

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ СВЯЗАННЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ**

*Аннотация:* В статье предложен и исследован новый генератор нелинейных колебаний на основе связанных релаксационных генераторов. Построена математическая модель генератора. Исследованы режимы сложно-периодической и хаотической динамики.

*Ключевые слова:* Хаотическая динамика, релаксационный генератор.

### **Введение**

Синтез нелинейных динамических систем, реализующих хаотическую динамику, представляет постоянный интерес. Несмотря на существование множества систем хаотической динамики, создание новых, как правило, даёт новые знания о динамике нелинейных систем в различных областях [1]. В частности, подобные системы являются хорошим инструментом для проверки работоспособности систем параметрической идентификации [2].

Особый интерес представляют системы, допускающую простую схемотехническую реализацию, поскольку они позволяют как без значительных затрат исследовать адекватность соответствующих математических моделей, так и синтезировать критерий идентификации, основываясь на физических принципах [2].

Например, нелинейная динамическая система Чуа [3] содержит всего один нелинейный элемент – “диод Чуа”. Тем не менее, схемотехническая реализация этого элемента требует наличия нескольких операционных усилителей, не считая множества пассивных элементов. Это затрудняет как создание и отладку прибора, так и проверку адекватности математической модели. Поэтому актуальной является задача создания хаотических генераторов, содержащих минимальное количество активных элементов, и позволяющие описать их поведение простыми математическими моделями.

### **Постановка задачи**

В схемотехнике давно известны и широко применяются различные виды релаксационных генераторов (рис. 1). Они отличаются простотой, надёжностью, наличием обычно одного нелинейного элемента, причём этот элемент в самом деле представляет собой один физический элемент (газоразрядная лампа, динистор, реле и д.р.).

Релаксационные генераторы, как правило, проявляют сильную нелинейную динамику, что является положительной стороной при синтезе

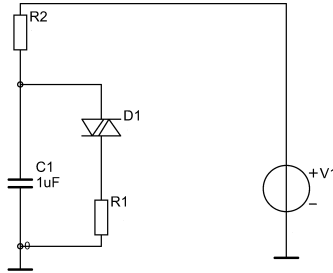


Рис. 1 – Пример схемы релаксационного генератора

генераторов хаоса. С другой стороны, такие генераторы мало чувствительны к малым внешним возмущениям, что не характерно для систем хаотической динамики.

Одним из условий стабильной работы релаксационного генератора является стабильность источника его питания. В данной работе это свойство используется для обеспечения связи между генераторами, и как следствие – создания ситуации, когда малые изменения сигнала приводят с существенным изменениям в дальнейшем, при этом обеспечивая устойчивость по Пуассону.

Схема предлагаемого генератора приведена на рис. 2.

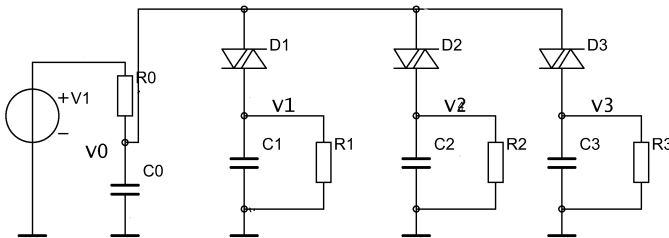


Рис. 2 – Схема предлагаемого генератора хаотических колебаний

В это схеме реальный источник питания, образованный идеальным источником напряжения, резистором  $R_0$  и конденсатором  $C_0$  обеспечивает энергией три релаксационных генератора. Каждый из генераторов, в свою очередь, состоит из нелинейного элемента  $D1-D3$  с S-образной вольт-амперной характеристикой (в данной схеме симметричный динистор), и времязадающих цепочек  $Ri-Ci$ .

Когда напряжение  $V_1$  на конденсаторе  $C_1$  падает настолько, что падение напряжения на  $D1$  превосходит пороговое напряжение открытия  $V_{bo}$ , динистор открывается, и происходит зарядка  $C_1$ . Побочным эффектом является падение напряжения источника питания  $V_0$ , что с одной стороны, изменяет режим зарядки других конденсаторов, а с другой –

может существенно отсрочить переход в режим зарядки другого релаксационного генератора.

Результаты моделирования этой ситуации представлены на рис. 3.

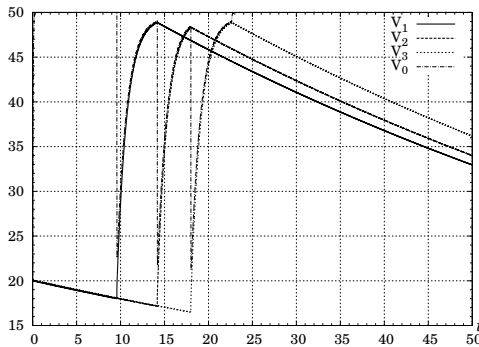


Рис. 3 – Влияние “просадки” питания на переход в режим зарядки

В начале графика напряжения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  практически не различаются. Первый генератор, переходя в режим зарядки, вызывает уменьшение напряжения  $V_0$ , и как следствие – задержку на включение этого режима для генераторов 2 и 3. При этом малые изменения в значениях  $V_1 - V_3$  приводят к серьёзному расхождению фазовых траекторий. Таким образом, наблюдается точка бифуркации.

Другим явлением, препятствующим реализации хаотических режимов, является самосинхронизация генераторов таким образом, что траектории избегают точек бифуркации (см. рис. 4). Одним из способов уменьшить возможность этого сценария является разнесение собственных частот генераторов.

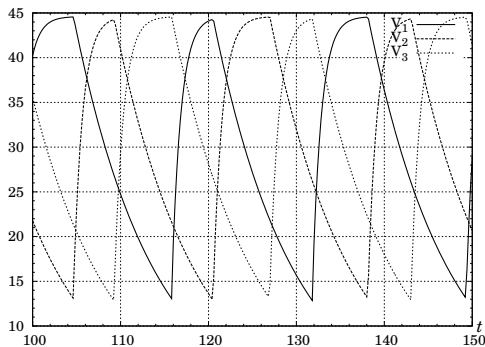


Рис. 4 – Самосинхронизация генераторов

## Математическая модель

Единственным заслуживающего внимания моментом при моделировании предлагаемой схемы является реализация переключения нелинейных элементов D1–D3. Воспользуемся тем фактом, что в закрытом состоянии ток через элемент пренебрежимо мал в сравнении с другими токами в системе, и будем полагать, что через закрытый элемент ток не идёт. Также будем полагать, что участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением на S-образной характеристике преодолевается за пренебрежимо малое время, т.е. переключение происходит мгновенно. Аналогично, будем считать, что сопротивление элемента в открытом состоянии  $R_d$  хоть и нелинейно зависит от напряжения, но эта нелинейность маскируется фильтрующими свойствами самой системы. В дальнейшем будем обозначать через  $On_i = 0..1$  состояние открытости соответствующего элемента.

Напряжение питания обозначим  $U$ , а напряжения на конденсаторах C0–C1 как  $V_0 - V_3$  соответственно. Через  $I_0$  обозначим весь ток, потребляемый от источника питания, и, аналогично  $I_1, I_2, I_3$  – токи, потребляемые каждым из генераторов.

С учётом этих обозначений динамика описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} C_0 \dot{V}_0 &= \frac{1}{R_0}(U - V_0) - I_0 \\ C_i \dot{V}_i &= I_i - \frac{V_i}{R_i} \quad i = 1, 2, 3 \\ I_0 &= I_1 + I_2 + I_3 \\ I_i &= \frac{On_i}{R_d}(V_0 - V_i), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1)$$

Параметры  $C_0$  и  $R_0$  при фиксированном  $U$  определяют не только энергетику системы, то и взаимосвязь генераторов. Следовательно, при моделировании системы значения этих параметров будут определять вид динамики системы.

## Имитационное моделирование

Для моделирования процесса идентификации была собрана соответствующая схема в программе qto2 (рис. 5).

Для моделирования переключения элементов D1–D3 использовались элементы, предназначенные для симуляции триггеров Шмидта, в совокупности с другими линейными элементами.

Для серий значений  $C_0$  и  $R_0$  в результате моделирования были получены фазовые портреты и спектры сигналов системы. При представлении результатов используется величина, обратная сопротивлению:  $G_i = \frac{1}{R_i}$ .

При высоком сопротивлении  $R_1$  взаимосвязь между генераторами очень сильна, а энергетическая “подпитка” слабая, что приводит к очень простым видам фазовых траекторий и достаточно редкому линейчатому спектру (рис. 6).

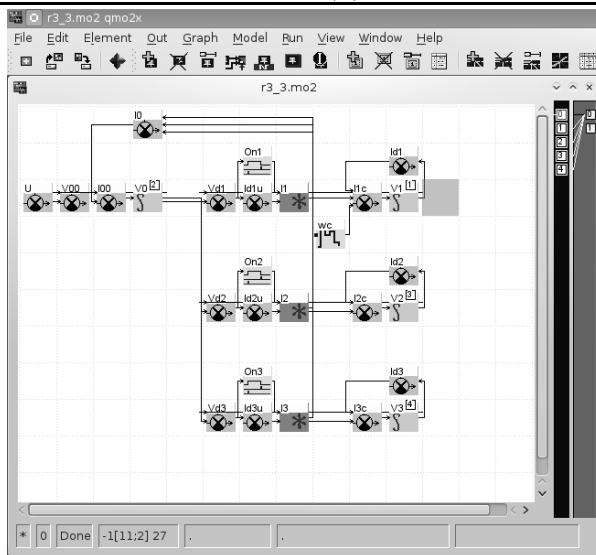


Рис. 5 – Моделируемая система в программе qmox2

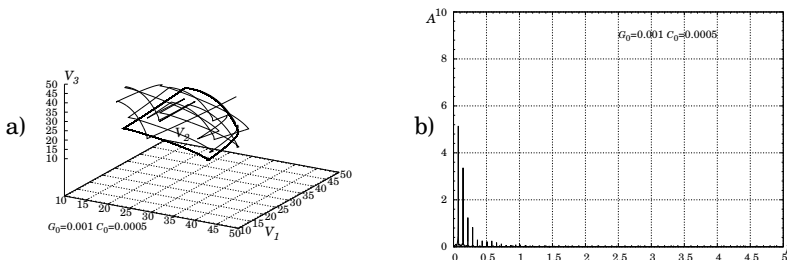


Рис. 6 – Фазовый портрет (а) и спектр (б) системы (1) при  $R_0 = 10^3$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = 9.1 \cdot 10^3$

При промежуточных значениях  $R_0$  динамика системы может быть разная. Это определяется балансом между динамикой отдельных элементов, взаимосвязью между ними по питанию, и соотношением частот.

На рис. 7 представлены результаты моделирования той же системы при меньшем значении  $R_0$ . Спектр системы имеет сплошные участки и фазовый портрет имеет сложную структуру. Тем не менее, в отличие от классических систем динамического хаоса, здесь влияние малых возмущений ограничено малыми отрезками траекторий.

При относительно малых значениях  $R_0$  в этих условиях фазовый портрет усложняется, но спектр перестаёт быть сплошным (рис. 8).

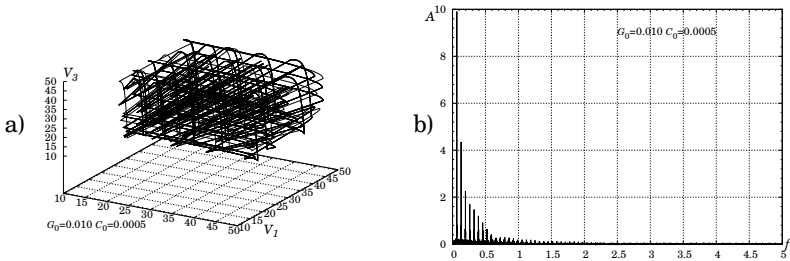


Рис. 7 – Фазовый портрет (a) и спектр (b) системы (1) при  $R_0 = 10^2$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = 9.1 \cdot 10^3$

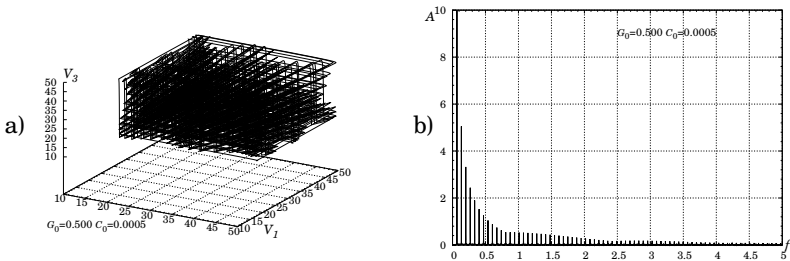


Рис. 8 – Фазовый портрет (a) и спектр (b) системы (1) при  $R_0 = 2$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = 9.1 \cdot 10^3$

При других соотношениях наблюдаются более интересные явления. Например, на рис. 9 представлен режим, соответствующий самосинхронизации генераторов при редких попаданиях фазовой траектории в районы бифуркации. При этом, несмотря на бедность спектра, фазовый портрет имеет полностью заполненные участки, что характерно для странных нехаотических аттракторов.

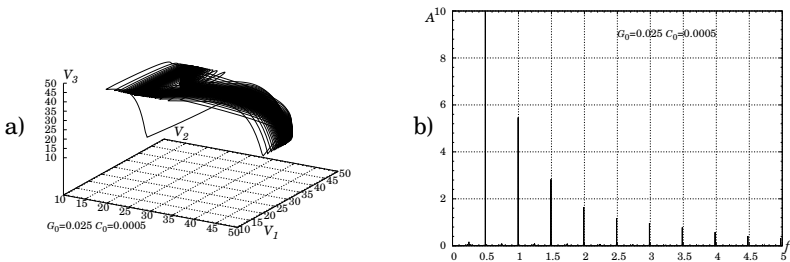


Рис. 9 – Фазовый портрет (a) и спектр (b) системы (1) при  $R_0 = 40$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = 9.1 \cdot 10^2$

На рис. 10 представлены результаты моделирования режима, когда и фазовая картина, и спектр системы имеют вид, характерный для хаотических систем.

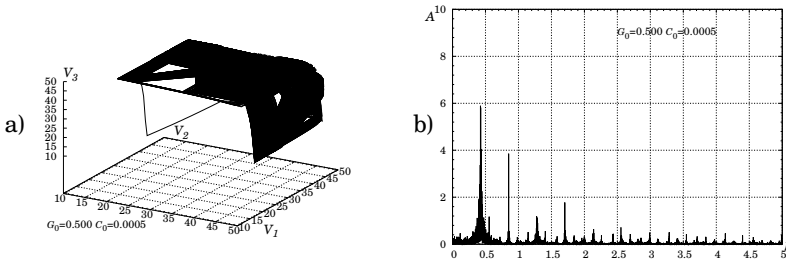


Рис. 10 – Фазовый портрет (а) и спектр (б) системы (1) при  $R_0 = 2$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $R_1 = 9.1 \cdot 10^2$

## Выводы

Результаты моделирования динамики рассматриваемой системы позволяют сделать следующие выводы:

- система релаксационных генераторов, связанных через питание, позволяет получить разные режимы, от периодических до эквивалентным хаотическим;
- для описания динамики системы используется достаточно простая математическая модель;
- система имеет простую схемотехническую реализацию, с реально существующими и широко используемыми нелинейными элементами.

## Литература

1. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И. Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 544 с.
2. Михалёв А.И. Синтез критерия идентификации нелинейных динамических систем на физических принципах / Михалёв А.И., Гуда А.И., Новикова Е.Ю. // Адаптивные системы автоматического управления. – 2007. – № 11(31). – С. 136–142.
3. Бугаевский М.Ю. Исследование поведения цепи Чуа. / Бугаевский М.Ю., Пономаренко В.И. Учебно-методическое пособие, – Саратов: Издательство ГосУНЦ “Колледж”, 1998. – 29 с.

Получено 15.12.2011