{m_i-1}} \right|_{\lambda=\lambda_i},$$

що являє собою систему  $m_i$  лінійних незалежних рівнянь.

*Приклад 6.6.* Обчислити  $e^{At}$ , якщо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 27 & -27 & 9 \end{bmatrix}.$$

Визначимо власні значення матриці  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = (\lambda - 3)^3.$$

Значить,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . Згідно (6.28):

$$e^{At} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 \quad (6.31)$$

Складемо систему рівнянь (6.30):

$$e^{3t} = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2;$$

$$\left. \frac{de^{\lambda t}}{d\lambda} \right|_{\lambda=3} = \left. \frac{d}{d\lambda} [\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2] \right|_{\lambda=3},$$

$$\text{або } te^{3t} = \alpha_1 + 6\alpha_2;$$

$$\left. \frac{d^2 e^{\lambda t}}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=3} = \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} [\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2] \right|_{\lambda=3},$$

або  $t^2 e^{3t} = 2\alpha_2$ . Отже, система має вигляд

$$\begin{cases} \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 = e^{3t}, \\ \alpha_1 + 6\alpha_2 = te^{3t}, \\ 2\alpha_2 = t^2 e^{3t}. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи буде

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}t^2 e^{3t};$$

$$\alpha_1 = te^{3t} - 6\alpha_2 = (t - 3t^2)e^{3t};$$

$$\alpha_0 = e^{3t} - 3\alpha_1 - 9\alpha_2 = \left(1 - 3t + \frac{9}{2}t^2\right)e^{3t}.$$

Підстановка цих коефіцієнтів у (6.31) дає

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 & t - 3t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{27}{2}t^2 & t - 3t - 9t^2 & t + \frac{3}{2}t^2 \\ 27t + \frac{81}{2}t^2 & -27t - 27t^2 & 1 + 3t + \frac{9}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Коли деякі власні значення матриці  $A$  є кратними, а інші – простими, для визначення невідомих коефіцієнтів  $\alpha_i (i = 0, 1, \dots, n)$  дістають систему з  $n$  незалежних лінійних рівнянь, комбінуючи обидва розглянуті методи, тобто використовуючи рівняння (6.27) та (6.30).

## 6.5. Обчислення експоненціальної функції матриць у формі клітин Жордана

Нехай  $A$  – клітина Жордана виміром  $m \times m$  з власним значенням  $\lambda_1$ . Необхідно знайти матрицю  $e^{At}$ .

Характеристичне рівняння матриці  $A$  буде

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m = 0.$$

Тоді згідно (6.28)

$$e^{\Lambda t} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \Lambda + \alpha_2 \Lambda^2 + \dots + \alpha_{m-1} \Lambda^{m-1}. \quad (6.32)$$

Для визначення коефіцієнтів  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  запишемо систему рівнянь типу (6.30)

$$e^{\Lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1};$$

$$\left. \frac{de^{\lambda t}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1} = e^{\lambda_1 t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + 3\alpha_3 \lambda_1^2 + \dots + (m-1)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-2}.$$

Далі для  $k$ -ї похідної кожний член рівняння будемо ділити на  $k!$  для зручності запису:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d^2 e^{\lambda t}}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} = \alpha_2 + 3\alpha_3 \lambda_1 + \dots + \frac{1}{2} (m-1)(m-2) \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-3},$$

$$\left. \frac{1}{3!} \frac{d^3 e^{\lambda t}}{d\lambda^3} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{1}{3!} t^3 e^{\lambda_1 t} = \alpha_3 + 4\alpha_4 \lambda_1 + \dots + \frac{1}{3!} (m-1)(m-2)(m-3) \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-4},$$

.....

$$\left. \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1} e^{\lambda t}}{d\lambda^{m-1}} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{\lambda_1 t} = \alpha_{m-1}.$$

Зобразимо ці рівняння у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{1}{3!} t^3 \\ \dots \\ \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (m-1)\lambda_1^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{2} (m-1)(m-2)\lambda_1^{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \alpha, \quad (6.33)$$

де

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (m-1)\lambda_1^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\lambda_1^{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{m-1}]^T.$$

З (6.33) випливає, що

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3!}t^3 \\ \dots \\ 1 \\ \hline (m-1)! \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

Обернена матриця  $\mathbf{F}^{-1}$  дорівнює:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1 & \lambda_1^2 & -\lambda_1^3 & \lambda_1^4 & \dots & (-\lambda_1)^{m-1} \\ 0 & 1 & -2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & -4\lambda_1^3 & \dots & (m-1)(-\lambda_1)^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3\lambda_1 & 6\lambda_1^2 & \dots & \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(-\lambda_1)^{m-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4\lambda_1 & \dots & \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)(-\lambda_1)^{m-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

У результаті дістаємо

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= e^{\lambda_1 t} \left[ 1 - \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} - \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \frac{\lambda_1^4 t^4}{4!} + \dots + \frac{(-\lambda_1)^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} \right], \\
 \alpha_1 &= e^{\lambda_1 t} \left[ t - \lambda_1 t^2 + \frac{\lambda_1^2 t^3}{2} - \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{(-\lambda_1)^{m-2} t^{m-1}}{(m-2)!} \right], \\
 \alpha_2 &= e^{\lambda_1 t} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{\lambda_1 t^3}{2} + \frac{\lambda_1^2 t^4}{4} + \dots + \frac{(-\lambda_1)^{m-3} t^{m-1}}{(m-3)!} \right] (6.34) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \alpha_{m-2} &= e^{\lambda_1 t} \left[ \frac{1}{(m-3)!} t^{m-2} - \frac{1}{(m-2)!} \lambda_1 t^{m-1} \right], \\
 \alpha_{m-1} &= e^{\lambda_1 t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.
 \end{aligned}$$

Приклад 6.7. Знайти  $e^{\mathbf{A}_1 t}$ , якщо

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Скористаємось виразом (6.28)

$$e^{\mathbf{\Lambda}_1 t} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{\Lambda}_1 + \alpha_2 \mathbf{\Lambda}_1^2. \quad (6.35)$$

Обчислимо  $\mathbf{\Lambda}_1^2$ :

$$\mathbf{\Lambda}_1^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 \end{bmatrix}.$$

Розрахуємо  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  за формулами (6.34):

$$\alpha_0 = e^{\lambda_1 t} \left[ 1 - \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2} \right],$$

$$\alpha_1 = e^{\lambda_1 t} [1 - \lambda_1 t^2],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t}.$$

Підставимо результати у (6.35):

$$\begin{aligned} e^{\Lambda_1 t} &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \lambda_1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_2 \lambda_1^2 & 2\alpha_2 \lambda_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 \lambda_1^2 & 2\alpha_2 \lambda_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \lambda_1^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 \\ 0 & 0 & \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 = e^{\lambda_1 t} \left[ 1 - \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2} + \lambda_1 t - \lambda_1 t^2 + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2} \right] = e^{\lambda_1 t};$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 = e^{\lambda_1 t} [1 - \lambda_1 t^2 + \lambda_1 t^2] = t e^{\lambda_1 t}.$$

У результаті маємо

$$e^{\Lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$



## 6.6. Обчислення експоненціальної функції матриць за допомогою їх перетворення до форми Жордана

Розглянемо цей метод на прикладі. Нехай треба знайти  $e^{At}$ , якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -27 & 54 & 36 & 10 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння цієї матриці таке

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 36\lambda^2 - 54\lambda + 27 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^3 = 0.$$

Отже,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$ . Тоді відповідна матриця у формі Жордана буде:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & + & - & - & - & - \\ 0 & | & 3 & 1 & 0 \\ & | & & & \\ 0 & | & 0 & 3 & 1 \\ & | & & & \\ 0 & | & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Клітина Жордана має вигляд

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи (6.36), дістаємо

$$e^{\Lambda_1 t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^t & | & 0 & 0 & 0 \\ - & + & - & - & - \\ 0 & | & e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \\ & | & & & \\ 0 & | & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ & | & & & \\ 0 & | & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Як відомо, матрицю  $\Lambda$  можна розрахувати з матриці  $A$  за допомогою перетворення подібності  $\Lambda = P^{-1}AP$ .

Тому для знаходження матриці  $A$  можна скористатися перетворенням

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad (6.37)$$

де матриця  $P$  складається з власних векторів матриці  $A$ . Якщо як власний вектор використати стовпчик матриці  $\text{adj}(A - \lambda I)$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2(10 - \lambda) - 36\lambda + 54 \\ 27 \\ 27\lambda \\ 27\lambda^2 \end{bmatrix},$$

то вектор  $p_1$ , відповідний  $\lambda_1 = 1$ , буде (після ділення його елементів на 27):

$$p_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

Вектор  $\mathbf{p}_2$ , відповідний  $\lambda_2 = 3$ , дорівнює

$$\mathbf{p}_2 = [1 \quad 3 \quad 9 \quad 27]^T.$$

Для визначення векторів  $\mathbf{p}_3$  та  $\mathbf{p}_4$  скористаємося співвідношеннями (4.48)

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_3 = 3\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_4 = 3\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3.$$

Звідси

$$\mathbf{p}_3 = [1 \quad 4 \quad 15 \quad 54]^T,$$

$$\mathbf{p}_4 = [0 \quad 1 \quad 7 \quad 36]^T.$$

Сформуємо матрицю перетворення  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 15 & 7 \\ 1 & 27 & 54 & 36 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця  $\mathbf{P}^{-1}$  буде

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & -27 & 9 & -1 \\ -85 & 133 & -55 & 7 \\ 66 & -106 & 46 & -6 \\ -36 & 60 & -28 & 4 \end{bmatrix}.$$

Далі використовуючи (6.37), остаточно дістаємо

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 27e^t + (-19 + 30t - 18t^2)e^{3t} \\ 27e^t + (-27 + 54t - 54t^2)e^{3t} \\ 27e^t + (-27 + 54t - 162t^2)e^{3t} \\ 27e^t + (-27 - 162t - 486t^2)e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
-27e^t + (27 - 46t + 30t^2)e^{3t} & 9e^t + (-9 + 18t - 14t^2)e^{3t} \\
-27e^t + (35 - 78t + 90t^2)e^{3t} & 9e^t + (-9 + 26t - 42t^2)e^{3t} \\
-27e^t + (27 - 54t + 270t^2)e^{3t} & 9e^t + (-1 + 6t - 126t^2)e^{3t} \\
-27e^t + (27 + 378t + 810t^2)e^{3t} & 9e^t + (-9 - 270t - 378t^2)e^{3t}
\end{array}
\begin{array}{c}
- e^t + (1 - 2t + 2t^2)e^{3t} \\
- e^t + (1 - 2t + 6t^2)e^{3t} \\
- e^t + (1 + 6t + 18t^2)e^{3t} \\
- e^t + (9 + 54t + 54t^2)e^{3t}
\end{array}
\Bigg].$$

Коли матриця  $\mathbf{A}$  має різні власні значення, для обчислення  $e^{\mathbf{A}t}$  можна також застосувати наведений вище метод. При цьому власні вектори матриці  $\mathbf{A}$  розраховуються за більш простою методикою.

### 6.7. Обчислення експоненціальної функції матриці за допомогою зображення її у вигляді блочних підматриць

Необхідно визнати  $e^{\mathbf{A}t}$ , якщо

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc|cc}
0 & -\omega & | & \alpha & 0 \\
\omega & 0 & | & 0 & \alpha \\
- & - & - & + & - & - \\
0 & 0 & | & 0 & -\omega \\
0 & 0 & | & \omega & 0
\end{array} \right].$$

Розрахунки можна спростити, якщо матрицю  $\mathbf{A}$  зобразити у вигляді підматриць

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & 0 \\ \hline - & + & - \\ \hline 0 & \mathbf{B}_1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{B}_2 \\ \hline - & + & - \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2.$$

Тоді

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \alpha \mathbf{B}_1 \\ \hline - & + & - \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Зобразивши так матрицю  $\mathbf{A}$ , можна записати

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)t} = e^{\mathbf{A}_1 t} e^{\mathbf{A}_2 t}. \quad (6.38)$$

Враховуючи, що  $\mathbf{A}_1$  – діагональна матриця, запишемо

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \left[ \begin{array}{c|c} e^{\mathbf{B}_1 t} & 0 \\ \hline - & + & - \\ \hline 0 & e^{\mathbf{B}_1 t} \end{array} \right]. \quad (6.39)$$

Тепер визначимо  $e^{\mathbf{B}_1 t}$  з урахуванням того, що власні значення матриці  $\mathbf{B}_1$  є  $\pm j\omega$ . Для цього запишемо систему рівнянь (6.27):

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \alpha_0 + j\omega \alpha_1, \\ e^{-j\omega t} = \alpha_0 - j\omega \alpha_1, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$\alpha_0 = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\omega} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{1}{\omega} \sin \omega t.$$

Отже, згідно з (6.28)

$$e^{\mathbf{B}_1 t} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \cos \omega t & 0 \\ 0 & \cos \omega t \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Тоді у відповідності до (6.39)

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & | & 0 & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & | & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Характеристичне рівняння матриці  $\mathbf{A}_2$  буде:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^4 = 0.$$

Отже, матриця  $\mathbf{A}_2$  має 4 кратних власних значень  $\lambda_2 = 0$ .

Визначаємо  $e^{\mathbf{A}_2 t}$ , використовуючи (6.28):

$$e^{\mathbf{A}_2 t} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_2^2 + \beta_3 \mathbf{A}_2^3.$$

Зважаючи на те, що  $\mathbf{A}_2^2 = \mathbf{A}_2^3 = 0$ , коефіцієнти  $\beta_2$  та  $\beta_3$  розраховувати не треба. Для знаходження коефіцієнтів  $\beta_0$  та  $\beta_1$  запишемо систему рівнянь (6.30)

$$e^{0 \cdot t} = 1 = \beta_0,$$

$$\left. \frac{de^{\lambda t}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = t = \beta_1.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}_2 t} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & \alpha t \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \alpha t & 0 \\ & & | & & \\ 0 & 1 & | & 0 & \alpha t \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.42}
 \end{aligned}$$

Підставляючи (6.41) та (6.42) у (6.38), остаточно дістаємо

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A} t} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & | & 0 & 0 \\ & & | & & \\ \sin \omega t & \cos \omega t & | & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \alpha t & 0 \\ & & | & & \\ 0 & 1 & | & 0 & \alpha t \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & | & \alpha t \cos \omega t & -\alpha t \sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t & | & \alpha t \sin \omega t & \alpha t \cos \omega t \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & | & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ & & | & & \\ 0 & 0 & | & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

### Контрольні запитання

1. Як формулюють теорема Келі-Гамільтона?
2. Як виконати обернення матриці, використовуючи теорему Келі-Гамільтона?
3. Що таке матричні поліноми та які методи їх обчислення за допомогою теореми Келі-Гамільтона?
4. Яким чином розраховують значення матричних функцій за допомогою теореми Келі-Гамільтона?
5. Які особливості обчислення матричних функцій у разі наявності кратних великих значень матриці?
6. Яким чином обчислюють експоненціальну функцію матриці у формі клітин Жордана?
7. Які особливості розрахунку експоненціальної функції матриць за допомогою їх перетворення на форму Жордана?



## Список використаної та рекомендованої літератури до розділів 1-6

1. Александров Є.Є., Козлов Е.П., Кузнецов Б.І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами: Підручник у 3-х томах. Т. 1. Теорія автоматичного керування / За заг. ред. Александрова Є.Є. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – 490 с.
2. Власов К.П. Теория автоматического управления.: Учеб. пособие. – Х.: Изд-во Гуманитарный центр, 2007. – 526 с.
3. Душин С.Е. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов/ С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др.; Под ред. В.Б. Яковлева. – 2-е изд., перераб.. – М.: Высш. шк., 2005. – 567 с.
4. Иванов. В. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
5. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
6. Певзнер Л.Д. Теория систем управления. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2002. – 472 с.
7. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 720 с.
8. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
10. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980. – 424 с.

11. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т./ В.А.Иванов, В.С.Медведев, Б.К.Чемоданов, А.С.Ющенко; Под ред. Б.К.Чемоданова. - 3-е изд., перераб. и доп. – Т.1. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. – 552 с.
12. Певзнер Л.Д. Математические основы теории систем: Учеб. пособие/ Л.Д.Певзнер, Е.П.Чураков. – М.: Высш. шк., 2009. – 503 с.
13. Жученко А. І. Математичні моделі цифрових систем керування. – К.: ІЗМН, 1997. – 240 с.

## 7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

### 7.1. Явища. Випробування. Події

Вивчення явищ, які відбуваються у навколишньому середовищі людини, значною мірою базується на положеннях теорії імовірностей та математичної статистики. В основі цих положень знаходиться проведення випробувань та опрацювання їхніх результатів.

**Випробуванням** називають організацію необхідної кількості певних умов у досліджуваному середовищі. В деяких випадках однакові умови створюють багаторазово. Випробування поділяють на досліди та спостереження.

**Елементарною подією** називають конкретний результат випробування. Сукупність усіх можливих результатів називають **простором елементарних подій** або **повною системою подій**. Далі будемо вживати останнє поняття і позначимо цю систему літерою  $\Omega$ . **Складною подією** є довільна підмножина цієї системи.

Розглянемо приклади. Визначимо сукупність способів та результатів підкидання гральної кістки як певне— *явище*. Організація підкидання кістки — *випробування* (дослід). Сила, спосіб та напрям підкидання кістки, а також властивості середовища та поверхні, на яку вона впаде — *умови випробування*. Випадає грань з 5-ма очками — *елементарна подія*. Випасти можуть грані з 1-м, 2-а, 3-а, 4-а, 5-а та 6-а очками — *повна група подій* (*простір елементарних подій*). Випадає грань з кількістю очок, меншою 4-х — *складна подія*. Багаторазове підкидання кістки при забезпеченні одних і тих самих вказаних вище умов — *повторні випробування*. Другий приклад розглядає *явище* — процеси теплообміну в реакторі (можна за цим спостерігати, або самим змінювати витрати теплоносіїв на вході чи виході реактора). Зміна витрати теплоносія — *випробування*.

Поява певної температури (наприклад, 198 °С) – *елементарна подія*. Поява усіх можливих значень температури – *повна група подій*.

На рис. 7.1 зображено схему, яка ілюструє зв'язки між названими поняттями.

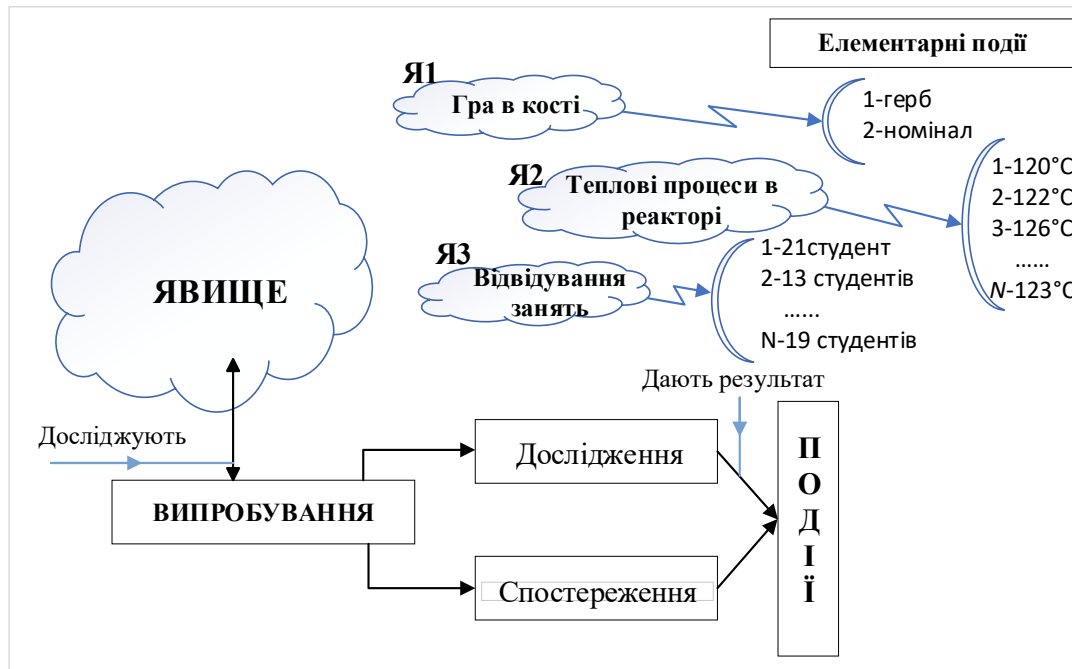


Рис. 7.1. Схема зв'язку між поняттями

Усі події умовно поділяють на *закономірні* (детерміновані) та *випадкові* (стохастичні, ймовірнісні). Події зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, виготовлена деталь виявилася бракованою – подія *A*, у результаті випробування температура пари становить 120 °С – подія *B*.

*Закономірною подією* є така подія, яка завжди має місце при створенні одних і тих самих умов випробування.

*Випадковою подією* є так подія, яка при створенні одних і тих самих умов випробування не завжди має місце.

Приклади закономірних подій: *A* – збільшення тиску газу в закритій ємності з підвищенням температури цього газу, *B* – виникнення струму в замкненому електричному контурі при підключенні джерела напруги.

Приклади випадкових подій:  $C$  – діаметр деталі, виготовленою робітником на одному станку (наприклад,  $\varnothing 25\text{мм}$ ),  $D$  – відносна похибка вимірювального приладу (наприклад, 5%). Значення розміру деталей та похибки заздалегідь визначити неможливо, оскільки вони обумовлені багатьма чинниками, які важко врахувати.

Кількісною мірою можливості появи будь-якої події можуть бути відносна частота й імовірність.

**Відносну частоту** події  $A$ ,  $W(A)$  визначають експериментально (після випробувань), як відношення кількості появ події,  $N_A$  до загальної кількості цих випробувань,  $N$ :

$$W(A) = N_A / N; \quad (0 \leq W(A) \leq 1).$$

**Імовірність**  $P(A)$  випадкової події  $A$  визначають теоретично (до випробувань), як очікувану частку появи цієї події в загальній кількості випробувань ( $0 \leq P(A) \leq 1$ ).

**Умовною імовірністю** називають імовірність події  $A$ , що залежить від іншої події  $B$ , обчислена за умови, що подія  $B$  відбулася, її позначають  $P_B(A)$ . Наприклад,  $A$  – отримати стипендію,  $B$  – потрапити у список тих студентів, які мають право отримувати стипендію.

**Предметом теорії ймовірностей** є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

**Приклад 7.1.** Лаборанти відібрали 400 зразків продукції ( $N = 400$ ), 160 з них виявились бракованими (подія  $A$  – отримання бракованого виробу,  $N_A = 160$ ). Визначити відносну частоту бракованої продукції серед відібраних зразків.

*Розв'язання.*  $W(A) = N_A / N = 160 / 400 = 0,4.$

*Приклад 7.2.* У цеху є партія деталей з таким розподілом розмірів по діаметру (табл.7.1). Треба визначити ймовірність того, що першою витягнуть деталь діаметром 10,5 мм.

Таблиця 7.1. Дані до прикладу 7.2

Діаметр (мм)	Кількість деталей
10,4	5
10,5	10
10,8	12
10,9	3

*Розв'язання.* Взяти будь-яку деталь – подія. Позначимо як  $A$  – подію, що полягає в отриманні деталі діаметром 10,5 мм. Кількість сприятливих подій –  $N_A = 10$ , тобто це кількість таких деталей. Загальна кількість можливих подій – це загальна кількість деталей,  $N = 5+10+12+3=30$ . Шукана ймовірність

$$P(A) = N_A/N = 10/30 = 0,333.$$

Наведемо **класифікацію подій**:

- *достовірна* (вірогідна, закономірна) – подія, що відбудеться обов'язково, вона характеризується ймовірністю 1;
- *неможлива* – подія, що не відбудеться ніколи, вона характеризується ймовірністю 0;
- *сумісні (несумісні)* – події, що можуть (не можуть) відбуватися одночасно;
- *залежні (незалежні)* – події, які характеризуються тим, що поява однієї з них змінює (не змінює) ймовірності появи інших ;
- *протилежні* – група подій, яка складається лише з двох несумісних подій позначають їх так:  $\bar{A}$  – подія, протилежна  $A$ ;

- *рівноможливі* – події, що мають однакові ймовірності появи.

Отже, множину подій  $\{A_1, A_2, \dots, A_M\}$  називають **системою подій**, якщо ця множина не містить жодної пари однакових подій. Систему подій називають **системою несумісних подій**, якщо всі події в системі попарно несумісні [1-12].

Деякі події можна розглядати як комбінації елементарних подій системи  $\Omega$ . Розглянемо наступні комбінації подій:

- *наступність* ( $A \subset B$ ): поява події  $A$  спричиняє появу події  $B$ ;
- *рівність* ( $A = B$ ): одночасно виконуються умови  $A \subset B$  і  $B \subset A$ ;
- *сума* ( $A \cup B$ ): відбувається хоча б одна з цих подій ( $A$  чи  $B$ , чи обидві разом);
- *добуток* ( $A \cap B$ ): відбуваються обидві події одночасно (і  $A$ , і  $B$ );
- *різниця* ( $A \setminus B$ ): подія  $A$  відбувається, а подія  $B$  не відбувається.

Покажемо зв'язок між елементарними подіями  $A$  та  $B$  з їх комбінаціями: подія  $C$  – сума та  $D$  – добуток (табл.7.2). Знак «+» позначає появу події, а знак «-» позначає її відсутність.

Таблиця 7.2. Зв'язок елементарних подій з їх сумою та добутком

$A$	$B$	$C$	$D$
+	+	+	+
-	+	+	-
+	-	+	-
-	-	-	-

Імовірність суми подій  $A \cup B$  (чи  $A + B$ ) визначається такою формулою:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Визначимо ймовірність суми  $N$  сумісних подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - \dots \\ - P(A_{N-1} \cdot A_N) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + \dots + P(A_{N-2} \cdot A_{N-1} \cdot A_N) - \dots \\ + (-1)^{N-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_N).$$

Якщо події несумісні, то ця формула спрощується і приймає вигляд

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (7.1)$$

Для випадку  $N$  попарно несумісних подій ймовірність їх суми визначається виразом:

$$P\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_N) = \sum_{i=1}^N P(A_i).$$

Оскільки  $A \cup \bar{A}$  – є повною групою подій, то, враховуючи формулу (7.1), отримуємо

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

У тому випадку, коли несумісні події  $A_1, A_2, \dots, A_N$  створюють повну систему подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) = 1.$$

Сума подій є операцією *диз'юнкції*.

*Приклад 7.3.* Скористаємось умовою прикладу (7.2) і визначимо ймовірність отримання деталі, діаметр якої не перевищує 10,5 мм, а потім такої, що перевищує цей розмір.

*Розв'язання.* Взяти деталь діаметром 10,4 мм або 10,5 мм – несумісні події  $A$  та  $B$ . Взяти будь-яку деталь діаметром, що не перевищує 10,5 мм – це подія  $C$ , що може розглядатися як сума події  $A$  та  $B$ , оскільки нас влаштовує будь-яка з них:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{30} + \frac{10}{30} = \frac{15}{30} = 0,5.$$



Визначимо імовірність отримання деталі, діаметр якої перевищує 10,5 мм. Ця подія протилежна події  $C$ , тому імовірність її появи можна розрахувати так

$$P(\bar{C}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,5.$$

Добуток подій є операцією *кон'юнкції*. Він може мати місце лише в тих випадках, коли події сумісні, як залежні, так і незалежні.

При залежних подіях  $A$  і  $B$  треба враховувати умовну імовірність  $P_B(A)$ , тобто імовірність появи події  $A$  за умови, що подія  $B$  уже відбулася.

Імовірність добутку подій  $A \cap B$  (чи  $A \cdot B$ ) у загальному випадку обчислюють за такою формулою:

$$P(D) = P(A \cap B) = P(B)P_B(A) \quad \text{або} \quad P(D) = P(A \cap B) = P(A)P_A(B). \quad (7.2)$$

При незалежних подіях умовна імовірність дорівнює звичайній імовірності, тобто  $P_B(A) = P(A)$ .

Якщо події незалежні, то формула (7.2) спрощується і приймає вигляд

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Імовірність спільної появи довільної кількості  $N$  взаємно незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 A_2 \dots A_M) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_M).$$

Якщо подія  $A$  може відбутися за умови появи однієї з  $K$  несумісних подій, які формують повну систему подій  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_K\}$ , то ймовірність події  $A$  обчислюють за *формулою повної ймовірності*

$$P(A) = \sum_{i=1}^K P(B_i) \cdot P_{B_i}(A). \quad (7.3)$$

Розпишемо суму у (7.3)

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_K)P_{B_K}(A).$$

У цьому випадку разом із появою події  $A$  відбувається одна і тільки одна подія із системи  $B$ .

Якщо подія  $A$  вже відбулася, то можна обчислити умовну імовірність того, що разом із подією  $A$  здійснювалася подія  $B_i$ :

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}. \quad (7.4)$$

Формулу (7.4) називають **формулою Баєса** (англ. *Thomas Bayes*, укр. Бейз, Баєс, Байєс, Бейєс). За її допомогою можна після випробування уточнити імовірність появи події  $B_i$ . Сума імовірностей подій  $B_i$  повинна дорівнювати одиниці [13, 16, 17].

*Приклад 7.4.* У складальному цеху є партія деталей, виготовлених на чотирьох станках-автоматах: з першого – 40 штук, з другого – 30, з третього – 20, з четвертого – 10. Відомо, що ймовірність появи браку для кожного станка-автомата відповідно становить: 0,1%, 0,2%, 0,25%, 0,5%.

Треба визначити:

а) імовірність взяти навмання з усієї партії придатну (не браковану) деталь (подія  $A$ );

б) імовірність того, що взятую придатну деталь виготовлено на першому станку-автоматі.

*Розв'язання.* Виготовлення деталей на чотирьох станках – це повна група подій  $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  оскільки ніде більше їх не виготовляли. Розрахуємо імовірності того, що будь-яку взятую деталь виготовлено на  $i$ -му станку (тобто відбулася подія  $B_i$ ).

$$P(B_1) = 40/(40 + 30 + 20 + 10) = 40/100 = 0,4;$$

$$P(B_2) = 30/100 = 0,3; \quad P(B_3) = 20/100 = 0,2; \quad P(B_4) = 10/100 = 0,1.$$

Сума цих імовірностей становить 1.

Для визначення ймовірності вибору придатної деталі (подія  $A$ ) використаємо формулу (7.3):

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(B_i) P_{B_i}(A),$$

де  $P_{B_i}(A)$  – ймовірність взяти придатну деталь, яку було виготовлено на  $i$  – у станку.

Оскільки в умові наведено ймовірності взяти браковані деталі, то спочатку розрахуємо ймовірності протилежних подій – взяти придатні деталі (відсотки браку переведені у частки):

$$\begin{aligned} P_{B_1}(A) &= 1 - P_{B_1}(\bar{A}) = 1 - 0,001 = 0,999 ; \\ P_{B_2}(A) &= 1 - P_{B_2}(\bar{A}) = 1 - 0,002 = 0,998 ; \\ P_{B_3}(A) &= 1 - P_{B_3}(\bar{A}) = 1 - 0,0025 = 0,9975 ; \\ P_{B_4}(A) &= 1 - P_{B_4}(\bar{A}) = 1 - 0,005 = 0,995 . \end{aligned}$$

Тепер відповімо на п. а завдання.

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,999 + 0,3 \cdot 0,998 + 0,2 \cdot 0,9975 + 0,1 \cdot 0,995 \cong 0,998.$$

Для визначення ймовірності за п. б завдання використаємо формулу (7.4), отже

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,999}{0,998} \cong 0,4004 .$$

### Контрольні запитання та завдання

1. Як пов'язані поняття «випробування» та «елементарна подія»?
2. Як пов'язані поняття «елементарна подія», «складна подія» та «простір (повна система) елементарних подій»?
3. Наведіть приклади закономірних та випадкових подій. Як їх можна вивчати – спостереженням чи активними дослідженнями?

4. У чому полягає відмінність імовірності від відносної частоти події?
5. Як класифікують події?
6. Назвіть комбінації подій.
7. В якому випадку можна розглядати подію, як «суму» інших подій? В якому випадку може йти мова про подію – «добуток» подій?
8. Як розрахувати ймовірності суми залежних та незалежних подій?
9. Як розрахувати ймовірність добутку подій (залежних та незалежних)?
10. Напишіть та поясніть формулу повної ймовірності.
11. Напишіть та поясніть формулу Бесса.

## 7.2. Повторні випробування

Нехай у результаті одного випробування подія  $G$  може статися або не статися (це випадкова подія). Серію випробувань, які організують за однакових умов, називають **повторними випробуваннями**. Прикладом повторних випробувань є кількаразове підкидання монети за однаких умов, подією  $G$  будемо вважати появу герба. У тому разі, коли організують повторні випробування і ймовірність появи події  $G$  у кожному з них не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називають *незалежними відносно події  $G$* . В окремому випробуванні подія  $G$  може мати різні ймовірності появи, але в подальшому розглядатимемо лише такі незалежні випробування, в яких поява події  $G$  має однакову ймовірність.

При розв'язанні задач, пов'язаних з повторними випробуваннями, використовуються положення комбінаторики. Тому спочатку розглянемо основні з них [2-8, 14, 15, 18, 19].

**Комбінаторика** – розділ математики, що вивчає дискретні об'єкти, різні типи їх переставлень, розміщень, комбінацій, також методи підрахунку усіх можливих способів, якими ці операції можна виконати. Термін «комбінаторика» увів Готфрід Вільгельм Лейбниц у 1666 р.

**Головний принцип комбінаторики** формулюють так: якщо елемент  $x_1$  можна вибрати з інших  $m_1$  способами, елемент  $x_2$  –  $m_2$  способами, елемент  $x_3$  –  $m_3$  способами і так далі аж до  $x_k$  –  $m_k$ , то впорядковану сукупність (кортеж) можна вибрати  $Pr$  способами:

$$Pr = m_1 m_2 m_3 \cdots m_k = \prod m_j.$$

**Переставлення.** Розглянемо скінченну множину  $X$ , яка складається з  $N$  елементів:  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Ці елементи можна по-різному впорядкувати.

Кількість можливих переставлень  $D_N$  визначають за формулою

$$D_N = N!$$

**Приклад 7.5.** Множина  $X$  складається з елементів  $x_1, x_2, x_3$  ( $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ). Визначити кількість можливих переставлень і їх вид.

**Розв'язання.** Можливі такі впорядковані підмножини (кортежі) з цих елементів:

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_2\}, \{x_2, x_1, x_3\}, \{x_2, x_3, x_1\}, \{x_3, x_1, x_2\}, \{x_3, x_2, x_1\}.$$

Як бачимо, кількість переставлень з 3-х елементів дорівнює  $D_N = 3! = 6$ .

**Розміщення.** Нехай  $\epsilon$  множина  $X$ , що містить  $N$  елементів.  **$K$ -елементним розміщенням** називаються впорядковану підмножина множини  $X$ , наприклад, послідовність значень  $x_1, x_2, \dots, x_K$ .

Кількість всіх  $K$ -елементних розміщень множини з  $N$  елементів позначимо:  $A_N^K$ :

$$A_N^K = N(N-1)(N-2) \cdots (N-K+1) = \frac{N!}{(N-K)!}.$$

**Приклад 7.6.** Розглянемо двоелементні розміщення ( $K = 2$ ) з чотирьох ( $N = 4$ ), позначивши останні  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Розв'язання.** Кількість таких розміщень

$$A_4^2 = 4! / (4-2)! = 4 \cdot 3 = 12,$$

а самі розміщення наступні:  $\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}$ .

*Приклад 7.7.* Нехай з 10 студентських груп 3 будуть нагороджені призами. Визначимо кількість можливих призових трійок студентських груп.

*Розв'язання.*

$$A_{10}^3 = 10(10-1)(10-2) = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

**Сполучення (комбінації).** Нехай  $X$  – скінченна множина з  $N$  елементами. Нехай  $Q$  – підмножина цієї множини, яка містить  $M$  елементів. Упорядкування цих елементів не має значення. Такі підмножини називаються  $M$  – сполученнями або  $M$  – комбінаціями.

Кількість  $M$  комбінацій з  $N$  елементів позначається  $C_N^M$ , це біноміальний коефіцієнт, значення якого визначається за формулою:

$$C_N^M = \frac{A_N^M}{D_M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}.$$

*Приклад 7.8.* Нехай множина  $X$  складається з  $N = 3$  елементів  $\{x_1, x_2, x_3\}$ .

Визначити кількість можливих сполучень і їх вигляд при  $M = 2$ .

*Розв'язання.* Якщо  $M = 2$ , то можливі такі комбінації:  $\{x_1, x_2\}$ ,  $\{x_1, x_3\}$ ,  $\{x_2, x_3\}$ .

Пари  $\{x_1, x_2\}$  та  $\{x_2, x_1\}$  дають різні розміщення, але одну комбінацію.

Для нашої задачі

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

*Приклад 7.9.* Визначити кількість комбінацій по 3 з 10 студентських груп, які будуть нагороджені призами:

*Розв'язання.* Кількість сполучень з 10 по 3 така:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Повернемося до безпосереднього розгляду повторних випробувань.

Нехай виконують  $N$  незалежних випробувань. У кожному з них подія  $G$  або з'являється, або ні.

Імовірність появи події  $G$  позначимо через  $P$ , імовірність протилежної події  $\bar{G}$  дорівнює  $q = 1 - P$ .

Імовірність того, що подія  $G$  матиме місце  $M$  разів з  $N$  випробувань визначається за **формулою Бернуллі** (нім. *Daniel Bernoulli*):

$$P_N(M) = C_N^M P^M q^{N-M}. \quad (7.5)$$

Формула Бернуллі забезпечує високу точність розрахунків, але при великих значеннях  $N$  і  $M$  обчислення стають занадто громіздкими. Тому використовують також і наближені методи обчислення імовірності  $P_N(M)$ .

Якщо потрібно обчислити ймовірності для всіх значень  $M$ ,  $0 \leq M \leq N$ , то можна скористатися рекурентною формулою, за допомогою якої  $P_N(M)$  обчислюють за значенням  $P_N(M-1)$ :

$$P_N(M) = \frac{N-M+1}{M} \cdot \frac{P}{q} \cdot P_N(M-1), \quad M = 1, \dots, N. \quad (7.6)$$

Тоді  $P_N(0)$  доцільно обчислювати за формулою (7.5), що при  $M = 0$  приймає вигляд  $P_N(0) = q^N$ , а всі інші  $P_N(M)$  – за формулою (7.6).

Формулу Бернуллі (7.5) важко використовувати при великих  $N$ . У таких випадках замість неї використовують алгоритм, який базується на теоремі Муавра-Лапласа (**локальна теорема Лапласа**) і приводить до дещо гіршого результату (франц. *Abraham de Moivre, Pierre-Simon Laplace*).

Теорему формулюють так: якщо імовірність  $P$  появи події  $G$  у  $N$  випробуваннях однакова, причому  $0 < P < 1$ , то  $P_N(M)$  приблизно можна визначити за формулою

$$P_N(M) \approx \frac{1}{\sqrt{NPq}} \cdot \varphi(x),$$

де 
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{M-NP}{\sqrt{NPq}}.$$

Значення  $\varphi(x)$  табульовані. Ймовірність за цією формулою визначають тим точніше, чим більше  $N$ .

Якщо ймовірність  $P$  появи події  $G$  в одному випробуванні наближається до нуля, то варто використовувати теорему Пуассона (франц. *Siméon-Denis Poisson*), яка у цьому випадку дає високу точність:

*якщо при  $N$  незалежних випробуваннях подія  $G$  відбувається з імовірністю  $P$ , близькою до 0, то при досить великому  $N$  імовірність здійснення цієї події  $M$  разів приблизно дорівнює*

$$P_N(M) \approx \frac{\lambda^M}{M!} e^{-\lambda},$$

де  $\lambda = N \cdot P$ .

Для функції  $P_N(M)$  складено таблиці (дод. 4).

Найімовірнішу кількість подій  $G$  знаходять в інтервалі:

$$N \cdot P - q \leq M_{\max} \leq N \cdot P + P. \quad (7.7)$$

*Приклад 7.10.* У кожному з 11 спрацювань аварійної сигналізації подія  $A$ , тобто перевищення температури реакції, відбувається з однаковою імовірністю 0,3. Треба обчислити імовірності появи однієї такої події, двох, трьох і так до одинадцяти,  $P_{11}(M)$ ,  $M = 1, 2, \dots, 11$ . Визначити також імовірність спрацювання системи не через підвищення температури:  $P_0$ . Визначити найімовірнішу кількість порушень технологічного процесу з одинадцяти випадків через перевищення температури.

*Розв'язання.*  $N = 11$ ;  $P = 0,3$ ;  $q = 1 - P = 0,7$ .

Імовірність  $P_{11}(0)$  обчислюємо за формулою (7.5).

$$P_{11}(0) = C_{11}^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{11} \approx 0,0198.$$

Наступні імовірності  $P_{11}(1) - P_{11}(11)$  розраховуємо за формулою (7.6), визначивши спочатку постійний множник  $P/q = 0,3/0,7 \cong 0,429$ .



Отже

$$P_{11}(1) = \frac{11-1+1}{1} \cdot \frac{0,3}{0,7} \cdot 0,0198 \approx 0,0933$$

$$P_{11}(2) = \frac{11-2+1}{2} \cdot \frac{0,3}{0,7} \cdot 0,0933 \approx 0,1999$$

і так далі.

Правильність розрахунків треба перевірити по умові

$$\sum_{M=0}^N P_{11}(M) = 1.$$

Знайдемо найімовірнішу кількість подій  $M_{\max}$  за формулою (7.7).

$$11 \cdot 0,3 - 0,7 \leq M_{\max} \leq 11 \cdot 0,3 + 0,3$$

$$2,6 \leq M_{\max} \leq 3,6.$$

Отже, найімовірніша кількість з 11 спрацювань системи сигналізації саме через перевищення температури – 3. Студент розрахувавши всі імовірності  $P_{11}(0) - P_{11}(11)$ , може впевнитися, що  $P_{11}(3)$  має найбільше значення.

Інтегральна теорема Лапласа пропонує наступну формулу для визначення імовірності  $P_N(M_1, M_2)$  того, що подія  $G$  матиме місце в  $N$  випробуваннях не менше  $M_1$  і не більше  $M_2$  разів:

$$P_N(M_1, M_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

де 
$$a = \frac{M_1 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}}, \quad b = \frac{M_2 - N \cdot P}{\sqrt{NPq}}.$$

Оскільки інтеграл у цьому виразі не можна визначити через елементарні функції, то використовують спеціальну функцію Лапласа виду

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Функція  $\Phi(x)$  непарна, тобто  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ , її значення табульовані.

Використання  $\Phi(x)$  дає можливість розрахувати  $P_N(M_1, M_2)$  таким чином

$$P_N(M_1, M_2) \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

### Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть поняття, наведіть приклади та формули для розрахунку кількості:  
а) переставлень; б) розміщень; в) комбінацій.
2. Поясніть смисл поняття «повторні випробування». Наведіть приклади повторних випробувань.
3. Поясніть призначення та алгоритми розрахунків наступних методів, пов'язаних з повторними випробуваннями: а) Муавра-Лапласа; б) Бернуллі; в) Пуассона; г) інтегральної теореми Лапласа.

### 7.3. Випадкова величина

#### Характеристики законів розподілу ймовірностей випадкових величин

**Випадковою величиною** називають таку контрольовану величину, значення якої схильні до розкиду при повторенні тих самих умов дослідів (випробувань). Прикладами випадкових величин можуть бути кількість студентів на лекції, розміри виготовлених деталей, різноманітні технологічні змінні: температура, тиск, витрата і т.д. Випадкова величина є кількісною характеристикою випадкової події.

Випадкові величини бувають дискретними і неперервними.

Випадкова величина є **дискретною**, якщо приймає кінцеву множину значень. Наприклад, кількість дефектних виробів у партії, або кількість відмов приладу за певний проміжок часу.

Випадкову величину називають *неперервною*, якщо вона може приймати будь-які значення з деякого кінцевого або нескінченного інтервалу. Кількість імовірних значень неперервної випадкової величини нескінченна.

Прикладами є вологість, в'язкість, рівень речовини в ємкості, час безвідмовної роботи засобів автоматизації і т. ін.

Випадкові величини зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту:  $X, Y, Z$  і т. ін., а їх імовірні конкретні значення – малими літерами того ж алфавіту:  $x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_K; z_1, z_2, \dots, z_M$  ( $K, M, N$  – кількість вимірювань випадкових величин).

Перераховані значення випадкової величини можна розглядати як події, що з'являються при випробуваннях.

Позначимо імовірності цих подій через  $P$  із відповідними індексами:

$$P(X = x_1) = P_1; P(X = x_2) = P_2; \dots; P(X = x_N) = P_N.$$

Наприклад,  $P(T = 125^\circ\text{C}) = 0,05; P(T = 128^\circ\text{C}) = 0,03$ .

Події  $x_1 - x_N$  утворюють повну групу  $N$  несумісних подій, отже, сума імовірностей усіх імовірних значень випадкової величини  $X$  дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^N P(X = x_i) = \sum_{i=1}^N P_i = 1.$$

Сукупність усіх імовірних значень випадкової величини і відповідних їм імовірностей створює розподіл випадкової величини.

**Законом розподілу** ймовірностей випадкової величини (далі – закон розподілу) називають відповідність між значеннями випадкової величини та імовірностями їх появи.

Існує декілька стандартизованих законів розподілу. Якщо випадкова величина відповідає якомусь закону, то говорять, що вона *підпорядковується цьому закону*.

Випадкові величини вважають **незалежними**, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від значень іншої.

Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у різних формах: таблиці, багатокутника розподілу, функції розподілу та функції щільності розподілу ймовірностей [1-14, 14, 18, 19].

Таблиця розподілу має такий вигляд (табл. 7.3).

Таблиця 7.3. Таблична форма подання закону розподілу ймовірностей

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_i$	...	$x_N$
$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	...	$P_i$	...	$P_N$

У цій таблиці  $N$  позначає не обсяг вибірки, а кількість різних значень.

При упорядкуванні таблиці звичайно формують варіаційний ряд, тобто розташовують дані в порядку зростання. Таким чином, у наведеній таблиці дотримані співвідношення  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq x_N$ .

Табличну форму запису, яку називають ще *рядом розподілу*, може бути використана при порівняно невеликій кількості вимірів дискретної величини.

Ряд розподілу можна описати і графічно. По осі абсцис відкладають значення випадкової величини, а по осі ординат – відповідні їм імовірності, точки з'єднують відрізками прямих ліній. Отримана фігура називається *багатокутником розподілу*.

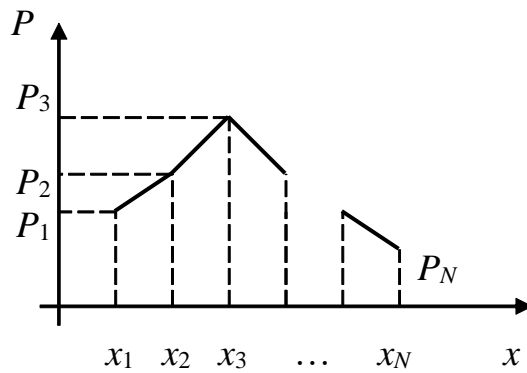


Рис.7.2. Багатокутник розподілу імовірностей величини  $X$

Найбільш загальною формою подання закону розподілу неперервних і дискретних випадкових величин є функція розподілу. Звичайно її позначають  $F(x)$ .

**Функція розподілу** – це імовірність того, що випадкова величина  $X$  набуде значення, меншого за фіксоване дійсне число  $x$ , тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрична інтерпретація функції розподілу досить проста.

Розглянемо випадкову величину  $X$ . У результаті дослідів вона може отримати те або інше значення. Позначимо окреме значення величини  $X$  на осі  $OX$  як  $x$ . Функція розподілу  $F(x)$  це імовірність того, що значення випадкової величини  $X$  у результаті дослідів виявиться меншим величини  $x$ , тобто розташується ліворуч від точки  $x$ .

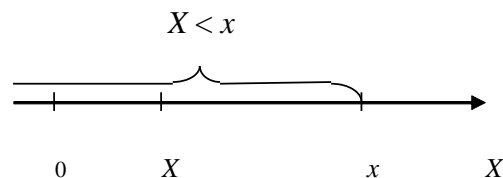


Рис.7.3. Геометрична інтерпретація події  $X < x$

Для дискретної випадкової величини  $X$ , яка може приймати значення  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Нерівність  $x_i < x$  означає, що підсумовування поширюється на всі ті значення  $x_i$ , які менше  $x$ . Побудуємо для прикладу функцію розподілу випадкової величини  $X$ , розподіл якої раніше було подано у вигляді таблиці.

Функція розподілу має стрибки у тих точках, у яких випадкова величина приймає значення, вказані у ряді розподілу. У інтервалах між цими значеннями функція  $F(x)$  - стала величина. Сума всіх стрибків функції дорівнює одиниці.

Розрахуємо значення  $F(x)$ :

$$F(x_1) = P(X < x_1) = 0;$$

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = P_1;$$

$$F(x_3) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = P_1 + P_2;$$

.....

$$F(x_N) = P(X < x_N) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_{N-1}) =$$

$$= P_1 + P_2 + \dots + P_{N-1};$$

при  $X > x_N$

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_{N-1}) + P(X = x_N) =$$

$$= P_1 + P_2 + \dots + P_N = 1.$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини - це розривна східчаста ламана лінія, вона подана на рис. 7.4.

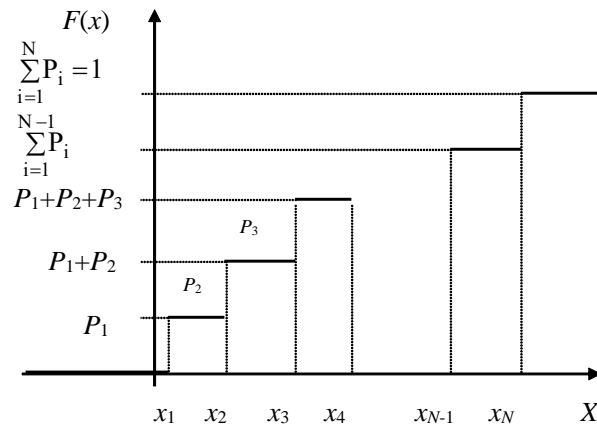


Рис. 7.4. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини

Неперервна випадкова величина має неперервну функцію розподілу, наприклад, таку, яку наведено на наступному графіку.

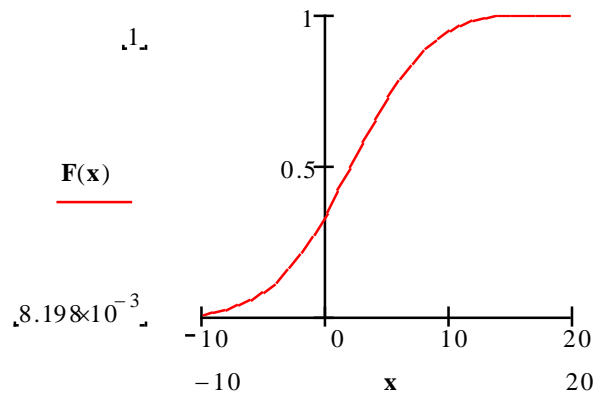


Рис. 7.5. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини

Розглянемо властивості функції розподілу.

1. Функція розподілу  $F(x)$  невід'ємна, її значення знаходяться у діапазоні  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

Це випливає з визначення  $F(x)$ , як імовірності здійснення події  $X < x$ .

2. Імовірність попадання випадкової величини в інтервал  $[\alpha, \beta)$  дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

(домовилися лівий кінець інтервалу включати в нього, а правий – ні).

Доказ. Розглянемо 3 події:

- подія  $A$  полягає в тому, що  $X < \beta$  ;
- подія  $B$  – у тому, що  $X < \alpha$  ;
- подія  $C$  – у тому, що  $\alpha \leq X < \beta$ .

Нижче, на числовій осі позначені ці події.

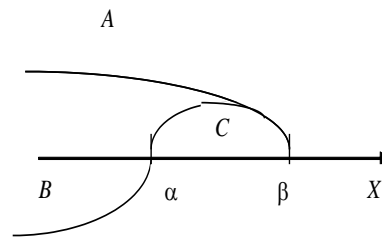


Рис.7.6. Геометрична ілюстрація співвідношення подій  $A, B, C$

Можна записати наступне

$$P(A) = P(X < \beta) = F(\beta);$$

$$P(B) = P(X < \alpha) = F(\alpha);$$

$$P(C) = P(\alpha \leq X < \beta).$$

Як видно з рисунка, подія  $A$  є сумою двох несумісних подій  $B$  і  $C$ , тобто

$$A = B + C.$$

За теоремою додавання імовірностей маємо:

$$P(A) = P(B) + P(C).$$



Переходячи до функцій розподілу, запишемо

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leq X < \beta).$$

З цього виразу отримуємо

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Отже, властивість доведено.

Наслідком із цієї властивості є те, що імовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

Вважаючи, що  $\beta \rightarrow \alpha$ , одержимо необмежено малий інтервал  $[\alpha, \beta]$ . Імовірність того, що  $X$  приймає окремо взяті значення:

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} P(\alpha \leq X < \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]$$

Оскільки випадкова величина  $X$  має неперервну функцію розподілу  $F(x)$ , то з останньої рівності випливає, що імовірність окремого значення неперервної величини дорівнює 0. Цей висновок варто трактувати не так, що поява події неможлива, а в тому сенсі, що подія з'являється вкрай рідко при необмеженій кількості дослідів.

На підставі цього слідства можна записати другу властивість без включення в аналізований інтервал лівого його кінця, тобто  $(\alpha, \beta)$ :

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

3. Функція розподілу є такою, що не зменшується, тобто при  $\beta > \alpha$  існує співвідношення  $F(\beta) \geq F(\alpha)$ .

Ця властивість випливає з останньої рівності. Оскільки імовірність будь-якої події є число невід'ємне, то маємо

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \geq 0,$$

отже,  $F(\beta) \geq F(\alpha)$ .

4. На мінус нескінченності функція розподілу  $F(x)$  дорівнює нулю, а на плюс нескінченності дорівнює одиниці, тобто

$$F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1.$$

Властивість стає очевидною при геометричній інтерпретації функції розподілу.

Якщо точка  $x$  необмежено переміщується, то поява значення випадкової величини  $X$  меншого від  $x$  (тобто розташованого ліворуч від  $x$  на числовій осі), стає неймовірною подією, тобто  $F(-\infty) = 0$ .

При необмеженому переміщенні  $x$  управо набуття випадковою величиною  $X$  значення меншого від  $x$  стає достовірною подією, тобто  $F(+\infty) = 1$ .

Розглянемо четвертий спосіб подання закону розподілу випадкових величин - за допомогою функції щільності розподілу імовірностей.

Нехай є неперервна випадкова величина  $X$  із функцією розподілу  $F(x)$ . Імовірність попадання значення цієї випадкової величини на елементарну ділянку  $[x + \Delta x]$  через інтегральну функцію визначиться так

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Розділимо обидві частини останньої рівності на  $\Delta x$ :

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Отримане відношення називають середньою ймовірністю, тобто ймовірністю, яка припадає на одиницю довжини цієї ділянки.

Будемо вважати, що  $F(x)$  диференціюється, і перейдемо до  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Уведемо позначення  $f(x) = F'(x)$ .

Таким чином, *диференціальною функцією розподілу ймовірностей*  $f(x)$  є перша похідна від інтегральної функції  $F(x)$ . Функція  $f(x)$  має ще назву *функції щільності розподілу ймовірностей*.

Відзначимо, що функцію  $f(x)$  не можна застосовувати для опису розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.

На рис. 7.7 наведено приклад функції щільності розподілу ймовірностей:

Розглянемо властивості функції щільності розподілу ймовірностей.

1. Диференціальна функція не має від'ємних значень, тобто  $f(x) \geq 0$ .

Така властивість випливає з визначення  $f(x)$  як похідної від функції  $F(x)$ , яка не зменшується. Геометрично це ілюструється розташуванням графіка  $f(x)$  над віссю абсцис, чи асимптотичним наближенням до неї.

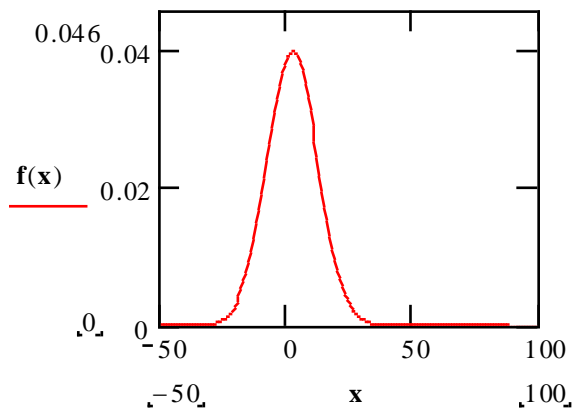


Рис. 7.7. Графік функції щільності розподілу ймовірностей

2. Функцію розподілу  $F(x)$  можна виразити через  $f(x)$  у такий спосіб

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

(тут і в подальшому аргумент підінтегральної функції,  $f(x)$  і верхню межу інтегрування залишимо однаковими для більш зручного сприйняття).

Наведемо геометричну інтерпретацію цього положення на рис. 7.8 .

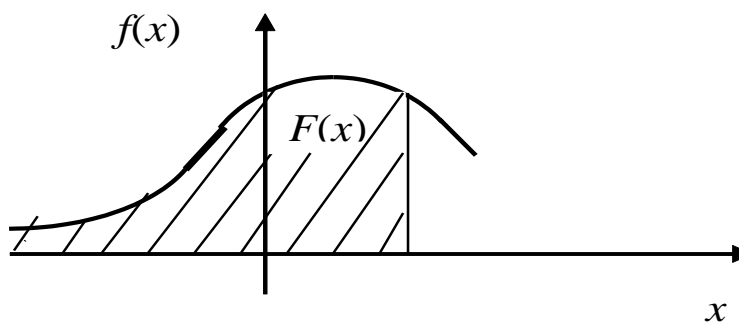


Рис.7.8. Ілюстрація співвідношення  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$

3. Імовірність попадання значення неперервної випадкової величини  $X$  в інтервал  $[\alpha, \beta]$  дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, узятому в границях від  $\alpha$  до  $\beta$ :

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

В геометричній інтерпретації це означає, що імовірність попадання неперервної випадкової величини  $X$  в інтервал  $[\alpha, \beta]$  чисельно дорівнює площі заштрихованої фігури.

4. Інтеграл з нескінченними границями від диференціальної функції дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Це означає, що площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює 1.

Функція  $F(x)$ , як будь-яка імовірність безрозмірна, функція  $f(x)$  має розмірність, обернену до розмірності випадкової величини.

*Приклад 7.11.* Випадкову величину  $X$  задано функцією щільності розподілу імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{3}{8}x^2, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Визначити:

- а) функцію розподілу  $F(x)$ ;
- б) імовірність того, що  $X < 1$ ;  $X > 1/3$ ;  $1/3 \leq X \leq 1$ .

*Розв'язання.* Функцію  $F(x)$  визначимо так:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_0^x \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{8},$$

тоді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^3/8, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Визначимо імовірності:

$$P(X < 1) = F(1) = 1/8 (1)^3 = 0,125;$$

$$\begin{aligned} P(X > 1/3) &= 1 - P(X \leq 1/3) = 1 - F(1/3) = \\ &= 1 - (1/3)^3 \cdot 1/8 \cong 1 - 0,005 \cong 0,995; \end{aligned}$$

$$P(1/3 < X \leq 1) = F(1) - F(1/3) = 0,125 - 0,005 = 0,12.$$

*Приклад 7.12.* Функція розподілу імовірностей має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq \infty. \end{cases}$$

Визначити функцію щільності розподілу та імовірності подій:

$$X > 0,5; \quad X \leq 0,25; \quad 0,3 < X \leq 0,7.$$

*Розв'язання.*

$$f(x) = F'(x) = \frac{d(1 - e^{-x})}{dx} = e^{-x}.$$

Визначимо імовірності

$$P(X > 0,5) = 1 - P(X \leq 0,5) = 1 - (1 - e^{-0,5}) = 1 - (1 - 0,607) = 0,607;$$

$$P(X \leq 0,25) = 1 - e^{-0,25} = 1 - 0,781 = 0,219;$$

$$P(0,3 < X \leq 0,7) = (1 - e^{-0,7}) - (1 - e^{-0,3}) = e^{-0,3} - e^{-0,7} \cong 0,244.$$

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Розкрийте смисл поняття «випадкова величини» (ВВ). Наведіть приклади дискретних та неперервних ВВ.
2. У чому смисл поняття «закон розподілу ймовірностей ВВ»?
3. Який смисл мають функція розподілу ймовірностей та функція щільності розподілу ймовірностей?
4. Як пов'язані між собою функції, вказані у п.3? Які властивості вони мають?
5. Як побудувати функцію розподілу ймовірностей за результатами експериментів?
6. Наведіть приклади законів розподілу (вказіть їх функції щільності розподілу ймовірностей, формули для розрахунку математичних сподівань та дисперсій, моду, охарактеризуйте симетричність розподілу).

#### 7.4. Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу цілком характеризує випадкову величину із ймовірнісної точки зору. Але найчастіше при вирішенні практичних задач знати всі значення випадкової величини і відповідні імовірності необов'язково. Зручніше користуватися деякими кількісними показниками, які давали б у стислій формі достатню інформацію про цю величину. Такі показники називають **числовими характеристиками випадкової величини**. Якщо характеристики випадкової величини розраховані по нескінченній кількості її значень ( $N \rightarrow \infty$ ), то їх звичайно позначають грецькими літерами, якщо число значень кінцеве (обмежене) ( $N < \infty$ ) – латинськими.

Числові характеристики розділяють на характеристики положення, розсіювання та додаткові. До характеристик положення належать математичне сподівання, мода, медіана. До характеристик розсіювання належать дисперсія, стандартне відхилення, розмах та ін. Основними з цих характеристик є математичне сподівання та дисперсія [13, 16, 17].

**Математичне сподівання** визначає деяке середнє значення випадкової величини, навкруг якого зосереджені всі ймовірні її значення. Тому математичне сподівання називають іноді **середнім значенням** випадкової величини. Цей параметр характеризує положення випадкової величини на числовій осі. Запишемо загальний вираз для розрахунку математичного сподівання

$$\mu_x = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_K P_K}{P_1 + P_2 + \dots + P_K} = \frac{\sum_{i=1}^K x_i P_i}{\sum_{i=1}^K P_i},$$

де  $\mu_x$  – математичне сподівання (середнє значення) змінної  $X$ ;  $P_i$  – імовірність

появи  $i$ -го значення змінної  $X$  (тобто  $x_i$ ,  $K$  – кількість різних значень  $X$ ).

З огляду на те, що для дискретних величин  $\sum_{i=1}^K P_i = 1$ , то можна записати

$$\mu_x = \sum_{i=1}^k x_i P_i. \quad (7.8)$$

Для неперервних випадкових величин формула розрахунку така

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Математичне сподівання має такі властивості:

- математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій величині:

$$\mu_C = C \cdot 1 = C;$$

- сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$\mu_{CX} = C\mu_X \text{ (далі позначатимемо } \mu_X);$$

- математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$\mu(XYZ) = \mu_X \mu_Y \mu_Z;$$

- математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань додатків:

$$\mu(X + Y + Z) = \mu_X + \mu_Y + \mu_Z.$$

**Мододою дискретної випадкової величини** називають найбільш імовірне її значення.

**Мододою неперервної випадкової величини** називають таке її значення, при якому щільність розподілу ймовірностей має максимум. З геометричної точки зору моду можна інтерпретувати, як абсцису точки максимуму диференціальної функції розподілу. Існують одно-, дво- та багатомодальні розподіли.



Розподіл, який має мінімум, а не максимум називають антимодальним. Для прикладу розглянемо таблицю розподілу (табл. 7.4).

Таблиця 7.4. Приклад табличної форми розподілу з визначеною модою

$X$	2	3	<b>4</b> <b>мода</b>	6	7
$P$	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1

**Медіаною** випадкової величини називають таке її значення, при якому справедлива рівність

$$P(X < Me) = P(X > Me),$$

тобто однаково імовірні дві події: випадкова величина виявиться меншою  $Me$  та більшою  $Me$ . З геометричної точки зору медіана – це абсциса точки, в якій площа, що обмежена кривою функції щільності розподілу, ділиться навпіл.

Для прикладу розглянемо наступну таблицю розподілу (табл. 7.5).

Таблиця 7.5. Приклад табличної форми розподілу з визначеною медіаною

$X$	2	3	<b>5</b> <b>медіана</b>	6	8	9
$P$	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1

Якщо розподіл одномодальний і симетричний, то математичне сподівання, мода і медіана співпадають.

**Дисперсія**,  $\sigma_x^2$  характеризує розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання. За міру розсіювання беруть математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\sigma_x^2 = \mu[X - \mu_x]^2$$

або

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^K (x_i - \mu_x)^2 P_i. \quad (7.9)$$

Іноді користуються формулою

$$\sigma_x^2 = \mu_{x^2} - (\mu_x)^2.$$

Для неперервних випадкових величин формула розрахунку така

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx.$$

Дисперсія має такі властивості:

- дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$\sigma_C^2 = 0;$$

- сталий множник можна виносити за знак дисперсії, зводячи його у квадрат:

$$\sigma_{CX}^2 = C^2 \sigma_X^2;$$

- дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$\sigma_{X+Y+Z}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 ;$$

- дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 .$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, тому часто використовують інший параметр – *середнє квадратичне (стандартне) відхилення* ,  $\sigma_x$  [13, 16, 17].

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} .$$

Узагальненням основних числових характеристик випадкової величини є поняття *моментів випадкової величини*. Моменти розділяють на початкові та центральні.

**Початковим моментом  $q$ -го порядку** випадкової величини називають математичне сподівання величини  $X^q$  :

$$\nu_{q,in} = \mu[X^q].$$

Початкові моменти дискретної і неперервної випадкових величин розраховуються за відповідними формулами

$$\nu_{q,in} = \sum_{i=1}^K x_i^q P_i ;$$

$$\nu_{q,in} = \int_{-\infty}^{\infty} x^q f(x) dx.$$

З наведених виразів видно, що математичне сподівання випадкової величини є початковим моментом першого порядку.

**Центральним моментом  $q$ -го порядку** випадкової величини називають математичне сподівання величини  $(X - \mu_x)^q$ :

$$\nu_{q,c} = \mu[X - \mu_x]^q.$$

Центральні моменти дискретної і неперервної випадкових величин розраховуються за відповідними формулами:

$$\nu_{q,c} = \sum_{i=1}^K (x_i - \mu_x)^q P_i ;$$

$$\nu_{q,c} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^q f(x) dx.$$

Дисперсія випадкової величини є центральним моментом другого порядку.

Розглянемо додаткові числові характеристики.

**Коефіцієнт асиметрії** – це нормований центральний момент третього порядку, він є характеристикою скошеності розподілу:

$$A = \frac{v_{3,in}}{\sigma_x^3}.$$

Має місце *лівостороння асиметрія*, якщо серед значень випадкової величини, переважають такі, що менше за математичне сподівання. Правостороння асиметрія відповідає зворотній ситуації, тобто переважають значення, які перевищують математичне сподівання.

Якщо числовий ряд випадкової величини асиметричний, то функція щільності розподілу імовірностей має скошений (несиметричний) вигляд, тобто одна з її гілок, починаючи від вершини, коротша за іншу. Коефіцієнт асиметрії не має ні верхньої, ні нижньої границі, що знижує його цінність як міри асиметрії. Для симетричного розподілу  $A = 0$ .

**Ексцес** – нормований центральний момент четвертого порядку. Він є характеристикою гостровершинності розподілу, а обчислюється за формулою:

$$E = \frac{v_{4,in}}{\sigma_x^4} - 3.$$

Стандартним значенням ексцесу вважають  $E = 0$ , воно притаманне нормальному закону розподілу. Криві щільності розподілу імовірностей, що мають  $E > 0$ , більш круті в порівнянні з нормальною кривою, їх називають гостровершинними. Криві, у яких  $E < 0$ , менш круті, їх називають плосковершинними.

Зупинимось на двох видах перетворення величини  $X$  – центруванні та нормуванні випадкових величинах.

**Центровану випадкову величину** визначають як відхилення випадкової величини  $X$  від її математичного сподівання. Значення цієї величини обчислюють за формулою

$$x_{i,c} = x_i - \mu_x.$$

Таке перетворення використовують для спрощення роботи з великими числами.

**Нормовану випадкову величину** визначають як центровану випадкову величину, яку віднесено до середнього квадратичного відхилення:

$$z_i = \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}.$$

Нормування випадкових величин дозволяє привести різномірні величини з різними діапазонами змін до сумірних величин.

Математичне сподівання нормованої випадкової величини дорівнює нулю, а дисперсія – одиниці (мова йде про генеральну сукупність).

*Приклад 7.13.* Розглянемо випадкову величину  $X$ , описану у прикладі 7.11. Треба визначити її математичне сподівання, дисперсію, асиметрію та ексцес.

*Розв'язання.* Математичне сподівання:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^2 x \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 1,5.$$

Дисперсію визначаємо двома способами

1-й спосіб:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx = \int_0^2 (x - 1,5)^2 \frac{3}{8} x^2 dx = \\ &= \frac{3}{8} \int_0^2 x^4 dx - \frac{9}{8} \int_0^2 x^3 dx + \frac{9 \cdot 3}{4 \cdot 8} \int_0^2 x^2 dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 - \frac{9}{8} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 + \frac{27}{32} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \cong 0,15.$$

2-й спосіб:

$$\sigma_x^2 = \mu_{x^2} - (\mu_x)^2;$$

$$\mu_{x^2} = \int_0^2 x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = 2,4;$$

$$\sigma_x^2 = 2,4 - (1,5)^2 \cong 0,15.$$

Визначимо початкові моменти:

$$v_{1,in} = \mu_x = 1,5; \quad v_{2,in} = \mu_{x^2} = 2,4;$$

$$v_{3,in} = \mu_{x^3} = \int_0^2 x^3 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{8} x^5 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_0^2 = 4;$$

$$v_{4,in} = \mu_{x^4} = \int_0^2 x^4 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{8} x^6 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^2 \cong 6,86.$$

Розрахуємо центральні моменти:

$$v_{1,c} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx - \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Згідно з властивостями  $f(x)$  значення останнього інтегралу дорівнює 1, тому

$$v_{1,c} = \mu_x - \mu_x = 0.$$

$$v_{2,c} = \sigma_x^2 \cong 0,15; \quad \sigma_x = 0,387;$$

$$v_{3,c} = \int_0^2 (x - \mu_x)^3 f(x) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx - \frac{9}{8} \int_0^2 x^4 \mu_x dx + \\ + \frac{9}{8} \int_0^2 x^3 \mu_x^2 dx - \frac{3}{8} \int_0^2 x^2 \mu_x^3 dx = -0,05.$$

Між початковими та центральними моментами існують взаємозв'язки:

$$v_{2,c} = v_{2,in} - v_{1,in}^2; \quad v_{3,c} = v_{3,in} - 3v_{2,in} \cdot v_{1,in} + 2v_{1,in}^3;$$

$$v_{4,c} = v_{4,in} - 4v_{1,in} \cdot v_{3,in} + 6v_{1,in}^2 \cdot v_{2,in} - 3v_{1,in}^4.$$

Скористаємось формулами (7.8) та (7.9) для знаходження  $v_{4,c}$ :

$$v_{4,c} = 6,86 - 4 \cdot 1,5 \cdot 4 + 6 \cdot 1,5^2 \cdot 2,4 - 3 \cdot 1,5^4 \cong 0,07.$$

Розрахуємо асиметрію та ексцес:

$$A = \frac{v_{3,c}}{\sigma_x^3} = \frac{-0,05}{(0,387)^3} \cong 0,86;$$

$$E = \frac{v_{4,c}}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{0,07}{(0,15)^2} = 3,11 - 3 = 0,11.$$

### Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть числові характеристики положення ВВ та наведіть формули для їх розрахунків.
2. Наведіть числові характеристики розсіювання ВВ та наведіть формули для їх розрахунку.
3. Що відображають показники асиметрії та ексцесу?
4. Яку роль відіграють поняття моментів? Як розраховують початкові та центральні моменти  $q$ -го порядку? Наведіть приклади формування моментів при  $q = 0, 1, 2$ .

## 7.5. Найпростіші граничні теореми

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, які знаходять вияв у масових випадкових явищах. Вивчення цих закономірностей дозволяє науково прогнозувати результати майбутніх випробувань, які навіть не можна визначити як масові. Граничні теореми теорії ймовірностей допомагають визначити зв'язок між випадковістю і закономірністю.

**Теорема Чебишова.** При досить великій кількості  $N$  незалежних дослідів з випадковою величиною  $X$  можна з імовірністю, близькою до одиниці, стверджувати, що різниця між середнім арифметичним значенням, що спостерігалися в досліді  $M_x$ , і математичним сподіванням цієї величини  $\mu_x$ , за абсолютною величиною виявиться меншою як завгодно малого числа  $\tau > 0$  за умови, що випадкова величина  $X$  має кінцеву дисперсію, тобто

$$P[|M_x - \mu_x| \leq \tau] > 1 - \eta,$$

де  $\eta$  – додатне число, близьке до нуля.

Теорема П. Л. Чебишова дозволяє з достатньою точністю по середній арифметичній судити про математичне сподівання або навпаки – по математичному сподіванню прогнозувати очікувану величину середньої.

На підставі цієї теореми можна стверджувати, що при великій кількості вимірювань приладом, вільним від систематичної похибки, середня арифметична результатів цих вимірювань як завгодно мало відрізняється від дійсного значення контрольованої величини.

Наслідком з теореми Чебишова можна розглядати теорему Бернуллі, яка встановлює зв'язок між частотою появи події та її імовірністю.



**Теорема Бернуллі.** При досить великій кількості незалежних дослідів  $N$  можна з імовірністю, близькою до одиниці, стверджувати, що різниця між відносною частотою появи події  $A$  у цих дослідах і її ймовірністю в окремому досліді за абсолютною величиною виявиться меншою як завгодно малого числа  $\tau$ , якщо ймовірність настання цієї події в кожному досліді постійна і дорівнює  $P_A$ .

Твердження теореми можна записати у вигляді наступних нерівностей:

$$P\left[\left|\frac{N_A}{N} - P_A\right| \leq \tau\right] > 1 - \eta.$$

або

$$P\left[\left|\frac{N_A}{N} - P_A\right| \geq \tau\right] < \frac{P_A \cdot q}{N \cdot \tau^2} = \eta.$$

При розв'язуванні практичних задач іноді буває необхідно оцінити імовірність найбільшого відхилення кількості появ події від її очікуваного значення. Для цього використовують **нерівність Чебишова**:

$$P\left[\left|N_A - N \cdot P_A\right| \leq \tau\right] > 1 - \frac{N \cdot P_A \cdot q}{\tau^2}.$$

Узагальненням теореми Бернуллі на випадок різних умов проведення дослідів (а це викликає зміну імовірності  $P_A$  появи події  $A$  в кожному досліді) є теорема Пуассона.

**Теорема Пуассона.** При досить великій кількості незалежних дослідів  $N$  можна з імовірністю, близькою до одиниці, стверджувати, що різниця між відносною частотою появ події  $A$  і середньою арифметичною імовірностей цієї події в кожному досліді за абсолютною величиною виявиться меншою як завгодно малого числа  $\tau$ , якщо імовірність події  $A$  змінюється від випробування до випробування.

Це твердження теореми можна записати у вигляді наступної нерівності:

$$P\left[\left|\frac{N_A}{N} - \overline{P_A}\right| \leq \tau\right] > 1 - \eta.$$

Теорема Пуассона має велике практичне значення, оскільки звичайно умови дослідів бувають непостійні (не однакові) й імовірність появи досліджуваної події є змінною величиною. Частота появи події в реальних умовах наближається до деякої середньої імовірності цієї події, характерної для певної групи умов.

У теорії імовірностей існує інша група теорем, що стосуються граничних законів розподілу суми випадкових величин. Ця група теорем носить загальну назву центральної граничної теореми.

Уперше центральну граничну теорему сформулював і довів великий російський математик А. М. Ляпунов.

**Теорема Ляпунова.** Закон розподілу суми  $N$  незалежних випадкових величин  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) наближається до нормального закону розподілу (див. 7.7.2) при необмеженому збільшенні  $N$ , якщо виконуються такі умови:

- усі величини  $X_i$  мають кінцеві математичні сподівання та дисперсії;
- серед величин нема жодної, яка б значно відрізнялась від всіх інших своїми значеннями.

Досвід показує, що закон розподілу суми незалежних випадкових величин, схожих за своїм розсіюванням, достатньо швидко наближається до нормального. Уже при кількості доданків близько десяти закон розподілу ймовірності суми можна вважати нормальним.

Окремим випадком центральної граничної теореми є інтегральна гранична теорема Муавра-Лапласа, яка стосується дискретних випадкових величин  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), однаково розподілених і приймають тільки два можливих значення: 0 і 1.

**Теорема Муавра-Лапласа.** Якщо виконують  $N$  незалежних дослідів, у кожному з яких подія  $A$  з'являється з імовірністю  $P_A$ , то для будь-якого інтервалу  $(a, b)$  справедливо наступне співвідношення:

$$P[a \leq N_A \leq b] = P\left[\frac{a - N \cdot P_A}{\sqrt{N \cdot P_A \cdot q}} \leq \frac{N_A - N \cdot P}{\sqrt{N \cdot P_A \cdot q}} \leq \frac{b - N \cdot P_A}{\sqrt{N \cdot P_A \cdot q}}\right] \approx \\ \approx \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{b - N \cdot P_A}{\sqrt{N \cdot P_A \cdot q}}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{a - N \cdot P_A}{\sqrt{N \cdot P_A \cdot q}}\right),$$

де  $N_A$  – число появ події  $A$  у  $N$  дослідях;  $q = 1 - P_A$ .

Нормованою частотою називають вираз

$$\frac{N_A - N \cdot P}{\sqrt{N \cdot P_A \cdot q}}.$$

Застосування цієї теореми детально розглянуто в п. 7.2.

## 7.6. Багатовимірні випадкові величини

**Багатовимірна випадкова величина** – це вектор, який складається з декількох значень одновимірних випадкових величин. Розрізняють дискретні та неперервні багатовимірні випадкові величини.

Розглянемо технологічний об'єкт, схематичне зображення якого наведено на рис. 7.9. Він є системою з  $N$  входами (складові вектору  $X$ ) та  $M$  виходами (складові вектору  $Y$ ).

Вектори  $X$  та  $Y$  можна розглядати як  $N$ - та  $M$ -вимірні випадкові величини:

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_N]; \quad Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M].$$

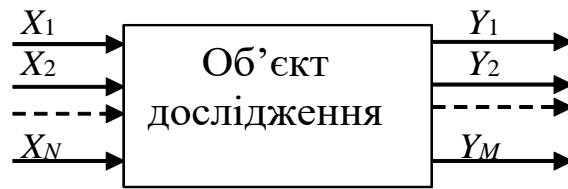


Рис.7.9. Схема технологічного об'єкта дослідження

Тут багатовимірною випадковою величиною крім  $X$  та  $Y$  є також величина  $(X, Y)$ , яка може складатися з вхідних і вихідних величин об'єкта. Кожну одновимірну величину, яка формує багатовимірну, називають *складовою* або *компонентою*. В подальшому багатовимірну випадкову величину будемо позначати як і одновимірну також курсивом.

Нехай виконують випробування, які полягають у висушуванні матеріалу у сушарці. При випробуваннях фіксують значення вологості ( $Y_1$ ) та насипної маси ( $Y_2$ ) готової продукції, температури сушильного агенту на вході ( $X_1$ ) та виході ( $Y_3$ ) сушарки. Випадкова величина  $Z$  в цьому випадку є чотиривимірною ( $M = 4$ ). Значенням багатовимірної величини  $z_i$  буде набір відповідних значень чотирьох вищезгаданих випадкових величин  $(x_{1,i}, y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i})$ .

Розглянемо двовимірні дискретні випадкові величини.

**Законом розподілу** дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік можливих пар чисел  $(x_i, y_j)$  та їх імовірностей  $P(x_i, y_j)$  при  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$ . Звичайно його подають у вигляді таблиці, приклад – табл. 7.6.

Табл. 7.6. Таблична форма подання закону розподілу величини  $Z$ 

$Y$	$X$			
	$x_1$	$x_2$	...	$x_N$
$y_1$	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$		$P(x_N, y_1)$
$y_2$	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	...	$P(x_N, y_2)$
...	...	...	...	...
$y_M$	$P(x_1, y_M)$	$P(x_2, y_M)$	...	$P(x_N, y_M)$

Якщо відомий закон розподілу двовимірної величини, то можна знайти закони розподілу кожної складової. Ймовірність того, що величина  $X$  набуде значення  $x_1$ , дорівнює сумі імовірностей у стовпці ( $x_1$ ) тобто

$$P(x_1) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) + \dots P(x_1, y_M).$$

Визначивши всі  $P(x_1) - P(x_N)$ , можна побудувати таблицю розподілу для складової  $X$ . За цією ж методикою визначають і розподіл складової  $Y$ .

У загальному випадку, коли кількість можливих значень випадкового вектору незліченно, принципово неможливо задати розподіл імовірностей у вигляді таблиці, тому за аналогією з одновимірними неперервними випадковими величинами для задання випадкового вектору вводять функції розподілу імовірностей і щільності розподілу імовірностей.

**Інтегральною функцією розподілу** ймовірностей двовимірної дискретної або неперервної випадкової величини  $(X, Y)$  називають функцію  $F(x, y)$ , яка визначає для кожної пари чисел  $(x, y)$  імовірність того, що  $X$  набуде значення  $(X < x)$ , а  $Y$  набуде значення  $Y < y$ .

Геометрично це можна уявити так:  $F(x, y)$  – це імовірність того, що випадкове значення величини  $(X, Y)$  потрапить у нескінчений квадрат з вершиною  $(x, y)$ , розташований ліворуч і нижче цієї вершини (див. рис. 7.10).

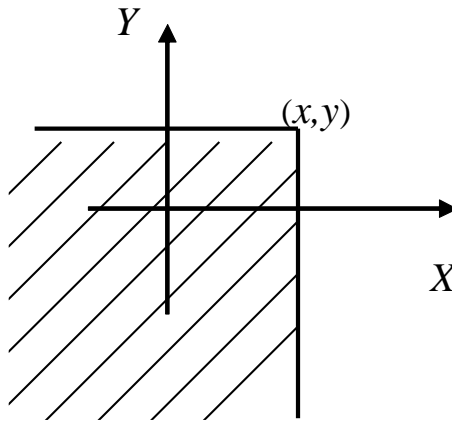


Рис. 7.10. Геометрична інтерпретація функції розподілу  $F(x, y)$

Властивості такої функції наступні:

-  $0 \leq F(x, y) \leq 1$ ;

-  $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$  якщо  $x_2 > x_1$ ;

$F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$  якщо  $y_2 > y_1$ ;

-  $F(-\infty, y) = 0$ ;  $F(x, -\infty) = 0$ ;  $F(-\infty, -\infty) = 0$ ;  $F(\infty, \infty) = 1$ ;

- при  $y = \infty$  функція розподілу стає функцією розподілу складової  $X$ :

$$F(x, \infty) = F_1(x);$$

- при  $x = \infty$  інтегральна функція  $F(x, y)$  стає інтегральною функцією складової  $Y$ :

$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

**Функцією щільності розподілу імовірностей**  $f(x, y)$  двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$  є друга змішана похідна від інтегральної функції

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Геометричним образом  $f(x, y)$  є поверхня, яку називають *поверхнею розподілу*.

Зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями можна подати і таким чином

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

Властивості функції  $f(x, y)$  наступні:

- $f(x, y) \geq 0$ ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ .

Якщо відома функція щільності  $(XY)$ , то можна визначити функції щільності складових  $X$  та  $Y$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

**Умовним розподілом складової  $X$  при  $Y = y_j$**  називають сукупність імовірностей

$$P_{y_i}(x_1), P_{y_i}(x_2), \dots, P_{y_i}(x_N),$$

які були розраховані у припущенні, що подія  $Y = y_j$  ( $j$  має однакове значення для всіх  $X$ ) вже сталася.

Наприклад, умовний закон розподілу величини  $X$  у припущенні, що подія  $Y = y_1$  вже сталася, можна визначити за допомогою виразу

$$P_{y_1}(x_i) = \frac{P(x_i, y_1)}{P(y_1)}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7.10)$$

Сума імовірностей умовного розподілу дорівнює 1.

Аналогічно визначають умовний розподіл величини  $X$  для інших  $y_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Такий же підхід використовують для визначення умовного розподілу величини  $Y$ .

**Умовною функцією щільності розподілу імовірностей**  $\varphi_y(x)$  компоненти  $X$  при певному значенні  $Y = y$  називають відношення функції щільності розподілу двовимірної величини  $f(x, y)$  до функції щільності компоненти  $Y$ :

$$\varphi_y(x) = \frac{f(x, y)}{f(y)}.$$

Використовуючи такий же підхід, визначимо функцію щільності розподілу імовірностей компоненти  $Y$  при даному  $X = x$

$$\varphi_x(y) = \frac{f(x, y)}{f(x)}.$$

Якщо складові  $X$  та  $Y$  – незалежні випадкові величини, то їх умовні розподіли такі ж, як і безумовні. В цьому випадку діють залежності

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x)F(y); \\ f(x, y) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

Основними числовими характеристиками двовимірних випадкових величин є умовні математичне сподівання та дисперсія.

**Умовним математичним сподіванням** дискретної випадкової величини  $Y$  при  $X = x$  є добуток значень компоненти  $Y$  на їх умовні ймовірності:

$$\mu_{y|X=x} = \sum_{j=1}^M y_j P_{X=x}(y_j), \quad (7.11)$$

а для неперервних величин – інтеграл

$$\mu_{y|X=x} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \varphi(y)_{X=x} dy. \quad (7.12)$$

Ті ж принципи покладено у для визначення умовного математичного сподівання величини  $X$ .



Кореляційним моментом називають математичне сподівання добутків відповідних відхилень величин  $X$  та  $Y$  від їхніх математичних сподівань:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) \cdot P(x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_i y_j P(x_i, y_j) - \mu_x \mu_y. \end{aligned} \quad (7.13)$$

*Приклад 7.14.* Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин  $(X, Y)$  задано таблицею 7.7.

Таблиця 7.7. Таблиця розподілу  $(X, Y)$  для прикладу 7.14

$X \backslash Y$	16	21	26	31
16	0,038	0,112	0,108	0,072
18	0,092	0,078	0,082	0,048
20	0,068	0,042	0,128	0,132

*Завдання.*

1. Скласти закони розподілу  $X$  та  $Y$ .
2. Знайти основні числові характеристики складових  $X$  та  $Y$  системи:

$$\mu_x, \sigma_x^2, \sigma_x; \quad \mu_y, \sigma_y^2, \sigma_y.$$

3. Розрахувати кореляційний момент  $K_{XY}$ .
4. Побудувати умовні закони розподілу для  $X|_{y=21}$  та  $Y|_{x=20}$ .
5. Обчислити умовні математичні сподівання  $\mu_{x|y=21}$  та  $\mu_{y|x=20}$ .

Розв'язання.

1. Сформуємо ряд розподілу  $X$ . Для цього підсумуємо імовірності появи всіх значень  $Y$  для кожного значення  $X$ . Результати наведено в табл. 7.8.

Таблиця 7.8. Таблиця розподілу  $X$  для прикладу 7.14

$X$	16	18	20
$P$	0,33	0,30	0,37

Сума всіх імовірностей в отриманій таблиці дорівнює

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = 0,33 + 0,30 + 0,37 = 1,0.$$

2. Розрахуємо числові характеристики випадкової величини  $X$  за (7.8), (7.9), (7.11), (7.12):

$$\mu_x = \sum_{i=1}^3 x_i P_i = 16 \cdot 0,33 + 18 \cdot 0,30 + 20 \cdot 0,37 = 5,28 + 5,4 + 7,4 = 18,08.$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^3 (x_i - \mu_x)^2 \cdot P_i = (16 - 18,08)^2 \cdot 0,33 + \\ &+ (18 - 18,08)^2 \cdot 0,30 + (20 - 18,08)^2 \cdot 0,37 = 1,428 + 0,002 + 1,364 = 2,794. \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{2,794} = 1,672.$$

Сформуємо у табл. 7.9. ряд розподілу  $Y$ . Для цього підсумуємо імовірності появи всіх значень  $X$  для кожного значення  $Y$ .

Таблиця 7.9. Таблиця розподілу  $Y$  для прикладу 7.14

$Y$	16	21	26	31
$P$	0,198	0,232	0,318	0,252

Сума всіх імовірностей в отриманій таблиці дорівнює

$$P = \sum_{j=1}^4 P_j = 0,198 + 0,232 + 0,318 + 0,252 = 1.$$

Розрахуємо числові характеристики випадкової величини  $Y$ .

$$\mu_y = \sum_{j=1}^4 y_j P_j = 16 \cdot 0,198 + 21 \cdot 0,232 + 26 \cdot 0,318 + 31 \cdot 0,252 =$$

$$= 3,168 + 4,872 + 8,268 + 7,812 = 24,12;$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^4 (y_j - \mu_x)^2 \cdot P_j = (16 - 24,12)^2 \cdot 0,198 + (21 - 24,12)^2 \cdot 0,232 +$$

$$+ (26 - 24,12)^2 \cdot 0,318 + (31 - 24,12)^2 \cdot 0,252 = (-8,12)^2 \cdot 0,198 + (-3,12)^2 \cdot 0,232 +$$

$$+ 1,88^2 \cdot 0,318 + 6,88^2 \cdot 0,252 = 65,934 \cdot 0,198 + 9,734 \cdot 0,232 + 3,534 \cdot 0,318 +$$

$$+ 47,334 \cdot 0,252 = 13,05 + 2,26 + 1,12 + 11,93 = 28,36.$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{28,36} = 5,33.$$

3. Розрахуємо кореляційний момент системи випадкових величин  $X$  та  $Y$  за формулою (7.13):

Для нашого прикладу

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_i y_j P(x_i, y_j) - \mu_x \cdot \mu_y =$$

$$= 16 \cdot 16 \cdot 0,038 + 16 \cdot 21 \cdot 0,112 + 16 \cdot 26 \cdot 0,108 + 16 \cdot 31 \cdot 0,072 +$$

$$+ 18 \cdot 16 \cdot 0,092 + 18 \cdot 21 \cdot 0,078 + 18 \cdot 26 \cdot 0,082 + 18 \cdot 31 \cdot 0,048 +$$

$$+ 20 \cdot 16 \cdot 0,068 + 20 \cdot 21 \cdot 0,042 + 20 \cdot 26 \cdot 0,128 + 20 \cdot 31 \cdot 0,132 - 18,08 \cdot 24,12 =$$

$$= 9,73 + 37,63 + 44,93 + 35,71 + 26,50 + 29,48 + 38,38 +$$

$$+ 26,78 + 21,76 + 17,64 + 66,56 + 81,84 - 436,09 = 436,94 - 436,09 = 0,85.$$

4. Побудуємо умовний закон розподілу для  $X|_{y=21}$ .

Умовні імовірності можливих значень випадкової величини  $X$  при  $y = 21$  визначимо за формулами (7.10):

$$P_{y_2}(x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,112}{0,232} = 0,483;$$

$$P_{y_2}(x_2) = \frac{P(x_2, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,078}{0,232} = 0,336;$$

$$P_{y_2}(x_3) = \frac{P(x_3, y_2)}{P(y_2)} = \frac{0,042}{0,232} = 0,181.$$

Умовний закон розподілу  $X$  при  $y = 21$  запишемо у формі табл. 7.10

Таблиця 7.10. Таблиця розподілу  $X$  при  $y = 21$  для прикладу 7.14

$X$	16	18	20
$X _{y=21}$	0,483	0,336	0,181

Перевірка:

$$P = \sum_{i=1}^3 P(x_i |_{y=21}) = 0,483 + 0,336 + 0,181 = 1,0$$

Побудуємо умовний закон розподілу  $Y|_{x=20}$ .

Умовні імовірності можливих значень випадкової величини  $Y$  при  $x = 20$  визначимо за формулами (7.11):

$$P_{x_3}(y_1) = \frac{P(x_3, y_1)}{P(x_3)} = \frac{0,068}{0,37} = 0,184;$$

$$P_{x_3}(y_2) = \frac{P(x_3, y_2)}{P(x_3)} = \frac{0,042}{0,37} = 0,113;$$

$$P_{x_3}(y_3) = \frac{P(x_3, y_3)}{P(x_3)} = \frac{0,128}{0,37} = 0,346;$$

$$P_{x_3}(y_4) = \frac{P(x_3, y_4)}{P(x_3)} = \frac{0,132}{0,37} = 0,357.$$

Умовний закон розподілу  $Y$  при  $x = 20$  запишемо у формі табл. 7.11.

Таблиця 7.11. Таблиця розподілу  $Y$  при  $x = 20$  для прикладу 7.14

$X$	16	21	26	31
$Y _{x=20}$	0,184	0,113	0,346	0,357

Перевірка

$$P = \sum_{j=1}^4 P(y_j |_{x=20}) = 0,184 + 0,113 + 0,346 + 0,357 = 1,0.$$

5. Обчислимо умовне математичне сподівання  $\mu_{x/y=21}$ . Для цього скористаємося таблицею 7.6 та формулою (7.11)

$$\mu_{x/y=21} = 16 \cdot 0,483 + 18 \cdot 0,336 + 20 \cdot 0,181 = 7,728 + 6,048 + 3,620 \approx 17,40.$$

Обчислимо умовне математичне сподівання  $\mu_{y/x=20}$ . Для цього скористаємося таблицею 7.6 і формулою (7.11)

$$\begin{aligned} \mu_{y/x=20} &= 16 \cdot 0,184 + 21 \cdot 0,113 + 26 \cdot 0,346 + 31 \cdot 0,357 = \\ &= 2,944 + 2,373 + 8,996 + 11,067 = 25,38. \end{aligned}$$

### Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає відмінність між звичайною та багатовимірною випадковою величинами (БВВ)?
2. Наведіть приклади багатовимірних випадкових величин.
3. Як подати закон розподілу БВВ за допомогою таблиці функції розподілу ймовірностей та функції щільності розподілу ймовірностей?

## 7.7. Типи законів розподілу ймовірностей випадкових величин

### 7.7.1. Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина  $X$  має *рівномірний розподіл*, якщо на інтервалі  $[a, b]$  щільність розподілу постійна, а за його межами дорівнює нулю, тобто

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ c, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b, \end{cases}$$

де  $c$  – стала величина.

Графік функції щільності розподілу для рівномірного закону наведено на рис. 7.11.

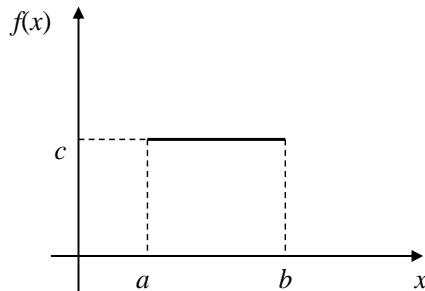


Рис.7.11. Графік  $f(x)$  рівномірного закону розподілу

Для визначення величини  $c$  використаємо те, що площа під графіком  $f(x)$  дорівнює 1:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= 1; \\ \int_a^b c dx &= c \cdot x \Big|_a^b = c(b - a) \end{aligned}$$

Звідки  $c = 1/(b - a)$ .

Виходячи з останнього виразу, можна записати

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1/(b-a), & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Знайдемо вираз функції розподілу  $F(x)$  для рівномірного розподілу на інтервалі  $[a, b]$ :

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Запишемо систему, що визначає  $F(x)$  на всій числовій осі

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графік функції розподілу наведено на рис. 7.12.

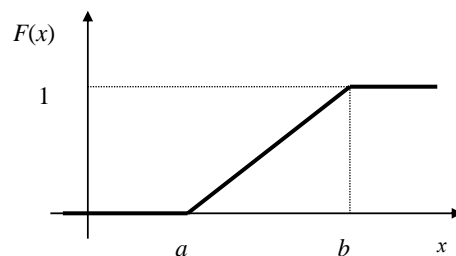


Рис.7.12. Графік  $F(x)$  рівномірного закону розподілу

Визначимо основні числові характеристики випадкової величини  $X$ , яка підпорядковується рівномірному закону розподілу.

Математичне сподівання:

$$\mu_x = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{1}{(b-a)} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

Таким чином, математичне сподівання рівномірно розподіленої величини лежить у середині інтервалу  $[a, b]$ .

Оскільки розподіл симетричний, медіана величини  $X$  збігається з її математичним сподіванням

$$Me = (a + b)/2.$$

Рівномірний розподіл не має моди.

Дисперсію величини  $X$  знаходимо за формулою

$$\sigma_x^2 = v_{2,\delta} = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення розраховують за формулою

$$\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

У зв'язку із симетричністю розподілу центральний момент третього порядку дорівнює нулю, тому коефіцієнт асиметрії  $A$  теж дорівнює нулю.

Четвертий центральний момент та коефіцієнт ексцесу визначаються за наступними формулами

$$v_{4,c} = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^4}{80}.$$

$$E = \frac{v_{4,c}}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{(b-a)^4}{80} \cdot \frac{144}{(b-a)^4} - 3 = 1,8 - 3 = -1,2.$$

Прикладом випадкової величини, яка має рівномірний розподіл імовірностей, може бути похибка при знятті показань із вимірювальних приладів, якщо проводити округлення результату вимірювання до найближчого цілого ділення.



### 7.7.2. Нормальний розподіл

Нормальний розподіл або розподіл Гаусса (нім. *Johann Carl Friedrich Gauß*) займає особливе місце серед усіх розподілів. Його винятковість базується на центральній граничній теоремі, яка встановлює характер розподілу в цілому при необмеженому зростанні обсягу вибірки (кількості спостережень).

Теорему формулюють таким чином: нехай випадкові величини мають однаковий закон розподілу, середнє значення,  $\mu$  і дисперсію,  $\sigma^2$ . Тоді, якщо дисперсія  $\sigma^2$  скінченна, то при збільшенні кількості спостережень ( $N \rightarrow \infty$ ) розподіл середнього значення випадкової величини буде прямувати до нормального розподілу із середнім  $\mu$  і дисперсією  $\sigma^2/N$ .

Частіше використовують формулювання, яке наведено у теоремі А. М. Ляпунова (див. підроз. 7.5) і для практичного використання означає, що сума великої кількості незалежних випадкових величин із довільним розподілом, які спільно впливають на певну змінну, то ця змінна розподілена у досить загальному випадку за законом, близьким до нормального.

Нормальний розподіл уперше ввів у 1733 р. Муавр, але це в той час залишилося непоміченим. Потім незалежно один від одного цей закон визначили ще раз Гаусс (у 1809 р.) і Лаплас (у 1812 р.).

Після робіт Гаусса і Лапласа довгий час вважали, що практично всі статистичні закони розподілу повинні наближатися до нормального, як до ідеальної граничної форми.

З нормальним законом мають справу при аналізі похибок засобів вимірювань, при вивченні різноманітних явищ у техніці, біології, медицині й інших галузях знань. У виробничих умовах це в основному має місце.

Аналіз загальних умов виникнення нормального розподілу показує, що найважливішою з них є формування великої сукупності значень ( $> 10$ ) взаємно незалежних доданків, дисперсії яких не дуже сильно відрізняються.

Нормальному закону розподілу підпорядковуються тільки неперервні випадкові величини.

Функція щільності розподілу імовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2 / 2b^2}.$$

а функцію розподілу записують так

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(x-a)^2 / 2b^2} dx.$$

Графік  $f(x)$  має колоколоподібний вид, його називають **нормальною кривою**.

Ця лінія симетрична відносно прямої лінії, яка проходить через точку  $x = a$ , наближаючись асимптотично до осі абсцис при  $x \rightarrow \pm\infty$  (див.рис. 7.13).

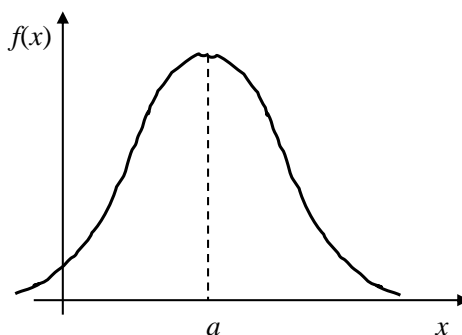


Рис. 7.13. Узагальнений вид функції щільності розподілу імовірностей нормального закону розподілу

Вирази  $F(x)$  та  $f(x)$  свідчать про те, що нормальний розподіл характеризується двома параметрами  $a$  та  $b$ . Визначимо ці числові характеристики випадкової величини  $X$ :

- математичне сподівання

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = a;$$

- дисперсія

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2b^2}} \cdot dx = b^2.$$

Таким чином стає зрозумілим смисл параметрів  $a$  та  $b$ , які характеризують цей закон розподілу. Отже, його функції можна записати остаточно у такому вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma_x^2};$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma_x^2} dx.$$

Нормально розподілену величину  $X$  з параметрами  $(\mu, \sigma)$  позначають  $N(\mu, \sigma)$ .

Інтеграл, який визначає  $F(x)$ , не можна виразити через елементарні функції. Для практичного застосування використовують функцію Лапласа,  $\Phi(z)$ , значення якої розраховано для нормалізованих величин із нульовим математичним сподіванням і дисперсією, що дорівнює 1:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x},$$

і занесено у відповідну таблицю (див.дод. 5).

Функція Лапласа непарна, тобто  $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ .

Відомо, що ймовірність розташування випадкової величини  $X$  в інтервалі  $[\alpha, \beta]$  можна визначити через функцію розподілу  $F(x)$  як

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Нерівності  $\alpha < X < \beta$  та  $\frac{\alpha - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{\beta - \mu_x}{\sigma_x}$  рівносильні, тому можна

записати

$$P(\alpha < X < \beta) = P\left(\frac{\alpha - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{\beta - \mu_x}{\sigma_x}\right).$$

Використаємо це і запишемо

$$P(z_1 < Z < z_2) = F(z_2) - F(z_1).$$

Враховуючи, що нормована випадкова величина  $Z$  має нормальний розподіл, отримаємо

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z < z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2} + \Phi(z). \end{aligned}$$

Перший доданок у цій сумі дорівнює половині площі під нормованою нормальною кривою розподілу  $f(z)$ , тому він дорівнює  $1/2$ . Другий доданок є виразом функції Лапласа.

Використовуючи останній вираз, можна записати:

$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1). \quad (7.14)$$

Визначимо імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина  $X$  відхиляється від свого математичного сподівання  $M_x$  на величину

меншу, ніж  $\varepsilon$ , тобто знайдемо імовірність виконання нерівностей

$$(X - \mu_x) < \varepsilon \quad \text{чи} \quad \mu_x - \varepsilon < X < \mu_x + \varepsilon.$$

Перейдемо до нормованої величини  $Z$ :

$$z_1 = \frac{(\mu_x - \varepsilon) - \mu_x}{\sigma_x} = -\frac{\varepsilon}{\sigma_x}; \quad z_2 = \frac{(\mu_x + \varepsilon) - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{\varepsilon}{\sigma_x}.$$

Остаточно запишемо

$$\begin{aligned} P(|(X - \mu_x)| < \varepsilon) &= P(z_1 < Z < z_2) = \\ &= F(z_2) - F(z_1) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \end{aligned}$$

Подамо  $(X - \mu_x)$  у частках середнього квадратичного відхилення, тобто  $\varepsilon = k \cdot \sigma_x$ . У цьому випадку останню рівність запишемо

$$P(|(X - \mu_x)| < \varepsilon) = 2\Phi(k).$$

Таким чином, функція  $\Phi(k)$  при заданому  $k$  визначає ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання буде за абсолютним значенням меншим ніж  $k$ .

$$\text{При } k = 1 \rightarrow P(|X - \mu_x| < \sigma_x) = 2\Phi(1) = 0,6827;$$

$$k = 2 \rightarrow P(|X - \mu_x| < 2\sigma_x) = 2\Phi(2) = 0,9545;$$

$$k = 3 \rightarrow P(|X - \mu_x| < 3\sigma_x) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Останній вираз називають «правилом трьох сигм». Він свідчить про те, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від свого математичного сподівання за абсолютним значенням не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення.

Якщо досліджують нормально розподілену випадкову величину, то використовуючи це правило, можна орієнтовно але швидко оцінити середнє

значення результатів спостережень та їх середнє квадратичне відхилення :

$$M_x = (x_{\max} + x_{\min})/2;$$

$$\sigma_x = (x_{\max} - x_{\min})/6,$$

При цьому вважають, що  $x_{\max} = M_x + 3\sigma_x$ ,  $x_{\min} = M_x - 3\sigma_x$ .

Для нормального розподілу існує формула перерахунку центральних моментів

$$v_{q,c} = (q-1)\sigma^2 v_{q-2,c}.$$

Центральні моменти непарних порядків дорівнюють нулю, оскільки  $v_{1,c} = 0$ . Деякі парні моменти подамо у кінцевому вигляді

$$v_{2,c} = \sigma^2; \quad v_{4,c} = 3\sigma^4; \quad v_{6,c} = 15\sigma^6.$$

Коефіцієнти асиметрії та ексцесу нормального розподілу дорівнюють нулю:

$$A = \frac{v_{3,c}}{\sigma^3} = 0; \quad E = \frac{v_{4,c}}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

### 7.7.3. Біномний розподіл

Біномний розподіл – це розподіл імовірностей появи  $M$  подій у  $N$  незалежних випробуваннях, причому ймовірність появи події в кожному випробуванні однакова –  $P$ .

Імовірність появи  $M$  подій розраховують за відомою формулою Бернуллі (7.5). Такому закону розподілу підпорядковані тільки дискретні випадкові величини, тому для його опису можна використовувати таблиці, багатокутники та функцію розподілу  $F(x)$ . Наведемо таблицю біномного закону розподілу (табл. 7.12).

Таблиця 7.12. Таблична форма біномного закону розподілу

$X = M$	0	1	2		$N$
$P_N(M)$	$C_N^0 P^0 q^N$	$C_N^1 P^1 q^{N-1}$	$C_N^2 P^2 q^{N-2}$	...	$C_N^N P^N q^0$

Функція розподілу визначається наступним чином:

$$F(M) = \begin{cases} 0, & M \leq 0; \\ \sum_{M_i < M} P_N(M), & 0 < M \leq N; \\ 1, & M > N. \end{cases}$$

Визначимо числові характеристики біномно розподіленої випадкової величини:

- початкові моменти:

$$\nu_{1,in} = \mu_M = \sum_{M=0}^N M C_N^M P^M q^{N-M} = N \cdot P;$$

$$\nu_{2,in} = \sum_{M=0}^N M^2 C_N^M P^M q^{N-M} = N^2 \cdot P^2 - N \cdot P^2 + N \cdot P;$$

$$\nu_{3,in} = \sum_{M=0}^N M^3 C_N^M P^M q^{N-M} = N^3 P^3 - 3N^2 P^3 + 2NP^3 + 3N^2 P^2 - 3NP^2 + N \cdot P;$$

$$\nu_{4,in} = \sum_{M=0}^N M^4 C_N^M P^M q^{N-M} = N^4 P^4 - 6N^3 P^4 + 11N^2 P^4 - 6NP^4 + 6N^3 P^3 -$$

$$- 18N^2 P^3 + 12NP^3 + 7N^2 P^2 - 7NP^2 + NP;$$

- центральні моменти:

$$\nu_{2,c} = \sigma_M^2 = NPq; \quad \sigma_M = \sqrt{NPq};$$

$$\nu_{3,c} = NPq(q - P);$$

$$\nu_{4,c} = 3N^2 P^2 q^2 + NPq(1 - 6Pq).$$

Коефіцієнт асиметрії та ексцес визначають за відповідними формулами:

$$A = (q - P) / \sqrt{NPq},$$

$$E = (1 - 6Pq) / NPq.$$

#### 7.7.4. Експоненціальний розподіл

Експоненціальним розподілом називають такий розподіл, який характеризується наступною функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

де  $\lambda$  – додатна константа.

Функцію розподілу цього закону визначають так

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Числові характеристики випадкових величин, які підпорядковуються цьому закону наступні:

$$\mu_x = 1/\lambda; \quad \sigma_x^2 = 1/\lambda^2,$$

отже для цього закону притаманно

$$\mu_x = \sigma_x = 1/\lambda.$$

Експоненціальному закону підпорядковується така випадкова величина, як час між появами двох подій. Наприклад, час безвідмовної роботи різноманітних елементів у техніці (тобто час між виходами їх із ладу) можна описати як експоненціально розподілену випадкову величину.



## Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть функції розподілу та щільності розподілу ймовірностей для рівномірного закону розподілу ВВ. Побудуйте їх графіки.
2. Як визначають математичне сподівання, моду та медіану для ВВ, що підпорядковується рівномірному закону?
3. Наведіть вказані у п.1 функції для нормального закону розподілу. Побудуйте їх графіки. Як на них відображені математичне сподівання та дисперсія?
4. За допомогою графіку функції щільності розподілу нормального закону поясніть правило «3-х сигм».
5. До яких явищ і подій застосовують біномний розподіл ВВ?
6. Опишіть функції розподілу та щільності розподілу ймовірностей для експоненціального закону розподілу. Яка властивість числових характеристик ВВ може свідчити про цей закон розподілу?

## 8. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ

### 8.1. Основи теорії вибірки

Предметом математичної статистики є вивчення різноманітних явищ природи або життєдіяльності людини шляхом застосування положень теорії ймовірностей.

Початковим матеріалом для статистики є результати випробувань (спостережень та дослідів).

**Генеральною сукупністю** називають набір усіх імовірних результатів вимірів, тобто число спостережень  $N \rightarrow \infty$ . Частину генеральної сукупності ( $N \ll \infty$ ) називають **вибіркою**.

Основними завданнями математичної статистики є отримання, систематизація, обробка і використання статистичних даних. Систематичне спостереження може бути **суцільним** або **вибірковим**.

Перше припускає спостереження всіх досліджуваних об'єктів. Проте, організація суцільного спостереження пов'язана зі значними витратами праці і часу. Тому частіше вдаються до спостереження лише частини досліджуваних об'єктів. Такий метод спостереження одержав назву вибіркового. Практично вибіркоче спостереження є одним із основних методів одержання статистичної інформації.

Інформація про генеральну сукупність, яку отримано на підставі вибіркового спостереження, завжди буде характеризуватися певною похибкою. Це породжує дві взаємопов'язані проблеми, що складають зміст математичної теорії вибірки:

- досягнення репрезентативності вибірки, тобто формування такої вибірки, яка дає можливість з упевненістю судити про досліджувану ознаку генеральної сукупності;

- вибір методу використання результатів спостережень, який дозволив би судити про властивості генеральної сукупності з найбільшою надійністю.

Існують два різних способи відбору елементів генеральної сукупності у вибірку: *випадковий* і *невипадковий*.

Випадковим називають відбір, при якому кожний елемент сукупності може потрапити у вибірку випадково. Випадковий відбір може проводитися шляхом звичайного жеребкування, спеціальних таблиць випадкових чисел або програм, що генерують такі числа.

Суворого дотримання правила випадкового відбору не завжди можна дотриматися. Так, для випадкового вибору виробів із партії звичайно користуються таблицею випадкових чисел. Спочатку вироби нумерують, потім із довільного місця таблиці випадкових чисел виписують стільки чисел, скільки елементів буде в планованій вибірці. З загальної партії вибирають ті вироби, номери яких збігаються з виписаними номерами таблиці. Якщо випадкове число таблиці виявиться більше обсягу генеральної сукупності, то це число пропускають.

Випадковий відбір проводять за двома схемами:

- «куля, яку повертають» – вибірка із поверненням відібраного із сукупності елементу знову до цієї сукупності після необхідних вимірювань;

- «куля, яку не повертають» – вибірка без повернення відібраного елементу.

На практиці вибірка формується звичайно як безповоротна, проте, в теоретичному плані робота з поворотною вибіркою простіша. Її моделлю є схема повторних незалежних випробувань.

Відмінність цих двох схем тим менша, чим менше відношення обсягу вибірки до обсягу генеральної сукупності. Практично, якщо відношення менше за 0,05, то цією відмінністю можна знехтувати і користуватися більш простими співвідношеннями, притаманними поворотній вибірці навіть у тому випадку, коли проводять безповоротний відбір.

Точність результатів обробки вибірки істотно підвищується з ростом її обсягу. Однак, при цьому зростає і трудомісткість, отже, і вартість проведення вибіркового обстеження.

Невипадковий відбір досягається декількома методами.

*Механічна вибірка* передбачає відбір елементів із генеральної сукупності через певний інтервал. Так, наприклад, якщо вибірка повинна складати 25% генеральної сукупності, то відбирається кожний четвертий елемент цієї сукупності. Іноді механічна вибірка може виявитися нерепрезентативною.

При великій кількості однорідної продукції, яка випускається, на різноманітних верстатах або навіть цехах, для утворення репрезентативної вибірки користуються *типовим способом* відбору.

Нехай, наприклад, за вибіркою досліджується продукція цеху, у якому є 10 верстатів, що виготовляють однакову продукцію. Користуючись схемою випадкової вибірки з поверненням або випадковою вибіркою без повернення, відбирають вироби спочатку з продукції, яку виготовлено на першому, а потім на другому верстаті і т. д. до десятого верстата. У такий спосіб формують типову вибірку.

*Серійний (гніздовий)* спосіб полягає в тому, що випадковим способом відбираються не окремі елементи, а їхні групи, на які попередньо розподіляється

сукупність. А потім за схемою "із поверненням" або "без повернення" контролюють елементи лише відібраних серій.

Наприклад, якщо вироби виготовляють великою групою верстатів-автоматів, то суцільному обстеженню піддають продукцію тільки декількох з них. Серійний відбір використовують у випадку, коли ознака, яку досліджують, коливається в різноманітних серіях не суттєво.

Про те, якому способу відбору варто віддати перевагу, треба вирішувати, виходячи з поставленої задачі й умов виробництва. На практиці часто застосовують одночасно декілька способів.

Невипадкові вибірки треба використовувати обережно, оскільки до обробки отриманих даних не завжди можна застосувати ймовірнісні методи. Тому надалі будемо розглядати вибірки, які утворено методом випадкового відбору.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Чим відрізняється вибірка від генеральної сукупності і що їх об'єднує?
2. Розкажіть про випадковий та невипадковий відбори при формуванні вибірок. Наведіть приклади.

### **8.2. Статистичне оцінювання параметрів розподілу**

Статистичне оцінювання полягає у тому, що за результатами випадкової вибірки треба досить точно оцінити можливі значення параметрів (характеристик) генерального розподілу, наприклад, математичного сподівання, дисперсії і т. д.

Задачу оцінювання поділяють на дві частини :

- *точкове оцінювання*, воно полягає у розрахунку одного значення (числа), яке можна прийняти за наближене значення якоїсь характеристики генерального розподілу випадкової величини,

- *інтервальне оцінювання* передбачає визначення інтервалу, в якому з заданою надійністю буде знаходитись шукана характеристика.

Оцінки параметрів повинні відповідати умовам обґрунтованості, незсуненості та ефективності.

Оцінка параметра називається *обґрунтованою*, якщо при зростанні кількості спостережень  $N$  ( $N \rightarrow \infty$ ), вона прямує до теоретичного значення параметра.

Наприклад, для дисперсії  $\lim_{N \rightarrow \infty} S^2(N) = \sigma^2$ .

Оцінка параметра називається *незсуненою*, якщо при будь-якій кількості спостережень її математичне сподівання точно дорівнює параметру, який оцінюють. Виконання вимоги незсуненості усуває систематичну похибку в значенні оцінки.

Оцінка параметра називається *ефективною*, якщо в порівнянні з іншими оцінками того ж параметра вона має найменшу дисперсію.

Проаналізуємо формули, які дозволяють оцінювати математичне сподівання і дисперсію по випадковій вибірці з поверненням і без повернення “кулі”.

Утворення випадкової вибірки з поверненням гарантує незмінність закону розподілу випадкової величини в генеральній сукупності незалежно від того, який відбирається елемент : перший, другий чи інший.

Позначимо обсяг генеральної сукупності через  $N$ . Тоді імовірність того, що випадкова величина приймає значення  $x_1$  дорівнює  $P(X = x_1) = 1/N$ ; того, що буде отримане значення  $x_2$  —  $P(X = x_2) = 1/N$  і т. д.

Отже, імовірність події  $X = x_i$  не залежить від того, чи відбулися події  $X = x_1, X = x_2$  і т. д. Тому можна зробити висновок про те, що середнє значення, яке розраховують за елементами вибірки з поверненням, тобто

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (8.1)$$

є найкращою оцінкою математичного сподівання  $\mu_x$  із дисперсією

$$S_{M_x}^2 = \frac{S_x^2}{N}.$$

Найкращою – тут означає незсуненою, обґрунтованою і, у випадку нормального розподілу випадкової величини, ефективною.

Оцінку дисперсії генеральної сукупності розраховують за формулою

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2}{N - 1}. \quad (8.2)$$

Якщо формується випадкова вибірка без повернення, то елементи  $x_1, x_2, \dots, x_N$  уже не можна вважати незалежними.

Дійсно, якщо імовірність першої події  $X = x_1$  дорівнює  $P(X = x_1) = 1/N$ , а імовірність події  $X = x_2$  за умови, що  $x_1$  уже відібране, дорівнює  $P(X = x_2) = 1/(N - 1)$ , то імовірність події  $X = x_2$  змінюється в залежності від того, мала місце подія  $X = x_1$  або ні. Проте й у цьому випадку можна довести, що середня арифметична є незсуненою і обґрунтованою оцінкою, а її дисперсія дорівнює

$$S_{M_x}^2 = \frac{S_x^2}{N} \cdot \frac{N_{gp} - N}{N_{gp} - 1},$$

де  $N_{gp}$  – обсяг генеральної сукупності.

Якщо обсяг генеральній сукупності великий, а вибірка з  $N$  елементів складає лише невеличку її частину, то

$$(N_{gp} - N)/(N_{gp} - 1) \rightarrow 1$$

і результати оцінки дисперсії за випадковою вибіркою з поверненням і без повернення мало відрізняються один від одного.

Оцінка дисперсії генеральної сукупності розраховують для випадкової вибірки без повернення наступним чином

$$S_x^2 = \frac{N_{gp} - 1}{N_{gp}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2}{N - 1}.$$

Якщо  $N_{gp}$  велике, те доданок  $(N_{gp} - 1)/N_{gp}$  можна прийняти таким, що дорівнює одиниці.

Варто чітко розділяти поняття *обґрунтованість* і *незсуненість*.

Наведемо дві формули для розрахунку дисперсій:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2}{N} \quad \text{та} \quad S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2}{N - 1}.$$

Обидві ці оцінки обґрунтовані. Однак перша формула містить систематичну негативну похибку  $S_x^2/N$ , оскільки математичне сподівання першої дисперсії визначають залежністю

$$M_{S_x^2} = S_x^2 - S_x^2 / N.$$

При зростанні  $N$  ця похибка монотонно зменшується. З цього випливає, що вимога незсуненості особливо важлива при малій кількості спостережень.

Друга формула розрахунку дисперсій дає незсунену її оцінку.



Якщо є вибірка  $x_1, x_2, \dots, x_N$  із нормальної сукупності, то середнє арифметичне можна оцінити двома способами:

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \text{та} \quad M_x = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}.$$

Обидві ці оцінки мають властивості обґрунтованості та незсуненості, проте, можна показати, що дисперсія першої дорівнює  $S_x^2/N$ , а другої –  $\pi^2 S_x^2 / 24 \ln N$ . Друга дисперсія істотно більша.

Перша оцінка математичного сподівання схильна до менших випадкових коливань навколо невідомого дійсного значення оцінюваного параметра. Таким чином, перший спосіб оцінки теоретичного середнього забезпечує її обґрунтованість, незсуненість та ефективність, в той час, як другий спосіб – тільки обґрунтованість та незсуненість.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Поясніть смисл вимог незсуненості, ефективності та обґрунтованості до оцінок параметрів законів розподілу.
2. Наведіть формули для точкового оцінювання математичного сподівання. Яка з них найкраща і чому?
3. Наведіть формули для точкового оцінювання дисперсії. Яку визнано більш ефективною для вибірових даних?

### 8.3. Основи дисперсійного аналізу

*Дисперсійний аналіз* – це статистичний метод аналізу результатів випробувань (спостережень чи дослідів), які формуються під впливом різноманітних чинників. Він передбачає оцінювання суттєвості впливу цих чинників на досліджуваний процес (об’єкт). У подальшому ці чинники будемо називати *факторами*, оскільки цей термін більш поширений у статистиці.

Ідея дисперсійного аналізу полягає в розкладанні загальної дисперсії випадкової величини на незалежні доданки, кожний з яких характеризує вплив того або іншого фактора або їхньої взаємодії. Наступне порівняння цих дисперсій дозволяє оцінити суттєвість впливу факторів на досліджувану випадкову величину.

Нехай  $X$  – досліджувана випадкова величина;  $A$  і  $B$  – фактори, які на неї впливають;  $M_x$  – середнє значення величини  $X$ . Припустимо, що відхилення  $X$  від  $M_x$  при дії факторів  $A$  і  $B$ , можна подати у вигляді суми

$$X - M_x = \alpha + \beta + \gamma,$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – частини відхилення, які викликані факторами  $A$  та  $B$ , а також неврахованими факторами відповідно.

Позначимо дисперсії величин  $X$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  відповідно  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_\alpha^2$ ,  $\sigma_\beta^2$ ,  $\sigma_\gamma^2$ .

Для незалежних  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  матиме місце рівність

$$\sigma_x^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2.$$

Порівнюючи розраховані за результатами дослідів значення дисперсій, за допомогою статистичних критеріїв можна встановити суттєвість впливу **факторів**  $A$  та  $B$  на величину  $X$ .

При порівнянні дисперсій висувають так звану нульову гіпотезу про однорідність дисперсій у генеральних сукупностях, які представлені вибірками, які отримав дослідник. Цю гіпотезу записують так

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

Індекс 1 має один з факторів, індекс 2 – інший. Сам дослідник вирішує як позначати фактори, для статистичної ж обробки це не суттєво. Альтернативна гіпотеза може мати вираз  $H_0: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$  або  $H_0: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ .

Відомо, що в разі нормального розподілу випадкових величин, відношення дисперсій має  $F$ -розподіл, тобто розподіл Фішера-Снедекора (англ. *Ronald Aylmer Fisher, George Waddel Snedecor*).

Якщо за вибірковими даними досліджують вплив на  $X$  одного фактора, то йдеться про однофакторний дисперсійний аналіз. Якщо досліджують вплив на  $X$  декількох факторів, йдеться про багатфакторний дисперсійний аналіз.

У подальшому передбачається, що фактори, як випадкові величини, підпорядковуються нормальному закону розподілу ймовірностей.

### 8.3.1. Однофакторний дисперсійний аналіз

Розглянемо використання однофакторного дисперсійного аналізу для технологічних ліній по виготовленню продукції, в яких передбачено подавати сировину одночасно в декілька однотипних апаратів. Мова йде про технологічні лінії, у яких відбувається той самий технологічний процес (кажуть, що лінії працюють «паралельно»).

Задача полягає в з'ясуванні, наскільки однотипною є продукція, яку виготовляють ці лінії. Якщо паралельно працюють тільки окремі апарати, то дослідженню підлягають технологічні процеси в апаратах. Для спрощення пояснень будемо вести мову про апарати.

У такій задачі дослідник за випадкову величину  $X$  вибирає одну з вихідних змінних технологічного процесу в апараті.

Фактор «апарати» означає, що на  $X$ , впливає комплекс властивостей кожного апарату, кількість апаратів позначимо  $L$ .

Виконаємо спостереження за роботою кожного апарату, в результаті отримаємо  $L$  вибірок. Оскільки умови випробувань можуть різнитися, то вибірки в загальному випадку складаються з різної кількості даних  $(N_1, N_2, \dots, N_L)$ . Результати експериментів внесені в табл. 8.1.

Таблиця 8.1. Результати спостережень за роботою апаратів

Кількість вибірок (апаратів)	Кількість даних у вибірці					
	1	2	...	$j$	...	$N_L$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1N_1}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2N_2}$
...	...	...	...	...	...	...
$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{iN_i}$
...	...	...	...	...	...	...
$L$	$x_{L1}$	$x_{L2}$	...	$x_{Lj}$	...	$x_{LN_L}$

За наведеними даними перевіримо суттєвість впливу властивостей апаратів окремих ліній на якість готової продукції. Перевірку виконаємо порівнянням групових і міжгрупових дисперсій за критерієм Фішера.

Якщо розбіжність між цими дисперсіями виявиться суттєвою, то можна буде зробити висновок про те, що розходження між середніми значеннями вибірок обумовлено не тільки випадковістю вибірових даних, але і впливом досліджуваного фактора.

Наведемо алгоритм розрахунку та використання дисперсій.

Знайдемо середні арифметичні випадкових величин кожної вибірки:

$$M_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} x_{1j}}{N_1}; \quad M_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}}{N_i}; \quad M_L = \frac{\sum_{j=1}^{N_L} x_{Lj}}{N_L}.$$

Знайдемо загальну середню арифметичну всіх  $L$  вибірок,  $M_x$ :

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^L M_i}{L}.$$

Розрахуємо суму квадратів відхилень  $x_{ij}$  від  $M_x$ :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_x)^2 = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i + M_i - M_x)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i)^2 + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (M_i - M_x)^2 + 2 \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i)(M_i - M_x). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Зупинимося на останньому виразі:

$$2 \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i)(M_i - M_x) = 2 \sum_{i=1}^L (M_i - M_x) \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i). \quad (8.4)$$

Його доданок  $\sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i) = 0$ , оскільки це – сума відхилень елементів однієї

вибірки від їх середнього арифметичного. Тому весь добуток у правій частині виразу (8.4), а, отже, і ліва частина (8.4) дорівнюють нулю.

Розглянемо другий доданок у правій частині виразу (8.3), а саме

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (M_i - M_x)^2 = \sum_{i=1}^L (M_i - M_x)^2 \cdot N_i.$$

При  $N_1 = N_2 = \dots = N_L = N$  можна записати

$$\sum_{i=1}^L (M_i - M_x)^2 \cdot N_i = N \cdot \sum_{i=1}^L (M_i - M_x)^2.$$

Вище викладене дозволяє записати рівняння (8.1) наступним чином

$$\underbrace{\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_x)^2}_{Q_0} = \underbrace{\sum_{i=1}^L (M_i - M_x)^2 N_i}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - M_i)^2}_{Q_2}.$$

Величина  $Q_0$  – повна сума квадратів відхилень окремих спостережень від загальної середньої  $M_x$ .

Доданок  $Q_1$  є сумою квадратів різниць між середніми значеннями окремих вибірок і загальним середнім усієї сукупності спостережень.

Цю суму називають сумою квадратів відхилень між групами і характеризує систематичну розбіжність між вибірками. Величина  $Q_1$  характеризує розсіювання випадкової величини (властивості продукції) за рахунок досліджуваного фактора.

Доданок  $Q_2$  є сумою квадратів різниць між результатами окремих спостережень і середнім відповідної вибірки. Цю суму називають сумою квадратів відхилень у середині групи. Вона характеризує залишкове розсіювання випадкової величини (властивості продукції) в окремій вибірці.

Визначимо відповідні вибіркові дисперсії  $S_0^2, S_1^2, S_2^2$ . Для одержання незсунених оцінок дисперсій потрібно кожену суму квадратів розділити на кількість степенів вільностей  $NU_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), тобто

$$S_0^2 = \frac{Q_0}{NU_0}; \quad S_1^2 = \frac{Q_1}{NU_1}; \quad S_2^2 = \frac{Q_2}{NU_2}.$$

Нагадаємо, що при обчисленні незсуненої оцінки дисперсії кількість ступенів вільностей дорівнює  $N - 1$  ( $N$  – обсяг вибірки), оскільки один ступінь вільності губиться на визначення математичного сподівання (середнього). Отже, кількість ступенів вільності для загальної дисперсії  $Q_0$  розрахуємо за формулою

$$NU_0 = \sum_{i=1}^L N_i - 1$$

якщо  $N_1 = N_2 = \dots = N_L = N$ , то  $NU_0 = LN - 1$ .

Ступінь вільності при оцінці дисперсії усередині групи розрахуємо за виразом

$$NU_2 = \sum_{i=1}^L (N_i - 1) = \sum_{i=1}^L N_i - L,$$

оскільки використовують  $L$  співвідношень при обчисленні  $L$  групових середніх  $M_i$ . Якщо вибірки мають однаковий обсяг, то  $NU_2 = NL - L = L(N - 1)$ .

Групові середні зосереджуються навкруг однієї загальної середньої, тому при оцінці міжгрупової дисперсії кількість ступенів вільності визначають так

$$NU_1 = L - 1.$$

Підсумовуючи  $NU_1$  і  $NU_2$ , одержимо  $NU_0$

$$NU_0 = L - 1 - \sum_{i=1}^L N_i - L = \sum_{i=1}^L N_i - 1,$$

Для вибірок одного обсягу  $NU_0$  можна розрахувати так

$$NU_0 = L - 1 + L(N - 1) = L - 1 + LN - L = LN - 1.$$

Тепер запишемо дисперсії для однакового обсягу вибірок:

$$S_0^2 = \frac{1}{LN - 1} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N (x_{ij} - M_x)^2; \quad S_1^2 = \frac{1}{L - 1} \sum_{i=1}^L (M_i - M_x)^2;$$

$$S_2^2 = \frac{1}{L(N - 1)} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N (x_{ij} - M_i)^2.$$

Після одержання оцінок дисперсій виконаємо оцінку розходжень між  $S_1^2$  та  $S_2^2$  за  $F$ -критерієм.

Значення  $F$ -критерію ( $F$ -статистики) повинно бути більше 1, тому, якщо  $S_1^2 > S_2^2$ , то вибіркове значення критерію розраховують так

$$F = S_1^2 / S_2^2.$$

Якщо фактор суттєво впливає на  $X$ , то відмінність дисперсій перевищить критичну межу. Це означає, що вибірки варто вважати узятими з різних сукупностей (тобто процеси в апаратах відрізняються).

Ця  $F$ -статистика підпорядковується розподілу з  $NU_1$  і  $NU_2$  ступенями вільності (для  $S_1^2$  та  $S_2^2$  відповідно, якщо  $S_1^2 > S_2^2$ ). Критичне значення критерію Фішера,  $F_{tabl}$  знаходять у таблицях чи за допомогою математичних процесорів на основі  $NU_1$  і  $NU_2$  та рівня значущості  $\alpha$  ( $\alpha$  – імовірність відхилення правильної гіпотези). Тому замість  $F_{tabl}$  іноді пишуть  $F_{NU_1, NU_2, \alpha}$ .

Рівень значущості дослідник вибирає сам, виходячи з важливості очікуваної відповіді. Для переважної кількості технічних задач рівень значущості  $\alpha$  беруть, як правило, з ряду 0,01; 0,025; 0,05; 0,1.

Після визначення вибіркового та табличного значень критерію перевіряють умову  $F \leq F_{tab}$ . Якщо вона виконується, то гіпотезу  $H_0$  приймають, тобто вважають, що дисперсії сумірні, і фактор не чинить суттєвого впливу на  $X$ . У розглянутій задачі це означає, що продукцію різних апаратів можна визнати однотипною.

Якщо умова не виконується, то гіпотезу  $H_0$  відхиляють, тобто вважають, що дисперсії значно відрізняються одна від одної, і можна визнати суттєвим вплив досліджуваного фактора на  $X$ . Критичні значення  $F_{tabl}$  при  $\alpha = 0,05$  наведено у дод. 6.



*Приклад 8.1.* Уведемо числові дані для розглянутого вище прикладу. Досліджують виробництво керамічної продукції у чотирьох апаратах, які працюють «паралельно». Якість цієї продукції оцінюють за її міцністю, що вимірюють у кгс/см<sup>2</sup>. Результати вимірювань наведено в табл. 8.2.

Потрібно з'ясувати, чи істотно відрізняється міцність виробів після різних апаратів.

Таблиця 8.2. Результати досліджень міцності цегли з чотирьох апаратів

Номер апарату	Міцність				
1	200	140	170	145	165
2	190	150	210	150	150
3	230	190	200	190	200
4	150	170	150	170	180

*Розв'язання.* Кількість вибірок (апаратів) позначимо літерою  $L$  ( $L = 4$ ), кількість елементів у кожній вибірці становить  $N = 5$ .

Обчислимо середнє арифметичне значення міцності після кожного  $i$ -го апарату

$$M_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij}$$

$$M_1 = (200 + 140 + 170 + 145 + 165)/5 = 164; \quad M_2 = 170; \quad M_3 = 202; \quad M_4 = 164.$$

Розрахуємо середнє арифметичне значення міцності для всіх чотирьох вибірок:

$$M_x = \frac{1}{LN} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N x_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L M_i = \frac{3500}{20} = \frac{164 + 170 + 202 + 164}{4} = 175.$$

Обчислимо:

- суму квадратів відхилень між групами з  $NU_1 = L - 1$ :

$$Q_1 = \sum_{i=1}^4 (M_i - M_x)^2 \cdot N_i = 5 \sum_{i=1}^4 (M_i - M_x)^2 = 5[(164 - 175)^2 + (170 - 175)^2 + (202 - 175)^2 + (164 - 175)^2] = 5 \cdot 996 = 4980;$$

$$NU_1 = 4 - 1 = 3;$$

- суму квадратів відхилень усередині груп з  $NU_2 = L(N - 1)$ :

$$Q_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - M_i)^2 = [(200 - 164)^2 + (140 - 164)^2 + (170 - 164)^2 + \dots + (170 - 164)^2 + (180 - 164)^2] = 7270;$$

$$NU_2 = 4(5 - 1) = 16;$$

- повну суму квадратів  $Q_0$  з  $NU_0 = LN - 1$ :

$$Q_0 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - M_x)^2 = [(200 - 175)^2 + (140 - 175)^2 + (170 - 175)^2 + (145 - 175)^2 + (165 - 175)^2 + (190 - 175)^2 + (150 - 175)^2 + (210 - 175)^2 + (150 - 175)^2 + (150 - 175)^2 + (230 - 175)^2 + \dots + (180 - 175)^2] = 12250;$$

$$NU_0 = 4 \cdot 5 - 1 = 20 - 1 = 19.$$

Занесемо у табл. 8.3 результати розрахунків

Таблиця 8.3. Розрахунок дисперсій для прикладу 8.1

Компоненти дисперсії	Сума квадратів	Кількість ступенів вільності	Дисперсія
Міжгрупова, $S_1^2$	4980	3	1660,0
У середині групи, $S_2^2$	7270	16	454,4
Повна, $S_0^2$	12250	19	644,7

Розрахуємо  $F$ -статистику. Оскільки  $S_1^2 > S_2^2$ , то розрахунок виконаємо за формулою

$$F = S_1^2/S_2^2 = 1660/454,4 = 3,65.$$

Задамо рівень значущості  $\alpha = 0,01$ . Табличне значення критерію Фішера при  $NU_1 = 3$ ,  $NU_2 = 16$  та  $\alpha = 0,01$  становить  $F_{3,16,0.01} = 9,01$ .

Умова  $F \leq F_{3,16,0.01}$  виконується, тому можна визнати несуттєвість відмінності між міцністю продукції, яку виготовляють у різних апаратах.

### 8.3.2. Двофакторний дисперсійний аналіз

Такий вид дисперсійного аналізу використовують тоді, коли треба оцінити суттєвість впливу двох чинників (позначимо їх  $A$  та  $B$ ) на досліджувану випадкову величину  $X$ . Методика виконання дисперсійного аналізу в цьому випадку та ж, що і при однофакторному аналізі.

Нехай є декілька однотипних технологічних апаратів і декілька партій сировини (сировина відібрана, наприклад, з різних родовищ). Потрібно визначити, чи суттєво впливають на властивості готової продукції особливості окремих апаратів та тип сировини.

Позначимо через  $A$  фактор впливу властивостей апаратів, через  $B$  – вплив типу сировини. Показник якості готової продукції позначимо через  $x_{ij}$  ( $i$  – номер апарата,  $j$  – номер партії сировини). Результати експериментів занесено в табл. 8.4. Спочатку розглянемо випадок, коли для кожної комбінації апарата і партії сировини є тільки одне спостереження.

Сформуємо матрицю спостережень. Нехай є  $L$  апаратів. У матриці спостережень їм відведено  $L$  рядків, які відображають рівні фактору  $A$ .

Є  $G$  партій сировини, кожній із них у матриці спостережень відповідає стовпчик, що називають рівнем фактору  $B$ .

Таблиця 8.4. Результати спостережень за роботою апаратів і властивостями сировини

Апарати ( $i = \overline{1, L}$ )	Партії сировини ( $j = \overline{1, G}$ )						
	$B_1$	$B_2$	...	$B_j$	...	$B_G$	$M_{Ai}$
$A_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1G}$	$M_{A1}$
$A_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2G}$	$M_{A2}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$A_i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{iG}$	$M_{Ai}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$A_L$	$x_{L1}$	$x_{L2}$	...	$x_{Lj}$	...	$x_{LG}$	$M_{AL}$
$M_{Bj}$	$M_{B1}$	$M_{B2}$	...	$M_{Bj}$	...	$M_{BG}$	$M_x$

По кожному рядку і стовпчику обчислимо середні значення. Розрахуємо також середнє для всієї матриці спостережень.

Уведемо позначення:  $M_{Ai}$ ,  $M_{Bj}$  – середнє по  $i$ -у рядку та по  $j$ -у стовпчику;  $M_x$  – загальне середнє:

$$M_{Ai} = \frac{1}{G} \sum_{j=1}^G x_{ij}; \quad M_{Bj} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_{ij}; \quad M_x = \frac{1}{L \cdot G} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^G x_{ij}.$$

Основна тотожність двофакторного аналізу має вигляд:

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^G (x_{ij} - M_x)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^G (x_{ij} - M_{Ai} - M_{Bj} + M_x + M_{Ai} + M_{Bj} - M_x - M_x)^2 = \\
 &= G \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^L (M_{Ai} - M_x)^2}_{Q_1} + L \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^G (M_{Bj} - M_x)^2}_{Q_2} + \underbrace{\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^G (x_{ij} - M_{Ai} - M_{Bj} + M_x)^2}_{Q_3}.
 \end{aligned}$$

Доданок  $Q_1$  – сума квадратів різниць між середніми по рядках і загальним середнім. Він характеризує зміну ознаки по чиннику  $A$ . Доданок  $Q_2$  – сума квадратів різниць між середніми по стовпчиках і загальним середнім. Він характеризує зміну ознаки по чиннику  $B$ . Доданок  $Q_3$  називають залишковою сумою квадратів, він характеризує вплив не врахованих чинників.

Суму  $Q_0$  називають загальною або повною сумою квадратів відхилень окремих результатів експериментів від загальної середньої.

Розрахуємо вибіркові оцінки дисперсій:

$$S_0^2 = \frac{Q_0}{LG-1} = \frac{1}{LG-1} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^G (x_{ij} - M_x)^2; \quad S_1^2 = \frac{Q_1}{L-1} = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (M_{Ai} - M_x)^2;$$

$$S_2^2 = \frac{Q_2}{G-1} = \frac{1}{G-1} \sum_{j=1}^G (M_{Bj} - M_x)^2;$$

$$S_3^2 = \frac{Q_3}{(L-1)(G-1)} = \frac{1}{(L-1)(G-1)} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^G (x_{ij} - M_{Ai} - M_{Bj} + M_x)^2.$$

При двофакторному дисперсійному аналізі для з'ясування значущості впливу чинників  $A$  та  $B$  на досліджувану випадкову величину порівнюємо дисперсії по  $A$  та  $B$  із залишковою дисперсією, тобто оцінимо суттєвість відношень  $S_1^2/S_3^2$  та  $S_2^2/S_3^2$  за критерієм Фішера:

$$F_A = S_1^2/S_3^2, \{(L-1)/[(L-1)(G-1)]\}; \quad F_B = S_2^2/S_3^2, \{(G-1)/[(L-1)(G-1)]\}$$

У фігурних дужках через дріб вказано ступені вільності дисперсій чисельника та знаменника відповідно.

При  $F_A < F_{tabl}$  і  $F_B < F_{tabl}$  вплив факторів  $A$  та  $B$  (тобто властивостей апаратів і сировини) на якість готової продукції можна вважати не суттєвим.

*Приклад 8.2.* Оцінити вплив факторів  $A$  і  $B$  на випадкову величину  $X$  (рекомендується самому студенту сформулювати конкретну ситуацію).

Фактор  $B$  представлений трьома рівнями,  $A$  – двома. Подамо у табл. 8.5 матрицю спостережень.

Таблиця 8.5. Матриця спостережень за чинниками  $A$  та  $B$  для прикладу 8.2

$A$	$B$			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$M_{Ai}^*$
$A_1$	1	2	3	2
$A_2$	5	6	10	7
$M_{Bj}^*$	3	4	6,5	4,5

Розв'язання. У даному прикладі  $L = 2$ ,  $G = 3$ .

Середнє по  $A_1$ :  $M_{A1}^* = (1 + 2 + 3)/3 = 2$ .

Середнє по  $B_1$ :  $M_{B1}^* = (1 + 5)/2 = 3$ .

Загальне середнє:  $(M_{A1}^* + M_{A2}^*)/2 = (2 + 7)/2 = 4,5$ .

чи  $(M_{B1}^* + M_{B2}^* + M_{B3}^*)/3 = (3 + 4 + 6,5)/3 = 4,5$ .

Обчислимо суми квадратів:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= V \sum_{i=1}^R (M_{i*} - M_x)^2 = 3[(2 - 4,5)^2 + (7 - 4,5)^2] = \\
 &= 3[(-2,5)^2 + 2,5^2] = 37,5. \\
 Q_2 &= R \sum_{j=1}^V (M_{*j} - M_x)^2 = 2[(3 - 4,5)^2 + (4 - 4,5)^2 + (6,5 - 4,5)^2] = 13; \\
 Q_3 &= (1 - 2 - 3 + 4,5)^2 + (2 - 2 + 4 + 4,5)^2 + (3 - 2 - 6,5 + 4,5)^2 + \\
 &+ (5 - 7 - 3 + 4,5)^2 + (6 - 7 - 4 + 4,5)^2 + (10 - 7 - 6,5 + 4,5)^2 = 3; \\
 Q_0 &= 37,5 + 13,0 + 3,0 = 53,5.
 \end{aligned}$$

Знайдемо оцінки дисперсій

$$S_1^2 = 37,5/1 = 37,5; \quad S_2^2 = 13/2 = 6,5; \quad S_3^2 = 3/(1 \cdot 2) = 1,5.$$

Розрахуємо  $F$ -критерії для факторів  $A$  та  $B$ :

$$F_A = S_1^2/S_3^2 = 37,5/1,5 = 25; \quad F_B = S_2^2/S_3^2 = 6,5/1,5 = 4,33.$$

$$F_A = \frac{S_1^2}{S_3^2} \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \frac{37,5}{1,5} = 25;$$

$$F_B = \frac{S_2^2}{S_3^2} \left\{ \frac{2}{2} \right\} = \frac{6,5}{1,5} = 4,3.$$

Виберемо рівень значущості  $\alpha = 0,05$ . Критичні значення критерію Фішера наступні:  $F_{1,2,0.05} = 18,85$ ;  $F_{2,2,0.05} = 19,0$ . Бачимо, що має місце співвідношення  $F_A > F_{1,2,0.05}$ . Нульову гіпотезу для фактору  $A$  не можна підтвердити, отже вплив цього фактору на досліджувану випадкову величину можна визнати суттєвим.

Оскільки має місце співвідношення  $F_B < F_{2,2,0.05}$ , то нульову гіпотезу не відкидаємо, отже вплив фактору  $B$  на випадкову величину можна визнати несуттєвим.

### Контрольні запитання та завдання

1. Які задачі розв'язує дисперсійний аналіз?
2. Порівняйте задачі одно- та двофакторного дисперсійного аналізів.
3. Що спільного і чим відрізняються алгоритми одно- та двофакторного дисперсійного аналізів?

## 8.4. Кореляційний аналіз

### 8.4.1. Типи зв'язку між величинами

Існує декілька типів залежностей між змінними. Розглянемо їх, використавши для спрощення систему двох величин –  $X$  та  $Y$ .

**Функціональна залежність** – це такий зв'язок, коли кожному значенню однієї змінної  $X$  відповідає визначене (або декілька визначених) значення іншої змінної  $Y$ .

Проте, в реальному світі величини можуть бути пов'язані залежністю й іншого роду, яка називається статистичною.

Строга функціональна залежність реалізується рідко тому, що на обидві величини ( $X$  та  $Y$ ) або на одну з них діють ще і випадкові чинники. Серед цих чинників можуть бути і загальні для обох величин.

Наприклад, якщо  $Y$  залежить від випадкових чинників  $Z_1, Z_2, V_1, V_2$ , а  $X$  залежить від випадкових чинників  $Z_1, Z_2, U_1$ , то між  $Y$  та  $X$  не може бути функціональної залежності оскільки серед випадкових чинників є спільні:  $Z_1$  і  $Z_2$ .

За наявності випадкових чинників впливу мова може йти про **статистичну залежність**. Назвемо наступні її види.

**Стохастична залежність** – це такий статистичний зв'язок між величинами, при якому зміна однієї з них викликає зміну розподілу іншої. Окремим випадком статистичної залежності є кореляційна залежність.

**Кореляційна залежність** – це такий статистичний зв'язок між випадковими величинами, при якому зміна однієї з них призводить до зміни середнього значення іншої.



Основними задачами кореляційного аналізу є оцінювання тісноти кореляційного зв'язку та визначення конкретної форми залежності між взаємопов'язаними випадковими величинами.

Тісноту зв'язку оцінюють за допомогою величини розсіювання значень  $Y$  навколо їх умовного середнього  $M_{y|x}$ . Значне розсіювання свідчить про слабку залежність  $Y$  від  $X$  або взагалі про її відсутність. Невелике розсіювання вказує на наявність достатньо сильної залежності. В цьому випадку величини  $Y$  і  $X$  можуть бути зв'язані навіть функціонально, але під впливом другорядних випадкових чинників цей зв'язок стає розмитим. У результаті при тому самому значенні  $X$  величина  $Y$  приймає різні значення.

Повернемося до поняття умовного середнього.

**Умовним середнім**  $M_{y|x}$  називають середнє арифметичне значення випадкової величини  $Y$ , що відповідає якомусь одному значенню випадкової величини  $X$ , тобто

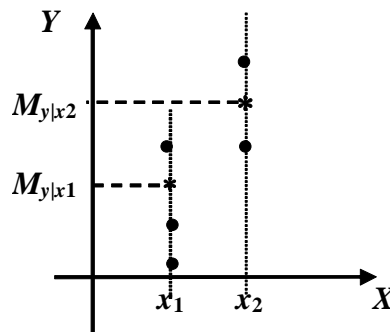


Рис.8.1. Графічна інтерпретація умовного середнього випадкової величини  $Y$

Таким чином, *кореляційною залежністю* відповідно до визначення називають функціональну залежність умовної середньої  $Y$  від  $X$ :

$$M_y = f(x). \quad (8.5)$$

#### 8.4.2. Оцінювання тісноти зв'язку між випадковими величинами

Існує декілька показників, які оцінюють ті або інші сторони статистичного зв'язку. Одним із найбільш важливих є **коефіцієнт парної кореляції**. Цей коефіцієнт характеризує наявність і тісноту лінійного зв'язку між випадковими величинами  $X$  та  $Y$ .

Вибірковий коефіцієнт кореляції розраховують за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)(y_i - M_y)}{(N-1) \cdot S_x \cdot S_y},$$

де  $N$  – кількість пар даних  $X$ - $Y$ ;  $S_x, S_y$  – оцінки середніх квадратичних відхилень  $X$  та  $Y$  відповідно, розраховані з врахуванням ступенів вільностей дисперсій, наприклад, для  $S_x$ :

$$S_x = \sqrt{\frac{(x_i - M_x)^2}{N-1}}$$

Значення коефіцієнта  $r_{xy}$  можуть знаходитися в діапазоні  $-1 \leq r \leq 1$ .

Чим більше  $|r_{xy}|$ , тим сильніший лінійний зв'язок між змінними. Значення  $r_{xy} = 0$  свідчить або про відсутність будь-якої форми зв'язку, або про значну нелінійну залежність. Якщо  $r_{xy} > 0$ , то  $X$  та  $Y$  одночасно або зменшуються, або зростають. У випадку, коли  $r_{xy} < 0$ , то одна величина збільшується зі зростанням іншої. Якщо  $|r_{xy}| = 1$ , то  $X$  та  $Y$  пов'язані лінійною функціональною залежністю.

Проілюструємо ці положення за допомогою кореляційних полів (див. рис. 8.2). *Кореляційним полем* називають зображення сукупності вибірових значень двох змінних.

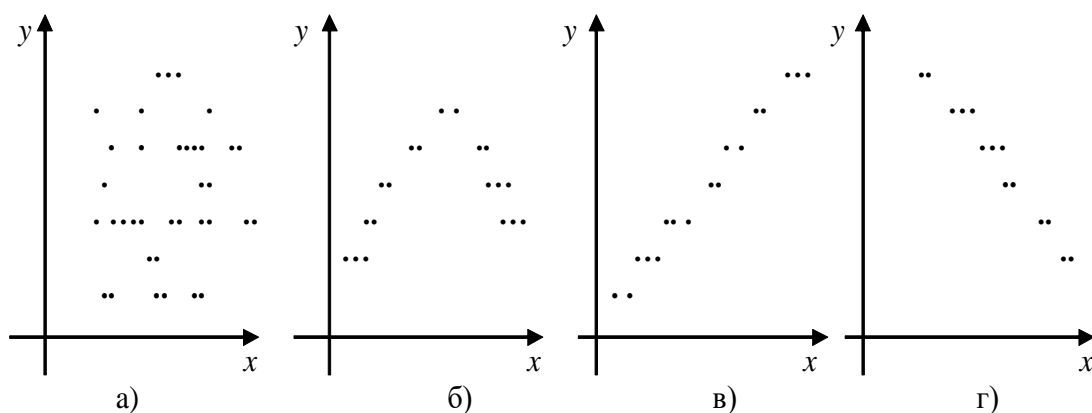


Рис. 8.2. Типи кореляційних полів

а) відсутність будь-якої форми зв'язку; б) суттєвий нелінійний зв'язок;  
в), г) зв'язок з  $r_{xy} > 0$  та  $r_{xy} < 0$  відповідно

Коефіцієнт  $r_{xy}$  визначають за вибірковими даними, отже його значення залежить від проявів різноманітних випадкових чинників. Знайти відмінність отриманого значення від дійсного, яке відповідає генеральній сукупності, за тими ж вибірковими значення (особливо, якщо вибірка мала) складно.

Тому на практиці замість розрахунку помилки коефіцієнта кореляції перевіряють гіпотезу про його значущість (тобто чи істотно  $r_{xy}$  відрізняється від нуля або цю відмінність можна приписати впливу випадковостей).

Перевіряють нульова гіпотеза:

$$H_0: \rho_{xy} = 0,$$

де  $\rho_{xy}$  – коефіцієнт парної кореляції, визначений для генеральної сукупності двовимірної величини  $(X, Y)$ .

Перевірку значущості здійснюють зіставленням табличного і розрахункового значень критерію Стюдента (англ. *Student* – псевдонім Уільяма Сіли Госсета, англ. *William Sealy Gosset*), так званої  $t$ -статистики.

Розрахункове значення визначається за формулою

$$t = r \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}}.$$

Параметр  $t$  відповідає  $t$ -розподілу Стюдента. Знайдене за формулою  $t$  зіставляють із табличним значенням  $t_{N-2, \alpha}$ , перевіряючи умову  $t < t_{N-2, \alpha}$ . (критичні значення критерію Стюдента наведено у дод. 7.). Якщо умова виконується, то гіпотезу  $H_0$  приймають. Це означає, що  $r_{xy}$  не можна вважати істотним, тобто лінійний зв'язок не можна визнати суттєвим.

### 8.4.3. Основи регресійного аналізу

У разі існування зв'язку між випадковими величинами, то доцільно визначити форму залежності між ними, тобто, створити модель об'єкту (наприклад, технологічного процесу). Цей етап кореляційного аналізу дуже важливий як при розробці систем керування технологічними процесами різних галузей виробництва, так і в інших сферах життєдіяльності людини.

Регресійний аналіз передбачає послідовне розв'язування задач:

- створення математичної моделі об'єкту у вигляді регресійного рівняння за отриманими експериментальними даними;
- аналіз цієї моделі.

Повернемося до розглянутої раніше залежності (8.5).

Це рівняння називають рівнянням регресії  $Y$  на  $X$ ; функцію  $f(x)$  називають регресією  $Y$  на  $X$ , або функцією відгуку, її графік – лінією регресії  $Y$  на  $X$ .

Аналогічно визначають  $M_{y|x}$  і залежність  $M_{x|y} = \varphi(y)$ . Якщо обидві функції  $f(x)$  і  $\varphi(y)$  лінійні, то залежність називають лінійною, у противному випадку – нелінійною.

Коли різноманітні значення  $X$  і відповідні їм значення  $Y$  спостерігалися по одному разу, немає потреби використовувати поняття умовної середньої, а тому шукане рівняння (8.3) можна записати так

$$\hat{y} = f(x),$$

де  $\hat{y}$  – величина  $Y$ , розрахована за моделлю.

У подальшому цю форму запису поширимо як загальну для всіх випадків досліджень.

Структура регресійної моделі, як правило, не відома, в кращому випадку існують певні дані про можливий клас структур. Тому моделювання об'єктів регресійними рівняннями відбувається у два етапи:

- структурна ідентифікація;
- параметрична ідентифікація.

*Структурна ідентифікація* моделі повинна визначити які чинники й у якій формі повинні входити до регресійної функції. Якщо  $Y$  залежить тільки від одного  $X$ , то рівняння називається рівнянням парної регресії. Якщо чинників декілька, то мова йде про рівняння множинної регресії.

Приклади лінійних рівнянь

$$\hat{y} = a_0 + a_1x;$$

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k.$$

Рівняння регресії можуть бути і нелінійними за формою, наприклад:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_2 + b_4x_1x_3;$$

$$\hat{y} = a_0 + a_1e^{x+1}.$$

Величини  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  і т. д. називають *коефіцієнтами (параметрами)* регресії; чинники  $x_i$ , які формують множину значень  $X$ , називаються *факторами*.

Розрахунок коефіцієнтів рівняння складає зміст *параметричної ідентифікації* моделі. Визначимо параметри лінійного регресійного рівняння  $\hat{y} = a_0 + a_1x$ . Для цього проведемо  $N$  незалежних дослідів, з яких отримаємо  $N$  пар чисел. Результати дослідів звичайно наводять у формі таблиці (див. табл. 8.6):

Таблиця 8.6. Результати дослідів для змінних  $X$  та  $Y$

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_N$
$Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_N$

Знайдені пари чисел можна розглядати як випадкову вибірку з генеральної сукупності всіх можливих значень випадкових величин  $X$  та  $Y$ . Рівняння регресії, які отримано за такими даними, називають *вибірковими*.

Підберемо параметри  $a$  й  $b$  так, щоб сума квадратів відхилень значень, що спостерігаються ( $y_i$ ), від розрахункових ( $\hat{y}$ ) була мінімальною, тобто

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (8.6)$$

Метод розрахунку  $a$  й  $b$ , заснований на такій вимозі, називають **методом найменших квадратів**.

Розкриємо  $\hat{y}$  у наведеному вище функціоналі (8.4):

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Для відшукування мінімуму функціонала  $Q(a, b)$ , дорівняємо його частинні похідні по  $a$  й по  $b$  до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i) = 0; \\ \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

Розкриємо знаки сум і винесемо коефіцієнти  $a$  та  $b$  за ці знаки:

$$\begin{cases} a \cdot N + b \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i = 0; \\ a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N y_i x_i = 0. \end{cases}$$

Перенесемо за знаки рівностей управо члени рівнянь, що не містять коефіцієнтів (далі для зручності границі підсумовування опускаємо):

$$\begin{cases} a \cdot N + b \sum x_i = \sum y_i; \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum y_i x_i. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо параметри  $a$  й  $b$ :

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad b = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

*Приклад 8.3.* Знайти параметри лінійного регресійного рівняння за даними п'яти ( $N = 5$ ) спостережень.

*Розв'язання.* Складемо розрахункову табл. 8.7.

Таблиця 8.7. Таблиця значень для розрахунку параметрів моделі між  $X$  та  $Y$

$X$	$Y$	$X^2$	$XY$
1,0	1,25	1,0	1,250
1,5	1,40	2,25	2,100
3,0	1,50	9,0	4,500
4,5	1,75	20,25	4,875
5,0	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Підставимо отримані дані у вирази для розрахунку параметрів:

$$a = \frac{57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 1,024; \quad b = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{62,5} = 0,202.$$

Запишемо шукане рівняння регресії:

$$\hat{y} = 1,024 + 0,202x.$$

Щоб одержати уяву про те, наскільки добре розраховані за цим рівнянням значення  $\hat{y}_i$  узгоджуються з тими, які спостерігалися впродовж часу досліджень  $y_i$ , знайдемо відхилення ( $\hat{y}_i - y_i$ ). Отримані розрахунки занесемо у таблицю 8.8.

Таблиця 8.8. Результати вимірювань  $Y$  і його розрахунків за моделлю

$X$	$\hat{Y}$	$Y$	$\hat{Y} - Y$
1,0	1,226	1,25	-0,024
1,5	1,327	1,40	-0,073
3,0	1,630	1,50	0,13
4,5	1,933	1,75	0,083
5,0	2,034	2,25	-0,216

Досить великі відхилення пояснюються або малою кількістю спостережень, або нелінійною формою залежності між  $Y$  і  $X$ .

Між коефіцієнтом парної кореляції і коефіцієнтом лінійної регресії при факторі  $X$  існує залежність, яка стосовно до вибірових оцінок може бути подана в такий спосіб

$$b = rS_y/S_x \quad \text{чи} \quad r = S_x/S_y.$$

Після отримання регресійної моделі перевіряють її **адекватність**, тобто відповідність її поведінки поведінці реального про'єкту у проведених дослідях.



Тільки адекватну модель можна використовувати для дослідження властивостей об'єктів моделювання й оптимізації їх роботи.

Оцінка адекватності здійснюється на основі дисперсійного аналізу двома способами.

При *першому способі* порівнюються такі дисперсії:

- дисперсія, обумовлена розсіюванням значень  $Y$  навколо лінії регресії (залишкова, адекватності):

$$S_{ad}^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 / [N - (M + 1)],$$

де  $M$  – кількість коефіцієнтів у моделі;  $S_y^2$  – дисперсія випадкової величини  $Y$  відносно її середньої.

Якщо виконується умова  $S_{ad}^2 \geq S_y^2$ , то регресійну модель не можна визнати адекватною експериментальним даним. У протилежному випадку треба перевірити основну ( $H_0$ ) та альтернативну ( $H_1$ ) гіпотези:

$$H_0: \sigma_{ad}^2 = \sigma_y^2;$$

$$H_1: \sigma_{ad}^2 < \sigma_y^2.$$

Для перевірки використаємо критерій Фішера.

Розрахункове значення  $F$ -критерію визначають залежностями:

$$F = \frac{S_y^2}{S_{ad}^2}; \left\{ \frac{N-1}{N-(M+1)} \right\}.$$
$$F = \frac{\Sigma(y_i - M_y)^2 / (N-1)}{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 / (N-(M+1))}.$$

У фігурних дужках тут і далі будемо показувати ступені вільності дисперсій чисельника та знаменника, які треба використовувати при пошуку табличного значення критерію Фішера.

Якщо  $F > F_{N-1, N-(M+1), \alpha}$ , то гіпотезу  $H_0$  відкидають, модель можна вважати адекватною експериментальним даним. Цей спосіб передбачає використання однієї вибірки значень випадкових величин  $X$  та  $Y$ .

При *другому способі* дисперсія  $S_y^2$  характеризує розсіювання не у вибірці в цілому, як в першому способі, а у так званій *одній точці* вибірки. Під цим виразом розуміють дослід при однакових значеннях входів (факторів) об'єкта. Одержання даних у таких умовах називається *паралельними* або *повторними дослідом*. Варто мати на увазі, що повторні дослід повинні виконуватися за наступним правилом. Наприклад, потрібно зробити повторні дослід при значеннях вхідних змінних  $X_1$  ( $X_1$  – вектор значень, тобто набір значень всіх факторів в певний момент часу). Для цього після виміру  $Y$  при  $X = X_1$ , треба перейти до іншого вектору входів  $X = X_2$ , тобто змінити якісь значення вхідних змінних, а потім - знову повернутися до умови  $X = X_1$  і т. д. Багаторазові виміри  $Y$  при тому самому  $X = X_i$  без переходів на інші рівні вважають одним дослідом. Такі ж паралельні дослід можуть проводитись і для інших векторів  $X$  ( $X_2, X_3, \dots$ ).

Нехай є такі результати спостережень:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, ..., y_{1N_1} \rightarrow \text{npu } X = X_1; \\ y_{21}, y_{22}, ..., y_{2N_2} \rightarrow \text{npu } X = X_2; \\ ..... \\ y_{U1}, y_{U2}, ..., y_{UN_L} \rightarrow \text{npu } X = X_U. \end{array} \right.$$

Кількість спостережень у всіх паралельних дослідях,  $N_{re}$  дорівнює

$$N_{pe} = \sum_{u=1}^U R_u,$$

де  $U$  - кількість рівнів вектора  $X$ , при яких виконувалися паралельні дослідження (часто  $U$  називають кількістю серій паралельних дослідів);  $R_u$  - кількість паралельних дослідів для рівня  $X_u$ .

Загальна дисперсія  $Y$  у паралельних дослідах, яку називають дисперсією відтворення, дорівнює

$$S_{vd}^2 = \frac{\sum_{u=1}^U \sum_{p=1}^{R_u} (y_{pu} - M_{Yu})^2}{N_{vd}},$$

де  $M_{Yu}$  – оцінка математичного сподівання  $Y$  в  $u$ -й серії паралельних дослідів;  
 $N_{vd}$  – кількість степенів свободи дисперсії відтворення:

$$N_{vd} = \sum_{u=1}^U (R_u - 1) = \sum_{u=1}^U R_u - U.$$

Вибіркові  $S_{vd}^2$  і  $S_y^2$  є оцінками  $\sigma_y^2$  незалежно від того, чи коректна модель.  
 Перевіримо гіпотези

$$H_0: \sigma_{ad}^2 = \sigma_{vd}^2;$$

$$H_1: \sigma_{ad}^2 > \sigma_{vd}^2.$$

Розрахункове значення критерію Фішера цього разу визначають за формулою

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_{vd}^2}; \left\{ \frac{N - (M + 1)}{\sum_{u=1}^U R_u - U} \right\}.$$

Якщо виконується умова

$$F > F_{N-(M+1), \sum_{u=1}^U R_u - U, \alpha},$$

то варто відкинути  $H_0: \sigma_{ad}^2 = \sigma_{vd}^2$  і вважати, що отримана модель не адекватна експериментальним даним.

*Приклад 8.4.* Нехай водневий показник  $pH$  рідини в баці і витрата одного з вхідних матеріальних потоків  $G$  підчас експериментів набували значень, наведених у табл. 8.9.

Треба розрахувати коефіцієнт парної кореляції між  $X$  і  $Y$  та оцінити тісноту лінійного зв'язку.

Таблиця 8.9. Експериментальні дані для прикладу 8.4

$pH(Y)$	6,7	6,9	7,2	7,3	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4
$G(X)$	2,8	2,2	3,0	3,5	3,2	3,7	4,0	4,8	6,0	5,4	5,2	5,4	6,0	9,0

*Розв'язання.*

$$M_y = (6,7 + 6,9 + 7,2 + \dots + 12,4)/14 = 132,9/14 = 9,49;$$

$$M_x = (2,8 + 2,2 + 3,0 + \dots + 9,0)/14 = 64,2/14 = 4,59;$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14} (y_i - M_y)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(6,7 - 9,49)^2 + (6,9 - 9,49)^2 + (7,2 - 9,49)^2 + \dots + (12,4 - 9,49)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{52,35}{13}} = \sqrt{4,03} \cong 2,01.$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14} (x_i - M_x)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2,8 - 4,59)^2 + (2,2 - 4,59)^2 + (3 - 4,59)^2 + \dots + (9 - 4,59)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{40,86}{13}} = \sqrt{3,14} \cong 1,77.$$

$$\sum_{i=1}^{14} (x_i - M_x)(y_i - M_y) = (6,7 - 9,49)(2,8 - 4,59) + (6,9 - 9,49)(2,2 - 4,59) +$$

$$+ (7,2 - 9,49)(3,0 - 4,59) + \dots + (12,4 - 9,49)(9,0 - 4,59) = 43,62.$$

$$r = 43,62 / (13 \cdot 2,01 \cdot 1,77) = 0,943.$$

Оцінімо значущість цього коефіцієнта, розрахувавши спочатку значення критерію Стюдента за даними експерименту:

$$t = \frac{0,943\sqrt{14-2}}{\sqrt{1-0,943^2}} = \frac{0,943 \cdot 3,46}{\sqrt{1-0,89}} = 9,89$$

Далі визначимо табличне значення цього критерія для двосторонньої критичної області:  $t_{12, 0.05} = 2,18$ .

Оскільки  $t > t_{12, 0.05}$ , то варто визнати коефіцієнт кореляції значущим.

*Приклад 8.5.* У табл. 8.10 наведено експериментальні дані ( $X$  – витрата продукту,  $Y$  – температура у технологічному апараті). Отримати регресійну модель  $\hat{y}_i = f(x)$ .

Таблиця 8.10. Експериментальні дані та дані для дослідження моделі для прикладу 8.5

№ екпе- рим.	Витрата продукту, $X$	Температура, $Y$	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - M_y)^2$
1	79	28,0	27,79	0,04	18,84
2	70	21,0	19,44	2,43	7,08
3	80	27,7	28,72	1,25	15,52
4	71	16,2	20,37	17,37	55,65
5	77	29,7	25,94	14,17	36,48
6	77	26,8	25,94	0,75	9,86
7	84	30,2	32,43	4,55	44,09
8	66	15,7	15,73	0	63,36
9	74	25,5	23,15	5,51	3,39
10	67	15,8	16,66	0,73	61,78
<b><math>\Sigma</math></b>	<b>745</b>	<b>236,6</b>	<b>160,94</b>	<b>46,73</b>	<b>316,05</b>

Роз'язання. Створимо кореляційне поле.

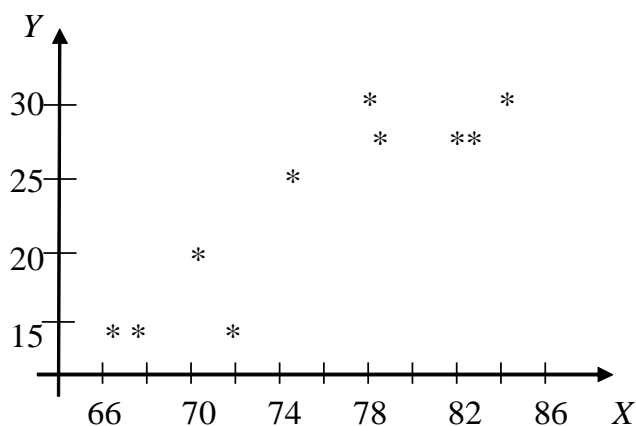


Рис. 8.3. Кореляційне поле до прикладу 8.5

Рис. 8.3 показує, що зв'язок близький до прямолінійного і можна використовувати лінійне рівняння регресії:  $\hat{y}_i = a + bx$ .

Скористаємось методом найменших квадратів.

$$\begin{cases} 10a + 745b = 236,6 \\ 745a + 55817b = 17917,7 \end{cases} \begin{matrix} : 10 \\ : 745 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + 74,5b = 23,66 \\ a + 74,92b = 24,05 \end{cases}$$

$$0,42b = 0,39;$$

$$b = 0,928[^\circ\text{C}/(\text{кг}/\text{с})];$$

$$236,6 = 10a + 745 \cdot 0,9286; \quad a = (236,6 - 691,8)/10 = -45,52 [^\circ\text{C}].$$

Регресійна модель процесу має вид

$$\hat{y}_i = -45,52 + 0,929x.$$

Після отримання моделі дуже корисно нанести її зображення на кореляційне поле.

Перевіримо адекватність цієї моделі. Розрахуємо спочатку дисперсію адекватності:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N-2} = \frac{46,73}{10-2} = 5,84.$$

Визначимо дисперсію випадкової величини  $Y$ :

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - M_y)^2}{N-1} = \frac{316,05}{10-1} = 35,1.$$

Оскільки  $S_{ad}^2 < S_y^2$ , то скористаємось критерієм Фішера

$$F = S_y^2 / S_{ad}^2 = 35,1 / 5,84 = 6,01.$$

З'ясуємо табличне значення критерію Фішера при рівні значущості  $\alpha = 0,05$ .

Воно дорівнює  $F_{9,8,0.05} = 3,39$ .

Виконується умова  $F > F_{9,8,0.05}$ . Таким чином, рівняння регресії має сенс, значення  $F$  показує, у скільки разів зменшується розсіювання експериментальних даних щодо отриманого рівняння в порівнянні з розсіюванням щодо середнього значення  $Y$ . Чим більше вибіркове  $F$  перевищує табличне значення критерію тим, ближче розташовані розраховані та експериментальні значення вихідної змінної  $Y$ .

*Приклад 8.6.* Одержати регресійну модель за даними, які наведено у табл. 8.11.

Таблиця 8.11. Експериментальні дані та дані для дослідження моделі для прикладу 8.6

№ експе- рим.	Тиск, $X$	Концентрація, $Y$	$\hat{y}$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - M_y)^2$
1	3	8	6,9	1,21	4
2	3	7	6,9	0,01	9
3	3	8	6,9	1,21	4
4	4	9	9,2	0,04	1

№ експе- рим.	Тиск, $X$	Концентрація, $Y$	$\hat{y}$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - M_y)^2$
5	4	8	9,2	1,44	4
6	4	9	9,2	0,04	1
7	5	10	10,83	0,69	0
8	5	9	10,83	3,35	1
9	5	11	10,83	0,03	1
10	6	12	11,77	0,05	4
11	6	10	11,77	3,13	0
12	7	12	11,98	0,04	4
13	7	13	11,98	1,04	9
14	7	12	11,98	0,04	4
15	8	15	11,5	12,25	25
16	8	12	11,5	2,25	4
17	9	11	10,37	0,45	1
18	9	10	10,37	0,14	0
19	10	8	8,49	0,24	4
20	10	7	8,49	2,22	9
<b><math>\Sigma</math></b>	<b>123</b>	<b>201</b>		<b>29,83</b>	<b>89</b>

*Розв'язання.* Сформуємо кореляційне поле (рис. 8.4).

Модель будемо шукати у вигляді нелінійного регресійного рівняння виду

$$\hat{y} = a + bx + cx^2.$$



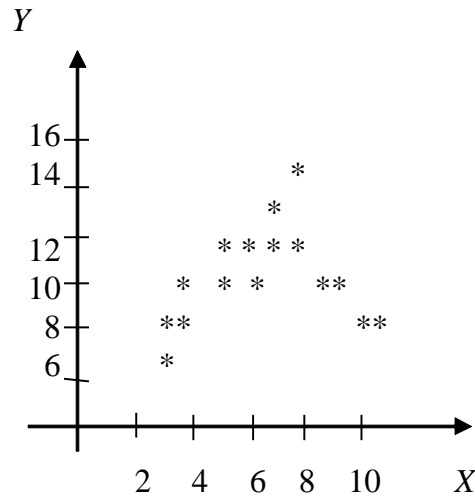


Рис. 8.4. Кореляційне поле до прикладу 8.6

Виконаємо параметричну ідентифікацію, скориставшись методом найменших квадратів:

$$Q = \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2 \rightarrow \min.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i - cx_i^2) = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i - cx_i^2) x_i = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i - cx_i^2) x_i^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} aN + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum y_i; \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum y_i x_i; \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20a + 123b + 859c = 201 \\ 123a + 859b + 6591c = 1269 \\ 859a + 6591b + 53995c = 8907 \end{cases}.$$

Модель об'єкта має вигляд

$$\hat{y} = -4,4001 + 4,8044x - 0,3515x^2.$$

Розрахуємо дисперсії адекватності і величини  $Y$ :

$$S_{ad}^2 = 29,83/(20 - 3) = 1,75; \quad S_y^2 = 89/(20 - 1) = 4,68.$$

Розрахуємо критерій Фішера

$$F = 4,68/1,75 = 2,67.$$

Табличне значення  $F_{19,17,0.05} = 2,96$ .

Оскільки  $F < F_{19,17,0.05}$ , то модель не можна визнати адекватною експериментальним даним. При такому результаті доцільно вибрати іншу структуру моделі.

Метод оцінювання параметрів для багатofакторної моделі нічим не відрізняється від вищевикладеного методу оцінювання для однофакторної моделі, тільки розрахунки стають громіздкими.

Оскільки спостереження за кожною змінною дає не одне, а ряд її значень, то зручно записувати кожен такий ряд за допомогою вектора, а сукупність усіх незалежних змінних - за допомогою матриці.

Уведемо позначення, що існують у матричній формі запису:

$B = (b_j)$  - вектор параметрів (коефіцієнтів);

$Y = (y_i)$  - вектор значень залежної змінної,  $i = \overline{1, N}$ ;

$X = (x_{ij})$  - матриця значень незалежних змінних розмірністю  $N \times M$ ,

де  $M$  - кількість незалежних змінних (факторів);

$e = (e_i)$  - вектор похибок.

Запишемо модель у матричній формі так

$$Y = X \cdot B + e.$$

Позначимо суму квадратів відхилень значень випадкової величини  $Y$ , розрахованих за моделлю, від експериментальних даних так, як у (8.4), буквою  $Q$  і запишемо її значення

$$\begin{aligned} Q &= \sum e_i^2 = e^T e = (Y - X \cdot B)^T (Y - X \cdot B) = \\ &= Y^T Y - B^T X^T Y - Y^T X B + B^T X^T X B. \end{aligned}$$

Тут і далі «т» – позначення операції транспонування матриці.

Оскільки

$$B^T X^T Y = Y^T X B,$$

то величину  $Q$  можна записати так

$$Q = Y^T Y - 2B^T X^T Y + B^T X^T X B.$$

Для визначення оптимальних параметрів моделі визначимо похідні  $Q$  по  $B$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = -2X^T Y + 2(X^T X)B.$$

Оскільки  $\frac{\partial Q}{\partial B} = 0$ , то з попереднього виразу можна отримати

$$X^T Y = X^T X B,$$

звідки

$$B = (X^T X)^{-1} \cdot (X^T Y).$$

Розглянемо наведені вище матриці детальніше.

Матрицю  $X$  запишемо у вигляді

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{M1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{M2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{MN} \end{vmatrix}$$

Таким чином, 1-й рядок матриці  $X$  – це значення всіх  $M$  вхідних змінних моделі у першому досліді,  $N$ -й – при  $N$ -му досліді.

Матриця  $Y$  – це вектор-стовпець:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Тут  $y_i$  – значення вихідної змінної при  $i$ -му досліді.

Виходячи з матриці  $X$ , матриця  $X^T X$  така

$$X^T X = \begin{pmatrix} N & \sum x_{1i} & \dots & \sum x_{Mi} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \dots & \sum x_{1i} x_{Mi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{Mi} & \sum x_{1i} x_{Mi} & \dots & \sum x_{Mi}^2 \end{pmatrix}.$$

Тут  $\sum x_{1i}$  – сума значень першого фактору у всіх експериментах;

$\sum x_{1i} x_{Mi}$  – сума парних добутків 1-го та  $M$ -го факторів у всіх дослідях.

Матриця  $X^T Y$  – це вектор-стовпець виду

$$X^T Y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{1i} \\ \dots \\ \sum y_i x_{Mi} \end{pmatrix},$$

де  $\sum y_i$  – сума значень вихідної змінної в усіх  $N$  дослідях;  $\sum y_i x_{1i}$  – сума парних добутків вихідної змінної і 1-го фактору у всіх експериментах.

Зворотна матриця  $(X^T X)^{-1}$  може існувати тільки тоді, коли вихідна матриця  $X^T X$  є квадратною та її визначник не дорівнює нулю. Якщо ж визначник матриці дорівнює нулю, то її вважають *особливою*.

Матриця може виявитися особливою, якщо деякі з нормальних рівнянь є лінійними комбінаціями інших. У цьому випадку фактично є менше рівнянь, ніж невідомих параметрів В.

Приклад 8.7. Розрахувати параметри лінійного рівняння регресії  $\hat{y} = f(x_1, x_2)$ . Результати дослідів наведені у табл. 8.12.

Таблиця 8.12. Експериментальні дані для прикладу 8.7

$N$ експе- рим.	$X_1$	$X_2$	$Y$
1	2	1	10
2	2	2	12
3	8	10	17
4	2	4	13
5	6	8	15
6	3	4	10
7	5	7	14
8	3	3	12
9	9	10	16
10	10	11	18

Матриці мають наступний вид:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix}; \quad Y = \begin{vmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \\ 13 \\ 15 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 16 \\ 18 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 2 & 6 & 3 & 5 & 3 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 10 & 4 & 8 & 4 & 7 & 3 & 10 & 11 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 60 \\ 50 & 336 & 398 \\ 60 & 398 & 480 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \begin{vmatrix} 0,40168 & -0,01676 & -0,03631 \\ -0,01676 & 0,16760 & -0,13687 \\ -0,03631 & -0,13687 & 0,12011 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 2 & 6 & 3 & 5 & 3 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 10 & 4 & 8 & 4 & 7 & 3 & 10 & 11 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \\ 13 \\ 15 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 16 \\ 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 137 \\ 756 \\ 908 \end{vmatrix}.$$

$$B = (X^T X)^{-1} (X^T Y) = \begin{bmatrix} 9,3872 \\ 0,1285 \\ 0,6117 \end{bmatrix}.$$

У результаті наведених обчислень одержуємо регресійну модель виду

$$\hat{y} = 9,3872 + 0,1285x_1 + 0,6117x_2.$$

Дослідження багатофакторної моделі виконують таким же чином, як і однофакторної.

### Контрольні запитання та завдання

1. Які параметри використовують для оцінювання тісноти кореляційного зв'язку? Напишіть формули для їх розрахунку за вибірковими даними.
2. Які розмірності та можливі діапазони значень мають ці параметри? Як перевірити їх значущість?
3. Для чого виконують структурну та параметричну ідентифікації?
4. Для чого використовують метод найменших квадратів? Застосуйте його для однофакторних лінійної та квадратичної моделі.
5. Як перевірити адекватність регресійної моделі?
6. Про що свідчить визнання моделі адекватною? Які подальші дії треба виконувати, якщо модель неможна визнати адекватною?
7. Як використовують матриці для параметричної ідентифікації? Навести приклад для однофакторної лінійної квадратичної, а також лінійної двофакторної моделі.

## **Список використаної та рекомендованої літератури до розділів 7 та 8**

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Москва : Высш. шк., 2006. 575 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва : Высш. шк., 2003. 479 с.
3. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посібник. Київ : ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с.
4. Медведєв М. Г., Пашенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник. Київ : Вид-во «Ліра-К». 2008. 536 с.
5. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник. Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 573 с.
6. Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник. Київ : ВД «Професіонал», 2007. 560 с.
7. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник. Полтава : «Довкілля-К», 2009. 500 с.
8. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ : ЦУЛ, 2010. 424 с.
9. Тичинська Л. М., Черепашук А. А. Теорія ймовірностей. Ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості : навч. посібник. Вінниця : ВНТУ, 2010. 112 с.
10. Математическая статистика / Под ред. А. М. Дина. Москва : Высш. шк., 1975. 398 с.
11. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва : Наука, 1979. 496 с.



12.Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. Киев : Высш. шк., 1990. 327 с.

13. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебн. пособие. Москва : Высш. шк., 2004. 404 с.

14.Новікова Л. В., Котляр Б. Д., Бичков В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ : Техніка, 1996. 184с.

15. Иванова В. М., Калинина В. Н., Нешумова Л. А., Решетникова И. О. Математическая статистика. Москва : Высш. шк., 2002. 368 с.

16. Спеціальні розділи математики: Теорія ймовірностей: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л. Д. Ярощук. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,5 Мбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 87 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/38459> (дата звернення: 20.02.2021).

17. Теорія ймовірностей у задачах автоматизації виробництва: Навчально – методичний посібник з курсу «Спеціальні розділи математики» / Уклад.: А.І. Жученко, В.В. Миленський, Л.Д. Ярощук.-К.:НТУУ «КПІ», 2008. – 70 с.

18. Четыркин Е. М., Калихман И. Л. Вероятность и статистика. Москва : Финансы и статистика, 1982. 319 с.

19. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики : навч. посібник. Київ : НМК, 1991. 252с.

## 9. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Теорія графів є одною з небагатьох областей математики, дата народження якої може бути вказана. Батьком теорії графів (так само як і топології) є швейцарський математик Леонард Ейлер (1707-1783).

Його перша робота з теорії графів, з'явилася в 1736 р. в публікаціях Петербурзької Академії наук, в якій він розв'язав тепер уже класичну задачу, яка називалася «задача про Кенігсбергські мости». Ейлер назвав свою роботу з проблеми Кенігсберзького моста прикладом *geometria situs* - «геометрії положення» [10].

.Місто Кенігсберг (зараз Калінінград) розташовано на берегах річки Прегель (Преголи) і двох островах. Різні частини міста були з'єднані семи мостами. По неділях городяни здійснювали прогулянки містом. Питання полягало у тому, чи можна здійснити прогулянку таким чином, щоб вийшовши з будинку, повернутися назад, проходячи тільки один раз по кожному мосту?

Схематична карта міста зображена на рис.9.1. Ейлер позначив кожную частину суші точкою (вершиною A, B, C, D), а кожен міст – лінією (ребром), що з'єднує відповідні точки. Вийшов «граф».

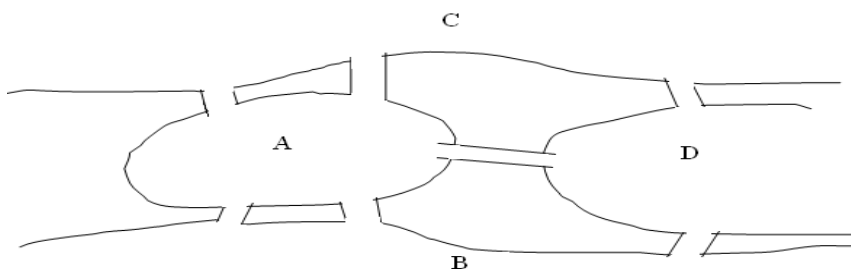


Рис. 9.1 Схематична карта міста

Ейлер показав, з якої б вершини ми не почали обхід, ми не зможемо обійти весь граф і повернутися назад, не проходячи ніякого ребра двічі.

Для того, щоб такий обхід існував, потрібно, щоб у кожній вершині графа було б стільки ребер, що входять до неї, скільки і виходять з неї, тобто в кожній вершині графа має бути парне число ребер.

Цей граф зображено на рис.9.2.

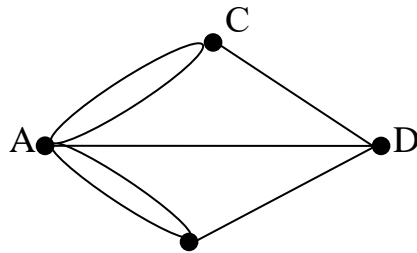


Рис. 9.2. Графічне представлення задачі про Кенігсбергські мости

## 9.1. Основні визначення та властивості графів

Припустимо, що футбольна команда вашого факультету бере участь у змаганнях і грає з командами інших факультетів. Загальна кількість команд дорівнює шести. Вашу команду позначимо буквою *A*, а інші команди – *B*, *C*, *D*, *E* і *F*. Через кілька тижнів після початку змагань виявилось, що деякі з команд вже зіграли одна з одною, наприклад:

A	→	C, D, F,
E	→	B, D, F,
B	→	C, E, F,
F	→	A, B, D, E.
C	→	A, B,
D	→	A, E, F

Це можна зобразити за допомогою геометричної схеми.

Кожну команду представимо точкою або маленьким кружечком і з'єднаємо відрізком ті пари точок, які відповідають командам, які вже зіграли одна з одною. Тоді для даного списку проведених ігор ми отримаємо схему, зображену на рис.9.3 [8].

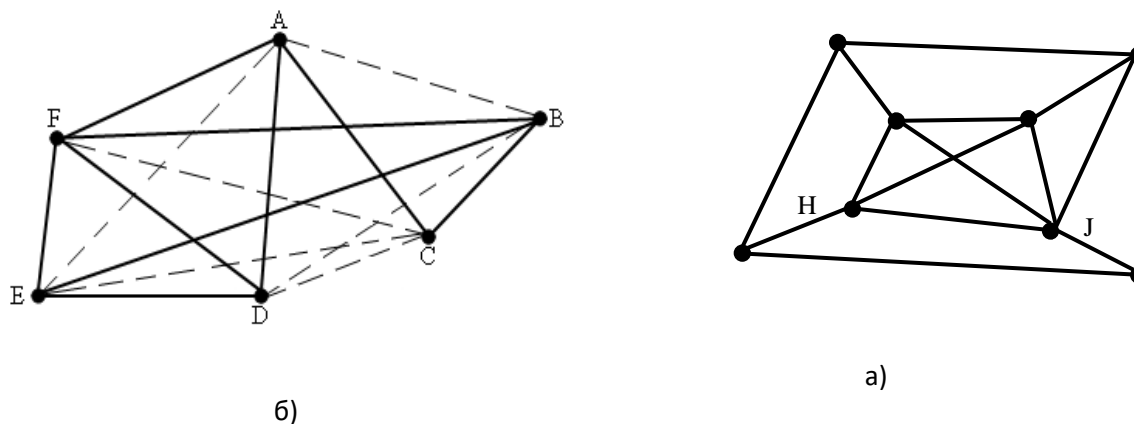


Рис.9.3. а).Граф, що описує ігри, штрихом позначено ще не зіграні ігри (повний граф);  
б). Граф змагань, ребрами позначено зіграні ігри

Схема такого виду називається *графом*. Вона складається з декількох точок  $A, B, C, D, E, F$ , званих *вершинами*, і декількох, що з'єднують ці вершини, відрізків, таких, як  $AB$  або  $EB$ , званих *ребрами* графа.

Кожну сукупність ігор будь-якого турніру можна уявити відповідним графом. Навпаки, якщо задано деякий граф, тобто фігура, що складається з точок - вершин, сполучених прямолінійними відрізками – ребрами, то його можна розглядати як схему такого змагання.

Як приклад можна розглянути граф, зображений на рис. 9.3.б)

Однією з основних причин пізнього народження теорії графів як самостійної теорії в межах математики, є те, що досі не досягнуто однаковості в термінології.

Не тільки окремі елементи, але і саме поняття "графа" визначається по різному.

*Визначення.* Простий неорієнтований граф  $G = (V, X)$  складається зі скінченної не пустої множини вершин  $V$ , яка містить  $v$  вершин, і множини ребер  $X$ , яка містить  $x$  неупорядкованих пар різних вершин з  $V$ .

$$G = (V, X)$$

*Визначення.* Графом називають множину вершин  $V$ , зв'язок між якими визначений множиною ребер  $X$ .

Кожну пару  $x = \{u, v\}$  вершин в  $X$  називають *ребром* графа  $G$  і кажуть, що  $x$  з'єднує  $u$  і  $v$ . Ми будемо писати  $x = uv$  і говорити, що  $u$  і  $v$  *суміжні вершини* (рис. 9.5). Іноді це позначається  $u \text{ adj } v$ .

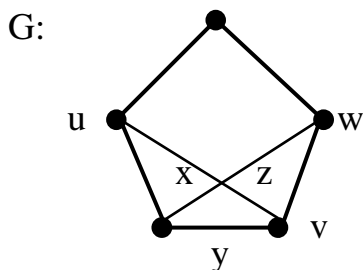


Рис. 9.4. Суміжність вершин і ребер

Якщо ми представим собі множину  $X$  ребер як множину пар суміжних вершин, то ми визначим тим самим не рефлексивне, симетричне відношення на множині  $V$ . Відсутність рефлексивності пов'язана з тим, що в простому графі нема петель, тобто ребер, два кінця яких знаходяться в одній вершині.

Симетричність відношення випливає з того, факту, що ребро, яке з'єднує вершину  $u$  з  $v$  з'єднує  $v$  з  $u$  (інакше кажучи ребра не орієнтовані, тобто не мають напрямку).

Вершина  $u$  і ребро  $x$  *інцидентні*, також як  $v$  і  $x$ .

*Інцидентність* - геометричний термін, який застосовується для позначення відношення приналежності ( $\in$ ) (зв'язку, з'єднання) між основними об'єктами геометрії: точками, прямими площинами.

Якщо вершина  $u$  є кінцем ребра  $x$ , то говорять, що вони *інцидентні*. Вершина  $u$  інцидентна ребру  $x$  і ребро  $x$  інцидентно вершині  $u$  (рис.9.4). В той час, як суміжність це відношення між *однорідними об'єктами* (вершинами), інцидентність, – відношення між *різними об'єктами* (вершинами і ребрами).

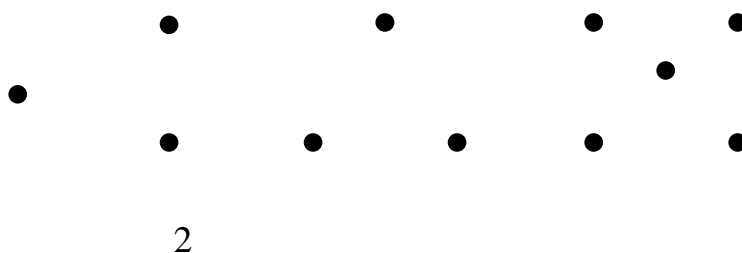
Якщо два різних ребра  $x$  та  $y$  інцидентні одній і тій самій вершині, то вони називаються *суміжними*. Таким чином на рис.9.4. вершини  $u$  і  $v$  суміжні, а вершини  $u$  і  $w$  ні; ребра  $x$  та  $y$  суміжні, а  $x$  и  $z$  ні.

## 9.2. Види графів

### 9.2.1. Неорієнтовані графи

Існують деякі спеціальні графи, що зустрічаються в багатьох додатках теорії графів. Будемо знову розглядати граф або наочну схему, що ілюструє перебіг спортивних змагань. До початку сезону, поки ще ніякі ігри не проводилися, на графі нема ніяких ребер. Такий граф складається з одних ізольованих вершин, тобто з вершин, не сполучених ніякими ребрами. Граф такого виду називається *нуль – графом* або *тривіальним*.

На рис.9.5. наведено такі графи для випадку, коли кількість команд, або вершин, дорівнює 1, 2, 3, 4 і 5. Ці нуль-графи зазвичай позначаються символами  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  і т.д., так що  $O_n$  – це нуль - граф з  $n$  вершинами, який не має ребер.



#### 9.5. Приклади нуль-графів

Розглянемо інший крайній випадок. Припустимо, що по закінченні сезону кожна команда зіграла по одному разу з кожною з інших команд. Тоді на відповідному графі кожна пара вершин буде сполучена ребром. Такий граф називається *повним* графом. На рис. 9.6. зображені повні графи з числом вершин  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Ми позначимо ці повні графи відповідно через  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ , так, що граф  $U_n$  складається з  $n$  вершин і ребер, які з'єднують різні пари цих вершин.

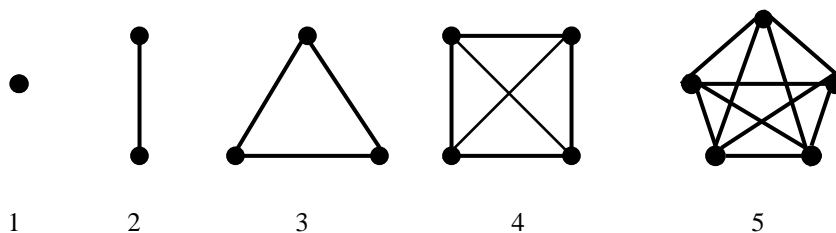


Рис. 9.6. Приклади повних графів

Цей граф можна уявити собі як  $n$ -кутник, в якому проведено всі діагоналі.

Маючи деякий граф, наприклад граф  $G$ , зображений на рис. 9.3, ми завжди можемо перетворити його в *повний* граф з тими ж самими вершинами, додавши відсутні ребра (тобто ребра, які відповідають іграм, що тільки будуть зіграні, ребра, зображені штрих-пунктиром). *Повний граф* і позначається як  $K_n$ , де  $n$  – число його вершин.

*Неорієнтованим* графом називається граф, якщо він немає петель і будь-яка пара вершин з'єднана не більш ніж одним ребром. Він же *простий* граф.

Граф, у якого петлі не допускаються, але пари вершин можуть з'єднуватися більш ніж одним ребром, називається *мультиграфом*. Ці ребра називаються *кратними* (рис.9.7 а)).

*Псевдографом* називається неорієнтований граф, у якого допускаються петлі й кратні ребра (рис.9.7.б)).

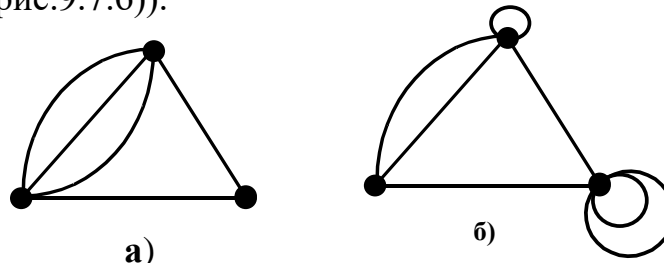


Рис.9.7. а) мультиграф; б) псевдограф.

Граф у задачі про «Кенігсбергські мости» є насправді мультиграфом.

### 9.2.2. Орієнтовані графи

Часто зв'язки між об'єктами характеризуються цілком певною орієнтацією. Наприклад, на деяких вулицях допускається односторонній рух, відношення між людьми можуть визначатися підпорядкованістю або старшинством.

Для вказівки напрямку зв'язку між вершинами графа відповідне ребро позначається стрілкою.

*Визначення.* Орієнтований граф, або *орграф*  $G=(V, X)$ , складається з скінченної непустої множини  $V$  вершин і заданого набору  $X$  впорядкованих пар різних вершин. Елементи з  $X$  називаються орієнтованими ребрами або *дугами*, елементи з множини  $V$  – *вузлами*. За визначенням у *орграфі* нема петель і кратних дуг.



Множина  $V$  може бути нескінченною. Ми обмежимося скінченими орієнтованими графами, і сам термін орграф завжди будемо відносити до скінченного графа.

Взагалі теорія графів розділяється на дві частини: теорію *орієнтованих графів* та теорію *неорієнтованих графів*. Обидві теорії існують самостійно, і кожна з них має свій клас об'єктів, в кожній використовуються свої правила.

Відповідно до визначення поняття *орієнтований граф* є еквівалентним поняттю відношення разом з тією множиною, де відношення визначено. Таким чином, теорію орієнтованих графів можна розглядати як продовження теорії відношень.

Коли дуга позначається впорядкованою парою, що складається з початкової та кінцевої вершин (тобто двома кінцевими вершинами дуги), її напрямок вважається заданим від першої вершини до другої.

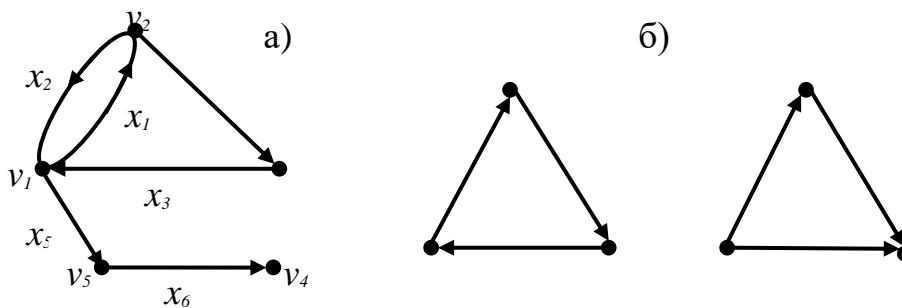


Рис.9.8. а) Орієнтований граф з 5 вершинами і 6 дугами, б) 2 останні графи спрямовані

Так, наприклад, на рис.9.8. а) позначення  $(v_1, v_2)$  відноситься до дуги  $x_1$ , а  $(v_2, v_1)$  до дуги  $x_2$ .

**Визначення.** *Спрямований граф* – це орграф, що не має симетричних пар (т.б.  $(u, v)$  і  $(v, u)$ ) орієнтованих ребер. На рис. 9.8. наведені всі оргграфи з 3 вершинами і 3 дугами, два останні з них спрямовані.

*Визначення.* Дводольний граф (або біграф)  $G$  – це граф, множину вершин якого можна розбити на дві підмножини  $V_1$  і  $V_2$  таким чином, що кожне ребро графа  $G$  з'єднує вершини з різних множин.

Якщо дводольний граф містить всі ребра, які з'єднують множини  $V_1$  і  $V_2$ , то він називається *повним* дводольним графом.

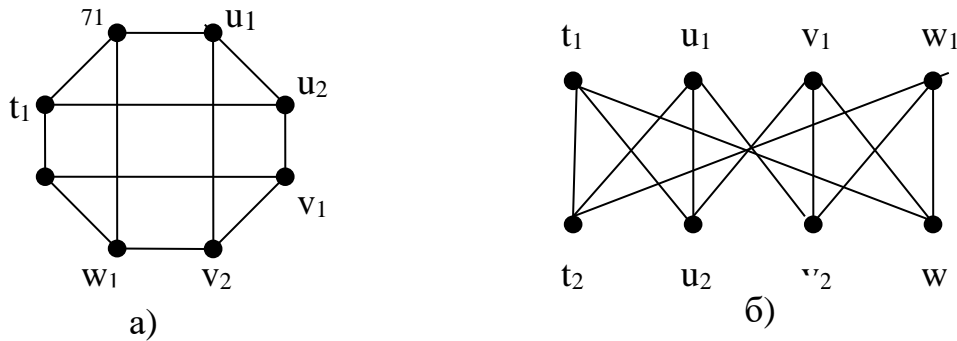


Рис.9.9 б) Дводольний граф

Повний дводольний граф у якого  $|V_1| = m$  і  $|V_2| = n$  позначається як  $K(m, n) = K_{m,n}$ . У графі  $K_{m,n}$  є  $m \times n$  ребер (рис.9.9. б)).

### 9.2.3. Елементи графів

Після визначення графів як цілісних об'єктів, дамо визначення різним складовим елементам графів.

Нехай задано граф  $G=(V,X)$ .

*Визначення.* Підграфом графа  $G$  називається граф, у якого всі вершини і ребра належать  $G$ .

*Визначення.* Остовним підграфом  $G_p$  графа  $G = (V, X)$  називається граф  $(V, X_p)$ , для якого  $X_p \subseteq X$ .

Таким чином, остовний підграф має таку ж кількість вершин, що і граф  $G$ , але множина ребер підграфа  $G_p$  є підмножиною множини ребер вихідного графа  $G$ , тобто це підграф графа  $G$ , що містить всі його вершини.

*Визначення.* Підграфом графа  $G$  породженим підмножиною вершин  $V_s \subseteq V$  називається граф  $G_s = (V_s, X_s)$ , для якого  $X_s = X \cap (V_s \times V_s)$ .

Отже, породжений підграф складається з підмножини вершин  $V_s$  вершин вихідного графа і всіх таких дуг (для орієнтованого) графа  $G$ , у яких кінцеві та початкові вершини належать підмножині  $V_s$ .

Якщо представити граф, вершинами якого є співробітники деякої організації, а ребрами – лінії зв'язку між ними, тоді граф, який представляє тільки найбільш важливі канали зв'язку даної організації є *остовним* підграфом; граф, який детально представляє лінії зв'язку тільки деякої частини цієї організації (наприклад, відділу), є *породженим* підграфом, а граф, який представляє тільки важливі зв'язки в межах відділу, є *підграфом*.

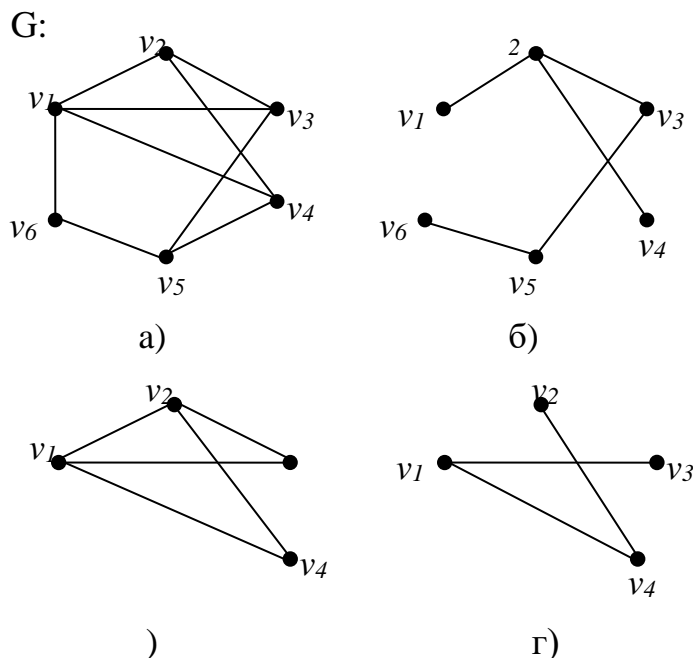


Рис. 9.10. а) граф  $G$ , б) остовний підграф, в) породжений підграф, г) підграф

На рис.9.10.в) показано *породжений* підграф графа, зображеного на рис.9.10.а), який має тільки вершини  $v_1, v_2, v_3, v_4$  і ребра, які їх зв'язують.

#### 9.2.4. Степінь графа

*Визначення.* Степеню вершини  $v_i$  в неорієнтованому графі  $G$  називається число ребер, інцидентних  $v_i$  і позначається  $d_i$  або  $\deg v_i$ .

Оскільки кожне ребро інцидентне двом вершинам, то в сумі степенів вершин графа кожне ребро рахується двічі. Таким чином ми приходимо до теореми, що є історично першою теоремою теорії графів і була сформульована Ейлером.

*Т е о р е м а .* Сума степенів вершин неорієнтованого графа  $G$  дорівнює подвоєному числу його ребер:

$$\sum \deg v_i = 2q$$

*Н а с л і д о к 1.* У будь-якому графі кількість вершин з непарними степенями парна.

Для орієнтованого графа число дуг, які мають вершину  $v_i$  як початкову, називається *напівстепенем виходу* вершини  $v_i$ , аналогічно, число дуг, у яких  $v_i$  є кінцевою вершиною, називається *напівстепенем заходу* вершини  $v_i$ .

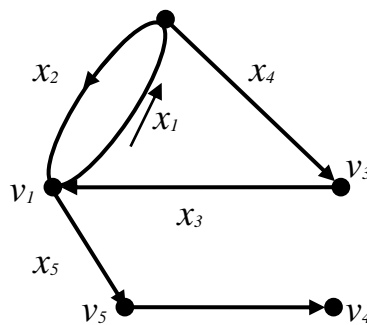


Рис. 9.11. Орієнтований граф  $G$

Таким чином, на рис.9.11. напівступінь виходу вершини  $v_l$  яку позначимо як  $d_0(v_l)$ , дорівнює  $|\Gamma(v_l)| = 2$ , і напівступінь заходу вершини  $v_l$  позначимо  $d_t(v_l)$ , дорівнює  $|\Gamma^{-1}(v_l)| = 2$ .

Очевидно, що сума напівстепенів заходу для всіх вершин графа, а також сума напівстепенів виходу всіх вершин дорівнює загальному числу дуг графа  $G$ , тобто

$$\sum_{i=1}^n d_0(v_i) = \sum_{i=1}^n d_t(v_i) = m,$$

де  $n$  – число вершин,  $m$  – число дуг орієнтованого графа.

Мінімальна степінь вершин позначається через  $\mindeg G$  або  $\delta(G)$ , максимальна степінь - через  $\maxdeg G = \Delta(G)$ . Якщо  $\delta(G) = \Delta(G) = r$ , то всі вершини мають однакову степінь і такий граф називається регулярним (або однорідним, Ортега) степені  $r$ . У цьому випадку говорять про степінь графа і пишуть  $deg G = r$  [3].

Якщо  $G$  – регулярний граф степені 1, то кожна його компонента зв'язності містить точно одне ребро. У регулярному графі степені 2 кожна компонента зв'язності – цикл. Перші цікаві по своїй структурі графи мають степінь 3 і називаються кубічними. З теореми Ейлера випливає наступне твердження.

### 9.3. Маршрути та зв'язність

У даному параграфі ми розглянемо основні структурні властивості графів. Однією з основних властивостей графа є властивість бути зв'язним. Але спочатку введемо певні позначення.

*Визначення.* Маршрутом у графі  $G$  називається послідовність вершин і ребер, що чергуються:  $v_0 x_1 v_1 x_2 v_2 x_3 v_3 x_4 \dots v_{n-1} x_n v_n$ .

Ця послідовність починається і закінчується вершиною і кожне ребро послідовності інцидентне двом вершинам.

Зазначений маршрут поєднує вершини  $v_o$  і  $v_n$ , його можна позначити як  $v_o v_1 v_2 v_4 \dots v_{n-1} v_n$ .

Маршрут *замкнутий*, якщо  $v_o = v_n$ , і *відкритий* в протилежному випадку.

Маршрут називається *ланцюгом* (trail), якщо всі його ребра різні.

Маршрут називається *простим* (елементарним) ланцюгом, якщо всі вершини (а значить, і всі ребра) різні.

Замкнутий ланцюг називається *циклом*.

Замкнутий маршрут називається *простим циклом*, якщо всі його  $n$  вершин різні і  $n \geq 3$ . Для ілюстрації маршрутів розглянемо граф, зображений на рис.9.12

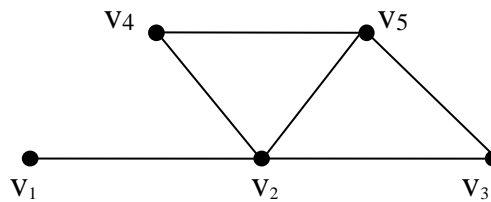


Рис.9.12. Граф для ілюстрації маршрутів

В даному графі

$v_1 v_2 v_5 v_2 v_3$  - маршрут, який не є ланцюгом,

$v_1 v_2 v_5 v_4 v_2 v_3$  - ланцюг, але не простий ланцюг,

$v_1 v_2 v_5 v_4$  - простий ланцюг,

$v_2 v_5 v_4 v_2$  - простий цикл.

Позначимо через  $C_n$  граф, що складається з одного простого циклу з  $n$  вершинами і через  $P_n$  простий ланцюг з  $n$  вершинами;  $C_3$  часто називають трикутником.

*Довжина маршруту* дорівнює кількості ребер у графі, причому кожне ребро вважається стільки разів, скільки воно зустрічається у даному маршруті.

*Обхват графа*  $G$  - це довжина найкоротшого простого циклу графа  $G$  і позначається  $g(G)$ .

*Оточення графа  $G$*  - довжина найдовшого простого циклу графа  $G$  позначається  $c(G)$ .

Відстанню між двома вершинами  $u$  і  $v$  графа  $G$  називається довжина найкоротшого простого ланцюга, що сполучає їх і позначається  $d(u, v)$ .

*Геодезичним ланцюгом* називається найкоротший простий  $(u - v)$  – ланцюг, довжина якого дорівнює  $d(u, v)$ .

*Діаметром* графа називається довжина найдовшого геодезичного ланцюга, яка позначається  $d(G)$ .

Граф на рис.9.12. має обхват  $g = 3$ , оточення  $c = 4$  і діаметр  $d = 2$ .

*Зв'язністю графа  $\chi = \chi(G)$*  називається найменше число вершин, видалення яких приводить до незв'язного або тривіального графу.  $\chi$  іноді називають вершинною зв'язністю [3].

*Теорема Уїтні (1932).* Простий граф називається  $k$ -зв'язним ( $k$  - connected), тоді і тільки тоді, коли між будь – якими двома його вершинами  $x$  і  $y$  існує  $k$  шляхів, які не мають спільних внутрішніх вершин.

*Вершинна зв'язність* (vertex connectivity) графа – це мінімальна кількість вершин, які треба видалити, щоб розділити цей граф на дві частини.

Тут «1 - зв'язний» означає просто «зв'язний», а «2 - зв'язний» - це те ж саме, що і «двозв'язний». Це окремий випадок теореми Уїтні. Граф з точкою з'єднання має вершинну зв'язність, яка дорівнює 1 або 0. Повний граф  $K_n$  не може бути незв'язним, оскільки б вершин з нього не видалять. А тривіальний граф можна отримати з  $K_n$  після видалення  $n-1$  вершини. Тому  $\chi(K_n) = n-1$ .

*Визначення.* Граф називається  $k$ - реберно зв'язним ( $k$  edge connected), якщо існує щонайменше  $k$  шляхів без спільних ребер, які з'єднують кожну пару вершин графа.

Або можна сказати, що граф називається *зв'язним*, якщо будь-яка пара його вершин з'єднана простим ланцюгом.

Максимальний зв'язний підграф графа  $G$  називається компонентою зв'язності, або просто компонентою графа  $G$ . Таким чином, незв'язний граф має принаймні дві компоненти зв'язності. Граф на рис.9.13. має 10 компонент [ 3].

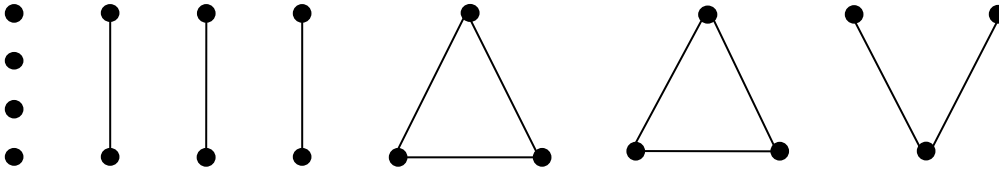


Рис. 9.13. Незв'язний граф і його 10 компонент

## 9.4. Матриці неорієнтованих графів

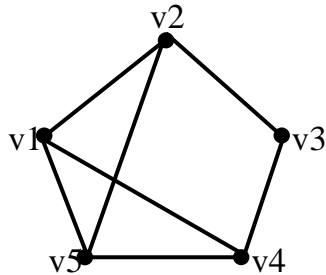
Неорієнтований граф повністю визначається або його *суміжностями*, або його *інциденціями*. Зазначену інформацію про граф зручно представляти в матричній формі. Часто ці матриці використовуються при виявленні певних властивостей графів.

### 9.4.1. Матриця суміжностей

Матрицею суміжностей  $A = \|a_{ij}\|$  неорієнтованого графа  $G$  з  $v$  вершинами називається  $(v \times v)$  – матриця, в якій  $a_{ij} = 1$ , якщо вершина  $v_i$  суміжна  $v_j$ , і  $a_{ij} = 0$  в іншому випадку. Таким чином, існує взаємно-однозначна відповідність між неорієнтованими графами з  $v$  вершинами і симетричними бінарними  $(v \times v)$  – матрицями з нулями по діагоналі (рис. 9.14).



Симетричність відношення в термінах матриці суміжності означає, що матриця  $A$  симетрична відносно головної діагоналі, а нереклексивність цього відношення дає на головній діагоналі нулі.



$A =$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	1	0	1	1
$v_2$	1	0	1	0	1
$v_3$	0	1	0	1	0
$v_4$	1	0	1	0	1
$v_5$	1	1	0	1	0

Рис.9.14. Граф і його матриця суміжностей.

Рядки та стовпці матриці відповідають вершинам графа, а її  $(ij)$ - елемент дорівнює числу кратних ребер, що зв'язують вершини  $v_i$  і  $v_j$ .

Матриця суміжності неорієнтованого графа завжди *симетрична*, а орграфа – у загальному випадку *несиметрична*.

Неорієнтованим ребрам відповідають пари ненульових елементів, симетричних щодо головної діагоналі матриці, дугам ненульові елементи матриці, а петлям – ненульові елементи головної діагоналі (граф Бержа).

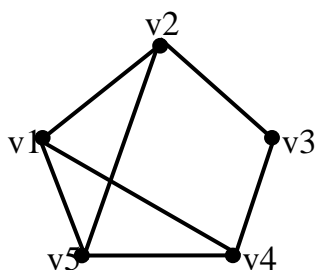
#### 9.4.2. Матриця інцидентності графа

Матрицею інцидентності  $A = \|a_{ij}\|$  графа  $G$  з  $v$  вершинами і  $x$  ребрами називається  $(v \times x)$  - матриця, в якій  $a_{ij} = 1$ , якщо вершина  $v_i$  інцидентна ребру  $x_j$ , і  $a_{ij} = 0$  в іншому випадку (рис.9.15).

треба відмітити для неорієнтованих графів:

- 1) Рядки матриці інцидентності відповідають вершинам, а стовпці - ребрам.

2) Нульовий рядок відповідає ізольованій вершині, а нульовий стовпчик – петлі.



$I =$

	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7
v1	1	0	0	0	1	0	1
v2	1	1	0	0	0	1	0
v3	0	1	1	0	0	0	0
v4	0	0	1	1	0	0	1
v5	0	0	0	1	1	1	0

Рис.9.15.. Матриця інцидентій графа G.

3) Кожен стовпчик матриці містить обов'язково 2 одиничних елемента (для орграфа ці елементи завжди мають різні знаки і дорівнюють відповідно 1 і  $-1$ ).

4) Кількість одиниць у рядку дорівнює степені відповідної вершини (для орграфа кількість позитивних одиниць визначає позитивну степінь, а кількість негативних одиниць - негативну степінь).

Слід зазначити, що нульовий стовпчик матриці лише вказує на наявність петлі, але не містить відомостей про те, з якою вершиною ця петля пов'язана.

## 9.5. Матриці орграфів

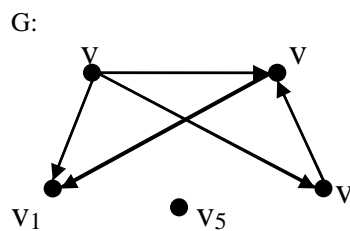
При розгляді орграфів (рис. 9.16.) розрізняють *позитивну* інцидентність (дуга виходить з вершини) і *негативну* інцидентність (дуга входить у вершину). У матриці інцидентій орграфа ненульовий  $ij$  – елемент дорівнює 1, якщо  $v_i$  – початкова вершина дуги  $x_j$ , і дорівнює  $-1$ , якщо  $v_i$  – кінцева вершина дуги  $x_j$ .

Крім матриці суміжності та матриці інцидентій з орграфом пов'язані ще три матриці – матриця *відстаней*, матриця *обходів* та матриця *досяжності*.

В матриці *досяжності*  $R$  елемент  $r_{ij}$  дорівнює 1, якщо вершина  $v_j$  досяжна з  $v_i$ , і дорівнює 0 в протилежному випадку. Це означає, що з вершини  $v_i$  можна досягнути вершину  $v_j$ .

В матриці *відстаней*  $(i,j)$ -й елемент дорівнює відстані від вершини  $v_i$  в вершину  $v_j$ . Якщо ж з  $v_i$  в  $v_j$  немає шляхів, то відповідний елемент вважаємо рівним нескінченності.

В матриці *обходів*  $(i,j)$ -й елемент дорівнює довжині самого довгого шляху від  $v_i$  в  $v_j$ , а якщо таких шляхів немає, то такий елемент вважаємо рівним нескінченності.



а)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

б)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

в)

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

г)

Рис.9.16..а) Приклад орграфу, б) матриця досяжності, в) матриця відстаней, г) матриця обходів графа G

Ефективних методів знаходження елементів матриці обходів не існує. Ця проблема пов'язана з деякими іншими задачами теорії графів, а саме – знаходження остовних циклів, розв'язок задачі про комівояжера.

## 9.6. Ізоморфізм графів

В перекладі з грецької мови «*іzos*» означає рівний, а «*морфі*»- вид, форма.

Для багатьох практичних задач важливим є розпізнавання ізоморфізму та ізоморфного вкладення складних структур, які задаються у вигляді графів. Зі змістовних міркувань ізоморфізм графів структур означає тотожне функціонування самих структур, що дає можливість в деяких випадках замінити одну структуру іншою, їй ізоморфною.

При зображенні геометричних графів є велика свобода в розміщенні вершин і у виборі форми, яка з'єднує їхні ребра. Тому може виявитися, що один і той же граф представляється різними накресленнями, розглядаючи які далеко не відразу можна виявити, що вони є зображеннями одного і того ж графа.

На рис.9.18. зображені 3 графа, які з геометричної точки зору абсолютно різні.

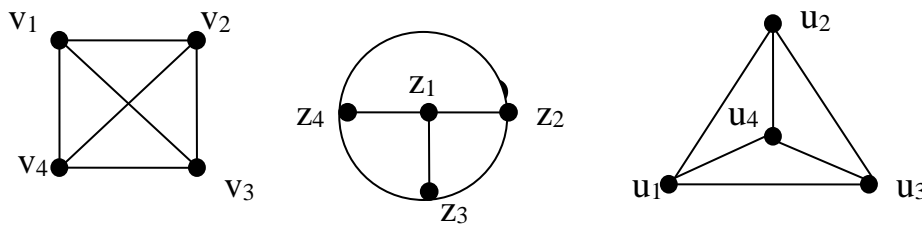


Рис.9.17. Ізоморфні графи

Тобто, будь-які два графи, які представляють одну і ту ж ситуацію будуть вважатись однаковими. Але по суті вони розрізняються лише накресленням, а відношення інцидентності (при відповідному позначенні вершин і ребер) для них однакові. Так, скажімо вершини  $v_1$  і  $v_4$  з'єднані ребром, відповідні їм вершини  $z_1$  і  $z_4$  та  $u_1$  і  $u_4$ , також з'єднані ребром і навпаки.

Можна сказати, що ізоморфні графи, це один і той же граф, у якому вершини названі по іншому.

*Визначення.* Два графа  $G$  і  $H$  ізоморфні ( $G \sim H$ ) або ( $G = H$ ), якщо між множинами вершин існує взаємно-однозначна відповідність, що зберігає суміжність.

*Визначення.* Два графа називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфне відображення одного з цих графів на інший.

*Визначення.* Ізоморфним відображенням одного неорієнтованого графа на інший називається взаємно-однозначне відображення вершин і ребер одного графа відповідно на вершини і ребра іншого графа, при якому зберігається відношення інцидентності.

Наприклад:  $G_1$  і  $G_2$  (рис. 9.18.а) ізоморфні при відповідності  $v_i \leftrightarrow u_i$  і  $G_3$  (рис.9.18.б) ізоморфний кожному з них. Очевидно, що ізоморфізм є відношення еквівалентності на графах.

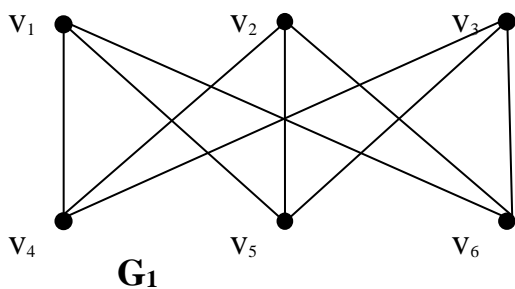


Рис.9.18 а) Ізоморфні графи  $G_1$  та  $G_2$

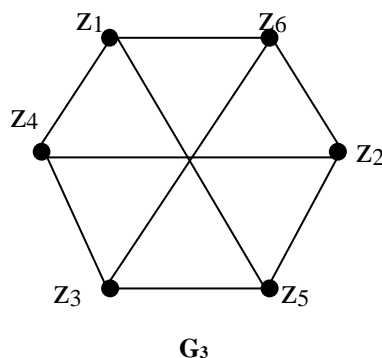


Рис.9.18.б) Граф  $G_3$  ізоморфний двом попереднім

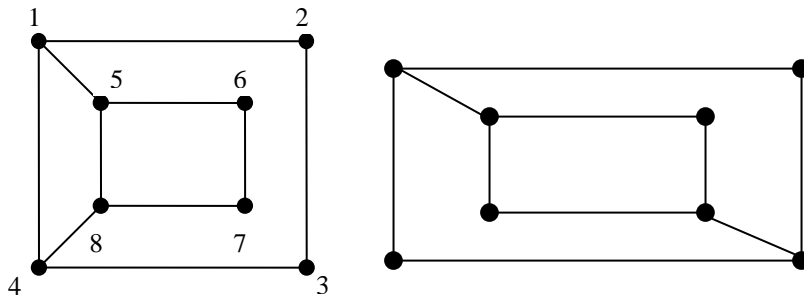


Рис.9.19. Неізоморфні графи

На рис.9.19. зображені не ізоморфні графи. На першому графі (рис. 9.19) є послідовність з 8 суміжних ребер, що повертаються до вихідної вершини, у той час як на другому графі (рис. 9.19) такої послідовності немає, як би ми не позначали вершини 2-го графа, ми не зможемо для кожної пари сполучених ребром вершин одного графа вказати у другому відповідну пару вершин, також сполучену ребром.

Числова характеристика, однакова для всіх ізоморфних графів, називається *інваріантом* графа. Так для графів з числом вершин менших або рівних чотирьом, кількість вершин  $V(G)$  та кількість ребер  $X(G)$  вважаються повним інваріантом графа  $G$ .

Для графів, зображених на рис. 9.18, інваріантами є а) кількість вершин, б) кількість ребер, в) кількість вершин конкретної степені.

Але на сьогоднішній день невідомо ніякої повної системи інваріантів, які б визначали граф з точністю до ізоморфізму.

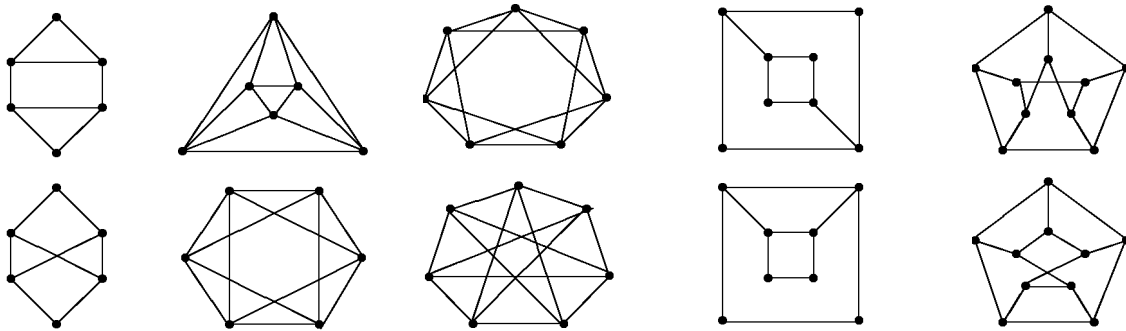
### Контрольні запитання та завдання

1. Опишіть матриці суміжності повних графів, незв'язних графів, дводольних і циклічних графів. Що можна сказати про матрицю суміжності простого графа та його доповнення?

2. Нехай  $G_n$  – граф з множиною вершин  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , в якому вершини  $v_i$  і  $v_j$  суміжні тоді і тільки тоді, коли  $i$  і  $j$  взаємно прості. Зобразіть графи  $G_4$  і  $G_8$  і знайдіть їх матриці суміжності. Покажіть, що якщо  $m < n$ , то  $G_m$  є підграфом  $G_n$ .

3. Матрицею інциденцій простого графа з множиною вершин  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  і множиною ребер  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  називається матриця  $A = (a_{ij})$  розміром  $m \times n$ , у якої  $a_{ij} = 1$ , якщо вершина  $v_j$  інцидентна ребру  $x_i$ , і  $a_{ij} = 0$  в протилежному випадку. Докажіть, що сума чисел, які стоять в будь-якому стовпці, дорівнює степені вершини, яка відповідає вибраному стовпчику. Що можна сказати про суму чисел, що стоять в будь-якому рядку? Покажіть, як можна визначити матрицю інциденцій загального графа?

4. Покажіть, що два графа, що зображені на рисунку є ізоморфні.



5. В графі Петерсона знайдіть а) довжини 4; б) цикли довжини п'ять, шість, вісім і дев'ять.

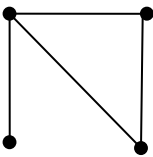
6. Показати, що ранг матриці інциденцій  $B$  зв'язного графу з  $n$  вершинами дорівнює  $n-1$ .

7. Відновити граф  $G$  по його підграфам  $G_i = G - v_i$ , де  $G_1 = K_4 - x$ ,  $G_2 = P_3 \cup K_1$ ,  $G_3 = K_{1,3}$ ,  $G_4 = G_5 = K_{1,3} + x$ .

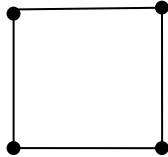
8. Накресліть  $n$ -вершинний граф, у якого матриця суміжностей  $A$  має таку властивість:  $a_{ij} = 1$ , якщо  $i + j = n + 1$ , і дорівнює 0 для решти  $a_{i,j}$ .

9. В деякій області система авіаліній побудована таким чином, що будь-яке місто з'днане авіалініями не більш ніж з трьома іншими містами, і з будь-якого міста в інше можна перелетіти, зробив не більш однієї пересадки. Яке найбільше число міст може буди в цій області.

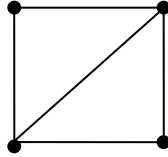
10. Треба підібрати підходящі позначення вершин, для кожного з графів на рисунку. і показати відповідну матрицю суміжності із перелічених нижче.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 9.7. Операції над графами

Нехай графи  $G_1$  і  $G_2$  мають непересічні множини вершин  $V_1$  і  $V_2$  і множини ребер  $X_1$  і  $X_2$ , які не перетинаються .

*Видалення вершини  $v_i$  з графа  $G$  призводить до підграфа  $G - v_i$  , що містить всі вершини графа  $G$ , за винятком  $v_i$ , і всі ребра графа  $G$ , не інцидентні  $v_i$ . Іншими словами,  $G - v_i$  є максимальний підграф графа  $G$ , що не містить  $v_i$  (рис.9.20).*

*Видалення ребра  $x_j$  з  $G$ , призводить до остовного підграфа, що містить всі ребра графа  $G$ , за винятком  $x_j$ . Тобто  $G - x_j$  є максимальний підграф графа  $G$ , що не містить  $x_j$  (рис.9.20).*



З іншого боку . якщо  $v_i$  і  $v_j$  не суміжні в  $G$ , то додавання ребра  $v_i v_j$  утворює *найменший підграф* графа  $G$ , що містить ребро  $v_i v_j$  (рис. 9.20).

Нехай графи  $G_1$  і  $G_2$  мають непересічні множини вершин  $V_1$  і  $V_2$  і множини ребер  $X_1$  і  $X_2$ , які не перетинаються. З'єднання графів, яке позначається  $G_1 + G_2$  –

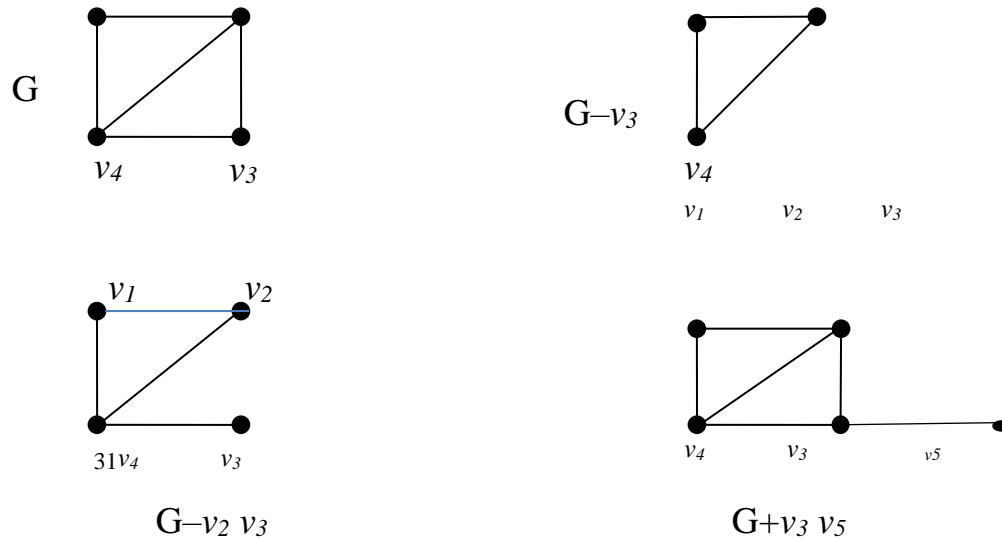


Рис. 9.20. Графи з видаленою вершиною або видаленням ребром.

складається з  $G_1 \cup G_2$  і всіх ребер, що з'єднують  $V_1$  і  $V_2$ . Ця операція показана на рис.9.20.

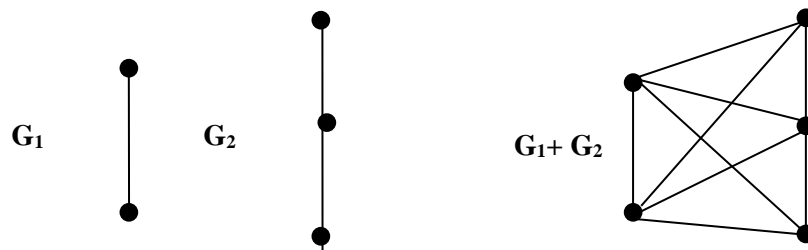
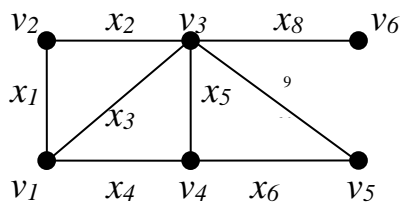
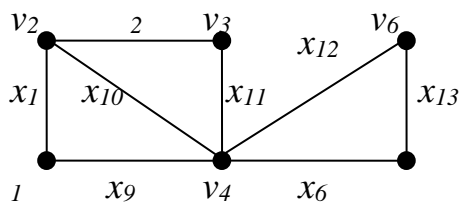


Рис.9.21. З'єднання двох графів[3]

*Визначення.* Об'єднанням графів  $G_1$  та  $G_2$ , позначається як  $G_1 \cup G_2$ , називається такий граф  $G_3=(V_1 \cup V_2, X_1 \cup X_2)$  множиною вершин якого є (Рис. 9.22. д)).



а)  $G_1$

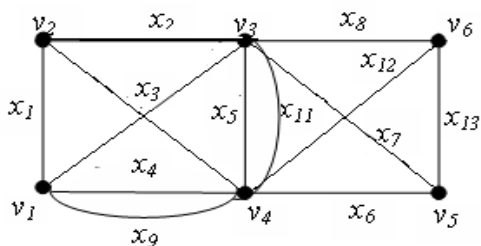


б)  $G_2$

Матриці суміжності графів  $G_1$  та  $G_2$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$		1	1	1		
$v_2$	1		1			
$v_3$	1	1		1	1	1
$v_4$	1		1		1	
$v_5$			1	1		
$v_6$			1			

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$		1		1		
$v_2$	1		1	1		
$v_3$		1		1		
$v_4$	1	1	1		1	1
$v_5$				1		1
$v_6$				1	1	



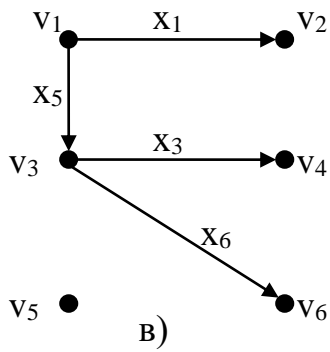
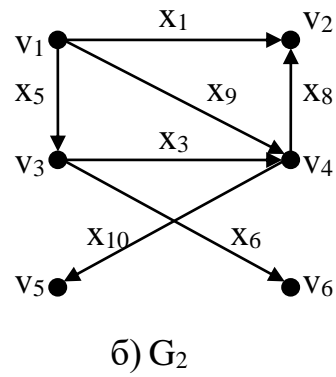
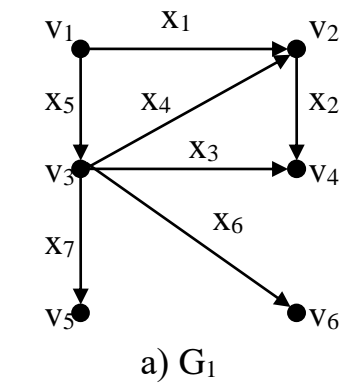
д)

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$		1	1	1		
$v_2$	1		1	1		
$v_3$	1	1		1	1	1
$v_4$	1	1	1		1	1
$v_5$			1	1		1
$v_6$			1	1	1	

е)

Рис.9.22. а) граф  $G_1$ , б) граф  $G_2$ , в) матриця суміжності графа  $G_1$ , г) матриця суміжності графа  $G_2$ , д) об'єднання графів, е) матриця суміжності об'єднаних графів

*Визначення.* Перетином двох графів  $G_1$  і  $G_2$ , позначається як  $G_1 \cap G_2$ , називається граф  $G_4 = (V_1 \cap V_2, X_1 \cap X_2)$ , множина вершин якого складається лише з тих вершин, які є одночасно в  $G_1$  і  $G_2$ , а множина ребер складається з тих ребер, які одночасно є і в  $G_1$  і в  $G_2$ . На рисунку 9.23.в) показано перетин двох орієнтованих графів.



г)

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1		1	1			
v2						
v3				1		1
v4						
v5						
v6						

Рис. 9.23. Перетин двох графів: а) граф  $G_1$ , б) граф  $G_2$ , в) граф  $G_1 \cap G_2$ , г) матриця суміжності графа  $G_1 \cap G_2$ .

Щоб визначити *добуток*  $G_1 \times G_2$  двох графів розглянемо дві вершини  $u = (u_1, u_2)$  і  $v = (v_1, v_2)$  з  $V = V_1 \times V_2$ . Вершини  $u$  і  $v$  суміжні в  $G_1 \times G_2$  тоді і тільки тоді, коли  $[u_1 = v_1, \text{ і } u_2 \text{ adj } v_2]$  або  $[u_2 = v_2 \text{ і } u_1 \text{ adj } v_1]$ . Добуток графів  $G_1 = P_2$  і  $G_2 = P_3$  показано на рис. 9.24.

**Nota Bene!** Для побудови добутку двох графів беремо стільки копій графа  $G_2$ , скільки існує вершин у графі  $G_1$ .

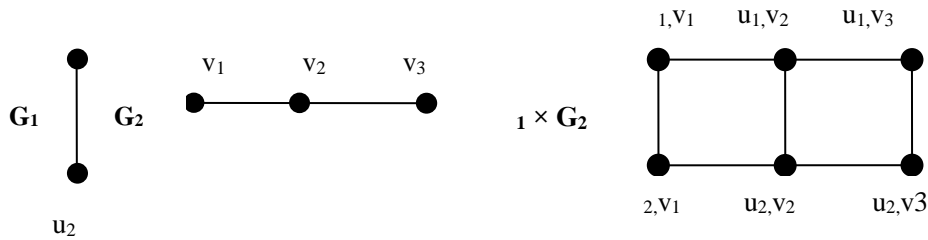


Рис.9.24. Добуток двох графів [3]

## 9.8. Обходи графів

### 9.8.1. Графи Ейлера

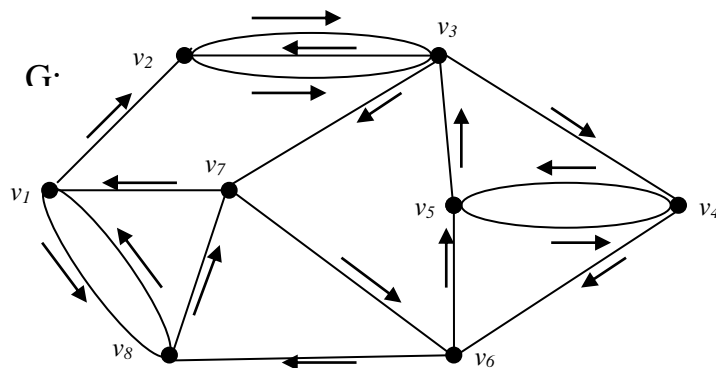
Як ми вже згадували в першому розділі, негативний розв'язок Ейлером задачі про кенігсберські мости в 1736 р. привів до першої публікації з теорії графів [10]. Задачу про обходи мостів Ейлер узагальнив і ми отримали наступну задачу теорії графів.

*На яких графах можна знайти цикл, що містить всі ребра графа, причому кожне ребро в точності по одному разу?*

Очевидно, не всі графи мають ейлерові цикли, але якщо ейлерів цикл існує, то це означає, що, слідуя уздовж цього циклу, можна накреслити граф на папері, не відриваючи від нього олівця.

Граф на рис. 9.25. має наступний ейлерів цикл (починаємо з вершини  $v_1$ ). Напрямок руху по кожному ребру показано на рисунку стрілками.

Граф, у якому це можливо, називається *ейлеровим*. Граф Ейлера має ейлерів цикл – замкнутий ланцюг, що містить всі вершини і всі ребра. Ейлерів граф повинен бути зв'язним.



Як і в задачі про кенігсберські мости, ясно, що кожна ейлерова лінія повинна входити в кожну вершину і виходити з неї одне і те ж число разів, тобто степені вершин графа повинні бути парними.

*Т е о р е м а* (а). Зв'язний неорієнтований граф містить ейлерів цикл тоді і тільки тоді, коли степені всіх його вершин парні.

*Т е о р е м а* (б). Зв'язний орієнтований граф містить ейлерів цикл (ейлерів ланцюг) тоді і тільки тоді, коли всі напівстепені заходу  $d_t(v_i)$  і напівстепені виходу  $d_o(v_i)$  задовольняють умовам:

де  $p$  – початкова, а  $q$  – кінцева вершини ейлерового ланцюга.

Флері [7] дав дуже простий алгоритм побудови ейлерового циклу в неорієнтованому графі (якщо такий цикл існує). Цей алгоритм легко можна поширити на орієнтовані графи і полягає він у наступному: починаємо з деякої вершини  $v$  і кожний раз викреслюємо пройдене ребро. Не проходимо по ребру, якщо видалення цього ребра призводить до поділу графа на дві зв'язні компоненти (не рахуючи ізольованих вершин).

Досі ми говорили про цикл, що проходить по всім ребрам в точності по одному разу; але існує ланцюг, що має ті ж властивості.

*Т е о р е м а.* Для того, щоб зв'язний неорієнтований граф мав відкритий ланцюг  $Z(A,B)$ , що містить всі його ребра по одному разу, необхідно і достатньо, щоб  $A$  і  $B$  були єдиними непарними вершинами в цьому графі.

На рис. 9.26. зображено ланцюг  $FCDBAEC$  графа  $G$ . Цей граф має дві непарні вершини  $F$  і  $C$ . Виникає питання, а яке найменше число ланцюгів таких, що ніякі два з них не мають спільних ребер і всі вони разом покривають всі ребра графа, існує в довільному графі?

Як ми вже знаємо з теореми Ейлера, число *непарних вершин у графі* – парне, нехай –  $2k$ .

Виникає питання, яке найменше число ланцюгів або циклів необхідно для того, щоб кожне ребро графа  $G$  містилось точно в одному циклі або ланцюгу.

Відповідь – число один.

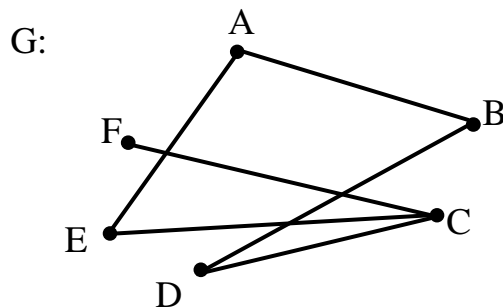


Рис. 9.25. Граф  $G$  має відкритий ейлерів ланцюг  $FCDBAEC$

*Т е о р е м а.* В будь-якому зв'язному графі з  $2k$  непарними вершинами є сімейство з  $k$  ланцюгів, які в сукупності містять всі ребра графа в точності по одному разу.

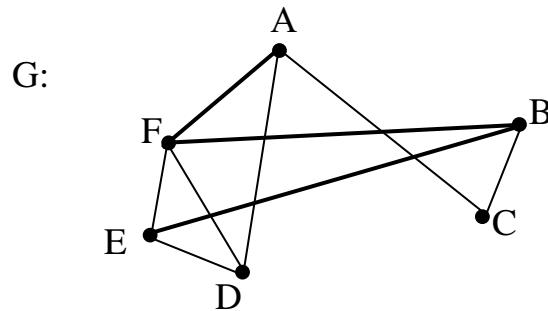


Рис. 9.26. Граф  $G$  має 2 ланцюга Ейлера[22] [xxx]

Для прикладу візьмемо граф  $G$ , зображений на рис. 9.26. Він має 4 непарні вершини  $A, B, D, E$  і покривається двома ланцюгами  $EBFA, BCADFED$ .

Нехай ребрам графа допишемо позитивні ваги. Потрібно знайти цикл, що проходить через кожне ребро графа принаймні один раз і такий, що для нього загальна вага (а саме сума величин  $n_j c(x_j)$ , де число  $n_j$  показує скільки разів проходило ребро  $x_j$ , а  $c(x_j)$  – вага ребра) мінімальна. Очевидно, що якщо граф має ейлерів цикл, то будь-який такий цикл буде оптимальним, оскільки кожне ребро проходиться тільки один раз і вага цього циклу дорівнює тоді  $\sum_{j=1}^m c(x_j)$ .

Сформульована задача називається задачею *китайського листоноші*,

В 1962 році китайський математик Мей-Ку Куан сформулював задачу, що отримала назву «задача китайського листоноші» (англ. «Chinese Postman Problem»). в якій листоноші потрібно рознести листи за найкоротшим маршрутом на ввіреній йому ділянці міста, проходячи по кожній вулиці лише одного разу або з мінімальним числом повторів.

Її розв'язок має багато застосувань, як наприклад: доставка молока або пошти (знаходження маршруту, який мінімізує загальний кілометраж, або вартість, або час); перевірка електричних, телефонних або залізничних ліній.

Інші застосування можуть бути пов'язані з розкиданням суміші піску і солі на головних дорогах взимку для запобігання обмерзання, з найкращим методом роботи автоматичних вентиляційних пристроїв, з прибиранням приміщень і коридорів у великих установах і навіть з найкращим маршрутом огляду музею!

### **9.8.2. Гамільтонови графи**

У 1859 р. відомий ірландський математик сер Вільям Роуен Гамільтон випустив в продаж своєрідну головоломку, яку назвав «*Icosian*» (англ. «*Icosian Game*»), («двадцять» на давньогрецькому «*icos*», звідси і назва гри). Її основною частиною був правильний додекаедр, зроблений з дерева. Це один з так званих правильних багатогранників: його гранями служать 12 правильних п'ятикутників, причому в кожній з 20 його вершин сходиться по три ребра.

Кожна вершина гамільтонова додекаедра була позначена назвою одного з великих міст - Брюссель, Кантон, Делі, Франкфурт і т.і. Завдання полягало в знаходженні шляху уздовж ребер додекаедра, що проходить через кожне місто в точності по одному разу; щоб зробити задачу ще більш цікавою, порядок проходження декількох перших міст встановлювався заздалегідь.



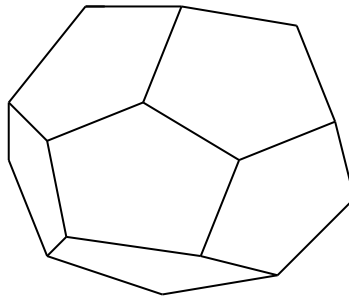


Рис. 9.27. Гамільтновий додекаедр

Для того, щоб легше було запам'ятовувати шлях, в кожную вершину був вколоти́й цвях з великою голівкою, так що навколо цих цвяхів могла витися мотузка, що вказує пройдений шлях. Однак додекаедр був занадто громіздким, і Гамільтон запропонував інший варіант своєї гри, де багатогранник замінявся плоским графом, ізоморфним графу, утвореного ребрами додекаедра (рис. 9.27).

Сучасну назву «задача комівояжера» або «задача мандрівного торговця» (англ. «Traveling Salesman Problem») було запропоновано американським математиком Хасслером Уїтні.

Головоломку давно забули, а ось *гамільтоновим циклом* і зараз називають *цикл, що проходить через кожную вершину графа точно по одному разу, а граф називають гамільтоновим.*

Граф, який містить простий ланцюг, що проходить через кожную його вершину, називається *полугамільтоновим.*

У 1960-1970 рр. дослідження задачі комівояжера було продовжено, причому в 2-х напрямках: теоретичному і практичному (вивчалися можливості її прикладного застосування в економіці, біології, хімії, інформатики). Гамільтонові графи слугують моделлю при складанні розкладу руху поїздів, для телекомунікаційних мереж і т.ін..

У 1970-1980 рр. Мартін Гретчел, Манфред Падберг, Джованні Рінальді і ряд інших вчених, застосовуючи нові розробки (метод гілок і меж), змогли знайти розв'язок для задачі комівояжера з 2392 містами. Черговий рекорд розв'язу задачі комівояжера встановили в квітні 2006 року, коли було знайдено рішення для варіанту з 85900 містами.

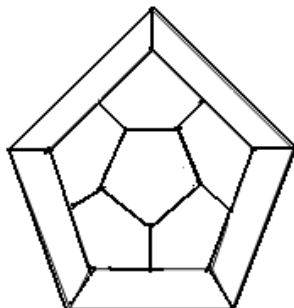


Рис.9.27. Гамільтоновий цикл для додекаедра

Гамільтонів граф не покриває точно всіх ребер, адже у кожній вершині він проходить по двом ребрам. Цикл, зображений на рис.9.27. називається гамільтоновим циклом для додекаедра.

Таким чином, є відома аналогія між ейлеровим і гамільтоновим циклом. Перший проходить один раз по *кожному ребру*, а другий - через *кожну вершину*.

Але не зважаючи на таку схожість, ці задачі абсолютно різної складності. Для ейлерового графа досить перевірити, чи є всі його вершини парними. На відміну від задачі Ейлера, простого критерія гамільтоновості графа поки що невідомо.

Однак, багато графів виявляються гамільтоновими.

Припустимо, що в деякому графі будь-яка пара вершин з'єднана ребром.

Такий граф, як ми вже згадували, називається *повним*. Очевидно, що в будь-якому повному графі можна знайти гамільтонів цикл.

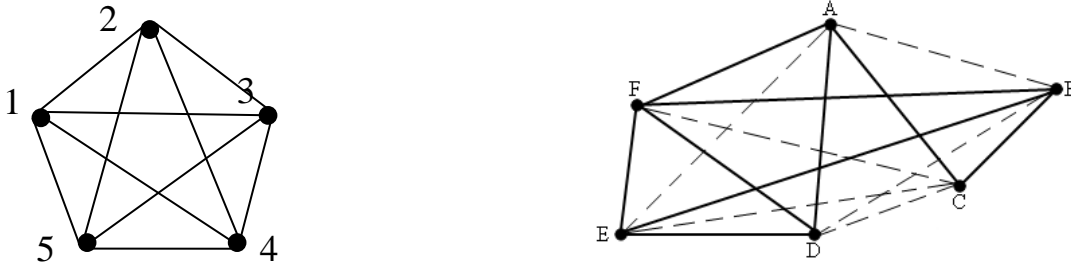


Рис.9.28. а) Повний граф; б) Граф, що описує ігри, штрихом позначено ще не зіграні ігри.

Повний граф зображено на рис. 9.28.а) Його цикл  $a,b,c,d,e,f,a$  очевидно є гамільтоновим. В ньому є і інші гамільтонові цикли. Кількість їх можна порахувати.

Розглянемо граф на рис. 9.28.а). Оскільки кожна вершина суміжна з рештою, то починаючи з вершини 1 в якості другої вершини цикла ми можемо вибрати будь-яку з чотирьох, що залишились. Далі у нас буде три варіанти для вибору третьої вершини і два для четвертої, після чого ми повернемося до вершини 1. Таким чином, ми маємо  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  цикла. Оскільки кожний цикл можна проходити як в одному напрямку, так і в іншому, то реально в графі  $K_n$  є тільки 12 різних гамільтонових циклів.

Для гамільтонів графа досі ще не знайдено такого загального критерію або алгебраїчного методу, що дає відповідь на питання, існує чи ні в довільному графі  $G$  гамільтонів цикл. У своїх роботах Неш-Вільямс [11] і Оре [12] визначили критерії існування гамільтонів циклу, але вони є надто загальними і не придатні для довільних графів які зустрічаються на практиці.

З алгебраїчних методів визначення гамільтонового циклу найбільш прийнятними є спосіб Робертса і Флореса, який не висуває особливі вимоги до пам'яті комп'ютера, але час роботи цього алгоритму залежить експоненціально від числа вершин у графі і неявного методу перебору, який може бути використаний для знаходження гамільтонового циклу в дуже великих графах.

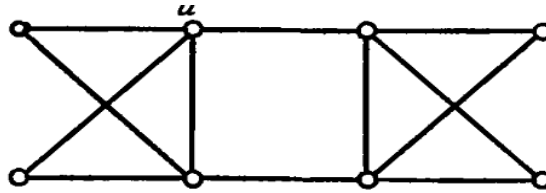
В 1970-1980 рр. Мартін Гретчел, Манфред Падберг, Джованні Рінальдї і ряд інших вчених, застосовуючи нові розробки (метод гілок і меж), змогли знайти розв'язок для задачі комівояжера з 2392 містами. Черговий рекорд розв'язу задачі комівояжера встановили в квітні 2006 року, коли було знайдено рішення для варіанту з 85900 містами.

### Контрольні запитання та завдання...

1. Для яких чисел  $m$  і  $n$  наступні графи є ейлеровими:  $K_{m,n}$ ,  $K_n$ . Чи є серед платонових графів ейлерові? Якщо так, то знайдіть в них ейлерові ланцюги.
2. Доведіть, що якщо граф  $G$  зв'язний і має  $k > 0$  вершин непарної степені, то мінімальне число ланцюгів, що не мають спільних ребер, але об'єднання яких містить кожне ребро графа  $G$ , дорівнює  $k/2$ . Що можна сказати у випадку непарного  $k$ ?
3. Для яких чисел  $m$  і  $n$  наступні графи є гамільтоновими:  $K_{m,n}$ ,  $K_n$ . Чи є серед платонових графів гамільтонові? Покажіть, що всі платонові графи є гамільтонові і знайдіть в них гамільтонові цикли. Платонові графи – це графи, утворені вершинами і ребрами п'яти правильних багатогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра і ікосаедра.
4. Доведіть, що граф Петерсена не є гамільтоновим, а чи буде він полугамільтоновим?

5. Наведіть приклади графів, які є гамільтоновими і ейлеровими; негамільтоновими, але ейлеровими; гамільтоновими не ейлеровими; негамільтоновими і не ейлеровими

6. За допомогою алгоритму Флері знайдіть ейлеровий ланцюг в графі



7. Характеристичними числами графа називаються власні значення його матриці суміжності; знайдіть характеристичні числа графа  $C_5$ . Доведіть, що сума характеристичних чисел простого графа дорівнює нулю. Покажіть це на прикладі повних графів і дводольних графів.

8. Дев'ять гурманів поводять кожний вечір в своєму улюбленому ресторані протягом всієї конференції. Припустимо, що вони сідають за круглий стіл, причому будь-які двоє з них займають сусідні місця тільки один раз. Що можна сказати про тривалість конференції?

9. Чи можна ходом шахового коня обійти шахову дошку розміром  $8 \times 8$ , так, щоб кожен хід зустрічався рівно один раз (при цьому ми вважаємо, що хід «зустрічався», якщо кінь перемістився з однієї клітини на другу будь-яким з двох можливих способів)

10. Знайдіть таку циклічну розстановку дев'яти одиниць, дев'яти двійок і трійок, у якій кожне з 27 трьохзначних чисел, яке складено з одиниць, двійок і трійок (наприклад 111, 233 і т.і.) зустрічається тільки один раз. Вказівка: побудуйте граф, вершинами якого є пари цілих чисел, а дуги з'єднують  $ij$  з  $kl$  в тому і тільки в тому випадку, якщо  $j = k$ ; знайдіть в ньому ейлеровий ланцюг.

## 9.9. Блоки

У деяких ситуаціях дуже важливо, щоб граф залишався зв'язним, якщо видалити з нього будь-яку вершину або ребро. Тобто іноді треба мати більш ніж один шлях між кожною парою вершин графа для того, щоб підстрахуватись від можливих відмов.

Наприклад, з Києва можна долетіти до Варшави навіть, якщо аеропорт у Львові закрито, через Івано-Франківськ. Або треба прокласти такий залізничний шлях, щоб у час воєнних дій противник зруйнував щонайменше дві станції. Аналогічно, треба прокласти з'єднання в інтегральній схемі або в мережах зв'язку таким чином, щоб при обриві будь-якого дроту або відмови з'єднання решта схеми продовжувала працювати.

Всі ці приклади демонструють дві різні концепції: у випадку інтегральної схеми і мережі ми зацікавлені у *збереженні зв'язності при видаленні ребра*, а у випадку залізничного сполучення треба *зберегти зв'язність при видаленні вершини*.

Деякі зв'язні графи можна зробити незв'язними, видаливши одну вершину, яка називається *точкою з'єднання (cut point)*. Виділення таких вершин сильно допомагає у вивченні структури зв'язного графа. Ребра з аналогічною властивістю називаються *мостами (bridge)*. Частини графа разом з його точками з'єднання – це його *блоки*. Після визначення цих трьох понять введемо і вивчимо два нових графа – *граф блоків* і *граф його точок з'єднання*.

### 9.9.1. Точки з'єднання, мости та блоки

*Визначення.* Точкою з'єднання (cut point) неорієнтованого графа називається вершина, видалення якої збільшує число компонентів зв'язності.

Таким чином, якщо  $v$  – точка з'єднання зв'язного графа  $G$ , то граф  $G - v$  не зв'язний.

*Визначення.* Мостом неорієнтованого графа називається ребро, видалення якого збільшує число компонентів зв'язності графа. (separation edge)

Коли ми говоримо про видалення ребра, ми маємо на увазі видалення цього ребра з множини ребер, яка визначає граф, навіть якщо після такого видалення одна або обидві вершини цього ребра стануть ізольованими. Реберно - зв'язний (edge-connected) граф залишається зв'язним при видаленні з нього будь-якого одного ребра. Граф, який не є реберно-зв'язним, назвемо реберно-розділимим (edge-separable), а мости назвемо ребрами розподілу (separation edge).

*Визначення.* Неподільним графом називається зв'язний, непустий неорієнтований граф, що не має точок з'єднання.

*Визначення.* Блок графа – це його максимальний неподільний підграф. Якщо  $G$  – неподільний граф, то часто він сам називається блоком.

У наведених нижче теоремах встановлюється декілька еквівалентних умов, що забезпечують існування у графа точки з'єднання і мосту та неподільності графа.

*Теорема 1.* Якщо  $v$  – точка з'єднання графа  $G$ , то

а) існують такі вершини  $u$  і  $w$ , відмінні від  $v$ , що  $v$  належить будь-якому простому  $(u - w)$  ланцюгу;

б) існує розподіл множини вершин  $V - \{v\}$  на такі дві підмножини  $U$  і  $W$ , що для будь-яких вершин  $u \in U$  і  $w \in W$  вершина  $v$  належить будь-якому простому  $(u - w)$  ланцюгу.

*Т е о р е м а 2:* Якщо  $x$  – міст графа  $G$ , то

а)  $x$  – не належить жодному простому циклу графа  $G$ ;

б) у графа  $G$  існують такі вершини  $u$  і  $w$ , що ребро  $x$  належить будь-якому простому ланцюгу, що сполучає  $u$  і  $w$ ;

в) існує розподіл множини вершин  $V$  на такі дві підмножини  $U$  і  $W$ , що для будь-яких вершин  $u \in U$  і  $w \in W$  ребро  $x$  належить будь-якому простому  $(u - w)$  ланцюгу.

На рисунку 9.29.  $v, u$  – точки з'єднання, а  $w$  – ні,  $x$  – міст, а  $y$  – ні; окремо наведено чотири блоки графа  $G$ . Кожне ребро графа належить тільки одному з його блоків, також як і кожна вершина, яка не є ні ізольованою, ні точкою з'єднання. Ребра будь-якого простого циклу графа також належать тільки одному блоку.

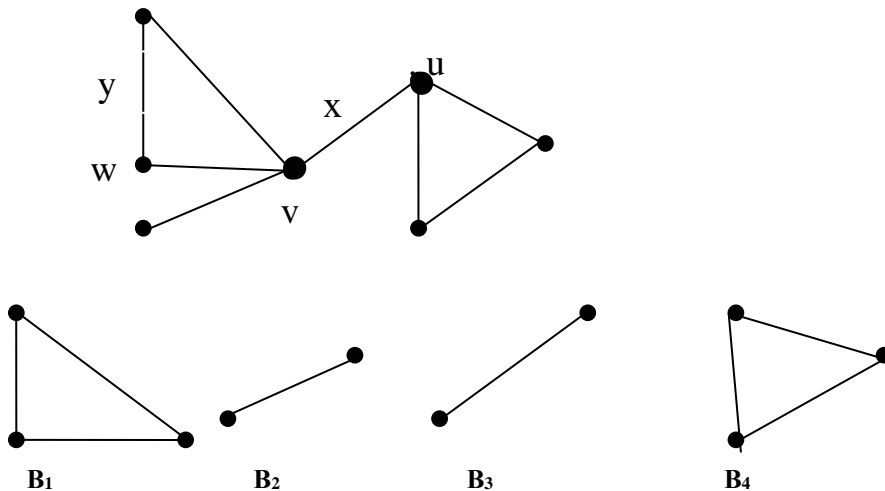


Рис. 9.29. Граф та його блоки



### 9.9.2. Графи блоків і графи точок з'єднання

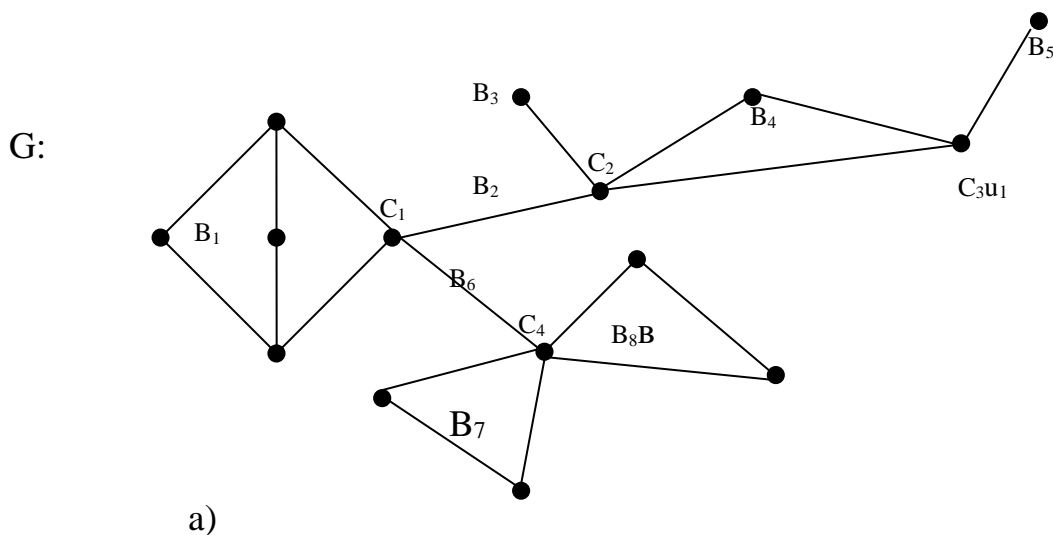
Відомі кілька графів перетинів, які можна одержати з графа  $G$ , і які представляють його структуру. *Граф перетинів* називається графом блоків графа  $G$  і позначається через  $B(G)$ .

Блоки графа  $G$  відповідають вершинам графа  $B(G)$  і дві вершини графа  $B(G)$  суміжні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм блоки графа  $G$  мають спільну точку з'єднання.

Граф, вершини якого відповідають точкам з'єднання графа  $G$  називається *графом точок з'єднання*.

Граф точок з'єднання позначається  $C(G)$ . Дві вершини графа  $C(G)$  суміжні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм точки з'єднання графа  $G$  належать одному блоку.

На рис.9.30 а) зображено граф  $G$ , б) граф блоків  $B(G)$ , в) граф точок з'єднання.



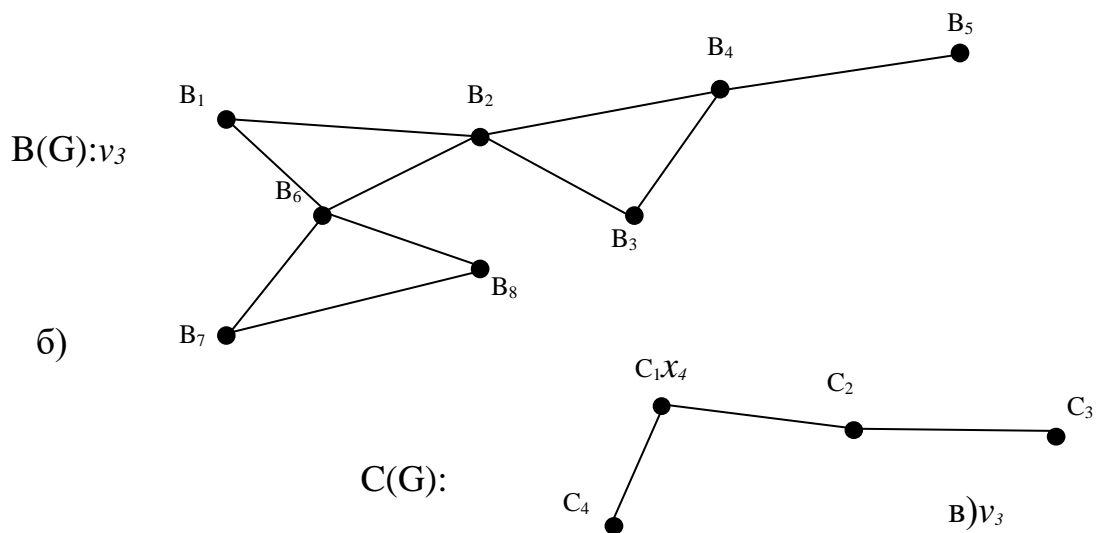


Рис.9.30.а) Граф  $G$ , б) граф блоків  $B(G)$  і в) граф точок з'єднання  $C(G)$

На рис. 9.31.показано граф блоків та точок з'єднання. В цьому графі вершинами є блоки та точки з'єднання, і кожен блок з'єдується з іншим через точку з'єднання.

Тобто, для зв'язного графа  $G$  з множиною блоків  $\{B_i\}$  і множиною точок з'єднання  $\{c_j\}$  граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$  (block cutpoint graph) визначається як граф, у якого множиною вершин є  $\{B_i\} \cup \{C_j\}$ , і дві вершини суміжні, якщо одна відповідає блоку  $B_i$ .

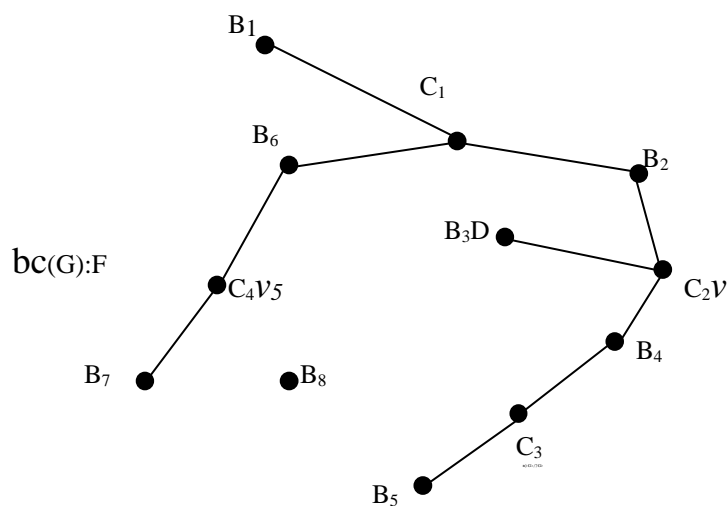


Рис. 9.31. Граф блоків і точок з'єднання  $E$

## Контрольні запитання та завдання

Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд. (Додаток 8).

### 9.10. Дерева

Існує один простий і важливий вид графів, якому різні автори дали однакову назву, це – *дерева*. Дерева важливі не тільки тому, що вони знаходять застосування в різних областях знання (наприклад задачі сортування), а в силу особливого становища їх у самій теорії графів. Останнє викликане простотою побудови дерев.

Поняття дерева як математичного об'єкта було вперше запропоновано Кірхгофом у зв'язку з визначенням фундаментальних циклів, що застосовуються при аналізі електричних ланцюгів. Через деякий час, незалежно від Кірхгофа, Келі [15] знову ввів поняття дерева і отримав більшу частину перших результатів в області дослідження властивостей дерев.

Область застосування дерев обширна. Це, наприклад, і інформатика, і біологія, і менеджмент.

#### 9.10.1. Опис дерев

Граф називається *ациклическим*, якщо в ньому нема циклів. Приведемо декілька визначень дерев.

Можна сформулювати декілька необхідних та достатніх умов при яких  $G$  є деревом:

- Будь-яка пара вершин в  $G$  з'єднана єдиним ланцюгом;
- $G$  зв'язний і  $m = n - 1$ ;

- $G$  зв'язний, а видалення хоча б одного його ребра порушує зв'язність графа;
- $G$  ациклічний, але, якщо додати хоча б одне ребро, то в  $G$  з'явиться цикл.

Отже можна дати таке визначення дерева:

*Визначення.* Неорієнтованим деревом називається

а) зв'язний ациклічний граф, або

б) зв'язний граф, що містить  $n$  вершин і  $n-1$  ребро, або

в) граф, у якому кожна пара вершин з'єднана одним і тільки одним простим ланцюгом.

*Т е о р е м а .* Якщо граф  $G$  дерево, то наступні твердження еквівалентні:

1)  $G$  – ациклічний граф, і якщо будь-яку пару несуміжних вершин з'єднати ребром  $x$ , то в графі  $G + x$  буде точно один простий цикл;

2)  $G$  – зв'язний граф, відмінний від  $K_v$  для  $v \geq 3$ , і якщо будь-яку пару несуміжних вершин з'єднати ребром  $x$ , то в графі  $G + x$  буде точно один простий цикл.

Якщо  $G = (V, X)$  неорієнтований граф з  $n$  вершинами, то *остовним деревом* (або *остовом*) графа  $G$  називається всякий остовний підграф графа  $G$ , який є деревом. Наприклад, якщо  $G$  – граф (рис. 9.32.а)), то граф на рис. 9.32.б) є остовним деревом графа  $G$ .

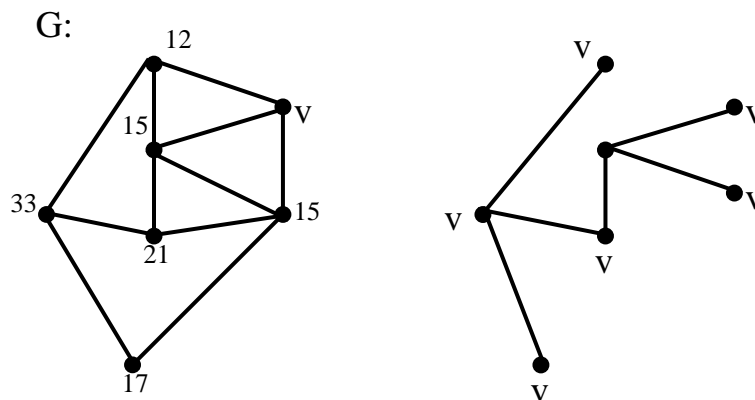


Рис. 9.32.а) Граф  $G$ , б) остов графа  $G$

Орієнтоване дерево визначається аналогічно.

*Визначення.* Орієнтоване дерево – це орієнтований граф без циклів, у якому напівстепінь заходу кожної вершини, за винятком однієї (наприклад  $v_1$ ), дорівнює одиниці, а напівстепінь заходу вершини  $v_1$ , яку будемо називати коренем цього дерева) дорівнює нулю.

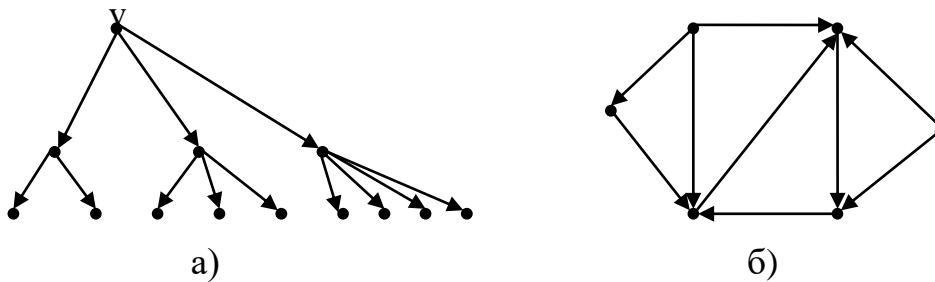


Рис.9.33.а) орієнтоване дерево з коренем в вершині  $v_1$ ,  
б) граф, що не має остовного орієнтованого дерева

На рис.9.33.а) показано граф, який є орієнтованим деревом з коренем у вершині  $v_1$ . Очевидно, що не всякий орієнтований граф має остовне орієнтоване дерево. На рис. 9.33.б) зображено такий граф.

*Приклад.* Доведіть, використовуючи індукцію по числу вершин, що для дерева  $T$  з  $n$  вершинами та  $m$  ребрами виконується співвідношення  $m = n - 1$ .

*Розв'язок:* Оскільки дерево з єдиною вершиною взагалі не має ребер, то наша твердження справедливо для  $n = 1$ . Розглянемо тепер дерево  $T$  з  $n$  вершинами ( $n > 1$ ) (і  $m$  ребрами). Припустимо, що будь-яке дерево з  $k < n$  вершинами має  $k - 1$  ребро. Видалимо ребро з дерева. З третьої властивості випливає, що після цієї процедури дерево  $T$  перетвориться в незв'язний граф. Одержим дві компоненти зв'язності, жодна з яких не має циклів. В протилежному випадку вихідний граф теж містив би цикли і не міг би бути деревом. Таким чином, отримані компоненти зв'язності – теж дерево.

Позначимо дерева як  $T_1$  і  $T$ . Нехай  $n_1$  – кількість вершин дерева  $T_1$ , а  $n_2$  – дерева  $T$ . Оскільки  $n_1 + n_2 = n$  то  $n_1 < n$  і  $n_2 < n$ . Оскільки, по визначенню індукції, дерево  $T_1$  має  $n_1 - 1$  ребро, а дерево  $T$  –  $n_2 - 1$  ребро, то вихідне дерево  $T$  має  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$  ребро, що і треба було довести.

### 9.10.2. Дерева на множині вершин

Нехай множина  $V$  містить  $n$  вершин, які пронумеровані порядковими номерами від 1 до  $n$ , тобто  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Зв'язавши ці вершини  $n-1$  ребрами так, щоб були відсутні цикли, отримаємо деяке дерево, що покриває дану множину  $n$  вершин. При  $n=2$  таке дерево єдине і воно складається з однієї гілки. Зі збільшенням  $n$  число різних дерев  $t_n$  швидко зростає і виражається співвідношенням  $t_n = n^{n-2}$

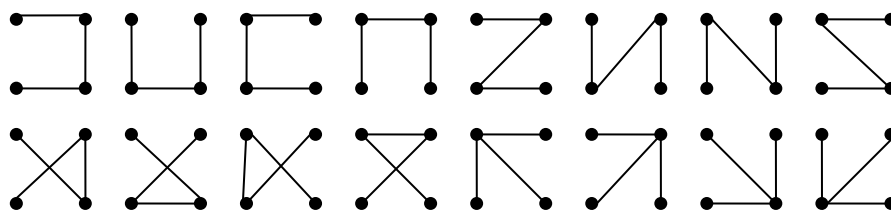


Рис.9.34. Дерева на множині чотирьох вершин

На рис. 9.34. показані 16 різних дерев, які можна побудувати на множині чотирьох вершин.

Будь-яке дерево можна розглядати як кореневе дерево, в якому деяка обрана вершина  $v_0$  називається коренем. Вершини, суміжні з коренем дерева, можна розглядати як коріння субдерев, які "виростають" з цих вершин і є частинами вихідного дерева, так званими *факторами*. Взагалі кажучи, кожна вершина графа грає роль кореня деякого фактора, причому кінцеві вершини – це коріння тривіальних дерев, що складаються з єдиної вершини і не містять ребер.

*Визначення.* Вагою вершини називається загальна кількість вершин фактора.

На кожному рівні фактори розташовуються в порядку зростання ваг їх коріння. На рис. 9.35.а) кореневе дерево зображено у стандартному вигляді і вказані ваги всіх його вершин.

Вага кореня дерева дорівнює числу всіх його вершин.

Кореневе дерево можна визначити впорядкованою послідовністю  $\beta(t)$  ваг його вершин. На першому місці стоїть вага кореня дерева, а потім відповідна послідовність для факторів у порядку зростання ваг їх коріння.

Ваги кінцевих вершин рівні одиниці.

У свою чергу, кожна така послідовність будується за принципом: на першому місці стоїть вага кореня фактора, а потім слідує послідовності для факторів даного фактору і т.д. Так, для дерева (Рис.2.43а) з позначенням ваг вершин маємо:

$$\beta(t) = (17, 1, 4, 1, 1, 1, 11, 4, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 1).$$

Кількість членів послідовності  $\beta(t)$  дорівнює числу вершин дерева. Перенесення кореня в іншу вершину приводить до іншого кореневого дерева, а значить і до іншої послідовності.

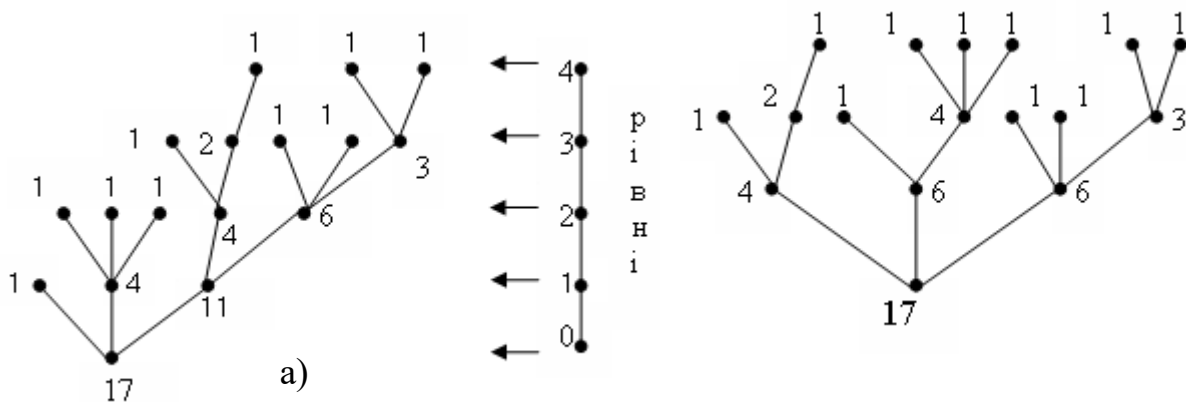


Рис. 9.35. а) стандартне представлення кореневого дерева, б) коренева форма

Достатнім критерієм ідентичності кореневих дерев є співпадання відповідних їм послідовностей.

З іншого боку можна побудувати дерево за його послідовністю  $\beta(t)$ . Перший член відповідає кореню дерева.

Потім  $\beta(t)$  розбивається на послідовності факторів так, що кожна з них починається членом, не меншим, ніж попередня, тобто.

$$\beta(t_1)=(1); \quad \beta(t_2)=(4, 1, 1, 1); \quad \beta(t_3)=(11, 4, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 1).$$

З кожної такої послідовності видаляємо перші члени і сполучаємо відповідні їм вершини з коренем. Потім робимо аналогічно до тих пір, поки не будуть вичерпані всі члени. Так, після побудови коренів факторів першого рівня послідовність  $\beta(t_1)$  вичерпується, а  $\beta(t_2)$  і  $\beta(t_3)$  розбиваються на послідовності:

$$\begin{aligned} \beta(t_{21}) &= (1); \quad \beta(t_{22}) = (1); \quad \beta(t_{23}) = (1); \\ \beta(t_{31}) &= (4, 1, 2, 1); \quad \beta(t_{32}) = (6, 1, 1, 3, 1, 1); \end{aligned}$$

Перші члени цих послідовностей відповідають корінням факторів другого рівня, які з'єднуються ребрами з тими коренями, з яких вони виростають і т.д., і т.д.

Як ми вже згадували, область застосування дерев з коренем обширна. Це, наприклад і інформатика, і біологія, і менеджмент. В інформатиці найбільш важливими є двійкові або бінарні дерева з коренем. Двійкове дерево відрізняється від решти тим, що його кожна вершина має не більш ніж 2 – х *синів*. (вершина, що лежить під даною вершиною). З другої боку, вершина, що стоїть перед сином, називається *батьком*.

В двійковому дереві з коренем вниз від кожної вершини йде не більш ніж два ребра.

Таким чином, можна сказати, що кожній вершині двійкового дерева відповідає не більш ніж два піддерева, які називають лівим та правим піддеревами цієї вершини.



Якщо у деякої вершини дерева відсутній спадкоємець зліва, то її ліве піддерево називають нульовим деревом. Аналогічно з правим під деревом.

### 9.10.3. Ідентифікація дерев

У багатьох випадках важливо розрізняти тільки неізоморфні дерева.

Ізоморфізм – це відношення еквівалентності на множині різних дерев, яке розбиває цю множину на непересічні класи не ізоморфних дерев. Будь-яке дерево з даного класу може виступати його представником. Але при різних способах задання і накреслення дерев встановити їх ізоморфізм безпосереднім порівнянням не так просто.

При ідентифікації дерев зазвичай використовують якусь канонічну форму, в якій ізоморфні дерева не розрізнити, а не ізоморфні отримують різні уявлення. Зручною для цих цілей є коренева форма зображення дерева.

Одна з стандартних процедур вибору кореня полягає в наступному: з дерева видаляються усі кінцеві вершини і ребра, потім в отриманому дереві знову видаляються усі кінцеві вершини і ребра, і так до тих пір, поки вихідне дерево не скоротиться до єдиної вершини або ребра.

У першому випадку вершина, яка залишилася, називається *центром* і вибирається як корінь. У другому – дві вершини і ребро, що їх зв'язує, утворюють *біцентр*.

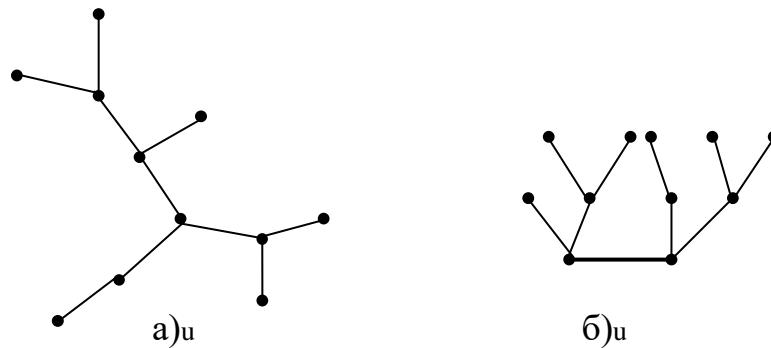


Рис.9.36 а) Дерево, б) його біцентр

При цьому за корінь приймається та вершина, з якої виростає дерево з меншим числом вершин. Дерево, зображене на рис.9.35.а) має центр і його кореневій формі відповідає послідовність:

$$\beta(t) = (17, 4, 1, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 1).$$

На рис.9.36.а) зображено дерево, яке має біцентр, а його коренева форма характеризується послідовністю

$$\beta(t) = (11, 1, 3, 1, 1, 5, 2, 1, 3, 1, 1).$$

Інший спосіб вибору кореня дерева для його кореневої форми заснований на понятті *висоти* вершини.

З кожною вершиною дерева зв'язані розгалуження, що представляють собою частини дерева, причому число ребер в розгалуженні характеризує його довжину.

*Визначення.* *Висота вершини* – це число, рівне найбільшій довжині пов'язаних з нею розгалужень.

*Визначення.* *Центроїдом* називається вершина з найменшою висотою, яка вибирається в якості кореня.

Якщо є дві таких вершини, то вони разом з ребром, що їх з'єднує, утворюють *біцентроїд*. При цьому за корінь приймається та вершина, з якої виростає дерево з меншим числом вершин.

Кінцеві вершини мають по одному розгалуженню, яке містить всі ребра дерева, і, отже, в дереві з  $p$  вершинами висоти кінцевих точок дорівнюють  $p-1$ . На рис. 1.44. вказані два неізоморфні дерева з десятима вершинами і вказані висоти вершин. Перше з них має біцентр і центроїд, які не збігаються, друге має центр і біцентроїд.

*Визначення.* Два дерева є ізоморфними, якщо послідовності для їх кореневих форм збігаються (зрозуміло, обидві кореневі форми повинні бути утворені з коренем в центрі або в центроїді).

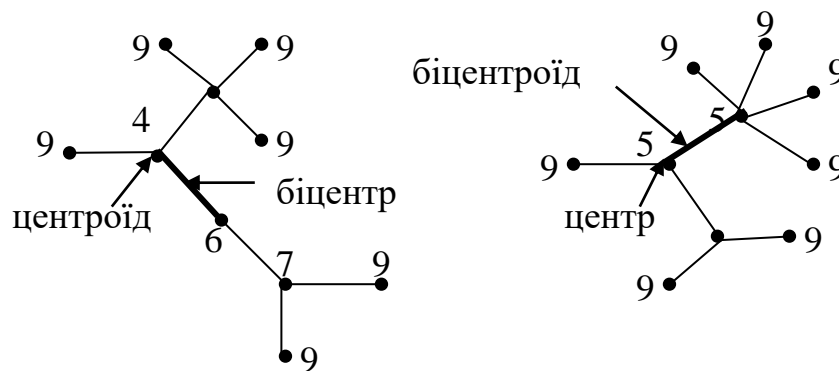


Рис.9.37. Не ізоморфні дерева (цифри означають висоти вершин)

Таким чином ідентифікація дерев зводиться до порівняння відповідних їм послідовностей для кореневих форм.

#### 9.10.4. Дерева графа

В деяких ситуаціях виникає необхідність в визначенні всіх остовних дерев неорієнтованого графа  $G$ .

Будемо називати каркасом або остовом зв'язного графа любое дерево, що зв'язує всі його вершини і яке утворено із ребер цього графа.

Два дерева називаються *різними*, якщо вони відрізняються хоча б одним ребром.

Існує простий спосіб визначення кількості різних каркасів графа без петель (або мультиграфа) з  $p$  вершинами. Для цього необхідно записати квадратну матрицю  $p$ -того порядку, на головній діагоналі якої розташовані степені вершин, а  $ij$  - і  $ji$ - елементи рівні взятому зі знаком мінус числу ребер, що зв'язують вершини  $i$  та  $j$ . Якщо обчислимо будь-який з головних мінорів цієї матриці, отримаємо шукане число дерев (каркасів) графа.

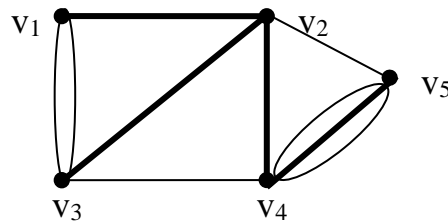


Рис. 9.38. Зв'язний граф і одне з його дерев

Наприклад, для графа (Рис.9.38.) маємо:

Одне з 76 дерев графа зображено на рис. 9.38 наведеними лініями.

Приведений спосіб визначення числа дерев графа відомий як теорема Трента.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 76$$

## 10. АЛГОРИТМИ НА ГРАФАХ

Впровадження комп'ютерних технологій поставило і перед всією математикою, і перед теорією графів проблему знаходження не довільних алгоритмів, які б дозволяли вирішувати ті, чи інші класи задач, а таких алгоритмів, які допускали б практичну реалізацію з використанням сучасних комп'ютерних технологій. Таким чином виникла проблема практичного розв'язування задач: знайти ефективний або хоча б достатньо простий в практично важливих випадках алгоритм розв'язку задачі.

В цьому розділі ми розглянемо декілька основних алгоритмів обробки графів.

Почнемо з розгляду задачі побудови остовного дерева мінімальної вартості або SST (shortest spanning tree, або MST - minimal spanning tree).

Остовним деревом графа називається дерево, яке ми можемо отримати шляхом видалення з нього деяких ребер. У графа може існувати декілька остовних дерев.

Для зважених графів існує поняття вартості остовного дерева, яке визначено як сума вартостей всіх ребер, що входять в остов. З нього натурально випливає поняття мінімального остовного дерева - остовного дерева з мінімальною можливою вартістю.

Багато дослідників працювали над розробленням алгоритму даної проблеми. Ми розглянемо найбільш відомі з них: алгоритм Р. Пріма та Й. Крускала.

Перший і самий простий алгоритм даної проблеми пов'язаний з ім'ям Борушки, який у 1926 р. представив розв'язок даної задачі.

Другий відомий алгоритм побудови мінімального остовного дерева розробив *Войтех Ярнік* у 1930р.

Незалежно від Ярніка в 1956 р. *Роберт Прім* розробив і представив більш детальний опис алгоритму, тож назва алгоритму залишилася за Прімом.

Найбільш відомий підхід носить назву *Йозефа Крускала* (1956). Основна ідея цього алгоритму заключається в тому, що ребра впорядковуються по вазі; на кожному кроці до остову, який ми будуємо, додається саме легке ребро, яке з'єднує вершини з різних компонент.

### 10.1. Остовні дерева мінімальної вартості

Нехай  $G = (V, X)$  – зв'язний граф, у якому кожне ребро  $(v, u)$  відмічено числом  $c(v, u)$ , яке називається вартістю ребра. *Остовним* деревом графа  $G$  називається дерево, що містить всі вершини графа  $G$ . *Вартість* остовного дерева вираховується як сума вартості всіх ребер, що входять в це дерево.

Обидва алгоритма (Крускала і Пріма) слідуєть «жадібній» стратегії: на кожному кроці вибирається «локально найкращий» варіант. Не для всіх задач такий вибір приводить до оптимального рішення, але для задачі про побудову остовного дерева мінімальної вартості це саме так.

*Визначення.* «Жадібним» алгоритмом називається алгоритм, який на кожному кроці робить локально оптимальний вибір, – в надії, що підсумкове рішення теж виявиться оптимальним.

Загальна схема алгоритмів така. Шуканий остов будується поступово: до пустої множини  $A$  на кожному кроці додається одне ребро. Множина  $A$  завжди є підмножиною деякого мінімального остова. Ребро  $(v, u)$ , що додається на черговому кроці, вибирається таким чином, щоб не порушити цю властивість. Об'єднання  $A \cup \{(v, u)\}$  також повинно бути підмножиною мінімального остова. Таке ребро називається «безпечним» ребром для  $A$ .

Обидва алгоритми слідуєть описаній схемі, але по різному вибирають безпечне ребро. В алгоритмі Крускала множина ребер  $A$  представляє собою ліс, який складається з декількох зв'язних компонент (дерев).

Додається ребро мінімальної вартості серед всіх ребер, кінці яких лежать в різних компонентах.

В алгоритмі Пріма множина  $A$  представляє собою одне дерево. «Безпечне» ребро, яке додається до  $A$ , вибирається як ребро найменшої вартості, що з'єднує це вже побудоване дерево з деякою новою вершиною.

Остовні дерева мінімальної вартості (ОДМВ) можна застосовувати, наприклад, при розробці комунікаційних мереж. Тут вершинами графа можна представити міста, а ребрами – можливі комунікаційні лінії між містами, а вартість ребер відповідає вартості комунікаційних ліній. В цьому випадку остовне дерево мінімальної вартості представляє комунікаційну мережу, яка об'єднує всі міста комунікаційними лініями мінімальної вартості.

## 10.2. Алгоритм Крускала

Побудова остовного дерева мінімальної вартості алгоритмом Крускала починається з графа  $T = (V, \emptyset)$ , який складається з тільки з  $n$  вершин графа  $G$  і який не має ребер. Таким чином кожна вершина є зв'язною (сама з собою) компонентою. Поступово об'єднуючи ці компоненти, формуємо ОДМВ. В алгоритмі Крускала всі ребра перебираються по зростанню вартості. Для чергового ребра перевіряється, чи не лежать кінці ребра в різних компонентах зв'язності, а якщо так, ребро додається, і компоненти з'єднуються.

Вибираючи ребра, ми повинні пам'ятати, що дерево мінімальної вартості 1) повинно бути зв'язним і містити всі вершини; 2) не повинно містити циклів; 3) повинно мати мінімальну вартість.

На рисунках 10.1.а)–10.1.ж) зображено роботу алгоритму.

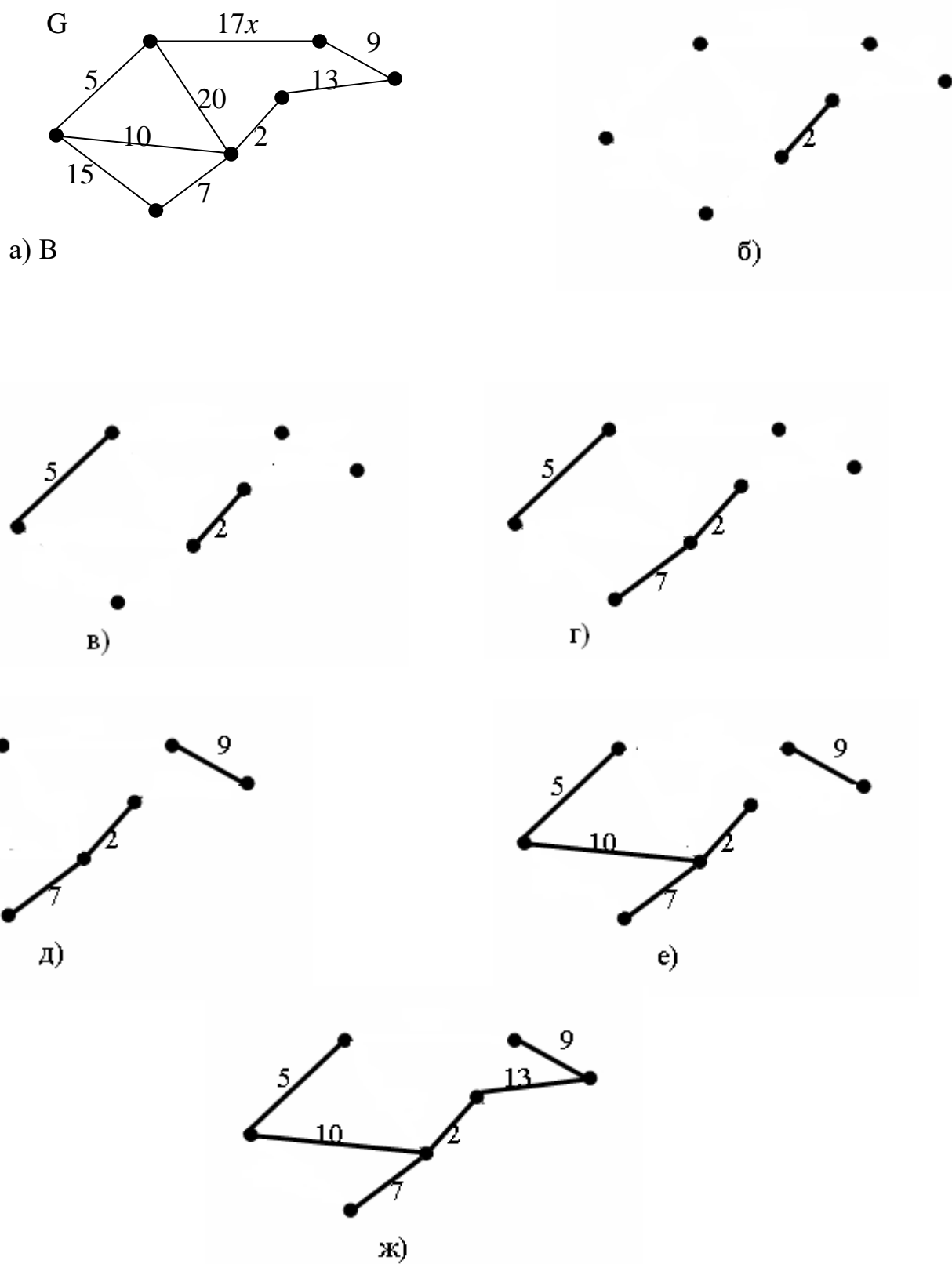


Рис. 10.1. Схема алгоритму Крускала

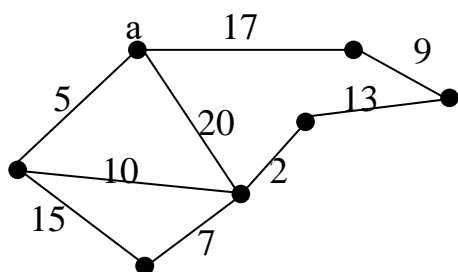


На рисунку 10.1.а) показано граф  $G = (V, X)$ . Маємо множину вершин  $V$  і підмножину деякого мінімального остова  $A$ , яка пуста. З множини ребер графа  $X$  вибираємо ребро з найменшою вагою. Це ребро з вагою 2, додаємо його до множини  $A$  (рис. 10.1.б). Наступне безпечне ребро з вагою 5 (рис. 10.1.в), додаємо його до дерева  $A$ . На третьому кроці додаємо ребро з вагою 7 (рис. 10.1.г) і т.і. Оскільки кінці ребер з вагою 17, 20, 15 лежать в одній компоненті зв'язності, то вони не додаються. Таким чином мінімальне остовне дерево побудоване.

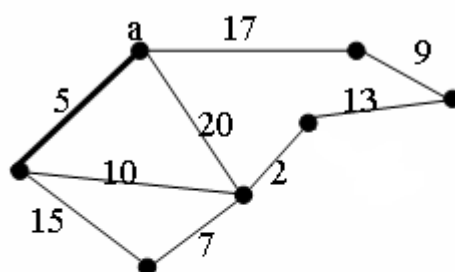
### 10.3. Алгоритм Пріма

Як і в алгоритмі Крускала в алгоритмі Пріма на кожному кроці додається до остова, яке ми будуємо, безпечне ребро. Алгоритм Пріма відноситься до групи алгоритмів нарощування мінімального остова: на кожному кроці існує не більш однієї нетривіальної компоненти зв'язності, і кожний раз до неї додається ребро найменшої ваги, що з'єднує вершини компоненти з рештою вершин. Процес продовжується до тих пір, поки число ребер не стане рівним  $n-1$  ( $n$  – кількість вершин).

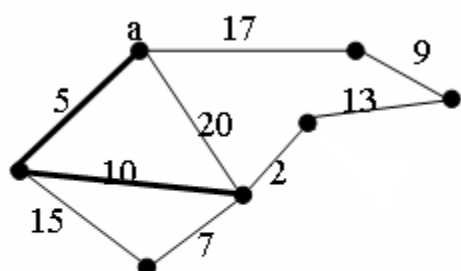
На рисунку 10.2. показано граф  $G$  і його корінь  $a$ , з якого починається побудова остовного дерева мінімальної вартості. Від кореня відходять три ребра з вагою 5, 20 і 17. оскільки вага 5 найменша, вибираємо ребро з цією вагою (рис.10.2.б). В наступній вершині маємо два ребра з вагою 10 і 15. Вибираємо менше і з'єднуємо з третьою вершиною. Процес продовжується до тих пір, поки всі вершини не попадуть до дерева мінімальної вартості. Ребра 17, 20, 15 утворюють цикл, тому ми їх не додаємо (рис.10.2.ж).



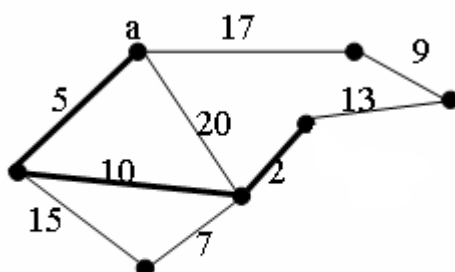
а) Початкова фаза. Корінь ас



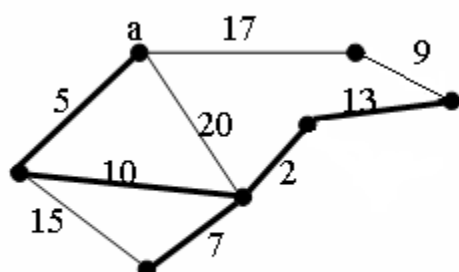
б) ребро з вагою 5 є мінімальним ребром, що з'єднує корінь а з вершинами



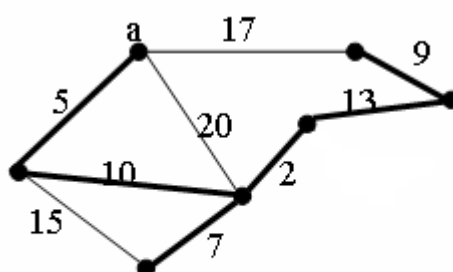
в) Наступне безпечне ребро з вагою 10



г)



д)



ж)

Рис. 10.2. Схема роботи алгоритма з корнем а

## Контрольні запитання та завдання

1). Продемонструвати дію алгоритма Крускала та Пріма на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами: Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший. (Додаток 9).

### 10.4. Алгоритм Дейкстри

Нехай задана карта автомобільних доріг, які з'єднують міста між собою. Треба знайти найкращий маршрут, наприклад, між двома містами. Така задача виглядає досить простою, але що значить «найкращий» маршрут? Це може бути відстань, час проходження маршруту з урахуванням обмежень в швидкості, затримки, які визвані проїздом через міста або об'їздом міст і т.д.

Будемо розв'язувати задачу пошуку найкоротшого маршрута з точки зору найкоротшої відстані. Цю задачу легко можна змодельовати за допомогою графів. Отже, нехай задано зв'язний граф  $G$ , в кому кожне ребро має додатню вагу, що дорівнює довжині ребра. Довжина шляху в такому графі дорівнює сумі довжин ребер, що складають цей шлях. В термінах графів задача зводиться до пошуку найкоротшої відстані між двома заданими вершинами.

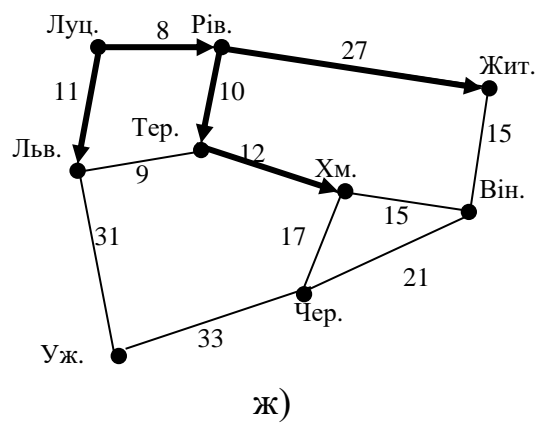
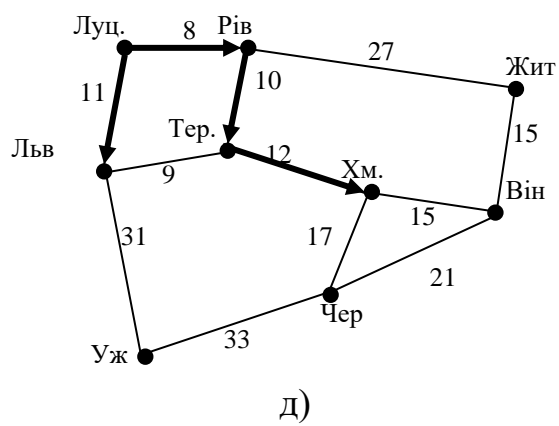
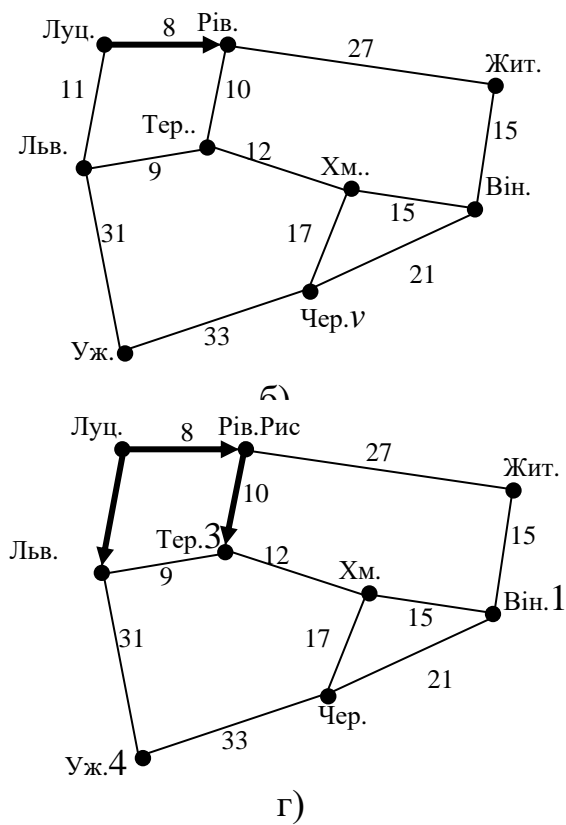
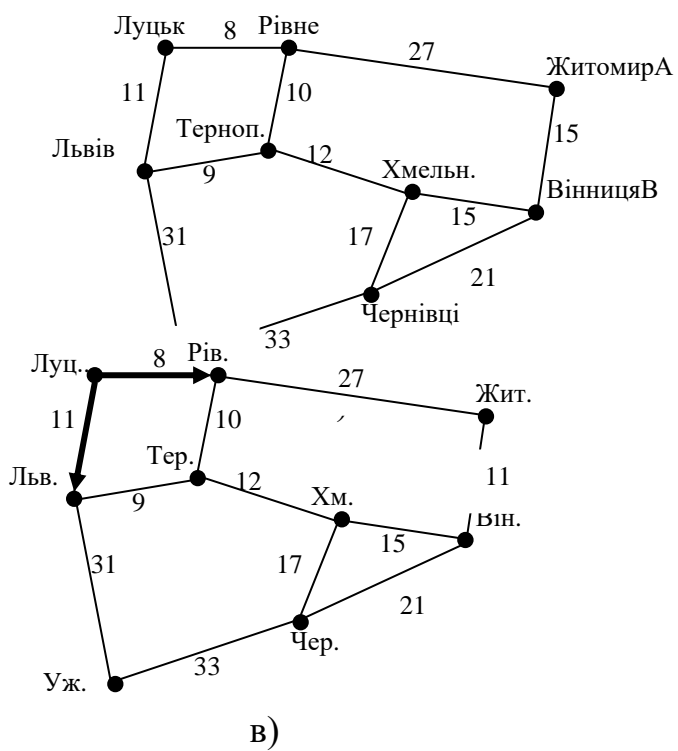
Задачі про найкоротші шляхи відносяться до фундаментальних задач комбінаторної оптимізації, бо більшість таких задач можна звести до пошуку найкоротшого шляху на графах. Існують різні типи задач про найкоротші шляхи: між двома заданими вершинами, між заданою вершиною та рештою вершин, між кожною парою вершин на графі, між двома заданими вершинами для шляхів, які проходять через одну або декілька заданих вершин.

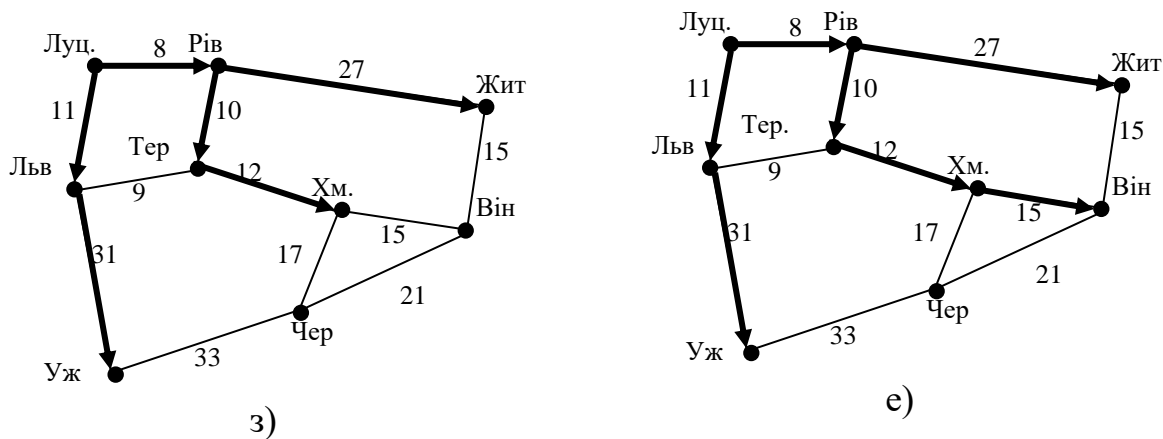
Серед багатьох алгоритмів пошуку найкоротшого шляху один з найкращих належить нідерландському вченому Е. Дейкстрі (1959 р.) і по суті співпадає з розглянутим вище алгоритмом Пріма.

Розглянемо на прикладі алгоритм Дейкстри. Представимо карту автомобільних доріг у вигляді графа, в якому нам треба знайти найкоротшу відстань між містами Луцьк та Чернівці (рис. 10.3.). Для наглядності вибрані умовні відстані.

Алгоритм Дейкстри складається з наступних кроків:

1. На першому кроці визначаємо відстані (довжиною в одне ребро) від заданої вершини (Луцьк) до всіх інших (рис. 10.3.а).
2. Далі відбираємо найменшу з відстаней (вибираємо виділене ребро між (Луцьк) та (Рівне)).
3. Цю найменшу відстань (8) додаємо до довжин ребер від нової вершини (Рівне) до решти вершин.
4. Порівнюємо цю суму з попередньою відстанню від (Луцьк) до всіх інших вершин та заміняємо попередню відстань, якщо нова менша.
5. Потім нова вершина (Рівне) видаляється зі списку вершин, до яких ще не визначені найкоротші відстані. В даному прикладі остання вершина цього списку (Ужгород) заміняє визначену вершину (Рівне) і список скорочується на один елемент.





Таким чином весь цей процес повторюється, додається нова найкоротша відстань до списку і т.і., аж поки кінцева вершина (Чернівці) не буде сполучена з вершиною (Луцьк) шляхом з виділених ребер.

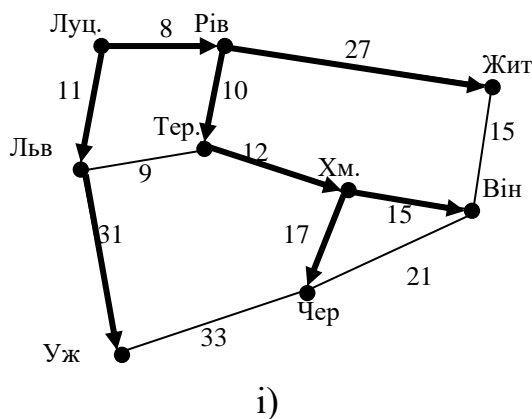


Рис. 10.3. Ілюстрація алгоритму Дейкстри для знаходження найкоротшого шляху від початкової вершини (Луцьк) до кінцевої (Чернівці)

На другій ітерації відстань (рис. 10.3.б) до (Львів) (11) мінімальна. Це значення використовуємо для оновлення відстані до (Ужгород) (стає 42 замість нескінченості), а потім (Львів) видаляється зі списку. На третій ітерації (рис.10.3.в), відстань до (Тернопіль) мінімальна, оновлюємо відстань до Хмельницька(замість нескінченості робимо 30). Множину найкоротших відстаней ми отримали у вигляді дерева найкоротших шляхів (рис. 10.3. і).

Таким чином, для того, щоб обчислити найкоротшу відстань від (Луцьк) до (Чернівці), треба обчислити найкоротші шляхи від (Луцьк) до всіх вершин.

Отже можна зробити висновок, що в самому найгіршому випадку задача пошуку найкоротшої відстані від початкової вершини до кінцевої має таку ж складність, що і задача про пошук найкоротших шляхів від початкової вершини до всіх інших вершин.

### **Контрольні запитання та завдання**

1). Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами: Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший. (Додаток 10).

### **Список використаної та рекомендованої літератури до розділів 9 та 10**

1. J.A. Bondy and U.S.R. Murty. Graph Theory.graduated text in mathematics series. JSSN 0072-5285. 2008. – 648 p.
2. A. Bondy and U.S.R. Murty. Graph Theory With Applications. North-Holland New ISBN 0-444-13451-7. 1982. –264p.
3. Харари Ф. Теория графов. – М. Едиториал УРСС. 2003. – 296 с.
4. Альфред В. Ахо, Структуры данных и алгоритмы. Пер. с англ.
5. Альфред В. Ахо. Джон Э. Хопкрофт, Джефри Д. Ульман. Структуры данных и алгоритмы: пер.с англ. / Альфред В. Ахо, Джон Э. Хопкрофт, Джефри Д. Ульман. –Издательский дом «Вильямс» М., СПб., К.: 2000. – 382 с.
6. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход: пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 358 с.
7. Бертисс А. Т. Структуры данных: учебник. / А.Т. Бертисс. – М.: Статистика, 1974. – 408 с.

8. Оре О. Графы и их применение: пер. с англ. / О. Оре. – М.: Мир, 1965. – 174 с.
9. Берж К. Теория графов и ее применения: пер.с англ. / К. Берж. – М.: Мир, 1984. – 307 с.
10. Euler The Konigsberg bridges, Sci. Amer., 18 (1953), p. 66 – 70
11. Nash-Williams C, St J.A. (1966), On Hamiltonian circuits in finite graphs, Pro. American Mathematical Soc. 17. p. 466.
12. Ore O. Theory of Graphs, American Mathematical Soc., New York. 1962.



# ДОДАТКИ

Додаток 1

## ТАБЛИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАСА

№	Зображення	Оригінал	Коефіцієнти
1	$\frac{1}{s}$	1	
2	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$	
3	$\frac{1}{s(s-a)}$	$Ae^{at} + K$	$A = \frac{1}{a}; K = -\frac{1}{a}$
4	$\frac{s+d}{s(s-a)}$		$A = \left(1 + \frac{d}{a}\right); K = -\frac{d}{a}$
5	$\frac{s+d}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{a+d}{a-b}; B = \frac{b+d}{b-a}$
6	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{1}{a-b}; B = \frac{1}{b-a}$
7	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + K$	$A = \frac{1}{a(a-b)}; B = \frac{1}{b(b-a)};$ $K = \frac{1}{ab}$
8	$\frac{s+d}{s(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{a+d}{a(a-b)}; B = \frac{a+d}{b(b-a)};$ $K = \frac{1}{ab}$
9	$\frac{s^2+gs+d}{s(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{a^2+ga+d}{a(a-b)}; B = \frac{b^2+gb+d}{b(b-a)}$ $K = \frac{d}{ab}$

Продовження таблиці

10	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + Ce^{ct}$	$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$ $B = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$ $C = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
11	$\frac{s+d}{(s-a)(s-b)(s-c)}$		$A = \frac{a+d}{(a-b)(a-c)}$ $B = \frac{b+d}{(b-a)(b-c)}$ $C = \frac{c+d}{(c-a)(c-b)}$
12	$\frac{s^2+gs+d}{(s-a)(s-b)(s-c)}$		$A = \frac{a^2+ag+d}{(a-b)(a-c)}$ $B = \frac{b^2+bg+d}{(b-a)(b-c)}$ $C = \frac{c^2+cg+d}{(c-a)(c-b)}$
13	$\frac{1}{(s-a)^2 + \omega}$	$Ae^{at} \sin(\omega t + \alpha)$	$A = \frac{1}{\omega}; \alpha = 0$
14	$\frac{s+d}{(s-a)^2 + \omega}$		$A = \frac{1}{\omega} [(a-d)^2 + \omega^2]^{1/2}$ $\alpha = \arctg \frac{\omega}{a+d}$
15	$\frac{1}{s^2}$	$t$	

Продовження таблиці

16	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at}$	$A = 0; A_1 = 1$
17	$\frac{s+d}{(s-a)^2}$		$A = 1; A_1 = a + d$
18	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$Ae^{at} + K + K_1 t$	$A = \frac{1}{a^2}; K = -A; K_1 = -\frac{1}{a}$
19	$\frac{s+d}{s^2(s-a)}$		$A = \frac{a+d}{a^2}; K = -A;$ $K_1 = -\frac{d}{a}$
20	$\frac{s^2 + gs + d}{s^2(s-a)}$		$A = \frac{a^2 + ag + d}{a^2}; K = 1 - A;$ $K_1 = \frac{d}{a}$
21	$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + K$	$A = -\frac{1}{a^2}; A_1 = \frac{1}{a}; K = -A$
22	$\frac{s+d}{s(s-a)^2}$		$A = -\frac{d}{a^2}; A_1 = \frac{d+a}{a};$ $K = -A$
23	$\frac{s^2 + gs + d}{s(s-a)^2}$		$A = \frac{a^2 - d}{a^2}; A_1 = \frac{a^2 + ag + d}{a}$ $K = 1 - A$

Продовження таблиці

24	$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)}$	$(A + A_1 t)e^{at} + Be^{bt}$	$A = -\frac{1}{(a-b)^2}; A_1 = \frac{1}{a-b};$ $B = -A$
25	$\frac{s+d}{(s-a)^2(s-b)}$		$A = -\frac{b+d}{(a-b)^2}; A_1 = \frac{a+d}{a-b};$ $B = -A$
26	$\frac{s^2 + gs + d}{(s-a)^2(s-b)}$		$A = \frac{a^2 - 2ab - bg - d}{(a-b)^2};$ $A_1 = \frac{a^2 + ag + d}{a-b};$ $B = \frac{b^2 + bg + d}{(a-b)^2}$
27	$\frac{1}{s^2(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + K + K_1 t$	$A = \frac{1}{a^2(a-b)}; B = \frac{1}{b^2(b-a)}$ $K = \frac{a+b}{a^2 b^2}; K_1 = \frac{1}{ab}$
28	$\frac{s+d}{s^2(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{a+d}{a^2(a-b)}; B = \frac{b+d}{b^2(b-a)};$ $K_1 = \frac{d}{ab}; K = \frac{ab+d(a+b)}{a^2 b^2}$
29	$\frac{s^2 + gs + d}{s^2(s-a)(s-b)}$		$A = \frac{a^2 + ag + d}{a^2(a-b)}; B = \frac{b^2 + bg + d}{b^2(b-a)}$ $K = \frac{abg + d(a+b)}{a^2 b^2}; K_1 = \frac{d}{ab}$
30	$\frac{1}{s^2(s-a)^2}$	$(A + A_1 t)e^{at} + K + K_1 t$	$A = -\frac{2}{a^3}; A_1 = \frac{1}{a^2};$ $K = -A; K_1 = \frac{1}{a^2}$
31	$\frac{s+d}{s^2(s-a)^2}$		$A = -\frac{a+2d}{a^3}; K = -A$ $A_1 = \frac{a+d}{a^2}; K_1 = \frac{d}{a^2}$
32	$\frac{s^2 + gs + d}{s^2(s-a)^2}$		$A = -\frac{ag+2d}{a^3}; A_1 = \frac{a^2 + ag + d}{a^2}$ $K = -A; K_1 = \frac{d}{a^2}$

ТАБЛИЦЯ D-ПЕРЕТВОРЕННЯ

№	Оригінал $f(k), k \geq 0$	Зображення $F^*(s) = D\{f(k)\}$
1	$f(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 0 \\ 1 & \text{при } k \geq 0 \end{cases}$	$\frac{e^s}{e^s - 1}$
2	$k$	$\frac{e^s}{(e^s - 1)^2}$
3	$k^2$	$\frac{e^s}{(e^s - 1)^3} (e^s + 1)$
4	$k^3$	$\frac{e^s}{(e^s - 1)^4} (e^{2s} + 4e^s + 1)$
5	$k^n$	$\frac{e^s}{(e^s - 1)^{n+1}} R_n^*(S) R_n^s =$ $\begin{matrix} 1 & 1 - e^s & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 - e^s & \dots & 0 \\ n! \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \dots & 1 \end{matrix}$
6	$k^{(2)} = k(k-1)$	$2 \frac{e^s}{(e^s - 1)^3}$
7	$k^{(3)} = k(k-1)(k-2)$	$3! \frac{e^s}{(e^s - 1)^4}$
8	$k^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)$	$k! \frac{e^s}{(e^s - 1)^{n+1}}$
9	$a^k$	$\frac{e^s}{e^s - a}$
10	$e^{\alpha k}$	$\frac{e^s}{e^s - e^\alpha}$
11	$ke^{\alpha k}$	$\frac{e^s e^\alpha}{(e^s - e^\alpha)^2}$

12	$k^2 e^{\alpha k}$	$\frac{e^s e^\alpha}{(e^s - e^\alpha)^3} (e^s + e^\alpha)$
13	$k^3 e^{\alpha k}$	$\frac{e^s e^\alpha}{(e^s - e^\alpha)^4} (e^{2s} + 4e^s e^\alpha + e^{2\alpha})$
14	$k^n e^{\alpha k}$	$\frac{e^s e^{n\alpha}}{(e^s - e^\alpha)^{n+1}} R_n^*(s - \alpha)$
15	$k^{(2)} e^{\alpha k}$	$2 \frac{e^s e^{2\alpha}}{(e^s - e^\alpha)^3}$
16	$k^{(3)} e^{\alpha k}$	$3! \frac{e^s e^{3\alpha}}{(e^s - e^\alpha)^4}$
17	$k^{(n)} e^{\alpha k}$	$k! \frac{e^s e^{n\alpha}}{(e^s - e^\alpha)^{n+1}}$
18	$\cos \omega k$	$\frac{e^s (e^s - \cos \omega)}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1}$
19	$\sin \omega k$	$\frac{e^s \sin \omega}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1}$
20	$\sin(\omega k + \phi)$	$\frac{e^{2s} \sin \phi + e^s \sin(\omega - \phi)}{e^{2s} - 2e^s \cos \omega + 1}$
21	$\cos \pi k = (-1)^k$	$\frac{e^s}{e^s + 1}$
22	$\cos \frac{\pi}{2} k$	$\frac{e^{2s}}{e^{2s} + 1}$
23	$\sin \frac{\pi}{2} k$	$\frac{e^s}{e^{2s} + 1}$
24	$\operatorname{ch} \alpha k$	$\frac{e^s (e^s - \operatorname{ch} \alpha)}{e^{2s} - 2e^s \operatorname{ch} \alpha + 1}$
25	$\operatorname{sh} \alpha k$	$\frac{e^s \operatorname{sh} \alpha}{e^{2s} - 2e^s \operatorname{ch} \alpha + 1}$

Продовження таблиці

26	$\text{sh}(\alpha k + \phi)$	$\frac{e^{2s}\text{sh}\phi + e^s\text{sh}(\alpha - \phi)}{e^{2s} - 2e^s\text{ch}\alpha + 1}$
27	$\frac{1(k-1)}{k}$	$\ln \frac{e^s}{e^s - 1}$
28	$\frac{e^{\alpha(k-1)}}{k}$	$e^{-\alpha} \ln \frac{e^s}{e^s - e^\alpha}$
29	$\frac{\sin \omega k}{k}$	$\omega + \text{arctg} \frac{\sin \omega}{e^s - \cos \omega}$
30	$(k^n)e^{\alpha k}$	$\left(1 + \frac{e^\alpha}{e^s}\right)^n$

ТАБЛИЦЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

№	Зображення	Оригінал
1	$\frac{z}{z-1}$	1
2	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$k$
3	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$k^2$
4	$\frac{z}{z-a}$	$a^k$
5	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ka^k$
6	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$	$\frac{a^k - b^k}{a-b}; (a \neq b)$
7	$\frac{z}{z-e^\alpha}$	$e^{\alpha k}$
8	$\frac{z(1-e^\alpha)}{(z-1)(z-e^\alpha)}$	$1 - e^{\alpha k}$
9	$\frac{z(e^\alpha - e^\beta)}{(z-e^\alpha)(z-e^\beta)}$	$e^{\alpha k} - e^{\beta k}$
10	$\frac{z^2(A-B) - z(Ae^\alpha - Be^\beta)}{(z-e^\alpha)(z-e^\beta)}$	$Ae^{\alpha k} - Be^{\beta k}$
11	$\frac{z-1}{z-e^\alpha}$	$e^{\alpha k} - e^{\alpha(k-1)}$
12	$\frac{z(1-e^\alpha)^2}{(z-e^\alpha)(z-1)^2}$	$k(1 - e^\alpha) - (1 - e^{\alpha k})$
13	$\frac{z \sin b}{z^2 - 2z \cos b + 1}$	$\sin b k$
14	$\frac{z^2 - z \sin b}{z^2 - 2z \cos b + 1}$	$\cos b k$



Продовження таблиці

15	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$	$a^k \sin b k$
16	$\frac{z(z - a \cos b)}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$	$a^k \cos b k$
17	$\frac{ze^\alpha \sin b}{z^2 - 2ze^\alpha \cos b + e^{2\alpha}}$	$e^{\alpha k} \sin b k$
18	$\frac{z^2 - ze^\alpha \cos b}{z^2 - 2ze^\alpha \cos b + e^{2\alpha}}$	$e^{\alpha k} \cos b k$

## ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ПУАССОНА

$$P(\kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda}.$$

×10<sup>-4</sup>

$\lambda \backslash k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

$\lambda \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0050	0076
4	0153	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0003	0033	0090	0194	0347
16						0001	0014	0045	0109	0217
17							0006	0021	0058	0128
18							0002	0009	0029	0071
19							0001	0004	0014	0037
20								0002	0006	0019
21								0001	0003	0009
22									0001	0004
23										0002
24										0001,6

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525

Продовження таблиці

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4515
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.51	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499928
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

КРИТИЧНІ ТОЧКИ F-РОЗПОДІЛУ ПРИ  $\alpha = 5\%$ 

$\begin{matrix} v1 \\ \backslash \\ v2 \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.1172	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8152	8.8103
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.1881	6.3560	6.1694	6.0043	6.0410	5.9988
5	6.6679	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5319	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0380	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2103	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2400	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6803	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
$\infty$	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Продовження таблиці

$\nu_1 \backslash \nu_2$	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	241.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.1172	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8152	8.8103
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.1881	6.3560	6.1694	6.0043	6.0410	5.9988
5	6.6679	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5319	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0380	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2103	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2400	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6803	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
$\infty$	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

**КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ  $t$  – КРИТЕРІЮ**

$P$	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9846	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0450	2.5705	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4249	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7237	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6853	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6843	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0513	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6613	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6516	1.3062	1.6835	2.0301	2.4377	2.7238

Продовження таблиці

$P$	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6803	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6339	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6320	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.5802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6346
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6600
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3501	2.6603
61	0.6765	1.2955	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536

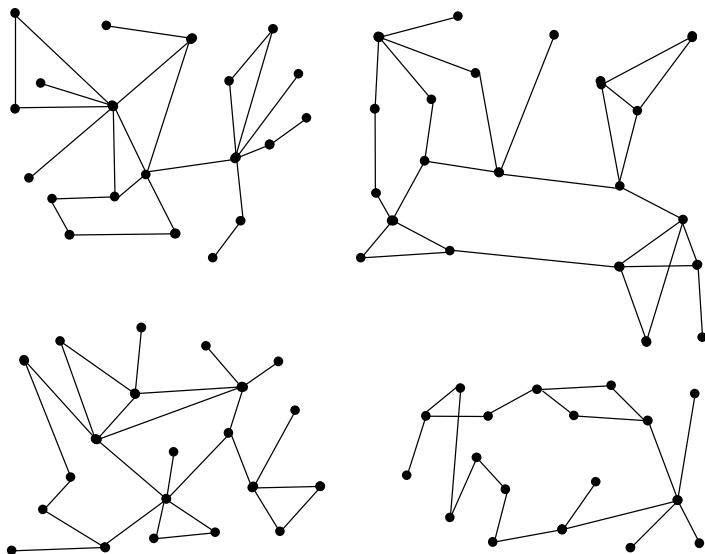


$P$	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
66	0.6782	1.2945	1.6633	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9560	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3324	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3616	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.2931	1.6657	1.9925	2.3776	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.0639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9836	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316

## ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ «БЛОКИ»

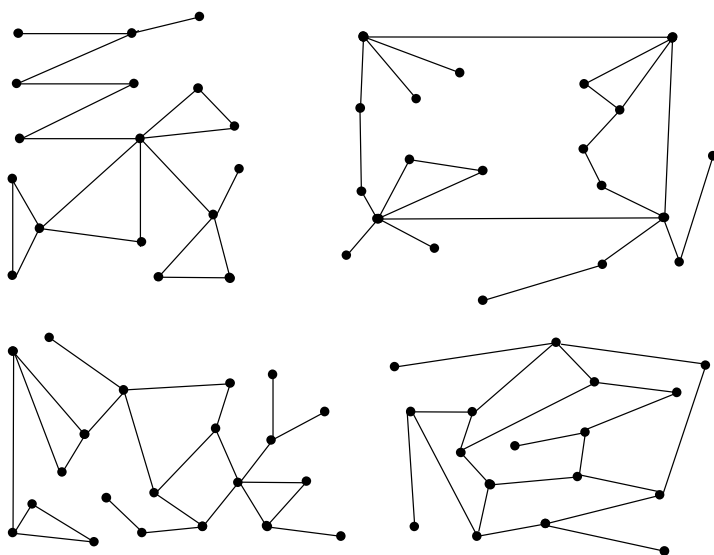
Варіант 1-4

Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд.

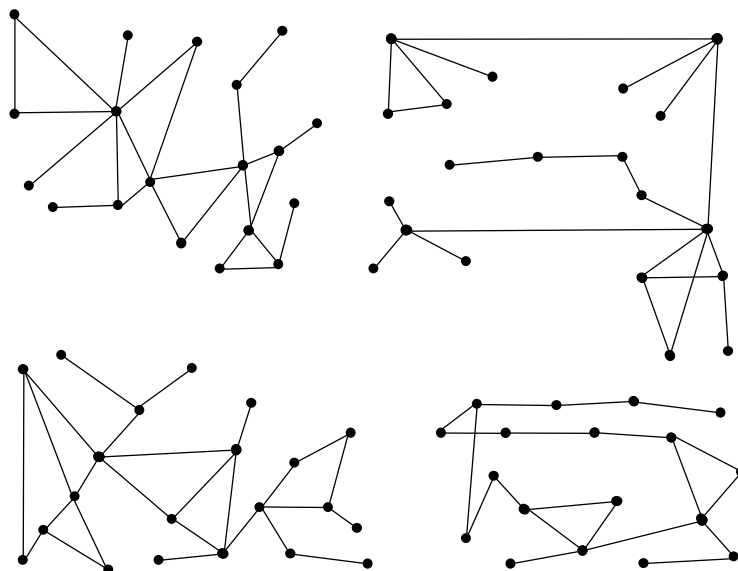


Варіант 5-8

Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд.

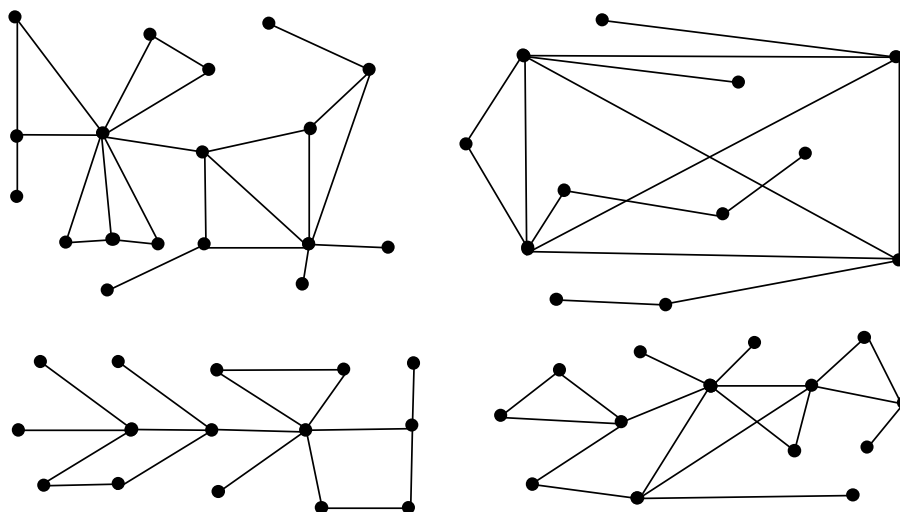


Варіант 9-12 Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд



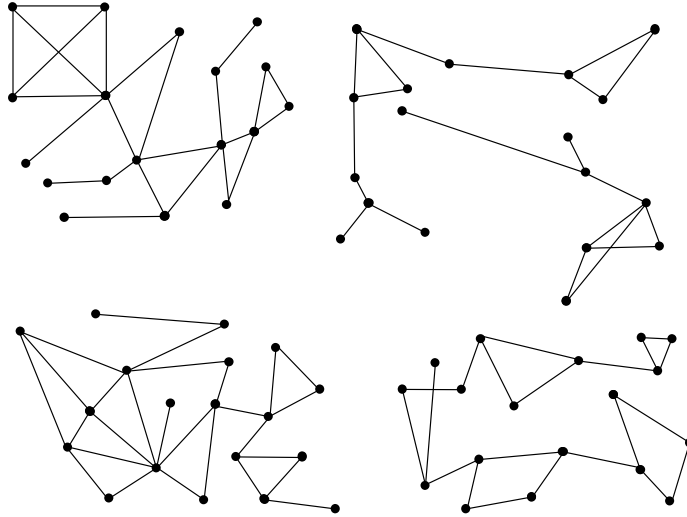
.Варіант 13-16

Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд.



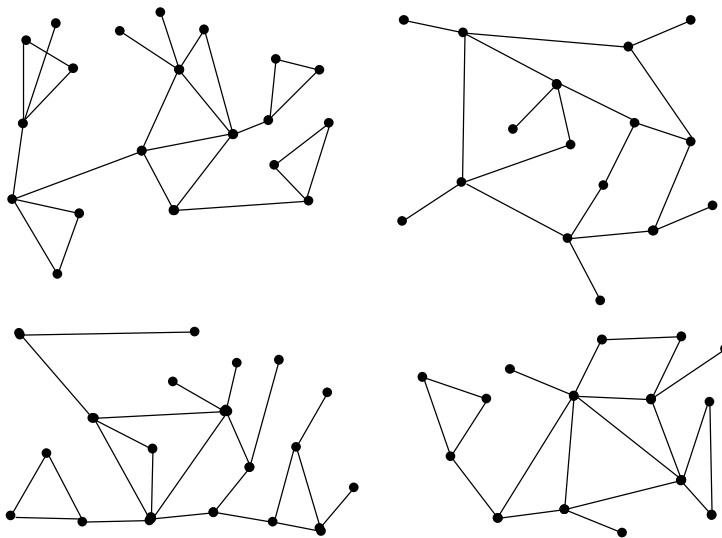
Варіант 17-20

Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд.

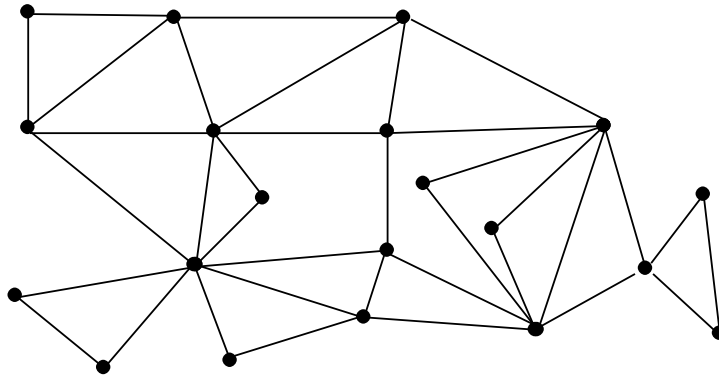


Варіант 21-24

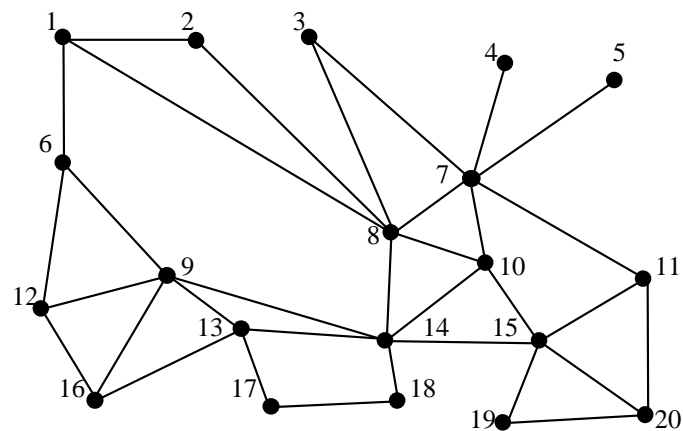
Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  позначити центр і центроїд.



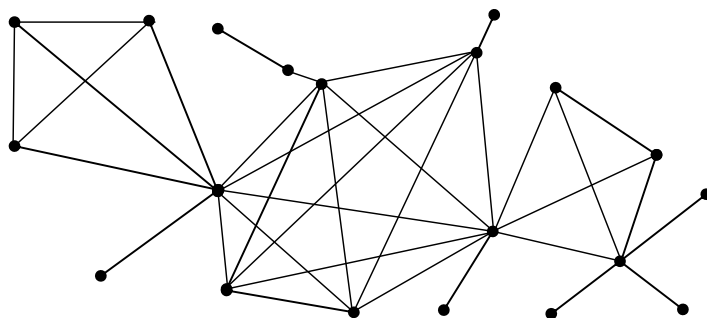
Варіант 25. Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  показати центр і центроїд



Варіант 26. Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  показати центр і центроїд



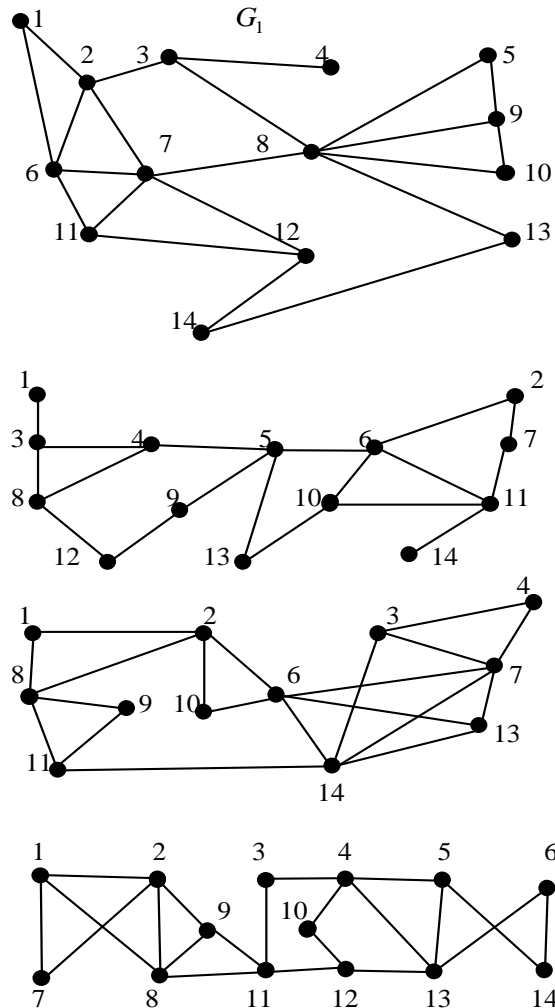
Варіант 27. Задано граф  $G$ . Побудувати граф блоків  $B(G)$ , точок з'єднання  $C(G)$ , та граф блоків і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  показати центр і центроїд



і точок з'єднання  $bc(G)$ . Для графа  $bc(G)$  показати центр і центроїд

## ЗАВДАННЯ ДО АЛГОРИТМІВ КРАСКАЛА ТА ПРІМА

**Варіант 1-4.** Продемонструвати дію алгоритма Краскала та Пріма на даному графі.



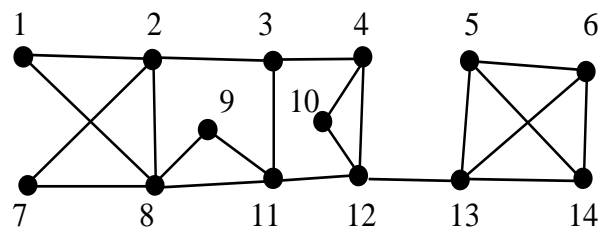
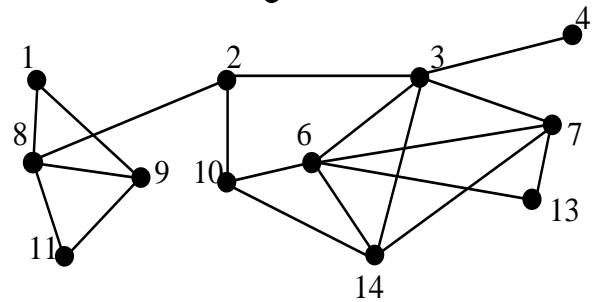
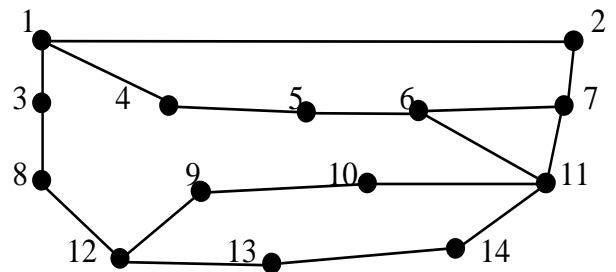
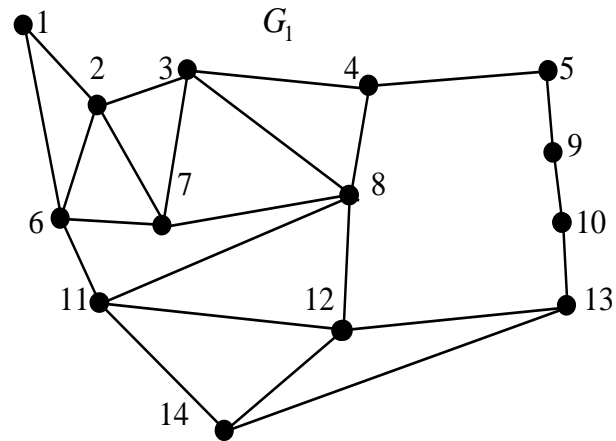
Функція вартості для графів

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	2	(6,7)	67	(5,9)	6
(1,6)	5	(7,8)	45	(9,10)	8
(2,6)	7	(6,11)	22	(8,9)	13
(2,3)	9	(7,11)	11	(8,10)	4
(3,4)	12	(13,14)	8	(8,13)	8
(3,8)	4	(7,12)	9	(11,12)	9
(2,7)	7	(5,8)	1	(12,14)	1

Функції вартості для графів

$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,3)	7	(9,12)	1	(7,11)	1
(3,8)	5	(5,6)	3	(6,11)	24
(3,4)	3	(5,13)	90	(10,11)	6
(4,8)	45	(10,13)	456	(11,14)	2500
(4,5)	67	(6,10)	4		
(8,12)	11	(2,6)	7		
(5,9)	24	(2,7)	4		
$F(G_3)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	13	(2,6)	9	(3,14)	3
(1,8)	5	(2,10)	1	(3,7)	7
(2,8)	1	(6,10)	2	(7,13)	9
(8,9)	78	(11,14)	77	(13,14)	13
(8,11)	24	(6,14)	56	(3,4)	4
(9,11)	56	(6,13)	20	(4,7)	1
(2,10)	77	(6,7)	10		
$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	22	(9,11)	12	(4,5)	7
(1,7)	11	(3,11)	3	(5,13)	3
(2,7)	34	(3,4)	7	(5,14)	2
(2,8)	45	(4,10)	87	(6,13)	1
(1,8)	1	(10,12)	15	(6,14)	6
(2,9)	8	(11,12)	7		
(8,9)	6	(12,13)	4		
(8,11)	89	(4,13)	6		

**Варіант 5-8.** Продемонструвати дію алгоритма Краскала та Пріма на даному графі.





Функції вартості для графів

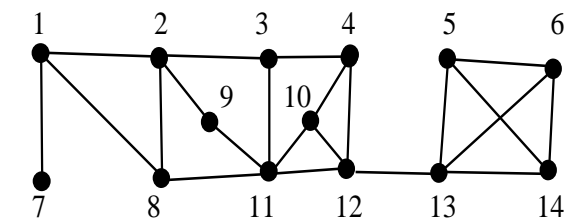
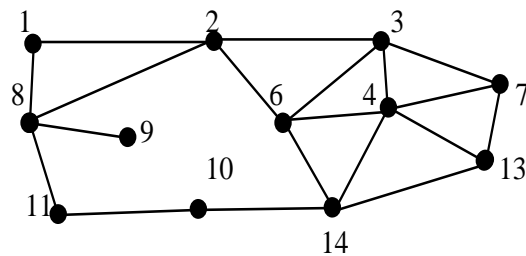
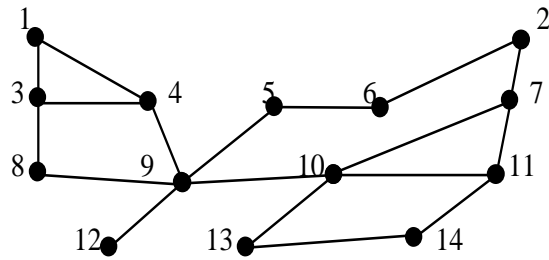
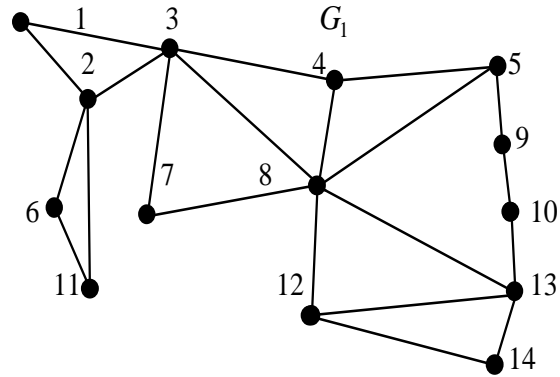
$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	4	(6,11)	14	(11,12)	0.1
(2,6)	78	(7,8)	5	(11,14)	9
(1,6)	3	(3,8)	6	(12,14)	6
(2,3)	1	(8,11)	8	(12,13)	17
(2,7)	2	(3,4)	3	(13,14)	6
(3,7)	7	(4,8)	3	(4,5)	201
(6,7)	89	(8,12)	3	(5,9)	3
(9,10)	4	(10,13)	5		

$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	2	(4,5)	1	(10,11)	5
(1,3)	4	(5,6)	5	(13,14)	9
(1,4)	16	(6,7)	8	(11,14)	11
(3,8)	12	(6,11)	9		
(8,12)	8	(7,11)	7		
(9,12)	9	(2,7)	4		
(12,13)	10	(9,10)	3		

$F(G_3)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,9)	78	(2,10)	22	(7,13)	8
(1,8)	45	(6,10)	76	(6,13)	9
(8,9)	37	(3,6)	55	(6,7)	51
(8,11)	24	(6,14)	54	(3,4)	23
(9,11)	89	(10,14)	37		
(2,8)	101	(3,14)	47		
(2,3)	13	(3,7)	11		

$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	22	(13,14)	14	(10,12)	1
(2,3)	22	(1,8)	17	(4,12)	1
(3,4)	23	(2,7)	37	(5,13)	3
(5,6)	22	(2,8)	25	(5,14)	5
(7,8)	45	(8,9)	16	(6,13)	8
(8,11)	6	(9,11)	54	(6,14)	13
(11,12)	5	(3,11)	19		
(12,13)	19	(4,10)	10		

**Варіант 9-12.** Продемонструвати дію алгоритма Краскала та Пріма на даному графі.



# Функції вартості для графів

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	5	(7,8)	1	(8,13)	1
(1,3)	6	(3,8)	65	(12,13)	1
(2,3)	9	(3,4)	43	(13,14)	9
(2,6)	14	(4,8)	78	(12,14)	7
(6,11)	5	(4,5)	25	(5,9)	6
(2,11)	3	(5,8)	23	(9,10)	5
(3,7)	2	(8,12)	11	(10,13)	4

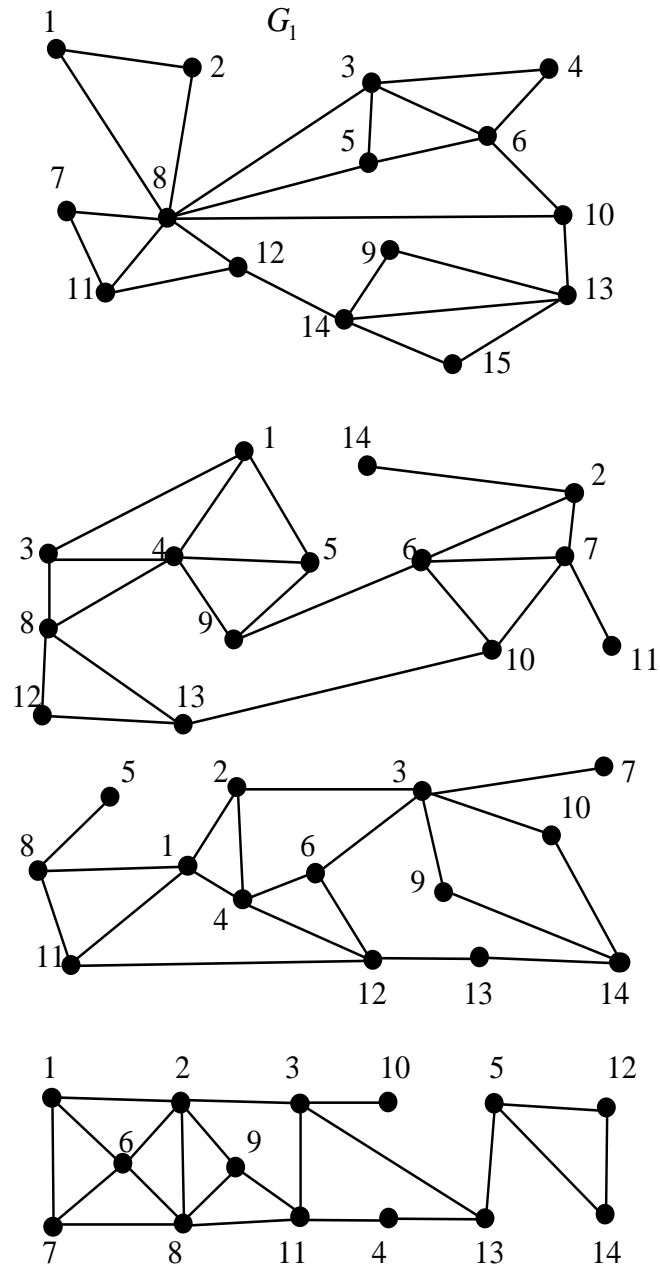
$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,3)	5	(5,9)	23	(10,11)	1
(3,4)	3	(9,10)	11	(10,13)	1
(1,4)	2	(5,6)	89	(13,14)	2
(3,8)	8	(2,6)	76	(11,14)	3
(8,9)	14	(2,7)	45		
(4,9)	19	(7,10)	37		
(9,12)	45	(7,11)	13		

$F(G_3)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	22	(2,3)	2	(3,7)	6
(1,8)	22	(2,6)	3	(4,7)	7
(2,8)	22	(3,6)	7	(4,13)	0.8
(8,9)	22	(3,4)	40	(7,13)	56
(8,11)	67	(4,6)	21	(13,14)	12
(11,10)	67	(6,14)	29		
(10,14)	54	(4,14)	1		

$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	20	(3,11)	8	(5,6)	6
(1,7)	1	(3,4)	7	(6,14)	8
(1,8)	3	(4,10)	65	(13,14)	11
(2,8)	6	(10,12)	40	(5,13)	29
(2,9)	9	(4,12)	11	(6,13)	34
(9,11)	7	(11,12)	12	(5,14)	15
(8,11)	13	(12,13)	56		
(2,3)	5	(10,11)	75		

### Варіант 13-16

Продемонструвати дію алгоритма Краскала та Пріма на даному графі.



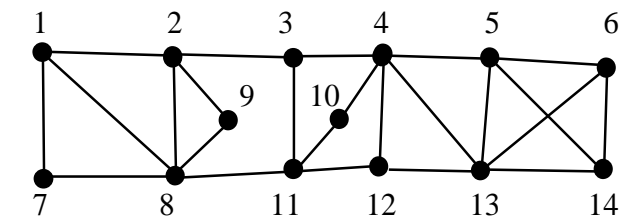
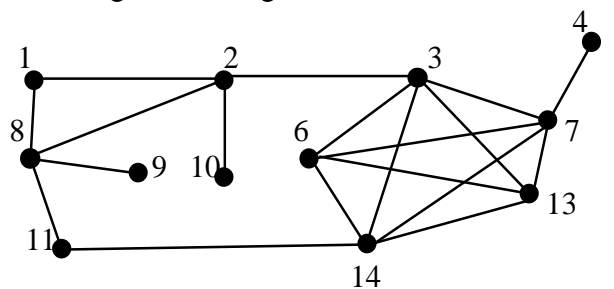
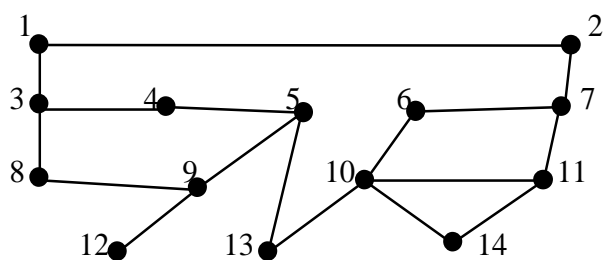
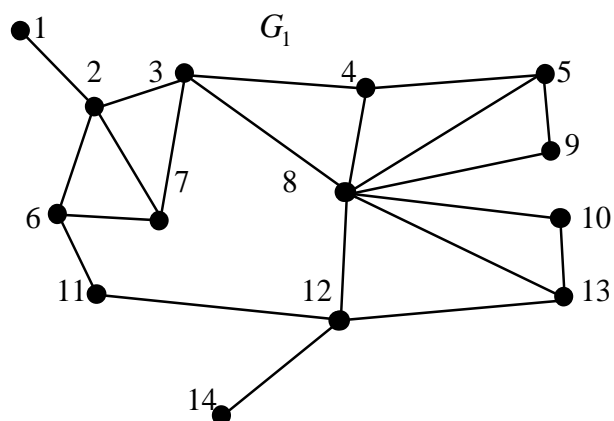
# Функції вартості для графів

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	5	(11,12)	1	(5,6)	5
(2,8)	17	(8,3)	15	(3,4)	7
(1,8)	3	(8,5)	4	(4,6)	19
(7,8)	1	(8,10)	11	(6,10)	14
(7,11)	8	(12,14)	18	(10,13)	12
(8,11)	35	(3,5)	239	(9,14)	7
(14,15)	7	(13,15)	16	(9,13)	6
(8,12)	16	(3,6)	5	(14,13)	15
$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(3,4)	2	(3,8)	32	(6,10)	25
(1,3)	13	(4,8)	5	(6,7)	7
(1,4)	7	(8,12)	7	(7,10)	10
(4,5)	6	(8,13)	6	(7,11)	8
(1,5)	11	(12,13)	2	(2,6)	13
(4,9)	9	(13,10)	21	(2,7)	15
(5,9)	1	(6,9)	7	(2,14)	9
$F(G_3)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(5,8)	1	(2,3)	71	(10,14)	21
(8,1)	6	(4,6)	16	(4,12)	17
(8,11)	9	(3,6)	32	(6,12)	2
(1,11)	3	(3,7)	91	(11,12)	3
(1,2)	5	(3,9)	31	(12,13)	12
(1,4)	7	(3,10)	66	(13,14)	3
(2,4)	11	(9,14)	97		

$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	6	(2,3)	8	(4,13)	1
(1,6)	3	(2,9)	6	(3,13)	8
(1,7)	8	(9,8)	5	(5,13)	6
(6,7)	2	(9,11)	3	(5,14)	4
(6,2)	1	(8,11)	5	(5,12)	3
(6,8)	9	(3,11)	2	(12,14)	2
(2,8)	15	(3,10)	2		
(7,8)	14	(4,11)	2		

# **Варіант 17-20**

Продемонструвати дію алгоритма Крaskала та Пріма на даному графі.





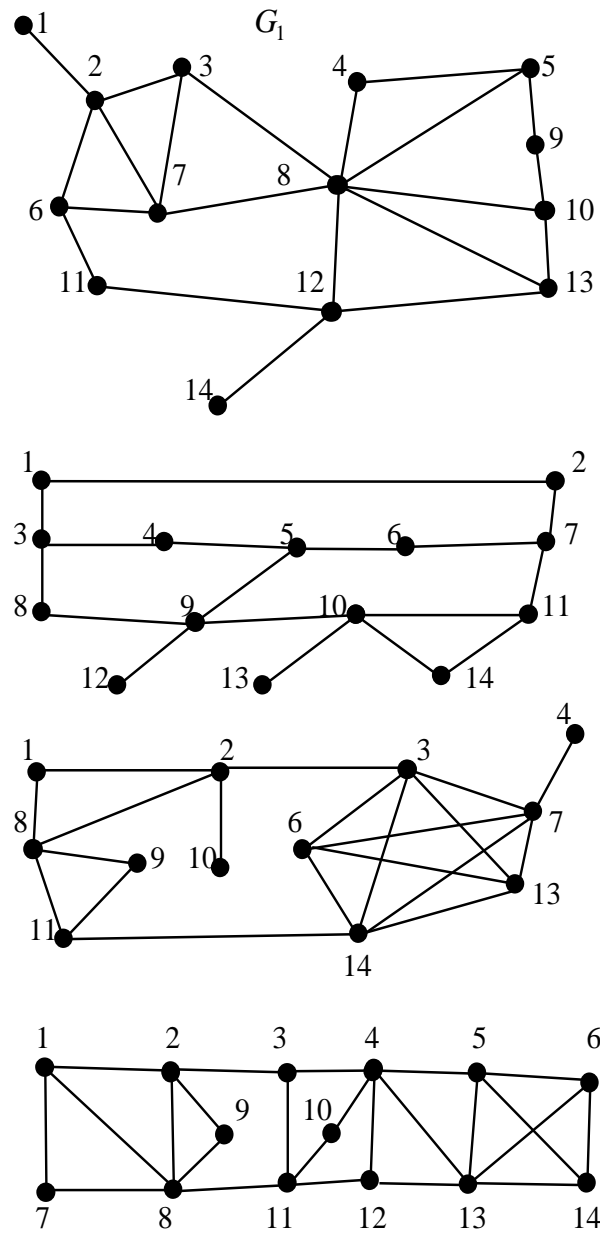
Функції вартості для графів:

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	13	(6,11)	2	(5,9)	7
(2,3)	4	(3,4)	5	(8,9)	14
(2,6)	6	(3,8)	2	(8,10)	20
(2,7)	7	(8,12)	5	(8,13)	9
(3,7)	4	(4,8)	17	(10,13)	20
(6,7)	8	(4,5)	3	(5,8)	18
(12,14)	6	(12,13)	2	(11,12)	5
$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	11	(5,9)	10	(10,11)	4
(1,3)	1	(6,7)	3	(11,14)	3
(2,7)	0.5	(8,9)	2	(10,14)	15
(3,4)	3	(7,11)	4		
(3,8)	15	(9,12)	51		
(4,5)	2	(6,10)	19		
(5,13)	1	(10,13)	8		
$F(G_3)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	2	(2,3)	9	(7,13)	8
(1,8)	3	(3,7)	1	(6,7)	4
(2,8)	5	(4,7)	2	(6,14)	2
(8,9)	15	(3,6)	3	(13,14)	6
(8,11)	4	(3,14)	4	(6,13)	7
(11,14)	3	(3,13)	5		
(2,10)	4	(7,14)	17		

$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	2	(8,11)	3	(2,9)	10
(2,3)	3	(11,12)	4	(8,9)	1
(3,4)	72	(12,13)	27	(3,11)	6
(4,5)	11	(13,14)	9	(10,11)	4
(5,6)	1	(6,14)	5	(4,10)	7
(1,7)	5	(1,8)	4	(4,12)	8
(7,8)	9	(2,8)	13	(4,13)	2
(5,13)	2	(5,14)	7	(6,13)	17

## Варіант 20-23

Продемонструвати дію алгоритма Краскала та Пріма на даному графі.



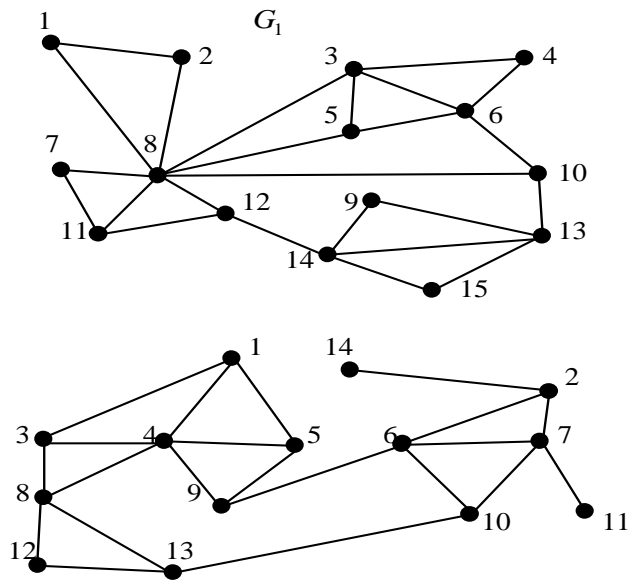
Функції вартості для графів:

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	2	(6,11)	11	(5,9)	77
(2,3)	4	(7,8)	20	(9,10)	4
(2,6)	1	(3,8)	6	(8,10)	2
(2,7)	7	(8,12)	15	(8,13)	11
(3,7)	19	(4,8)	7	(10,13)	9
(6,7)	3	(4,5)	13	(5,8)	81
(12,14)	27	(12,13)	21	(11,12)	3
$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	1	(5,9)	0.5	(10,11)	14
(1,3)	11	(6,7)	3	(11,14)	3
(2,7)	15	(8,9)	2	(10,14)	15
(3,4)	3	(7,11)	4		
(3,8)	12	(9,12)	5		
(4,5)	3	(9,10)	9		
(5,6)	4	(10,13)	8		
$F(G_3)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	4	(2,3)	39	(7,13)	8
(1,8)	1	(3,7)	117	(6,7)	14
(2,8)	5	(4,7)	8	(6,14)	2
(8,9)	16	(3,6)	3	(13,14)	26
(8,11)	14	(3,14)	24	(6,13)	7
(11,14)	31	(3,13)	4	(9,11)	18
(2,10)	18	(7,14)	7		

$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	5	(8,11)	3	(2,9)	12
(2,3)	11	(11,12)	14	(8,9)	1
(3,4)	121	(12,13)	7	(3,11)	6
(4,5)	12	(13,14)	9	(10,11)	19
(5,6)	2	(6,14)	5	(4,10)	7
(1,7)	4	(1,8)	9	(4,12)	18
(7,8)	7	(2,8)	18	(4,13)	2
(5,13)	32	(5,14)	75	(6,13)	17

**Варіант 24-25**

Продемонструвати дію алгоритма Краскала та Пріма на даному графі.



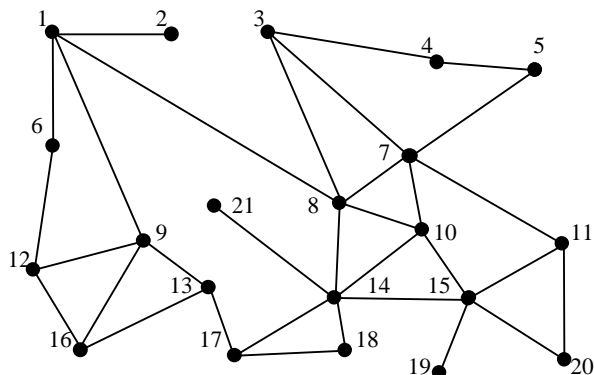
Функції вартості для графів:

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	7	(11,12)	10	(5,6)	15
(2,8)	27	(8,3)	1	(3,4)	74
(1,8)	30	(8,5)	3	(4,6)	99
(7,8)	11	(8,10)	10	(6,10)	13
(7,11)	8	(12,14)	12	(10,13)	12
(8,11)	31	(3,5)	39	(9,14)	7
(14,15)	8	(13,15)	26	(9,13)	2
(8,12)	14	(3,6)	5	(14,13)	15

$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(3,4)	21	(3,8)	1	(6,10)	5
(1,3)	32	(4,8)	2	(6,7)	37
(1,4)	26	(8,12)	7	(7,10)	20
(4,5)	24	(8,13)	26	(7,11)	18
(1,5)	15	(12,13)	12	(2,6)	23
(4,9)	17	(13,10)	1	(2,7)	25
(5,9)	12	(6,9)	17	(2,14)	91

## ЗАВДАННЯ ДО АЛГОРИТМУ ДЕЙКСТРИ

**Варіант 4.1-4.4.** Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами: Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший.



4.1. Між вершинами  $v_1$  и  $v_{19}$

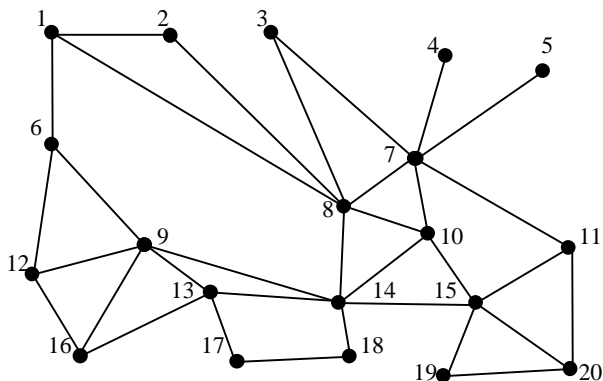
4.2. Між вершинами  $v_2$  и  $v_{18}$

4.3. Між вершинами  $v_3$  и  $v_{16}$

4.4. Між вершинами  $v_4$  и  $v_9$

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	2	(6,1)	5	(9,13)	6
(1,6)	5	(7,8)	20	(9,12)	8
(1,9)	7	(6,12)	22	(8,7)	20
(1,8)	9	(7,11)	11	(8,10)	4
(3,4)	12	(15,14)	8	(8,14)	15
(3,8)	4	(5,4)	9	(11,15)	9
(3,7)	7	(5,7)	1	(12,16)	1
		(15,20)	25	(10,15)	5
(14,21)	40	(15,19)	15	(10,14)	10
(10,7)	7	(14,18)	4	(14,17)	15

**Варіант 4.5-4.8.** Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами: Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший.



4.5. Между вершинами  $v_6$  и  $v_{19}$

4.6. Между вершинами  $v_2$  и  $v_{18}$

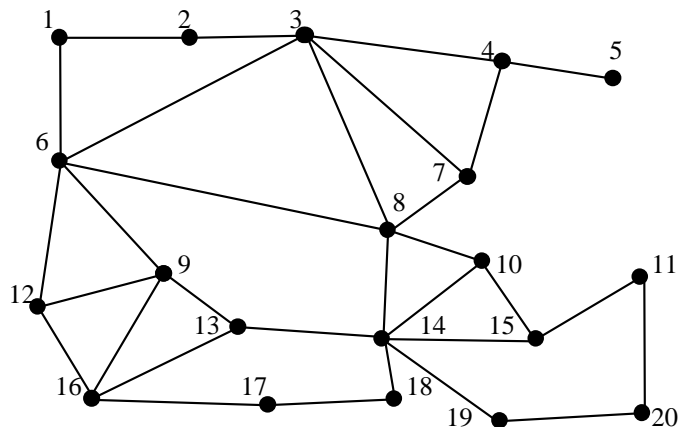
4.7. Между вершинами  $v_3$  и  $v_{10}$

4.8. Между вершинами  $v_4$  и  $v_5$



$F(G_2)$					
$r_i$	$c$	$r_i$	$c$	$r_i$	$c$
(1,2)	7	(9,12)	1	(7,11)	1
(3,8)	20	(9,16))	3	(10,8)	11
(3,7)	3	(19,15)	90	(10,14)	6
(4,7)	45	(10,13)	456	(11,15)	250
(8,14)	67	(6,12)	4	(8,7)	7
(8,10)	11	(1,6)	7	(8,3)	20
(5,7)	24			(10,7)	5
(8,1)	25	(9,13)	3		
(8,2)	30	(19,20)	10	(11,20)	15
(13,16)	8	(9,14)	15	(10,15)	11
(13,17)	4	(13,14)	10	(14,18)	25

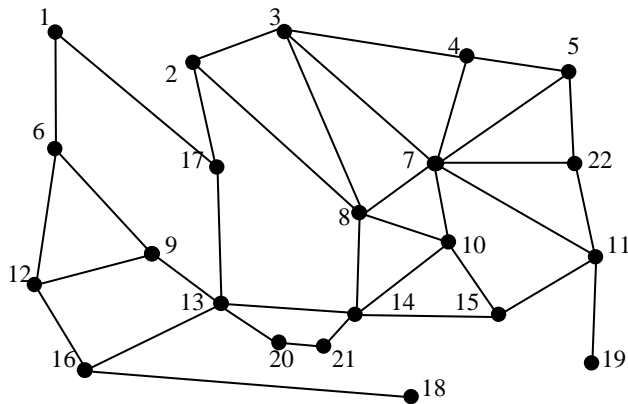
**Варіант 4.9-4.12.** Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами: Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший.



- 4.9. Між вершинами  $v_5$  и  $v_{19}$
- 4.10. Між вершинами  $v_1$  и  $v_{18}$
- 4.11. Між вершинами  $v_3$  и  $v_{16}$
- 4.12. Між вершинами  $v_6$  и  $v_{10}$

$F(G_3)$					
$r_i$	$c$	$r_i$	$c$	$r_i$	$c$
(1,2)	13			(3,4)	3
(1,6)	5	(14,10)	1	(3,7)	7
(2,3)	1	(6,12)	2	(7,4)	9
(8,6)	78	(11,15)	77	(13,14)	13
(8,10)	24	(6,9)	56	(11,20))	14
(9,12)	56	(16,13)	20		
(15,10)	77			(3,8)	15
(16,17)	20	(17,18)	9	(7,8)	8
(14,18)	3	(14,15)	30	(14,19)	18

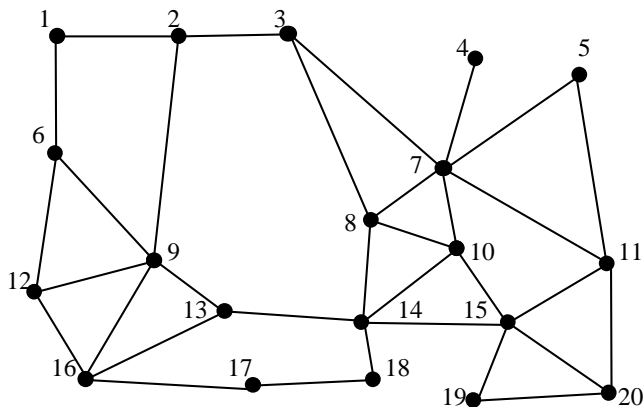
**Варіант 4.13-4.16.** Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами. Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший.



- 4.13. Між вершинами  $v_1$  и  $V_7$
- 4.14. Між вершинами  $v_2$  и  $v_{18}$
- 4.15. Між вершинами  $V_{15}$  и  $V_{19}$
- 4.16. Між вершинами  $v_1$  и  $v_2$

$F(G_4)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,17)	22	(22,11)	12	(20,21)	7
(1,6)	11	(19,11)	3	(5,22)	3
(2,17)	34	(5,4)	7	(15,14)	2
(2,3)	45	(4,7)	87	(6,12)	1
(2,8)	1	(10,14)	15	(6,9)	6
(4,3)	8	(11,7)	7	(13,16)	17
(8,3)	6	(12,16)	4	(21,14)	3
(7,3)	89	(20,13)	6	(8,10)	10

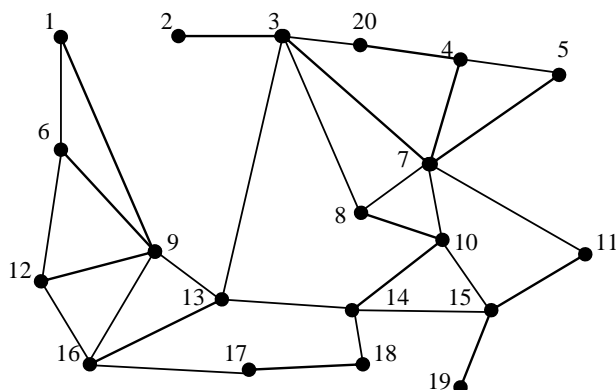
**Варіант 4.17-4.20.** Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами. Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший.



- 4.17. Між вершинами  $v_1$  и  $v_{20}$
- 4.18. Між вершинами  $v_3$  и  $v_{18}$
- 4.19. Між вершинами  $v_3$  и  $v_{17}$
- 4.20. Між вершинами  $v_4$  и  $v_5$

$F(G_1)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,2)	4	(5,11)	14	(11,20)	0.1
(2,3)	78	(7,8)	5	(11,7)	9
(1,6)	3	(3,8)	6	(11,5)	6
(6,9)	5	(8,10)	8	(12,16)	17
(2,9)	10	(7,4)	3	(13,14)	6
(9,12)	15	(5,7)	10	(7,3)	25
(3,7)	7	(4,8)	3	(4,5)	201
(6,12)	89	(8,14)	5	(13,16)	3
(9,16)	4	(10,14)	5	(9,13)	5
(15,14)	7	(15,19)	6	(15,11)	10
(15,20)	9	(20,19)	8	(18,17)	16
(14,18)	3	(15,10)	4		

**Варіант 4.21-4.24.** Продемонструвати дію алгоритма Дейкстри на даному графі. Використати цей алгоритм для пошуку найкоротшого шляху між вершинами. Довести, що обраний вами шлях дійсно є найкоротший.



4.21. Між вершинами  $V_{20}$  и  $V_{19}$

4.22. Між вершинами  $V_1$  и  $V_{10}$

4.23. Між вершинами  $V_3$  и  $V_{17}$

4.24. Між вершинами  $V_9$  и  $V_{11}$

$F(G_2)$					
$r_i$	c	$r_i$	c	$r_i$	c
(1,6)	2	(4,5)	1	(10,15)	5
(1,9)	4	(5,7)	5	(13,14)	9
(2,3)	26	(6,7)	8	(11,15)	11
(3,8)	12	(6,12)	9	(3,13)	30
(8,10)	8	(7,11)	7	(3,7)	13
(9,12)	9	(2,7)	4	(3,20)	6
(12,13)	10	(9,16)	3	(4,20)	4
(8,7)	4	(9,13)	5	(9,6)	15
(4,7)	7	(15,14)	11	(15,19)	40
		(10,7)	6	(10,14)	100
(13,16)	10	(12,16)	10	(15,19)	35

## ЗМІСТ

ст.

ПЕРЕДМОВА.....	3
1. КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ.....	6
1.1. Поняття комп'ютерної системи.....	6
1.2. Квантування сигналу за часом.....	6
1.3. Гратчасті функції.....	7
1.4. Різниці та суми гратчастих функцій.....	12
1.5. Різницеві рівняння.....	15
Контрольні запитання.....	18
2. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА.....	19
2.1 Визначення дискретного перетворення Лапласа.....	19
2.2 Умови існування дискретного перетворення Лапласа.....	21
2.3 Теореми дискретного перетворення Лапласа.....	25
2.4 Обернене дискретне перетворення Лапласа.....	48
2.5 Обчислення оберненого дискретного перетворення Лапласа.....	49
Контрольні запитання.....	52
3. Z – ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	53
3.1. Визначення $\mathcal{Z}$ – перетворення.....	53
3.2. Методи обчислення $\mathcal{Z}$ – перетворення.....	54
3.3. Теореми $\mathcal{Z}$ – перетворення.....	62
3.4. Обернене $\mathcal{Z}$ – перетворення.....	69
3.5. Обчислення оберненого $\mathcal{Z}$ – перетворення.....	72
3.6. Розв'язання різницевих рівнянь за допомогою $\mathcal{Z}$ – перетворення.....	76
Контрольні запитання.....	77

4.	МАТРИЦІ ТА ОПЕРАЦІЇ З НИМИ.....	79
4.1.	Поняття матриці та її види.....	79
4.2.	Алгебраїчні операції з матрицями.....	81
4.3.	Визначники, мінори та алгебраїчні доповнення матриць.....	83
4.4.	Ранг та слід матриці.....	87
4.5.	Диференціювання та інтегрування векторів і матриць.....	88
4.6.	Методи обернення матриці.....	91
4.7.	Розв'язання системи алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці.....	103
4.8.	Характеристичне рівняння та власні значення матриці.....	105
4.9.	Власні вектори матриці та методи їх обчислення.....	106
	Контрольні запитання.....	115
5.	ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦЬ.....	117
5.1.	Поняття лінійного перетворення матриць.....	117
5.2.	Діагоналізація матриці.....	118
5.3.	Перетворення матриці до форми Жордана.....	121
5.4.	Перетворення матриці до канонічної форми.....	124
5.5.	Перетворення матриці до спряженої канонічної форми.....	130
	Контрольні запитання.....	134
6.	ТЕОРЕМА КЕЛІ-ГАМІЛЬТОНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.....	135
6.1.	Теорема Келі-Гамільтона.....	135
6.2.	Обернення матриць.....	138
6.3.	Обчислення значень матричних поліномів.....	139
6.4.	Обчислення матричних функцій.....	143

6.5. Обчислення експоненціальної функції матриць у формі клітин Жордана.....	147
6.6. Обчислення експоненціальної функції матриць за допомогою їх перетворення на форму Жордана.....	152
6.7. Обчислення експоненціальної функції матриці за допомогою зображення її у вигляді блочних підматриць.....	155
Контрольні запитання.....	159
Список використаної та рекомендованої літератури до розділів 1-6.....	160
7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ .....	162
7.1. Явища. Випробування. Події .....	162
Контрольні запитання та завдання.....	170
7.2. Повторні випробування .....	171
Контрольні запитання та завдання.....	177
7.3. Випадкова величина. Характеристики законів розподілу ймовірностей випадкових величин.....	177
Контрольні запитання та завдання.....	189
7.4. Числові характеристики випадкових величин .....	190
Контрольні запитання та завдання.....	198
7.5. Найпростіші граничні теореми .....	199
7.6. Багатовимірні випадкові величини.....	202
Контрольні запитання та завдання.....	212
7.7. Типи законів розподілу ймовірностей випадкових величин.....	213
7.7.1. Рівномірний розподіл.....	213
7.7.2. Нормальний розподіл .....	216
7.7.3. Біномний розподіл .....	221
7.7.4 Експоненціальний розподіл .....	223
Контрольні запитання та завдання.....	224

8.	СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ.....	225
8.1.	Основи теорії вибірки.....	225
	Контрольні запитання та завдання.....	228
8.2.	Статистичне оцінювання параметрів розподілу.....	228
	Контрольні запитання та завдання.....	232
8.3.	Основи дисперсійного аналізу.....	233
8.3.1.	Однофакторний дисперсійний аналіз.....	234
8.3.2.	Двофакторний дисперсійний аналіз .....	242
	Контрольні запитання та завдання.....	246
8.4.	Кореляційний аналіз.....	247
8.4.1.	Типи зв'язку між величинами.....	247
8.4.2.	Оцінювання тісноти зв'язку між випадковими величинами.....	249
8.4.3.	Основи регресійного аналізу.....	251
	Контрольні запитання та завдання.....	270
	Список використаної та рекомендованої літератури до розділів 7 та 8.....	271
9.	ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ.....	273
9.1.	Основні визначення та властивості графів.....	274
9.2.	Види графів.....	277
9.2.1.	Неорієнтовані графи.....	277
9.2.2.	Орієнтовані графи.....	279
9.2.3.	Елементи графів.....	281
9.2.4.	Степінь графа.....	283
9.3.	Маршрути та зв'язність.....	284

9. 4. Матриці неорієнтованих графів.....	287
9.4.1. Матриця суміжності.....	287
9.4.2. Матриця інцидентності графа .....	288
9.5. Матриці оргграфів.....	289
9.6. Ізоморфізм графів.....	291
Контрольні запитання та завдання.....	293
9.7. Операції над графами.....	295
9.8. Обходи графів .....	299
9.8.1. Графи Ейлера .....	299
9.8.2. Гамільтонові графи .....	303
Контрольні запитання та завдання.....	307
9.9. Блоки.....	309
9.9.1. Точки з'єднання, мости.....	310
9.9.2. Графи блоків і графи точок з'єднання.....	312
Контрольні запитання та завдання.....	314
9.10. Дерева.....	314
9.10.1. Опис дерев.....	314
9.10.2.Дерева на множині вершин.....	317
9.10.3.Ідентифікація дерев.....	320
9.10.4. Дерева графа.....	322
10. АЛГОРИТМИ НА ГРАФАХ.....	324
10.1. Остовні дерева мінімальної вартості.....	325
10.2.Алгоритм Крускала.....	326
10.3. Алгоритм Пріма.....	328
10.4. Алгоритм Дейкстри.....	330
Контрольні запитання та завдання.....	334
Список використаної та рекомендованої літератури до розділів 9 та 10.....	334



## ДОДАТКИ...

Додаток 1. Таблиця перетворень Лапласа.....	336
Додаток 2. Таблиця $D$ -перетворення.....	340
Додаток 3. Таблиця $Z$ -перетворення.....	343
Додаток 4. Таблиця значень функції Пуассона.....	345
Додаток 5. Таблиця Значень функції Лапласа.....	346
Додаток 6. Критичні точки $F$ -розподілу при $\alpha = 5\%$ .....	348
Додаток 7. Критичні значення для $t$ – критерію .....	350
Додаток 8. Завдання до розділу «БЛОКИ».....	353
Додаток 9. Завдання до алгоритмів Краскала та Пріма.....	356
Додаток 10. Завдання до алгоритму Дейкстри.....	375