

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ОРИНЯК АНДРІЙ ІГОРОВИЧ

УДК 539.4

ДИСЕРТАЦІЯ

**Методи розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень з врахуванням
геометричної нелінійності та довільної форми тріщини**

05.02.09 – ДИНАМІКА ТА МІЦНІСТЬ МАШИН

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ А.І. Ориняк
(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник: Крищук Микола Георгійович
доктор технічних наук, професор

Київ 2021

АНОТАЦІЯ

Ориняк А.І. Методи розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень з врахуванням геометричної нелінійності та довільної форми тріщини. –

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин. – Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", МОН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розробці чисельних і аналітичних методів розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень, (КІН) для неklasичних проблем механіки руйнування, зокрема, для тріщин складної форми та для тріщин в тонкостінних конструкціях з врахуванням геометричної нелінійності, (ГН) та їх застосуванню в різних галузях промисловості України, зокрема в атомній, для розрахунку елементів реакторної установки.

Представлена модифікація методу Вільямса, що описує напружений стан в околі тріщини. В доповнення до класичного підходу враховані (додаткові) члени, що є нескінченими в околі тріщини, проте затухають на нескінченності. Це дало змогу запропонувати аналітичний спосіб розрахунку КІН для тріщин в нескінчених тілах, та зокрема тих, що є частково навантаженими на берегах тріщини. Ідея методу полягає в розбитті всієї області тіла на дві складові – внутрішню, що охоплює вершину тріщини, та зовнішню. В внутрішній області використовуються лише класичні функції Вільямса, а в зовнішній – можуть використовуватися класичні та обов'язково враховуються додаткові члени. На границі між вибраними підобластями записуються умови спряження, суть яких полягає в прирівнюванні напружень і переміщень в двох підобластях. Показана надзвичайна ефективність даного методу для тіл, що мають форму круга, чи є нескінченими, де практично точні значення (до 6-7 знаку) досягаються при використанні не більше ніж 12-16 членів розкладу. Проте для тіл, видовженої в одному напрямку форми, метод дає уже гірші значення, з похибкою, що може

досягати 2%. Практична цінність отриманих результатів полягає в отриманні простого і ефективного інструменту для перевірки можливостей комерційних пакетів розрахунку параметрів механіки руйнування, які, як відомо, не завжди дають правильні результати для тіл, що частково навантаженні на берегах тріщини, чи містять різномірні матеріали.

Розглянута тонкостінна труба з довгою осьюовою тріщиною, що дає змогу розглядати її як кільце з поверхневою тріщиною. Труба навантажується внутрішнім тиском і може містити початкові відхилення форми від ідеального круга. Задача визначення КІН вперше розглянута в геометрично нелінійній постановці, коли для лінійного матеріалу враховуються зміни геометрії тіла в процесі деформування. Спочатку на основі методу Чена-Фінні, що розглядає тріщину як зосереджену податливість, та оригінального рішення в геометрично нелінійній постановці для деформування криволінійної балки з початковими відхиленнями форми від ідеально кругової – отримані компактні аналітичні формули, що дають значення КІН для тріщини довільної глибини. Потім на основі застосування кінцевоелементної моделі в геометрично нелінійній детальній покроковій процедурі отримані чисельні значення КІН. Порівняння результатів з однієї сторони, засвідчили близькість, а значить точність і ефективність аналітичної і чисельної процедур. З іншої сторони, вперше в науковій літературі для поверхневих тріщин отримані значення КІН в геометрично нелінійній постановці. Зокрема показано, що при реальних значеннях тиску в ідеально кругових трубах з тріщинами глибиною до половини товщини стінки труби, розраховані значення КІН можуть бути на 10-15% меншими, ніж дає лінійний підхід, що є суттєвим уточненням існуючих результатів. Що стосується розрахунку КІН в реальних трубах з незначно (овальність має менше 2%) неправильною формою, то спочатку (при малих значеннях тиску) реальне КІН може бути в три рази більшим від того, що дає лінійний підхід. Зі збільшенням тиску, значення КІН наближаються до значень, що дає лінійна теорія, проте так і не досягають цього значення. Очевидно, що такі результати мають як наукове значення, так і цілком практичне застосування, і в змозі пояснити, чому стрес

корозійні тріщини на магістральних газопроводах виникають в певних місцях на поверхні, та для певних труб, що мають відхилення форми від ідеальної.

Інша геометрично нелінійна задача досліджувалася чисельно з допомогою відомих комплексів МСЕ для наскрізної тріщини, що навантажена значною додатньою поздовжньою силою (основний розглядуваний фактор геометричної нелінійності) та незначним внутрішнім тиском. Така постановка відрізняла дану задачу від досліджень, що проводилися в НАСА (США), де тиск і поздовжня сила були пропорційними. Дослідження і підтвердження правильності побудованої МСЕ моделі проводилося на основі результатів приведених в відомих міжнародних стандартах для геометрично лінійних задач. Геометрична нелінійність досліджувалася шляхом інкрементального збільшення навантаження і відповідного перерахунку КІН для уже врахованої зміни деформованої геометрії (кривизни). Було нараховано ряд задач визначення КІН для різних радіусів труби та безрозмірних значень сили. Визначені безрозмірні параметри, що визначають відхилення значень КІН від лінійних, і для них шляхом обробки отриманих результатів методом найменших квадратів запропоновані аналітичні формули, що уточнюють значення КІН для наскрізних тріщин. Це має як велике теоретичне, так і практичне значення. Зокрема, показано, що для реальних труб звичайні підходи можуть завищувати (при додатній осьовій силі) значення КІН на 4-6%. Відмічено, що врахування великих значень тиску, можливих пластичних деформацій, може ще більше знижувати реальні значення КІН. Таким чином, показана значимість проблематики і відмічена необхідність подальших досліджень в цьому напрямку.

Відмічена необхідність аналізу плоских тріщин неканонічної форми в трьохвимірних тілах. Це пов'язано з тим, що майже всі існуючі рішення в літературі, та всі рішення в нормативних документах відносяться до тріщин, що мають форму еліпса чи його частини. Разом з тим, реальні тріщини, що виявляються засобами неруйнівного контролю, є тріщинами неправильної форми, наприклад, мають форму підкови. Тому потрібно створювати аналітичні методи,

які б дали змогу оцінити вплив форми тріщини, та верифікувати існуючі чисельні процедури МСЕ.

З цією метою розглянуто плоскі внутрішні тріщини в нескінчених тривірних тілах. Постановка задач для них зводиться до відомого інтегро-диференційного рівняння теорії пружності, аналітичні замкнуті рішення якого існують лише для тріщини кругової форми та лише для деяких простих законів навантажень еліптичної тріщини. Розроблено універсальний напіваналітичний метод розв'язку інтегро-диференційного рівняння теорії пружності для плоских тріщин нормального відриву довільної форми. Запропоновано розглядати переміщення берегів тріщини в вигляді добутку певної функції форми тріщини, що враховує відому асимптотику поведінки поля переміщень біля границі тріщини, і певного поліноміального ряду. Що стосується функції форми, то досліджувалися три варіанти її вибору – а) класична, що залежить від відношення квадратів радіальної координати розглядуваної точки, та відповідної координати точки контура; б) мультиплікативна, що основана на добутку рівнянь, що описують лінії контуру тріщини, та в) оригінальна функція Ура-Берса, що є інтегралом по контуру тріщини від оберненого квадрату відстані розглядуваної точки до кожної точки контуру. Крім того, розглядалися два принципові різні методи рішення вказаного рівняння. Перший – прямий, що передбачає інтегрування, аналітичну апроксимацію отриманих результатів з наступним диференціюванням. Інший метод, передбачає спочатку застосування аналітичного диференціювання, отримання гіперсингулярного рівняння, інтегрування якого виконувалося в кінцево-частинному сенсі з допомогою спеціальних аналітичних формул.

Результати показали, що найбільшу точість демонструє гіперсингулярний підхід з врахуванням функції форми в вигляді формули і процедури Ура-Бернса. Для перевірки отриманих результатів для квадратної тріщини, півеліптичної внутрішньої та інших застосовувався також відомий МСЕ і розроблені відповідні чисельні моделі і процедури рішення. Знову ж таки, аналітичні і чисельні результати показали дуже хорошу відповідність. Відмітимо, що аналітичні

результати мають таку перевагу, що вони дозволяють знайти КІН відразу для багатьох законів навантаження берегів.

Проведені практичні розрахунки КІН в часі для елементів конструкцій АЕС для різних сценаріїв протікання аварійних ситуацій. Створено ряд імітаційних моделей з вбудованою тріщиною, для якої розрахунки КІН проводилися методами нелінійної механіки руйнування. Для тріщин, що проходять через наплавлений матеріал, де відбувається стрибки напружень, обґрунтовано застосування методу функцій впливу, для чого розроблено аналітико-чисельну процедуру, що використовує частково неперервні базові закони навантаження. Практичні розрахунки проведені для патрубку корпусу реактора, циліндричної частини корпусу, шахти та вигородки реактора, і використовувалися для обґрунтування можливості продовження терміну експлуатації ряду енергетичних блоків АЕС України.

Ключові слова: вагові функції, функції Вільямса, геометрична нелінійність, коефіцієнт інтенсивності напружень, труба з тріщиною, тріщина неканонічної форми, крихка міцність, корпус реактора, вигородка, патрубків ВВЕР.

SUMMARY

Orynak A.I. Calculation methods for Stress Intensity Factor with accounting for geometrical nonlinearity and arbitrary crack form. – Manuscript copyright.

The thesis for a candidate of technical science degree by specialty 05.02.09 - dynamics and strength of machines. - National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation is dedicated to the development of numerical and analytical methods for calculating the stress intensity factor (SIF) for nonclassical problems of fracture mechanics, in particular, for cracks of complex shape and for cracks in thin structures with taking into account geometric nonlinearity (GN) and their applications in various industries, in particular, for nuclear power plants, for calculation of the elements of the reactor unit.

A modification of Williams's method is presented, which describes the stress state in the crack tip. For modification of the classical approach in the considered method the additional members were presented, which are infinite in the crack tip, but attenuate at infinity. The main idea of the method is to divide the whole area of the body into two separate parts – internal one, which embraces the tip of the crack, and the external one. In the inner area, only the classic Williams functions are used, and in the outer area both the classical members and additional ones are used. At the boundary between the selected subdomains, the conjugation conditions are to be fulfilled, the essence of which is to equalize here the stresses and displacements. The very high efficiency of this method is shown for bodies that have the shape of a circle, or are infinite, where almost exact values (up to 6-7 digits) are achieved when using no more than 12-16 members of the expansion. However, for a very elongated rectangular body the method gives much worse results, and the error can reach up to 2%. The practical significance of the proposed approach consists in the obtaining the simple and effective tool for testing the capabilities of commercial packages for calculating the parameters of fracture mechanics, which, as we know, do not always provide the correct results for case when load is applied on the crack surfaces.

A thin-walled pipe with a long surface crack is considered. The pipe, surface of which may contain the initial deviation from ideal circle, is loaded by inner pressure. In first time the problem of determining the SIF was considered in a geometrically nonlinear formulation, when changes in the geometry of the body in the process of deformation are accounted for linear material behavior. Based on the Chen-Finnie method, which considers the crack as concentrated compliance, and on original solution for geometrically nonlinear behavior of curved initially distorted beam, the compact analytical formulas are obtained, which gives the value of SIF for each value of inner pressure. Comparison of the analytical results with those obtained by careful numerical FEM analysis, on the one hand, showed their good correspondence, and therefore the accuracy and efficiency of both the analytical and numerical procedures are confirmed. On the other hand, for the first time in the scientific literature, the value of SIF in a geometrically nonlinear formulation are obtained for surface cracks in slightly distorted cylindrical shell with surface long crack. It was shown that even for perfectly circular pipes having the cracks with depth up to half of the thickness of pipe walls, loaded by moderate level of inner pressure, the geometrical nonlinear values of SIF can be 10-15% less than those at linear approach application. This is very significant practical result.

Another geometrically nonlinear problem is numerically investigated by known commercial FEM software for the through crack, which is loaded by a significant value of additional longitudinal force (the main factor of geometric nonlinearity considered) and small value of internal pressure (linear consideration). This statement distinguished this task from research conducted at NASA (USA), where the pressure and axial force were proportional as to pipe with closed ends. The geometric nonlinearity of the study is investigated through an incremental increase in loads and the corresponding recalculation of the SIF for the already taken into account changes in the deformed geometry (curvature). A number of tasks for determining the SIF for different pipe radii and dimensionless force values were calculated. Dimensionless parameters, which characterize the deviation of the values of SIF from the linear one, are numerically determined. Application of least square method allowed to suggest the simplified analytical formula for calculation of these deviations. These results are of great

theoretical and practical importance. In particular, it is shown that for real pipes the neglecting by influence of axial force in usual approach may lead to 4-6% error of SIF determination. It is noted that additional account for large values of pressure, possible plastic deformations, may further reduce the actual values of SIF. Thus, the significance of the problems and the need for further research in this direction are shown.

The necessity of analysis of flat cracks of non-canonical shape in three-dimensional bodies is noted. This is due to the fact that almost all existing solutions in the literature and reference results in normative documents are given for cracks that have shape of an ellipse or its part. However, real cracks detected by non-destructive testing are irregularly shaped cracks. Therefore, it is necessary to create the analytical methods that would allow to assess the impact of the crack shape, and to verify them with careful numerical procedures by FEM.

For this purpose, flat internal cracks in infinite 3D body are considered. The formulation of problems for them is reduced to well-known integro-differential equation of the theory of elasticity. Note, that exact fundamental analytical solutions of which exist only for a circular crack and only for some simple laws of loading for an elliptic crack. A universal semi-analytical method for solving the integro-differential equation of the theory of elasticity for plane cracks of normal separation of arbitrary shape has been developed. It is proposed to consider the displacement of the crack edges as a product of a certain function of the crack shape, which satisfy to known asymptotic behavior of the displacement field near the crack front, and a certain polynomial series. As for the functions of the form, three variants of their choice were investigated - a) classical, which depends on the squares of ratio of radial coordinate of the considered point, and the corresponding coordinate of contour point; b) multiplicative, based on the product of equations describing the straight sections of the crack contour, and c) the original Oore-Burns function, which is an integral of the crack contour from the inverse square of the distance of the considered point to each point of the contour.

The results showed that the greatest accuracy is achieved by application of hypersingular approach with Oore-Burns function of form. The verification of results

was performed for elliptic crack, semielliptic inner crack, rectangular crack. The results were compared with numerical ones calculated by FEM.

Practical calculations of SIF dependance with time for NPP reactor and its elements for different scenarios of emergency situations are carried out. A number of simulation models with a built-in crack have been created, for which SIF calculations were performed by nonlinear FEM analysis. For cracks going through the cladding, where stress jumps occur, the method of influence functions is elaborated, and analytical-numerical procedure used piece-wise continuous basic laws of loading. Practical calculations were performed for the nozzle of reactor vessel, the cylindrical part of vessel, the core barrel and core baffle. These calculations were used to justify the extension of the service life of several units of Ukrainian NPPs.

Keywords: weight functions, William's function, geometric nonlinearity, stress intensity factor, crack in pipe, non-canonical crack, brittle strength, reactor pressure vessel, core baffle, nozzle.

Список публікацій здобувача в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Крищук М.Г. Обґрунтування методик розрахунку для труби з наскрізною поперечною тріщиною при комбінованому навантаженні силою, моментом і тиском. частина: I./М.Г. Крищук, **А.І. Ориняк** // Вісник машинобудування 64, 2012р., с.76-80. (Входить до НМБ Index Copernicus). *Здобувачем проведено порівняльний аналіз літературних розв'язків та програмна реалізація.*

2. Крищук М.Г. Обґрунтування методик розрахунку j-інтегралу для труби з наскрізною поперечною тріщиною при комбінованому навантаженні силою, моментом і тиском. частина: II. / .Г. Крищук, **А.І. Ориняк** // Вісник машинобудування 65, 2012р., с.118-124. (Входить до НМБ Index Copernicus). *Здобувачем проведено порівняльний аналіз літературних розв'язків та програмна реалізація.*

3. **Ориняк А.І.** Розрахунок патрубків ДУ-850 з поверхневою пів-еліптичною тріщиною на крихку міцність. / А.І. Ориняк, С.А Радченко // Конструкційна міцність матеріалів та ресурс обладнання АЕС. «Ресурс-2012» с.159. *Здобувачем запропоновані і використані функції впливу для розрахунку патрубка ДУ-850 на крихку міцність.*

4. Ориняк И. Полуаналитический метод решения интегро-дифференциальных уравнений задачи плоской трещины. / И.В. Ориняк, А.С. Батура, **А.И. Ориняк** // Конструкційна міцність матеріалів та ресурс обладнання АЕС. «Ресурс-2012» с.161. *Здобувачу належить алгоритм програмування та знаходження розв'язку інтегро-диференційного рівняння.*

5. **Oryniak A.** The brittle strength assessment of WWER-1000 reactor pressure vessel nozzle with cladding. / A. Oryniak, S. Radchenko, I. Orynyak.// Proceedings of the ASME 2013 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2013. PVP2013-97561. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем зроблений розрахунок патрубка ДУ-850 на крихку міцність, знайдені коефіцієнти температурного запасу при аварійному режимі.*

6. Batura A. Semianalytical solution method of differential-integral equation of flat crack problem. /A. Batura, I. Orynyak, A. Orynyak// SMiRT – 22. Division IX. 2013. (Входить в НМБ Google Scholar). *Здобувачем створені інформативні рисунки, побудовані таблиці та графіки отриманих результатів, коефіцієнтів інтенсивності напружень, запропоновані модифіковані функції форми.*

7. Batura A. Semianalytical method for the sif calculation for a crack of arbitrary shape in infinite body. /A. Batura, I. Orynyak, **A. Orynyak**// Proceedings of the ASME 2014 Pressure Vessels & Piping Conference PVP2014. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем проведено розрахунок та аналіз тріщин довільної форми в нескінченному тілі.*

8. **Ориняк А.І.** Розрахунок патрубків ДУ-850 ВВЕР-1000 з півеліптичною тріщиною на крихку міцність. /А.І. Ориняк //“Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій” Львів, Україна, 2014р., с.773-778 *Здобувачем проведені варіативні розрахунки скінченно-елементних моделей, оброблені результати.*

9. Батура А.С. Напіваналітичний метод розрахунку КІН для тріщин довільної форми в нескінченних тілах. / А.С. Батура, І.В. Ориняк, **А.І. Ориняк** //“Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій” Львів, Україна, 2014р., с.337-342 *Здобувачем отримані та верифіковані аналітичні розв'язки КІН для тріщин довільної форми в нескінченних тілах.*

10. Orynyak I. The investigation of significance of the geometrical nonlinearity for 1-d crack sif calculation in thin-walled pressurized pipe./ I. Orynyak, **A. Oryniak**// Proceedings of the ASME 2015 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2015. PVP2015-45276. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем зроблені розрахунки коефіцієнтів інтенсивності напружень для тіл з початковим геометричним відхиленням.*

11. Orynyak I. Computational aspect of nonlinear fracture mechanics application./ I. Orynyak, **A. Oryniak**. // Proceedings of the ASME 2015 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2015. PVP2015-45838. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем досліджені можливості сучасних програмних комплексів при вирішенні задач з врахуванням фізичної нелінійності.*

12. Кришук М.Г. Визначення температурного запасу крихкого руйнування елементів корпусу реактора з дефектом під час аварійного режиму. /М.Г. Кришук, **А.І. Ориняк**.// Вісник машинобудування 75, 2015р., с.56-63. (Входить до НМБ Index Copernicus). *Здобувачем створені скінченно-елементні моделі, проведені всі розрахунки, оброблені результати щодо якості моделювання, написана частина статті із загальним описом об'єкта дослідження.*

13. Дубик Я.Р. Проблематика визначення залишкового ресурсу корпусу реактору Запорізької АЕС блок №1. / Я.Р. Дубик, **А.І. Ориняк** // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015 с.31. *Здобувачем виконана розробка скінченно елементних підмоделей та аналіз НДС.*

14. Batura A. The comparison of two numerical procedures for solution of integro-differential equation of flat crack problem. / A. Batura, **A. Oryniak** // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015 с.12. *Здобувачем проведені всі додаткові розрахунки, створені інформативні рисунки, побудовані таблиці та графіки отриманих результатів, сформульовано два можливих алгоритму розрахунків інтегро-диференційного рівняння.*

15. **Oryniak A.** The Accounting for Geometrical Nonlinearity for Thin-Walled Pressurized Elastic Pipe with Long Axial Surface Crack. / A. Oryniak, I. Orynyak // Journal of Pressure Vessel Technology. 2017 PVT-16-1012. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем проведені всі розрахунки скінченно-елементних моделей, оброблені результати, написані відповідні частини статті.*

16. Orynyak I. Comparison of two numerical procedures for solution of the integro-differential equation of flat crack problem. / I. Orynyak, A. Batura, **A. Oryniak**. // Engineering Fracture Mechanics, Volume 160, July 2016, pp. 185–198. (Входить в НМБ Scopus) *Здобувачем проведені варіативні розрахунки скінченно-елементних моделей, оброблені результати, написані відповідні частини статті.*

17. **Oryniak A.** Swelling of VVER-1000 core baffle: numerical modeling and direct measurement of its geometrical. / A. Oryniak, I. Orynyak. // Proceedings of the ASME

2017 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2017. PVP2017-65769. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачу належить ідея проведення розрахунків та експериментальних.*

18.Orynyak I. Fracture analysis for life time extension of reactor pressure vessel / I. Orynyak, Y. Dubyk, **A. Orynyak**. // Materials resistant to extreme conditions for future energy systems, european commission funded international workshop. — 12 - 14 June, 2017 Київ. *Здобувачем проведені всі додаткові розрахунки, створені інформативні рисунки, побудовані таблиці та графіки отриманих результатів, сформульовано два можливих алгоритму розрахунків корпусу реактора на крихку м'яцныс, а також написані відповідні частини статті.*

19.Orynyak I. Numerical calculation and experimental measurements of VVER-1000 core baffle geometrical distortion due to irradiation swelling. / I. Orynyak, **A. Oryniak** // 4-th International Conference on NNP Life Management, 23-27 October 2017, Lyon, France.

20.Oryniak A. FEM calculations of sif and coa for through axial cracks in pipes in geometrically nonlinear formulation. // **A. Oryniak**, I. Orynyak // Proceedings of the ASME 2018 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2018. PVP2018-85033. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачу належить ідея статті, написані такі частини статті: Вступ, Постановка задачі та висновки, проведено загальне редагування статті.*

21.Orynyak I. Efficient solution for cylindrical shell based on short and long (enhanced vlasov's) solutions on example of concentrated radial force. / I. Orynyak, **A. Oryniak**. // Proceedings of the ASME 2018 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2018. PVP2018-85032. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем проведені всі розрахунки, створені інформативні рисунки, побудовані графіки та апроксимація результатів, а також написані відповідні частини статті.*

22.**Ориняк А.І.** Вплив внутрішнього тиску для труби з осьовою наскрізною тріщиною в геометрично нелінійній постановці. / А.І. Ориняк, М.Г. Крищук. // Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта. м.Київ-м.Херсон 2019.

Здобувачу належить ідея, зроблені відповідні розрахунки при вирішенні задач з врахуванням геометричної нелінійності.

23. Orynyak I. Basic (discontinuous) and smoothing up (conjugated) solutions in transfer matrix method for static geometrically nonlinear beam and cable in plane. / Dr.Sci.Prof. I. Orynyak, R. Mazuryk, **A. Oryniak**. // Journal of Engineering Mechanics 2020. (Входить в НМБ Scopus). *Здобувачем зроблені відповідні розрахунки скінчено елементних моделей з врахуванням геометричної нелінійності.*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	18
РОЗДІЛ 1. СУЧАСНА ПРОБЛЕМАТИКА РОЗРАХУНКУ КІН ЧИСЕЛЬНИМИ ТА АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ	26
1.1 Поняття КІН, Функції Вільямса.	26
1.2 Визначення КІН в розрахунках цілісності конструкцій.	31
1.3 Геометрична нелінійність та її врахування	36
1.4 Тріщини неправильної форми в бескінечних тілах.....	39
1.5. Висновки по розділу, постановка задач	46
РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА АНАЛІТИЧНИХ ТА ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ З ТРІЩИНОЮ	49
2.1. Модифікація методу граничних колокацій.....	49
2.1.1 Функції Ері, внутрішні і зовнішні функції Вільямса	49
2.1.2. Застосування внутрішніх функцій Вільямса	51
2.1.3. Застосування зовнішніх функцій Вільямса	56
2.1.4. Висновки по підрозділу 2.1.	62
2.2. Геометрична нелінійність для кільця з краюною тріщиною	63
2.2.1. Ідея методу зосередженої податливості тріщини (МЗП)	63
2.2.2 Лінеаризоване рішення для криволінійної балки.....	65
2.2.3 Аналітичні розв'язки для КІН	71
2.2.4 Тріщина в ідеальному кільці.....	71
2.2.5 Геометрично нелінійні обчислення КІН МСЕ.....	73
2.2.6 Висновки по підрозділу 2.2.	76
РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ	78
3.1. Геометрично нелінійна наскрізна осьова тріщина в циліндрі	78
3.1.1 Попередній чисельний тест для ГН балки.....	79
3.1.2 Лінійна модель труби з осьовою наскрізною тріщиною.....	82
3.1.3 ГН модель труби з осьовою наскрізною тріщиною	85
3.1.4. Висновки по підрозділу 3.1.	96
3.2. Розробка двох чисельних процедур вирішення інтегро-диференційного рівняння для задачі плоскої тріщини складної форми.....	96
3.2.1 Техніка рішення інтегро-диференційного рівняння	97
3.2.2. Приклади розрахунку полів переміщень і КІН	105
3.2.3. Висновки по підрозділу 3.2	119
Розділ 4. Практичні задачі.....	122
4.1. Розрахунок корпусу реактора ВВЕР-1000 на крихку міцність	122
4.1.1. Методика проведення розрахунків	123
4.1.2. Модель корпусу реактора з тріщиною	124
4.1.3. Результати розрахунків КР	125
4.1.4. Результати розрахунків	126
4.2. Розрахунок на крихку міцність патрубку ДУ-850 реактора ВВЕР-1000	127

4.2.1. Модель патрубку ДУ-850, граничні умови.....	129
4.2.2. Визначення функції впливу.....	133
4.2.3. Процедура розрахунку КІН для аварійних режимів експлуатації	138
4.2.4. Визначення температурного запасу крихкого руйнування патрубка ..	148
4.2.5. Альтернативний аналіз патрубка ДУ-850 на крихку міцність.	150
4.2.6. Результати розрахунку патрубка ДУ-850 на крихку міцність 4.2.	160
4.3. Розрахунок опору крихкого руйнування вигородки ВВЕР-1000	162
4.3.1. Загальні положення по розрахунку вигородки на ОКР.....	162
4.3.2. Результати розрахунків на ОКР для Зони 1.....	168
4.3.3. Результати розрахунків на ОКР для Зони 2.....	170
4.3.4. Результати розрахунків на ОКР для Зони 3.....	171
4.3.5. Висновки по підрозділу 4.3.	173
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....	175
Додаток А.....	195

ВСТУП

Актуальність теми. Механіка руйнування вже давно стала технологічною наукою, інструменти якої, а саме: критерії граничного стану, методи розрахунку, експериментальні дослідження - активно використовуються, як на стадії проектування відповідальних високо навантажених конструкцій, так і на стадії їх експлуатації при діагностуванні стану та подовженні ресурсу. Одним із ключових параметрів її є так званий коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), що описує сингулярність полів напружень та переміщень в околі тріщини. Цей параметр, по суті і започаткував виникнення лінійної механіки руйнування (ЛМР).

На перший погляд розрахунок КІН не є актуальною задачею. Аналітичні методи потужно розвивались в 60-80 роки минулого століття, інженерні методи в 80-х та 2000-х роках, а тепер існують спеціалізовані комп'ютерні програми, що часто роблять таку задачу суто технічною. Тому довідкові значення КІН, отримані різними методами, широко представлені в літературі та довідниках. На даний час відбувається потужний розвиток методів нелінійної (непружної) механіки руйнування (НМР). Проте НМР часто призводить до неоднозначних результатів у випадках складних навантажень: при наявності значних температурних і залишкових напружень; у випадку непропорційного навантаження, коли співвідношення між напруженнями механічної і деформаційної природи змінюється з часом. Тоді при аналізі розв'язків задач методами НМР потрібно проводити співставлення з результатами отриманими в рамках ЛМР. Більше того, на практиці виникають ефекти майже недосліджені в рамках ЛМР, але які можуть виявитися досить значними. Передумовою їх врахування є розроблення відповідних методів в рамках ЛМР.

В класичній механіці, для порівняно тонкостінних та довгих конструкцій уже давно є розуміння, і це вже відображено в нормативних документах, що врахування геометричної нелінійності (тобто не початкової, а деформованої геометрії тіла) може суттєво уточнити результати розрахунку напруженого стану.

На жаль, подібний аналіз конструкцій з тріщинами в механіці руйнування ще не проводиться.

Інша малодосліджена задача – це тріщини неправильної геометричної форми. Реальні тріщини в конструкціях далекі від еліпса, чи його частини, як приймається в майже усій науковій та нормативній літературі. Вони можуть мати форму підкови, півмісяця, зірки та інші. Більше того, в практичних розрахунках на крихку міцність патрубків реактора в нормативній літературі передбачено моделювати форму тріщини як лунки, для якої немає розв’язків по визначенню КІН в довідниках чи літературі, і тому інженерам важко продемонструвати правильність їхніх результатів.

І, накінець, існує інший аспект проблематики інженерного застосування методів ЛМР – це наявність простих і зрозумілих алгоритмів і розв’язків задач для розрахунків деформацій і напружень в околі тріщини. Не секрет, що доступність чисельних методів привела до зменшення ролі аналітичних досліджень і розуміння суті розрахункового КІН, околу його домінантного впливу, і труднощів з вибором критеріїв. Вважаємо, що повернення до першоджерел, використання методу Вільямса (звідки майже і виникли перші напіваналітичні методи, та власне і саме поняття КІН) та запропонованих його модифікацій, - є важливою задачею для тих, хто впроваджує методи МР в інженерію.

В зв’язку з цим розробка простих аналітичних методів, важливих для розуміння проблематики розрахунку КІН, розробка аналітичних та чисельних методів для неklasичних задач лінійної механіки руйнування: а саме врахування геометрично нелінійних ефектів та аналіз тріщин неправильної форми та застосування отриманих результатів для аналізу технічного стану та подовження ресурсу конструкцій АЕС є важливими і актуальними задачами інженерної практики, що має істотне наукове і прикладне значення.

Зв'язок з науковими планами, програмами темами. Робота виконана в розвиток наукового напрямку кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів “КПІ ім. І. Сікорського”, а саме – «Розробка моделей та критеріїв

руйнування елементів конструкцій при складних термосилових навантаженнях з урахуванням ушкоджень». В тому числі при довготривалій експлуатації (блоки 14,15)», № держреєстрації 0109_004855 та в рамках господарських науково-технічних договорів по оцінці технічного стану та перепризначення терміну експлуатації реактора енергоблока №2 ВП ЮУ АЕС, №1, №2, підприємством Луганська ТЕС структурної одиниці ТОВ «Востокенерго» за темою «Дослідження залишкового ресурсу паропроводів високого тиску ТЕС, що знаходяться в №3 ВП ЗАЕС, у тому числі його елементів (номера науково-технічних договорів № 03.09/250209 -5Л23/5.41.4 від 09.02.2009 р. з Держреєстрації: ІЮ-1105-01 від 05.05.2011 р., 75/171-11 від 07.07.2011 р., 623-08-15/41 від 04.08.2015 р.).

Мета і задачі досліджень – розробити чисельні і аналітичні методи розрахунку КІН для неklasичних проблем механіки руйнування, зокрема для плоских тріщин довільної форми в тривимірних тілах та для тріщин в тонкостінних конструкціях, де проявляється ефект геометричної нелінійності (ГН), застосувати отримані методики та алгоритми для вирішення практичних задач для продовження ресурсу реактора та обладнання АЕС України.

Для досягнення мети досліджень в роботі поставлені наступні задачі:

1. Провести модифікацію методу Вільямса для тіл навантажених по частині поверхні тріщини. Дослідити границі застосування даного методу, як історично першого та найпростішого напівчисельного методу.
2. Розробити аналітичний метод розрахунку КІН в трубах з довгими осьовими поверхневими тріщинами з врахуванням геометричної нелінійності в залежності від величини тиску. Отримані результати співставити з чисельними розв'язками методом скінченних елементів (МСЕ) на основі застосування комерційних пакетів програм інженерного аналізу конструкцій.
3. Побудувати чисельні моделі для розрахунку КІН та розкриття берегів тріщин в геометрично нелінійній постановці для наскрізних тріщин в залежності від величини осьової сили при малій величині внутрішнього

тиску. Показати значимість ефекту ГН для реальних лабораторних експериментів.

4. Розробити універсальний напіваналітичний метод розв'язку інтегро-диференційного рівняння теорії пружності для довільної форми тріщин нормального відриву. Побудувати чисельні моделі з використанням комерційних пакетів програм на основі МСЕ та порівняти результати.
5. Створити імітаційні моделі та провести практичні розрахунки КІН в часі для елементів конструкцій АЕС для різних сценаріїв протікання аварійних ситуацій.

Об'єкт досліджень – тріщини в плоских тілах, тонкостінній циліндричній оболонці, тривимірних нескінченних тілах, елементах конструкції реакторної установки.

Предмет досліджень – КІН та розкриття берегів тріщин.

Методи досліджень – аналітичні, напіваналітичні та чисельні методи теорії пружності і механіки руйнування для розв'язання неklasичних проблем механіки з врахуванням геометричної нелінійності та довільних форм поверхневих і наскрізних тріщин конструкцій.

Достовірність отриманих в роботі результатів досягається, як обґрунтуванням коректності аналітичних методів, співставленням їх з результатами, одержаними на основі комерційних пакетів МСЕ, які в свою чергу отримувались на сітках різної якості та застосуванням різних ітераційних процедур, проведенням чисельного доведення збіжності результатів розрахунків, їх аналізом та співставленням з відомими літературними даними. Постановка конкретних задач в дисертації роботі базується на використанні глибоко і всебічно обґрунтованих математичних моделях, що використовуються у сучасній механіці руйнування.

Наукова новизна отриманих результатів роботи полягає в наступному:

1. Вперше для рішення двовимірних задач теорії пружності з тріщиною застосовано зовнішні функції Вільямса, які не тільки покращали точність

класичного методу колокацій, але і дозволили враховувати дію напружень на частині поверхні тріщини.

2. На основі аналітичного розв'язку для деформування тонкостінного кільця з початковими неправильностями форми як криволінійної балки в геометрично нелінійній (ГН) постановці та застосуванню методу зосереджених податливостей вперше отримані формули розрахунку КІН для кільця з тріщиною, що показують нелінійний ріст КІН зі збільшенням тиску.
3. Розроблено ряд чисельних моделей МСЕ для тонкостінного циліндру з наскрізною осьовою тріщиною, обґрунтована покрокова процедура та вибір граничних умов для отримання коректних значень КІН з залежності від поздовжнього осьового навантаження. Чисельно продемонстровано, що узагальненим параметром впливу нелінійності може бути вираз, що дорівнює добутку поздовжнього напруження на радіус труби та на корінь квадратний з безрозмірної довжини тріщини і поділений на товщину стінки.
4. Вперше запропоновано оригінальний метод чисельно-аналітичного розв'язку фундаментальної інтегро-диференційної задачі теорії пружності для тріщин довільної форми. Показано, що точність розв'язку значно покращується, якщо технічно операцію диференціювання провести аналітично, а лише потім провести чисельне інтегрування гіперсингулярного рівняння.

Практичне значення отриманих результатів полягає в наступному:

1. Модифікований метод Вільямса є більш універсальним і точним ніж оригінальний метод граничних колокацій і має велике освітнє значення для науковців.
2. Для розрахунку КІН вперше чисельно та аналітично показана важливість ефекту геометричної нелінійності при наявності неправильностей геометричної форми перерізу труби. Так для магістральних трубопроводів при робочому тиску для тріщин з відносною до товщини стінки глибиною

рівною 0.4 - 0.5 врахування ГН уточнює КІН на 12-18%, а при наявності неправильності форми – в декілька разів.

3. Вперше отримані практичні результати для обчислення КІН та розкриття наскрізної тріщини з врахуванням дії поздовжніх напружень (в лінійному аналізі вони не враховуються). Вказано на практичну значимість цих результатів, особливо при застосуванні концепції «течія перед руйнуванням», та на прикладі реальних натурних експериментів труб до руйнування показано, що в окремих випадках похибка визначення КІН могла досягати 4-8%.
4. Результати досліджень тіл з тріщинами неправильної форми, застосовані при розрахунках КІН в елементах корпусу реактора та внутрішньо корпусних пристроїв (ВКП) ВВЕР-1000.
5. Матеріали дисертаційної роботи знайшли практичне впровадження на виробничому підприємстві ДП НАЕК "Енергоатом". Акт впровадження подано в додатку А рукопису дисертаційної роботи.

Публікації та особистий вклад пошукувача. По матеріалам дисертаційної роботи опубліковано 1 патент, 23 наукові праці, із яких – 15 в наукових фахових виданнях України та іноземних держав, які включені в міжнародні наукометричні бази і в повній мірі відображають її зміст.

Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно.

В роботі [105] автором розроблена процедура застосування методу найменших квадратів для знаходження коефіцієнтів Вільямса для різних краєвих задач. Також автором створені чисельні моделі МСЕ і отримані відповідні результати КІН.

В роботах [112, 113] автором приведено аналітичне визначення КІН, а також залежність КІН плоских тріщин для тонкостінного циліндра під дією внутрішнього тиску з врахуванням впливу початкової неправильності форми.

Створені відповідні чисельні моделі МСЕ, отримані результати та проведено порівняння їх з аналітично отриманими значеннями КІН.

В роботі [115] автору належить побудова чисельних моделей, обґрунтування граничних умов, проведення розрахунків при покрокових збільшеннях осьового навантаження, та запропоновані емпіричні формули розрахунку КІН для труби із наскрізною осьовою тріщиною з врахуванням геометричної нелінійності під дією малого внутрішнього тиску.

В дослідженнях тріщин неправильної форми в трьохвимірному нескінченному тілі [116, 119-121] автором розроблені процедури чисельно-аналітичного інтегрування по площі тріщини та проведені відповідні обчислення. Також ним створені геометричні моделі МСЕ, виконані чисельні розрахунки і проведено порівняльний аналіз.

Практичне застосування результатів розрахунку КІН в часі для аварійних режимів елементів корпусу та внутрішніх конструкцій реактора ВВЕР-1000 описано в роботах [144, 145, 148-151], де автором проведені всі розрахунки самостійно. Ним представлена процедура опису поля напружень методом найменших квадратів за допомогою восьми базових законів, які враховують стрибок напружень між корпусом реактора та наплавленням, отримані функції впливу для цих законів та створена процедура опису реальних напружень цими схематизованими законами для проведення обчислень КІН. Ним створені вбудовані геометричні моделі тріщини для безпосереднього розрахунку КІН в часі та процедури визначення температурного запасу крихкої міцності для корпусу реактора в кожний момент протікання аварійної ситуації.

Дослідження впливу фізичної нелінійності і розривних температурних напружень в процесі розрахунку параметрів механіки руйнування проводилось в роботі [56] на основі створених автором геометричних моделей і проведення ним чисельних досліджень базових задач.

Автор приймав участь в міжнародному європейському проекту Z-Ultra з 2013 по 2016 роки, в комерційних проектах по продовженню ресурсу реакторних установок АЕС України понад проектний строк експлуатації з 2012 по 2017 роки.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи обговорювалися на чотирьох міжнародних науково-технічних конференціях “Pressure Vessels and Piping” (Париж, 2013р., Бостон 2015р., Гаваї 2017р., Прага 2018,) , IAEA 4-та міжнародна конференція з продовження ресурсу АЕС (Ліон, 2017), SMiRT-22 міжнародна конференція зі структурної механіки та реакторних технологій (Сан-Франциско, 2013) та двох вітчизняних конференціях: міжнародній науково-технічній конференції „Конструкційна міцність матеріалів і ресурс обладнання АЕС” (Ресурс) – 2012 Київ, 2012р., та п'ятої міжнародної конференції “Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій” Львів, 2014р.,. Повністю робота доповідалась на XX міжнародній науково-технічній конференції. “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта” Херсон, 2019р та розширеному засіданні кафедри Динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ “КПІ імені Ігоря Сікорського” (м.Київ, 2019).

Структура та об'єм дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається із вступу та чотирьох розділів, загальних висновків. Список літератури включає в себе 151 джерел. Дисертаційна робота викладена на 195 сторінках друкованого тексту, включає в себе 65 рисунків та 37 таблиць.

РОЗДІЛ 1. СУЧАСНА ПРОБЛЕМАТИКА РОЗРАХУНКУ КІН ЧИСЕЛЬНИМИ ТА АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ

1.1 Поняття КІН, Функції Вільямса.

Сучасні практичні методи оцінки стану та прогнозування довговічності відповідальних конструкцій так чи інакше розглядають реальні чи постульовані тріщини. Механіка руйнування (МР), забезпечує наукове підґрунтя для таких методів і є найбільш динамічно розвиваючою галуззю механіки деформованого твердого тіла.

Історично МР виникла в 20-х роках минулого століття, починаючи з робіт Гріфітса по дослідженню руйнуючих зусиль в скляному плоскому зразку з центральною тріщиною [1]. Ним був сформований енергетичний підхід для оцінки руйнуючих зусиль, відповідно до якого необхідною умовою руйнування тіла з тріщиною є рівність питомої енергії деформування, G , що виділяється при малому збільшенні довжини тріщини, енергетичній характеристиці матеріалу утворення двох нових поверхонь, 2γ , тобто критерій руйнування $2\gamma = G$. Основою розрахунку G було рішення Інгліса по визначенню напруженого стану пластини з отвором еліптичної форми [2], відповідно до якого при зменшенні довжини малої осі напруження у вершині малої осі еліпса прямують до нескінченності. Саме це спонукало Гріфітса перейти до енергетичних понять, бо відношення енергії деформації, що виділяється, до довжини приросту тріщини, Δa , не залежало від Δa і дорівнювало $\pi\sigma^2/E$, де a - пів-довжина великої осі, E - модуль пружності, σ - діючі зовнішні напруження.

Практична механіка руйнування виникла з робіт Ірвіна середини 50-х років минулого століття [3,4]. По-перше, ним було виділено три незалежних види деформування біля вершини тріщини – нормальний відрив, так звана мода I, поздовжній зсув, мода II, та поперечний зсув, мода III. Найбільш розповсюдженими є тріщини моди I, коли зовнішні навантаження є симетричними відносно площини тріщини. По-друге, він ввів поняття коефіцієнта інтенсивності напружень, КІН, що однозначно описує залежність напружень

(деформацій) і переміщень біля вершини тріщини. Так наприклад для тріщини моди I, КІН позначається K_I і так визначає вказані параметри (Рис 1):

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \sigma_{x0} + 0(r^{0.5}) \quad (1a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + 0(r^{0.5}) \quad (1б)$$

$$\tau_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0(r^{0.5}) \quad (1в)$$

Ці вирази дані для напружень, а нижче приводяться відповідні вирази для переміщень, наприклад, в умовах плоскої деформації.

$$u = \frac{K_I \sqrt{r}}{G \sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1г)$$

$$v = \frac{K_I \sqrt{r}}{G \sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1д)$$

Де (r, θ) полярні і (x, y) - декартові координати, а константа $G = 0.5E/(1 + \nu)$.

По-третє. Ірвін ввів поняття критичного КІН, як характеристику матеріалу, для моди I, вона записується як K_{IC} , тобто тріщина розвивається (відбувається руйнування), якщо

$$K_I = K_{IC} \quad (2)$$

Знайдемо, відповідно представлення напружень і переміщень (1) кількість енергії G , що вивільняється в результаті приросту тріщини на довжину $\Delta a \rightarrow 0$. Розглянемо точку x , $x < \Delta a$, за вершиною тріщини. Напруження σ_y в ній даються формулою (1б), а переміщення дорівнюють нулю. Після приросту тріщини на Δa в цій точці напруження будуть рівні нулю, а переміщення – як в точці $x_1 = (x - \Delta a)$ тобто $r = \Delta a - x$, $\theta = \pi$. Знаходячи інтеграл від напружень σ_y в точці x на переміщення в точці x_1 , і ділячи на довжину приросту тріщини запишемо, слідуючи Броеку [5], що

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{2(K_I)^2}{\pi E \Delta a} \int_0^{\Delta a} \frac{\sqrt{1-x/\Delta a}}{\sqrt{x/\Delta a}} dx = \frac{(K_I)^2}{E} \quad (3)$$

Для плоского напруженого стану, і $G = (K_I)^2 / E(1-\nu^2)$ для випадку плоскої деформації. Таким чином, Ірвін дав зв'язок критерію і параметру K_I з енергетичними параметрами Гріфітса. Більше того, Ірвін дав деякі практичні формули розрахунку K_I для пластини обмежених розмірів.

Проте значний поштовх до розуміння поняття КІН та створення нових методів його розрахунку дали функції Вільямса. Вони були запропоновані в 1957 році [6] для опису напружень і переміщень в околі тріщини в плоскому тілі, і з того часу є найбільш популярними функціями, що описуються в майже усіх підручниках з механіки руйнування [7]. Вони є комбінаціями пар функцій Ері, записаних в полярних координат, такими, що дають нульові напруження на берегах тріщини. Значення функцій Вільямса полягає в наступному.

1. Дають асимптотику і розподіл напружень і переміщень в околі тріщини, тим самим даючи чітке розуміння суті коефіцієнта інтенсивності напружень, КІН, наприклад для напружень, K_{IH}/\sqrt{r} , де r - відстань від вершини тріщини.. Логіка введення цих функцій пізніше була застосована самим Вільямсом для опису напружень в пластинах з тріщинами [8], а також багатьма іншими авторами для аналізу тріщин на границі двох середовищ [9], в тому числі, що з'єднуються під певним кутом [10]. Ці рішення дозволяють аналізувати напруження по кутовій координаті і прогнозувати напрям подальшого розвитку тріщини, при складному навантаженні (моди 1+2+3) з використанням певних критеріїв (наприклад. критерію максимальних нормальних напружень) [11].

2. Дозволяють визначити область, де напруження, що контролюються КІН, є домінуючими. Вони дають масштабний фактор, з яким легко порівнювати зону пластичності чи структурні розміри матеріалу наприклад, розміри зерна металу. Разом з тим, ці функції показують, що наступні за величиною напруження є однорідними, тобто не залежать від r і діють паралельно поверхні тріщини. Ці члени отримали назву T -напружень [12]. Свого часу вони були дуже

популярними для пояснення того, чому критерії лінійної механіки руйнування (основані на понятті КІН), не завжди могли передбачити руйнуюче навантаження. T -напруження до цього часу активно використовуються для модифікації критеріїв руйнування [13]. Більш повний аспект сучасного використання несингулярних напружень для визначення форми і розмірів зони текучості, їх впливу на критерії руйнування, а також чисельні і експериментальні методи їх визначення дається в роботі [14].

3. Вони є досить зрозумілим математичним інструментом, що дозволяє аналітично вирішувати краєві задачі теорії пружності з тріщинами. Сам метод Вільямса бере початок з функцій теорії пружності Ері і використовує загальні підходи теорії комплексної змінної для двовимірних задач, розробленої Колосовим і Мусхеліашвілі [15]. Подальше застосування цих методів дозволяє знайти аналітичні вирази для коефіцієнтів Вільямса в випадку тріщин більш складної форми чи наявності декількох взаємодіючих тріщин [16].

Метод Вільямса є основою створення аналітично-чисельних методів розрахунку КІН, особливо для тріщин, що виходять на вільну поверхню тіла. Початково метод, заснований на використанні функцій Вільямса, отримав назву методу граничних колокацій (boundary collocation method), і був відносно популярним на зорі становлення практичної механіки руйнування в 60-х роках минулого століття [17,18]. Свою назву метод отримав тому, що невідомі коефіцієнти розкладу визначалися із заданих граничних умов в наперед вибраних точках границі тіла (точках колокацій), число яких дорівнювало числу невідомих. Перевагою методу є те, що всередині тіла всі співвідношення виконуються точно, адже функції Вільямса є точним розв'язком, і відхилення розрахункових параметрів (напруження чи переміщення) на границі від заданих – є мірилом точності розв'язку. В відомому довіднику Саврука М.П. з механіки руйнування [19], представлено досить багато практичних результатів отриманих цим методом.

Подальша модифікація методу полягала в наближеному задоволенні граничних умов на всій поверхні тіла, що досягалось шляхом введення поняття інтегральної квадратичної похибки і мінімізації її методом найменших квадратів

[20-23]. Використовувалися різні модифікації інтегральної похибки - для точок, рівномірно розподілених по границі, точок, що згущаються при наближенні до лінії тріщини. Разом з тим, у цих роботах відмічалось [20-23], що похибка збільшується при збільшенні відношення відстаней від різних точок границі до центра координат (вершини тріщини). Це мабуть і зрозуміло, адже функції Вільямса записані в полярних координатах, а значить є найбільш ефективними для тіл, що мають границю в вигляді круга відносно центра координат.

Більше того, в роботі [21] детально вивчались проблеми збіжності результатів, і звучали досить песимістичні оцінки щодо практичного використання методу. Відзначалось, що в певних невідомих наперед випадках результати визначення КІН розходилися, тобто зі збільшенням точок колокацій результати не прямують до одного значення, а деколи, навіть якщо і прямують, то це значення є невірним. Якщо вибирати велике число функцій Вільямса, наприклад, більше 80, то розрахункові напруження на границі показують великі флуктуації, які неможливо зменшити вибираючи метод мінімізації похибки – чи мінімізація в заданих точок (інтерполяційна апроксимація), чи мінімізація взагалі в усіх точках на границі (усереднена інтерполяція), що досягається аналітичним інтегруванням на елементарних ділянках границі. В випадку інтерполяційного методу – зміна як кількості точок що розглядаються на границі, так і кількості членів ряду Вільямса могли приводити до значних розбіжностей результатів. У випадку аналітичного інтегрування, збільшення кількості елементарних ділянок приводило до збіжності результатів, тоді як збільшення кількості членів ряду Вільямса впливало на розходження результатів. Така непередбачувана поведінка розв'язків привела автора до парадоксального висновку, що система функцій Вільямса не є повною. Вона не може гарантувати досягнення правильних розв'язків для плоского тіла довільної геометричної форми і все це накладає обмеження на застосування методу граничної колокації (іншими словами, функцій Вільямса як інструмента розв'язків краєвих задач). Зрозуміло, що в наш час наявності ефективних чисельних комерційних програм, які фактично дуже швидко дозволяють знайти майже математично точні розв'язки задач для

довільних геометрій з тріщинами, майже всі аналітичні підходи втрачають своє практичне значення. Тим не менше, питання можливостей методу, його освітнього значення, виявлення реальних переваг і обмежень функцій Вільямса, залишаються відкритими.

1.2 Визначення КІН в розрахунках цілісності конструкцій.

Три можливих напрямки розрахунку КІН використовуються в практичних розрахунках – 1) аналітичні методи, 2) чисельні методи, в основному МСЕ; 3) інженерні підходи, що комбінують здобутки 1) і результати 2).

Роль аналітичних розв’язків, як і функції аналітиків зменшуються в нашому динамічному світі. Зараз все повинно робитися швидко в комбінаціях з іншими задачами. А аналітика потребує часу. Більш того, кожне новий розв’язок вимагає на порядки більше зусиль, адже майже все, що могло бути отримано формулами, уже отримано, а людські можливості обмежені. Більше того, при величезній різноманітності конструкцій, випадків і послідовності їх навантаження, розвитку засобів комп’ютерного моделювання і наявності в комп’ютері уже побудованих геометричних моделей конструкції – все це робить нелогічним застосування аналітичних розв’язків. Тому роль аналітичних розв’язків [24] полягає в необхідності верифікації інших методів розрахунку КІН і для формування структури і відношень між геометричними і силовими параметрами в емпіричних штучних формулах. Інша роль – пошук невідомих ефектів і загального характеру, меж і інтенсивності їх проявлення.

Чисельні методи, що базуються на МСЕ, є надзвичайно популярними. Вони при правильному використанні дозволяють отримати значення КІН з довільною наперед заданою точністю. Проте на практиці завжди вимагається верифікація чисельних процедур, і демонстрація точності і збіжності результатів є необхідною умовою кожного розрахунку.

Найбільш практичними є інженерні методи, які для визначених геометрій дозволяють отримувати розв’язки задач для довільних навантажень. Виділимо дві найбільш поширених їх групи, обидві засновані на принципі суперпозиції, коли

спочатку розраховується розподіл напружень в тілі без тріщини, а потім задане поле напружень прикладається до поверхонь тріщини [25].

Перша група методів полягає в проведенні попередніх розрахунків КІН для набору різних, наприклад поліноміальних, одиночних навантажень $f_{i,j} = x^i \cdot y^j$, тобто знаходять функції впливу, $F_{i,j} = K_I(\sigma_{i,j})$. А потім, представляючи реальне навантаження σ в різні моменти часу сумою базових функцій з заданими константами-множниками, тобто:

$$\sigma = \sum A_{i,j} f_{i,j} \quad (4a)$$

Тоді КІН знаходяться, як лінійна комбінація функцій впливу помножених на відповідні коефіцієнти навантаження:

$$K_I = \sum A_{i,j} \cdot F_{i,j} \quad (4б)$$

Авторами цього методу можна вважати Ньюмена-Раджу, які запропонували цілий ряд емпіричних формул розрахунку КІН для напівеліптичних тріщин при поліноміальному навантаженні для практично важливих геометрій товстостінних пластин чи циліндрів [26]. Іншими прикладами визначення функцій впливу є роботи - [27] для окружної поверхневої тріщини в циліндрі, - [28] для осьової внутрішньої тріщини в товстостінному циліндрі, [29] для особливого випадку напівеліптичної тріщини, що виходить прямою частиною фронту на тонку наплавку в циліндрі, тощо. Фактично подібні розв'язки зібрані в універсальних документах по аналізу конструкцій з тріщинами, таких як Європейський стандарт R6 [30] американський стандарт API/ASME 579 [31], British Standard 7910 [32], Стандарт Шведського атомного регулюючого органу [33].

Друга група методів заснована на методі вагових функцій, МВФ. За визначенням вагова функція – це функція Гріна (або ж фундаментальний розв'язок) для даної геометрії при навантаженні зосередженою силою в довільній точці. Наявність ВФ $W_{QQ'}$, де Q' точка контуру тріщини (в якій вираховується КІН), а Q - довільна точка поверхні тріщини, до якої прикладається навантаження, дозволяє знаходити КІН при довільному навантаженні $\sigma(Q)$ простим інтегруванням по поверхні тріщини:

$$K_I(Q') = \int_Q W_{QQ'} \sigma(Q) dQ \quad (5)$$

Точний фундаментальний розв'язок для трьохвимірних тіл обмежується лише випадком тріщини кругової геометрії [34], і для іншої простої геометрії – еліпса, існують рішення лише в нескінченних рядах [35,36]. Тому вагову функцію для заданої геометрії $W_{QQ'}$ будують наближено. Популярною є ВФ Бернса-Ура [37], що дає явний вираз для тріщини довільної форми в нескінченному тілі. Функція Бернса-Ура є складною в практичному інтегруванні і до цього часу розроблюються наближені методи її інтегрування [38] для складних форм тріщини.

В інженерних застосуваннях для тріщин частково еліптичної форми (пів-б чверть еліпс) використовують ідеї Глінки [39] або Ориняка І [40]. Обидві використовують існуючі рішення для рівномірного навантаження берегів тріщини для уточнення вагової функції для цього тіла. Перша ідея полягає в розгляді лише двох точок, що лежать на осях еліпса і представленні вагової функції як для одновимірної краюї тріщини в плоскому тілі. Метод Ориняка І. є більш універсальним, базується на наближеному конструюванні вагової функції для нескінченного тіла, введені аналітичних поправок на вільні края [40], та дозволяє розраховувати КІН в кожній точці тіла при довільному двовимірному розподілі напружень [41]. Він ліг в основу біваріантного методу ВФ, що застосовується в NASA (США), для прогнозування довговічності літальних апаратів [42]. В даний час, метод застосовується в США для аналізу міцності і довговічності турбін [43].

Перейдемо до аналізу ефективності чисельних методів. Найбільш простими і логічними є методи, що основані на інтерполяції розрахованих вузлових переміщень точок на берегах тріщини і використанні асимптотичної поведінки переміщень (1Г-д) [44-46]. Менш розповсюдженим є метод, що використовує асимптотику поля напружень відповідно до (16) [47]. Результати представляються в вигляді залежності напружень від логарифму відстані від вершини тріщини по осі тріщини, як прямої лінії з тангенсом нахилу, що дорівнює 0.5, а вільний член пропорційний логарифму КІН.

Проте серед десятків варіантів реалізацій чисельних схем знаходження КІН беззаперечним лідером є використання поняття і техніки інтегрування на основі J – інтеграла [48,49]. В найпростішому варіанті J – інтеграл обчислюється на основі формули, що в найпростішому вигляді за відсутності залишкових і термічних напружень, має вигляд:

$$J = \int_{\Gamma} W dy - T \frac{du}{dx} ds, \quad (6a)$$

де Γ - замкнутий контур, що охоплює область навколо вершини тріщини; енергія деформації одиниці об'єму W дорівнює:

$$W = W(x, y) = W(\varepsilon) = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (6б)$$

$T = \sigma_{ij} \cdot n_j$ вектор напружень, перпендикулярний до контуру Γ і направлений назовні; u - переміщення в напрямку осі Ox ; dS - елемент контуру Γ , ε деформації. Практична реалізація формули (6а) часто зводиться до застосування формули Коші-Остроградського і переведенні контурного інтеграла в об'ємний [50, 51], що призводить до значно кращої збіжності результатів.

В роботі [52] проводився порівняльний аналіз вказаних методів і відзначено, що найкращим по ефективності є метод J – інтеграла. Він дає практично достатню точність для всіх геометрій починаючи з розмірів елементів сітки від 1/10 довжини тріщини і менше. Для отримання подібних результатів інтерполяційними методами (по переміщеннях) потрібно використовувати спеціальні сингулярні елементи, що значно ускладнює розрахунки. Подібні висновки слідують і з роботи [53], де досліджувалися компактні і круглі циліндричні зразки.

Досить складним і неоднозначним питанням при проведенні розрахунків параметрів механіки руйнування є врахування пластичної деформації в околі тріщини. Починаючи з моделі Дагдейла-Панасюка вважається, що зона пластичної деформації збільшує ефективну довжину тріщини і використовують відповідну поправку на довжину тріщини. Такий метод має зміст для деяких простих геометрій, а у випадку дії зосередженої сили він може призводити до

формального зменшення КІН (КІН залежить обернено пропорційно кореню з відстані від точки сили до вершини тріщини). Разом з тим, широке впровадження комерційних пакетів розрахунку тіл з «вмонтованими» засобами розрахунку КІН на основі методу J – інтеграла сприяло формальному і нормативному розповсюдженні розрахунків КІН з врахуванням пластичної зони навколо тріщини. Так в документі МАГАТЕ по розрахунку крихкої міцності реактора АЕС дається перевага методам фізично нелінійного розрахунку на основі J – інтеграла, а лінійним пружним розрахункам надається лише допоміжна роль [54].

Разом з тим теорія J – інтеграла розроблена в рамках деформаційної теорії, а не теорії пластичної течії. Тому фактично методи можуть розглядати лише зростаюче пропорційне навантаження (нелінійна пружність). Застороги визначення і застосування J – інтеграла описані в роботах німецького професора Брокса [55], а також описані умови отримання збіжних значень при розрахунку по різних контурах навколо тріщини. Зауважимо, що в відомому комерційному комплексі ABAQUS коректне врахування термічних напружень при розрахунку було впроваджене лише в 2013 році. Що стосується залишкових напружень, то існують значні проблеми їх моделювання і способів прикладання, адже розраховані значення J – інтегралу залежать від послідовності їх прикладення, а врахування історії навантаження принципово неможливо врахувати при застосуванні J – інтегралу при пластичному деформуванні [56]. Тому, при моделюванні залишкових напружень вводяться деякі штучні методи, які розглядають їх як пропорційно зростаючими щодо інших зовнішніх навантажень [57, 58].

Нещодавні порівняльні дослідження (benchmarks) проведені під егідою Організації з Економічного Співробітництва і Розвитку [59] показали значну різницю результатів визначення КІН з врахуванням пластики, отриманих різними групами дослідників. Крім того, врахування залишкових і термічних напружень все ще неузгоджене в різних нормативних документах і приводить до значних розбіжностей результатів розрахунку. Тому методи, засновані на обчисленні J – інтегралу з врахуванням пластичних деформацій все ще не можуть бути

однозначно рекомендованим до практичного застосування [60]. Існуючі підходи оцінки впливу залишкових напружень базуються на методах лінійної МР, КІН [61]. Саме тому на сьогоднішній день, на мою думку, найкращим підходом до визначення КІН з врахуванням пластичних деформацій є метод «узаконений» в французькому національному стандарті French RSE_M and RCC-MR Code. Відповідно до нього, розраховуються пружні значення КІН, а врахування пластичних деформацій, що виникають від діючих механічних, термічних і залишкових напружень враховуються за допомогою певних поправочних коефіцієнтів, отриманих в результаті верифікаційних розрахунків і експериментів [62]. Це дає змогу уникнути протиріч в оцінках КІН. Подібний підхід застосовується і при оцінці цілісності в Японії, де проведено уточнення цього коефіцієнта для під поверхневих тріщин [63].

1.3 Геометрична нелінійність та її врахування

Циліндричні і трубні конструкції є найбільш типовими елементами, де проводяться розрахунки дефектів методами механіки руйнування. Тонкостінні труби призначені протистояти мембранним напруженням, викликаним внутрішнім тиском, осьовою силою та глобальними моментами згинання та кручення. Труби зазвичай зроблені таким чином, щоб ці напруження були досить високими. Разом з тим, труби навантажуються певними локальними силами, спонукаючи трубу деформуватися як оболонка (або кільце в 2-D випадку). Крім дії концентрованої сили, цей тип деформаційної поведінки може бути викликаний місцевими недоліками її форми. Для 2-D випадків це може бути не співвісність зварного поперечного шва чи загальна в осьовому напрямку некруглість труби [64-66].

Поведінка оболонки (кільця) характеризується локальними моментами згину і визваними ними локальними кривизнами. Це означає, що напрямки первинних недеформованих осей змінилися. Таким чином, початкові великі мембранні напруження, що діють у напрямках початкових недеформованих осей ідеального циліндра, тепер мають не нульові проекції в перпендикулярному

напрямку до деформованих осей, і таким чином виникає додаткова поперечна сила. У свою чергу, це викликає локальний момент згину і, як результат, додаткові кривизни.

Такий вид аналізу, вплив деформованої геометрії враховується лише в виникненні додаткових поперечних сил, є найпростішим видом розгляду геометричної нелінійності. Він дуже поширений в практичних застосуваннях, оскільки він охоплює основні особливості деформації, і при розрахунку може врахований шляхом введення додаткових членів в лінійних рівняннях. Тут доречно згадати два добре відомі випадки, що розглядаються в кодах ASME [31]. Перше - це врахування зменшення гнучкості трубних згинів завдяки внутрішньому тиску [67]. Другий - це сповільнене (нелінійне) збільшення з наступним виходом на асимптотичну полицю додаткового локального напруження згину при збільшенні внутрішнього тиску в трубі з початковою неправильністю форми поперечного січення [68]. В обох випадках відбувається округлення форми та зменшення локальних податливостей.

Тріщина може розглядатися як концентрована локальна податливість, що робить форму труби не круглою. Тому цілком природно очікувати, що зі збільшенням навантаження, ця не круглість буде зменшуватися і коефіцієнт інтенсивності напружень (SIF) буде зростати нелінійно (дещо сповільнено) з прикладним навантаженням.

Разом з тим в комітетах ASME по Стандартам по Посудинам Тиску і Трубопроводам продовжується робота по уточненню КІН для труб з осьовими тріщинами, де на основі табличних значень приведених в стандарті [31], уточнюються рівняння і розробляється загальний МВФ для оцінки КІН при довільному навантаженні [69]. Важливо розуміти, наскільки суттєво впливає геометрична не лінійність на отримані значення КІН для найпростішого випадку дуже довгої тріщини. Важливо отримати аналітичне рішення, адже прикладів аналітичних рішень і чисельних майже не існує в літературі. Така робота могла би стати стартовою для розуміння необхідності і аналізу подібних задач.

Іншою не менш важливою задачею впливу геометричної нелінійності на КІН є наскрізна тріщина в тонкостінній трубі під дією внутрішнього тиску та осової сили.

Осова наскрізна тріщина часто розглядається в інженерному застосуванні, насамперед завдяки необхідності реалізації концепції «течії перед руйнуванням» (ТПР), для цілісності трубопроводів, особливо в ядерній промисловості. Основними теоретичними параметрами, необхідними для застосування ТПР, є разом з КІН поняття площі розкриття тріщини ТПР. Величина КІН звичайно представляється як розв'язок для нескінченної пластини, помноженої на так званий коефіцієнт випучення, K_V , який залежить від безрозмірної довжини тріщини, тобто напівдовжина тріщини ділиться на квадратний корінь добутку радіуса труби, R та товщини стінки t . Інтенсивна теоретична робота з розрахунку КІН була проведена в 60-х і 70-х роках минулого століття [70-73]. Методи, засновані на аналітичних рішеннях Сендера для швидкості вивільнення енергії для окружної тріщини при осовому розтягу та згині [74-77], були найбільш використовуваними методами визначення ПРТ.

Багато уточнюючих результатів для КІН та площі розкриття тріщини було створено на початку 2000-х років завдяки впровадженню потужних інструментів чисельних розрахунків [78, 79]. Комплексний документ (Fitness for Service) «придатності для роботи» до сервісного документа [31] містить зручні формули, які підходять для численних результатів розрахунку КІН та дозволяють знаходити їх при різних законах навантаження на берегах тріщини. Цікава робота була здійснена з застосуванням методу вагових функцій для аналітичного розрахунку КІН та ПРТ для будь-якого закону навантаження, базуючись на відомих результатах для КІН при постійному навантаженні [80]. Тут були розглянуті як мембранні так і згинальні навантаження, а також рівномірне та лінійне переміщення.

Інтерес до розрахунку SIF та COA був відновлений завдяки зусиллям американських чиновників NRC (комітет з ядерного регулювання) щодо розробки життєздатного методу та підходу до вирішення проблеми стресс корозійного

руйнування у системах першого контуру трубопроводу, схвалених для застосування ТПР. Цей підхід, що називається eXtremely Low Probability of fracture (надзвичайно низька імовірність руйнування), визначив вимоги, необхідні для імовірнісного інструменту механіки руйнування для безпосередньої оцінки відповідності нормам [81]. Нові покращені результати були отримані завдяки зусиллям D.-J. Shim [82-84], крім класичних тріщин, також розглядалися похилі тріщини для врахування реальної форми, що виникає в процесі росту тріщини від поверхневої до наскрізної.

Незважаючи на величезну літературу щодо осьових тріщин в циліндрах, все ще існує один аспект поведінки тріщини, принаймні у тонкостінних трубах, яких досі не здобув належної уваги. Тут ми маємо на увазі геометрично нелінійний ефект, який може бути досить великим, щоб бути врахованим у практичних цілях. Наш попередній аналіз був присвячений довгій осьовій поверхневій тріщині, де за нелінійність деформування є відповідальними великі окружні напруження.

Отже, бажання автора дослідити і цей тип нелінійності для наскрізної тріщини є цілком природним, але, як з'ясувалося, ця тема вже була частково висвітлена в роботах інших вчених за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення STAGS [85], розробленого по замовлені НАСА. Результати, як для осьових, так і для кругових тріщин представлені в [86-88]. Тому деякі ідеї цієї роботи базуються на їх результатах. Як було зазначено в роботі [86], в літературі були попередні спроби побудувати формули для КІН з врахуванням геометричної нелінійності на основі експериментально отриманих коефіцієнтів випучування або чисельних результатів. Але ці результати були в основному несумісні з результатами більш точної роботи [86].

1.4 Тріщини неправильної форми в бескінечних тілах

Як уже вказувалося можливості чисельного аналізу є дуже великими. Проте для нових задач завжди бажано мати певні теоретичні рішення як дороговкази і щодо характеру і масштабу впливу тих чи інших факторів. Тріщини неправильної форми ще донедавно були цікаві лише з теоретичної точки зору. Сучасні вимоги

розрахунку тріщин в елементах конструкцій, наприклад, корпусу реактора при термошоці [89] вимагають аналізу тріщин неканонічних форм – наприклад, підповерхневої, півеліптичної на границі основний метал – антикорозійна наплавка, чи тріщин лункової форми в патрубках реакторів.

Єдина можливість точного рішення для двовимірної тріщини є розгляд її в нескінченному тілі. Математично проблема аналізу плоскої тріщини моди I може бути зведено до розв’язку наступного інтегро-диференційного рівняння [34,90]:

$$-p(x,y)\frac{4\pi(1-\mu^2)}{E}=I(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_{(S)}\frac{U(\xi,\eta)d\xi d\eta}{R^*(x,\xi,y,\eta)} \quad (7a)$$

де S є площею плоскої тріщини довільної форми в нескінченному ізотропному тілі (x,y) і (ξ,η) є два набори декартових координат, що починаються в точці O (Рис 1); $p(x,y)$ є напруження які діють по нормалі на поверхню тріщини і $U(\xi,\eta)$ - це переміщення точок поверхні тріщини, R^* є відстань від точки приложення сили до розглядуваної точки поверхні тріщини:

$$R^*=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \quad (7б)$$

E – модуль пружності, ν коефіцієнт Пуасона.

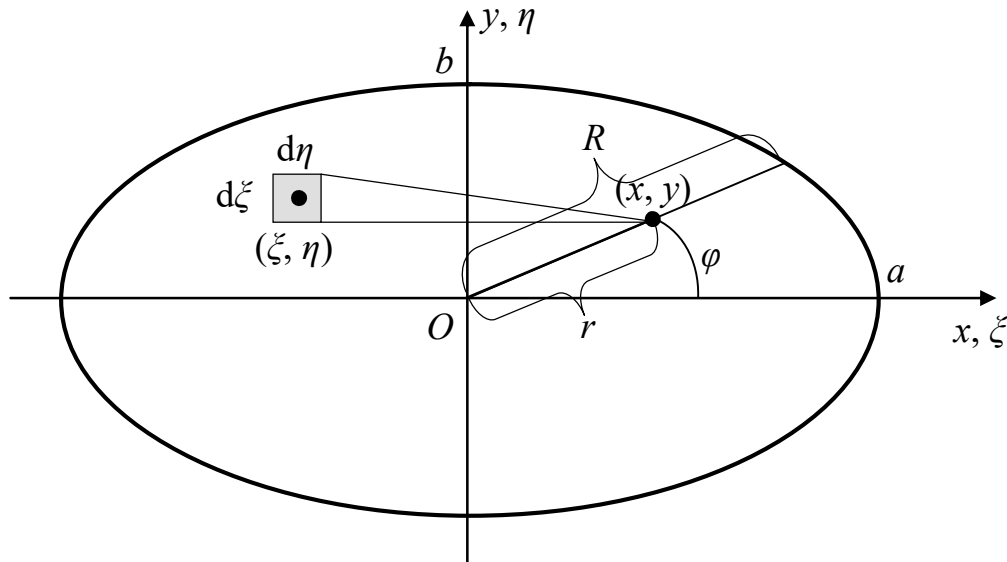


Рис 1. Системи координат і позначення для еліптичної тріщини

Якщо розходження (переміщення) берегів тріщини $U(\xi, \eta)$ відомі і представлені в аналітичному виді, тоді величина КІН в довільній точці контуру тріщини з кутовою координатою θ знаходиться з відомого граничного переходу:

$$K_I(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{U(r, \varphi)}{\sqrt{\Delta}} \quad (8)$$

де Δ є найкоротша відстань між точкою фронту тріщини з координатою $\varphi = \theta$ і точкою, що розглядається на поверхні тріщини,.

Отримання універсального розв'язку рівняння (7), незважаючи на її простоту, є надзвичайно складною задачею. До сьогоднішнього дня, ефективний розв'язок для переміщень отримано лише для кругової тріщини, а для тріщини еліптичної форми розв'язки отримані лише для поліноміального навантаження. Що стосується тріщин складної форми наявні загальні чисельні рішення (7) є досить скудними і не можуть претендувати на загальність.

Розвиток засобів чисельного аналізу робить можливим створення універсальних напіваналітичних підходів до розв'язку рівняння (7) для тріщин довільної форми. В той же час існує велике число універсальних комерційних підходів на основі МСЕ, що здатні отримати розв'язок з високим рівнем точності. Виникає природне питання в важливості і доцільності теоретичних методів.

З нашої точки зору теоретичні методи все ще є і будуть в майбутньому затребувані практикою:

- Як еталонні розв'язки для перевірки точності та адекватності чисельних рішень. Це є дуже потрібним адже навіть достатньо авторитетні розрахункові комплекси програм можуть давати систематичні похибки при виборі засобів розбивки області і елементів що використовуються в залежності від геометрії тріщини.

- Як основа розробки спеціальних напіваналітичних методів, таких як метод граничних елементів, напіваналітичні методи із застосуванням методів СКЕ. Крім того, наявність виразів для переміщень розкриття тріщини дозволяють отримання

потенціальних функцій теорії пружності. В кінцевому підсумку це дозволяє провести якісний аналіз напружено-деформованого стану тіла, наприклад, проаналізувати взаємовплив близько розташованих тріщин, оцінити відстань затухання напружень, спричинених тріщиною, оцінити вплив відстані від тріщини до вільної поверхні.

Розглянемо існуючі аналітичні та чисельні підходи до розв'язку інтегро-диференційного рівняння (7). Найбільш відомим аналітичним розв'язком для поля переміщень берегів еліптичної тріщини є розв'язок отримане Рой і Саха [36] на основі методу інтегральних рівнянь, де відстань $R(x, \xi, y, \eta)$ представлена як подвійний інтеграл від двох допоміжних змінних (з допомогою перетворення Фур'є). Наступна трансформація виразу в модифікованих циліндричних координатах і розклад розкриття тріщини в ряд Фур'є дозволила авторам отримати найбільш загальне рішення для випадку зосередженої сили

В роботах [91, 92] даються загальні аналітичні методи для обчислення потенціалів $\omega(x, y)$ для еліптичних областей:

$$\omega(x, y) = \iint_{(s)} \frac{U(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^*(x, \xi, y, \eta)} \quad (9)$$

В яких переміщення, $U(\xi, \eta)$, може бути представлено як функція однієї змінної $L = 1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2$, де a і b є головні півосі еліпсу, тобто $U = f_{disp}(L)$. Деякі практичні випадки різних форм $f(L)$ розглядалися в [92], наприклад, коли $f_{disp}(L) = \sqrt{L}$. В останньому випадку обчислений потенціал дорівнює $\omega(x, y) = \alpha_{0,0} + \alpha_{0,2}x^2 + \alpha_{2,0}y^2$, де α є набір відомих коефіцієнтів. Застосовуючи диференційний оператор до (7), легко тримати величину діючих напружень $p(x, y)$ (які очевидно тут є константою). Такий підхід використовувався в [34] для отримання величини КІН при однорідному навантаженні берегів тріщини. Робота [34] є помітною в тому сенсі, що рішення (7) отримане прямолінійно – спочатку проведене інтегрування, а потім застосовувався диференційний оператор.

Більшість сучасних робіт використовують модифікацію (7), коли відповідно до підходу Іакомідіса [93], спочатку застосовують диференційний оператор до підінтегрального виразу, а потім проводять інтегрування:

$$I(x, y) = \iint_{(s)} \frac{U(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^{*3}(x, \xi, y, \eta)} \quad (10)$$

Тут інтеграл (10) інтерпретується в кінцево-частинному понятті (змісті) Адамара.

Як показано в [94,95], можливо провести пряме аналітичне інтегрування (4) для еліптичної тріщини, якщо поле переміщень представлено в вигляді:

$$U(\xi, \eta) = \sqrt{L} \cdot \xi^i \eta^j \quad (11)$$

Метод оснований на переході від декартових до спеціальних полярних координат і в роботах отримане деяке число розв'язків при обмежених i та j .

Чисельний аналіз гіперсингулярного рівняння (10) є більш розповсюдженим, тому що він не обмежується спеціальною (еліптичною чи прямокутною) формою тріщини. А прямокутні та еліптичні тріщини розглядаються в них як засіб для перемірки інших більш складних геометрій. Поки, чисельні процедури можуть бути розділені на дві групи, ми назвемо їх дискретними і неперервними (класичними).

Дискретні процедури передбачають розбиття області тріщини на велике число суміжних трикутних елементів зі спільними вузлами на границі між ними [96-98]. Переміщення в цих вузлах розглядаються як пошукові невідомі. Аналітична інтерполяція виконується в межах кожної елементарної області і встановлюється загальне правило інтегрування для кожного частинного закону інтерполяції. Розглядається два різні випадки розміщення точки прикладення сили – точка (x, y) знаходиться всередині чи ззовні даної області. Результируючий інтеграл має дві складові – сингулярну і звичайну, це можна побачити з наступного спрощеного виразу:

$$I(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{(s-\sigma)} \frac{U(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^{*3}(x, \xi, y, \eta)} - \frac{2\pi}{\varepsilon} U(x, y) \right) \quad (12)$$

де σ кругова область з радіусом ε . Перший інтеграл в (6) є регулярним і може бути обчисленим звичайними методами, в той час як другий вимагає застосування спеціальної техніки. Головні недоліки такого підходу полягають в наступному: а) важно врахувати відому особливість типу \sqrt{L} поведінки поля переміщень біля контуру тріщини; б) лінійні розміри елементів, що межують з сингулярними повинні бути дуже малими порядку ε , що вимагає великої кількості елементів розбивки; в) контур тріщини має бути достатньо точно апроксимований за допомогою полігонів (прямолінійних ділянок). Все це призводить до дуже великої кількості елементів і невідомих.

Класична процедура інтегрування рівняння (4) пропрацьовано в роботах [99,100]. Відмінні особливості її полягають в наступному:

- Для відомого розподілу напружень $p(x,y)$ невідома функція поля переміщень шукається як в вигляді добутку функції форми Ω на поліноміальний ряд з невідомими коефіцієнтами A_{ij} :

$$U(\xi, \eta) = \Omega \cdot \sum_{i,j} A_{ij} \xi^i \eta^j \quad (13)$$

Тут функція форми, (ФФ) для поля переміщень Ω , відображає відому сингулярність поля переміщень в околі контуру тріщини, наприклад, найбільш показовим прикладом є вказана вище функція для еліптичної тріщини, тобто $\Omega = \sqrt{L}$.

- Для кожної фіксованої пари величин x та y вводиться локальна координатна система the (r_{loc}, α) для того, щоб спростити інтегральний вираз в (10) і зменшити порядок сингулярності. Інтеграл по площі тріщини зводиться до двох типів інтегрування: простий зовнішній інтеграл з залежності від кутової координати $\alpha = 0 \dots \pi$, і внутрішній гіперсингулярний інтеграл по координаті r_{loc} . Останній інтеграл обчислюється в змісті скінченно-частинного інтегралу. Теорія відповідних одномірних частинних інтегралів є добре розвинутою в літературі [101,102], і найбільш зручно вони аналітично обчислюються, якщо підінтегральна

частина представляється в вигляді комбінації поліномів Чебишева другого роду [99].

- Невідомі A_{ij} знаходяться шляхом аналітичного згладжування чисельних результатів визначення інтегралів по області відповідно до прийнятих законів розподілу навантаження, $p(x, y)$.

Ми розглядаємо вищевказаний класичний підхід як найбільш універсальний та ефективний. Тим не менше, вкажемо його деякі недоліки. Перше, він вимагає знання скінченно-частих інтегралів, що не завжди є доступними для інженерів. Друг, детальна техніка інтегрування і її вплив на точність отриманих результатів, не досліджена для тріщин довільної форми. Як приклад, зробимо посилання на роботу [103], де наведена чітка процедура інтегрування різних сингулярних виразів, що спонукало інших вчених до проведення подібних досліджень.

Ключовою задачею до розгляду тріщини довільної форми є вибір, так званої функції форми, (ФФ) або Ω , що для еліптичної тріщини слідує з теоретичних рішень. Ця ФФ повинна бути пропорційна $\sqrt{\Delta}$, що слідує з відомих теоретичних рішень. Це є нетривіальною задачею, проте в літературі не приділяється достатньо уваги її обґрунтуванню. Часто різні функції вибираються в якості Ω , проте зовсім не дискутується вплив вибору тієї чи іншої Ω на кінцеві результати визначення КІН.

Три різні варіанти вибору Ω звичайно розглядаються в літературі.

1) Класична $\Omega_1 = \sqrt{1 - r^2/R^2}$, де r є радіальна координата певної точки на поверхні тріщини, що відраховується від умовного центру тріщини O , R є радіальною координатою відповідної точки контура, що лежить на лінії, що з'єднує точку r і умовний центр. Для еліптичної тріщини з центром в точці $O(0;0)$ (рис. 1), є правильним також і наступний вираз: $\Omega_1 = \sqrt{1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2}$. Така ФФ є найпростішою для практичних застосувань і може бути використана для тріщини довільної форми. Проте вона має очевидні недоліки: 1) Ω_1 залежить від вибору умовного центру координат, який не є однозначним при складній формі; 2) тільки дві точки контуру, що лежать на протилежних кінцях відрізка, що

проходить через точку r мають вплив на величину Ω_1 в розглядуваній точці (ξ, η) .

2) Мультиплікативна ФФ, де Ω_2 залежить від усіх сторін фронту тріщини, представленої як набір прямолінійних відрізків. Якщо, як приклад, фронт тріщини є полігон зі сторонами представленими рівняннями виду $a_i x + b_i y + c_i = 0$, то ФФ є наступною: $\Omega_2 = \prod_i \sqrt{\frac{|a_i \xi + b_i \eta + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}}$. Перевагою такого запису є те, що всі сторони полігона мають вплив на величину ФФ. Очевидний недолік в тому, що її практична цінність і точність стають заручниками апроксимації реального гладкого контуру великою кількістю прямолінійних ділянок полігона.

3) Універсальна ФФ запропонована Уром і Бернсом в їхньому відомому виразі для універсальної вагової функції [37], тобто: $\Omega_3(\xi, \eta) = \left(\oint_{\Gamma} 1/l^2(\xi, \eta) d\Gamma \right)^{-1}$, де Γ контур тріщини, l відстань від точки контуру тріщини до точки що розглядається на поверхні (ξ, η) . Ця функція є універсальною. Вона є чудовою в тому сенсі, що забезпечує необхідну особливість поведінки поля переміщень біля точок контуру, тобто $\Omega_3 \propto \sqrt{\Delta}$. Мето вагових функцій широко застосовується в інженерних задачах, проте ця ФФ ніколи не використовувалася при розв'язку інтегро-диференційного рівняння. Тому застосування Ω_3 має великий теоретичний інтерес, але вона досить складна. В деяких випадках, коли контур складається з лінійних і кругових ділянок функція Ω_3 може бути проінтегрована аналітично.

1.5. Висновки по розділу, постановка задач

Параметр КІН класичної лінійної механіки руйнування є важливим об'єктом теоретичних і прикладних застосувань для аналізу цілісності відповідальних конструкцій. Найбільш розповсюдженим шляхом його визначення є застосування комерційних програм, побудованих на МСЕ, і де впроваджені спеціальні методи визначення КІН, що базуються на результатах попередніх аналітичних

досліджень. В сучасних нормативних документах аналізу конструкцій передбачається розвиток і розширення сфери застосування ЛМР для неklasичних геометрій тріщин (тріщини неканонічної форми), для нетипових випадків деформування тонкостінних конструкцій (геометрична нелінійність). Це вимагає розробки нових аналітичних і апробації існуючих чисельних методів для обґрунтування їх точності і функціональності і виявлення основних комбінацій геометричних і фізичних параметрів, що визначають інтенсивність і характер проявлення того чи іншого ефекту.

Таким чином, мета роботи полягає в наступному - розробити чисельні і аналітичні методи розрахунку КІН для неklasичних проблем механіки руйнування, а саме для тріщин складної форми та для тріщин в тонкостінних конструкціях, де проявляється ефект геометричної нелінійності, та застосувати отримані навички та знання для вирішення практичних задач для подовження ресурсу реактора та обладнання АЕС України. Відповідно до мети роботи сформулюємо наступні задачі:

1. Дослідити витоки методу Вільямса, що дає розуміння суті параметру КІН, дослідити його можливості, як основи для розрахункової процедури визначення КІН, і розширити його можливості для розв'язання задач для нескінченних геометричних тіл шляхом введення в розгляд зовнішніх (що розходяться біля вершини тріщини) функцій Вільямса. Визначити границі застосованості даного методу, як історично першого та найпростішого напівчисельного методу.
2. Провести аналітичне дослідження впливу геометричної нелінійності для порівняно простого випадку тонкостінної труби з довгою поверхневою осьовою тріщиною, дослідити вплив початкової неправильності форми труби. Перевірити на чисельних моделях ці результати, для узгодження процедури і технічних особливостей розв'язування задач ЛМР з врахуванням геометричної нелінійності.

3. Враховуючи практичну важливість розрахунків КІН і площі розкриття тріщини в тонкостінних трубах, визначити чисельно ці параметри в геометрично нелінійній постановці. Визначити силові та геометричні параметри, що впливають на геометрично нелінійну поведінку і установити наближені емпіричні формули, що описують цей ефект для малого одиночного тиску та змінної величини осьової сили. Показати значимість цього ефекту для реальних лабораторних експериментів.
4. Для плоскої тріщини в нескінченному тілі установити загальний чисельно-аналітичний підхід для розв'язку інтегро-диференційного рівняння теорії пружності і на цій основі провести розрахунки для ряду канонічних і неканонічних форм тріщини. Розробити відповідні чисельні моделі МСЕ та порівняти результати.
5. Провести практичні розрахунки процесу зміни КІН в часі для практично важливих конструкцій АЕС, таких як корпус реактора, внутрішньо реакторна шахта, та вигородка та на цій основі дати прогноз реального ресурсу довговічності цих елементів.

РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА АНАЛІТИЧНИХ ТА ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ З ТРІЩИНОЮ

2.1. Модифікація методу граничних колокацій

2.1.1 Функції Ері, внутрішні і зовнішні функції Вільямса

Приведемо відомі результати щодо функцій Ері в полярних координатах, та функцій Вільямса, що слідують із них. Запишемо загальний вигляд функцій Ері [7]:

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{2}}, \quad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{\frac{n}{2}}, \quad (14)$$

де $a_n = \alpha_{1n} + i\beta_{1n}$; і $b_n = \alpha_{2n} + i\beta_{2n}$, - невідомі коефіцієнти, $n = 1, 2, 3, \dots$. В полярній системі координат вирази для напружень σ_r , σ_θ і $\tau_{r\theta}$ та переміщень u_r , u_θ є відомими [7]. З врахуванням симетрії навантаження ($\tau(\theta) = \tau(-\theta)$) $\beta_{1n} = \beta_{2n} = 0$ вони матимуть вид:

$$\sigma_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left[-\alpha_{1n} \frac{n-6}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta - \alpha_{2n} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (15a)$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left[\alpha_{1n} \frac{n+2}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta + \alpha_{2n} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (15б)$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left[\alpha_{1n} \frac{n-2}{2} \sin \frac{n-2}{2} \theta + \alpha_{2n} \sin \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (15в)$$

$$2Gu_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[\alpha_{1n} \left(\kappa - \frac{n}{2} \right) \cos \frac{n-2}{2} \theta - \alpha_{2n} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (15г)$$

$$2Gu_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[\alpha_{1n} \left(\kappa + \frac{n}{2} \right) \sin \frac{n-2}{2} \theta + \alpha_{2n} \sin \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (15д)$$

Де $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (плоска деформація). Функції Вільямса отримуємо з умов рівності нулю напружень σ_θ та $\tau_{r\theta}$ на берегах тріщини [7], що дає змогу для кожного n виразити коефіцієнт α_{2n} через α_{1n} :

$$\sigma_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta - \frac{n-6}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (16a)$$

$$\sigma_{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[-\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta + \frac{n+2}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (16б)$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[-\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \frac{n+2}{2} \theta + \frac{n-2}{2} \sin \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (16в)$$

$$4Gu_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n}{2}} \left[(n+2(-1)^n) \cos \frac{n+2}{2} \theta + (2\kappa - n) \cos \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (16г)$$

$$4Gu_{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n}{2}} \left[-(n+2(-1)^n) \sin \frac{n+2}{2} \theta + (2\kappa + n) \sin \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (16г)$$

Звичайно розв'язки Вільямса записують тільки для додатніх n . Розділимо ряди (16) на додатню ($n \geq 1$) і від'ємну ($n \leq -1$) частини, і введем позначення:

$$W_n^{\sigma_r} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta - \frac{n-6}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta \right], \quad (17а)$$

$$W_{-n}^{\sigma_r} = r^{\frac{-n-2}{2}} \frac{-n}{2} \left[\left(\frac{-n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{-n+2}{2} \theta + \frac{n+6}{2} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right]. \quad (17б)$$

Аналогічно для σ_{θ} , $\tau_{r\theta}$, u_r , u_{θ} .

Зауважимо, що $n = 0$, відповідає переміщенню тіла як цілого. Коефіцієнт α_1 пропорційний КІН, K_I

$$K_I = \alpha_1 \sqrt{2\pi} \quad (18)$$

Вирази типу (17а) назвемо внутрішніми функціями Вільямса (*inner*), а вирази (17б) – зовнішніми (*outer*). Очевидно, і так завжди робиться, біля вершини тріщини можна оперувати лише внутрішніми функціями [7,15]. Як буде показано нижче, зовнішні функції Вільямса зручно використовувати для зовнішніх областей тіла ($r > 1$). Звичайно, при цьому необхідно спрягати зовнішні і внутрішні розв'язки на границі спряження. Це відносно легко робити, оскільки обидва розв'язки мають однакову структуру при однакових n , що показано на прикладі $W_n^{\sigma_r}$ та $W_{-n}^{\sigma_r}$ в таблиці 1.

Таблиця 1. Деякі внутрішні, $W_n^{\sigma_r}$, та зовнішні $W_{-n}^{\sigma_r}$ функції при однакових n

n	$W_n^{\sigma_r}$	$W_{-n}^{\sigma_r}$
-----	------------------	---------------------

1	$\frac{5}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right)$	$\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{7}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right)$
2	$2\cos(2\theta) + 2$	$-4\cos(2\theta)$
3	$\frac{9}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right)$	$\frac{15}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{27}{4}\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right)$
4	$2\cos(\theta) + 6\cos(3\theta)$	$2\cos(\theta) - 10\cos(3\theta)$
5	$\frac{5}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \frac{15}{4}\cos\left(\frac{7}{2}\theta\right)$	$\frac{35}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) - \frac{55}{4}\cos\left(\frac{7}{2}\theta\right)$
6	$12\cos(4\theta)$	$6\cos(2\theta) - 18\cos(4\theta)$

Враховуючи позначення типу (17), формули (16) запишемо у вигляді:

$$\sigma_r^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\sigma_r}, \quad \sigma_{\theta}^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\sigma_{\theta}}, \quad 4Gu_r^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{u_r}, \quad 4Gu_{\theta}^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{u_{\theta}}, \quad (19a)$$

Або в загальному вигляді вектор рішення \vec{S}^{in} , представляється через вектор внутрішніх функцій Вільямса \vec{W}_n^{in}

$$\vec{S}^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \vec{W}_n^{in} \quad (19b)$$

А також

$$\sigma_r^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_n^{\sigma_r}, \quad \sigma_{\theta}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_n^{\sigma_{\theta}}, \quad 4Gu_r^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_n^{u_r}, \quad 4Gu_{\theta}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_n^{u_{\theta}}. \quad (20a)$$

Або в загальному вигляді вектор розв'язку \vec{S}^{out} , представляється через вектор зовнішніх функцій Вільямса \vec{W}_n^{out}

$$\vec{S}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \vec{W}_n^{out} \quad (20b)$$

2.1.2. Застосування внутрішніх функцій Вільямса

Розглянемо круговий диск, на границю якого виходить радіальна тріщина, центр якої співпадає з центром кола. Контур диска вільний від навантаження, а на

берега тріщини діє одиничне навантаження $\sigma_\theta|_{\theta=\pi} = 1$ і $\tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = 0$ (Рис. 2).

Розв'язок шукаємо як суму частинного розв'язку, що дається функцією Ері (15) при $n=1$, приймаючи $\alpha_{1,n=1} = 1$ і $\alpha_{2,n=1} = 0$, та загального розв'язку Вільямса (16).

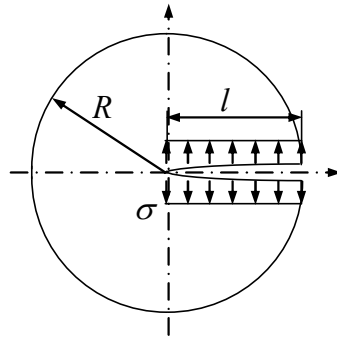


Рис. 2. Диск з радіальною тріщиною, при одиничному навантаженні її берегів

Це зводить задачу до такої, що напруження на берегах тріщини дорівнюють нулю, а на круговій границі тіла діють радіальні напруження $\sigma_r(r=R)=1$, а дотичні рівні нулю: $\tau_{r\theta}=0$. Це дає змогу шукати рішення в вигляді (19а) з N невідомими коефіцієнтами α_n . Для визначення коефіцієнтів α_n будемо послідовно множити вирази для σ_r на систему перпендикулярних на півколі $0 \leq \theta \leq \pi$ функцій $\cos((k-1/2)\theta)$ та інтегрувати по напівколу, а вирази для $\tau_{r\theta}$ на функції $\sin((k-1/2)\theta)$, тобто:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \\ \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\tau_{r\theta}} \sin((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Отримане таким чином значення K_I (18) дуже добре узгоджується з точним значенням представленим у [19] (Таб. 2). Як бачимо, уже всього 8 членів розкладу дають надзвичайно точне рішення і дають оптимістичний погляд на функції Вільямса, як на інструмент рішення краєвих задач.

Таблиця 2. Порівняння КІН для круга з краєвою тріщиною з вершиною в центрі круга

N	K_I	$K_I [19]$	%
8	3,17218	3,17214	0,0013
20	3,1721376		$7,5 \cdot 10^{-5}$

Тепер розглянемо симетричну полосу з краєвою тріщиною, навантажену одиничним навантаженням σ , на грані BC (Рис. 3), а бокові грані AB і CO - вільні від загрузки. Тут a - довжина тріщини, b - половина висоти полоси, t - її ширина, x, y - декартові координати, що також відраховуються від вершини тріщини. Зручно записати вирази Вільямса для напружень в декартових координатах $W_n^{\sigma_x}$, $W_n^{\sigma_y}$, $W_n^{\tau_{xy}}$:

$$W_n^{\sigma_x} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n-2}{2} \theta - \frac{n-2}{2} \cos \frac{n-6}{2} \theta \right] \quad (21a)$$

$$W_n^{\sigma_y} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \frac{n-2}{2} \theta + \frac{n-2}{2} \cos \frac{n-6}{2} \theta \right] \quad (21б)$$

$$W_n^{\tau_{xy}} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[- \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \frac{n-2}{2} \theta + \frac{n-2}{2} \sin \frac{n-6}{2} \theta \right] \quad (21в)$$

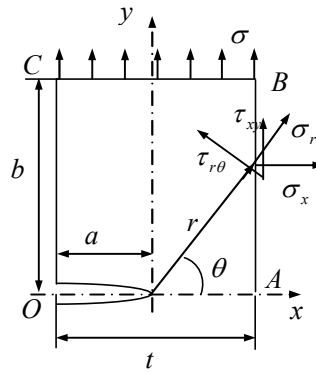


Рис. 3 Полоса навантажена одиничною розподіленою силою.

Зауважимо, що тут і нижче використовувались інтегрально усереднені [21] граничні умови. В зв'язку з тим, що результати аналізу часто розходилися, дуже залежали від кількості ділянок інтегрування і невідомих членів розкладу, було вибрано декілька варіантів граничних умов. Це зроблено для того, щоб вияснити,

чи сам підхід, щодо використання функцій Вільямса є обмеженим, чи на точність результатів впливає техніка його реалізації.

Першим підходом було введення систем ортогональних функцій $\cos((2k-1)\pi s/2L)$ та $\sin((2k-1)\pi s/2L)$, де L повна довжина контуру полоси $L = |AB| + |BC| + |CO|$, а координата s характеризує положення точки на границі тіла і відраховується від точки A до точки O . Ці результати були найменш точними, часто розходилися і тут не приводяться.

Другим підходом була реалізація методу найменших квадратів. Записувався функціонал напружень, I , на границі:

$$\int_S \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\sigma_s} - \sigma^b(s) \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\tau_s} - \tau^b(s) \right)^2 ds = I, \quad (22)$$

де $W_n^{\sigma_s}$ - нормальні, а $W_n^{\tau_s}$ - дотичні напруження Вільямса на границі, σ^b , τ^b - задані на границі напруження, S - границя області. Чисельне інтегрування проводилося по формулі параболи. Отримані результати K_I пораховано для $N = 40, 50, 60$ членів розкладу, при розбивці кожної грані на m ділянок, де m приймалося від 1000 до 2000. Для відносної глибини тріщини $a/t = 0.4$ та $a/t = 0.6$ результати відрізняються від літературних [104] на 0,4%, а в окремих випадках розбивки до 0,8 %. Гірші результати були отримані для $a/t = 0.2$, тут отримані значення K_I були значно менші за відомі в літературі і середня похибка досягала 4,5% - 5,5%, а в окремих випадках розбивки більше 10 %. Тобто похибка для $a/t = 0.2$ більш ніж на порядок перевищує похибку для $a/t = 0.4$. Причина очевидна і уже обговорювалася вище. Тобто Функції Вільямса записані в полярних координатах, і чим менше відношення відстані ближчої точки контуру до найдалшої, тим проблемнішим стає застосування методу.

Наступним підходом була нормалізація виразів для напружень по самим функціям Вільямса. Тут розглядаються результати тільки для $a/t = 0.2$. Записуються наступні вирази – інтегральні усереднені по самим функціям Вільямса граничні умови

$$\int_S \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\sigma_s} - \sigma^b(s) \right) W_{2k-1}^{\sigma_s} ds = 0 \quad \int_S \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\tau_s} - \tau^b(s) \right) W_{2k-1}^{\tau_s} ds = 0 \quad (23)$$

По загальному вигляду і технічній реалізації цей підхід нагадує попередній і приводить до подібних результатів.

Кращі результати було досягнуто, коли функції розкладу мають вид: $(W_k + W_{k+1})/2$. Значення K_I відрізняються від наведених в [104] на 3% – 4% для $N = 40, 50, 60$. Але в окремих випадках розбивки, наприклад, при $N = 60$ для 2500, 2501 і 2502 точок, відхилення становлять 4,6%, 0,05% і 4,1% відповідно. Такі флуктуації результатів при дуже незначному уточненні процедури чисельного отримання коефіцієнтів матриці свідчать про нестійкість самого методу.

Інша ідея реалізації полягала в додатковому використанні умови рівності головного вектора сил на вісь OY і головного моменту відносно точки A розрахункових напружень таким для прикладених напружень. Зауважимо, що проекції розрахункових напружень в силу симетрії вибраних функцій Вільямса на вісь OX складових не дають. До системи рівнянь (23) додаються наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds + \int_{BC} \alpha_n W_n^{\sigma_y} ds - \int_{CO} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds &= \int_{BC} 1 \cdot ds \\ \int_{AB} \alpha_n W_n^{\sigma_x} s ds + \int_{BC} \alpha_n W_n^{\sigma_y} s ds + b \int_{BC} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds - t \int_{CO} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds &= \int_{BC} 1 \cdot s ds \end{aligned} \quad (24)$$

На рис 4. представлена похибка значень в процентах $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ для $N = 10-60$, причому грані AB , BC , і CO розбивалися на 2000 точок інтегрування кожна. Відхилення від точних значень КІН, наведених в літературі [104] залежить від числа N і становило 3-5% для $20 < N < 30$ та 0.2-1% для $35 < N < 46$. При $N > 50$ результати починають розходитися при зміні кількості точок чисельного інтегрування, що є свідченням нестійкості методу. Разом з тим, похибка обчислень є досить задовільною порівняно з попередніми методами і свідчить про ефективність і необхідність використання інтегральних умов рівноваги на границі. Очевидно, що рівняння рівноваги стабілізують рішення для КІН. І якщо

розрахункові напруження на границі тіла, як і в попередніх варіантах, все ще демонструють дуже значні відхилення від заданих, проте інтегрально вони є врівноваженими.

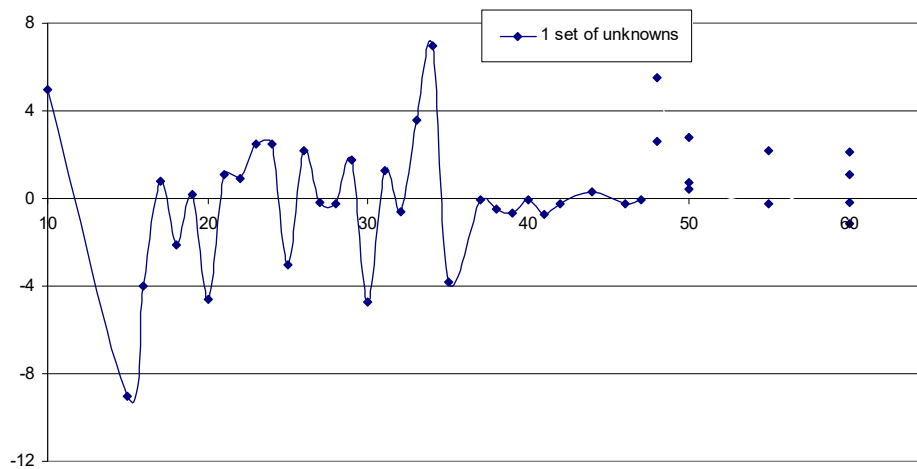


Рис. 4 Відхилення розрахункових КІН від точних значень при використанні рівнянь рівноваги

2.1.3. Застосування зовнішніх функцій Вільямса

Розглянемо спочатку задачі, де застосування зовнішніх рішень Вільямса є найбільш очевидним.

Розглянемо площину з тріщиною (Рис. 5). на берега тріщини діє постійне одиничне навантаження σ . Навколо вершини тріщини описуємо коло одиничного радіусу. Таким чином маємо дві області: всередині кола (I) і зовні (II).

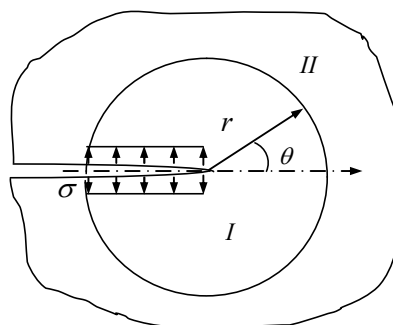


Рис 5. Нескінченне тіло з краювою тріщиною, навантаженою однорідними напруженнями на ділянці $1 \leq r$

В області I напруження і переміщення записуються виразами (19), а в області II - (20). На колі, в центрі якого знаходиться центр полярної системи координат, записуємо інтегрально усереднені умови по системі нормальних функцій (як в формулі (21)) рівності напружень і переміщень, з врахуванням переміщення як цілого в напрямку осі x :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(-1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \\ \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{\tau_{r\theta}} \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \\ \int_0^\pi \left(-(\kappa-1) + \sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{u_r} - x_0 \cos \theta \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \\ \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{u_\theta} + x_0 \sin \theta \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \end{aligned}, \quad (25)$$

де x_0 - є невідоме переміщення внутрішньої області I як цілого тіла. Вирази (25) є системою лінійних рівнянь відносно двох наборів невідомих коефіцієнтів α_n^I , β_n^{II} ($n=1, \dots, N$) і значення x_0 переміщення тіла як цілого. Значення K_I наведені в таблиці 3, порівнювалися з математично точним значенням [19] для цієї задачі.

Таблиця 3. Значення КІН для задачі Рис. 4

N	K_I	K_I [19]	%
2	-2,16		
4	1,5958	1,5955	0,019
6	1,5958		0,019

Отже, уже починаючи всього з 8+1 невідомих коефіцієнтів бачимо надзвичайно хорошу точність результатів.

Розглянемо наступну задачу – круг радіуса $R_e > 1$ з краєвою тріщиною з вершиною в центрі круга навантажений однорідними напруженнями σ на довжині $l=1$ (рис 6). Умовно розділимо повний круг на дві області – круг радіуса $R_0 = 1$, та доповнюючи до повної області кільце $R_0 \leq r \leq R_e$.

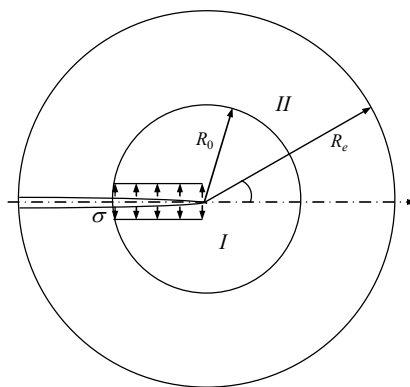


Рис. 6. Круг навантажений однорідними напруженнями на частині поверхні.

Оскільки область II не є нескінченною, то в ній повинні існувати, як внутрішні, так і зовнішні функції Вільямса, що визначаються виразами (19) та (20). В області I , як і раніше розглядаємо лише функції (19). Таким чином маємо три набори невідомих коефіцієнтів $-\alpha_n^I$, α_n^{II} , β_n^{II} ($n=1, \dots, N$) і невідоме переміщення x_0 внутрішньої області I як цілого тіла. Для задоволення умов навантаження внутрішньої області візьмемо, як в задачі приведений на рис 1, частинний розв'язок, що дається функцією Ері (2) при $n=1$, приймаючи $\alpha_{1,n=1} = 1$ і $\alpha_{2,n=1} = 0$.

Прирівняємо напруження і переміщення в зовнішній області і внутрішній області на колі одиничного радіусу, як їхній спільній границі (умови спряження). Зовнішню границю вважаємо вільною від напружень (граничні умови). Визначальні рівняння відносно невідомих коефіцієнтів α_n^I , α_n^{II} , β_n^{II} отримаємо шляхом почергового множення і інтегрування граничних умов і умов спряження на систему нормальних функцій (як раніше). Таким чином отримали систему лінійних рівнянь відносно трьох наборів невідомих – умови спряження:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \left(-1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
& \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{r\theta}} \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
& \int_0^\pi \left(-(\kappa-1) + \sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{u_r} - x_0 \cos \theta \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
& \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{u_\theta} + x_0 \cos \theta \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

Вільна від напружень границя:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_r} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
& \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{r\theta}} \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

В таблиці 4 значення K_I для $r=2, 3, 10$ порівнюються з отриманими за допомогою МСЕ на основі досить густої сітки, згущення якої уже не приводило до зміни результату. Як бачимо, для подібних геометрій використання зовнішніх і внутрішніх функцій Вільямса є дуже ефективним.

Таблиця 4. Порівняння КІН для геометрії Рис 5 з використанням зовнішніх і внутрішніх функцій Вільямса та отриманих з допомогою МСЕ

$R_e = 2$				$R_e = 3$			$R_e = 10$		
N	K_I	K_I	%	K_I	K_I	%	K_I	K_I	%
		[MCE]			[MCE]			[MCE]	
12	3,3765	3,3738	0,08	2,7248	2,7223	0,09	1,9081	1,9074	0,04
18	3,3725		0,04	2,7209		0,05	1,9069		0,02

Після таких успішних застосувань зовнішніх функцій Вільямса, виникає питання чи можна з їх допомогою покращити результати для не круглих геометрій також? Тому знову розглянемо задачу рис 3, проблемою якої було те,

що відстань від вершини тріщини найдальшої точки контуру в приблизно 7 разів перевищувала відстань до найближчої точки, тобто $|\vec{B}|/|\vec{O}| \approx 7$. Навколо вершини тріщини з центром у вершині проведемо коло радіуса 0.5. Цим колом розділяємо нашу геометрію на дві підобласті I та II , Рис 7. Тепер відношення відстаней до центру для кожної із під областей буде меншим: для внутрішньої це відношення дорівнює $0.5/0.2 = 2.5$, для зовнішньої $\approx 1.4/0.5 = 2.8$.

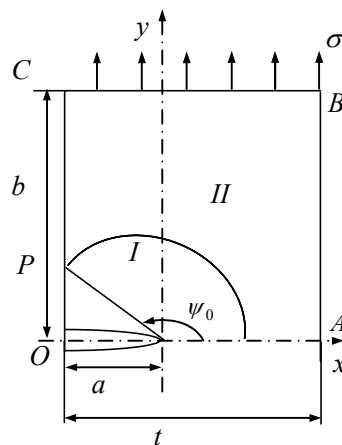


Рис. 7. Введення внутрішньої підобласті для задачі полоси з тріщиною

Знову будемо вважати, що в першій області існують лише внутрішні функції, а в зовнішній – як внутрішні, так і зовнішні. Очевидно, що при розв’язки задачі ми повинні задовільнити умовам спряження та граничним умовам. Із багатьох варіантів можливої реалізації вибрали наступний. Умови спряження і умови на границі полоси записувалися за допомогою методу найменших квадратів. При цьому мінімізувалося два функціонала: один (I_d) – для переміщень (мінімізувався по β_n^{II} та x_0), другий (I_s) – для напружень (мінімізувався по α_n^I , α_n^{II}), як записано нижче в (28).

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{u_r} - x_0 \cos \theta \right)^2 d\theta + \\
& \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{u_\theta} + x_0 \cos \theta \right)^2 d\theta = I_d \\
& \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_r} \right)^2 d\theta + \\
& \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{r\theta}} \right)^2 d\theta + \\
& + \int_{AB} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_x} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_x} \right)^2 ds + \int_{AB} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{xy}} \right)^2 ds + \\
& + \int_{BC} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_y} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_y} - 1 \right)^2 ds + \int_{BC} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{xy}} \right)^2 ds + \\
& + \int_{CP} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_x} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_x} \right)^2 ds + \int_{CP} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{xy}} \right)^2 ds + \\
& \int_{PO} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_x} \right)^2 ds + \int_{PO} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} \right)^2 ds = I_s
\end{aligned} \tag{28}$$

де кут ψ_0 - кут між віссю OX та точкою P перетину одиничного кола з границею CO - зображений на Рис 7.

Таким чином отримали систему лінійних рівнянь відносно трьох наборів невідомих коефіцієнтів α_n^I , α_n^{II} , β_n^{II} ($n=1, \dots, N$) і переміщення x_0 , тобто загальна кількість невідомих становить $3N+1$. На рис 8 показано відхилення безрозмірного значення $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ від порахованого нами МСЕ. Найменша похибка досягається при $N = 26 - 28$ і становить 0.2-0.5%. Зі збільшенням числа невідомих результати починають залежати від кількості точок інтегрування, та стають розбіжними.

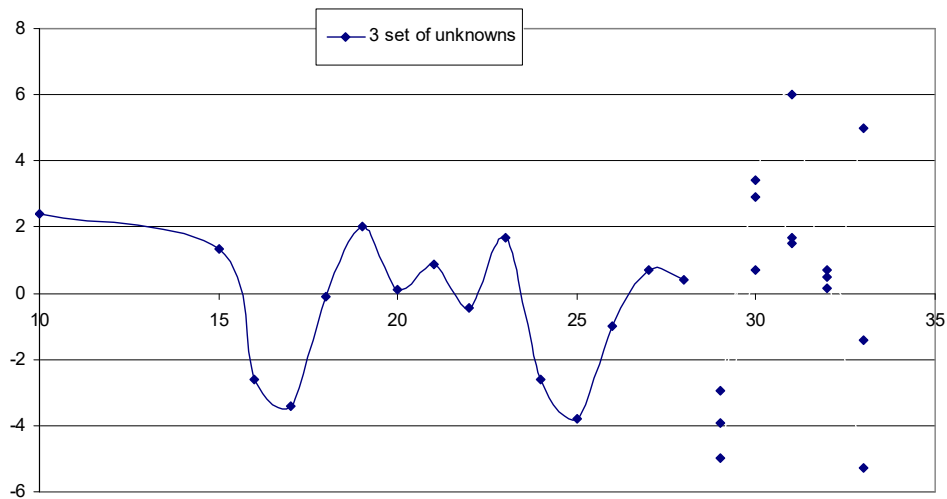


Рис. 8 Відхилення для задачі рис 1 розрахункових КІН від точних значень при використанні 3- наборів невідомих

2.1.4. Висновки по підрозділу 2.1.

Цей підрозділ стосується можливості використання внутрішніх і зовнішніх функцій Вільямса для розрахунку КІН в плоских тілах і має більш освітнє, ніж практичне значення і підсумовує полеміку щодо функцій Вільямса як інструменту розв'язку краєвих задач.

1. Функції Вільямса, як функції, що представляються в полярних координатах, є надзвичайно ефективним інструментом для тіл, границя яких відносно вершини тріщини наближається до кругової геометрії. Очевидно, що подібні висновки існують взагалі для розв'язків теорії пружності в полярних координатах.

2. Введення зовнішніх функцій Вільямса дозволило ефективно розв'язувати задачі для нескінченних тіл, або для тіл кругової геометрії, берега тріщин яких частково навантажені по поверхні. В цьому випадку тіло розбивається на декілька допоміжних кілець, в кожному із яких вводяться системи функцій Вільямса, а по границях їх вводяться допоміжні умови спряження.

3. Для тіл не кругових геометрій застосування функцій Вільямса стає тим більше проблематичним, чим більше відношення найдальшої точки поверхні до найближчої. Найкращі результати отримуються, коли для задоволення граничних

умов застосовується метод найменших квадратів або мінімізація по самим функціям Вільямса. Але і при цьому для тіл прямокутної форми з краєвою тріщиною при відношенні більше 7 внутрішні функції Вільямса дають неточність визначення КІН до 5%.

4. Додаткове застосування умов глобальної рівноваги дозволяє добитися кращої збіжності результатів та покращання точності до 0.2-0.5% для вказаної в п.3 геометрії

5. Використання штучних додаткових границь і введення різних наборів функцій Вільямса (внутрішніх і зовнішніх) для отриманих таким чином областей тіла – не покращує ефективність методу порівняно з п. 4.

Результати цього підрозділу опубліковані в статті [105]

2.2. Геометрична нелінійність для кільця з краєвою тріщиною

2.2.1. Ідея методу зосередженої податливості тріщини (МЗП)

Цей варіант МЗП може використовуватися лише до 1-D задач тіл з тріщинами таких як плоска полоса чи вісесиметрична балка [106]. Ідея і практичне впровадження методу належить Чену і Фінні [107].

Тріщина може розглядатися як концентрована податливість (мають місце стрибки переміщень, Δu , і кута повороту, $\Delta \theta$, в перетині з тріщиною); в той час як інша частина тіла може розглядатися як балка з використанням відповідних методів.

Вважаємо, що розподіл напружень в перетині тріщини (при відсутності тріщини) може бути представлено формально в вигляді $\sigma_q(y) = q \cdot \bar{\sigma}_q(y)$, де q це інтенсивність даних напружень і $\bar{\sigma}_q(y)$ певне одиночне розподілення напружень в y -напрямку (вздовж товщини перетину). Тоді через ці додаткові стрибки неперервність переміщень тіла чи граничні умови на його краях формально порушуються і тому виникають додаткові згинальні моменти M і осьові сили N . Як продемонстровано в роботі [106] для тонкостінних конструкцій (що і будуть розглядатися нижче) стрибками переміщень Δu , а також напруженнями від

додаткових сил можна знехтувати. Остаточно вираз для стрибка кута $\Delta\theta$ має вигляд [108]:

$$\Delta\theta \cdot E' / 6\pi = (\beta_q q + \beta_M \sigma_M) \quad (29)$$

де β_i коефіцієнти податливості з нижнім індексом, що відповідає типу навантаження “ i ” [107] і узагальнений модуль Юнга, $\sigma_M = 6M / t^2$ інтенсивність напружень від згинального моменту M . Вони легко обчислюються при наявності виразів для безрозмірного КІН $Y_i(\alpha)$ для нескінченної полоси ширини t з краєвою тріщиною глибини a

$$K_{I,i} = \sqrt{\pi a} Y_i(\alpha) \quad (30)$$

де $\alpha = a / t$, тоді:

$$\beta_i(\alpha) = \int_0^\alpha \alpha Y_M(\alpha) Y_i(\alpha) d\alpha \quad (31a)$$

Коефіцієнти $\beta_i(\alpha)$ легко інтегруються і представляються в аналітичній формі, наприклад :

$$\beta_N = \alpha^2 \cdot (1 - \alpha)^{-2} \times (0.628 - 1.45\alpha + 2.49\alpha^2 - 2.30\alpha^3 + 0.843\alpha^4) \quad (31б)$$

$$\beta_M = \alpha^2 \cdot (1 - \alpha)^{-2} \times (0.627 - 2.01\alpha + 3.68\alpha^2 - 3.57\alpha^3 + 1.35\alpha^4) \quad (31в)$$

Замітимо, що в виразі (29) $\Delta\theta$ є половина повного кута. Відповідно до принципу суперпозиції результуюче значення КІН σ_q і додаткові напруження σ_M є:

$$K_I = K_{IM} + K_{Iq} \quad (32)$$

Для дослідження результуючого загального виразу для K_I , розглянемо деяку геометрію тіла, що характеризується набором геометричних параметрів, \vec{G} . Допустимо, що воно має краєву тріщину в певному січенні і це січення повернулося на кут $\Delta\theta$ відповідно до діючих навантажень (29). Вважаємо, що з загального балкового рішення ми отримали зв'язок між цим кутом і додатковими напруженнями σ_M . Звичайно він такий, що додатному скачку кута відповідає від'ємні згинальні напруження, так що:

$$-Z(\vec{G})\sigma_M = E' \Delta \theta / (6\pi) \quad (33a)$$

Порівнюючи ці напруження з основною формулою МЗП ми можемо знайти додаткові напруження σ_M :

$$\sigma_M = -\frac{\beta_q q}{Z(\vec{G}) + \beta_M} \quad (33б)$$

І в результаті находимо підсумковий вираз для КІН:

$$K_I = K_{Iq} (1 - \Gamma(\alpha) / (Z(\vec{G}) + \beta_M(\alpha))) = K_{Iq} (1 - \omega(\alpha, \vec{G})) \quad (33в)$$

Де введений безрозмірний коефіцієнт зменшення КІН $\omega(\alpha, \vec{G})$ та для зручності безрозмірна функція $\Gamma(\alpha)$, що дорівнює:

$$\Gamma(\alpha) = \beta_q Y_M / Y_q \quad (33г)$$

Таким чином, тут головною є формула (33), що дозволяє розраховувати КІН. Власне – це і є ідея методу Чена і Фінні [107].

Наша мета – це розгляд ГН ефектів для краєвої тріщини в кільці трохи неправильної форми під внутрішнім тиском. Для її вирішення необхідно використати рівняння (33), що зокрема вимагає застосування балочних рішень для отримання рівнянь виду (33а).

2.2.2 Лінеаризоване рішення для криволінійної балки

2.2.2.1 Геометрія і постановочні рівняння [108]

Тонкостінна труба з довгою краєвою тріщиною може розглядатися як кільце. Розглянемо кільце з постійною товщиною стінки t , а $R(\varphi)$ це відома початкова залежність полярного радіуса центральної лінії від полярного кута φ , що відраховується по годинниковій стрілці (Рис. 9). В ньому в січенні $\varphi = 0$ знаходиться тріщина глибиною a . Введемо локальні базові вектори в довільній точці φ : \vec{n} - нормаль направлена до центру кривизни елемента, \vec{t} - дотичний вектор. Двома близькими поверхнями, паралельними \vec{n} виділимо елементарну ділянку ds (рис. 9). Напружено-деформований стан характеризується шістьма

базовими параметрами: радіальне переміщення w (вздовж \vec{n}), окружне переміщення u (вздовж \vec{t}), кут повороту, θ , направлений по годинниковій стрілці; поперечна сила Q , поздовжня сила N , і згинальний момент M (рис 9).

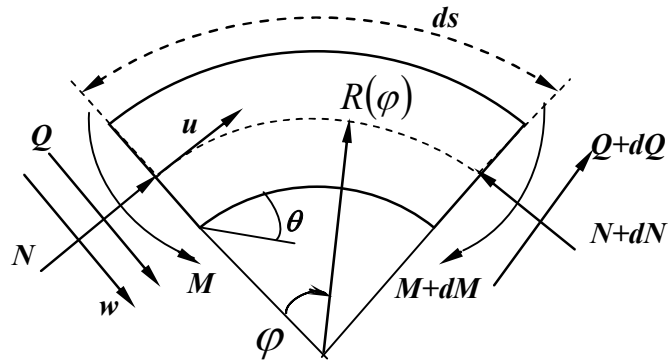


Рис 9. Вектори сил та переміщень

Розкладемо радіус-вектор в гармонічний ряд:

$$R(\varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin n\varphi \right) \quad (34a)$$

Вважаємо, що кільце мало відрізняється від ідеального круга, тобто:

$$(b_n \cdot n)^2, (a_n \cdot n)^2 \ll 1 \quad (34б)$$

Тоді елемент довжини ds приблизно дорівнює:

$$ds = \sqrt{R^2 + R'^2} d\varphi \approx R(\varphi) d\varphi. \quad (34в)$$

А кривизна елемента в кожній точці K_0 чи локальний радіус ρ_0 , є :

$$K_0(\varphi) = \frac{1}{\rho_0(\varphi)} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R''}{R} \right) \quad (34г)$$

де $R' = \partial R / \partial \varphi$, та $R'' = \partial^2 R / \partial \varphi^2$.

Шість диф. рівнянь описують поведінку кільця:

$$\frac{dQ}{R(\varphi)d\varphi} + \frac{N}{\rho} = -P \quad \frac{dN}{R(\varphi)d\varphi} - \frac{Q}{\rho} = 0 \quad \frac{dM}{R(\varphi)d\varphi} = Q \quad (35a)$$

$$\frac{d\theta}{R(\varphi)d\varphi} = \frac{M}{E'J} \quad -\frac{du}{R(\varphi)d\varphi} + \frac{w}{\rho} = 0 \quad \frac{dw}{Rd\varphi} + \frac{u}{\rho} = \theta \quad (35б)$$

Де перші три є рівняннями рівноваги, а три інші фізичними та кінематичними рівняннями. Узагальнений модуль $E' = E / (1 - \nu^2)$ для нескінченної труби, J момент інерції стінки труби, що дорівнює $J = t^3 / 12$.

В геометрично нелінійному аналізі ми зробимо наступні спрощення і припущення:

а) існуючі згинальні моменти також змінюють кривизну елемента і замість (34г):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R''}{R} \right) + \frac{M}{E' J}. \quad (36a)$$

б) величина поздовжньої сили N представляється як сума номінальної величини від внутрішнього тиску N_0 і додаткової сили \bar{N} :

$$N = N_0 + \bar{N} \quad N_0 = -PR_0 = \text{const} \quad (36б)$$

Де:

$$N_0 \gg \bar{N} \quad (36в)$$

в) Величина кривизни відповідно до (36a) враховується тільки в першому рівнянні рівноваги (35a).

В підсумку замість першого рівняння (35a) використовуємо наступний вираз:

$$\frac{dQ}{R_0 d\varphi} + \frac{\bar{N}}{R_0} - \frac{PR_0^2 M}{E' J} = PR_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) b_n \sin n\varphi \right) \quad (35aa)$$

З (35a) та (35aa) ми отримаємо:

$$Q'' + \chi^2 Q = PR_0 \left(- \sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 - 1) a_n \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 - 1) b_n \cos n\varphi \right) \quad (37a)$$

де

$$\chi^2 = 1 - \frac{PR_0^3}{E' J} = 1 - \bar{p}, \quad (37б)$$

Де для зручності введено безрозмірне значення тиску \bar{p} .

2.2.2.2. Загальний і частинний розв'язок системи

Повне рішення системи (35) приведено в [108]. Нижче миведемо лише декілька аналітичних виразів із повного розв'язку, необхідних для подальшого застосування. Замітимо, що лише *внутрішній* тиск розглядається, тому відповідно до прийнятої системи знаків значення внутрішнього тиску \bar{p} завжди *негативне*. Тому величина χ^2 може бути: а) додатною $1 > \chi^2 > 0$, б) дорівнювати нулю, і в) від'ємною.

Частинний розв'язок для визначення згинального моменту дається формулою:

$$M(\varphi) = -PR_0^2 \sum_{n=2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (38a)$$

де

$$A_n = \frac{(n^2 - 1)a_n}{n^2 - \chi^2} \quad B_n = \frac{(n^2 - 1)b_n}{n^2 - \chi^2}, \quad (38b)$$

Щодо загального розв'язку однорідної системи, розглянемо три випадки величини χ^2 . Приведемо приклади розв'язків лише для переміщень.

1. Випадок $\chi^2 > 0$ тоді $\mu = \sqrt{\chi^2}$, і позначимо $\bar{N}_0 = N_0 - \bar{p}M_0 / R$.

Тоді лише для переміщень маємо наступні розв'язки [108]:

$$u(\varphi) = u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi + \theta_0 R_0 (1 - \cos \varphi) + \frac{R_0^2 M_0}{E' J} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{R_0^3 Q_0}{E' J} \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{\cos \mu \varphi}{\mu^2 (1 - \mu^2)} + \frac{\cos \varphi}{1 - \mu^2} \right) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E' J} \left(\frac{\varphi}{\mu^2} - \frac{\sin \mu \varphi}{\mu^3 (1 - \mu^2)} + \frac{\sin \varphi}{1 - \mu^2} \right) \quad (39-1a)$$

$$w = w_0 \cos \varphi - u_0 \sin \varphi + \theta_0 R_0 \sin \varphi + \frac{R_0^2 M_0}{E' J} (1 - \cos \varphi) + \frac{R_0^3 Q_0}{E' J} \left(\frac{\sin \mu \varphi}{\mu (1 - \mu^2)} - \frac{\sin \varphi}{(1 - \mu^2)} \right) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E' J} \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{\cos \mu \varphi}{\mu^2 (1 - \mu^2)} + \frac{\cos \varphi}{1 - \mu^2} \right) \quad (39-1b)$$

2. Випадок $\chi^2 = 0$, позначимо $\bar{N}_0 = N_0 - M_0 / R_0$

$$u = u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi + \theta_0 R_0 (1 - \cos \varphi) + \frac{R_0^2 M_0}{E' J} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{R_0^3 Q_0}{E' J} \left(\cos \varphi - 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E' J} \left(\frac{\varphi^3}{6} - \varphi + \sin \varphi \right) \quad (39-2a)$$

$$w = w_0 \cos \varphi - u_0 \sin \varphi + \theta_0 R_0 \sin \varphi + \frac{R_0^2 M_0}{E' J} (1 - \cos \varphi) + \frac{R_0^3 Q_0}{E' J} (\varphi - \sin \varphi) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E' J} \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 + \cos \varphi \right) \quad (39-26)$$

3. Випадок $\chi^2 < 0$, $\mu = \sqrt{-\chi^2}$, позначимо $\bar{N}_0 = N_0 - \bar{p} M_0 / R_0$

$$u = u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi + \theta_0 R_0 (1 - \cos \varphi) + \frac{R_0^2 M_0}{E' J} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{R_0^3 Q_0}{E' J} \left(\frac{ch\mu\varphi - 1 - \mu^2}{\mu^2(1 + \mu^2)} + \frac{\cos \varphi}{1 + \mu^2} \right) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E' J} \left(\frac{sh\mu\varphi}{\mu^3(1 + \mu^2)} - \frac{\varphi}{\mu^2} + \frac{\sin \varphi}{1 + \mu^2} \right) \quad (39-3a)$$

$$w = w_0 \cos \varphi - u_0 \sin \varphi + \theta_0 R_0 \sin \varphi + \frac{R_0^2 M_0}{E' J} (1 - \cos \varphi) + \frac{R_0^3 Q_0}{E' J} \left(\frac{sh\mu\varphi}{\mu(1 + \mu^2)} - \frac{\sin \varphi}{(1 + \mu^2)} \right) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E' J} \left(\frac{ch\mu\varphi}{\mu^2(1 + \mu^2)} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{\cos \varphi}{1 + \mu^2} \right) \quad (39-36)$$

,де нижній індекс “0” означає початкове значення функції в точці ($\varphi = 0$).

Відмітимо, що випадок 2 може бути виключеним з розгляду, тому що розв’язок 1 і 3 при $\mu \rightarrow 0$ прямують до розв’язку 2.

2.2.2.3. Залежність між стрибком кута і додатковим моментом [108]

Нехай в точці ($\varphi = 0$), є заданий стрибок кута $\Delta\theta$. Для визначення всіх 6 параметрів, що виникають в загальному однорідному розв’язку ми маємо сформулювати 6 граничних умов в наступних точках: а) в точці $\varphi = 0^+$, б) в точці $\varphi = \pi$. Точка $\varphi = 0^+$ означає, що вона розміщена зразу ж за тріщиною, $\varphi = 0$ в якій виникають стрибки. Таким чином:

а) Розглянемо точку $\varphi = 0$. Величина кута в ній (симетрія) $\theta = 0$, але зразу ж після тріщини виникає стрибок кута, і ми запишемо що:

$$\theta_0 = \Delta\theta, \quad (40a)$$

Подібним чином поперечна сила те ж дорівнює нулю, але в сусідній точці $\varphi = 0^+$, виникає її стрибок ΔQ . Він обумовлений тим, що велика осьова сила N_0 на зміні кута $\Delta\theta$ дотичного вектору \vec{t} дає проекцію на нормаль. Тому:

$$Q_0 = \Delta Q_0 - N_0 \sin(\Delta \theta) \approx PR_0(\Delta \theta). \quad (40б)$$

Також очевидно, що

$$u_0 = 0. \quad (40в)$$

І без обмеження загальності можемо прийняти, що

$$w_0 = 0. \quad (40г)$$

б) в точці $\varphi = \pi$, граничні умови є звичайними:

$$u(\varphi = \pi) = 0; \quad \theta(\varphi = \pi) = 0, \quad (40д)$$

Використовуючи загальні рішення [108], рішення для переміщень надані рівняннями (39), і граничні умови, отримаємо [108] систему двох рівнянь :

$$\theta_0(1+a_1) - n_0(1-a_2) + m_0 = 0; \quad 2\theta_0(1+a_3) - \frac{n_0}{2}(1+a_4) + m_0 = 0, \quad (41)$$

де $n_0 = N_0 \cdot \pi R_0^2 / EJ$ і $m_0 = M_0 \cdot \pi R_0 / EJ$. Вирази для констант a_i представлені в Табл. 1.

Табл 5 . Залежність констант a_i від безрозмірного тиску \bar{p}

	$\chi^2 > 0, \mu = \sqrt{\chi^2}$	$\chi^2 < 0 \mu = \sqrt{-\chi^2}$
a_1	$\bar{p} \frac{1 - \cos \mu \pi}{\mu^2}$	$\bar{p} \frac{ch \mu \pi - 1}{\mu^2}$
a_2	$1 - \frac{1}{\mu^2} + \frac{\sin \mu \pi}{\mu^3 \pi}$	$1 - \frac{sh \mu \pi}{\mu^3 \pi} + \frac{1}{\mu^2}$
a_3	$\bar{p} \frac{1 - \cos \mu \pi - 2\mu^2}{2\mu^2(1 - \mu^2)}$	$\bar{p} \frac{ch \mu \pi - 1 - 2\mu^2}{2\mu^2(1 + \mu^2)}$
a_4	$\frac{2}{\mu^2} - \frac{2 \sin \mu \pi}{\mu^3 \pi(1 - \mu^2)} - 1$	$\frac{2sh \mu \pi}{\mu^3 \pi(1 + \mu^2)} - \frac{2}{\mu^2} - 1$

Виключаючи величини n_0 із (41) отримаємо:

$$m_0 = -\theta_0 \lambda(\bar{p}) / 3, \quad (42а)$$

де

$$\lambda(\bar{p}) = \frac{3(1 - 2a_2 - a_4)}{3 + 4a_3 - 4a_2 - 4a_2a_3 - a_1 - a_4 - a_1a_4} \quad (42б)$$

або

$$-\sigma_M = 9\lambda(\bar{p})t / R \cdot E' \Delta \theta / (6\pi) \quad (42в)$$

або

$$-Z(\vec{G}) = \lambda(\bar{p}) \cdot 9t / R. \quad (42г)$$

Вище ми провели всю підготовчу роботу для знаходження КІН.

2.2.3 Аналітичні розв'язки для КІН

Розглянемо незначно початково деформоване кільце. В кожному січенні його діють мембранні напруження $\sigma_N = pR/t$ і згинальні напруження $\sigma_M = 6M(\varphi)/t^2$. Відповідно до МЗП наявність тріщини приводить до згинальних напружень σ_M^{add} , що рівні:

$$\sigma_M^{add} = -(\beta_N \sigma_N + \beta_M \sigma_M) / (Z(\vec{G}) + \beta_M). \quad (43)$$

І тому результуюче повне значення КІН стає таким:

$$\begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = & \sigma_N Y_N(\alpha) \left(1 - \frac{\beta_N(\alpha) \cdot Y_M(\alpha)}{Y_N(\alpha) \cdot (R_0 \lambda(\bar{p}) / (9t) + \beta_M(\alpha))} \right) + \\ & + \sigma_M Y_M(\alpha) \left(1 - \frac{\beta_M(\alpha)}{(R_0 \lambda(\bar{p}) / (9t) + \beta_M(\alpha))} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

Формула (44) є основною формулою аналізу, дослідимо її.

2.2.4 Тріщина в ідеальному кільці.

В цьому випадку $\sigma_N = pR/t$, $\sigma_M = 0$ і формула (32) стає:

$$\frac{K_I \cdot t}{pR \sqrt{\pi a}} = Y_p(\alpha, \bar{p}) = Y_N(\alpha)(1 - \omega(\alpha, \bar{p})) = Y_N(\alpha) \left(1 - \frac{\beta_N(\alpha) \cdot Y_M(\alpha)}{Y_N(\alpha) \cdot (R_0 \lambda(\bar{p}) / (9t) + \beta_M(\alpha))} \right) \quad (45а)$$

Тут ми ввели безрозмірний КІН, $Y_p(\alpha, \bar{p})$, і безрозмірний коефіцієнт зменшення КІН, $\omega(\alpha, \bar{p})$ що показує відмінність отриманого рішення від рішення для нескінченної пластини.

Перш за все замітимо, що при $\bar{p} \rightarrow 0$, величина μ дає 1 і величини a_i в першій колонці таблиці 5 прямують до нуля, і величина $\lambda(\bar{p})$ стає рівною 1. Тоді коефіцієнт $\omega(\alpha, \bar{p} = 0)$ стає таким:

$$\omega(\alpha, \bar{p} = 0) = \frac{\beta_N(\alpha) \cdot Y_M(\alpha)}{Y_N(\alpha) \cdot (R/(9t) + \beta_M(\alpha))}. \quad (456)$$

Вираз (456) був отриманий раніше в роботі [110], де було продемонстровано високу точність його навіть для відносно товстостінних циліндрів, $R/t > 5$ з точністю визначення КІН, що росте зі збільшенням R/t і є не меншою за 3-5% для всіх тріщин глибиною до 0.7 від товщини стінки.

Вплив ГН на КІН легко характеризувати відношенням безрозмірних КІН при довільному тиску до КІН при малому тиску, $\gamma(\alpha, \bar{p})$, що рівне:

$$\gamma(\alpha, \bar{p}) = \omega(\alpha, \bar{p}) / \omega(\alpha, \bar{p} = 0) \quad (46)$$

Тріщина кільці з початковою неправильністю форми

Тут точкою старту є формула (45), де початкова величина згинальних напружень залежить від амплітуди a_n і геометричної форми неправильності n , що дається рівнянням (34). Розглянемо випадок коли лише $a_2 \neq 0$ і амплітуда представляється як частка β_2 від товщини стінки, тобто $a_2 \cdot R = \beta_2 \cdot t$, де β є безрозмірний коефіцієнт. Тоді початкові згинальні напруження в кільці даються формулою:

$$\sigma_M(\varphi) = -\frac{6 \cdot PR}{t^2} \frac{\beta_2 \cdot t}{1 + \bar{p}/3} \cos 2\varphi = 6\sigma_N \beta_2 \frac{1}{1 + \bar{p}/3} \cos 2\varphi \quad (47)$$

Тобто згинальні напруження, які зумовлені неправильностями форми кільця, пропорціональні номінальним мембранним напруженням викликаним тиском $\sigma_N = PR/t$. Їх врахування в нелінійному розв'язку для КІН призводить до більш

значної нелінійності, ніж для ідеально круглого кільця. Це буде показано на нижче приведених прикладах.

2.2.5 Геометрично нелінійні обчислення КІН МСЕ

Побудова геометричної моделі і проведення МСЕ розрахунків проводилося з допомогою комерційного пакету ABAQUS [111] використовуючи його можливості геометрично нелінійного моделювання. Розглядувана геометрія показана на рис. 10. Ми вибрали порівняно тонкостінну трубу, де $R = 300$, $t = 10$, безрозмірна глибина тріщини $\alpha = 0.5$. Розглядаються три випадки початкової неправильності форми:

- а) $\beta_2 = 0$ - ідеальне кільце – ніяких початкових згинальних напружень;
- б) $\beta_2 = 0.5$, тобто тріщина лежить на осі кільця $a = 305$, а інша вісь $b = 295$, рис 10. Це означає, що згинальні напруження розкривають тріщину і збільшують КІН;
- в) $\beta_2 = -0.5$, тобто тріщина лежить на меншій осі кільця $a = 295$, інша вісь $b = 305$, Рис 10. Це значить, що згинальні напруження є від'ємними і зменшують значення КІН.

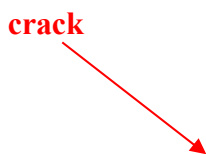


Рис 10. Загальний вид моделі з тріщиною

Враховуючи симетрію тільки половина кільця розглядається. МСЕ модель складається з 13800 елементів і розміри елементів, що використовувалися біля вершини тріщини, дорівнює 0.007 мм.

Розглянемо перший випадок а). Залежність безрозмірних КІН, $Y_p(\sigma_N)$ при деякому внутрішньому тиску, нормалізованих на початкове значення

безрозмірного КІН при дуже малому тиску, $Y_p(\sigma_N \rightarrow 0)$, показана на рис. 11. Результати отримані аналітично з допомогою МЗП і МСЕ знаходяться в хорошій відповідності. Максимальне відхилення результатів від лінійного рішення становить 10% для результатів МСЕ і приблизно 12% для аналітичних результатів при $p = 10 \text{ MPa}$ тобто $\sigma_N = 300 \text{ MPa}$. Це є хорошим підтвердженням, як теоретичного підходу, так і здатності сучасних моделей МСЕ проводити геометрично нелінійні розрахунки КІН.

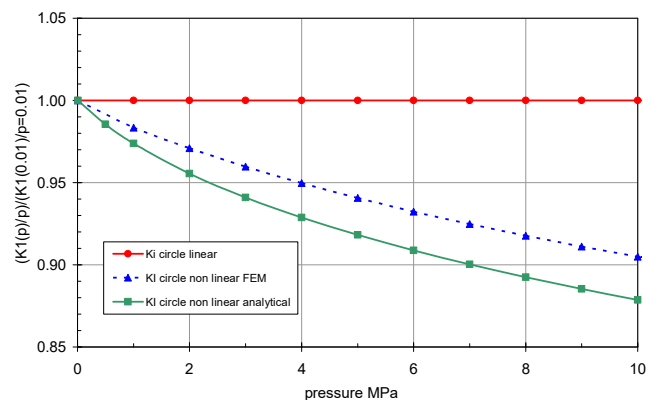


Рис 11. Безрозмірні КІН для ідеального кільця з тріщиною

Розглянемо випадки б) і в). Обчислені за допомогою МСЕ залежності безрозмірних КІН $Y_p(\beta_2 = 0.5, \sigma_N)$, $Y_p(\beta_2 = -0.5, \sigma_N)$, і попередні значення для ідеального кільця $Y_p(\beta_2 = 0, \sigma_N)$, нормалізовані на початкове значення для ідеального кільця $Y_p(\beta_2 = 0, \sigma_N \rightarrow 0)$ (значення, яке зазвичай використовують в розрахунках КІН) показане на Рис. 12. Очевидно, що значення КІН при малих значеннях тиску (лінійний підхід) дуже сильно залежить від такої неправильності форми. Проте, при збільшенні тиску початкові неправильності випрямляються, що дуже сильно зменшує їх вплив на розрахункові значення КІН, і безрозмірне значення КІН прямує до значення, що дається випадком а), тобто для початково правильної форми, і вплив ГН прямує до рівня 10-12%. Проте для практично важливого тиску 4-6 МПа (рівень напружень – 120-180 МПа) вплив початкових неправильностей є досить суттєвим, приблизно 30-40% і має бути врахованим в практичних розрахунках.

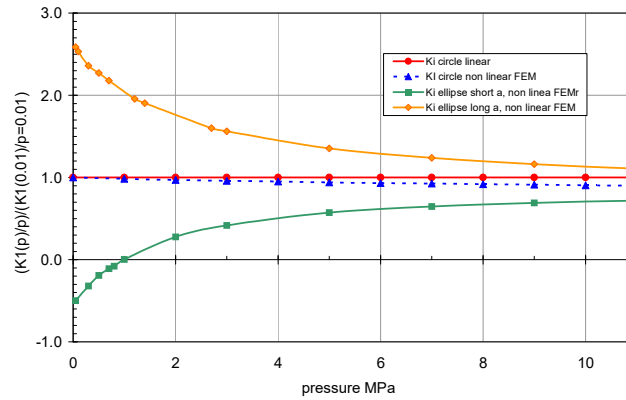


Рис 12. Залежність безрозмірних КІН від внутрішнього тиску з врахуванням додаткових розкриваючих згинальних напружень (жовта лінія) чи закриваючих згинальних напружень (зелена лінія), спричинених початковою неправильністю форми (овальністю)

Більш детальне порівняння розрахункових аналітичних і отриманих за допомогою МСЕ результатів визначення КІН для випадків б) і в) приведені відповідно на рис. 13 і рис. 14. Бачимо дуже хорошу відповідність результатів.

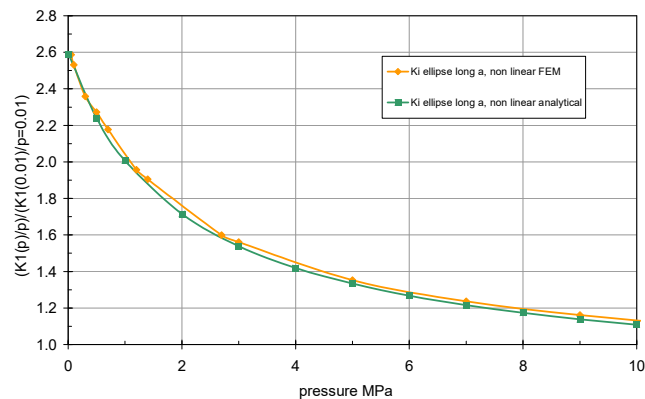


Рис 13. Порівняння безрозмірних величин КІН для випадку б) отриманих МСЕ та з допомогою розробленої аналітичної процедури

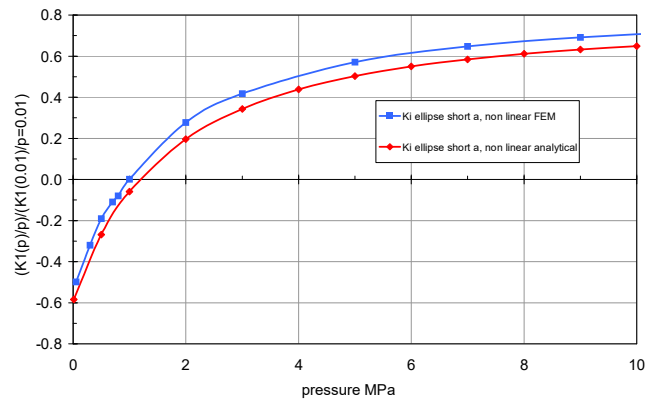


Рис 14. Порівняння безрозмірних величин КІН для випадку в) отриманих МСЕ та з допомогою розробленої аналітичної процедури

Зауважимо, що результати приведені вище, опубліковані в роботах [112, 113]

2.2.6 Висновки по підрозділу розділу 2.2.

На основі методу зосередженої податливості (методу Чена і Фінні) і геометрично нелінійного рішення для криволінійної балки – отримано ряд корисних формул для обчислення безрозмірних КІН для кільця з краєвою тріщиною навантаженою внутрішнім тиском.

1. Для типових тонкостінних труб в магістральних трубопроводах з тріщинами глибиною 0.4 від товщини стінки ефект геометричної не лінійності для типових навантажень може досягати 5-10 % і більше. Проте найбільш сильно ефект ГН проявляється при наявності початкових неправильностей форми.

2. Якщо тріщина розміщена в місці, де існують початкові стискуючі напруження від овальності труби, то початковий КІН може бути від'ємним і там принципово тріщина не може розвиватися. Збільшення тиску призводить до зменшення початкової овалізації, проте навіть при практично високих тисках значення КІН досягає лише 60-70% від номінального.

3. Якщо тріщина розміщена в зоні початкових розтягуючих напружень від неправильності форми, то початкове значення КІН може в декілька разів перевищувати номінальне значення КІН, а збільшення тиску, хоча і згладжує цей

вплив, для практично важливих величин тиску він може залишатися на рівні 130-150% від номінальних значень.

4. Важливо зазначити здатність сучасних МСЕ при правильному виборі інструментарію і розбивки на елементи проводити розрахунки КІН з врахуванням ГН. З іншої сторони, ці результати підтвердили коректність теоретичного підходу.

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ

3.1. Геометрично нелінійна наскрізна осьова тріщина в циліндрі

Як відмічалось в розділі 1.2. дана постановка задачі має велике значення для практичного впровадження концепції «течія перед руйнуванням». Проте досвіду і усталеної практики подібних розрахунків немає. Тому з самого початку відмітимо основні особливості даного підходу.

Для тонкостінних конструкції два типових навантаження є важливими з точки зору їх впливу на геометрично нелінійну поведінку – осьові напруження, σ_x (можуть бути спричинені осьовою силою і глобальним згинальним моментом), і окружні напруження stress, σ_φ , (визвані внутрішнім тиском). Для циліндра з внутрішнім тиском з закритими кінцями (звичайна геометрія при випробовуваннях) відношення між цими напруженнями є фіксованим і дорівнює $\sigma_\varphi / \sigma_x = 2$. Літературні дані розрахунку впливу ГН на КІН що наведені в роботах [86-88] відповідають саме цьому випадку.

1. Окружні напруження σ_φ будуть зафіксовані на дуже малому рівні, який не впливає на ГН поведінку тіла. ГН поведінка буде досліджуватися в термінах осьового напруження від осьової сили.

2. Будуть також досліджені величини розкриття тріщини в центральній точці наскрізної тріщини. Це дуже важливо для визначення площі розкриття тріщини.

3. Буде проведений лише чисельний аналіз МСЕ, враховуючи оптимістичні результати отримані в попередньому параграфі щодо можливостей МСЕ по моделюванні ГН.

4. Додаткова верифікація чисельних ГН моделей буде виконана на прикладі ГН поперечного деформування балки попередньо навантаженої в поздовжньому напрямку.

3.1.1 Попередній чисельний тест для ГН балки

Розглянемо ГН балку, що навантажена постійною малою розподіленою силою p і змінною великою осьовою силою N_x . Координати, позначення, напрямки дії сил і переміщень показані на Рис. 15

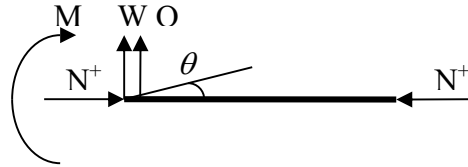


Рис. 15. Балка навантажена поперечною розподіленою силою і осьовою силою

Напишемо загально відомі рівняння для цього випадку:

$$\frac{dN}{dx} - \frac{Q}{\rho} = 0, \quad (48a)$$

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{N}{\rho} = p, \quad (48б)$$

де ρ є радіусом кривизни початково прямої балки спричинений деформацією від діючого навантаження, він є малим і приблизно рівним наступній величині:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{d^2W}{dx^2}. \quad (48в)$$

Тут θ є кут повороту. Маючи на увазі що поперечна сила Q також мала, а сила N велика, можна констатувати, що $N \approx const$ і (48б) стає рівним:

$$\frac{dQ}{dx} = -N \frac{d^2W}{dx^2} + p \quad (48д)$$

Таким чином, результуюче диференціальне рівняння в спрощеній лінеаризованій постановці має вигляд:

$$\frac{d^4W}{dS^4} + \frac{N_0}{EI} \frac{d^2W}{dS^2} = \frac{\rho}{EI}, \quad (49)$$

де, як звичайно, E - модуль пружності, I – модуль інерції. Для балки прямокутного поперечного січення $I = hb^3/12$, де h -ширина, b –висота. Її загальний-розв'язок має вигляд:

$$W = A \cos \omega x + B \sin \omega x + C + Dx + \frac{px^2}{2N_0} \quad (50a)$$

Якщо значення сили N є додатнім (стискуючим), і:

$$W = A \cosh \omega x + B \sinh \omega x + C + Dx + \frac{px^2}{2N_0} \quad (50б)$$

Якщо сила стає негативною (розтяг). В формулах (50) значення параметру $\omega = \sqrt{|N|/EI}$.

Для балки з жорстко защемленими кінцями довжини L застосовуємо відповідні граничні умови:

$$W(0) = \theta(0) = 0, \quad W(L) = \theta(L) = 0 \quad (50в)$$

Що дає наступні значення всіх чотирьох невідомих в загальному рішенні (50б):

$$\begin{cases} D = \frac{\frac{pL^2}{2N_0} \omega_1 \sin \omega_1 L - \frac{pL}{N_0} + \frac{pL}{N_0} \cos \omega_1 L}{2 - 2 \cos \omega_1 L - L \omega_1 \sin \omega_1 L}; \\ C = \frac{\frac{D}{\omega_1} \sin \omega_1 L - DL - \frac{pL^2}{2N_0}}{1 - \cos \omega_1 L}; \\ B = -\frac{D}{\omega_1}; \\ A = -C. \end{cases} \quad (51a)$$

Для випадку стискуючої сили, і

$$\begin{cases} D = \frac{\frac{pL^2}{2N_0} \omega_1 \sinh \omega_1 L - \frac{pL}{N_0} + \frac{pL}{N_0} \cosh \omega_1 L}{2 - 2 \cosh \omega_1 L - L \omega_1 \sinh \omega_1 L}; \\ C = \frac{\frac{D}{\omega_1} \sinh \omega_1 L - DL - \frac{pL^2}{2N_0}}{1 - \cosh \omega_1 L}; \\ B = -\frac{D}{\omega_1}; \\ A = -C. \end{cases} \quad (51б)$$

Для випадку розтягу осьовою силою. Формули (51) є наближеними і не враховують впливу поперечних переміщень на осьові деформації. Ці формули дають значення поперечних переміщень W від дії малого поперечного навантаження рівномірним тиском p та великої осьової сили. Зокрема, вони

дозволяють знаходити переміщення центральної точки, яке і буде слугувати для перевірки точності чисельних ГН розрахунків.

Чисельні обчислення ГН балки. Ці розрахунки слугують лише для перевірки точності моделі МСЕ і особливостей розбивки та прикладення граничних умов. Вибрані розміри балки є наступними: довжина L 100 мм, а висота h дорівнює 1 мм. Чисельна модель зображена на Рис 16. Тут і нижче розрахунки проведені з використанням відомого комплексу ABAQUS [111]. Для дискретизації балки використовувались елементи типу CPS4R і їх загальне число дорівнювало 13200, для моделювання напружень по товщині стінки використовувалися 12 шарів елементів по товщині.

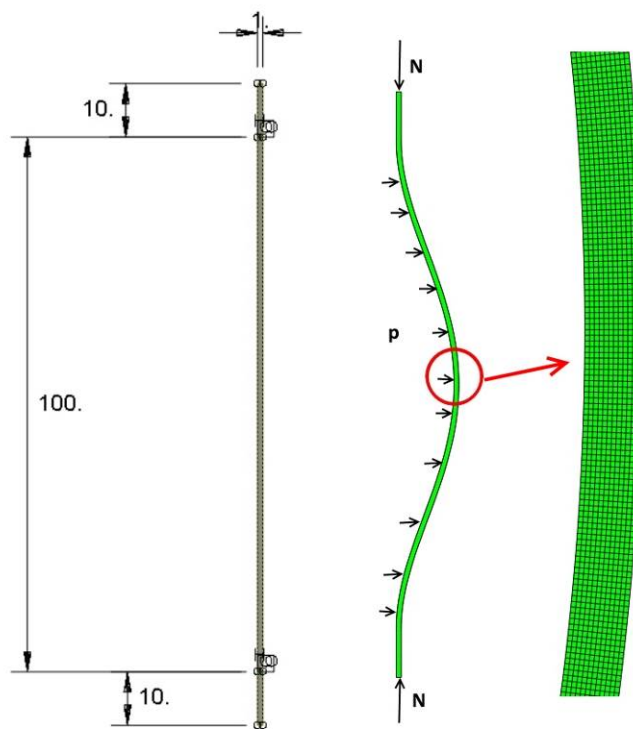


Рис. 16. 2D модель МСЕ ГН балки

Теоретичні і чисельно визначені поперечні переміщення центральної точки балки при однорідному поперечному навантаженні балки тиском $p = 0.1$ МПа в залежності від осьової сили показані на Рис. 17. Ідеальне співпадіння результатів

спостерігається аж до досягнення стискувальною силою величини, що дорівнює 70% критичної сили, при якій відбувається втрата стійкості. Тут критична сила знаходиться із умови $\omega_1 L = 2\pi$ в рівнянні (51a), при якій коефіцієнт C стає нескінченним, ця сила дорівнює 65 Ньютонів. При силі більшій 70% теоретична формула стає некоректною, цим і пояснюються розходження результатів.

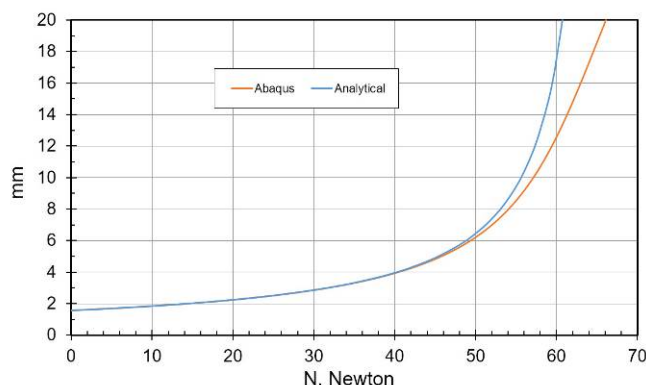


Рис. 17. Порівняння теоретичних і обчислених МСЕ переміщень центральної точки при дії стискувальної осової сили

Більш суттєвим для цілей нашого аналізу є співставлення результатів при дії розтягуючої сили. Результати теоретичного розрахунку і чисельного моделювання представлені на Рис 18. в цьому випадку ми спостерігаємо ідеальне співпадіння, що пояснюється зменшенням величин поперечних переміщень при збільшенні сили, а отже зменшенням вторинних ефектів впливу поперечних переміщень на осову деформацію, не враховану в теоретичній моделі.

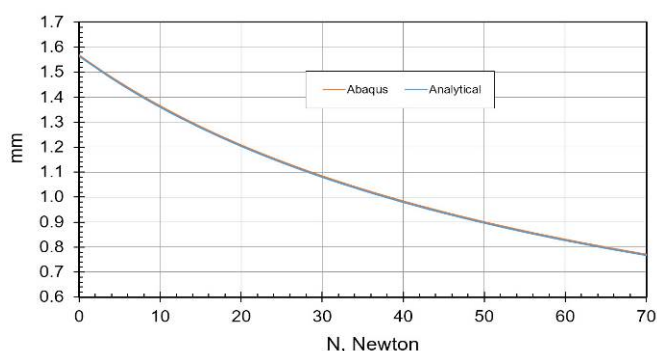


Рис. 18. Порівняння теоретичних і обчислених МСЕ переміщень центральної точки при дії розтягуючої осової сили.

3.1.2 Лінійна модель труби з осовою наскрізною тріщиною

Враховуючи симетрію тіла, ми розглядаємо в моделі лише 1/4 повної труби, Рис 19. Щоб зменшити вплив граничних умов на поведінку тріщини, пів довжина труби вибиралася в 8-10 разів довшою, ніж пів довжина тріщини.

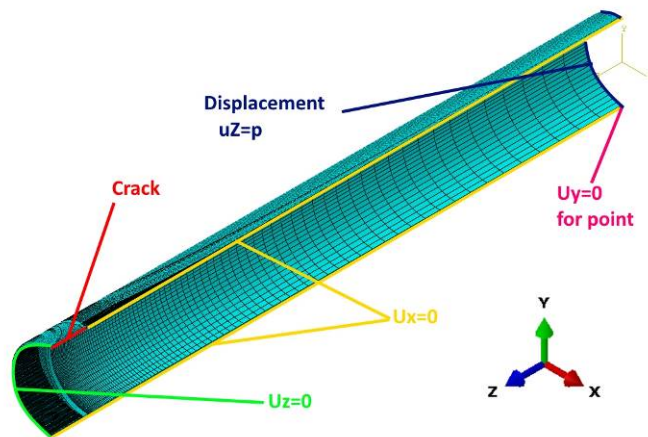


Рис 19. Модель МСЕ труби з осьовою тріщиною.

Дискретизація моделі труби в околі тріщини показана на Рис. 20. Тип ~~скінченно~~ елемента є C3D8R. В усіх моделях число шарів скінченних елементів по товщині стінки вибиралося рівним 10. Це забезпечувало хорошу сходиність результатів, в тому числі розподіл КІН по радіальній координаті. В інших випадках бралось число шарів рівним 6 -12. В цьому випадку ми не помічали різниці в величині КІН в центральній точці по товщині елемента, проте різниця могла бути помітною для точок фронту тріщини, що виходять на вільну поверхню. Контурні значення J-інтеграла використовувалися для обчислення КІН, відзначимо, що ці значення уже не змінювалися, починаючи з 5го контуру навколо тріщини, тому це значення і використовувалося як правильне.

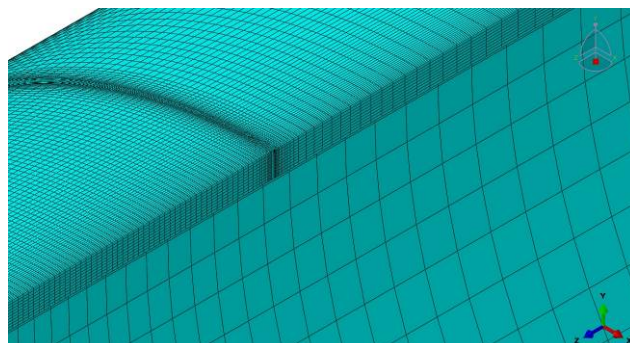


Рис. 20. Дискретизація труби біля вершини тріщини

Порівняння з результатами в API 579 [31]

З метою апробації результатів чисельних експериментів вибиралася труба з відношенням внутрішнього радіусу, R_i , до товщини стінки t , $R_i/t = 20$. Відповідно до документу [31] КІН обчислюється п наступній формулі:

$$K_I = \frac{pR_o}{t} G_p \sqrt{\pi c}, \quad (51a)$$

де

$$G_p = \frac{A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3}{1 + A_4\alpha + A_5\alpha^2 + A_6\alpha^3}, \quad (51b)$$

безрозмірна довжина тріщини визначається по формулі $\alpha = 1.818c/\sqrt{R_i t}$, c пів довжина тріщини, а всі коефіцієнти $A_n, n = 0...6$ взяті з Таблиць 9В.8 і 9В.9 [31] і для зручності, приведені тут також, Табл 6 та Табл 7.

Таблиця 6. Коефіцієнти A_n для поверхневої точки на внутрішній поверхні труби

A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
1.0278	0.0141	0.2023	0	0.1118	0.0239	0.0009

Таблиця 7. Коефіцієнти A_n для поверхневої точки на зовнішній поверхні труби

A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
0.9807	0.3825	0.2065	0	0.14841	0.03893	0.000405

Наступні геометричні і фізичні дані використовувалися для обчислень і порівнянь результатів: $R_i/t=20$, довжина тріщини $c= 17.8885438$, внутрішній тиск, $p=1\text{МПа}$, модуль Юнга $E=200000\text{ МПа}$, і коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$. Всі обчислення виконані в пакеті ABAQUS. Результати співставлення приведені в Таблиці 8. Очевидно, що результати досить добре узгоджуються між собою.

Таблиця 8. Порівняння результатів обчислення КІН в $MPPK\sqrt{t}$ для труби $Ri/t=20$, тиск $p=1$ МПа, довжина тріщини $c=17.888$

	API 579	MCE
Внутрішня точка	652.03	643.79
Зовнішня точка	512.63	509.98

Порівняння з результатами Шім та ін [82,83]

Тут розглядається дещо інша труба, де відношення серединного радіуса, R_m , до товщини стінки дорівнює $R_m/t=20$, внутрішній тиск $p=1$ МПа, пів довжина тріщини $c=8.94427$, модуль Юнга $E=200000$ МПа, і коефіцієнт Пуасона $\nu=0.3$. В таблиці 9 представлені результати обчислення КІН для центральної точки. Знову спостерігаємо дуже добру узгодженість результатів.

Таблиця. 9. Порівняння результатів обчислення КІН в $MPPK\sqrt{t}$ для труби $Ri/t=20$, тиск $p=1$ МПа, довжина тріщини $c=17.888$

	[83]	[82]	MCE
КІН	254.65	266.21	253.25

3.1.3 ГН модель труби з осьовою наскрізною тріщиною

Попередні теоретичні міркування

Цей підрозділ інспірований нам результатами роботи [88]. Запишемо рівняння рівноваги в радіальному напрямку теорії оболонок:

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{dQ_\varphi}{Rd\varphi} + \frac{N_\varphi}{R} = p + \frac{N_x}{\rho_x} \quad (52)$$

де Q_x та Q_φ є поперечними силами в відповідних напрямках, N_φ - окружна сила, N_x осьова сила, $(\rho_x)^{-1}$ додаткова кривизна оболонки в осьовому напрямку, спричинена деформаціями поверхні труби, тут, в першу чергу, від

внутрішнього тиску p та наявності тріщини. Схематично представимо рішення для переміщень в радіальному напрямку w вздовж осі труби (лінії тріщини), як добуток трьох факторів:

$$w = \frac{pR^2}{tE} \cdot \sqrt{\lambda} \cdot F(x/\sqrt{Rt}) \quad (53a)$$

Перший фактор дає загальний масштаб радіальних переміщень і є переміщеннями для випадку бездефектної труби під дією внутрішнього тиску. Другий безрозмірний фактор, $\lambda = c/\sqrt{Rt}$, відображає загальну особливість рішень механіки руйнування, де максимальне переміщення пропорційне кореню квадратному від довжини тріщини. Третій, F , відображає загальний характер поведінки крайового ефекту для циліндричних оболонок.

Величина кривизни, що спричинена деформацією, $(\rho_x)^{-1}$ пов'язана наступним чином з радіальним переміщенням w :

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (53б)$$

Тому із двох попередніх рівнянь маємо:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{pR}{tE} \cdot \frac{1}{t} \sqrt{\lambda} \cdot F''(x/\sqrt{Rt}) \quad (53в)$$

Тепер порівняємо дві силові складові правої частини рівняння (52), скажімо в точці $x = 0$, тобто - p та $\frac{pR}{tE} \cdot \frac{1}{t} \sqrt{\lambda} \cdot F''(0) \sigma_x t$.

З цього формального співставлення тиску і уявного додаткового тиску від набутої кривизни, можна зауважити, що геометрична не лінійність проявляє себе як деякий додатковий уявний тиск, p_1 :

$$p_1 = p \cdot k \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot \sqrt{\lambda} \quad (53г)$$

Таким чином, відносна різниця між лінійним КІН, SIF , і ГН розв'язком для КІН, SIF_{GN} рівна:

$$\Delta_s = \frac{SIF - SIF_{GN}}{SIF} = \frac{p - (p - p_1)}{p} = k \frac{R}{t} \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot \sqrt{\lambda} \quad (54a)$$

Безумовно, рівняння (54) є результатом якісних міркувань і не може розглядатися як теоретично встановлений. Він просто відображує певні залежності і результати обчислень, отримані і показані нижче.

Чисельні моделі

Спосіб прикладення осьової сили є дуже суттєвим для отримання правильних результатів. Спочатку ми прикладали осьову силу як рівномірно роз приділену по круговій координаті. Проте при великих напруженнях це могло призвести до втрати стійкості в площині поперечного січення. Це пов'язано з тим, через різне видовження точок в повздовжньому напрямку, кінцеве січення (де прикладені зовнішні сили) незначно повертається і осьова сила дає глобальну поперечну реакцію, що і спричинює втрату стійкості як балки. Тому осьова сила прикладається через рівномірні в осьовому напрямку переміщення всіх точок кінцевого січення.

Геометрія труби з тріщиною і характеристики розбиття на кінцеві елементи даються відповідно в Таблицях 10-13. Замітимо, що безрозмірна довжина позначається $\lambda = c/\sqrt{Rt}$. Так, розглядаються чотири геометрії відношення радіуса до товщини стінки **R/t=20, R/t=30, R/t=40, R/t=50**. Для кожної геометрії труби розглядаються чотри різних довжини тріщини. Тому, на загаль, побудовано 4*4=16 моделей труби з тріщинами, а також одна додаткова модель для **R/t=50** і $\lambda = 3$.

Таблиця 10. Особливості моделей для труби з відношенням **R/t=20**

Півдовжина тріщини, λ	2	4	6	8
Кількість елементів	142000	192000	222000	242000

Кількість вузлів	158873	214423	247753	269973
---------------------	---------------	---------------	---------------	---------------

Таблиця 11. Особливості моделей для труби з відношенням $R/t=30$

Півдовжина тріщини, λ	2	4	6	8
Кількість елементів	172000	202000	252000	282000
Кількість вузлів	192203	225533	281083	314413

Таблиця 12. Особливості моделей для труби з відношенням $R/t=40$

Півдовжина тріщини, λ	2	4	6	8
Кількість елементів	182000	202000	282000	302000
Кількість вузлів	203313	225533	314413	336633

Таблиця 13. Особливості моделей для труби з відношенням $R/t=50$

Півдовжина тріщини, λ	2	4	6	8
Кількість елементів	202000	222000	212000	282000
Кількість	225533	247753	236643	314413

вузлів				
--------	--	--	--	--

Результати ГН обчислень

Для кожної геометрії труби, тобто для фіксованого значення R/t , представлені нижче чотири графіки. Перші два з них – це первинні дані по безпосередньому обчисленні зміни КІН, спричиненої впливом ГН від великої осьової сили, тобто Δ_s в процентах % (54а) в залежності від осьових напружень; а також зміна Розкриття Тріщини, COD, Δ_U також в процентах від величини осьових напружень, Δ_U обчислюється аналогічно:

$$\Delta_U = \frac{COD - COD_{GN}}{COD} \quad (54б)$$

Інші два графіка – узагальненні графіки, побудовані в нормалізованих координатах відповідно до «очікуваних» залежностей, отриманих із загальних міркувань (54а). Таким чином, на цих двох графіках вісь ординат ділиться на $\sqrt{\lambda}$, а вісь абсцис ділиться на R/t .

Таким чином, для відношення товщини $R/t=20$ нижче приводяться чотири графіки – Рисунки 21 відповідно а, б, в, г.

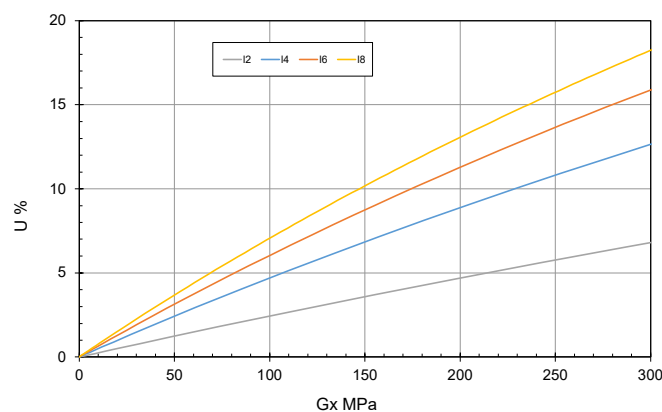


Рис. 21а. Залежність зміни COD, $\Delta U\%$, від осьових напружень.

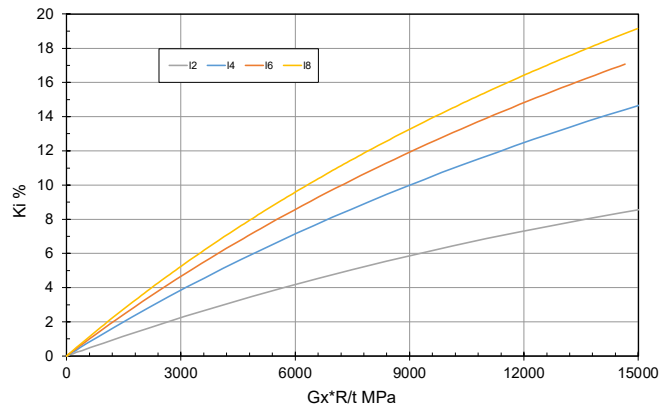


Рис. 21б. Залежність зміни SIF $\Delta_S \%$, від осевих напружень.

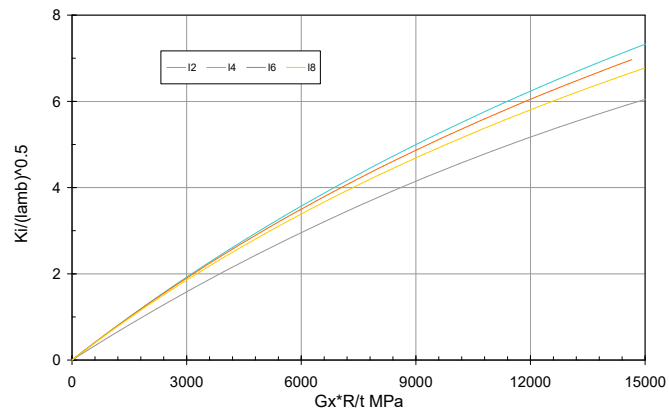


Рис. 21в. Узагальнений графік зміни SIF $\Delta_S \%$.

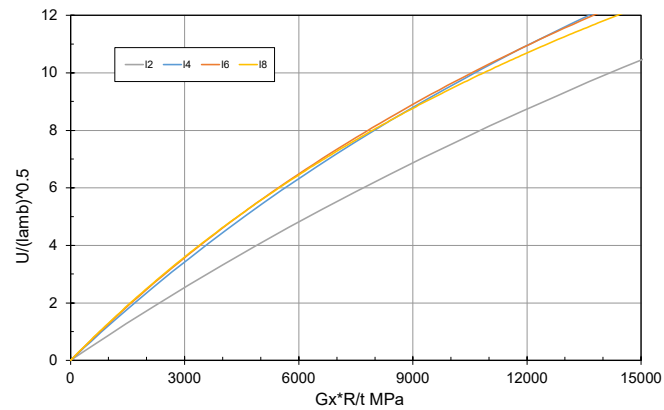


Рис. 21г. Узагальнена залежність зміни COD, $\Delta U \%$

Аналогічно для відношення товщини **R/t=30** нижче приводяться чотири графіки – Рисунки 22 відповідно а, б, в, г.

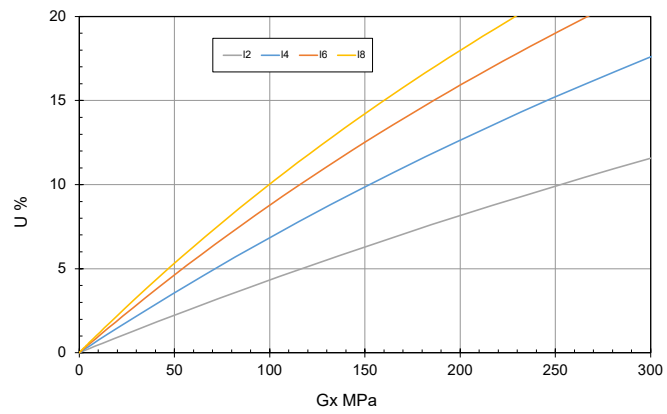


Рис. 22а. Залежність зміни COD, $\Delta U\%$, від осевих напружень.

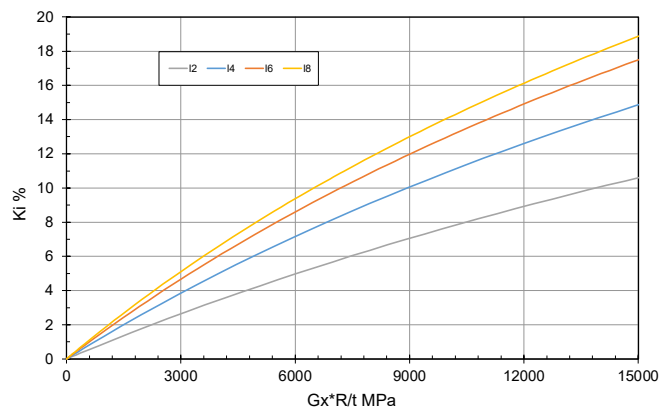


Рис. 22б. Залежність зміни SIF $\Delta_s\%$, від осевих напружень.

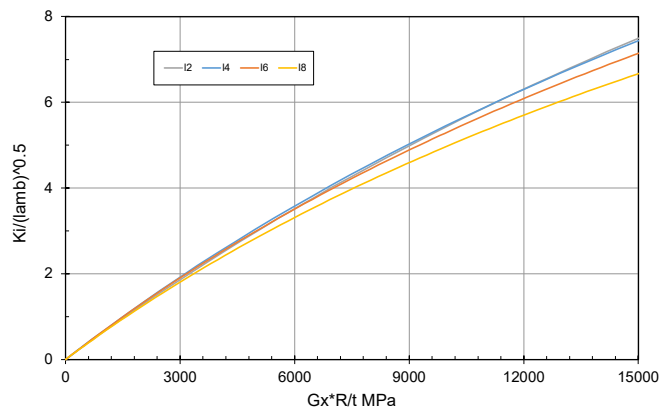


Рис. 22в. Узагальнений графік зміни SIF $\Delta_s\%$.

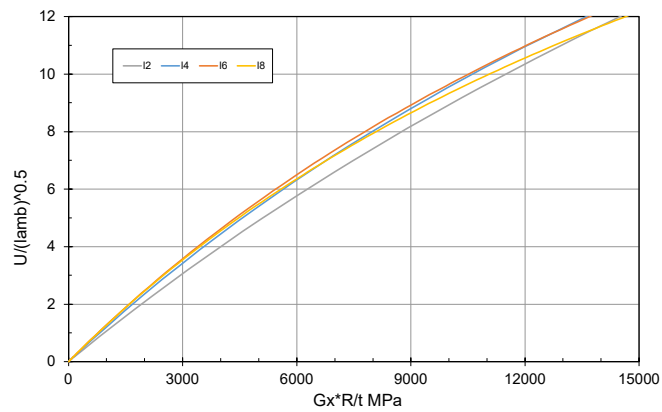


Рис. 22г. Узагальнена залежність зміни COD, $\Delta U\%$

Аналогічно для відношення товщини **R/t=40** нижче приводяться чотири графіки – Рисунки 23 відповідно а, б, в, г.

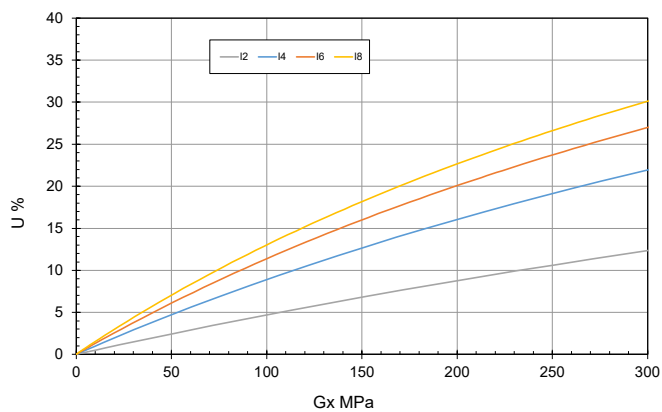


Рис. 23а. Залежність зміни COD, $\Delta U\%$, від осевих напружень.

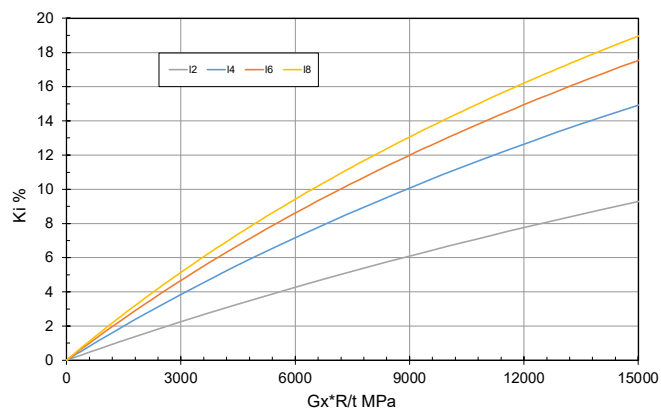


Рис. 23б. Залежність зміни SIF $\Delta_s\%$, від осевих напружень.

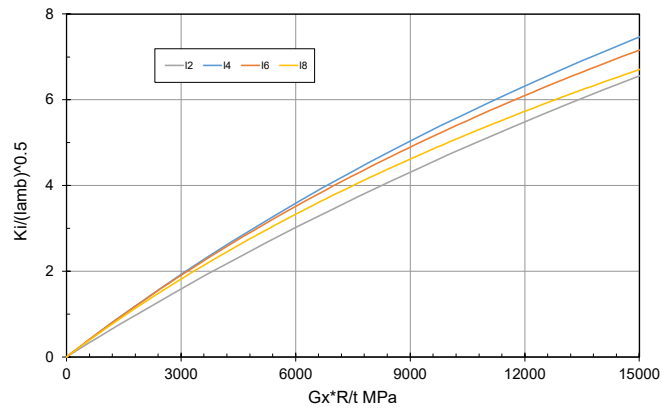


Рис. 23в. Узагальнений графік зміни SIF Δ_s %.

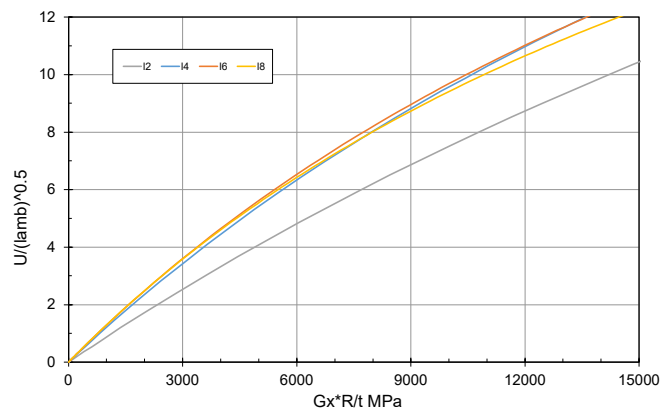


Рис. 23г. Узагальнена залежність зміни COD, ΔU %

Аналогічно для відношення товщини **$R/t=50$** нижче приводяться чотири графіки – Рисунки 23 відповідно а, б, в, г

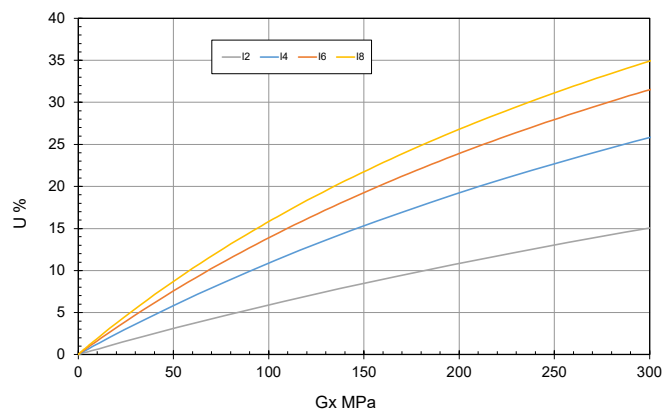


Рис. 24а. Залежність зміни COD, ΔU %, від осевих напружень.

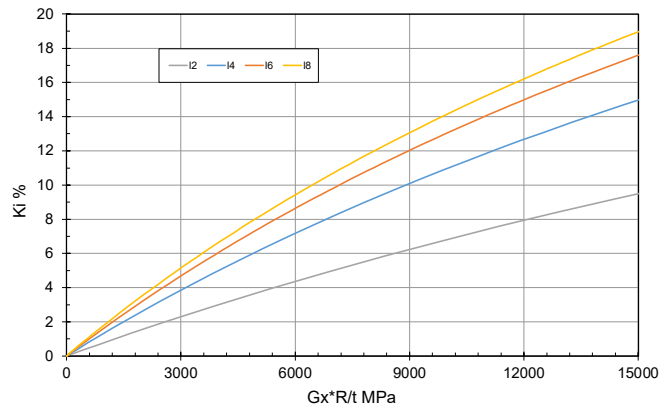


Рис. 24б. Залежність зміни SIF Δ_s %, від осевих напружень.

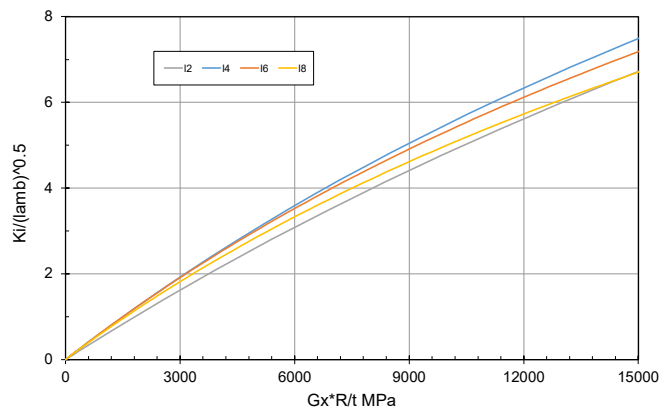


Рис. 24в. Узагальнений графік зміни SIF Δ_s %.

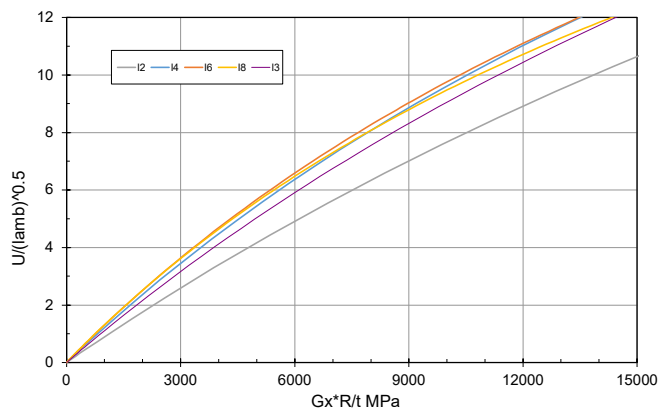


Рис. 24г. Узагальнена залежність зміни COD, ΔU %

Таким чином, можна побачити, що узагальнені графіки майже співпадають для різних відношень R/t і величин λ . Тому в першому наближенні достатньо побудувати і аналітично описати лише один графік Δ_s від осевих напружень. Те ж саме можна сказати про залежність ΔU за

виключенням малих величин λ . Такі зручні результати можуть стати поштовхом до майбутніх теоретичних досліджень.

Як перше наближення, можна запропонувати наступні емпіричні формули сконструйовані за допомогою обробки результатів методом найменших квадратів. Так відштовхуючись від результатів для $R/t = 50$ та $\lambda = 6$ ми отримаємо для Δ_s (тут приведені в процентах, %):

$$\frac{\Delta_s}{\sqrt{\lambda}} = A_1 \cdot ((1 - c_1 \exp(-\beta_1 x)) - (1 - c_1) \exp(-2\beta_1 x)) \quad (55a)$$

Де константи і змінна x є наступними:

$$A_1 = 11.465 \quad \beta_1 = 1.98 \cdot 10^{-5} \quad c_1 = -0.937 \quad x = \sigma_x R/t \quad (55б)$$

Подібним чином сконструйована формула для COD - Δ_u %, те ж в процентах:

$$\frac{\Delta_u}{\sqrt{\lambda}} = A_2 \cdot ((1 - c_2 \exp(-\beta_2 x)) - (1 - c_2) \exp(-2\beta_2 x)) \quad (55в)$$

Де константи дорівнюють:

$$A_2 = 13.902 \quad \beta_2 = 2.18 \cdot 10^{-5} \quad c_2 = -2.232 \quad (55г)$$

Відмітимо, що похибка апроксимації чисельних даних вказаними формулами оцінюється нами в 2% для додатних значень x : $0 \leq x \leq 120000$.

Ключеве питання полягає в тому, наскільки вказані ефекти мають практичне значення. Спочатку замітимо наступне:

- ефект ГН більше виражений для тонкостінних труб;
- для типових значень σ_x , що наближається до 150 МПа і для $R/t > 30$ різниця між лінійними і нелінійними рішеннями може досягати величини 5-10% , що є досить помітним для практики.

Як реальний приклад, розглянемо повномасштабні експерименти навантаження внутрішнім тиском аж до руйнування, проведені на трубах магістральних трубопроводів з наскрізними тріщинами [114]. Ці дані часто згадуються в науковій літературі і приведені в Таблиці 14. Як видно, навіть для цих, порівняно товстих труб ефект ГН на КІН може досягати 4.5%. Тут приведені осьові напруження, пораховані як половина від окружних.

Таблиця 14. Експериментальні дані представлені в [114]

R/t	c	λ	$\sigma_x = \sigma_\theta / 2$	$\sigma_x R/t$	$\Delta_s / \sqrt{\lambda}$	$\Delta_s \%$
21.31	175	9.06	99.52	2120.34	1.35	4.07
21.31	225	11.65	77.75	1656.52	1.07	3.64
21.31	275	14.24	62.20	1325.22	0.86	3.25
20.91	125	6.48	129.47	2707.49	1.70	4.34

3.1.4. Висновки по підрозділу 3.1.

Врахування ГН все ще не є типовим в трубопровідній чи атомній промисловості. Детальне чисельне моделювання для випадку великої розтягуючої сили виявило помітний ефект як для величини КІН так і для величини розкриття берегів тріщини, а значить і площі розкриття, що має бути врахованим в концепції «течія перед руйнуванням». Навіть для типових труб з відношенням радіуса і товщини стінки рівним $R/t = 20$ цей ефект може досягати 10% при осьових напруженнях рівних 150 МПа.

Найбільш цікавим емпіричним результатом є те, що графіки залежностей з допустимою інженерною точністю можуть бути представлені як узагальнені відношення РТ і КІН поділених на $\sqrt{\lambda}$ (де λ безрозмірна довжина тріщини) від добутку осьових напружень на відношення R/t , тобто від величини $\sigma_x R \sqrt{\lambda} / t$. На основі даних для $R/t = 50$ сконструйовані емпіричні формули, з точністю 2%.

Результати цього параграфу опубліковані в статті [115].

3.2. Розробка двох чисельних процедур вирішення інтегро-диференційного рівняння для задачі плоскої тріщини складної форми

Мета даного розділу полягає в розробці ефективного чисельного рішення інтегро-диференціального рівняння (7) для плоскої тріщини довільної форми. Відповідно до неї ставимо наступні три задачі:

- Сформулювати загальний підхід для вирішення задачі для плоскої тріщини, який би дозволив отримати поле розкриття поверхонь тріщини, РПТ, та величини КІН в довільній точці контура при довільному поліноміальному навантаженні. Для такого підходу важливо створити точну процедуру інтегрування для обчислення значень інтеграла (7) в довільних точках інтегрування $O^q(x_q, y_q)$.

- Співставити два методи вирішення рівняння (7): перший класичний, що передбачає внесення диференційного оператора в підінтегральний вираз, відповідно проведення аналітичного диференціювання, а потім проведення операції для гіперсингулярного рівняння; других – прямий метод, що спочатку передбачає інтегрування, а потім проведення операцій диференціювання, що був вперше запропонований нами [116]. Адекватність і точність двох підходів буде проаналізована.

- Співставити точність застосування різних функцій форми на кінцевий результат.

3.2.1 Техніка рішення інтегро-диференційного рівняння

Представлений нижче підхід є універсальним і може бути використаним для двох нижче приведених обчислювальних підходів:

1) класичний підхід, оснований на інтегруванні гіперсингулярного рівняння, типу (10);

2) прямий, що оснований на інтегруванні виразів типу (7) і наступним диференціюванням отриманих значень.

Пряма процедура була розвинута нами раніше [116]. В порівнянні з класичною процедурою він містить відносно простий додатковий крок: вчислені величини $\omega(x, y)$ в дискретних точках апроксимуються поліномами, до якого потім застосовується диференційний оператор Лапласа.

Загальна схема рішення полягає в наступному:

- Величини розкриття тріщини і напруження, що діють на поверхні тріщини представляються в поліноміальному виді (56a) і (56b), де

число членів повинно бути таким самим для обох поліномів. Очевидно, що чим вищий максимальний порядок полінома J , тим точніші результати можна отримати.

$$U(\xi, \eta) = \Omega \cdot \sum_{i+j \leq J} A_{ij} \xi^i \eta^j, \quad (56a)$$

$$p(x, y) = \sum_{m+n \leq J} B_{mn} x^m y^n. \quad (56b)$$

- Повна поверхня тріщини заповнюється набором Q точок колокацій $O^q(x_q, y_q)$. Число їх повинно бути достатньо великим, щоб провести адекватне аналітичне згладжування, тобто $Q \gg J^2$.
- Для кожної вибраної елементарної функції переміщення $U_{ij}(\xi, \eta) = \Omega \cdot 1 \cdot \xi^i \eta^j$ і для кожної точки колокації O^q проводиться чисельне інтегрування:
 - а) виразу (10) в класичному підході;
 - б) виразу (9) в прямому методі.
- Отримані величини інтегралів в усіх точках O^q інтерполюється поліномами, наприклад методом найменших квадратів:
 - а) виду $p(x, y)$ максимального ступеня $m + n \leq J$ для класичного методу;
 - б) виду $p^{\text{integral}}(x, y)$ максимального ступеня $m + n \leq J + 2$ для прямого методу. Тоді аналітично застосовується оператор Лапласа до $p^{\text{integral}}(x, y)$ так, що ми отримаємо поліном виду $p(x, y)$.
- В такий вищесказаний спосіб отримуються коефіцієнти поля навантаження $\sum_{m+n \leq J} M_{mn}^{ij} x^m y^n$ для кожного елементарного поля переміщень, COD $U_{ij}(\xi, \eta)$, $i + j \leq J$.
- Представляючи A_{ij} і B_{mn} як одномірні вектори (\vec{A}_N) та (\vec{B}_T) , де $1 \leq N \leq K$, $1 \leq T \leq K$ і $K = (J+1)(J+2)/2$, і елементи матриці M_{mn}^{ij} як

$[M_{1,T}^N]$ можемо представити залежність між векторами (\vec{A}_N) і (\vec{B}_T) в матричному вигляді:

$$(\vec{B}_T) = [M_{1,T}^N](\vec{A}_N) \quad (57a)$$

- Шукана залежність між заданим полем навантажень і результуючим полем переміщень можна отримати шляхом знаходження матриці оберненої до $[M_{1,T}^N]$, тобто $[M_{2,T}^N] = [M_{1,T}^N]^{-1}$, таким чином:

$$(\vec{A}_N) = [M_{2,T}^N](\vec{B}_T) \quad (57b)$$

Способи практичної реалізації всіх вищесказаних етапів пошуку рішення є добре відомими і відносно простими. Єдина технічна проблема полягає в знаходженні інтегралів в кожній точці колокації $O^q(x_q, y_q)$. Нижче представлена універсальна чисельна процедура знаходження значень інтегралів для рівнянь типу (10) і (9).

Інтегрування в точках колокацій

Спочатку опишемо трансформацію систем координат і дискретизацію площі тріщини. Координатна система підінтегрального виразу замінюється, як звичайно, на локальну полярну систему координат, центр якої пов'язаний з розглядуваною точкою x і y , тобто наступними рівняннями вводиться полярна система (r_{loc}, α) :

$$\xi - x = r_{loc} \cos \alpha, \quad \eta - y = r_{loc} \sin \alpha \quad (58a)$$

Елемент площі записується як:

$$dS = d\xi d\eta = r_{loc} d\alpha dr_{loc} \quad (58b)$$

Замітимо, що математично r_{loc} дорівнює R^* , тобто. $r_{loc} \equiv R^*$ хоча зміст цих величин різний. Така рівність дозволяє зменшити степінь сингулярності, і в цих нових координатах вирази типу (9) та (10) приймають вигляд, представлений в «змішаній координатній системі»:

$$\omega(x, y) = \int_0^\pi \int_{-Z_1(\alpha)}^{Z_0(\alpha)} \Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j dr_{loc} d\alpha \quad (59a)$$

$$I(x, y) = \int_0^\pi \int_{-Z_1(\alpha)}^{Z_0(\alpha)} \frac{\Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j}{r_{loc}^2} dr_{loc} d\alpha \quad (596)$$

Тут для кожного кута α величина r_{loc} змінюється від $-Z_1(\alpha)$ до $Z_0(\alpha)$ ($Z_0, Z_1 \in$ додатні числа), див Рис. 25.

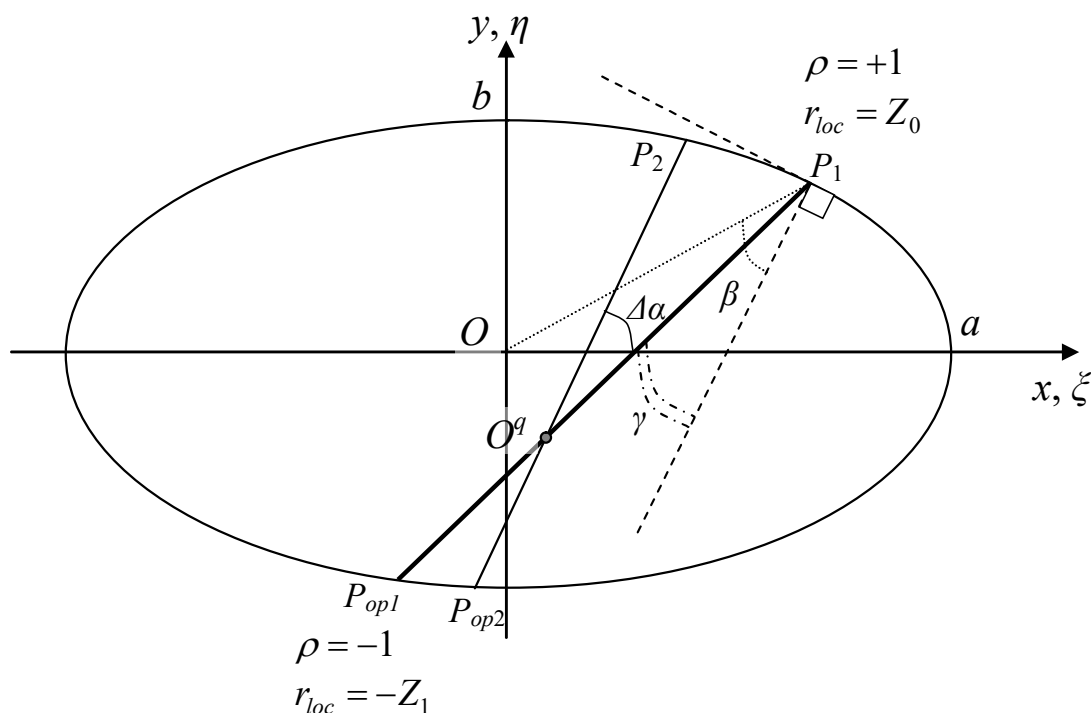


Рис. 25. Позначення для розбивки подвійними трикутниками

Маючи на увазі, що форма тріщини може бути довільною, зовнішнє інтегрування по куту α повинно виконуватися чисельно. Це інтегрування ґрунтується на розбивці області на подвійні (парні) трикутники де розглядувана точка колокації O^q є спільною вершиною цих трикутників, схема розбивки показана на Рис. 25. Подібна схема використовувалася в [116]. Правила розбивки повинні відповідати наступним вимогам:

1) дискретизація повинна враховувати існування на контурі тріщини кутових точок, які не повинні бути внутрішніми для трикутників інтегрування;

2) трикутники повинні бути достатньо тонкими ($\Delta\alpha$ параметр повинен бути малим);

3) як кривизна в точці контуру так розміщення точки колокації повинні бути враховані при виборі довжини спрямляючих сегментів P_1P_2 , і $P_{op1}P_{op2}$ (див Рис. 25).

Відзначимо, що кількість “сегментів контуру” є різною для різних точок O^q . В нашій роботі ми звичайно вибирали максимальний кут рівний $\Delta\alpha = 1^\circ$, таким чином, число подвійних трикутників знаходилося в межах від 180 до 400 в залежності від розміщення точки O^q .

Процедура інтегрування вздовж радіальних ліній є більш складною і представлена нижче.

Підінтегральний вираз $\Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j$ не може бути аналітично проінтегрованим вздовж радіальної лінії. Тому ми представляємо нову нормалізовану локальну координату ρ і представляємо підінтегральний вираз як функцію цієї координати.

Прив'яжемо величину $\rho = -1$ до точки P_{op1} де $r_{loc} = -Z_1$, а величину $\rho = 1$ прив'яжемо до точки $r_{loc} = Z_0$ в точці P_1 (Рис. 25). Тоді нормалізована локальна координата точки колокації O^q ($r_{loc} = 0$) буде рівна ρ_0 , а півдовжину відрізка P_1P_{op1} позначимо як l . Тоді будуть виконуватися наступні залежності [99]:

$$\rho = \frac{2}{Z_1 + Z_0} \cdot \left(r_{loc} - \frac{Z_0 - Z_1}{2} \right), \quad (60a)$$

$$\rho_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \quad l = \frac{Z_1 + Z_0}{2} \quad (60b)$$

Вздовж радіальної лінії представимо значення функцій поля переміщення в вигляді інтерполяційного полінома, тобто:

$$\Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j = \sqrt{1 - \rho^2} f(\rho); \quad (61a)$$

Де

$$f(\rho) = A_1 \left(\frac{1 + \rho}{2} \right) + A_{-1} \left(\frac{1 - \rho}{2} \right) + (1 - \rho^2) (b_0 + b_1 \rho + \dots b_{V-2} \rho^{V-2}) \quad (61б)$$

Де b_v деякі невідомі константи, а коефіцієнти A_1, A_{-1} залежать від асимптотичних значень виразів $\Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j / \sqrt{1 - \rho^2}$ в точках контуру тріщини, A_1 - в точці P_1 і A_{-1} - в точці P_{op1} , так, що:

$$A_{-1} = \xi^i \eta^j \cdot \lim_{\rho \rightarrow -1} \frac{\Omega(\xi, \eta)}{\sqrt{1 + \rho} \sqrt{2}} \quad (61в)$$

$$A_1 = \xi^i \eta^j \cdot \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\Omega(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - \rho} \sqrt{2}} \quad (61г)$$

В практичних розрахунках границі в (61в,г) можуть бути спрощені з врахуванням відомої особливості поведінки ФФ. Наприклад, для еліптичної тріщини вибираючи ФФ в вигляді Ω_1 , ці значення знаходяться як:

$$A_{-1} = \xi^i \eta^j \cdot \sqrt{\frac{l}{R_{-1}}} \sqrt{\frac{\cos \gamma_{-1}}{\cos \beta_{-1}}} \quad (61д)$$

$$A_1 = \xi^i \eta^j \cdot \sqrt{\frac{l}{R_1}} \sqrt{\frac{\cos \gamma_1}{\cos \beta_1}} \quad (61е)$$

де R -це радіальна координата розглядуваної точки контуру по відношенню до центра тріщини O , γ це кут між $P_1 P_{op1}$ і нормаллю до фронту тріщин в відповідній точці контуру, β це є кут між відрізком $OP_1 (OP_{op1})$ і нормаллю до контуру (Рис 25).

Коефіцієнти b_v інтерполяційного полінома (61б), можуть бути отримані методом найменших квадратів використовуючи пораховані значення виразу (61а) (лівої частини). Тобто формуються пари $(f^*(\rho_w), \rho_w)$, де координата точки $-1 < \rho_w < 1$, а величина $f^*(\rho)$ обчислюється з наступного виразу:

$$f^*(\rho) = \frac{\Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j / \sqrt{1 - \rho^2} - A_1(1 + \rho)/2 - A_{-1}(1 - \rho)/2}{1 - \rho^2} \quad (62)$$

Враховуючи заміну координати (60) можна отримати наступні залежності для елемента довжини: $dr_{loc} = l d\rho$, $r_{loc}^2 = l^2(\rho - \rho_0)^2$. Таким чином, інтеграл вздовж відрізка $P_1 P_{op1}$ представляється так, відповідно для інтегралу типу (10) і (9) відповідно:

$$\int_{-Z_1}^{Z_0} \frac{\Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j}{r_{loc}^2} dr_{loc} = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \rho^2} f(\rho)}{(\rho - \rho_0)^2} d\rho \quad (63a)$$

$$\int_{-Z_1}^{Z_0} \Omega(\xi, \eta) \xi^i \eta^j dr_{loc} = l \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \rho^2} f(\rho) d\rho \quad (63b)$$

Остання важлива задача тут – це безпосереднє аналітичне інтегрування функцій виду (63). Для виразу (63б) ця задача не представляє складнощів, адже для виразів типу $\sqrt{1 - \rho^2} \rho^\nu$, є добре відомі відповідні рекурентні формули (послідовне визначення інтегралу спочатку для $\nu = 0$, а потім послідовно для 1, далі для 2 і так далі). Вираз (63а) містить в собі гіперсингулярну компоненту, яка може бути проінтегрована лише в кінцево-частинному сенсі (finite part sense). Для знаходження інтегралу (63а) використовуються поліноми Чебишева другого роду [101,102], а також рекурентні процедури те ж тут можуть застосовуватися. Аналітичні значення цих інтегралів для різних степенів ρ^ν пораховані рекурентно і представлені в Таблиці 15 як для прямого методу так і для класичного

Таблиця 15. Величини основних інтегралів для різних степенів ρ^ν

ν	Value of $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \rho^2} \rho^\nu}{(\rho - \rho_0)^2} d\rho$	Value of $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho^\nu d\rho$
0	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$

1	$-2\pi\rho_0$	0
2	$\frac{\pi}{2} - 3\pi\rho_0^2$	$\frac{\pi}{8}$
3	$\pi\rho_0 - 4\pi\rho_0^3$	0
4	$\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi\rho_0^2}{2} - 5\pi\rho_0^4$	$\frac{3\pi}{48}$
5	$\frac{\pi\rho_0}{4} + 2\pi\rho_0^3 - 6\pi\rho_0^5$	0
6	$\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi\rho_0^2}{8} + \frac{5\pi\rho_0^4}{2} - 7\pi\rho_0^6$	$\frac{15\pi}{384}$
7	$\frac{\pi\rho_0}{8} + \frac{\pi\rho_0^3}{2} + 3\pi\rho_0^5 - 8\pi\rho_0^7$	0
8	$\frac{5\pi\rho_0}{128} + \frac{3\pi\rho_0^2}{16} + \frac{5\pi\rho_0^4}{8} + \frac{7\pi\rho_0^6}{2} - 9\pi\rho_0^8$	$\frac{105\pi}{3840}$
9		0
10		$\frac{315\pi}{15360}$
11		0
12		$\frac{3465\pi}{215040}$

Враховуючи, що для значення “прямого” інтегралу для непарних значень показника ступеня ν дорівнюють нулю, є доцільним використання більшого числа членів апроксимаційного поліному, щоб дістати співставну точність обох методів.

3.2.2. Приклади розрахунку полів переміщень і КІН

3.2.2.1 Еліптична і кругова тріщини.

Перша серія тестових перевірок – це є визначення полів переміщень, COD, для еліптичної тріщини при постійному навантаженні. Прораховані і перевірені результати роботи [100] для різних співвідношень для осей еліпса; тут ми вибрали набір точок колокацій і кількість членів полінома J такими самими як в роботі [100]. Таким чином координати (x, y) точок колокацій є $(0, 0)$ і $(\beta a \cos \alpha, \beta b \sin \alpha)$, де відносний радіус точки $\beta = 0.3, 0.6, 0.9$, а значення кута $\alpha = 0, \pi/12, 2\pi/12, 3\pi/12, 4\pi/12, 5\pi/12, 6\pi/12$; поліноміальне представлення COD враховуючи симетрію задачі, наступне:

$$w(x, y) = \frac{Hb\sigma_{const}}{2\pi E_b(e)} \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2} (c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2 + c_4 x^4 + c_5 x^2 y^2 + c_6 y^4) \quad (64)$$

де $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, E_b – повний еліптичний інтеграл другого роду. Автори [100] стверджують, що для різних параметрів ексцентриситету еліпсу $e = \sin(k \cdot \pi/18)$ ($k = 0, 1, \dots, 8$) всі розрахункові коефіцієнти: $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Така заява є трохи дивною в чисельних обчисленнях, адже приведені в [100] їхні значення c_1 не дорівнюють строго 1.0, тому ми можемо оцінити реальну величину коефіцієнтів $c_2 \dots c_6$ в [100] як $\approx 10^{-5}$, відповідно до точності c_1 , що приведена в [100]. Результати співставлення приведені в Таблиці 16. В обох методах ми беремо 9 членів для поліномів $f(\rho)$ і використовується звичайна класична ФФ для COD $\Omega_1 = \sqrt{L}$.

Таблиця 16. Величини COD для еліптичної тріщини при постійному навантаженні

k	Дані [100]	Класичний метод	Прямий метод
-----	------------	-----------------	--------------

	$1-c_1$	Максимум із $ c_k (k = 2...6)$	$1-c_1$	Максимум із $ c_k (k = 2...6)$	$1-c_1$	Максимум із $ c_k (k = 2...6)$
0	0.0	$\approx 10^{-5}$	$-4.5*10^{-7}$	$4.86*10^{-15}$	$-4.48*10^{-7}$	$1.03*10^{-8}$
1	-10^{-5}		$2.79*10^{-7}$	$5.71*10^{-8}$	$-1.1*10^{-6}$	$2.2*10^{-5}$
2	0.0		$-3.5*10^{-7}$	$3.42*10^{-7}$	$-6*10^{-6}$	$1.15*10^{-4}$
3	$-3.0*10^{-5}$		$2.01*10^{-7}$	$1.04*10^{-6}$	$-9.5*10^{-6}$	$1.74*10^{-4}$
4	$3.0*10^{-5}$		$-1.4*10^{-7}$	$2.34*10^{-6}$	$-2.2*10^{-5}$	$3.98*10^{-4}$
5	$3.0*10^{-5}$		$-1.1*10^{-6}$	$5.09*10^{-6}$	$-1.9*10^{-5}$	$3.57*10^{-4}$
6	$-4.0*10^{-5}$		$-1.2*10^{-6}$	$1.12*10^{-5}$	$-3.2*10^{-5}$	$5.88*10^{-4}$
7	-10^{-5}		$-3.7*10^{-6}$	$2.12*10^{-5}$	$8.53*10^{-5}$	$6.53*10^{-4}$
8	$2.1*10^{-5}$		$-8.2*10^{-6}$	$4.43*10^{-5}$	$1.79*10^{-4}$	$3.69*10^{-3}$

Очевидно, як слідує з Табл. 16, точність визначення c_1 в класичному методі є кращою ніж в роботі [100]; точність визначення інших коефіцієнтів c_i є співмірною. Точність прямого методу є трохи гіршою, ніж це стверджується в [100]. Але прямий метод має справу з поліномами більшої степені, адже він містить процедуру подвійного диференціювання. Таким чином, мала кількість точок колокацій може бути недостатньою для проведення хорошого згладжування. Тому нами проведені додаткові тести для показника степені $k=8$ і 400 точок колокацій розподілених по чверті еліпса. Отримані наступні величини: $1-c_1$ дорівнює $1.08*10^{-4}$, максимум величин c_k є $0.38*10^{-4}$. Така точність є близькою як до результатів [100] так і до класичного методу. Таким чином, продемонстрована висока точність для еліпсу з великим відношенням довжин осей як для прямого так і класичного методу.

Інша серія тестів проведена для кругової тріщини при різних законах навантаження. Нижче досліджується вплив параметрів дискретизації області і порядку апроксимуючих поліномів на досягнення точності результатів при різних законах навантаження.

В роботі [34] дається наступний вираз для знаходження КІН для кругової тріщини:

$$K_I(\varphi) = \iint_{(s)} \sigma(r, \theta) \Phi(r, \theta, \varphi) r dr d\theta \quad (65a)$$

де $\Phi(r, \theta, \varphi)$ є ваговою функцією, записаною в вигляді розкладу по тригонометричним функціям (φ - це кутова координата точки контура тріщини)

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{2}{\pi \sqrt{\pi R \sqrt{R^2 - r^2}}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n\theta \cos n\varphi + \left(\frac{r}{R} \right)^n \sin n\theta \sin n\varphi \right) \right] \quad (65b)$$

Для такої кругової тріщини ($R \equiv \text{const} (e.g. = 1)$), враховуючи ортогональну властивість тригонометричних функцій по повному колу, легко можна отримати аналітичні значення КІН при довільному навантаженні заданому в полярних координатах $\sigma(r, \theta)$. Приклади обчислення КІН даються в Таблиці 17.

Таблиця 17. Аналітичні значення КІН при деяких навантаженнях кругової тріщини $\sigma(r, \theta)$.

N	$\sigma(r, \theta)$	Поліноміальне представлення	Вирази для КІН ($R \equiv 1$)
1	$\text{const} (\equiv 1)$	$\text{const} (\equiv 1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

2	$r \cos \theta$	x	$\frac{4 \cos \varphi}{3\sqrt{\pi}}$
3	$r^2 \cos 2\theta$	$x^2 - y^2$	$\frac{16 \cos 2\varphi}{15\sqrt{\pi}}$
4	$r^4 \cos 4\theta$	$x^4 + y^4 - 6x^2y^2$	$\frac{256 \cos 4\varphi}{315\sqrt{\pi}}$

Тести зроблені при наступних параметрах чисельної процедури:

- 1) прямий метод, $V=8$ (максимальна ступінь $f(\rho)$), кутовий крок по контуру $\epsilon 2^\circ$;
- 2) прямий метод, $V=12$, крок по кутовій координаті $\epsilon 2^\circ$;
- 3) прямий метод, $V=12$, крок по кутовій координаті $\epsilon 1^\circ$;
- 4) класичний метод, $V=8$, крок по кутовій координаті $\epsilon 2^\circ$;
- 5) класичний method, $V=8$, крок по кутовій координаті $\epsilon 1^\circ$.

В усіх вищесказаних варіантах чисельної процедури використовувалось 1601 точок колокацій: кожен із 40 рівновіддалених по куту полярних радіусів, що йдуть від центру до контуру тріщини, рівномірно заповнений 40 точками колокацій, плюс одна точка – центр координат. Степінь полінома поля напружень і переміщень J дорівнює (для прямого методу $J_{\text{integral}}=8$).

Чудова точність досягнута для двох методів, Таблиця 18, хоча знову прямий метод демонструє кращі результати. Видно, що крок по куту розбивки області інтегрування ϵ найбільш суттєвим параметром, що впливає на точність результатів. Збільшення порядку апроксимаційного полінома V не призводить до скільки небудь помітних змін в результатах, тому ми робимо локальний висновок, що степінь $V = 8$ може вважатися як оптимальне значення для поліномів $f(\rho)$

Таблиця 18. Похибки обчислення КІН для кругової тріщини при різних навантаженнях, в процентах

Варіанти пара-метрів розби вки. $\sigma(r, \theta)$	1	2	3	4	5
$const (\equiv 1)$	0.00538%	0.00538%	0.00261%	0.0098%	0.00225%
$r \cos \theta$	0.01461%	0.01478%	0.00489%	0.0036%	0.00174%
$r^2 \cos 2\theta$	0.0182%	0.01827%	0.00579%	0.0069%	0.00157%
$r^4 \cos 4\theta$	0.02497%	0.0252%	0.00732%	0.0023%	0.00111%

3.2.2.2 Кругова тріщина зі здвинутим центром координат

Дуже хороша точність продемонстрована в Таблицях 16 та 18 в певному сенсі може розглядатися як випадкова. Причина полягає в тому, що для цих простих геометрій ми вибирали розклад поля переміщень в вигляді (56a), який по суті містить в собі точні аналітичні рішення з невідомими коефіцієнтами множниками. Тому замість демонстрації точності і універсальності методу як такого, ми продемонстрували здатність знаходити коефіцієнти в точному аналітичному виразі.

В загальному випадку, для складних конфігурацій тріщини вибір функцій форми ФФ і місця знаходження умовного центру координат, а також обґрунтування достатності членів розкладу полів напружень і переміщень (56) не є очевидним. Тому, як перевірити точність методу на відомих

аналітичних рішеннях, якщо вони уже підказують в якому вигляді і шукати це рішення? Нижче ми пропонуємо оригінальний підхід для перевірки чисельного методу рішення інтегро-диференційного рівняння з точними рішеннями. Ідея полягає в тому, щоб використовувати неправильну ФФ і найпростіший шлях полягає в виборі ФФ в виді Ω_1 , проте зі зміщеним центром координат.

Нижче проведена серія розрахунків для кругової тріщини одиночного радіуса і ФФ взятої в вигляді $\Omega_1 = \sqrt{1 - r^2/R^2}$. Єдина відмінність від розглянутого вище випадку і представленого в Табл. 18, полягає в виборі центра координат, відносно якого визначається функція Ω_1 . Візьмемо його в дуже зміщеній точці, а саме в точці з координатами $O_2(\xi = 0.5, \eta = 0)$. Нагадаємо, що при рівномірному одиночному навантаженні теоретична точна величина КІН дорівнює $2/\sqrt{\pi}$ в кожній точці контуру. В Таблиці 19 представлена максимальна похибка серед всіх точок контуру для різних методів обчислення поля переміщень і КІН.

Таблиця 19. Максимальна похибка КІН для кругової тріщини зі зміщеним центром, в процентах

Степінь J Метод	$J=6$ ($J_{\text{integral}}=8$)	$J=8$ ($J_{\text{integral}}=10$)	$J=10$
класичний		0.104%	
прямий	5.8%	2.32%	
Тест точності $\Omega_1 / \Omega_{1\text{shifted}}$		0.1%	0.036%

Максимальна похибка для прямого методу при $J_{\text{integral}}=8$, є незадовільною, як звичайно прийнято в обчислювальній МР. При $J_{\text{integral}}=10$ для прямого методу результати кращі, проте все ще нижче очікувань. Гіперсингулярний метод демонструє досить хорошу точність. Проте питання чи є похибка в 0.104% для поліноміальної функції 8го порядку лише похибкою самого методу, чи це є обмеження, пов'язане з кількістю членів апроксимації J , залишається відкритим.

Для відповіді на це питання проведемо так званий «тест точності». Для цього представимо точне аналітичне рішення для COD, що в даному випадку дорівнює звичайній (не зміщеній) функції форми Ω_1 в вигляді розкладу $\Omega_{1\text{shifted}} \cdot \sum_{i+j \leq J} C_{ij} \xi^i \eta^j$, де для отримання коефіцієнтів C_{ij} спочатку отримаємо набір значень $\Omega_1 / \Omega_{1\text{shifted}}$ в 1601 точках площини кола, а потім опишемо їх поліномами 8 чи 10 степеня. Максимальна різниця між реальними значеннями відношення $\Omega_1 / \Omega_{1\text{shifted}}$ і згладженими за допомогою поліномів і є результатом «тесту точності». Він говорить про максимальну можливу точність при заданому числі членів розкладу поля переміщень і напружень. Відповідні результати приводяться в останній колонці в Таблиці 19. Тобто, це говорить про те, що для J дорівнює 8 максимальна можлива точність не може бути більше за 0.1% в жодному випадку. Те, що в результаті обчислень по класичному методі ми отримали 0.104% свідчить, що похибка обчислень не перевищує 0.004% і метод, що включає процедури інтегрування є досить точним.

Що стосується прямого методу, то «тест точності» може також пояснити отримані похибки обчислень. Для $J=8$ вважаємо, що максимальна теоретична точність поліноміального розкладу рівна 0.1%. Запишемо максимальну похибку Δ , що спричинена інтегруванням і поліноміальним згладжуванням результатів як $\Delta = (x/a)^8 \cdot 0.1\%$, тому бачимо, що після подвійного диференціювання похибка обчислення КІН може приблизно

досягати $\Delta_1 \approx 8 \cdot 7 \cdot 0.1\% = 5.6\%$. Така оцінка може бути проведена і для $J=10$, тобто $\Delta_1 \approx 10 \cdot 9 \cdot 0.03\% = 2.7\%$. Такі оціночні значення похибки відповідають реальним похибкам в прямому методі і пояснюють їх.

Вище приведений аналіз показує, що запропонована чисельна процедура є майже бездоганною, і всі похибки пов'язані з недостатньою кількістю членів в розкладі (56). В ой же час ці приклади ясно показують недоліки прямого методу, що пов'язані з необхідністю диференціювання після аналітичного згладжування трішки неточних результатів. Диференціювання значно збільшує ці неточності.

Другий локальний висновок з цього аналізу є важливість правильного вибору функції форми. Правильний вибір значно скорочує необхідність в великій кількості поліноміальних членів в розкладі (56). Тому нижче ми будемо досліджувати вплив різних принципів і підходів до вибору ФФ на точність розрахунку КІН на прикладі квадратної і напівкругової тріщини.

3.2.2.3 Квадратна тріщина

Квадратна тріщина має чотири кутові точки, в околі яких поняття КІН не має сенсу. Тим н менше, будемо вважати, що представлення COD в формі (56) є дійсним для всіх точок поверхні тріщини. Нижче для цієї тріщини будуть використовуватися всі вищесказані типи функції Ω для обчислення КІН, Ω_1 є тривіальною, а вирази для Ω_2 та Ω_3 будуть представлені в замкнутому аналітичному вигляді:

$$\Omega_2 = \sqrt{\left(1 - \left(\xi/a\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\eta/b\right)^2\right)} \quad (66a)$$

$$\Omega_3(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\oint_{\Gamma} 1/l^2(x, y) d\Gamma}} = 1/\sqrt{Z} \quad (66b)$$

Де

$$Z = \frac{\arctan\left(\frac{b+\eta}{a-\xi}\right) + \arctan\left(\frac{b-\eta}{a-\xi}\right)}{a-\xi} + \frac{\arctan\left(\frac{b+\eta}{a+\xi}\right) + \arctan\left(\frac{b-\eta}{a+\xi}\right)}{a+\xi} +$$

$$\frac{\arctan\left(\frac{a+\xi}{b-\eta}\right) + \arctan\left(\frac{a-\xi}{b-\eta}\right)}{b-\eta} + \frac{\arctan\left(\frac{a+\xi}{b+\eta}\right) + \arctan\left(\frac{a-\xi}{b+\eta}\right)}{b+\eta} \quad (66\text{в})$$

Або в геометричних позначеннях

$$Z = \frac{\phi_{x=+a}}{a-\xi} + \frac{\phi_{x=-a}}{a+\xi} + \frac{\phi_{y=+b}}{b-\eta} + \frac{\phi_{y=-b}}{b+\eta}, \quad (66\text{г})$$

Де точка (ξ, η) чотири трикутниками з чотирма вершинами прямокутного контуру і кути ϕ є кути відповідних трикутників в точці (ξ, η) .

Для квадратної тріщини ($a = b = 1$) проведено певне число чисельних тестів. Результати співставляються з даними роботи [117] і результатами обчислення МСЕ проведених нами. Результати представляються як безрозмірні КІН, тобто $F_I = \frac{K_I}{\sigma_{const} \sqrt{\pi b}}$, по прямій лінії контуру, від центру, $x=0$, до кутової точки, $x=b$, див. Рис 26. В Таблиці 20 представлені величини F_I в точці центра сторони тріщини, отриманих різними процедурами.

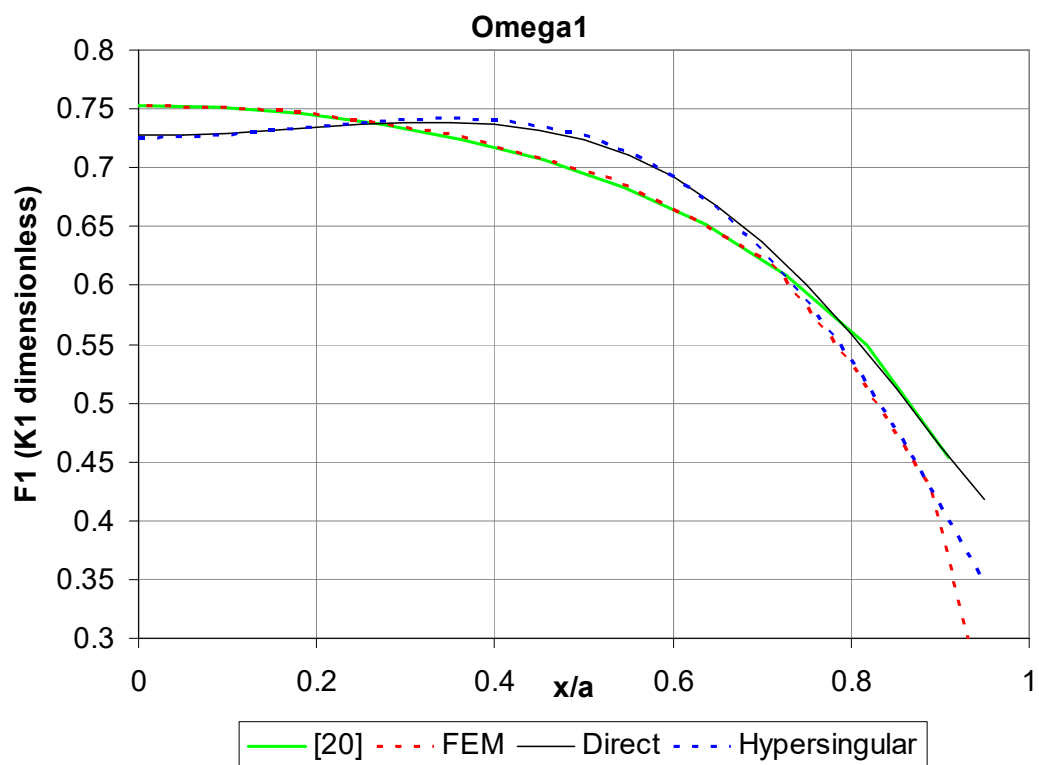


Рис 26а. Квадратна тріщина, ФФ в вигляді Ω_1

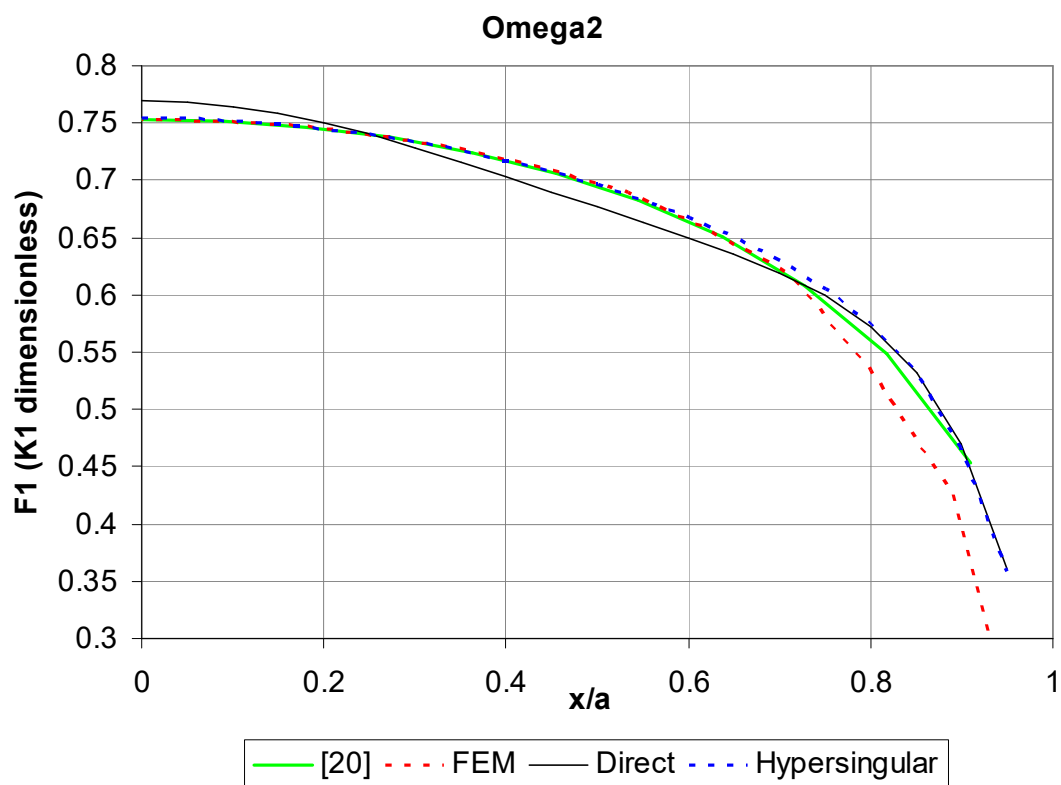


Рис 26б. Квадратна тріщина, ФФ в вигляді Ω_2

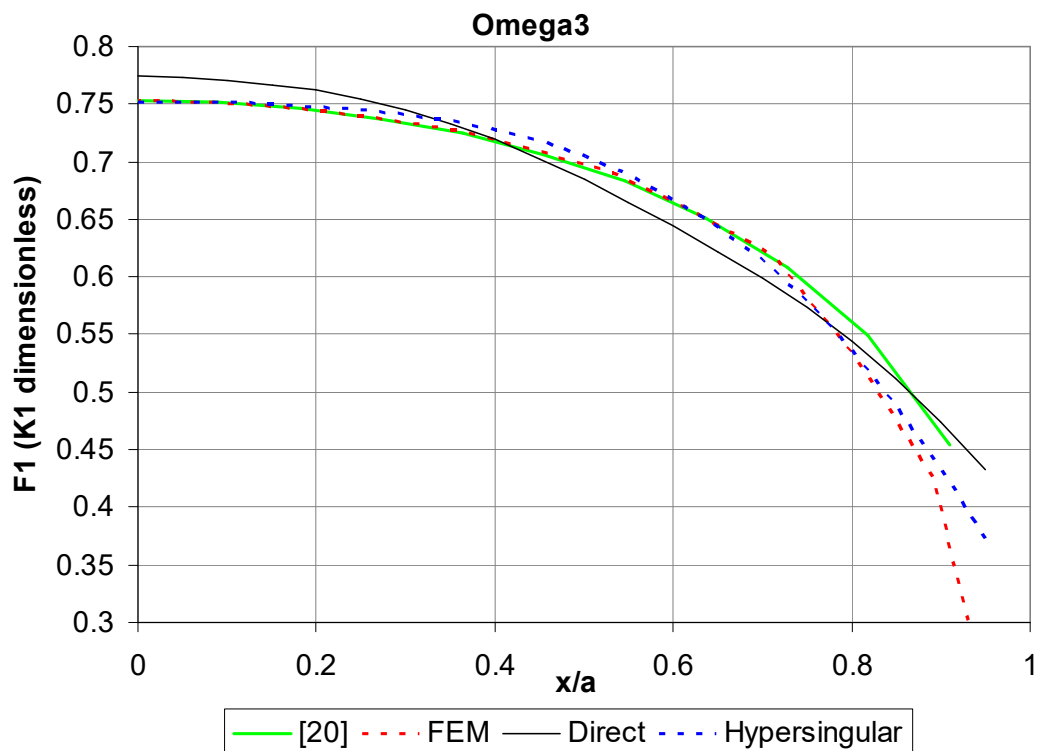


Рис 26в. Квадратна тріщина, ФФ в вигляді Ω_3

Таблиця 20. Безрозмірні КІН в середині сторони квадратної тріщини, однорідне навантаження

	Прямий метод	Класичний метод	Дані роботи [117]	Наші результати МСЕ
Ω_1	0.7273	0.7258	0.7534	0.7532
Ω_2	0.7696	0.7545		
Ω_3	0.7749	0.7521		

Очевидно, що знову в цілому класичний метод дає кращі результати, ніж прямий. Із трьох проаналізованих функцій форм найкращі результати дає Ω_2 та Ω_3 , графіки залежності КІН для цих двох ФФ є близькими з результатами [117] та нашими МСЕ результатами. Відмітимо, що в роботі [117] функція Ω_2 також використовувалася як функція форми. Функція Ω_3

дає найкращі результати при підходженні точки контура до кута. Найгірші результати в даному випадку отримані для Ω_1 , як для центральної точки (до 4%) так і в цілому для графіка.

Як і в попередніх результатах, ми бачимо, що вибір ФФ дуже суттєво впливає на точність результатів. Навіть точна схема інтегрування з використанням більшої кількості членів в інтерполяційному поліномі чи в загальному представленні поля переміщень (56) не дають такого покращання як правильний вибір ФФ. Відмітимо, що хоча отримані дуже хороші результати для мультиплікаторної ФФ Ω_2 , використання її для тріщин гладкого контуру вимагає розбиття на величезну кількість багатокутників, що ускладнює процедуру. З іншої сторони, використання універсальної ФФ Бернса і Ура майже не ускладнює процедуру обчислень для контурів, що можуть бути представлені набором прямих ліній і дуг кола, проте начно покращує результати.

3.2.2.4 Пів окружна тріщина

Пів окружна тріщина має подібність з квадратною в тому, що містить також кутові точки, де існує інша сингулярність поведінки поля напружень. Для цієї геометрії також проведений ряд тестів: прямий і класичний методи порівнюються з нашими МСЕ результатами та результатами роботи [118].

Використовуються дві ФФ для COD і нижче приводяться відповідні функції для пів окружної тріщини ($a \equiv R$):

$$\Omega_2 = \sqrt{1-r/R} \sqrt{y/a} \quad (67a)$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2a^2}{a^2-x^2-y^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2ya}{a^2-x^2-y^2}\right) \right) + \frac{\arctan\frac{a+x}{y} + \arctan\frac{a-x}{y}}{y/a}}} \quad (67b)$$

Результати обчислення КІН даються на Рис. 27 і в Табл. 21.

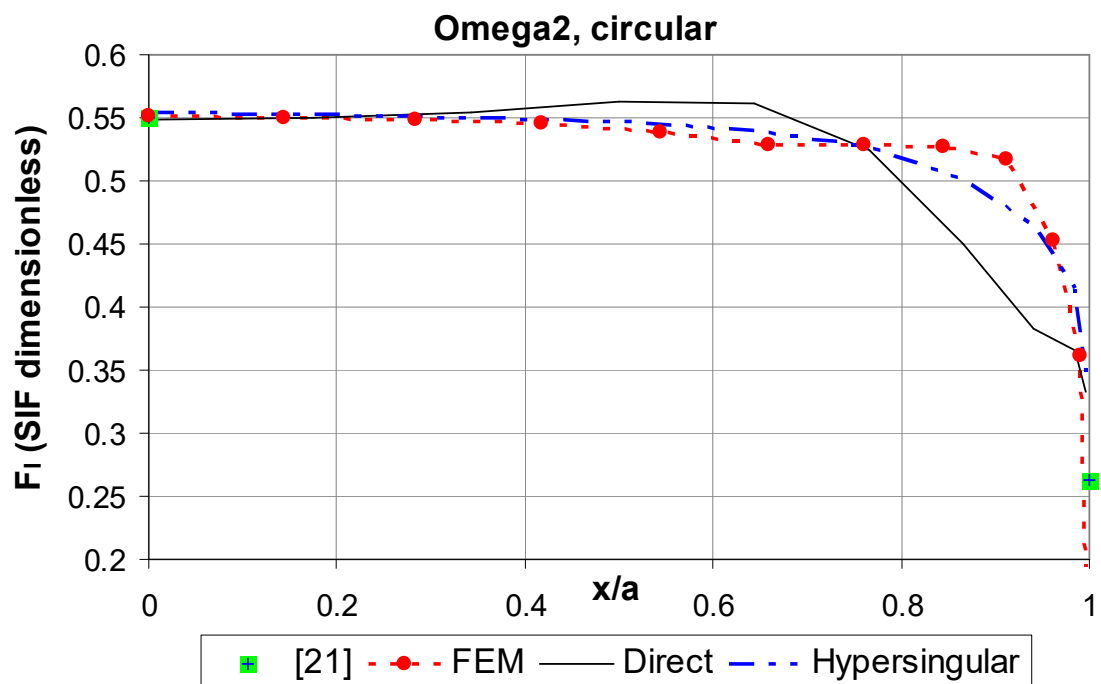


Рис. 27а. Пів окружна тріщина, окружна частина контура, ФФ в вигляді Ω_2 ,

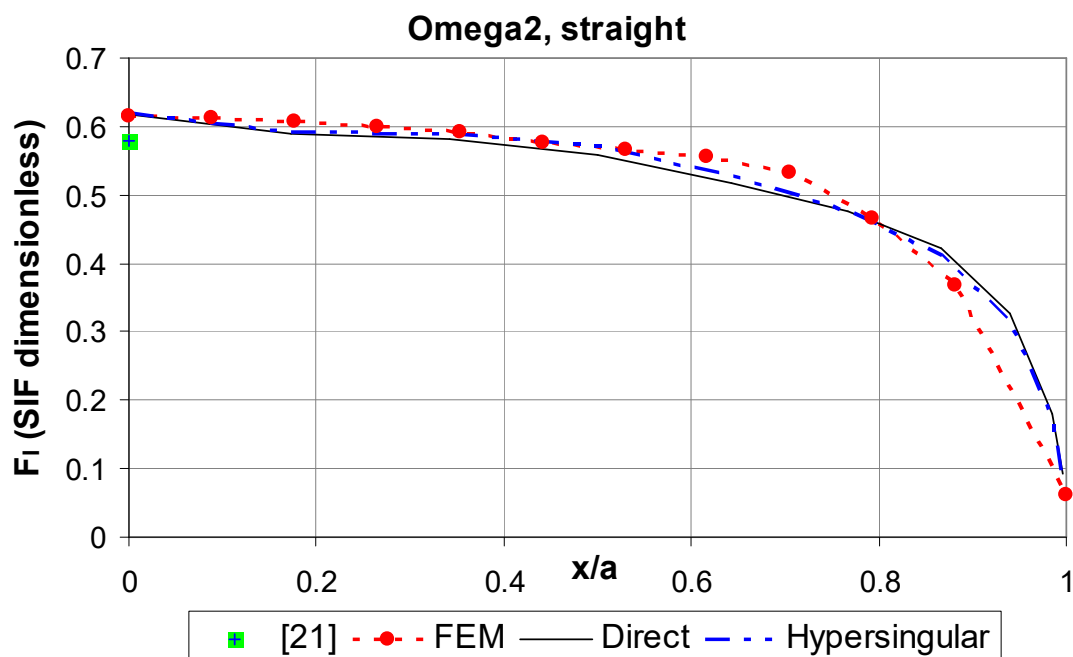


Рис. 27б. Пів окружна тріщина, прямолінійна частина контура, ФФ в вигляді Ω_2 ,

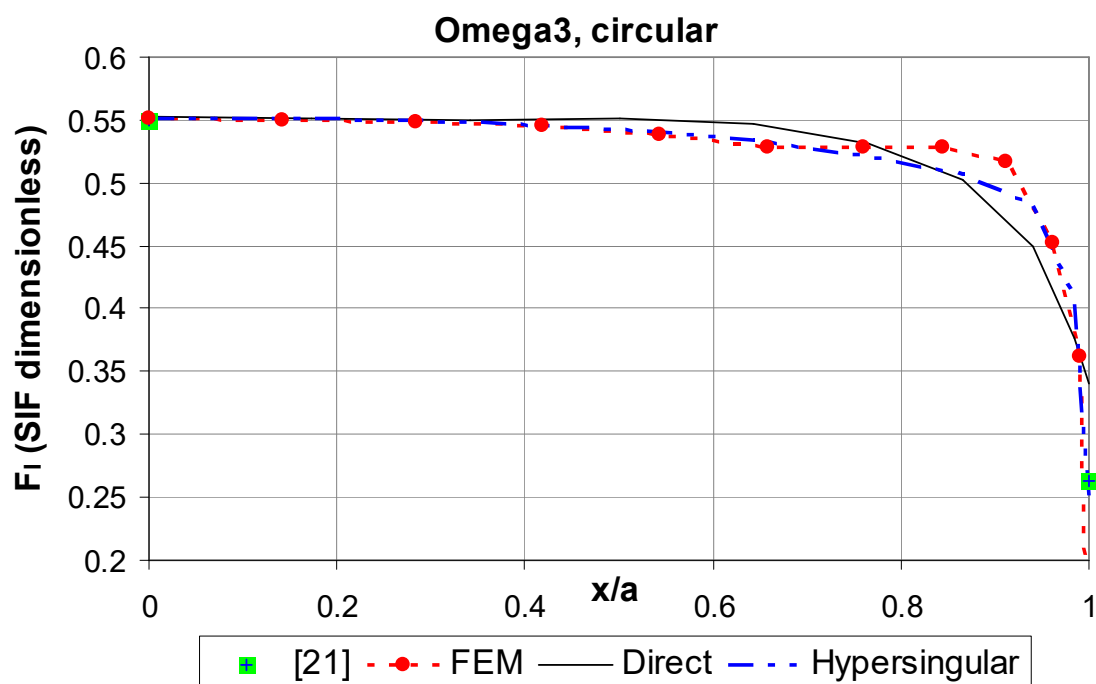


Рис. 27в. Пів окружна тріщина, окружна частина контура, $\Phi\Phi$ в вигляді Ω_3

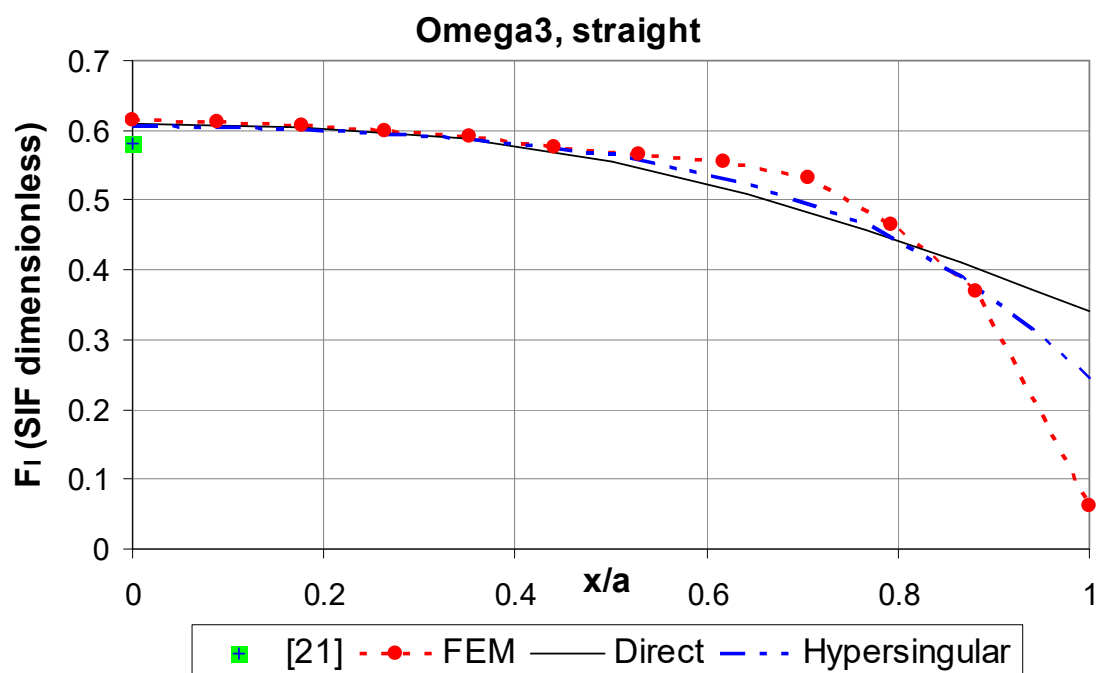


Рис. 27г. Пів окружна тріщина, прямолінійна частина контуру, $\Phi\Phi$ в вигляді Ω_3

Табл 21. Безрозмірні КІН в центрі відповідної сторони пів кругової тріщини

	Дані роботи [118]	Наші MSE результати	Прямий метод	Класичний метод
F_I, Ω_2 , кругова	0.55	0.5514	0.5485	0.5539
F_I, Ω_2 , пряма	0.58	0.6141	0.6175	0.6198
F_I, Ω_3 , кругова	0.55	0.5514	0.5528	0.5516
F_I, Ω_3 , пряма	0.58	0.6141	0.6098	0.6077

Точність ФФ Ω_2 є хорошою, проте найкращі результати отримуються при застосуванні функції Ура-Бернса. Класичний підхід краще узгоджується з результатами інших аналізів і авторів.

Наведені вище результати опубліковані в роботах [116, 119, 120, 121]

3.2.3. Висновки по підрозділу 3.2

Не зважаючи на ефективність застосування комерційних MSE до аналізу тіл з тріщинами, все ще існує попит на альтернативні (напів-) аналітичні методи як інструмент перевірки точності. Загально відоме інтегро-диференційне рівняння для тріщини плоскої форми в нескінченному тілі надає теоретичний базис для отримання подібних рішень. Тут впроваджено два методи рішення цього рівняння для тріщини довільної форми: прямий метод, де на першій стадії проводиться чисельне інтегрування, потім аналітична апроксимація з наступним аналітичним диференціюванням; і класичний (гіперсингулярний) метод, коли спочатку виконується аналітичне диференціювання, а потім чисельне інтегрування з наступною аналітичною апроксимацією результатів.

Обидва методи базуються на подібних чисельних процедурах. Вона базується на аналітичному представленні полів напружень в вигляді поліномів (56) і переміщень в вигляду подібних поліномів помножених на функцію форми (56), що забезпечує необхідну відому поведінку поля

переміщень біля контуру тріщини. Дослідження впливу вибору ФФ на точність результатів є одним із наших основних завдань.

В цьому розділі наголос зроблено на два аспекти. Перший – це розробка обґрунтованої чисельної процедури інтегрування. Другий – запропонування трьох видів і вибір найкращої ФФ. З цією метою розглянуто тріщини чотирьох різних конфігурацій – еліптична, кругова, квадратна, і напів кругова.

1. Дуже часто в літературі проводиться верифікація методів для задач, для яких загальний вигляд рішення (власні функції) та коефіцієнти рішення відомі. Вибираючи власні функції як аналітичні форми для невідомих рішень, дальша задача зводиться лише до пошуку невідомих коефіцієнтів і до демонстрації їх відповідності аналітичним значенням. Для проведення більш об'єктивних оцінок ми запропонували проводити перевірку методів для ФФ, де центр координат зміщений відносно центру кругової тріщини.

2. Проведені обчислення показали високу ефективність запропонованих методів і процедури визначення інтегралів. Так точність класичного методу досягає теоретично можливої точності з заданою кількістю членів поліноміального розкладу, що було продемонстровано для кругової форми зі зміщеним центром координат. Щодо прямого методу, то його точність погіршується порівняно з класичним методом, що пояснюється виконанням диференціювання наближеного виразу, отриманого чисельним інтегруванням.

3. Для тріщин некласичної геометрії (полігон, пів кругова тріщина) правильний вибір ФФ значно впливає на точність результатів. Три ФФ розглядаються в цій роботі: перша звичайна як $\sqrt{1 - (r/R)^2}$, друга – корінь з добутку рівнянь сторін. В якості третьої запропоновано використовувати так звану ФФ Ура і Бернса, що виключає суб'єктивність вибору центру координат. Для тріщин, що утворені прямолінійними відрізками і дугами

кола, легко отримати аналітичний вираз для $\Phi\Phi$. Її використання приводить до найкращих результатів порівняно з іншими $\Phi\Phi$.

РОЗДІЛ 4. ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

4.1. Розрахунок корпусу реактора ВВЕР-1000 на крихку міцність

На даний момент більшість атомних енергоблоків України, збудованих у 80-х роках, вичерпують проектний термін своєї експлуатації, який становить 30 років. Тому наразі тривають роботи з продовження терміну їх експлуатації у понад проектний період, що є загально прийнятою світовою практикою. Оцінка цілісності елементів конструкції реактору є дуже важливим питанням для безпечного і надійного функціонування атомних електростанцій. Одним з основних є розрахунок корпусу реактора на крихку міцність, так як все інше обладнання, окрім корпусу, є замінюваним. Для цього спочатку постулюється вірогідна тріщина максимальної величини, яку б могли з дуже малою ймовірністю не виявити засобами діагностики. Суть розрахунку полягає в тому, щоб корпус зміг витримати аварійний режим з гіпотетичною тріщиною, уникнувши крихкого руйнування протягом життєвого циклу експлуатації реактору.

У практичній реалізації цієї вимоги, в кінці 60-х років минулого століття відповідний критерій був прийнятий серед фахівців ядерного співтовариства, згідно з яким розраховується коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), K_1 , та порівнюється з критичним значенням величини КІН, K_{1c} . Основна умова для забезпечення цілісності корпусу реактору (КР) АЕС визначена нерівністю:

$$K_1(T) < K_{1c}(T) \quad (68)$$

Оцінка на опір крихкому руйнуванню в Україні регламентується документом [122], що замінив устарівші норми [123], проте вніс багато незрозуміlostей у розрахунки. Загалом [122] розроблено на основі більш загального документу [124], зберігши декларативні вимоги, проте не доповнивши їх конкретними прикладами і технікою застосування. Так наприклад, вимогою документу [122] є проведення пружно-пластичних розрахунків розрахунку K_1 піднаплавочної чи поверхневої тріщини (рис.28) з

врахуванням історії навантаження, наголошуючи що це є найкращим міжнародним досвідом. Зауважимо, що натомість реальний міжнародний досвід свідчить про протилежне - базовим розрахунком в США [125], Франції [29], Японії [126], Німеччині [127] є застосування методів лінійної механіки руйнування (ЛМР) з подальшою можливістю введення певних аналітичних поправок. Також [122] вимагає оцінки крихкої міцності наплавлення, при чому не зрозуміло яким чином її можливо виконати, та навіщо це робити для в'язкого матеріалу антикорозійного наплавлення. З оцінки крихкої міцності наплавлення більш детальні відомості містить документ [124], де стверджується що необхідно "завести" тріщину у наплавлення на 1 мм, та рахувати J-інтеграл по контуру інтегрування, що проходить лише через наплавлену зону (рис.28).

4.1.1. Методика проведення розрахунків

При розрахунках на опір крихкому руйнуванню застосовано як пружний так і пружно-пластичний (відповідно до вимог [122]) аналіз напружено - деформованого стану в поєднанні з методами нелінійної механіки руйнування (НЛМР). Розрахунки виконано для осьової тріщини з наступними параметрами: $a/c=0.3$, $a=0.125(s+a)$, $r=7\text{мм}$, $s=192.5\text{мм}$.

З точки зору ресурсу КР найбільш небезпечними є три зони, що зазнають нейтронного опромінення: зварний шов №3, зварний шов №4 та циліндрична обичайка напроти центру активної зони (АЗ). Для розрахунку обрано декілька представницьких аварійних сценаріїв, що призводять до теплового удару на КР, і як наслідок, виникають великі градієнти температур та напружень. Щоб мати змогу оцінити крихку міцність наплавлення, для розрахунку обрано тріщину що проникає в наплавлення на 1 мм.

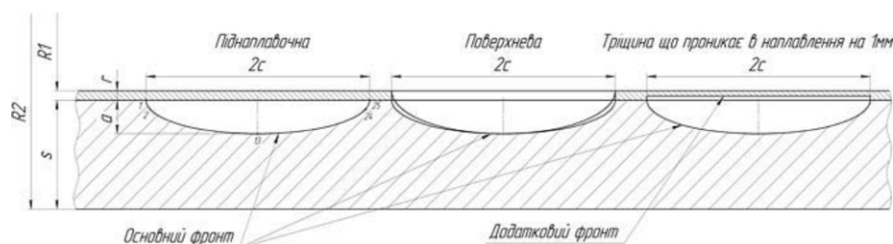
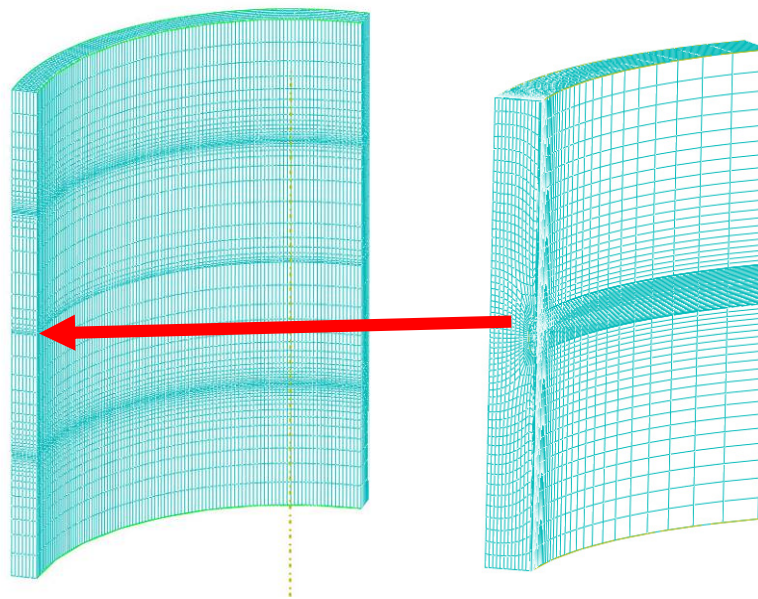


Рис. 28 - Типи розрахункових тріщин

4.1.2. Модель корпусу реактора з тріщиною

При розрахунках використовувалась технологія «Submodeling», тобто спочатку розраховувалась «глобальна модель» КР (рис. 29а) для визначення полів температур та напружень, а потім на більш детальній «локальній підмоделі» (рис. 29б) розраховувались значення J-інтегралу по основному та додатковому фронту тріщини. При цьому граничні умови для локальної підмоделі визначаються з розв'язку задачі для глобальної моделі.



а) Глобальна модель, б) Підмодель

Рис. 29 - Розрахункові КЕ сітки

Зауважимо, що «глобальна модель» не містить тріщини, тому при розрахунках виникає необхідність вибрати такі розміри підмоделі, щоб уникнути впливу граничних умов на значення J-інтегралу. Оскільки тріщина осьова, розміри в осьовому напрямку можуть бути обрані досить невеликими, їх можливо оцінити за формулою розрахунку КІН [128]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a Q} \cdot F(\theta, b, c, a, s) \quad (69)$$

де Q - еліптичний інтеграл, a - номінальні напруження $p(\theta, b, c, a, s)$ - функція форми, що є добутком:

$$F = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{b}{t} \right)^2 + M_2 \left(\frac{b}{t} \right)^4 \right] g(\theta) f(\theta) q(b) \quad (70)$$

від осьового розміру b залежить лише функція $q(b)$, яка і визначає вплив довжини циліндра на значення КІН:

$$q = \left[\cos \left(\pi \cdot c \frac{\sqrt{a/s}}{2b} \right) \right] \quad (71)$$

Таким чином, якщо геометричний розмір підмоделі в осьовому напрямку буде складати 275 мм, похибка у визначенні КІН буде сягати всього 0.7%. Для колового розміру вираз є дещо складнішим, для тріщини при відношенні $l/s > 5$ похибка буде менше 1%.

4.1.3. Результати розрахунків КР

При визначенні залишкового ресурсу КР ЗАЕС-1 розглянуто сім аварійних сценаріїв. Узагальнюючи цей розрахунковий досвід відмітимо сильну залежність розрахункових результатів від КЕ сітки, та необхідність доведення збіжності результатів на різних по густині сітках. Також зауважимо слабку збіжність результатів по контурах інтегрування на ділянці розвантаження, що є визначальною для визначення ресурсу КР. Натомість такі недоліки не притаманні ЛМР, що дає зрозумілі та легко підтверджуванні результати, які не залежать від історії навантаження.

Результати розрахунків зведені до табл. 22, для одного представницького аварійного режиму LOCA 4.2.2, підмодель активної зони. Для порівняння у табл.22 представлені результати для всіх типів тріщин методами ЛМР та НЛМР.

Таблиця 22. Максимальні значення КІН МПал/м для різних типів тріщин

Тип тріщини (рис. 1)	Точка №1		Точка №13	
		[3]		[3]

Поверхнева	ЛМР	77.55	69.64	108.92	103.76
	НЛМР	67.89	-	101.72	-
Заведена на 1 мм в наплавлення	ЛМР	40.93	-	69.43	-
	НЛМР	66.37	-	89.62	-
Піднаплавочна	ЛМР	26.63	23.19	65.91	67.90
	НЛМР	41.28	-	83.29	-

Додатково за [123] для ЛМР обчислення значення КІН, за значеннями напружень отриманих з "глобальної моделі". Аналіз даних таблиці 22 свідчить про гарну збіжність КІН отриманих за [124] та у даній роботі, найбільша розбіжність спостерігається для точки на інтерфейсі між наплавленням та основним металом, що пояснюється складністю отримання достовірних результатів для точки розділу різнорідних матеріалів, навіть у пружній постановці задачі. Відмітимо що найбільш консервативною є поверхнева тріщина розрахована методами ЛМР, більш того такий розрахунок має дуже добру збіжність по контурах, та слабо залежить від розрахункової сітки.

4.1.4. Результати розрахунків

Проведені розрахунки свідчать про наступне:

- найбільш консервативною є поверхнева тріщина розрахована за підходами ЛМР;
- розрахунки за НЛМР сильно залежать від розрахункової сітки;
- розрахунки за НЛМР на ділянці розвантаження мають слабку збіжність результатів по контурам інтегрування.

Узагальнююче вищезазначене, ми вважаємо що для оцінки залишкового ресурсу корпусів реакторів слід використовувати методи ЛМР для поверхневої тріщини, без оцінки крихкої міцності наплавлення.

4.2. Розрахунок на крихку міцність патрубку ДУ-850 реактора ВВЕР-1000

Важливою складовою розрахунку ВВЕР-1000 на крихку міцність є визначення КІН, для постульованої тріщини частково еліптичної форми в патрубку ДУ-850 під внутрішнім тиском, моментами згину (від основного циркуляційного контуру) та різницею температур. В літературі існує набагато менше робіт, присвячених розрахунку КІН для патрубків КР. Перш за все, це пов'язано з складною геометричною формою патрубка, що містить скруглений кут з різним співвідношенням радіуса до глибини тріщини, що не дозволяє застосувати поняття кутових форм тріщини і безпосередньо використовувати відомі способи для тріщин канонічні форми (напівеліптичні або чверть-еліптичні). Серед перших методів обчислення таких дефектів були експериментальні методи, засновані на фотопружності [129], де КІН визначався за формою ізохроматичних смуг на оптично прозорих моделях. Пізніше результати [129] були перевірені на моделях FEM [130], де у вершині тріщини був використаний оригінальний сингулярний елемент для опису фактичної поведінки переміщень. Варта уваги робота [131], де було запропоновано використати вагову функцію для напівеліптичної тріщини, а ефект кривизни вільної поверхні був штучно врахований шляхом множення ефективних напружень на заданому радіусі вільної поверхні на коефіцієнт, визначений за співвідношенням кутової довжини цього радіуса та радіуса фронту тріщини. У роботі [132] відправною точкою розрахунків є універсальна вагова функція для внутрішніх тріщин будь-якої форми [37], а характер розподілу напружень від внутрішнього тиску вважався ідентичним як у поздовжньому (уздовж радіуса патрубка), так і поперечному (вздовж осі патрубка) напрямками і відповідає характеру розподілу напружень для пластини з круговим отвором. У методиці роботи [133] були використані наступні допущення:

а) величина теоретичного коефіцієнта концентрації напружень заданої форми патрубків визначалась відповідно до відомих літературних даних;

б) задавався відомий розподіл (як для пластини з отвором) напружень в поздовжньому напрямку;

в) КІН в заданій точці фронту тріщини вважався пропорційним заданому напруженню в цій точці (у випадку відсутності тріщини).

Всі перераховані вище методи показують, наскільки проблематичним та неточним може бути розрахунок КІН, навіть для окремих випадків навантаження патрубків. Очевидно, що різноманітність геометричних форм тріщини та патрубків з різною товщиною наплавлення не дозволяє запропонувати простий універсальний підхід. Особливості і в той же час складності обчислень потребують більш удосконаленого підходу на основі поняття функцій впливу, який і запропонований нижче.

Нами введені вісім основних законів навантаження на поверхню тріщини, які забезпечують реальний розподіл напружень у всіх напрямках тріщини, включаючи стрибок напружень між наплавленням та основним металом через різницю в коефіцієнтах теплового розширення. Для визначення розмірності КІН під обраними законами навантаження були розроблені FEM моделі патрубків з тріщиною різного співвідношення осей. Для всіх можливих режимів (режимів) експлуатації були проведені детальні розрахунки температурного поля в патрубках, які були використані для визначення напруженого стану в кожний момент часу. Поле напружень визначається в 120 дискретних точках на поверхні тріщини, описане за допомогою методу найменших квадратів для подання як лінійної комбінації з восьми основних законів навантаження з визначеними коефіцієнтами. Описано процедуру визначення граничної температури крихкого руйнування, яка використовує представлення критичних значень КІН (стискування руйнування) в експоненціальній формі.

4.2.1. Модель патрубку ДУ-850, граничні умови

Об'єкт дослідження - Патрубок ДУ-850 ВВЕР-1000 з напівеліптичною поверхневою тріщиною. Характеристики геометричних розмірів патрубка ДУ-850 представлені на рисунку 30. Зокрема, тут показано наплавлення товщиною 9 мм.

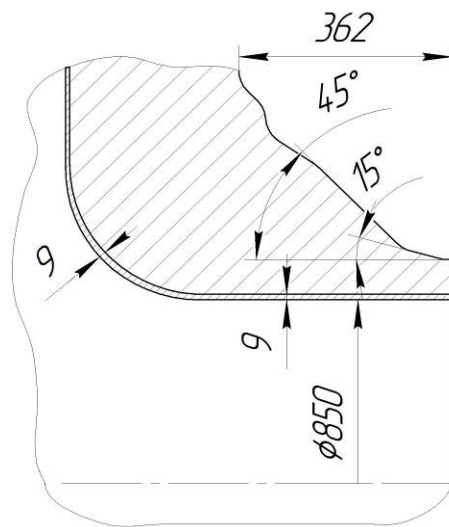


Рис. 30 Геометричні параметри патрубка ДУ-850

Оскільки основним об'єктом даного розрахунку є визначення НДС тріщини патрубка ДУ-850, важливо вибрати розташування тріщини та під'єднати до неї локальну систему координат.

Площина тріщини проходить через площину симетрії патрубка. Центр тріщини розташовується посередині внутрішньої скругленої частини патрубка. Обґрунтування вибору тріщини в нижній частині патрубка було обумовлено введенням холодної води, що відбувається безпосередньо в цій частині, та призводить до максимального градієнту температури та додаткових напружень. Розрахунок параметрів механіки руйнування виконується в пружній постановці задачі. Під час виконання розрахунку використано метод впливу, який описаний нижче. Цей метод використовує принцип суперпозиції. Відповідно до цього, у площині тріщини слід визначити поле напружень у разі його відсутності, а потім це поле слід

застосовувати безпосередньо до поверхні тріщини. Тому було створено два типу моделей FE:

а) Дві базові (локальні) моделі з вбудованими тріщинами для розрахунку SIF (коефіцієнтів впливу) від визначених законів навантаження.

б) Дві глобальні моделі (частина КР) без тріщини, де розташовані 120 точок в площині тріщини, де знімаються значення напружень від дії внутрішнього тиску, температури та залишкових навантажень.

Для розрахунку значень КІН вздовж контуру тріщини для заданих базових законів розроблено дві скінченно елементні моделі із зоною патрубку з тріщиною, вбудованою в сітку скінченного елемента (СЕ). Загальний вигляд моделей показано на рисунку 31а. Для вхідних та вихідних патрубків розроблено дві скінченно-елементні моделі з тріщиною з співвідношенням напівсихання $a/b = 0.3$ та $a/b = 0.7$. Глибина тріщини встановлена рівною 44,25 мм.

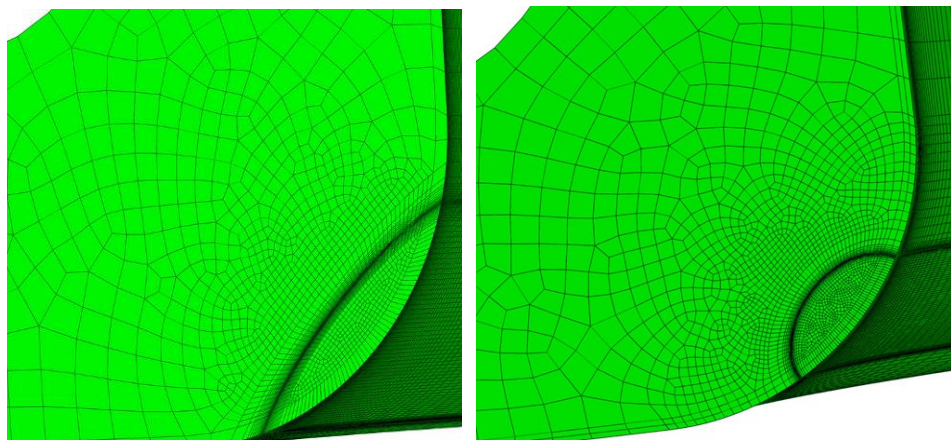


Рис 31а Скінченно-елементна модель патрубкової зони з вбудованою тріщиною із співвідношенням осей $a/b = 0.3$ та $a/b = 0.7$.

Базова модель з вбудованою тріщиною з співвідношенням напівосі $a/b = 0.3$ складається з 216904 вузлів та 205800 елементів типу C3D8R. Базова модель з вбудованою тріщиною з співвідношенням півосі $a/b = 0.7$ складається з 232104 вузлів та 220425 елементів типу. Також була розроблена поліпшена модель для тестування, її сітка складається з 276032 вузлів та 263100 елементів типу C3D8R. Основною метою цієї моделі є

демонстрація достатньої точності базової моделі (яка в основному і використовується в наших розрахунках). З цією метою у вдосконаленій моделі було використано приблизно в три рази більше СЕ біля фронту тріщини.

Загальний вигляд основної моделі та граничні умови показані на рисунку 31б.

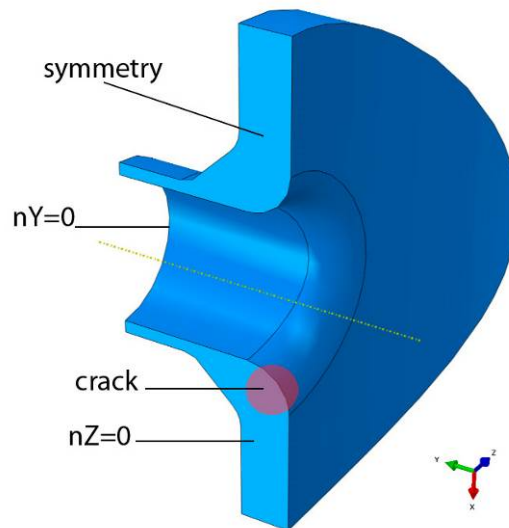


Рис. 31б. граничні умови для базової моделі

Поверхня площини, на якій лежить тріщина, обмежена переміщенням по нормалі до площини тріщини (за винятком, звичайно, самої тріщини). Це основна умова фіксації. Розміри цього розділу вибираються досить великими, щоб не впливати на розраховані значення КІН.

У розрахунках КІН використана локальна систему координат, що лежить в площині тріщини. Положення координатної системи лежить в центрі округлення зони патрубка. Одна вісь перпендикулярна округленню патрубка, друга - тангенціальна (рис. 32).

Ця координатна система обрана, оскільки:

- а) найбільш зручна;
- б) допомагає точно визначити будь-яку точку на поверхні тріщини;

в) дозволяє встановлювати будь-які високоградієнтні закони навантаження.

Фронт тріщини складається з 51 точки, кожна з яких має свої координати. КІН обчислюється в кожній зазначеній точці.

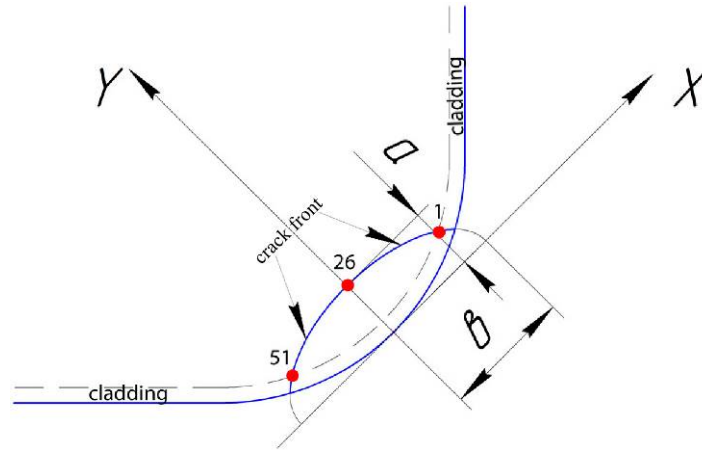


Рис. 32. Локальна координатна система

На патрубок діють три види навантаження: навантаження від внутрішнього тиску, температурних навантажень та залишкове навантаження.

Тому результуюча величина напружень у кожний момент часу є сумою всіх цих компонент. Аналогічно результуючий КІН у кожній точці контуру тріщини, i , представляє собою сімму КІН від внутрішнього тиску, K_i^p , КІН від залишкових напружень, K_i^{res} , та КІН від температури, K_i^T :

$$K_i = K_i^p + K_i^{res} + K_i^T \quad (72)$$

Для визначення КІН від залишкових напружень K_i^{res} достатньо мати поле залишкових напружень, після чого можна буде знайти КІН у кожній точці фронту тріщини методом суперпозиції. КІН від залишкових напружень не змінюються в будь-який момент часу, тобто вони є постійними, які можуть бути визначені один раз для всіх режимів і моментів часу. Для визначення КІН від тиску, K_i^p , достатньо мати поле напружень від одиничного навантаження тиском, після чого отримати значення КІН, $K_i^{p=1}$

методом суперпозиції. Для будь-якого іншого значення тиску, p , КІН можна легко отримати $K_i^p = p \cdot K_i^{p=1}$.

Найбільша складність полягає в знаходженні значення K_i^T , оскільки поля температур та відповідні напруження є індивідуальними для кожного режиму та моменту часу. Нижче описано розроблену процедуру розрахунку КІН методом функцій впливу.

4.2.2. Визначення функції впливу

Для опису навантаження тріщини створено вісім законів навантаження, які, на наш погляд, дозволяють апроксимувати будь-які розподілення напружень у реальному часі. Ці закони наведені в таблиці 23. Перші два закони є дискретними і лінійно змінюються уздовж координатних осей тільки в зоні наплавлення. Решта шість неперервні, тобто діють на всю ділянку тріщини.

Таблиця 23. Базові закони навантаження

№ закону	навантаження
1	$\sigma = 1$ (тільки наплавлення)
2	$\sigma = x / b$ (тільки наплавлення)
3	$\sigma = 1$
4	$\sigma = y / a$
5	$\sigma = x / b$
6	$\sigma = (y / a)^2$
7	$\sigma = (y / a) \cdot (x / b)$
8	$\sigma = (x / b)^2$

Для навантаження тріщини в площині основними законами, були побудовані дві моделі патрубкової зони в програмі Abaqus [111].

Для оцінки впливу щільності сітки та демонстрації достатності розмірів сітки розглянемо приклад нижче. Площина тріщини навантажується різними законами. Як приклад, аналізовані значення КІН для перших 10 контурів для точок №1 та №26 фронту тріщини. Точка № 26 центральна, точка №1 лежить

біля границі між наплавленням та основним металом. Результати порівняння представлені в таблицях 2 та 3 для точки №1 та в таблицях 4 та 5 для центральної точки №26.

Таблиця 24. КІН для точки №1 for $a/b = 0.3$

mesh x1	contour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cladding	1	4.1	4.2	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3
	x/b	2.2	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3
metal	1	8.1	8.4	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6
	y/a	4.9	5.1	5.1	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2
	x/b	4.1	4.3	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4
	(y/a)^2	3.1	3.3	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4
	y/a*x/b	2.6	2.7	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
	(x/b)^2	2.5	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6

Таблиця 25. КІН для точки №1, згущена сітка for $a/b = 0.3$

mesh x3	contour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cladding	1	3.9	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3
	x/b	2.1	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3
metal	1	7.8	8.5	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6
	y/a	4.7	5.1	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2

	x/b	4.0	4.3	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4
	(y/a)^2	3.1	3.3	3.4	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3
	y/a*x/b	2.5	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
	(x/b)^2	2.4	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6

Таблиця 26. КІН для точки №26 for $a/b = 0.3$

mesh x1	contour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cladding zone	1	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
	x/b	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
metal zone	1	9.9	10.5	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7
	y/a	6.5	6.8	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
	x/b	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	(y/a)^2	5.1	5.4	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5
	y/a*x/b	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	(x/b)^2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Таблиця 27. КІН для точки, згущена сітка for $a/b = 0.3$

mesh x1	contour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cladding zone	1	1.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
	x/b	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

metal zone	1	9.4	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7
	y/a	6.1	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
	x/b	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	(y/a)^2	4.8	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5
	y/a*x/b	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	(x/b)^2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Як видно з таблиць, хороша збіжність результатів починається з 4-го контуру. Слід зазначити, що навантаження наноситься на поверхні тріщини. Отже, сітка повинна бути згущена так, щоб вона мала відстань між вузлами, а відстані між контурами були не дуже великі. Також результати можуть дещо відрізнятися для великих чисел контурів через вплив навантаження на поверхні тріщин. Тому всі значення SIF, наведені нижче, взяті з 6-го контуру інтеграції.

Розподіл КІН по контуру тріщини від різних основних законів навантаження показаний на рисунку 33.

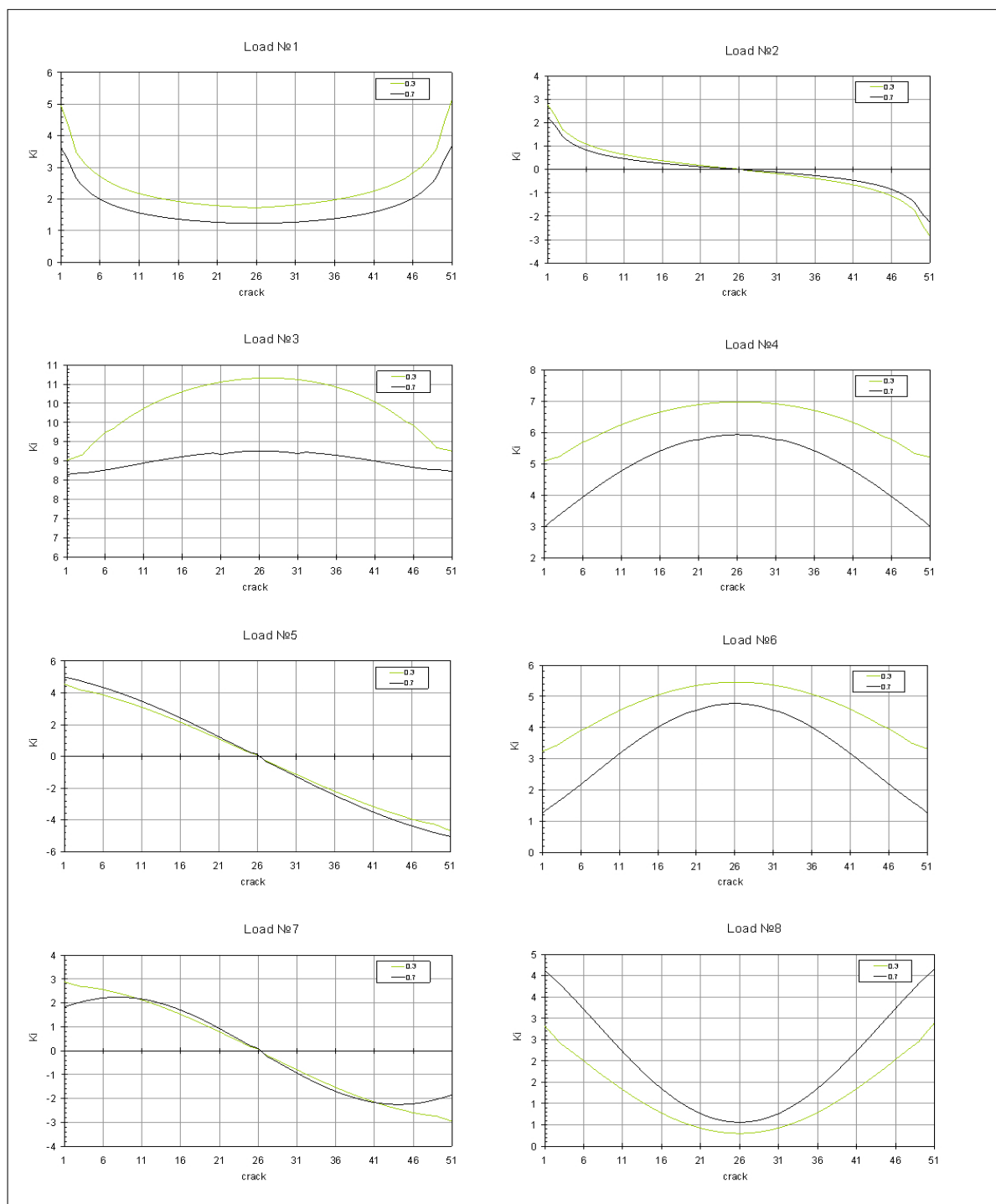


Рис. 33. Значення K_{IH} по фронту тріщини від базових законів навантаження

Як бачимо з перших двох законів (навантаження №1-2), де навантаження діє тільки на поверхні наплавлення, великі (за абсолютним

значенням) значення КІН досягають для точок тріщини, які знаходяться поруч із наплавленням. Наприклад, на рис.33 (навантаження №2) показані значення КІН від розподілу навантаження, яке лінійно змінюється вздовж осі Х. Подібний розподіл КІН отриманий для закону навантаження №5, який показує значення КІН з лінійно змінюючим навантаженням над всією площиною тріщини. Важливо, що для обох графіків значення КІН у центральній точці рівні 0, тому що площа тріщини навантажена асиметрично відносно осі Y.

4.2.3. Процедура розрахунку КІН для аварійних режимів експлуатації

Щоб мати можливість використовувати метод функцій впливу, необхідно мати реальне поле напружень, визначене в 120 точках на поверхні тріщини, і описати його за наведеними вище законами навантаження. Для цього розглядали окремо поле напружень від внутрішнього тиску та поле напружень від тиску і температури. Для того, щоб описати ці поля, потрібно зняти напруження в дискретних точках поверхні тріщини, а потім описати їх за допомогою методу найменших квадратів у аналітичній формі лінійною комбінацією 8 основних законів навантаження (див. Таблицю 23). Опишемо поточне поле напружень за допомогою методу найменших квадратів:

$$\sigma^A(x; y) = \sum_{n=1}^8 A_n \cdot \sigma_n^B(x; y), \quad n = 1, \dots, 8 \quad (73)$$

де σ^A - апроксимоване значення поля напружень; A_n - коефіцієнт апроксимації; σ_n^B - значення напружень від навантаження базовими законами визначеними в таблиці 23.

Щоб знайти коефіцієнт A_n у виразі (73), потрібно мінімізувати похибку:

$$\sum_{k=1}^K (\sigma_k^R - \sigma_k^A)^2 = \min \quad (74)$$

Тут $K = 120$ це номери точок в яких знімається поле напруження.

Підставимо (73) в (74)

$$\Phi = \sum_{k=1}^K \left(\sigma_k^P - [A_1 \cdot \sigma_1^B + A_2 \cdot \sigma_2^B + A_3 \cdot \sigma_3^B + A_4 \cdot \sigma_4^B + A_5 \cdot \sigma_5^B + A_6 \cdot \sigma_6^B + A_7 \cdot \sigma_7^B + A_8 \cdot \sigma_8^B] \right)^2 = \min \quad (75)$$

Процедура розв'язку (4) добре відома, і ми не будемо її описувати тут. Зауважимо лише, що для одержання розв'язку (74) слід взяти часткові похідні по відношенню до невідомих і отримані рівняння, прирівняти нулю.

Для демонстрації збіжності запропонованої процедури визначення КІН ми розглянемо теоретичне навантаження, $\sigma_{i(9)}$, яке прикладається тільки на основний метал поверхні тріщини. Фактично це навантаження представляє собою лінійну комбінацію першого та третього основних навантажень, а саме $\sigma_{i(9)} = \sigma_{i(3)} - \sigma_{i(1)}$. Згідно з принципом суперпозиції, ми можемо отримати значення КІН для цього випадку як

$K_{I(9)} = K_{I(3)} - K_{I(1)}$ і записати ці результати в таблицях 27а, 27б, наприклад, для точок контуру тріщини № 31, 26, 16, 6.

Таблиця 27а. КІН порівняння для тріщини із співвідношенням $a/b = 0.3$

навантаження \ точки	31	26	16	6
Базовий закон навантаження 1	1.817	1.730	1.925	2.720
Базовий закон навантаження 3	10.620	10.661	10.305	9.242
Суперпозиція, закон 3 та 1	8.803	8.931	8.380	6.522
Метод найменших квадратів	8.798	8.930	8.380	6.524
Розрахунок в Abaqus	8.803	8.931	8.381	6.528

Таблиця 27б. КІН порівняння для тріщини із співвідношенням $a/b = 0.7$

навантаження \ точки	31	26	16	6
Базовий закон навантаження 1	1.272	1.232	1.368	1.998
Базовий закон навантаження 3	8.694	8.763	8.611	8.261
Суперпозиція, закон 3 та 1	7.422	7.530	7.244	6.264
Метод найменших квадратів	7.418	7.529	7.233	6.252
Розрахунок в Abaqus	7.422	7.530	7.244	6.265

Відповідно присвоїти значення напружень у вищезгаданих 120 дискретних точках поверхні тріщини і застосувати метод найменших квадратів. Виведені наступні коефіцієнти наближення розподілу напружень: $A_1 = -1.00003$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1.00012$, $A_4 = -0.00047$, $A_5 = 0$, $A_6 = 0.00038$, $A_7 = 0$, $A_8 = 0.00007$. Як ми бачимо значення A_1 та A_3 набагато більші, ніж інші. За методом суперпозиції вони роблять основний внесок у K_I які також представлені в таблиці 27 (рядок 4).

Застосовано розроблену схему розрахунку FEM з заданою щільністю сітки для навантаження $\sigma_{i(9)}$ і отримано значення КІН безпосередньо для 6-го контура інтеграції (рядок 5 в таблиці 27). Відповідність результатів у таблиці 6 підтверджує точність запропонованої процедури.

Тепер приступимо до практичного застосування цієї процедури. Визначимо реальне поле напружень, σ_k^R , що діють на площину тріщини (відповідно до принципу суперпозиції в тілі без тріщини) в задані момент часу для кожного розглянутого режиму роботи побудовані глобальні моделі

моделювання. На рисунках 34а і 34б показана модель патрубкової зони (першого контуру), частина патрубка Ду-850 КР містить патрубок для аварійного охолодження зони. Моделі побудовані в програмному коді ANSYS. Рисунок 34а показує нам граничні умови у випадку, коли у нас діє внутрішній тиск. Сила реакції, розрахована за формулою (76).

$$\sigma_r = \frac{p}{(R_2 / R_1)^2 - 1} \quad (76)$$

де R_1 - внутрішній радіус КР і R_2 - зовнішній радіус КР. На рис. 34б показані граничні умови для розрахунку поля напружень під час температурного навантаження.

На рисунку 35 показані відповідні гідравлічні елементи (ГЕ), для яких у загальній термогідравлічній моделі КР за допомогою програмного комплексу RELAP [134] були отримані термогідравлічні параметри (температура, тиск, коефіцієнт теплопередачі) під час перехідних процесів. Вибране число гідро-елементів (ГЕ) елементів та їх лінійні розміри забезпечують достатню точність температури та розподілу напружень у напрямку глибини в околі тріщини. Сітка складається з 302989 вузлів та 152093 елементів типу solid87. Це 10-ти вузлові елементи з, призначені для задач механіки, а також для задач теплопередачі. Сітка згущення в зоні постульованої тріщини.

У даних моделях також використовується система координат, яка описана вище, в площині (XY) якої визначається поле напружень, які необхідні для розрахунку КІН.

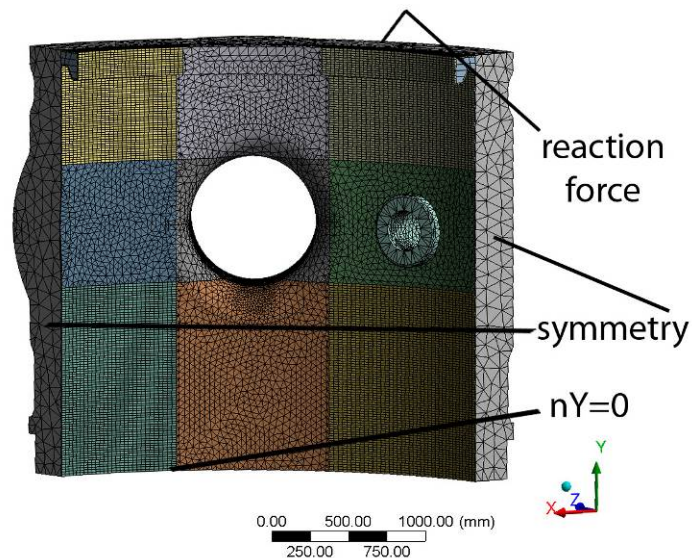


Рис. 34а Модель та граничні умови для внутрішнього тиску.

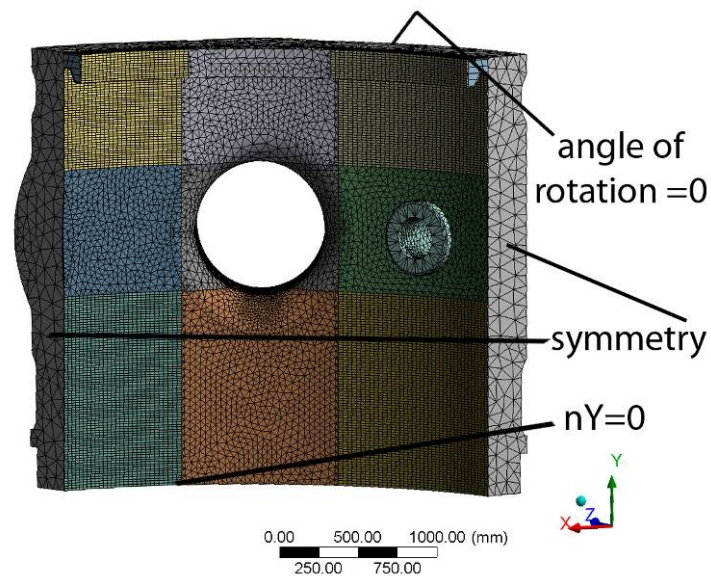


Рис. 34б Модель та граничні умови відповідної температури.

Сітка СЕ моделі в зоні тріщини сопла, згущена в декілька разів. У площині тріщини поле напружень визначаються в 120 точках. Тоді результуюче напруження аналітично описується методом найменших квадратів за (73).

На рисунку 35 показано нумерацію та розташування гідравлічних елементів у патрубковій зоні.

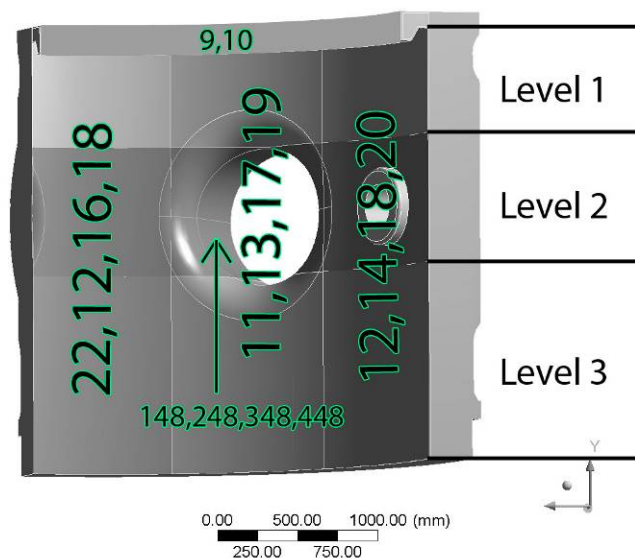


Рис. 35. Нумерація гідравлічних елементів.

Вхідними параметрами для навантаження патрубку є коефіцієнт теплопередачі, температура і тиск в кожний момент часу. Ці параметри визначалися окремо в термогідравлічній програмі RELAP.

Як приклад, на рисунках 36 - 38 показані фактичні дані для аварійного режиму LOCA 7.2. Режим LOCA 7.2 описує розрив аварійного трубопроводу високого тиску ДУ-125 з роботою всіх охолоджуючих насосів, коли КР знаходиться в положенні «гаряче вимкнення».

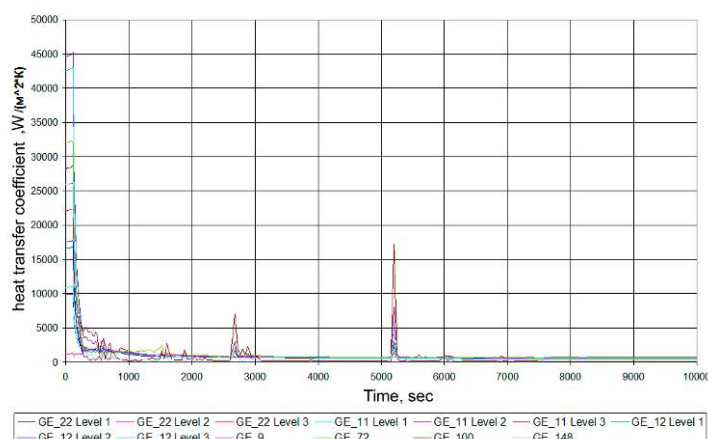


Рис. 36 Залежність коефіцієнта теплопередачі з часом для кожного ГЕ.

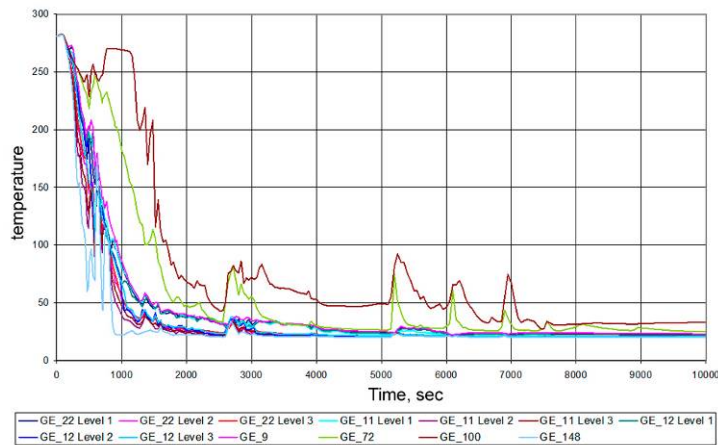


Рис. 37 Залежність температури з часом для кожного ГЕ.

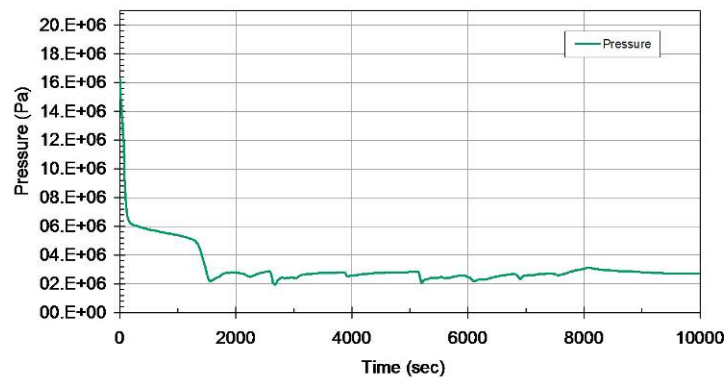


Рис. 38 Залежність внутрішнього тиску від часу для всіх ГЕ.

На рисунках (36, 37) для даного режиму роботи показані коефіцієнти температури та теплопередачі окремо для кожного гідравлічного елемента. На рисунку 38 показано тиск для всіх гідравлічних елементів, для різних гідравлічних елементів тиск майже постійний.

Після визначення вхідних параметрів, процедура обчислення починається з визначення процесу перенесення і розподілу тепла протягом усього часу. Це пов'язано з тривалим обчисленням силових задач. Вихідними результатами на даному етапі розрахунку режиму роботи є розподіл температури по товщині патрубку (рис 39).

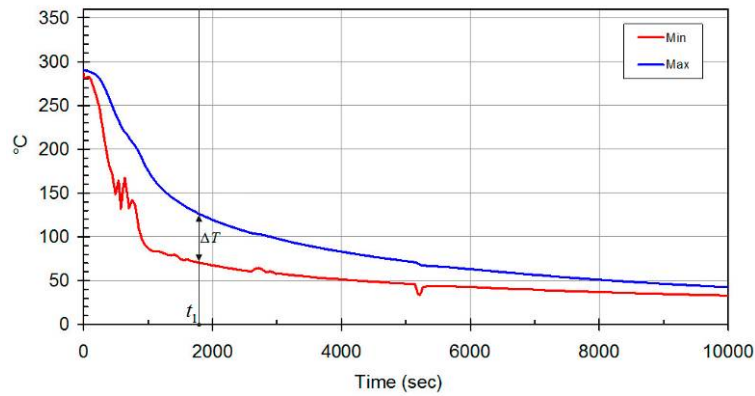


Рис. 39 Розподіл температури з часом.

Часова точка t_1 на рисунку 39 показує різницю між температурою на внутрішній поверхні патрубку та зовнішньою поверхнею патрубку з часом. ΔT являє собою значення різниці температур. Термічні напруження в площині тріщини залежать від цього значення. Найбільші температурні напруження виникають, коли ця різниця температур висока. Цей графік використовується для вибору часових точок, в яких виконується детальний аналіз напружено деформованого стану. Точки вибираються суб'єктивно, виходячи з комбінації трьох факторів - тиску (локальних максимумів), різниці температур між внутрішньою та зовнішньою поверхнями патрубку та мінімальної температури на внутрішній поверхні патрубку. Як правило, для одного режиму ми обирали 10-16 тимчасових точок.

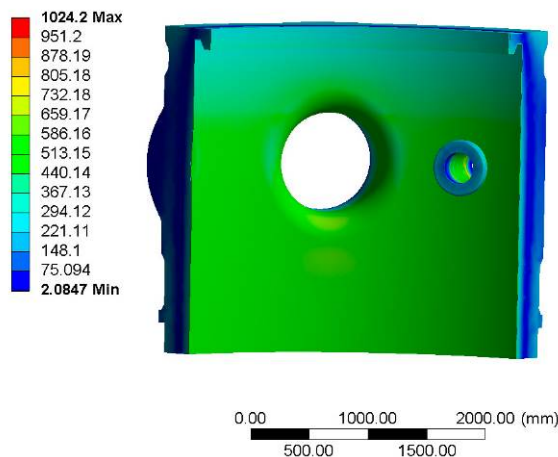


Рис. 40 Напруження патрубкової зони в час t_1 .

В кожний небезпечний момент часу результати поля напружень, знятих в 120-ти точках, описується методом найменших квадратів, а потім методом суперпозиції обчислюється КІН у кожній точці вздовж фронту тріщини (72). В таблиці 28 показано поле реального температурного напруження та апроксимоване напруження температурного напруження на час, що дорівнює 1500 секундам, для точок, які лежать на осі Y (Рис. 32) і включають точку № 26. Це дозволяє знайти точність аналітичного опису поля напружень. З таблиці видно, що похибка є мала і становить менше, ніж 2,3% в момент часу дії максимальної різниці температур.

Таблиця 28. Температурні напруження та аналітично описані в момент 1500с.

	Координата Y	Реальне значення	Апроксимоване значення	Похибка %
Зона наплавлення	0	743.6	730.1	1.8
	4.02	711.0	712.2	0.2
	8.05	679.6	695.5	2.3
Зона основного металу	12.07	372.6	375.9	0.9
	16.09	361.1	361.2	0.0
	20.11	349.4	347.5	0.5
	24.14	337.6	334.9	0.8
	28.16	326.4	323.4	0.9
	32.18	316.3	312.8	1.1

	36.21	306.2	303.4	0.9
	40.23	295.9	294.9	0.3
Центральна точка 26	44.25	285.9	287.5	0.6

Поле напружень від тиску має лінійний розподіл. Це дає нам можливість обчислити поле напружень тільки для одного випадку (1 МПа). Тоді, якщо ми хочемо знайти інше поле напруження від тиску, нам потрібно помножити кожне значення КІН поля напружень від 1 МПа до значення тиску, яке присутнє в даний момент часу. Таблиця 29 показує реальний тиск поля напружень від тиску та апроксимоване поле напружень від тиску для 1 МПа для точок, які лежать на осі Y (Рис. 32) і включають точку № 26. Це дозволяє знайти точність наближення реальних напружень. Максимальна похибка становить 0,23% для поля напружень від тиску. З таблиці видно, що похибка в десять разів менша за похибку від поля температурного напруження. Це залежить від того, що поле температурного напруження має більш складний розподіл і стрибок напружень, навідмінно від поля напружень від тиску.

Таблиця 29. Реальні температурні напруження та аналітично описані для 1 МПа.

	Координата Y	Реальне значення	Апроксимоване значення	Похибка %
Зона наплавлення	0	20.99	20.97	0.0966
	4.02	20.58	20.59	0.0461
	8.05	20.17	20.22	0.2311
	12.07	20.30	20.28	0.0929

Зона основного металу	16.09	19.93	19.92	0.0150
	20.11	19.55	19.57	0.0730
	24.14	19.19	19.21	0.1303
	28.16	18.85	18.87	0.1169
	32.18	18.51	18.53	0.0942
	36.21	18.18	18.19	0.0782
Центральна точка 26	40.23	17.86	17.86	0.0082
	44.25	17.56	17.54	0.0967

4.2.4. Визначення температурного запасу крихкого руйнування патрубків

Характеристикою крихкої міцності матеріалу є в'язкість руйнування. Як прийнято в ядерній промисловості, початкове значення тріщиностійкості, K_{IC} , може бути представлена наступною експоненціальною функцією:

$$K_{IC} = A + B \cdot e^{\alpha(T-T_0)} \quad (77)$$

де α, A, B, T_0 є характеристики матеріалу, зокрема, T_0 описує початковий стан конкретного матеріалу.

Представлення характеристик тріщиностійкості у формі (77) робить зручним оцінку запасу крихкого руйнування за рівнем температури, ΔT_R . Він являє собою відстань від кривої температур (77) до точки, яка характеризує стан навантаження точки фронту тріщини в конкретний момент часу. Іншими словами, запас температури ΔT_R , показує, як далі вправо ви можете перемістити криву (1), поки вона пройде через задану точку розрахунку.

Таким чином, відповідно до визначення, ΔT_R можна легко обчислити для заданого значення КІН, K_{IR} і температури T_R , для кожної точки контуру

тріщини. Прирівняємо "зміщену" до потрібного значення ΔT_R , ,
характеристику опору крихкого руйнування при реальній температурі T_R до
розрахункового значення K_{IR} :

$$A + B \cdot e^{\alpha(T_R - T_0 - \Delta T_R)} = K_{IR} \quad (78)$$

Це дає можливість нам визначити ΔT_R :

$$\Delta T_R = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{K_{IR} - A}{B}\right) + (T_R - T_0) \quad (79)$$

З масиву значень, ΔT_R , які характеризують перехідний процес даного режиму, ми можемо знайти мінімальне значення, ΔT_{\min} , яке визначає границю опору крихкому руйнуванню патрубків. Слід зазначити, що відповідно до концепції "warm prestressing" (теплової опресовки) [124], ми можемо виключити з розгляду масив точок, де значення КІН, як мінімум, на 10% менше, ніж досягнуті в попередні моменти часу за максимальні значення КІН. Необхідною умовою застосування даної концепції є вимога про те, щоб температура в момент часу максимальної КІН була більшою, ніж у розглянутий момент часу.

Розрахований аварійний режим режим LOCA 7.2 зображено на рисунку 41. На рисунку 41 показано залежність K_I від температури для центральної точки фронту тріщини. Чорна пунктирна лінія показує характеристики тріщиностійкості матеріалу. Червона крива показує значення КІН для тріщини із відношенням осей 0.3, синя крива - КІН для тріщини із співвідношенням осей 0.7. Тут також показана крива, яка називається Limit0.3, що становить 90% від максимального значення КІН для тріщини із співвідношенням осей 0.3. Limit0.7- це пряма на рівні 90% від максимального значення із співвідношенням осей 0.7.

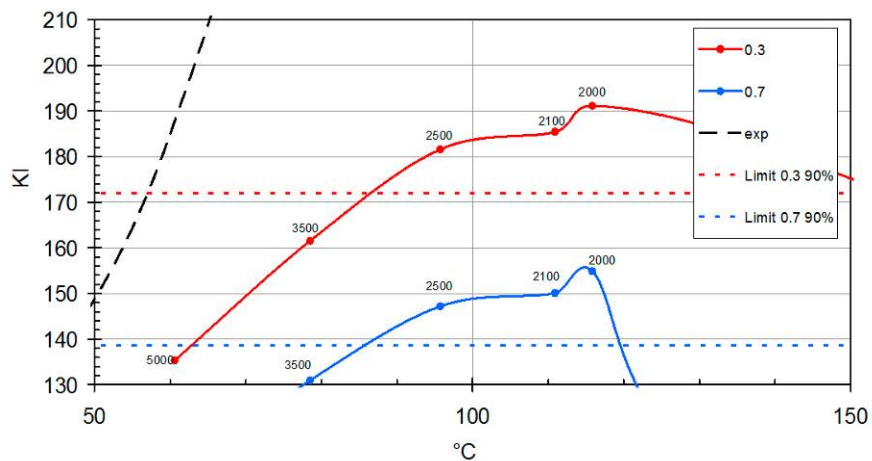


Рис. 41. Залежність K_I від температури для точки №26.

4.2.5. Альтернативний аналіз патрубка ДУ-850 на крихку міцність.

Вимогою наглядового органу було, відповідно до положень документу [122], проведення прямих пружно-пластичних розрахунків J-інтеграла. Формально така можливість стала доступною з розвитком комерційних обчислювальних комплексів інженерного аналізу. Проте перші чисельні експерименти щодо порівнянні різних методів, які проводилися в США спільнотою інженерів ASTM [135] і Європейським товариством цілісності конструкцій ESIS [136] виявили велику розбіжність результатів розрахунків. На той час це відносилось до недоліків існуючих програм. Таким чином, недоліки і обмеження в методиках обчислення величин J-інтеграла стали більш очевидні. В роботах [137] та [138] автором продемонстровані похибки та обчислення J-інтегралу та граничного стану існуючих на той час методів.

В роботі [139] аргументується необхідність видання методичних рекомендацій з розрахунками величини J-інтегралу. Виникла необхідність згадати про теоретичні передумови (а значить, і обмеження, які покладені в основу теорії). До них відносяться: – відсутність внутрішніх джерел сил в середині контуру інтегрування, наприклад, температурних напружень, вагових зусиль;

– однорідність середовища матеріалу, тобто відсутність наплавлень;

- поверхня тріщини вільна від навантажень, тобто не діє внутрішній тиск на береги поверхні тріщини;
- матеріал передбачається нелінійно пружним. Результати обчислень є некоректними, якщо використовується інкрементальна теорія пластичності або ж відбувається підростання розмірів тріщини.

Пізніші багатосторонні дослідження універсальності визначення J-інтегралу, проведені під егідою фірми AREVA, також продемонстрували велику розбіжність результатів обчислень, отриману різними дослідниками [140]. Тобто, алгоритми, що були закладені в програмних комплексах до 2011 року не давали коректних результатів значень J-інтегралу, у випадках коли контур перетинав границю різних за фізичними властивостями матеріалів чи у випадку відсутності пропорціонального в часі навантаження. Тільки з початком 2015 року було запропоновано Yuebao Lei [141], на основі теоретичних досліджень його роботи 2005 року [142] застосувати новий спосіб обчислення J-інтегралу, з урахуванням вищезазначених обмежень, у вигляді

$$J = \int_{\Gamma} \left(W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) n_i ds + \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{th}}{\partial x} dA + \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^0}{\partial x} dA, \quad (80)$$

де σ_{ij} та u_j , компоненти напружень і переміщень відповідно, ε_{ij}^0 та ε_{ij}^{th} початкова та термічна деформації Γ – крива навколо вершини тріщини, A – об'єм матеріалу, що деформується, n_i – вектор нормалі до контура Γ , ds – довжина кривої вздовж контура Γ , δ_{ij} – символ Кронекера, W – густина енергії механічного деформування.

KIH є параметром лінійної механіки руйнування, а J-інтеграл є більш загальним параметром пружнопластичної механіки руйнування. У разі пружного деформування обидва параметри взаємопов'язані співвідношенням.

$$K_1 = \sqrt{\frac{JE}{1-\mu^2}} \quad (81)$$

де E та μ – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Даний етап розвитку інформаційних технологій та обчислювальної техніки дають змогу будувати імітаційні моделі термонапруженого стану досліджуваних об'єктів, які побудовані з великою кількістю скінчених елементів та визначеним типом апроксимації шуканих функцій. Це забезпечують високу точність результатів розрахунку.

Методика оцінки величин температурного запасу крихкої міцності приведена на прикладі чисельних розрахунків імітаційної моделі патрубку ДУ-850 ВВЕР-1000 з постульованою тріщиною та приєднаного до нього фрагменту оболонки КР. Геометричні розміри патрубка приведені на рис.30.

Чисельні розрахунки проводились із врахуванням пружно-пластичних характеристик матеріалу КР. Використовуючи практичні рекомендації по розрахунку J -інтегралу, спочатку визначався J -інтеграл, а потім значення його величин конвертувалися в КІН. Більш вузьким питанням являється вивчення коректності вимог, зафіксованого в рекомендаціях МАГАТЕ [54], про необхідність використання вбудованої термопластичної моделі тіла при визначенні параметрів механіки руйнування.

Створена 3-D геометрична модель симетричної частини патрубкової зони КР має такі розміри: висота - 4600 мм; довжина (кут) по колу корпусу реактора - 90 градусів. Модель складається з патрубка Ду850 і приєднаної до нього трубного блоку ГЦТ (головний циркуляційний трубопровід) довжиною 500мм. У тривимірній імітаційній моделі патрубкової частини КР не враховано патрубки САОЗ (система аварійного охолодження активної зони реактора). Дане спрощення не впливає на точність розрахунків тріщин, постульованих в патрубках ГЦТ, при цьому дозволяє створити більш оптимальну скінчено-елементну модель. Постульовані тріщини для всіх аварійних режимів завжди повинні знаходитися в зоні «холодного язика».

Для оцінки точності обчислення J -інтеграла в наведеній розрахунковій схемі розроблено за допомогою програмного комплексу ABAQUS [111] три

дискретні моделі патрубкової зони КР (табл.30) з різним ступенем згущенням сітки скінченних елементів (СЕ).

Таблиця 30

Характеристики якості скінчено-елементних сіток для
патрубкової зони

Тип СЕ сітки	Кількість СЕ	Кількість вузлів
Poor (груба)	52390	152855
Medium (розрахункова)	68193	215449
Fine (покращена)	88688	296665

Сітка СЕ дискретних моделей патрубкової зони КР складається з 10-ти вузових тетраедрів C3D10 та 20-ти вузових гексаедрів C3D20. Зона тріщини змодельована за допомогою 20-ти вузових гексаедрів C3D20 так, як саме цей тип елементів створений для визначення J-інтегралу. При застосуванні елементів C3D10 вираховувати J-інтеграл неможливо. Деякі частини патрубкової зони, у зв'язку зі своєю складною геометричною формою, не мають спеціального алгоритму моделювання і були розбиті елементами типу C3D10 довільно.

Трубні блоки ГЦТ включені в розрахункову модель виключно з метою коректного завдання граничних умов до патрубків ГЦТ, тому сітка СЕ в трубних блоках спрощена. Умова переходу між сітками СЕ трубних блоків ГЦТ та корпусом реактору забезпечує спряження “вузел в вузел” СЕ та неперервність величин напружень і деформацій.

Розміри постульованої тріщини, як зазначалося вище, наступні: глибина $a=45.25$ мм (із них 1 мм – в наплавленні), напівдовжина $b=147.5$ мм. Створена сітка СЕ патрубкової зони достатнього згущення (Medium) складається з 215449 вузлів та 68193 СЕ та приведена на рис. 42.

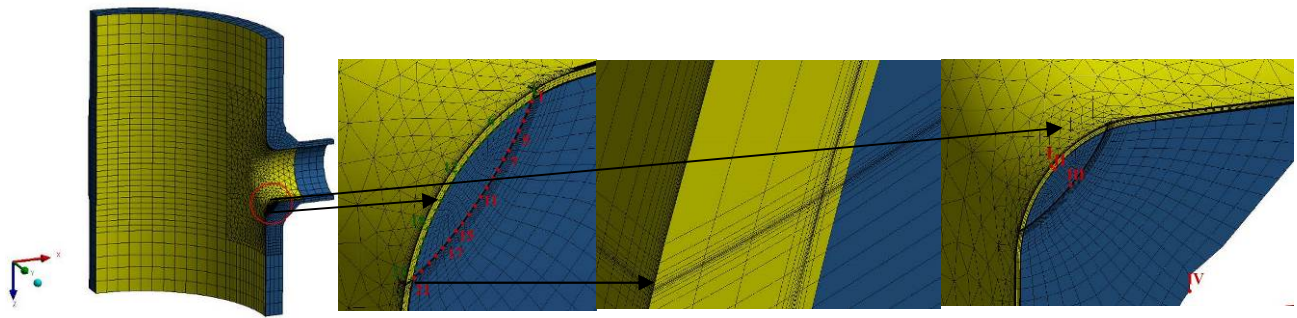


Рис. 42. Сітка CE (Medium) патрубкової зони

Сірим кольором на рис. 42 показано наплавлення, темно сірим – основний метал КР. Арабськими цифрами показана нумерація точок по фронту тріщини. Нумерація точок йде зверху вниз по вісі реактора. Римськими цифрами позначені маркери моделі, в яких далі будуть приведені величини розподілу температури і напружень по глибині патрубка. Нумерація приведена для зручності подальшого діагностування термонапруженого стану КР.

Довжина CE вздовж фронту тріщини не перевищує 10.9 мм. Розміри CE в перпендикулярному до площини тріщини напрямку складають 0,018мм. В радіальному напрямку - 0,011 мм для елементів першого шару і 0,5мм для елементів десятого (розрахункового) шару. Сітки різного ступеня згущення CE відрізняються між собою тільки густиною їх розміщення в зоні тріщини та околі тріщини. Кількість CE в напавленні на відстані 1.2 метри від зони тріщини досягає двох елементів, для основного металу - чотирьох елементів. Сітка патрубкової зони грубого згущення CE (Poor) має 152 855 вузлів та 52 390 CE (рис.43), а покращеного згущення CE (Fine) сгенерована для 88688 C3D10 та C3D20 елементів об'єднаних 296 665 вузлами (рис.44).

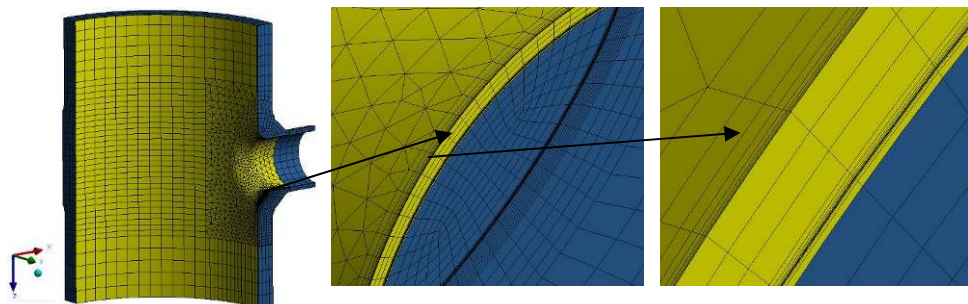


Рис. 43. Сітка CE (Poor) патрубкової зони



Рис. 44. Сітка CE (Fine) патрубкової зони

У наведених розрахункових схемах, як основний метал патрубка та циліндричної частини корпусу реактора, так і метал двох шарів наплавлення приймався як пружно-пластичний з окремим виділенням кожного типу матеріалів в дискретній моделі.

Для трьох розрахункових моделей напружено-деформованого стану (НДС) патрубкової зони КР використовувалися граничні умови, що наведені на рис. 45, 46. Внутрішній тиск разом із температурою і коефіцієнтами теплообміну застосовувались до всієї внутрішньої поверхні моделі патрубкової частини корпусу реактора. Температура і коефіцієнти теплообміну задавалися, як масив із 240 точок, які потім інтерполювалися на вузли внутрішньої поверхні.

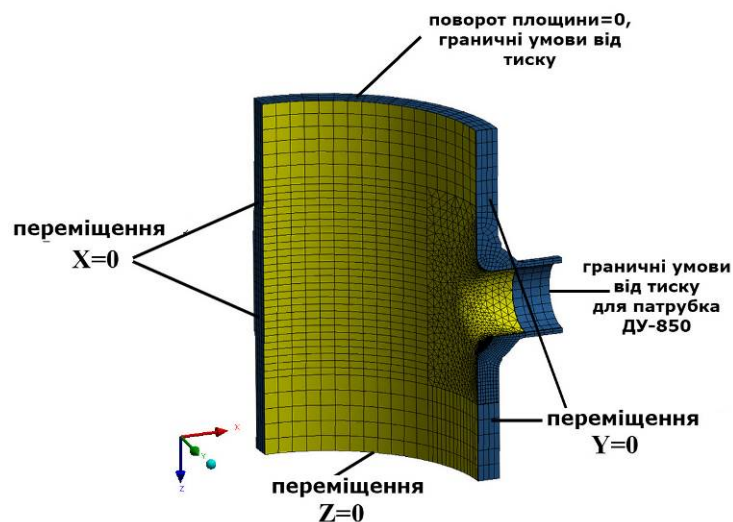


Рис. 45. Граничні умови для визначення НДС патрубкової зони КР

Для нестационарного процесу термосилового навантаження, початкова однорідна температура матеріалу КР приймалася рівною 290°C , при якій відсутні початкові напруження.

Розрахунок аварійного режиму проведено на прикладі Other 2.6. Аварійний режим Other 2.6 являє з себе ненавмисне відкриття КТ (компенсатор тиску) з роботою всіх каналів САОЗ в стані - «Зупинка для випробувань» для реакторної установки. Режим Other 2.6 є одним із всіх можливих найнебезпечніших аварійних режимів. Під час розрахунку використовувалися фактичні дані фізико-механічних властивостей матеріалів в залежності від температури [122], [124], [143]. В розрахунковій моделі присутні такі маркування матеріалів: наплавлення 1-й шар - Св-07Х25Н13, наплавлення 2-й шар - Св-04Х20Н10Г2Б, основний метал - 15Х2НМФА.

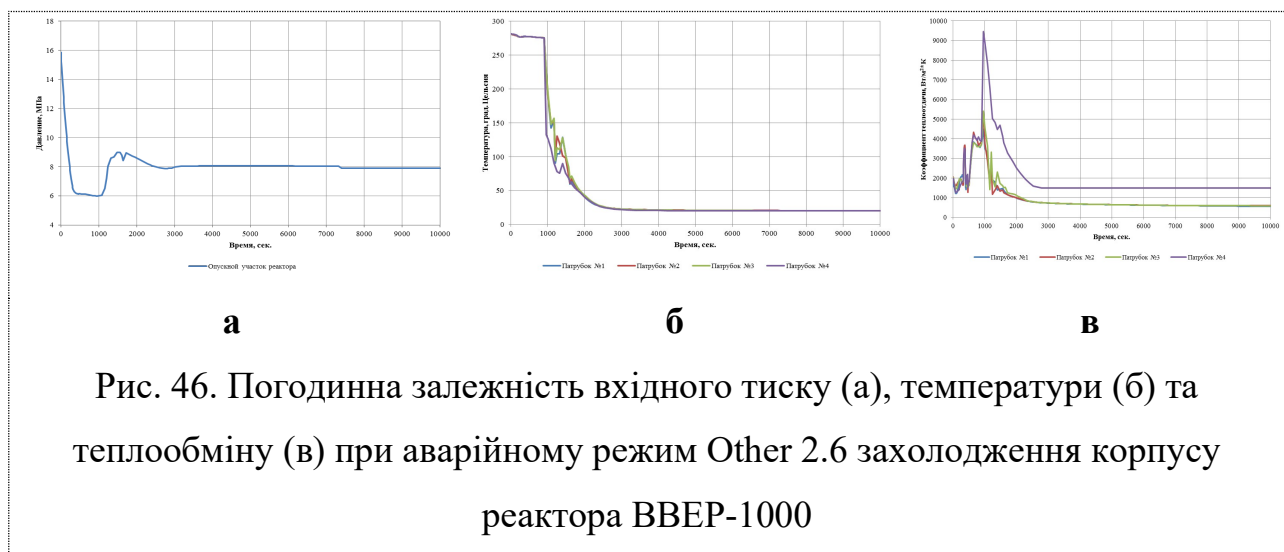


Рис. 46. Погодинна залежність вхідного тиску (а), температури (б) та теплообміну (в) при аварійному режим Other 2.6 заохолодження корпусу реактора ВВЕР-1000

Порівняння чисельних розв'язків початково-крайової задачі механіки руйнування з різним типом апроксимацій СЕ максимальних градієнтів напружень в КР для аварійного режиму Other 2.6 виконано за аналізом числових даних, що представлені графіками J-інтеграла в часі для центральної точки в основному металі №11 і для точки №12 у наплавленні. В розрахунках напружено-деформованого стану (НДС) і J-інтеграла для кожного часового кроку нестационарного процесу термосилового

навантаження температура обчислюється за три-п'ять ітерацій (в основному - 5) з максимальною можливою зміною температури у 2 градуси за один інтервал часу. Із застосуванням вищенаведеного алгоритму розв'язку даної задачі та урахуванням змін температури і тиску на поверхні КР в розрахунках НДС та обчисленими величинами J-інтегралу для моделі патрубку з тріщиною отримано 2089 ітерацій за 483 проміжки часу. Розрахункові дані значення J-інтегралу для центральної точки в основному металі та наплавленні по різних контурах для різних сіток зі згущенням СЕ приведені на рис. 47,48.

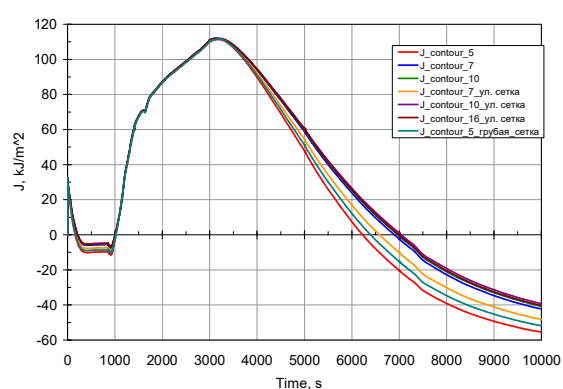


Рис. 47. Значення J-інтегралу в основному металі

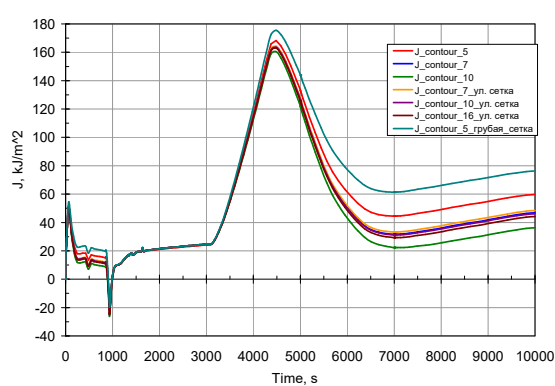


Рис. 48. Значення J-інтегралу в наплавленні

Для оцінки J-інтеграла в розрахунковій моделі КР побудовано 10 контурів навколо фронту тріщини патрубку, в покращеній - 16 контурів, в грубій 5 контурів. Контур №10 розрахункової сітки збігається по дистанції з контуром №16 поліпшеною сітки і контуром №5 грубої сітки. У таблиці 2 наведені значення J-інтеграла по контурах для моменту часу 3334.79 сек, коли J-інтеграл досягає максимального значення в основному металі і для моменту часу 4480.84 сек, коли J-інтеграл досягає максимального значення в наплавленні.

Таблица 31 Значення J-інтегралу

	Medium (розрахункова)			Fine (покращена)			Poor (груба)
№ контура	5	7	10	7	10	16	5
Основний метал (t=3334.79 сек)	110.12	110.89	110.98	110.57	111.08	111.01 6	110.34

наплавлення (t=3334.79 сек)	39.31	39.33	38.95	39.33	39.26	39.23	40.43
наплавлення (t=4480.84 сек)	168.21	163.77	160.44	164.32	163.59	162.94	175.48

За результатом розрахунку, контур №7 розрахункової сітки, відрізняється від контуру №16 покращеної сітки менш, ніж на 1%. Це дає право стверджувати що звичайна розрахункова модель більш ніж задовольняє вимогам, що вимагаються до точності інженерних розрахунків. Наступні значення J-інтеграла обрані по 7-му контуру. Збіжність контурів розрахункової сітки і поліпшеною сітки по фронту тріщини для моменту часу 3334.79 сек. показана на рис. 49.

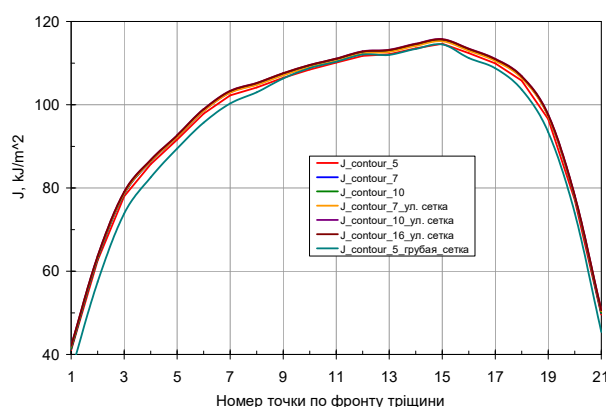


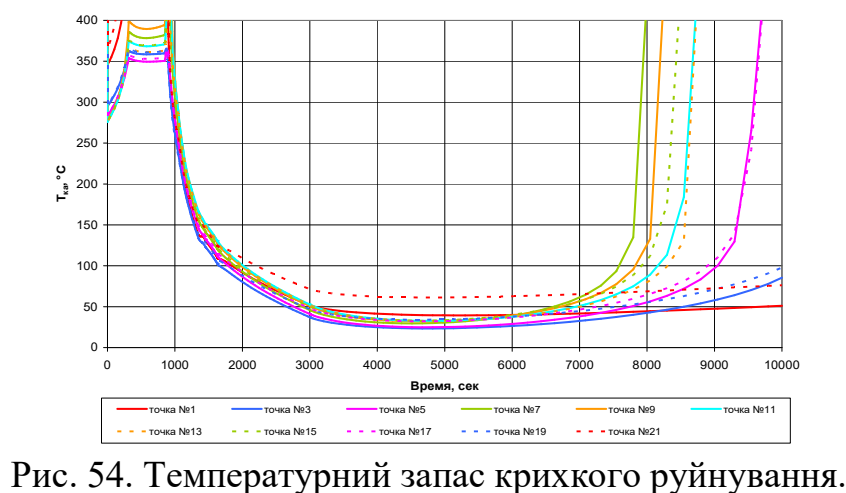
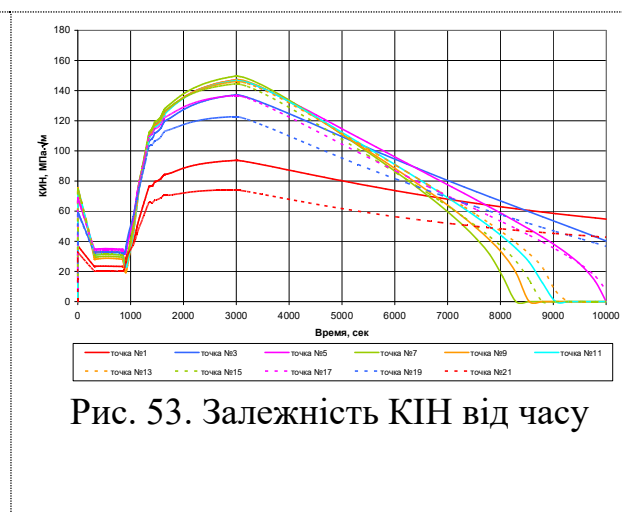
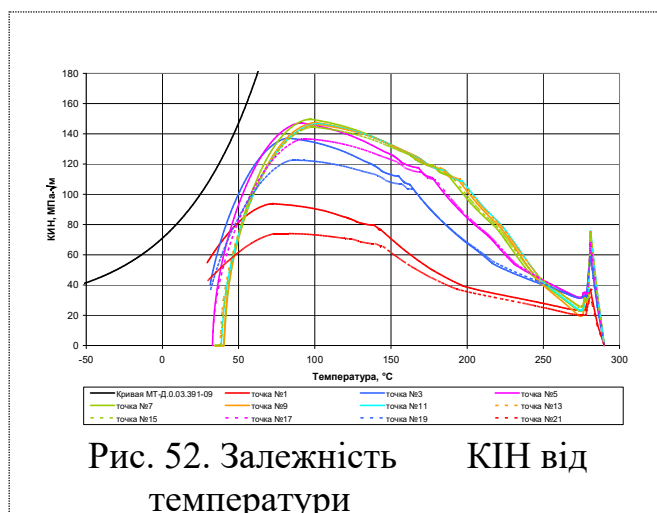
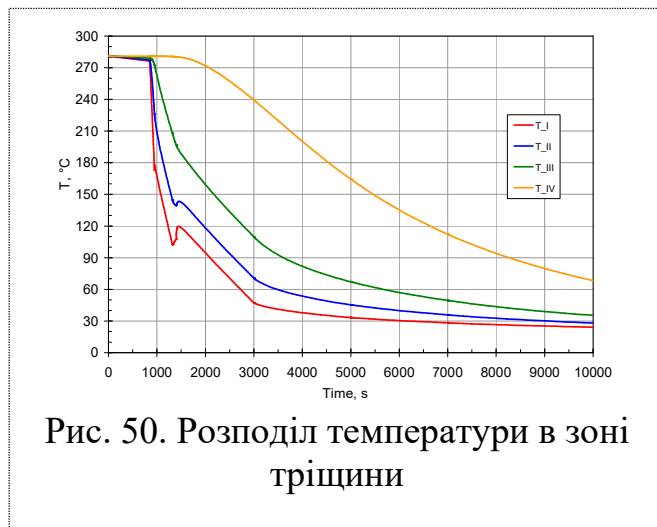
Рис. 49. Значення J-інтеграла по фронту тріщини в момент часу 3334.79 с

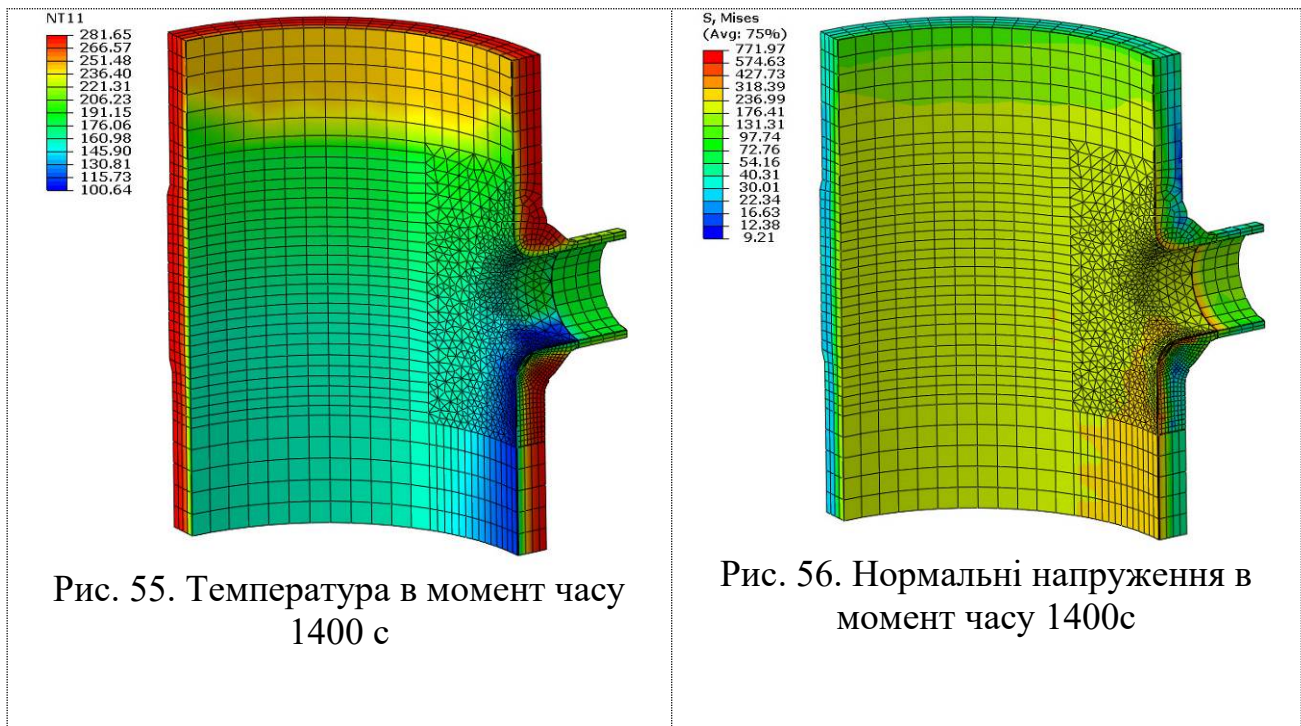
На рис. 50-51 показано розподіл температури в часі по товщині стінки патрубку для точок I,II,III,IV та розподіл напружень для точок I та IV відповідно. Залежності КІН від температури та від часу для точок по фронту тріщини приведені на рис. 52-53 відповідно.

Чорним кольором на рис. 52 показана крива тріщиностійкості. Відстань $\delta(T_k) = K_1(T_k) - K_{1C}(T_k)$, що розрахована як відстань для k точок кривої тріщиностійкості до кривої КІН при температурі T_k являється температурним запасом крихкого руйнування. Графік температурного запасу крихкого руйнування показано на рис. 54.

Як приклад, розрахункові поля температур і нормальних напружень до площини тріщини в момент часу 1400с приведено на рисунках 55 і 56. За

даними результатів досліджень встановлено, що в даний період часу відбувається стрімке охолодження стінок патрубкової зони КР шляхом вливання в посудину холодної води. Термічний удар призводить до суттєвих температурних напружень в стінках корпусу реактора [141].





4.2.6. Результати розрахунку патрубку ДУ-850 на крихку міцність 4.2.

В сучасному комп'ютерному кодї інженерного аналізу ABAQUS проведено імітаційне математичне моделювання термомеханічного стану та оцінка крихкого руйнування корпусу реактора ВВЕР-100 для аварійного режиму його охолодження. Результати отримані для двох способів моделювання тріщини. Перший – на основі ЛМР з використанням скерпозиції і методу коефіцієнтів впливу, для застосування якого розроблена відповідна процедура для 8 різних аналітичних законів навантаження, в тому числі двох дискретних. Другий – у відповідності з вимогами нормативних документів на основі вбудованих тріщин в повну геометричну модель тіла, де проводиться повний пружнопластичний аналіз для всієї історії навантаження.

Для обчислення J-інтеграла та оцінки збіжності результатів обчислень створено ряд дискретних моделей патрубкової зони реактора з різним ступенем згущення сіток SE. Розроблені рекомендації щодо вибору густини контурів інтегрування та типів скінченних елементів.

Приведено розподіл поля температур та нормальних напружень в корпусі реактора та в зоні тріщини, побудовано та обчислено десять контурів J -інтегралу в основному матеріалі та в наплавленому металі.

Обчислено КІН по фронту ймовірних тріщин патрубків корпуса реактора ВВЕР-100 для аварійного режиму його заохолодження та його змін для кожної точки контурів тріщин окремо в часі.

Визначено температурний запас крихкого руйнування корпусу реактора ВВЕР-100 з постульованою тріщиною під час одного з найнебезпечніших аварійних процесів зупинки його роботи.

Починаючи з 2012 року відбулася суттєва зміна в сучасних комп'ютерних кодах методів оцінки параметрів механіки руйнування, а саме був запропонований новий алгоритм обчислення J -інтегралу. Розроблений алгоритм подолав деякі обмеження прямого розрахунку неоднорідних матеріалів (коли контур інтегрування J -інтегралу перетинає різні типи матеріалів з неоднорідними механічними властивостями). Проте певні недоліки їх залишилися, наприклад, при зменшенні інтенсивності напружень з часом.

4.3. Розрахунок опору крихкого руйнування вигородки ВВЕР-1000

4.3.1. Загальні положення по розрахунку вигородки на ОКР

В даному розділі проведено розрахунок вигородки на опір крихкому руйнуванню. Основним фактором навантаження є прогресуюча формозміна, що приводить до виникнення суттєвих напружень в вигородці [124]. В роботах [142, 143] детально описаний алгоритм розрахунку вигородки на прогресуючу формозмінну та також представленні експериментальні данні вимірів. Для розрахунку на ОКР розглядається прогноз прогресуючої формозміни на планований понад проектний термін експлуатації 40 років і на 60 років.

На підставі аналізу НДС вигородки обрано 3 зони постулювання тріщин:

Зона 1 (рис. 3.1, схематично показано місце постулювання тріщин) - внутрішня поверхня вигородки, яка характеризується найбільшими значеннями розпухання і максимальної деградацією матеріалу під впливом флюенса швидких нейтронів. Відзначимо, що з практичної точки зору навіть миттєве зростання (руйнування) тріщини в цій зоні не є критичним, тому що тріщина при руйнуванні буде рости в довжину, в сторону найбільших напружень, що розтягують, а не в глибину, в сторону стискаючих напружень. При цьому в процесі росту тріщини напруження будуть перерозподілятися, що сприяє уповільненню тріщини. Крім того, в даному перетині (див. Рис. 57) є ще два шари металу: між каналами і між зовнішнім каналом і зовнішньою поверхнею вигородки, тобто зростання тріщини в цій зоні не призведе до порушення несучої здатності та цілісності вигородки в цілому.

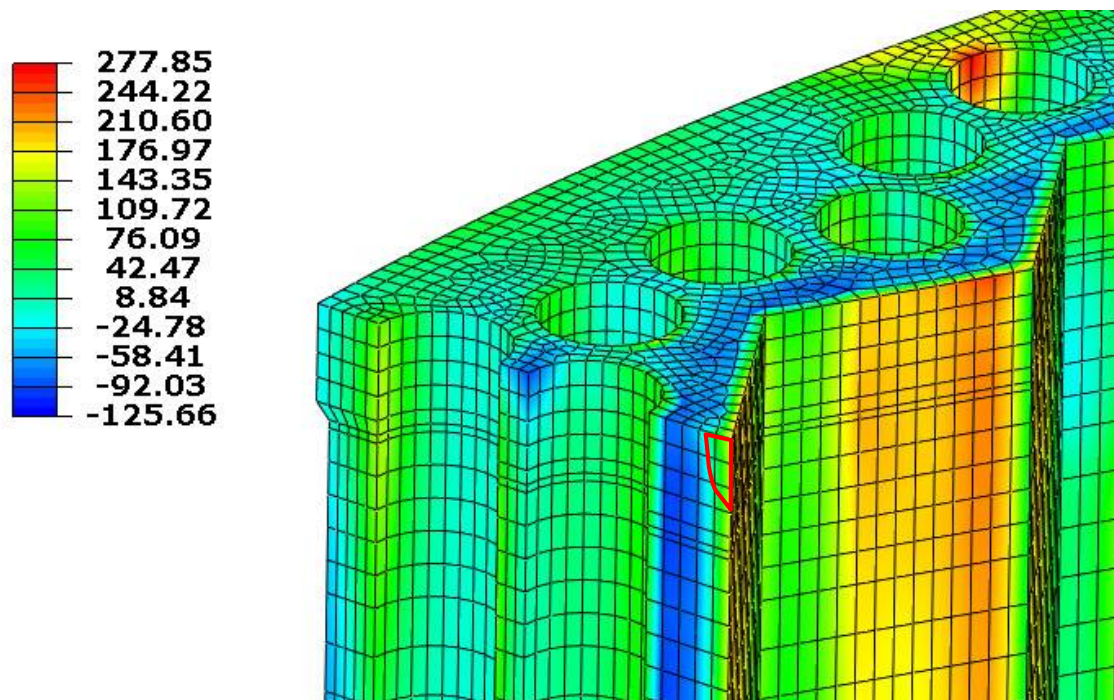
Зона 2 (рис 58) - є критичною з точки зору цілісності вигородки, тому що загальна товщина вигородки в даному перетині найменша і складається тільки з одного шару металу.

Зона 3 - зображена на рис. 59, як і Зона 1, не є критичною з точки зору міцності вигородки в цілому.

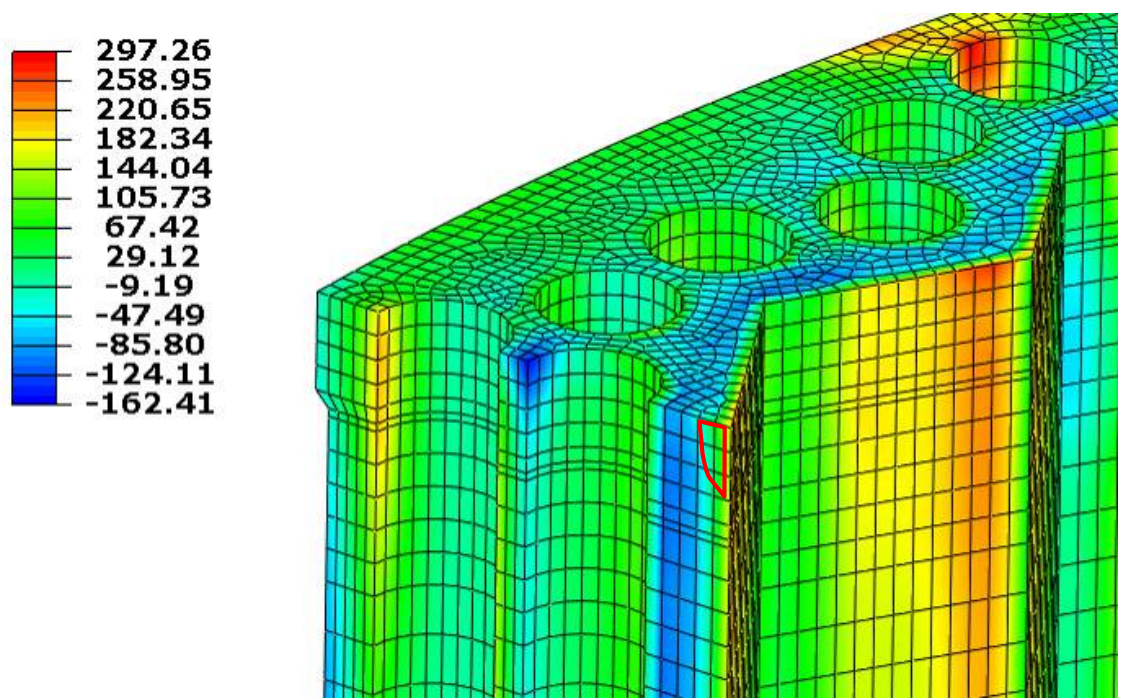
Постулюється поверхневі чверть еліптичні тріщини, відповідно до 03.РО.УС.ПМ.243 – 16/Н [146] и ПМ-Т.0.03.333-15 [147].

Відповідно до 03.РО.УС.ПМ.243 – 16/Н максимальна розрахункова глибина постулюваної тріщини дорівнює $a_{calc}=0,25s$ (s – товщина металу в місці постулювання тріщини), а співвідношення півосей - $a/c = 2/3$; відповідно до Додатку Д документа ПМ-Т.0.03.333-15 [147] відношення $a/c = 1/3$, а початкова глибина тріщини задається в табл. Д3.1 [147] і для всіх розглянутих зон становить 5 мм.

У табл. 32 вказані товщини металу s для розрахункових зон і параметри постулюємих тріщин, для кожної зони глибини тріщин прийняті однаковими, $a_{calc}=0,25s$.



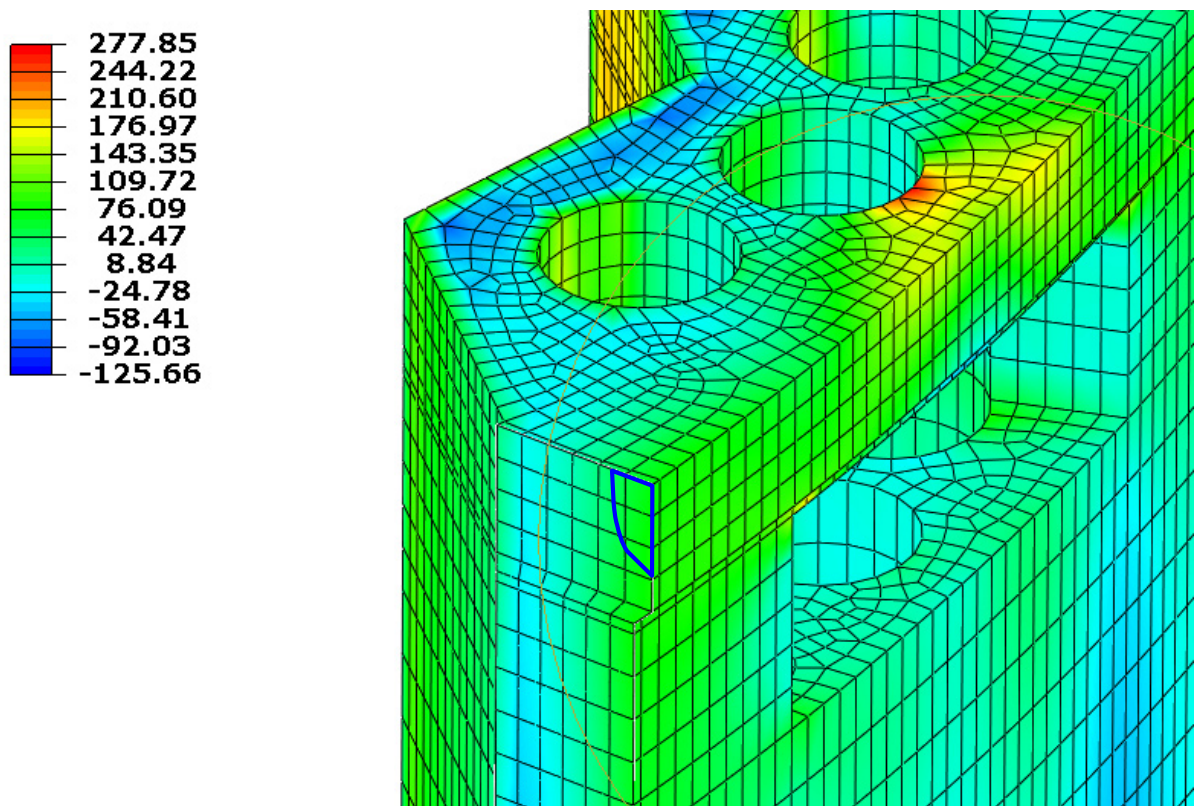
а)



б)

Рис. 57. Постульована тріщина, Зона 1.

а) Розподіл напруження на 40 років; б) Розподіл напруження на 60 років.



а)

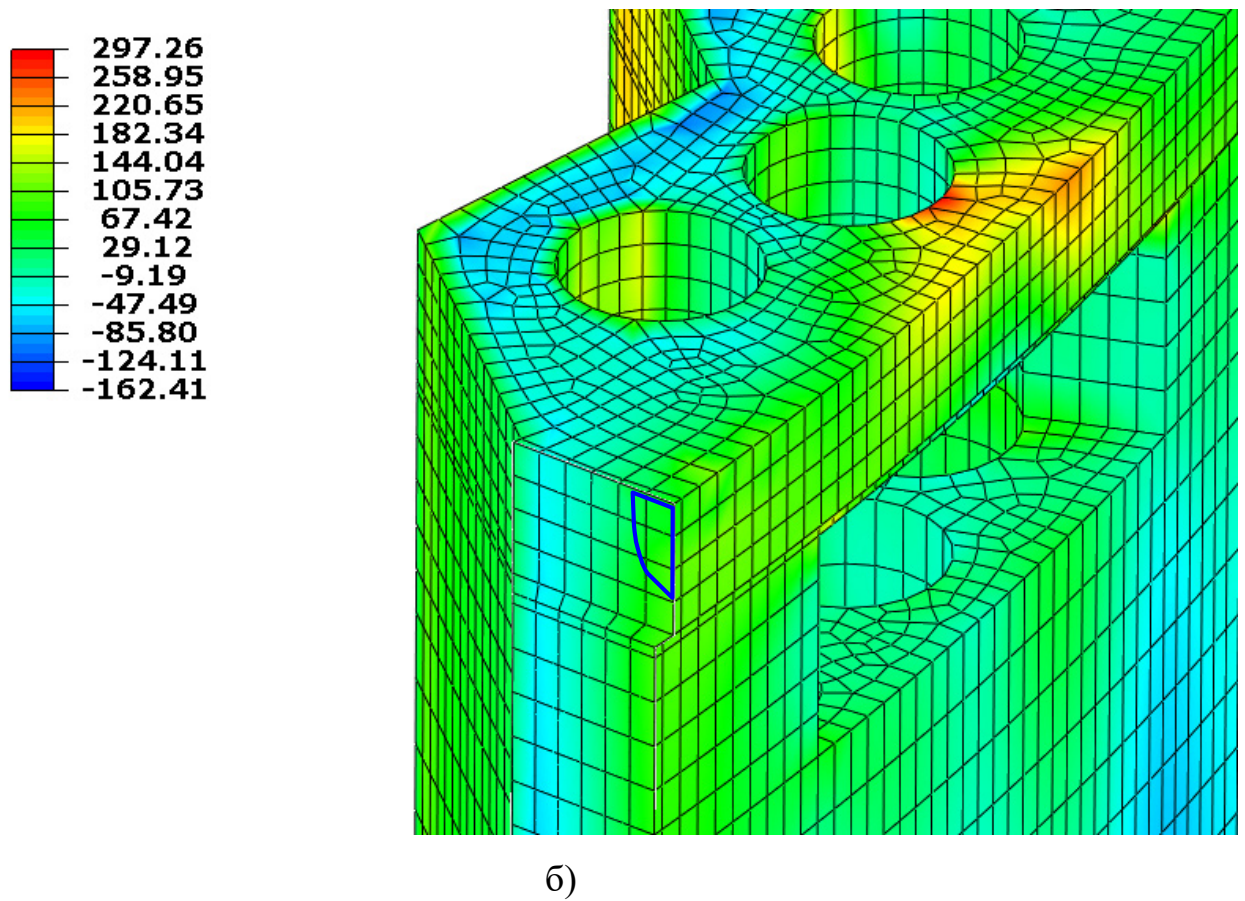
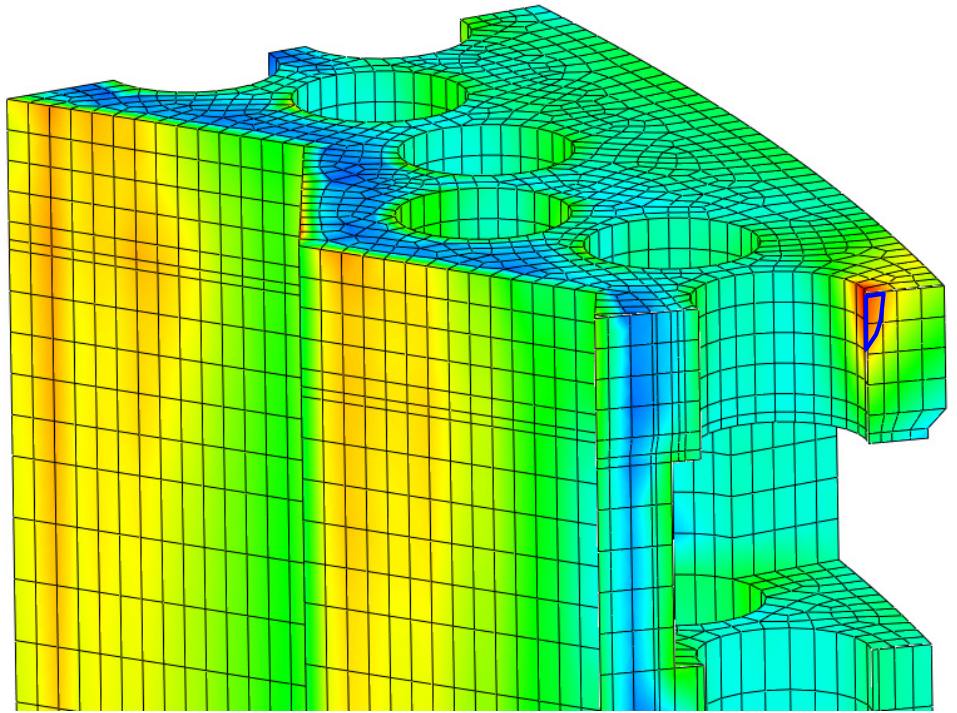
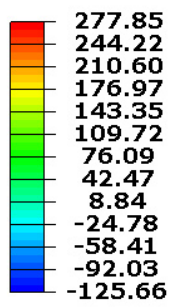
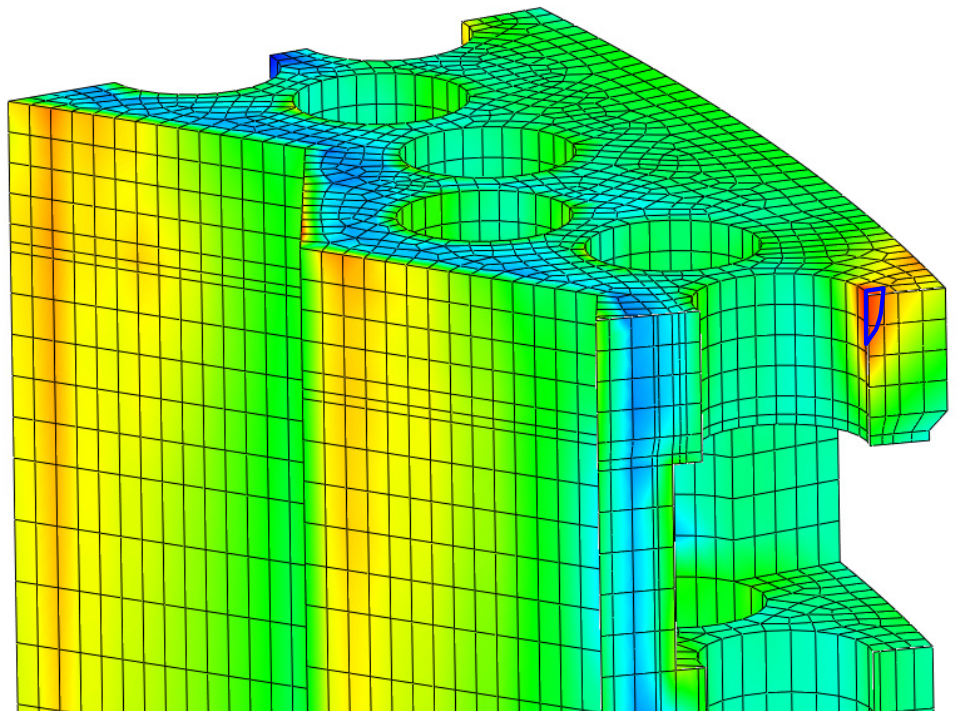
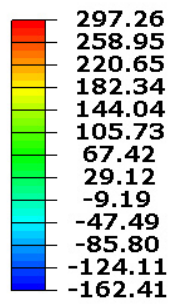


Рис. 58. Постульована тріщина, Зона 2.

а) Розподіл напруження на 40 років; б) Розподіл напруження на 60 років.



а)



б)

Рис. 59. Постульована тріщина, Зона 3.

а) напруження за Мізесом на 40 років; б) напруження на 60 років.

Відповідно до 03.РО.УС.ПМ.243 - 16 / Н критичне значення КІН для внутрішньокорпусних пристроїв становить $[K_I]_A = 78 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$. Тоді допускаються значенням КІН для НЕ з урахуванням коефіцієнта запасу 2.0 є $[K_I]_1 = 39 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$.

Таблиця 32 - Геометричні розміри розрахункових зон

	Товщина металу, s, мм	Глибина дефекту a, мм	Півдовжина дефекту с, мм, a/c=2/3	Півдовжина дефекту с, мм, a/c=1/3
Зона 1	48,13	12,03	18,05	36,1
Зона 2	64,94	16,24	24,35	48,71
Зона 3	31,32	7,83	11,74	23,49

Критичне значення J-інтеграла (J_c) згідно з додатком Д [147] залежить від ступеня розпухання, температури і флюенса швидких нейтронів (задається в зсувах на атом - з.н.а.) і описується виразом (Д 3.3 [145]). Крім того, в критерії (Д 3.1 [147]) виконання умов ОКР згідно [147] використовується коефіцієнт запасу $n_J = 1,2$. На підставі зазначених виразів з використанням загальновідомого вираження зв'язку J-інтеграла та тріщиностійкості отримано наступне вираження перекладу J_c (визначається відповідно до виразу (Д 3.3 [147])) в допустиме значення КІН:

$$[K_I] = \sqrt{\frac{J_c \cdot E}{1,2 \cdot (1 - \nu^2)}} \quad (82)$$

де E – модуль Юнга при заданній температурі; ν - коефіцієнт Пуассона.

Допустиме значення $[K_I]$ визначається для кожної зони окремо на основі даних обчислень прогресуючої формозміни і дози швидких нейтронів. При цьому обчислена доза швидких нейтронів в з.н.а. використовується разом з коефіцієнтом запасу 1,18 (врахування невизначеності геометричних параметрів) і коефіцієнтом 1,10 (врахування похибки обчислень), див. 8 документ [147].

4.3.2. Результати розрахунків на ОКР для Зони 1

У табл. 33 представлений результат оцінки тріщиностійкості сталі 08X18H10T згідно документа ПМ-Т.0.03.333-15 [147] для Зони 1.

Таблиця 33 - Тріщиностійкість сталі 08X18H10T для Зони 1

Період експлуатації	Доза, з.н.а.	Темп. облуч., T_{irr} , °C	розпухання, S, %	J_c , Н/м	K_{Ic} , МПа $\sqrt{м}$, (без n_J)	$[K_I]$, МПа $\sqrt{м}$, ($n_J=1,2$)
40 років	108,1	361	2,1	13418	50,64	46,23
60 років	162,2	361	4,5	12725	49,31	45,02

На рис. 60 представлені графіки КІН по контуру постульованих тріщин для 40, а на рис. 61 - для 60 років експлуатації (розпухання і напружень від прогресуючої формозміни-ростуть під час експлуатації і в міру збільшення дози швидких нейтронів). Максимальні значення КІН представлені в таблиці. 34.

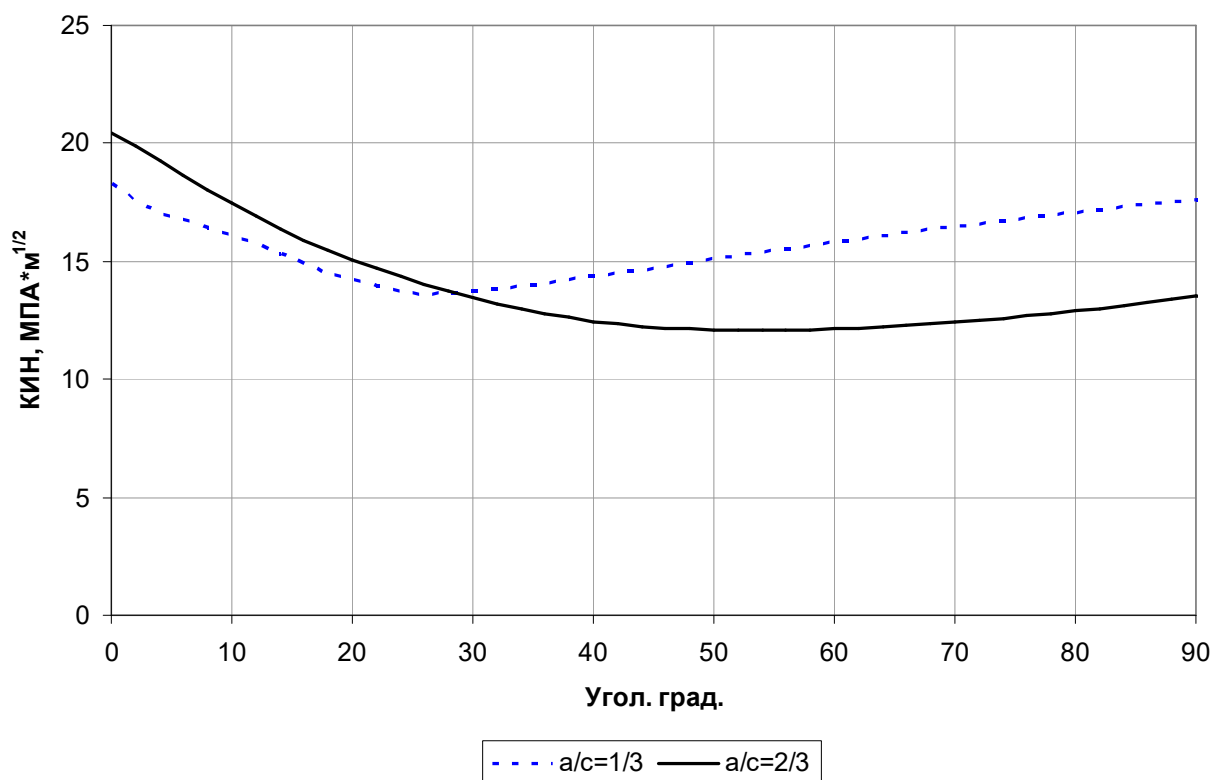


Рис. 60. Результати по КІН для Зони 1, 40 років експлуатації

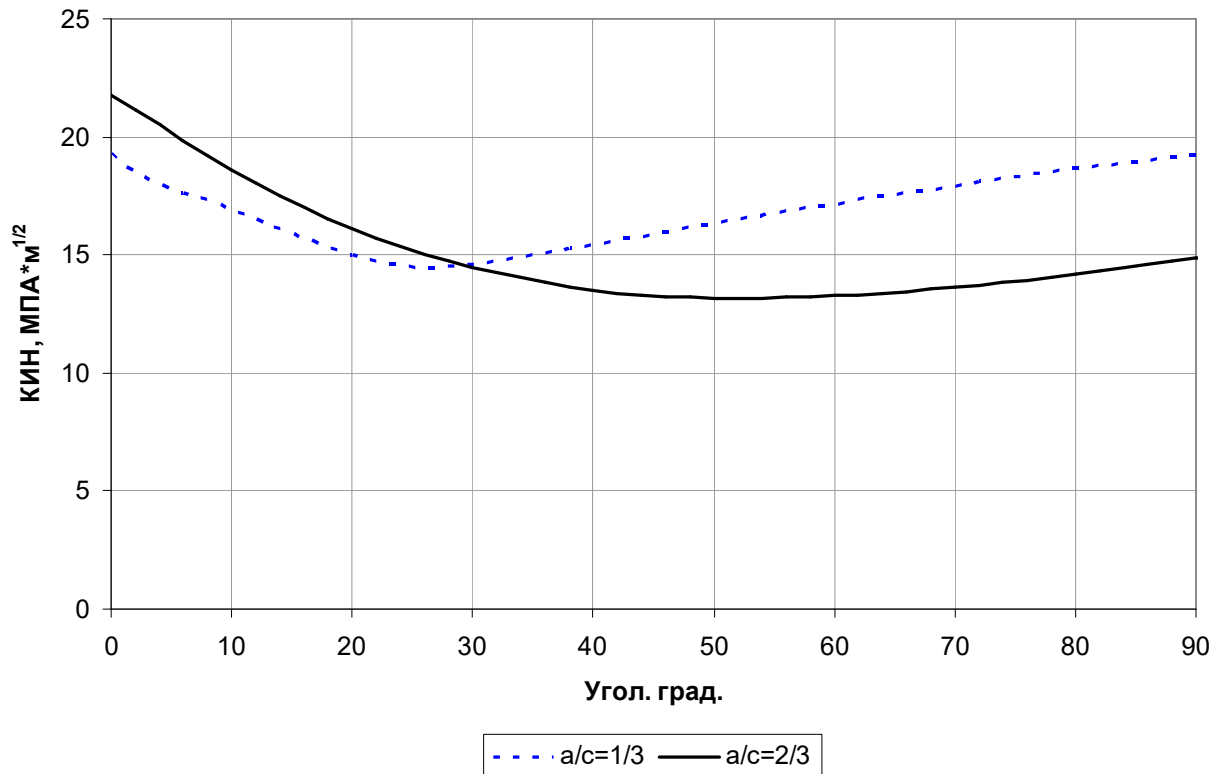


Рис. 61. Результати по КІН для Зони 1, 60 років експлуатації

Таблиця 34 - Значення КІН в постульованих тріщин Зони 1

Геометричні параметри тріщини	період експлуатації	
	40 років	60 років
$a_{calc}=0,25s$, $a/c=2/3$	20,45 МПа√м	21,75 МПа√м
$a_{calc}=0,25s$, $a/c=1/3$	18,31 МПа√м	19,27 МПа√м

Отримано, що на 40 і 60 років експлуатації критеріальне (допустиме) значення не перевищено як для тріщин, постульованих згідно 03.РО.УС.ПМ.243 – 16/Н [144] ($a/c=2/3$, критичне значення КІН $[K_{Ic}]_c = 78 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, коефіцієнт запасу 2,0 для режиму HE), так і для розрахунків згідно ПМ-Т.03.333-15 [147] (співвідношення $a / c = 1/3$, використано досить консервативне значення глибини $a_{calc}=0,25s$).

4.3.3. Результати розрахунків на ОКР для Зони 2

У табл. 35 представлений результат оцінки тріщиностійкості сталі 08X18H10T згідно документа ПМ-Т.0.03.333-15 [147] для Зони 2.

На рис. 62-63 представлені КІН для постульованих тріщин (відповідно до табл. 32).

Таблиця 35 - Тріщиностійкість сталі 08X18H10T для Зони 2

Період експлуатації	Доза, с.н.а.	Темп. облуч., $T_{irr}, ^\circ C$	Розпухання, S, %	J_c , Н/м	K_{Ic} , МПа $\sqrt{м}$, (без n_J)	$[K_I]$, МПа $\sqrt{м}$, ($n_J=1,2$)
40 лет	26,3	334,5	0,00	14900	53,77	49,08
60 лет	40,0	334,5	0,00	14603	53,23	48,59

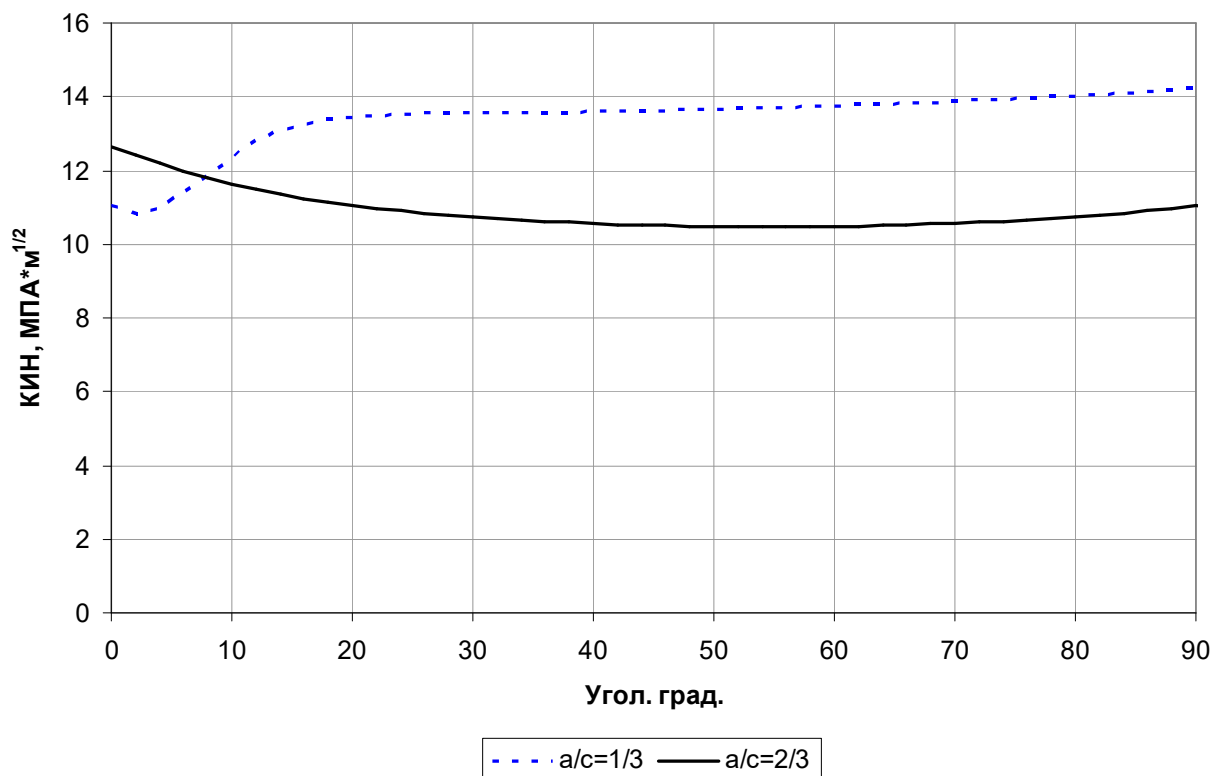


Рис. 62. Результати по КІН для Зони 2, 40 років експлуатації

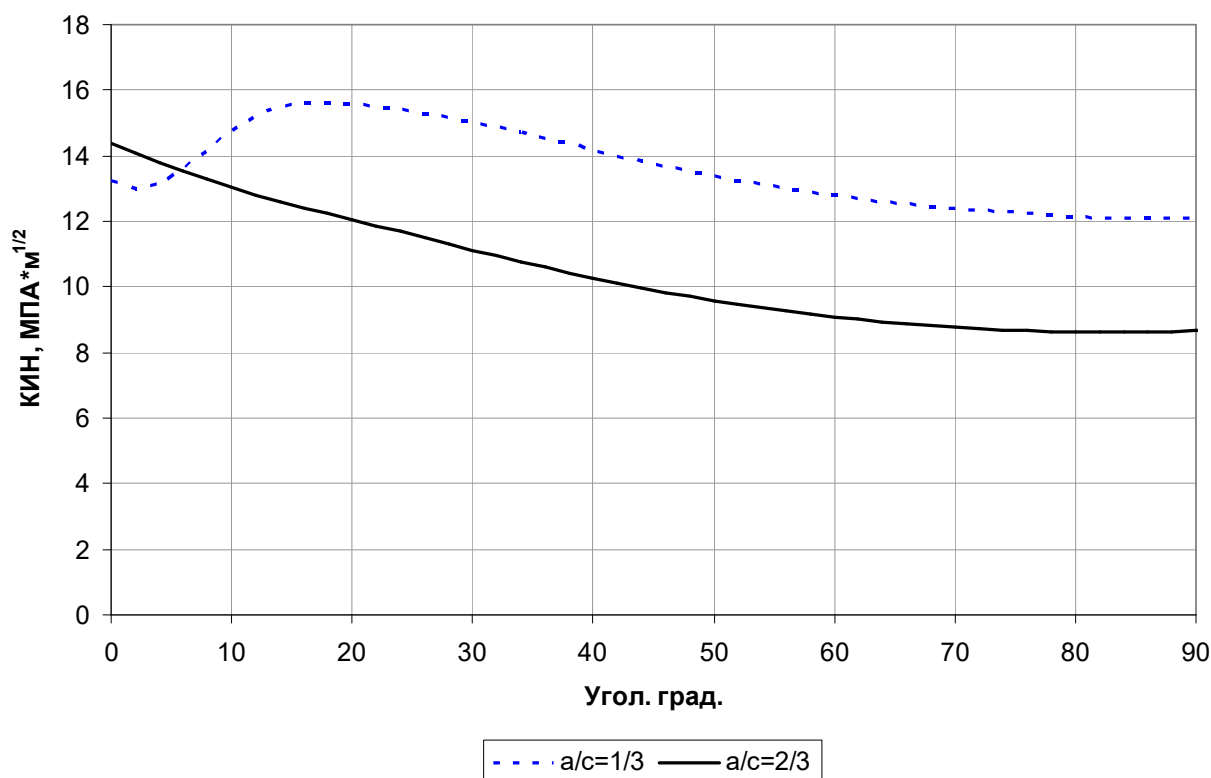


Рис. 63. Результати по КІН для Зони 2, 60 років експлуатації

Умови ОКР виконуються з істотним запасом відповідно до обох використаних підходів для всього планованого понад проектний строк експлуатації.

4.3.4. Результати розрахунків на ОКР для Зони 3

У табл. 36 представлений результат оцінки тріщиностійкості сталі 08X18H10T згідно документа ПМ-Т.0.03.333-15 [147] для Зони 3.

Таблиця 36 - Тріщиностійкість сталі 08X18H10T для Зони 3

Період експлуатації	Доза, з.н.а.	Темп. облуч., T_{irr} , °C	Розпухання, S, %	J_c , Н/м	K_{Ic} , МПа $\sqrt{м}$, (без n_J)	$[K_I]$, МПа $\sqrt{м}$, ($n_J=1,2$)
40 лет	11,4	315,4	0,00	22557	66,51	60,72
60 лет	17,4	315,4	0,00	16966	57,68	52,66

На рис. 64-65 представлені КІН для постульованих тріщин (відповідно до табл. 32). Результати (максимальні значення КІН для тріщин) також представлені в табл. 37.

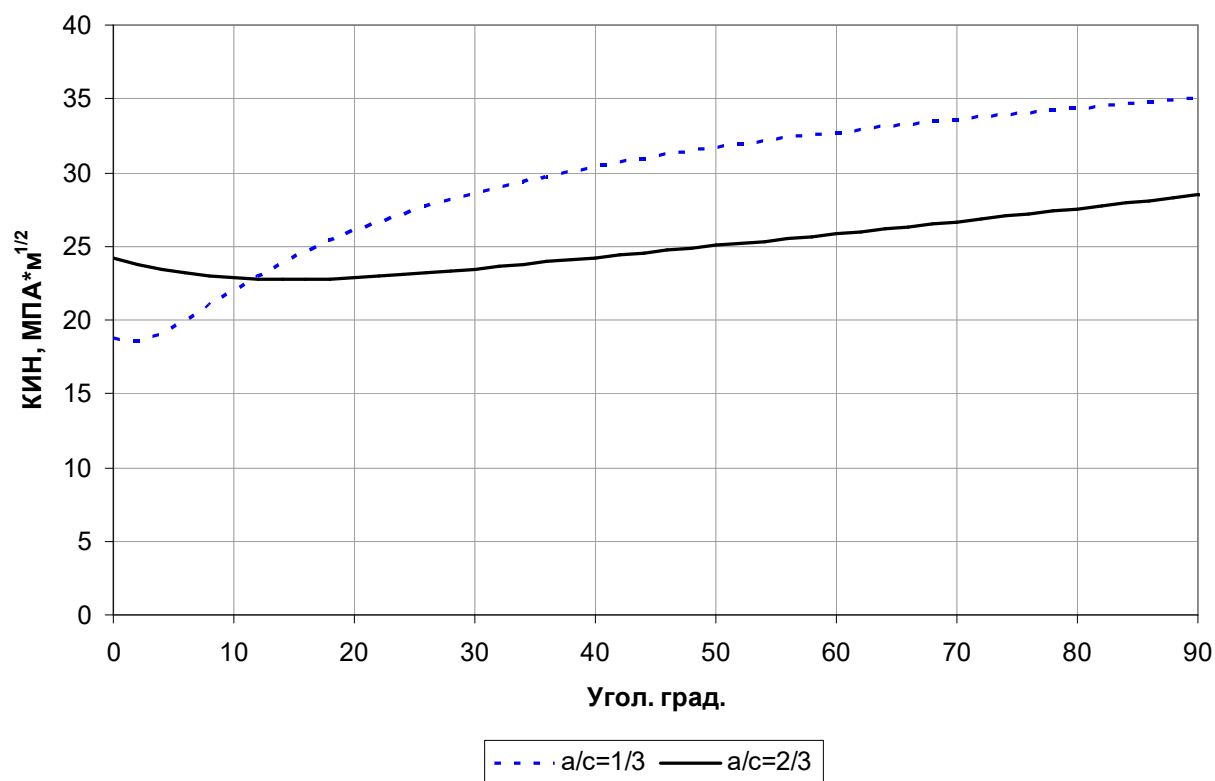


Рис.64 Результати по КІН для Зони 3. 40 років експлуатації.

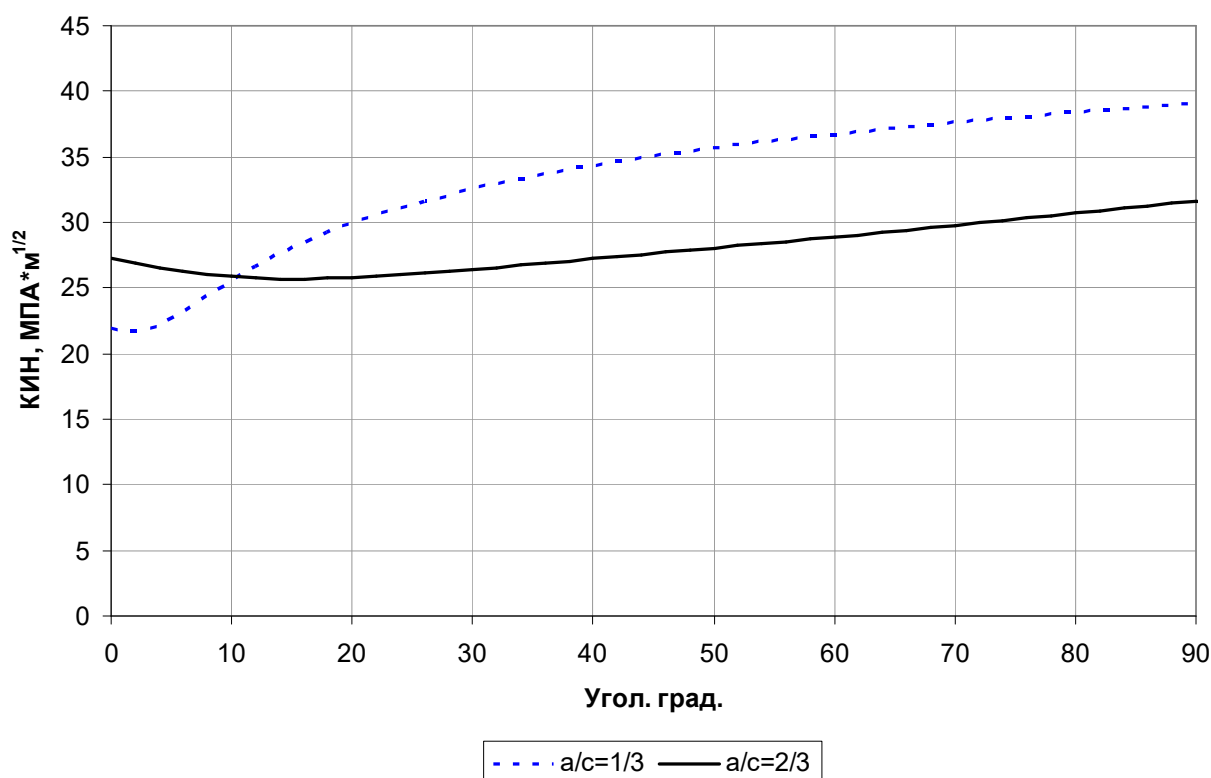


Рис. 65 Результати по КІН для Зони 3. 60 років експлуатації.

Таблиця 37 - Значення КІН в постульованих тріщин Зони 3

Геометричні параметри тріщин	Період експлуатації	
	40 лет	60 лет
$a_{calc}=0,25s, a/c=2/3$	$28,46 \text{ МПа}\sqrt{м}$	$31,67 \text{ МПа}\sqrt{м}$
$a_{calc}=0,25s, a/c=1/3$	$35,03 \text{ МПа}\sqrt{м}$	$39,11 \text{ МПа}\sqrt{м}$

Згідно з результатами розрахунків для Зони 3 також отримано, що умови ОКР виконуються на понад проектний період експлуатації 60 років для обох варіантів розрахунків, відповідно до 03.РО.УС.ПМ.243 - 16 / Н [146] і відповідно до ПМ-Т .0.03.333-15 [147].

4.3.5. Висновки по підрозділу розділу 4.3.

На підставі аналізу напруженого стану вигородки від прогресуючої формозміни виділено 3 найбільш критичні зони вигородки з точки зору ОКР.

Проведено постулювання тріщин, розрахунок КІН і оцінка критичних і допустимих КІН в даних зонах. При оцінці ОКР вигородки використовувалося два підходи: п. 5.4.5 03.РО.УС.ПМ.243 - 16 / Н [144] і п. Д.3 Додатки Д ПМ-Т.0.03.333-15 [146].

Для всіх трьох зон, розглянуті умови ОКР виконуються згідно обох підходів з урахуванням необхідних коефіцієнтів запасу на 40 і 60 років експлуатації.

Отримані результати і обґрунтування свідчать, що для планованого понад проектного строку експлуатації умови ОКР виконуються.

Процедура чисельного моделювання геометрії, методичні особливості розразунку та результати обчислень, наведені в розділі 4, опубліковані автором в роботах [144, 145, 148-151].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Робота присвячена створенню аналітичних, розрахункових методів розрахунку КІН та відпрацюванню моделей МСЕ для нетипових геометрій і навантажень з метою подальшого застосування їх для практики аналізу крихкої міцності найбільш відповідальних елементів атомного реактора. До основних результатів роботи належать наступні:

- 2) Модифіковано та досліджено границі застосування методу Вільямса, як історично першого та найпростішого напівчисельного методу, для розв'язку задач для тіл безкінечних геометрій, та для тіл навантажених по частині поверхні тріщини. Введено поняття зовнішніх функцій Вільямса, які разом з введенням умов глобальної рівноваги, дозволили розширити застосування класичного Методу Колокацій. та може застосовуватися для верифікації існуючих програм розрахунку КІН. Цей метод може застосовуватися для верифікації існуючих програм розрахунку КІН для складних випадків навантаження.
- 3) На основі аналітичного рішення деформування тонкостінного кільця з початковими неправильностями форми як криволінійної балки в геометрично нелінійній постановці та застосуванню методу зосереджених податливостей вперше отримані формули розрахунку КІН, що показують нелінійний (дещо сповільнений) ріст КІН зі збільшенням тиску. Вплив початкових неправильностей форми в геометрично нелінійній постановці може суттєво (в рази!) змінювати розрахункові значення КІН. Ці результати вперше підтверджені детальним покроковим чисельним геометрично нелінійним моделюванням МСЕ, що підтверджують правильність двох незалежних підходів – аналітичного і МСЕ.
- 4) Чисельними методами КЕ проведено дослідження геометрично нелінійної поведінки тонкостінного циліндру з наскрізною осьовою тріщиною при навантаженні великими розтягуючими осьовими напруженнями. Вперше

обґрунтована покрокова процедура та вибір граничних умов для отримання коректних значень КІН та розкриття берегів тріщини. Чисельно продемонстровано, що узагальненим параметром впливу нелінійності може бути вираз, що дорівнює добутку поздовжнього напруження на радіус труби на корінь квадратний з безрозмірної довжини тріщини і поділений на товщину стінки. Показана значимість ефекту ГН (3-5%) для реальних лабораторних експериментів навіть з не дуже тонкостінними трубами (відношення радіусу до товщини дорівнює 20).

- 5) Запропонований оригінальний метод чисельно аналітичного розв'язку фундаментальної інтегро-диференційної задачі теорії пружності для плоских тріщин довільної форми і проведено дослідження трьох можливих функцій форми, що враховують поведінку розкриття тріщини біля її границі. Показано, що точність розв'язку значно покращується, якщо технічно операцію диференціювання провести аналітично, а потім провести чисельне інтегрування гіперсингулярного рівняння. З усіх досліджених функцій форми найбільш точним виявилось аналітичне представлення Бернса-Ура, що застосовувалось для побудови вагових функцій. Побудовано ряд моделей МСЕ, проведені відповідні розрахунки і продемонстровано хороше узгодження результатів з аналітичними.
- 6) Досвід моделювання некласичних тріщин форми був використаний при розрахунках КІН та подовження ресурсу елементів реакторної установки ВВЕР-1000 (корпус реактора, вигородка, патрубкова зона корпусу реактора) при різних сценаріях протікання аварії. Розроблені та впровадженні два підходи в продовженні ресурсу АЕС – а) з використанням принципу суперпозиції та функцій впливу (набір яких та конкретні значення отримані автором), та б) за допомогою вбудованих моделей тріщини в загальну розрахункову схему і проведення пружно-пластичних розрахунків параметрів механіки руйнування в часі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. A. A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A, Vol 221, 1921, pp 163-198.
2. C.E. Inglis, "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners," Transactions of the Institution of Naval Architects, Vol. 55, London, 1913, pp. 219–230.
3. G.R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, J. Appl. Mech. 24 (1957) 361–364.
4. Irwin G.R. Handbuch der Physik. Vol. VI. - Berlin: Springer, -1958.
5. Броек, Давид Основы механики разрушения :[Пер. с англ.] /Д. Броек. М. : Высшая школа, 1980. 368 с.
6. Williams M. L., Pasadena C. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // J. Appl. Mech., 1957, 24, N 1, p. 109 – 114.
7. Hellan K., Introduction to Fracture Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1984
8. Williams M. L., The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. Journal of Applied Mechanics, March, 1961.
9. Malíková L. and Seitzl S. Application of the Williams Expansion near a Bi-Material Interface, Key Engineering Materials, Vol. 754, pp. 206-209, 2017
10. Долгов Н.А., Сорока Е.Б. Сингулярность полей напряжений в системе основа-покрытие. Проблемы прочности. 2004, №6. - С.119-127.
11. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. — 412 ł.

12. Larsson, S. G., Karlsson, A. J. (1973). Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small scale yielding at crack tips in elastic-plastic material. *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 263-278.
13. Bouledroua O. Meliani M. H., Pluvinaud G. A review of T-stress calculation methods in fracture mechanics. *Nature & Technologie. A Sciences fondamentales et Engineering*, N1. V5. Juin, 2016.
14. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2015. – Vol. 134. – P. 218–241.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные проблемы математической теории упругости.- М.: Наука, 1966.-707 с
16. Степанова Л.В. Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2014, N 4, стр 188-215
17. Gross B., Srawley J. E., W. F. Brown, Jr. Stress-Intensity Factor for a Single – Edge – Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function // *National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.* 1964.
18. W. K. Wilson, Clark W. G., Jr, and Wessel E. T. Engineering Methods for the Design and Selection of Materials Against Fracture // *Final Technical Report, Contract DA-30-069-AMC-602(T)* June 1966. Available through Defense Documentation Center, Cameron Station, Alexandria, Va., #AD 801005.
19. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // *Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2*. Киев: Наук, думка, 1988

20. Chiang C.R. A numerical method for solving elastic fracture problems // Computers & Structures Vol. 32, No. 5, pp. 1195-1197, 1989
21. Gao Pei-Qing. Stress intensity factors for a rectangular plate with a point-loaded edge crack by a boundary collocation procedure, and an investigation into the convergence of the solutions // Engineering Fracture Mechanics Vol. 22, N 2, 1985, Pages 295-305.
22. Fett, T. Stress intensity factors and weight functions for the edge cracked plate calculated by the boundary collocation method // Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH (Germany, F.R.). Inst. fuer Material- und Festkoerperforschung, 1990; 61 p
23. T. Fett, A semi-analytical study of the edge-cracked circular disc by use of the boundary collocation method. Engineering Fracture Mechanics, Volume 56, Issue 3, 1997, Pages 331-346
24. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках.- Киев. : Наук. думка, 1976.- 444с.
25. B. Aamodt, P.G. Bergan. On the principle of superposition for stress intensity factors. Engineering Fracture Mechanics. Volume 8, Issue 2, 1976, Pages 437-440.
26. Raju I. S. Newman J. C. Stress intensity factor for internal and external surface cracks in cylindrical vessels // Transaction of the ASME: J. Press. Vess. Technology.- 1982.-V. 104.- P. 293-298.
27. C Poette, S Albaladejo. Stress intensity factors and influence functions for circumferential surface cracks in pipes. Engineering Fracture Mechanics. Volume 39, Issue 4, 1991, Pages 641-650.

28. C.L. Tan, M.L. Shim. Stress intensity factor influence coefficients for internal surface cracks in thick-walled cylinders. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. Volume 24, Issue 1, 1986, Pages 49-72.
29. S.Marie, S.Chapuliot, Y.Kayser, M.H.Lacire, B.Drubay, B. Barthelet, P. Le Delliou, VRougier, C.Naudin, P.Gillesg, M.Triay. French RSE-M and RCC-MR code appendices for flaw analysis: Presentation of the fracture parameters calculation— Part I: General overview // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. - 2007. - Vol. 84, № 10 - 11. - p. 590-600.
30. R6 Revision 4, Assessment of the integrity of structures containing defects, EDF Energy, Gloucester, UK, 2015 Amendment 11.
31. API579–1/ASME FFS-1, Fitness-for-service, American Petroleum Institute/ American Society of Mechanical Engineers, Washington DC, USA, 2016.
32. BS7910:2013+A1:2015, Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures, British Standards Institution, London, UK, 2016 Amendment 1 Corrigendum 2
33. Peter Dillström, Jens Gunnars, Petter von Unge, Daniel Mångård. 2018:18 Procedure for Safety Assessment of Components with Defects. Handbook Edition 5. Kiwa Inspecta Technology AB, Stockholm, 2018, 225 p.
34. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — К.:Наук. думка, 1968. — 245.
35. Orynyak I.V. Method of translation a mode I elliptic crack in an infinite body. Part II. Expansion of the fundamental solution into a series // *Intern. J. Solids and Structures*, 1998, V35, p.3043-3052
36. Roy, A. & Saha, T. Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. I. Normal loading. *International Journal of Fracture* (2000) 103: p. 227-241.

37. Oore M., Burns D. J. Estimation of stress intensity factors for embedded irregular crack subjected to arbitrary normal stress fields // Transaction of the ASME: J. Press. Vess. Technology .-1980.- V.102, No.2.- P.202-211.
38. P. Livieri , F. Segala. An approximation in closed form for the integral of Oore–Burns for cracks similar to a star domain. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. June 2017, 41(1), p 3-19
39. Glinka, G., and Shen, G., 1991. Universal features of weight functions for cracks in mode I. *Engineering Fracture Mechanics.*, 40, pp. 1135-1146
40. Orynyak I.V., Borodii M.V., Torop V.M. Approximate construction of a weight function for quarter-elliptical, semi-elliptical and elliptical cracks subjected to normal stresses // *Eng. Frac. Mech.*, 1994, vol. 49, No.1, P.143-151.
41. Orynyak I. V., Borodii M. V. Point weight function method application for semi-elliptical mode I cracks// *Int. J. of Fracture*,1995, V 70, P.117-124.
42. Lee, Y.-D., McClung, R. C., and Chell, G. G., 2008. An efficient stress intensity factor solution scheme for corner cracks at holes under bivariant stressing. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 31, pp. 1004-1016.
43. McClung R, Lee Y, Sobotka JC, et al. Some Recent Advances in Engineering Fracture Modeling for Turbomachinery. ASME. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 7A: Structures and Dynamics ():V07AT31A002. doi:10.1115/GT2018-75400.
44. Pengcheng Fu, Scott M. Johnson, Randolph R. Settgast, Charles R. Carrigan. Generalized displacement correlation method for estimating stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*. Volume 88, 2012, Pages 90-107.

45. W.X. Zhu, D.J. Smith On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stresses and stress intensity factors. *Engng Fract Mech*, 51 (3) (1995), pp. 391-400.
46. I. Lim, I.W. Johnston, S.K. Choi. Comparison between various displacement-based stress intensity factor computation techniques. *Int J Fract*, 58 (3) (1992), pp. 193-210
47. S.K. Chan, I.S. Tuba, W.K. Wilson. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. Volume 2, Issue 1, 1970, Pages 1-17.
48. Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J Appl Mech* 1968;35:379–86.
49. deLorenzi, H.G. On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations *Int J Fract* (1982) 19: 183-193.
50. Атлурн С. Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
51. Wade A. Meith, Michael R. Hill. Domain-independent values of the J-integral for cracks in three-dimensional residual stress bearing bodies. *Engineering Fracture Mechanics*. Volume 69, Issue 12, 2002, Pages 1301-1314.
52. Qinghua Han, Yaru Wang, Yue Yin, Danni Wang. Determination of stress intensity factor for mode I fatigue crack based on finite element analysis. *Engineering Fracture Mechanics*. Volume 138, 2015, Pages 118-126.
53. Courtin S, Gardin C, Bezine G, Ben Hadj Hamouda H. Advantage of the J-integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABAQUS. *Engng Fract Mech* 2005;72(14):2174–85.

54. PRESSURIZED THERMAL SHOCK IN NUCLEAR POWER PLANTS: GOOD PRACTICES FOR ASSESSMENT IAEA, VIENNA, 2010 IAEA-TECDOC-1627
55. Brocks, W., Cornec, A. and Scheider, I. (2003) Computational aspects of nonlinear fracture mechanics, In Comprehensive Structural Integrity – Numerical and Computational Methods (eds I. Milne, R.O. Ritchie and B. Karihaloo), vol. 3, Elsevier, pp. 127–209.
56. Orynyak I., Oryniak A. Computational Aspect of Nonlinear Fracture Mechanics Application //ASME 2015 Pressure Vessels and Piping Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 2015. – PVP2015-45838, doi: 10.1115/PVP2015-45838
57. Y. Lei. J-integral evaluation for cases involving non-proportional stressing. Engineering Fracture Mechanics. Volume 72, Issue 4, 2005, Pages 577-596.
58. Yuebao Lei. Validation of contour integral functions (J and C(t)) in ABAQUS v6.11-v6.14 for combined mechanical and residual stresses. Procedia Structural Integrity. Volume 2, 2016, Pages 2566-2574.
59. NEA/CSNI/R(2017)11. Benchmark Results on the Analytical Evaluation of the Fracture Mechanic Parameters K and J. Organisation for Economic Co-operation and Development. NUCLEAR ENERGY AGENCY. 14-Nov-2017, 93 p.
60. Qian G, González-Albuixech VF, Niffenegger M. Fracture Mechanics Analyses of Embedded Cracks Under PTS and Effects of Residual Stresses. ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 6A: Materials and Fabrication():V06AT06A050. doi:10.1115/PVP2017-66202
61. Marie S. Analytical expression of the thermal stresses in a vessel or pipe with cladding submitted to any thermal transient. Int J Pressure Vessels Pip 2004;81:303–12.

62. S. Marie, M. Nédélec. A new plastic correction for the stress intensity factor of an under-clad defect in a PWR vessel subjected to a pressurised thermal shock. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Volume 84, Issue 3, 2007, Pages 159-170.
63. Lu K, Katsuyama J, Li Y. Plasticity Correction on the Stress Intensity Factor Evaluation for Underclad Cracks Under Pressurized Thermal Shock Events. ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 1B: Codes and Standards:V01BT01A004. doi:10.1115/PVP2016-63486.
64. Zeman J.L. On the problem of angular misalignment at longitudinal weld joint of cylindrical shells // *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 1994, V. 58, p. 179 – 184.
65. Ong L.S. Allowable Shape Deviation in a Pressurized Cylinder // *Jornal of Pressure Vessel Techolody*, 1994, V. 116, p. 274 – 277.
66. Böck N., Zeman J.L. On bending stress at longitudinal weld joint of cylindrical shells due to peaking // *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 1994, V. 60, p. 103 – 106.
67. Asnawi Lubis, James T. Boyle. The pressure reduction effect in smooth piping elbows—revisited. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. Volume 81, Issue 2, 2004, Pages 119-125.
68. Orynyak I.V., Lokhman I.V., Bohdan A.V. The Improved Measurements and Stress Analysis of Cylinder/Pipe with Out-Of-Roundness./ *Proceedings of the ASME 2012 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2012 July 15-19, 2012, Toronto, Ontario, CANADA*, PVP2012- 78544.
69. Scarth D.A, Xu S.X. Closed-Form Calculation of Stress Intensity Factor for an Axial ID Surface Flaw in Cylinder Subjected to Weld Residual Stresses. ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 1A: Codes and Standards ():V01AT01A004. doi:10.1115/PVP2013-97522.

70. Erdogan F., Ratwani M., 1972, "Fracture of Cylindrical and Spherical Shells containing a Crack," Nuclear Engineering and Design. Vol. 20, pp. 265 – 286.
71. Erdogan F., Kibler J.J., 1969, "Cylindrical and Spherical Shells with Cracks," International Journal of Fracture., Vol. 5, pp. 229 – 237.
72. Delele F., Erdogan F., 1979, "Transverse shear effect in a circumferentially cracked cylindrical shell," Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 239 – 258.
73. Folias E.S., 1969, "On the Effect of Initial Curvature on Cracked Flat Sheets,". International Journal of Fracture., Vol. 5, pp. 327 – 346.
74. Sanders J.L., 1982, "Circumferential through-wall cracks in cylindrical shells under tension," Journal of Applied Mechanics Vol. 49, pp. 103–107.
75. Sanders J.L., 1983, "Circumferential through-wall cracks in a cylindrical shell under combined bending and tension," Journal of Applied Mechanics Vol. 50, pp. 221.
76. Paris, P.C., Tada, H., 1983, "The Application of Fracture Proof Design Methodology using Tearing Instability Theory to Nuclear Piping Postulating Circumferential throughwall Crack," NUREG/CR-3464, Nuclear Regulatory Commission.
77. Wuthrich C., 1983, "Crack Opening Areas in Pressure Vessels and Pipes," Engineering Fracture Mechanics. Vol. 18, pp. 1049 – 1057.
78. Anderson, T.L., "Stress Intensity and Crack Opening Area Solutions for Through-wall Cracks in Cylinders, and Spheres," Structural Reliability Technology final report to The Materials Property Council, Inc., January 29, 2003.
79. Rudland, D., Wang, Y., and Wilkowski, G.; "Comparison of Crack-Opening Displacement Predictions for LBB Applications"; International Journal of Pressure Vessels and Piping; Vol 79; 2002: pp. 209-217.

80. Orynyak I.V, Yakovleva E.S, Kozlov V.Ya. The Combined Weight Function Method Application for the Estimation of the Crack Opening Area for Through Crack in the Shells. ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 3: Design and Analysis ():367-375.
doi:10.1115/PVP2012-78202.
81. Rudland D., Harrington C., Dingreville R. Development of the Extremely Low Probability of Rupture (xLPR) Version 2.0 Code. ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 6B: Materials and Fabrication: V06BT06A050. doi:10.1115/PVP2015-45134.
82. Shim D, Wallace J, Kalyanam S, Benson M. Validation of Stress Intensity Factor Solutions in xLPR Version 2.0 Code. ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 1A: Codes and Standards (): V01AT01A023. doi:10.1115/PVP2015-45575.
83. Huh, N.-S., Shim, D.-J., Choi, S., Park, K.-B., “Stress Intensity Factors and Crack Opening Displacements for Slanted Axial Through-Wall Cracks in Pressurized Pipes,” *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 31(6), pp.428-440, 2008.
84. Shim, D.-J., Rudland, D., Park, J.-S., “Surface to through-wall crack transition model for axial cracks in pipes” ASME 2014 Pressure Vessels & Piping Conference. PVP2014. July 20-24, 2014, Anaheim, California, USA
85. Brogan, F. A., Rankin, C. C., and Cabiness, H. D., “STAGS User Manual,” Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Report LMSC P032594, 1994.
86. Richard D. Young, Cheryl A. Rose, and James H. Starnes, Jr. Nonlinear Local Bending Response And Bulging Factors For Longitudinal And Circumferential Cracks In Pressurized Cylindrical Shells. NASA Langley Research Center Hampton, Virginia 23681-001, Jan 01, 2000

87. James Starnes, Jr., and Cheryl Rose. "Nonlinear response of thin cylindrical shells with longitudinal cracks and subjected to internal pressure and axial compression loads", 38th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, <https://doi.org/10.2514/6.1997-1144> .
88. Budiman, H. T., Lagace, P. A., "Nondimensional Parameters for Geometric Nonlinear Effects in Pressurized Cylinders with Axial Cracks," Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, 1997, pp. 401-407.
89. Brumovsky M. Unified Procedure for Lifetime Assessment of Components and Piping in WWER NPPs (VERLIFE). ASME. ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Aging Management and License Renewal:11-14. doi:10.1115/PVP2004-2962.
90. Леонов М.Я. Некоторые задачи и приложения теории потенциала. Прикладная математика и механика, 1940, Том 5-6, с.73-86.
91. Штаерман И.Я. Об одном обобщение задачи Герца. Прикладная математика и механика. Том 5, №3, 1941, 409 с.
92. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Государственное издательство технико-теоретической литературы// Москва, 1955, 491с.
93. M N. I. Ioakimidis, 'Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity', Acta Mech., 45, 31-47 (1982).
94. Chen Y.Z., Lin X.Y., Peng Z.J. Evaluation of stress intensity factors of elliptical crack by differential-integral equation. Intern J Fracture, V81, 1996, R73-78
95. Chen Y.Z., Lin X.Y., Peng Z.J. Application of differential-integral equation to elliptical crack problem under shear load. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. V27 (1997), p 63-78.

96. Mayrhofer K., Fischer F. D. Singular integral equation Solution for the linear elastic crack opening displacement of an Arbitrarily shaped plane crack: Part I Finite-part integral solutions. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* Vol. 20, No. 11, pp. 1451-1495, 1997
97. Qin, T. Y., and R. J. Tang. "Finite-part integral and boundary element method to solve embedded planar crack problems." *International Journal of Fracture* 60.4 (1993): 373-381.
98. Portela, A., M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. "The dual boundary element method: effective implementation for crack problems." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33.6 (1992): 1269-1287.
99. Mayrhofer, K., and F. D. Fischer. "Derivation of a new analytical solution for a general two-dimensional finite-part integral applicable in fracture mechanics." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33.5 (1992): 1027-1047.
100. Chen, Y. Z., and Kang Yong Lee. "Numerical solution of three-dimensional crack problem by using hypersingular integral equation." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190. 31 (2001): 4019-4026.p
101. Kaya A. C., Erdogan F., 'On the solution of integral equations with a generalized Cauchy kernel. *Quart. Appl. Math.*, 45, 455-469 (1987).
102. Chan, Youn-Sha, Fannjiang Albert C., Paulino Glaucio H. "Integral equations with hypersingular kernels—theory and applications to fracture mechanics." *International Journal of Engineering Science* 41.7 (2003): 683-720.
103. Krasowsky, A. Ja, Orynyak I. V., and Gienko A. Yu. "Approximate closed form weight function for an elliptical crack in an infinite body." *International Journal of Fracture* 99.1-2 (1999): 117-130.
104. Hellen T. K., On the method of virtual crack extensions. // *Int. J. Numer. Meth. Engng* 9, 1975, Pages 187-207.

105. Яковлєва О., Ориняк А., Ориняк І. Застосування внутрішніх і зовнішніх функції Вільямса для плоскої задачі теорії пружності з тріщиною моди І //Mechanics and Advanced Technologies. Т 3, № 2 (2018), С 31-41
106. Orynyak I.V. Engineering Methods For Stress Intensity Factor Calculation And Their Practical Application// in Multilevel approach to Fracture of Materials, Components and Structures: Proceedings 17th. European Conference on Fracture, (Ed. Ja. Pokluda and P. Lukas), Brno, Czech, 2-5 September 2008, pp. 1911-1923
107. Cheng W, Finnie I. Measurement of residual hoop stresses in cylinders using the compliance method. // J Eng. Mat. Tech., 1986, V108, p. 87-92.
108. Orynyak I.V., Yakovleva Ye.S. Application of the crack compliance method to long axial cracks in pipes with allowance for geometrical nonlinearity and shape imperfections (dents) // Engng. Fract. Mech., 2008, V.75, N14, p.4052-4065
109. H. Tada, P.C. Paris and G.R. Irwin, The Stress Analysis of Cracks Handbook Saint Louis: Paris Productions & (Del Research Corp.), 1985.
110. Rozgonyuk V, Orynyak I, Yakovleva E. Generalization of the Cheng and Finnie method for calculating stress intensity factor for part-through longitudinal cracks in a thick-walled ring. // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2006, № 2, p. 116 – 124
111. ABAQUS version 6.14 User's manual. RI: Hibbitt, Karlsson & Sorencen Inc.2014
112. Orynyak I., Oryniak A. The Investigation of Significance of the Geometrical Nonlinearity for 1-D Crack Stress Intensity Factor Calculation in Slightly Distorted Thin-Walled Pressurized Pipe //ASME 2015 Pressure Vessels and Piping Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 2015. – PVP2015-45276, doi: 10.1115/PVP2015-45276.

113. Oryniak A. and Orynyak I. The Accounting for Geometrical Nonlinearity for Thin-Walled Pressurized Elastic Pipe With Long Axial Surface Crack // J. Pressure Vessel Technol 139(2), 021210 (Jan 11, 2017) (8 pages), PVT-16-1012; doi: 10.1115/1.4033703
114. Kawaguchi S, Hagiwara N, Ohata M, Toyoda M. Modified Equation To Predict Leak/Rupture Criteria For Axially Through-Wall Notched X80 and X100 Linepipes Having a Higher Charpy Energy. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 2005;128(4):572-580
115. FEM Calculations of SIF and COA for Through Axial Cracks in Pipes in Geometrically Nonlinear Formulation. Andrii Oryniak, Igor Orynyak., Proceedings of the ASME 2018 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2018. PVP2018-85033
116. Batura A., Orynyak I., and Oryniak A. "Semianalytical Method for the SIF Calculation for a Crack of Arbitrary Shape in Infinite Body." PVP2014-28383. ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference. American Society of Mechanical Engineers, 2014.
117. Wang, Q., Noda, N.A., et al., 2001. Variation of the stress intensity factor along the front of a 3D rectangular crack by using a singular integral equation method. Int. J. Fract. 108, 119–131.
118. Marie, S., Me'nager, Y. and Chapuliot, S. (2005). "Stress Intensity Factors for Underclad and Through clad Defects in a Reactor Pressure Vessel Submitted to a Pressurised Thermal Shock," International Journal of Pressure Vessels and Piping, 82, 746–760.
119. Orynyak I., Batura A., Oryniak A. Comparison of two numerical procedures for solution of the integro-differential equation of flat crack problem // Engng Fract Mech, Volume 160, 2016, pp 185 – 198.
doi:10.1016/j.engfracmech.2016.04.018

120. Orynyak I, Batura A, Oryniak A, Lokhman I. Oore-Burns Function of Form Application in Numerical Treatment of Mode I Flat Crack Problem in Infinite Body. ASME. Pressure Vessels and Piping Conference, Volume 6A: Materials and Fabrication ():V06AT06A003. doi:10.1115/PVP2016-63304.
121. Semianalytical Solution Method Of Differential-Integral Equation Of Flat Crack Problem. Anatolii Batura, Igor Orynyak, Andrii Orynyak. SMiRT – 22. Division IX.
122. МТ-Д. 0.03.391-09. Методика оценки прочности и ресурса корпусов реакторов ВВЭР в процессе эксплуатации. - Киев: Минтопэнерго Украины, 2009. - 66 с.
123. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. - Москва: Энергоатомиздат, 1989. - 525 с.
124. Unified Procedure for Lifetime Assessment of Components and Piping in WWER NPPs, «VERLIFE» Version 2008 - 275p.
125. NUREG/CR-6854, ORNL/TM-2004/244. Fracture Analysis of Vessels - Oak Ridge FAVOR, v04.1, Computer Code: Theory and Implementation of Algorithms, Methods, and Correlations. 2007.
126. JAPANESE SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, JSME Codes for Nuclear Power Generation Facilities, S NCI-2001, Rules on Design and Construction for Nuclear Power Plant, Tokyo, 2001.
127. KTA 3201.2. Safety Standards of the Nuclear Safety Standards Commission (KTA). Components of the Reactor Coolant Pressure Boundary of Light Water Reactors, Part 2: Design and Analysis. - Salzgitte: KTA-Geschaftsstelle, 1996. - 161 p.

128. Newman J.C., Raju I.S. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 15, Issues 1–2, 1981, Pages 185-192.
129. Smith, C. W., Peters, W. H. and Jolles, M. I., Stress Intensity Factors for Reactor Vessel Nozzle Cracks. *Journal of Pressure Vessel Technology*, Trans. ASME, 100(2) (May, 1978) pp. 141-149.
130. Satya N. Atluri X, K. Kathiresan. Stress intensity factor solutions for arbitrarily shaped surface flaws in reactor pressure vessel nozzle corners. *Int. J. Pres. Ves. & Piping* (1980) 313-322.
131. Akhurst K. N. & G. G. Chell. Methods of Calculating Stress Intensity Factors for Nozzle Corner Cracks. *Int. J. Pres. Ves. & Piping* 14 (1983) 227-257.
132. Cai Shutao & Xu Yigen. Approximate Expressions of Maximum Value of Stress Intensity Factor of Nozzle Corner Cracks. *Int. J. Pres. Ves. & Piping* 35 (1988) 411-422.
133. Chai Guozhong and Hong Qichao. Stress intensity factors of nozzle. *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 38, No. 1, pp. 27-35, 1991
134. RELAP 5. <https://en.wikipedia.org/wiki/RELAP5-3D>
135. Wilson, W.K. and Osias, J.R.: "A comparison of finite element solutions for an elastic-plastic crack problem", *Int. J. Fracture* 14 (1978), R95
136. LARSSON, L.H.: "A calculational round robin in elastic-plastic fracture mechanics". *Int. J. Press. Vess. and Piping* 11 (1983), 207
137. Обґрунтування методик розрахунку для труби з наскрізною поперечною тріщиною при комбінованому навантаженні силою, моментом і тиском. частина: I. Крищук М.Г., Ориняк А.І. *Вісник машинобудування* 64, ст.76. 2012р.
138. Обґрунтування методик розрахунку j-інтегралу для труби з наскрізною поперечною тріщиною при комбінованому навантаженні силою,

моментом і тиском. частина:II. Крищук М.Г., Ориняк А.І. Вісник машинобудування 65, ст.118. 2012р.

139. W. Brocks and I. Schneider. Numerical aspects of the path-dependence of the J-integral in incremental plasticity. Internal report GKSS/WMS/01/08, GKSSForschungszentrum, Geesthacht, 2001
140. Y. Kayser, S. Marie, S. Chapuliot, P. Le Delliou, C. Faigy BENCH-KJ: benchmark on analytical calculation of fracture mechanics parameters KI and J for cracked piping components – final results and conclusions Transactions, SMiRT-23 Manchester, United Kingdom - August 10-14, 2015 Division II, Paper ID 133.
141. Y. Lei, J Calculation for a crack in a welding residual stress field following a FE welding simulation, Paper 213, Proceedings SMiRT 23, 10-14 August 2015, Manchester, United Kingdom, IASMiRT.
142. Y. Lei, J-integral evaluation for cases involving non-proportional stressing, Engineering Fracture Mechanics. 72 (2005), 577–596
143. М.М. Колосков, Е.Т. Долбенко, Ю.В. Каширский. Марочник сталей и сплавов / Под общей ред. А.С. Зубченко – М. : Машиностроение, 2001. – 672 с.
144. Oryniak A., Orynyak I. Swelling of VVER-1000 core baffle: numerical modeling and direct measurement of its geometrical. Proceedings of the ASME 2017 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2017. PVP2017-65769.
145. Orynyak Igor, Oryniak Andrii Numerical calculation and experimental measurements of VVER-1000 core baffle geometrical distortion due to irradiation swelling // 4-th International Conference on NNP Life Management, 23-27 October 2017, Lyon, France.

146. 03.РО.УС.ПМ.243 – 16/Н. Рабочая программа оценки технического состояния и продления срока эксплуатации внутрикорпусных устройств реактора энергоблока № 3 ОП ЗАЭС.
147. ПМ-Т.0.03.333-15. Типовая программа по оценке технического состояния и продления срока эксплуатации внутрикорпусных устройств ВВЭР-1000.
148. Oryniak A., Radchenko S., Orynyak I. The brittle strength assessment of WWER-1000 reactor pressure vessel nozzle with cladding. Proceedings of the ASME 2013 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2013. PVP2013-97561.
149. Проблематика визначення залишкового ресурсу корпусу реактору Запорізької АЕС блок №1. Дубик Я.Р., Ориняк А.І. Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2015 с.31-35.
150. Orynyak I., Dubyk Y., Orynyak A. Fracture analysis for life time extension of reactor pressure vessel // Materials resistant to extreme conditions for future energy systems, European Commission funded International Workshop. — 12 - 14 June, 2017 Kyiv. — 1p.
151. Визначення температурного запасу крихкого руйнування елементів корпуса реактора з дефектом під час аварійного режиму. Крищук М.Г., Ориняк А.І. Вісник машинобудування 75, ст.56-63.

ДОДАТОК А

Акт впровадження

ЗАТВЕРДЖУЮ

Віце-президент з ремонтів та заводського
виробництва ДП НАЕК «Енергоатом»



В.М. Пишний

2019 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційної роботи
Ориняка Андрія Ігоровича
на тему

**«Методи розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень з врахуванням
геометричної нелінійності та складної форми тріщини»**

м. Київ

Даний акт складено про те, що результати дисертаційної роботи Ориняка А.І. використовувалися на ВП «Запорізька АЕС» та ВП «Южно-Українська АЕС» при реалізації заходів щодо продовження ресурсу та строку експлуатації ядерного реактору ВВЕР-1000 енергоблоку №1, №2, №3, ВП «Запорізька АЕС» та №2 ВП «Южно-Українська АЕС».

Розробка заходів проводилась субпідрядними організаціями і зокрема Ориняком А.І. В рамках вказаних робіт ним створено ряд віртуальних геометричних моделей та виконувались розрахунки корпусу реактора ВВЕР-1000, патрубку корпусу а також внутрішньо корпусних приладів на крихку міцність. Ориняк А.І. проводив аналіз міцності вказаних конструкцій з дефектами і ним були запропоновані підходи та методи їхньої оцінки.

Вказані роботи дозволили продовжити ресурс ядерних енергоблоків понад проектний період, Вони сприяли розробці загальної методології оцінки реальних та гіпотетичних тріщин на крихку міцність елементів конструкцій атомних енергоблоків.

радник президента
ДП НАЕК «Енергоатом»

Г.Г. Балакан