УДК 62.50, 65.012.122

**Рекурентний метод найменших квадратів: оцінювання змінних параметрів**

**Recurrent Least Square Method for Estimation of Varying Parameters**

**Рекуррентный метод наименьших квадратов: оценивание меняющихся параметров**

І.Я. Спекторський

I.Ya. Spectorsky

И.Я. Спекторский

**Ключові слова:** рекурентний метод найменших квадратів, РМНК, оцінювання.

**Keywords:** recursive less square method, RLS, estimating.

**Ключевые слова:** рекуррентный метод наименьших квадратов, РМНК, оценивание.

Вступ

Одним з основних об’єктів теорії керування є лінійна дискретна модель

, (1)

де  – параметри об’єкта,  – вихідний сигнал,  – сигнал керування,  - дискретний час (). Про керування об’єктом (1) див., напр., [1-‍3].

У реальних системах параметри об’єкта (1) є невідомі і, більш того, з часом змінюються, тому для керування об’єктом (1) параметри  треба оцінювати у реальному часі. Одним з найпоширеніших методів динамічної оцінки параметрів  є рекурентний метод найменших квадратів (РМНК) з експоненційним «забуванням» застарілих даних (див., напр., [1-3]):

 (2)

для спостережень від  (з рекурентним переходом за процедурою (2) до ‍), де  – вектор вимірюваних даних на кроці ‍,  – вектор оцінок параметрів за спостереженнями від ,  – додатно визначена матриця розмірності  (пов’язана з коваріацією вектора помилок оцінювання з ваговими коефіцієнтами за спостереженнями від ), .– коефіцієнт експоненційного забування (зазвичай обирають в діапазоні 0.9-1.0); за початкові значення, у разі відсутності даних щодо значень параметрів, можна прийняти (‍), .

**Мета даної роботи**: узагальнити рекурентний метод найменших квадратів для параметрів, які змінюються лінійно за часом:

 (),  (), ,

де параметри  (, ) підлягають оцінюванню за рекурентною процедурою. Такий підхід може забезпечити високу точність оцінювання, якщо параметри  змінюються плавно, тобто якщо параметри  (‍, ) залишаються майже незмінними протягом тривалого часу.

1. Нерекурентне оцінювання

Розглянемо лінійний об’єкт

, (3)

де  (),  (), ; початкові значення  вважаються відомими.

Аналогічно класичній процедурі РМНК, уведемо до розгляду вектор вимірюваних даних



та вектор оцінок параметрів

.

Точність оцінювання параметрів за спостереженнями на кроці  визначає «нев’язка» , де . Зокрема, якщо оцінки параметрів у векторі  збігаються з реальними параметрами  (, ), рівняння об’єкта (3) визначає нульову нев’язку: 

*Зауваження* 1. Матрицю  можна зобразити через кронекеровський добуток: .

Нехай за об’єктом (3) спостерігають протягом  кроків, від . Для оцінки параметрів виберемо критерій з експоненційним забуванням:

, (4)

де коефіцієнт експоненційного забування  для систем із змінними параметрами рекомендовано обирати в діапазоні 0.9-1.0 (див. напр., [1-3]). Підставивши вираз для нев’язки  у критерій (4), з умови існування екстремуму  отримаємо рівняння для вектора оптимальних (відносно критерія ) оцінок параметрів:

,

або, враховуючи очевидну рівність ,

,

звідки, після транспонування обох частин, отримуємо рівняння

 (5)

Перепишемо рівняння (5), увівши до розгляду матриці  і

та вектор , отримуємо рівняння

,

звідки, за невиродженої матриці  (для чого необхідна умова ‍), отримуємо явний (нерекурентний) вираз для вектора оцінок параметрів:

.

Увівши до розгляду матрицю  (), перепишемо отриману рівність у вигляді:

. (6)

Нерекурентне оцінювання за співвідношенням (6) хоча й можливе, але потребує значних обчислювальних ресурсів через необхідність обертання матриці , розмірність якої (‍ з кожним кроком збільшується.

1. Рекурентне оцінювання

Аналогічно класичній процедурі РМНК, побудуємо рекурентну процедуру обчислення вектора , основною складовою частиною якої є рекурентне обчислення матриці  (‍):

 (7)

Для ефективного обчислення  за відомою , аналогічно побудові класичної процедури РМНК, застосуємо відому (див., напр. [4]) матричну тотожність Вудбурі або Шермана-Моррісона-Вудбурі, яку для зручності наведемо як допоміжну лему.

**Лема** 1. Нехай ,, ,  – матриці розмірності , , ,  відповідно, матриці ,та  – невироджені. Тоді матриця  невироджена і справджується тотожність

. (8)

**Доведення.** Помножимо  зліва на  (права частина рівності (8)):



Таким чином, матриця  є правою, а отже і двосторонньою оберненою до , що завершує доведення леми. □

*Зауваження* 2. Інший шлях доведення тотожності (8) див., напр., в [4].

Нехай матриця  невироджена (тобто,  існує) та . Тоді, застосовуючи лему 1, із співвідношення (7) отримуємо рекурентну формулу для обчислення :



Тепер можемо вивести рекурентну формулу для вектора оцінки параметрів :



(підкреслимо, що вираз , який міститься у знаменниках дробів, є скаляром).

За аналогією до класичної процедури РМНК, уведемо вектор корекції

,

спрощуючий вигляд рекурентних формул для матриці  і вектора оцінок параметрів :



Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема** **1**. Нехай матриця  невироджена та . Тоді для вектора оцінки параметрів справджуються такі рекурентні співвідношення:

**** (9)

*Зауваження* 3. Аналогічно класичній процедурі РМНК, отриманий результат легко розширити на об’єкт із зсувом

,

розширивши визначення вектора вимірюваних даних



та вектора оцінок параметрів

.

Зазначимо, що через збільшення кількості параметрів, для коректної роботи схеми (9) необхідною є умова .

**Приклад** **1.** Розглянемо об’єкт ,

де параметр  змінюється «пилоподібно» з періодом 200, графік зображено на рис. **1**. Сигнал керування  змінюється імпульсно (меандрами) з періодом 5 та амплітудою 10, графік зображено на рис. **2**.

0

1





100

300

200

0

0.1

0.2

400

0





5

0

-10

10

10

**Рисунок** **1. Пилоподібна зміна параметру Рисунок** **2. Імпульсна зміна керування**

Початковими значеннями об’єкта є , . Коефіцієнт експоненційного забування , початковим вектором оцінок параметрів є нульовий вектор, .

Точність оцінювання параметрів природно відслідковувати величиною



(для класичної схеми (2) , однак схема (9) передбачає подвійну кількість параметрів).

Згідно спостережень до  (у табл. 1 наведено вибіркові значення помилок оцінювання до ), оцінювання параметрів за схемою РМНК (9) відчутно точніша за класичну схему РМНК (2) приблизно від 35-40% до кінця кожної ділянки лінійності (кроки 40-100, 140-200, 240-300 і т. д), дає меншу точність приблизно від початку до 20% кожної ділянки лінійності (кроки 10-20, 104-120, 204-220 і т. д) і приблизно співставна за точністю зі. класичною приблизно від 20% до 35-40% кожної ділянки лінійності (кроки 20-40, 120-140, 220-240 і т. д).

**Таблица** **1.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 8 | 9 | 10 | 11 | … | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | … | 120 | 121 |
| за схемою (9) | 4 10-3 | 8 10-4 | 1 10-3 | 6 10-4 | … | 8 10-8 | 8 10-8 | 2 10-3 | 2 10-2 | 1 10-2 | 5 10-2 | 4 10-2 | 5 10-2 | 4 10-2 | … | 1 10-1 | 2 10-2 |
| за схемою (2) | 3 10-2 | 1 10-2 | 1 10-2 | 4 10-2 | … | 1 10-1 | 1 10-1 | 4 10-2 | 3 10-2 | 2 10-2 | 2 10-2 | 1 10-2 | 2 10-3 | 2 10-3 | … | 5 10-2 | 3 10-2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | … | 140 | 141 | … | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | … | 226 |
| за схемою (9) | 7 10-2 | 4 10-2 | 2 10-2 | 2 10-2 | 2 10-2 | … | 1 10-2 | 6 10-3 | … | 3 10-5 | 2 10-3 | 2 10-2 | 1 10-2 | 6 10-2 | 4 10-2 | … | 2 10-2 |
| за схемою (2) | 9 10-2 | 6 10-2 | 1 10-2 | 1 10-2 | 6 10-2 | … | 4 10-2 | 5 10-2 | … | 4 10-2 | 2 10-2 | 6 10-2 | 4 10-2 | 1 10-2 | 1 10-2 | … | 2 10-2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 227 | 228 | 229 | 230 | … | 235 | … | 300 | 301 | 302 | 303 | 304 | 305 | … | 337 | … | 400 |
| за схемою (9) | 5 10-2 | 3 10-2 | 2 10-2 | 1 10-2 | … | 3 10-2 | … | 2 10-5 | 2 10-3 | 2 10-2 | 1 10-2 | 5 10-2 | 4 10-2 | … | 4 10-2 | … | 7 10-5 |
| за схемою (2) | 5 10-2 | 3 10-2 | 3 10-2 | 2 10-2 | … | 7 10-2 | … | 3 10-2 | 4 10-2 | 9 10-2 | 7 10-2 | 3 10-2 | 3 10-2 | … | 9 10-2 | … | 8 10-2 |

Нагадаємо, що, через умову , рекурентна схема (9)

працює для заданого об’єкта коректно не раніше -го кроку.

Значення , яке є «зваженою» сумою дисперсій помилок оцінювання (для класичної схеми РМНК див., напр. [2]), швидко спадає до значення близько 0.97 на 22-му кроці, після чого поступово зростає до значення близько 1413 для . Значення  під час оцінювання за класичною схемою швидко спадає до значення близько 0.13 на 20-му кроці і далі коливається у межах близько 0.11-0.14.

**Приклад 2.** Розглянемо об’єкт

0





500

0

-0.5

0.5

1000

,

де параметр  змінюється синусоїдально з періодом 1000 та зсувом за фазою на , схематично графік зображено на рис. 1. Сигнал керування  змінюється імпульсно (меандрами) з періодом 5 та амплітудою 10, графік зображено на рис. 2. Початковими значеннями об’єкта є , . Коефіцієнт експоненційного забування , початковим вектором оцінок параметрів є нульовий вектор, .

**Рисунок** **3. Синусоїдальна зміна параметру**

Згідно спостережень до  (див. табл. 1), оцінювання параметрів за схемою РМНК (9) відчутно точніша за класичну схему РМНК (2) на ділянках, де похідна  протягом принаймні 20 попередніх кроків змінювалася повільно. Загалом на інтервалі  оцінювання за схемою РМНК (9) давала більшу похибку у порівнянні з класичною схемою РМНК (2) лише на 20 кроках: 81, 523, 530, 533, 538, 543, 548, 563, 568, 582, 947, 982, 983, 987-992, 1000.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 10 | 11 | 12 | 13 | … | 80 | 81 | 82 | … | 522 | 523 | 524 | … | 581 | 582 | 583 | … |
| за схемою (9) | 6 10-4 | 9 10-4 | 5 10-3 | 4 10-3 | … | 9 10-3 | 2 10-2 | 2 10-2 | … | 8 10-1 | 3 10-1 | 3 10-1 | … | 7 10-2 | 4 10-2 | 8 10-2 | … |
| за схемою (2) | 1 10-3 | 4 10-3 | 1 10-2 | 1 10-2 | … | 3 10-2 | 2 10-2 | 1 10-1 | … | 1 | 3 10-1 | 9 10-1 | … | 2 10-1 | 3 10-2 | 3 10-1 | … |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 800 | … | 850 | … | 900 | … | 945 | 946 | 947 | 948 | 949 | 950 | … | 981 | 982 | … | 1000 |
| за схемою (9) | 1 10-3 | … | 3 10-3 | … | 2 10-2 | … | 4 10-2 | 5 10-3 | 3 10-2 | 3 10-2 | 7 10-3 | 5 10-3 | … | 1 10-2 | 2 10-2 | … | 5 10-2 |
| за схемою (2) | 6 10-2 | … | 5 10-2 | … | 2 10-1 | … | 2 10-1 | 1 10-1 | 3 10-2 | 4 10-2 | 4 10-2 | 5 10-2 | … | 6 10-2 | 1 10-2 | … | 5 10-2 |

Значення  швидко спадає до значення близько 0.95 на 20-му кроці, далі зростає із сплеском до більш ніж 140000 на кроках 450-600, потім, трохи коливаючись, поступово спадає до значення близько 1618 для  (графік схематично зображено на рис. 4). Схожої є поведінка  під час оцінювання за класичною схемою: воно швидко спадає до значення близько 0.15 на 20-му кроці, далі зростає до приблизно 346 на 520-му кроці, далі швидко спадає – менше 1 на 586-му кроці і до приблизно 0.14 на 1000-му кроці (графік схематично зображено на рис. 5).

0

1





500

0

0

1.5 105

1000

0

1





500

0

0

350

1000

**Рисунок** **4. Оцінювання за схемою (9) Рисунок** **5. Оцінювання за схемою (2)**

**Приклад** **3.** Розглянемо об’єкт , де параметр  на кожному кроці змінюється як випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі . Сигнал керування  змінюється імпульсно (меандрами) з періодом 5 та амплітудою 10, графік зображено на рис. 2. Початковими значеннями об’єкта є , . Коефіцієнт експоненційного забування , початковим вектором оцінок параметрів є нульовий вектор, .

Згідно спостережень до  оцінювання параметрів за схемою РМНК (9) дещо гірше, але практично співставне з класичної схемою РМНК (2). Так, на інтервалі  похибка оцінювання  змінюється приблизно від 0.005 до 0.15 при оцінюванні за схемою РМНК (9) .та від 0.005 до 0.07 для оцінювання за класичною схемою РМНК (2).

Значення  швидко спадає до значення близько 1.03 на 14-му кроці, після чого поступово зростає до значення близько 12.3 для . Значення  під час оцінювання за класичною схемою швидко спадає до значення близько 0.16 на 10-му кроці і далі коливається у межах близько 0.11.-0.20.

Висновки

1. Класична схема РМНК узагальнена для лінійних об’єктів, параметри як змінюються лінійно за часом (теорема 1).
2. На ділянках, де параметри змінюються лінійно або близько до лінійного, наведена схема оцінювання суттєво точніша за класичну (приклади 1 та 2).
3. У випадку непередбачуваної зміни параметру (приклад 3) наведена схема оцінювання дещо гірша за класичну.
4. Напрямком подальших досліджень може бути апроксимація функцій зміни параметрів поліномами старших степенів або тригонометричними функціями.

Література

1. Романенко В. Д., Методи автоматизації прогресивних технологій. / Київ: Вища шк., 1995. – 519 с. – ISBN: 5-11-004274-8.

2. Изерман Р., Цифровые системы управления / Москва: Мир, 1984 – 541 с. – 10500 экз.

3. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с. – ISBN: 5-03-000004-06.

4. Higham Nicholas J., Accuracy and stability of numerical algorithms / Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 680 p. – ISBN 0-89871-521-0.