

## ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЖОРСТКОСТІ ШЕСТИКООРДИНАТНОГО МЕХАНІЗМУ ПАРАЛЕЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

*На основании анализа кинематики шестикоординатного механизма параллельной структуры со звеньями переменной длины типа „гексапод” теоретически определена и вычислена для конкретных конструктивно-геометрических параметров матрица пространственной жесткости, построены эллипсоиды жесткости, линии равной поступательной и крутильной жесткости.*

*On the ground of kinematical analysis of six-dimensional parallel manipulator “hexapod” with variable length links, the spatial stiffness matrix is theoretically determined and calculated, translational and rotational stiffness ellipsoids and iso-stiffness curves are obtained.*

**Вступ.** Матеріальним втіленням сучасних технологій у верстатобудуванні є обладнання з паралельною кінематикою, яке має більш широкий спектр технологічних можливостей, ніж традиційні верстати, внаслідок використання принципово нового класу просторових механізмів, основною властивістю яких є передача енергетичних потоків та рухів кількома паралельними шляхами. Використання верстатів паралельною кінематикою відкриває нові можливості реалізації складного просторового руху інструмента, застосування прогресивних стратегій обробки та інтенсифікації режимів різання, що дозволяє вирішити більшість задач, які ставляться сучасним багатонаменклатурним серійним виробництвом. Обладнання з паралельною кінематикою, отримавши широке розповсюдження в найбільш передових галузях машинобудування для обробки металів, поступово розповсюджується і на обробку інших матеріалів.

**Постановка задачі.** Характеристики жорсткості значно впливають на точність, вантажну спроможність та динамічні показники обладнання з паралельною кінематикою. Недостатня жорсткість ланок або опор може викликати великі пружні переміщення робочого органа під дією зовнішніх сил та моментів, які згубно впливають як на точність, так і на вантажну спроможність. Крім того, недостатня жорсткість призводить до зменшення власних частот, погіршення динамічних показників, збільшення часу перехідних процесів в кінематичних структурах, зростання динамічних переміщень та вібрацій у перехідних режимах, що може погіршити динамічну якість обладнання з паралельною кінематикою, особливо при високих силах інерції та роботі у області частот, близьких до власних.

Дослідженням жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою, зокрема шестикоординатних верстатів-гексаподів, присвячені кілька праць, у яких розроблені підходи до оцінки компоновок з точки зору жорсткості [1], зроблені спроби моделювання жорсткості методом кінцевих елементів [2] та наведені результати експериментального вимірювання жорсткості [3, 4]. Проте питання теоретичного визначення та аналізу параметрів жорсткості у робочому просторі верстатів-гексаподів залишається недостатньо дослідженим, що визначає мету і задачі роботи.

**Матриця просторової жорсткості.** Розглянемо шестикоординатний просторовий механізм паралельної структури типу «гексапод» на основі платформи Гауфа-Стюарта (рис. 1, а), у якому робочий орган – рухома платформа 1 з'єднується з основою 4 шістьма ланками змінної довжини 3 за допомогою сферичних опор 2 та карданних шарнірів 5.

З основою зв'язана система координат  $Oxyz$ , з робочим органом –  $O_1x_1y_1z_1$ . Для опису орієнтації рухомої платформи використаємо повороти навколо кожної із трьох координатних осей, що

характеризуються кутами Кривола. На відміну від кутів Ейлера, кути Кривола симетричні, і малому відхиленню від початкового положення завжди відповідають малі значення кутів. Нехай система координат  $OXYZ$ , жорстко зв'язана з робочим органом, у початковому положенні співпадає своїми осями з осями нерухомої системи  $Oxyz$  (рис. 1, б). Тоді кути Кривола визначаються наступним чином: кут  $\psi$  – кут між віссю  $Ox$  та лінією  $OK$  перетину координатних площин  $Oxz$  та  $OXY$ ; кут  $\varphi$  – кут між лінією  $OK$  та віссю  $OY$ ; кут  $\theta$  – кут між віссю  $OZ$  та лінією  $OM$  перетину площин  $Oxz$  та  $OZy$ .

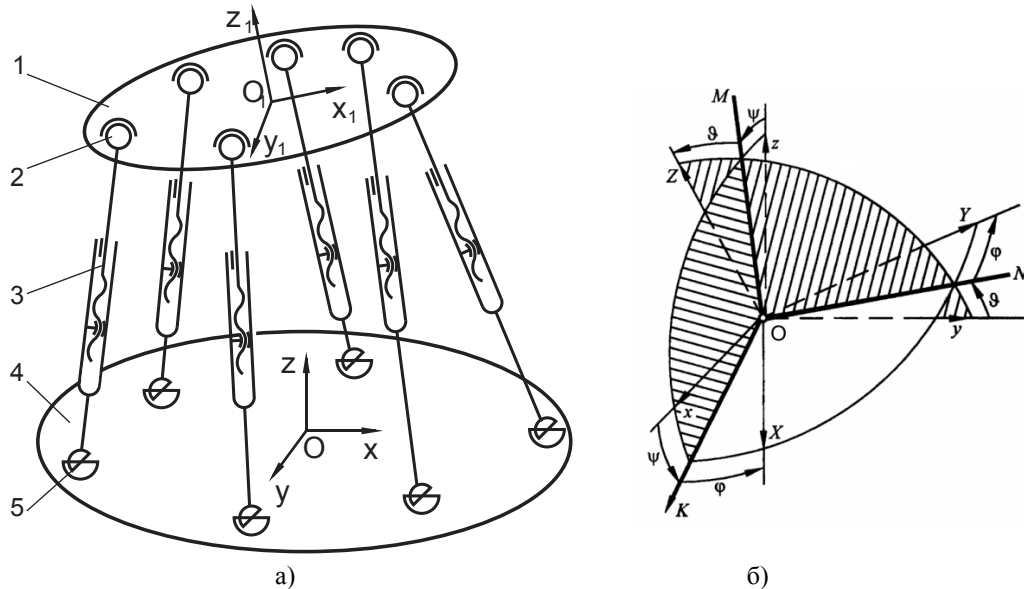


Рис. 1 Шестикоординатний механізм паралельної структури з ланками змінної довжини

Після прикладення зовнішнього навантаження робочий орган внаслідок пружних деформацій ланок переміщується і займає нове положення, з яким зв'язана система координат  $O'_1x'_1y'_1z'_1$ . Якщо у декартовій системі координат визначити вектори  $6 \times 1$  для пружних переміщень  $\Delta S$  та зовнішнього навантаження  $W$

$$\Delta S = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \psi, \Delta \theta, \Delta \varphi)^T, \quad (1)$$

$$W = (P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z)^T, \quad (2)$$

де  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – різниця між координатами та  $\Delta \psi, \Delta \theta, \Delta \varphi$  – різниця між кутами Кривола систем координат  $O'_1x'_1y'_1z'_1$  та  $O_1x_1y_1z_1$  у обраній нерухомій системі координат  $Oxyz$ ;  $P_x, P_y, P_z$  – складові сили, що діють у точці  $A$  у напрямках координатних осей;  $M_x, M_y, M_z$  – складові моменти, що діють у точці  $O_1$  відносно координатних осей, то зв'язок між переміщенням робочого органа під навантаженням та величиною останнього встановлюється співвідношенням

$$W = K \Delta S, \quad (3)$$

де  $K$  – матриця просторової жорсткості розмірністю  $6 \times 6$ , елементи якої  $k_{ij}$  описують жорсткість системи в напрямку  $i$ -ї координати при дії  $j$ -ї компоненти зовнішнього навантаження.

Матрицю просторової жорсткості  $6 \times 6$  можна представити у вигляді чотирьох блоків  $3 \times 3$

$$K = \begin{bmatrix} K_{\Pi} & K_{\Sigma} \\ K_{\Sigma}^T & K_K \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де  $K_{\Pi}$ ,  $K_{\Sigma}$  та  $K_K$  – матриці, визначені набором власних жорсткостей та відповідних ортонормальних векторів.

Матриця  $K_{\Pi}$  симетрична, нормальна і представляє собою матрицю поступальної жорсткості, яка встановлює відношення між чистим лінійним переміщенням та відповідною силою. Матрицю  $K_{\Pi}$  можна представити у вигляді  $K_{\Pi} = R_{\Pi} \Gamma_{\Pi} R_{\Pi}^T$ , де  $R_{\Pi}$  – ортогональна матриця, стовпчики якої відповідають осям поступальної жорсткості,  $\Gamma_{\Pi} = \text{diag}(\gamma_{\Pi}^1, \gamma_{\Pi}^2, \gamma_{\Pi}^3)$  – діагональна матриця відповідних поступальних жорсткостей. Навантаження силою вздовж одної з осей викликає поступальне переміщення лише у напрямку цієї осі.

Матриця  $K_K$ , також симетрична і нормальна, представляє собою матрицю крутильної жорсткості, яка встановлює відношення між чистим поворотом та відповідним моментом. Матрицю  $K_K$  можна представити у вигляді  $K_K = R_K \Gamma_K R_K^T$ , де  $R_K$  – ортогональна матриця, стовпчики якої відповідають осям крутильної жорсткості,  $\Gamma_K = \text{diag}(\gamma_K^1, \gamma_K^2, \gamma_K^3)$  – діагональна матриця відповідних крутильних жорсткостей. Навантаження моментом навколо одної з осей викликає поворот лише навколо цієї осі.

Матриця  $K_C$  – несиметрична в загальному випадку матриця сполучної жорсткості, яка встановлює співвідношення між силою та поворотом, між моментом та поступальним переміщенням. Матрицю  $K_C$  можна представити у вигляді  $K_C = R_C \Gamma_C R_C^T$ , де  $R_C$  – ортогональна матриця, стовпчики якої відповідають сполучним осям жорсткості,  $\Gamma_C = \text{diag}(\gamma_C^1, \gamma_C^2, \gamma_C^3)$  – діагональна матриця відповідних сполучних жорсткостей. Навантаження моментом навколо одної з сполучних осей викликає обертальне переміщення у напрямку цієї осі, а навантаження силою уздовж одної з сполучних осей викликає поворот навколо цієї осі.

Оскільки розмірності елементів матриць  $K_{\Pi}$ ,  $K_C$  та  $K_K$  визначаються відповідно до їх фізичного змісту, матриця жорсткості має неоднорідну розмірність. Якщо виразити силу в [Н] та переміщення в [м], то блоки матриці  $K$  мають наступні розмірності

$$K = \begin{bmatrix} \text{Н} \cdot \text{м}^{-1} & \text{Н} \\ \text{Н} & \text{Н} \cdot \text{м} \end{bmatrix}.$$

**Теоретичне формулювання матриці жорсткості.** Схема шестикоординатного просторового механізму паралельної структури зображена на рис. 2. З основою механізму зв'язана абсолютна система координат з початком координат у точці  $O$ , а з рухомою платформою з'єднана відносна рухома система координат з початком у точці  $O_1$ .

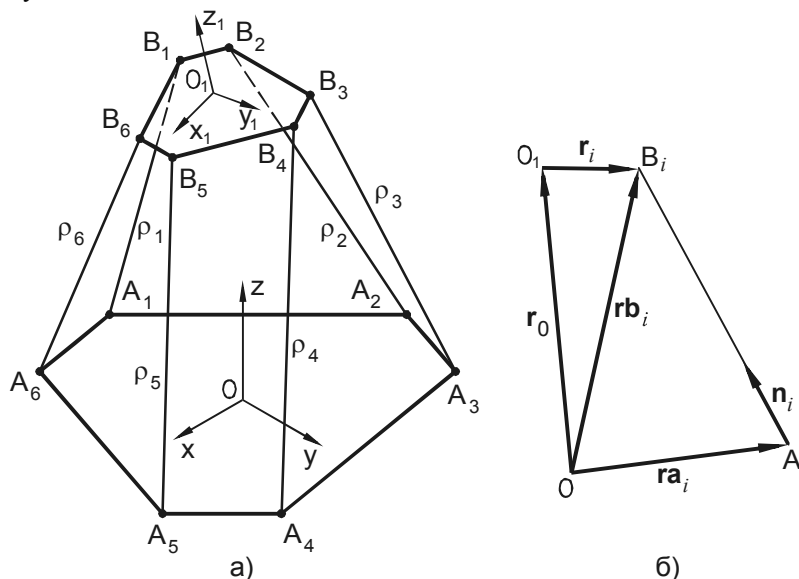


Рис. 2 Розрахункова схема гексапода (а) та визначення довжини штанги (б)

Центри шарнірів основи розміщені в точках  $A_i$ , центри шарнірів рухомої платформи – в точках  $B_i$ . Довжина штанг позначається  $\rho_i$ , одиничний вектор штанг  $\mathbf{n}_i$ . Координати точок  $A_i$  в абсолютній системі координат основи дорівнюють  $(x_{A_i}, y_{A_i}, z_{A_i})$ , координати точок  $B_i$  у відносній системі дорівнюють  $(x_i, y_i, z_i)$ , координати початку координат рухомої системи  $O_1$  в нерухомій –  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Координати шарнірів рухомої платформи  $B_i$  в системі координат основи можна визначити з векторного рівняння

$$\mathbf{r}b_i = R \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_0, \quad (5)$$

де  $\mathbf{r}b_i$  – радіус-вектор центра шарніра рухомої платформи в системі координат основи;  $\mathbf{r}_i$  – радіус-вектор центра шарніра в системі координат рухомої платформи;  $\mathbf{r}_0$  – радіус-вектор початку координат рухомої платформи в системі координат основи,  $R$  – матриця повороту, або матриця напрямних косинусів, що встановлює зв'язок вектора в рухомій системі координат з цим самим вектором в нерухомій системі

$$R = \begin{pmatrix} v1 & v2 & v3 \\ v4 & v5 & v6 \\ v7 & v8 & v9 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матриця повороту є ортонормованою, тобто відповідає наступним умовам: сума квадратів елементів будь якого рядка матриці напрямних косинусів дорівнює одиниці; сума попарних добутків елементів двох рядків матриці напрямних косинусів дорівнює нулю. Будь-який елемент матриці напрямних косинусів дорівнює власному алгебраїчному доповненню. Тільки три з напрямних косинусів можуть бути довільними, решта однозначно визначається ними.

Кутам Кривої відповідає матриця повороту

$$R_K = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta \\ \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \psi \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Довжина штанг дорівнює

$$\rho_i = |\overline{A_i B_i}| = |\mathbf{r}b_i - \mathbf{r}a_i|. \quad (8)$$

Одиничний вектор штанги в абсолютній системі координат з початком координат у точці  $O$  дорівнює

$$\mathbf{n}_i = \frac{\overline{A_i B_i}}{\rho_i}, \quad (9)$$

Для формулювання матриці жорсткості просторового механізму паралельної структури розглянемо основу та рухому платформу як абсолютно жорсткі тіла, а штанги змінної довжини з приводами як такі, що мають кінцеву жорсткість.

Якщо відома зворотна кінематична залежність механізму, можна записати

$$\boldsymbol{\theta} = G \mathbf{S}, \quad (10)$$

де  $\boldsymbol{\theta}$  – вектор розмірності  $6 \times 1$  довжин штанг;  $\mathbf{S} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)^T$  – вектор, що виражає положення та орієнтацію системи координат робочого органа по відношенню до нерухомої системи координат;  $G$  – матриця  $6 \times 6$ , яка описує зворотну кінематику механізму паралельної структури.

Використовуючи розклад (10) у ряд Тейлора та беручи до уваги лише перший член, можна записати

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = J \Delta \mathbf{S}, \quad (11)$$

де  $\Delta \boldsymbol{\theta}$  – вектор прирощення довжин штанг;  $\Delta \mathbf{S}$  – вектор прирощення координат  $x, y, z, \psi, \theta, \varphi$ ;  $J$  – якобіан (матриця Якобі), що може бути записаний у вигляді

$$J = [J_1, J_2, \dots, J_6], \quad (12)$$

$$\text{де } J_1 = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \theta_6}{\partial x} \right)^T; J_2 = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial \theta_6}{\partial y} \right)^T; J_3 = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \theta_6}{\partial z} \right)^T; J_4 = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi}, \dots, \frac{\partial \theta_6}{\partial \psi} \right)^T;$$

$$J_5 = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial \theta_6}{\partial \theta} \right)^T; J_6 = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi}, \dots, \frac{\partial \theta_6}{\partial \varphi} \right)^T.$$

Робота зовнішнього навантаження  $\mathbf{W}$  на переміщенні  $\Delta \mathbf{S}$  під дією цього навантаження складає

$$A = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{S}^T \mathbf{W}, \quad (13)$$

З іншого боку, під дією зовнішнього навантаження у штангах механізму виникають сили  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_6]^T$ , а штанги зазнають деформації  $\Delta \boldsymbol{\theta}$ . Тоді робота сил у штангах складає

$$A = \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{F}. \quad (14)$$

Прирівнюючи (14) та (14), маємо

$$\Delta \mathbf{S}^T \mathbf{W} = \Delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{F}. \quad (15)$$

Тоді з врахуванням (11) силові співвідношення механізму можна характеризувати за допомогою якобіана, тобто

$$\mathbf{W} = J^T \mathbf{F}, \quad (16)$$

Для знаходження якобіана розглянемо рівняння рівноваги системи під дією зовнішніх сил. Векторна сума сил у штангах дорівнює вектору зовнішньої сили

$$\sum_{i=1}^6 F_i \mathbf{n}_i = \mathbf{f}, \quad (17)$$

а векторна сума моментів сил у штангах відносно початку координат основи дорівнює зовнішньому моменту

$$\sum_{i=1}^6 \overline{OB_i} \times F_i \mathbf{n}_i = \boldsymbol{\tau}. \quad (18)$$

Якщо розглянути матрицю  $P$ , складену з векторів плюкєрових координат ліній штанг

$$P = [\mathbf{u}'_1 \dots \mathbf{u}'_6], \quad (19)$$

де  $\mathbf{u}'_i$  – нормалізований вектор  $6 \times 1$  плюкєрових (променевих) координат лінії  $i$  ( $i \in 1 \dots 6$ ), які відповідають  $i$ -м штангам гексапода

$$\mathbf{u}'_i = \left[ \frac{\mathbf{n}_i}{\overline{OB_i} \times \mathbf{n}_i} \right], \quad (20)$$

тоді з рівнянь (17–20) можна помітити, що

$$P \mathbf{F} = \mathbf{W}, \quad (21)$$

а з врахуванням (16)

$$J = P^T. \quad (22)$$

Отже, якобіан дорівнює транспонованій матриці, складеній з плюкєрових координат ліній штанг.

Нехтуючи зміною геометрії, викликаною деформаціями ланок, можна записати

$$\mathbf{F} = K_\theta \Delta \boldsymbol{\theta}, \quad (23)$$

де  $K_\theta$  – діагональна матриця, ненульовими елементами якої є параметри зосередженої жорсткості ланок.

Тоді з (11) та (23) випливає

$$\mathbf{F} = K_\theta J \Delta \mathbf{S}. \quad (24)$$

Перемножуючи обидві сторони рівняння (24) на  $J^T$  та підставляючи у (16), маємо

$$\mathbf{W} = J^T K_\theta J \Delta \mathbf{S}. \quad (25)$$

Отже, з врахуванням (3) матриця просторової жорсткості може бути визначена як поєднання якобіана  $J$  механізму паралельної структури та матриці  $K_\theta$ , яка містить коефіцієнти жорсткості податливих компонентів механізму паралельної структури

$$K = J^T K_\theta J. \quad (26)$$

**Обчислення матриці жорсткості.** Для прикладу обчислено матрицю жорсткості гексапода кінематичної структури  $3 \times 3$  з діаметрами окружностей центрів шарнірів основи 1 м, рухомої платформи 0,35 м. Координати центра рухомої платформи в системі координат основи прийняті рівними  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = 0,75$  м. Кути Кривої орієнтації рухомої платформи  $\psi = 30^\circ$ ;  $\varphi = 0^\circ$ ;  $\theta = 0^\circ$ .

Матриця повороту визначена за формулою (7)

$$R_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,866 \end{pmatrix}.$$

Координати шарнірів рухомої платформи в системі координат основи дорівнюють

$$\begin{pmatrix} x_{b_i} \\ y_{b_i} \\ z_{b_i} \end{pmatrix} = R_K \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Довжини штанг розраховано за формулою

$$\rho_i = \sqrt{(x_{a_i} - x_{b_i})^2 + (y_{a_i} - y_{b_i})^2 + (z_{a_i} - z_{b_i})^2}. \quad (28)$$

Вектор довжин штанг має вигляд

$$\rho^T = (0,913 \quad 0,903 \quad 0,798 \quad 0,798 \quad 0,903 \quad 0,913).$$

Нормалізовані вектори плюкерових координат штанг визначені за формулою

$$\mathbf{u}'_i = \frac{1}{\rho_i} (x_{n_i} \quad y_{n_i} \quad z_{n_i} \quad x_{m_i} \quad y_{m_i} \quad z_{m_i})^T, \quad (29)$$

$$\text{де } \begin{pmatrix} x_{n_i} \\ y_{n_i} \\ z_{n_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{b_i} \\ y_{b_i} \\ z_{b_i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{a_i} \\ y_{a_i} \\ z_{a_i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_{m_i} \\ y_{m_i} \\ z_{m_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n_i} \\ y_{n_i} \\ z_{n_i} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{b_i} \\ y_{b_i} \\ z_{b_i} \end{pmatrix}; \quad \rho_i = \left| \begin{pmatrix} x_{n_i} \\ y_{n_i} \\ z_{n_i} \end{pmatrix} \right|.$$

За формулою (22) розраховано якобіан

$$J = \begin{pmatrix} 0,166 & -0,465 & 0,870 & -0,476 & 0 & 0,091 \\ -0,312 & 0,361 & 0,879 & 0,243 & 0,422 & -0,087 \\ -0,543 & 0,123 & 0,831 & 0,26 & 0,451 & 0,103 \\ 0,543 & 0,123 & 0,831 & 0,26 & -0,451 & -0,103 \\ 0,312 & 0,361 & 0,879 & 0,243 & -0,422 & 0,087 \\ -0,166 & -0,465 & 0,870 & -0,476 & 0 & -0,091 \end{pmatrix}.$$

Прийнявши коефіцієнти жорсткості штанг механізму паралельної структури рівними  $10^8$  Н/м, визначено матрицю просторової жорсткості за формулою (26)

$$K = \begin{pmatrix} 83,9 & 0 & 0 & 0 & -75,25 & -2,78 \\ 0 & 72,29 & 3,08 & 68,28 & 0 & 0 \\ 0 & 3,08 & 443,81 & 3,17 & 0 & 0 \\ 0 & 68,28 & 3,17 & 70,81 & 0 & 0 \\ -75,25 & 0 & 0 & 0 & 76,21 & 2 \\ -2,78 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5,29 \end{pmatrix} \cdot 10^6.$$

Розрахункова матриця просторової жорсткості симетрична. Перевірка по можливості розкладу Холецкого вказує, що матриця позитивно визначена. Перші три елементи головної діагоналі матриці відповідають поступальній жорсткості у напрямках координатних осей X, Y, Z, а останні – крутильний

жорсткості відносно цих осей. Координатна жорсткість максимальна у напрямку осі Z, менша у напрямку осі X, мінімальна у напрямку осі Y. Крутильна жорсткість максимальна відносно осей X та Y, та досить мала відносно осі Z.

Детермінант (визначник) матриці жорсткості

$$|K| = 7,659 \cdot 10^{44}.$$

Слід матриці жорсткості

$$Tr(K) = 7,523 \cdot 10^8.$$

Власні значення та власні вектори матриці жорсткості

$$\text{eigenvals}(K) = \begin{pmatrix} 155,48 \\ 5,49 \\ 4,43 \\ 443,88 \\ 139,77 \\ 3,26 \end{pmatrix} \cdot 10^6, \quad \text{eigenvecs}(K) = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,34 & -0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & -0,71 & -0,70 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & -0,70 & 0,71 \\ -0,69 & 0,39 & -0,61 & 0 & 0 & 0 \\ -0,02 & -0,86 & -0,51 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки жодне з власних значень не дорівнює нулю, матриця жорсткості у даному положенні не вироджена, її ранг дорівнює 6.

Матриці поступальної, крутильної та сполучної жорсткості

$$K_{\Pi} = \begin{pmatrix} 83,9 & 0 & 0 \\ 0 & 72,29 & 3,08 \\ 0 & 3,08 & 443,81 \end{pmatrix}, \quad K_{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & -75,25 & -2,78 \\ 68,28 & 0 & 0 \\ 3,17 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{\kappa} = \begin{pmatrix} 70,81 & 0 & 0 \\ 0 & 76,21 & 2 \\ 0 & 2 & 5,29 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриць поступальної та крутильної жорсткості

$$\text{eigenvals}(K_{\Pi}) = \begin{pmatrix} 443,84 \\ 72,26 \\ 83,90 \end{pmatrix} \cdot 10^6, \quad \text{eigenvals}(K_{\kappa}) = \begin{pmatrix} 70,81 \\ 76,27 \\ 5,23 \end{pmatrix} \cdot 10^6.$$

Власні вектори матриць поступальної та крутильної жорсткості

$$\text{eigenvecs}(K_{\Pi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,008 & 1 & 0 \\ 1 & -0,008 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{eigenvecs}(K_{\kappa}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0,028 \\ 0 & -0,028 & 1 \end{pmatrix}.$$

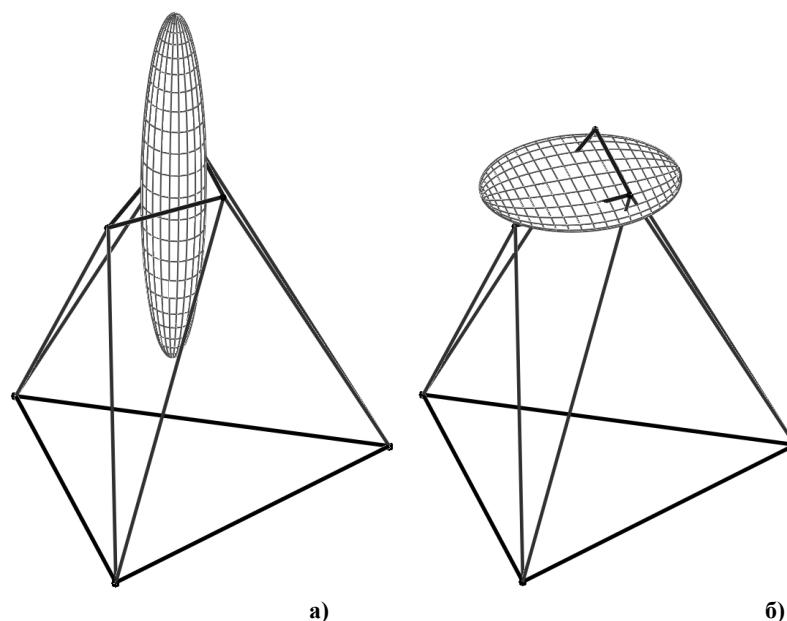


Рис. 3 Еліпсоїди поступальної (а) та крутильної (б) жорсткості

Власні значення матриць поступальної та крутильної жорсткості представляють собою напівосі відповідних еліпсоїдів жорсткості, а власні вектори задають їх напрямки у просторі. За одержаними даними будуємо еліпсоїди поступальної (рис. 3, а) та крутильної жорсткості (рис. 3, б), розташовуючи їх центри у полюсі рухомої платформи.

Еліпсоїд поступальної жорсткості видовжений у вертикальному напрямку, максимальна жорсткість спостерігається у напрямку осі Z. Еліпсоїд крутильної жорсткості – навпаки, стиснутий у вертикальному напрямку, і крутильна жорсткість відносно осі Z мінімальна.

За результатами обчислення матриці жорсткості у робочому просторі шляхом зміни координат полюсу рухомої платформи в межах від  $-0,5$  м до  $0,5$  м по осям X та Y та від  $0,25$  м до  $1,25$  м по осі Z побудовано графіки залежності поступальної та крутильної жорсткості від координат полюсу рухомої платформи (рис. 4) та лінії рівної поступальної та крутильної жорсткості у напрямках координатних осей на рівні  $z = 0,75$  м (рис. 5).

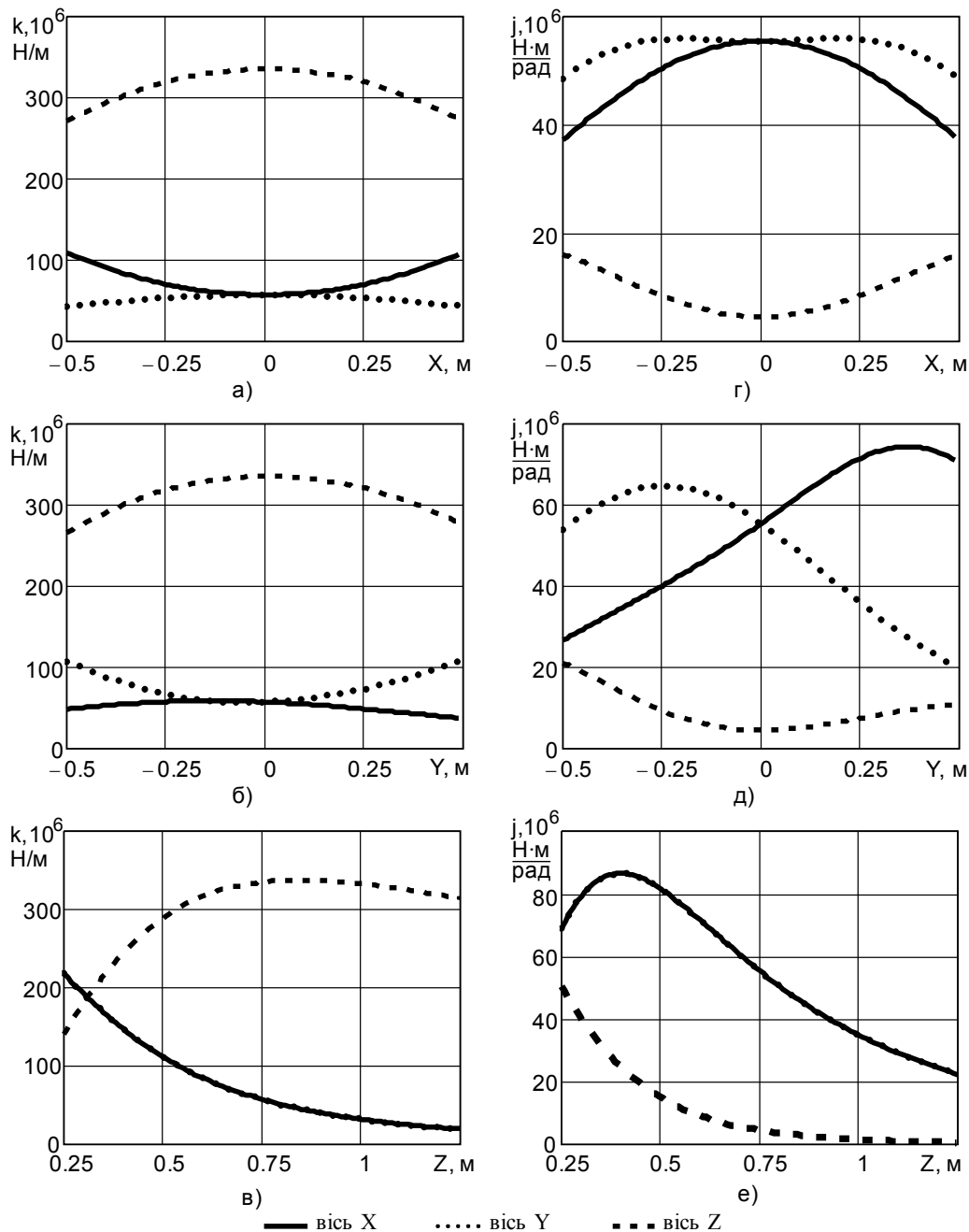


Рис. 4 Залежність поступальної  $k$  (а-в) та крутильної  $j$  (г-е) жорсткості від координат полюсу рухомої платформи



Аналіз розподілу жорсткості у робочій зоні показує, що жорсткість у напрямках осей  $X$  та  $Y$  не перевищує жорсткості штанги змінної довжини, а жорсткість у напрямку осі  $Z$  перевищує її у 4-5 разів. Максимальна поступальна жорсткість у напрямку осі  $Z$  та мінімальна крутильна жорсткість навколо осі  $Z$  спостерігається у центрі робочої зони, жорсткість у напрямку осі  $X$  збільшується при віддаленні від площини  $YOz$ , а у напрямку осі  $Y$  – при віддаленні від площини  $XOz$ . Максимальна крутильна жорсткість відносно осі  $X$  спостерігається при розміщенні полюсу рухомої платформи над центром шарніру основи, розміщеного у площині  $YOz$ , а максимальна крутильна жорсткість відносно осі  $Y$  – при розміщенні центру рухомої платформи між двома протилежними шарнірами основи.

#### Висновки і напрямки подальших досліджень.

1. Визначено зворотні кінематичні залежності шестикоординатного механізму паралельної структури зі штангами змінної довжини та якобіан у вигляді матриці, складеної з векторів плюкерових координат ліній штанг.

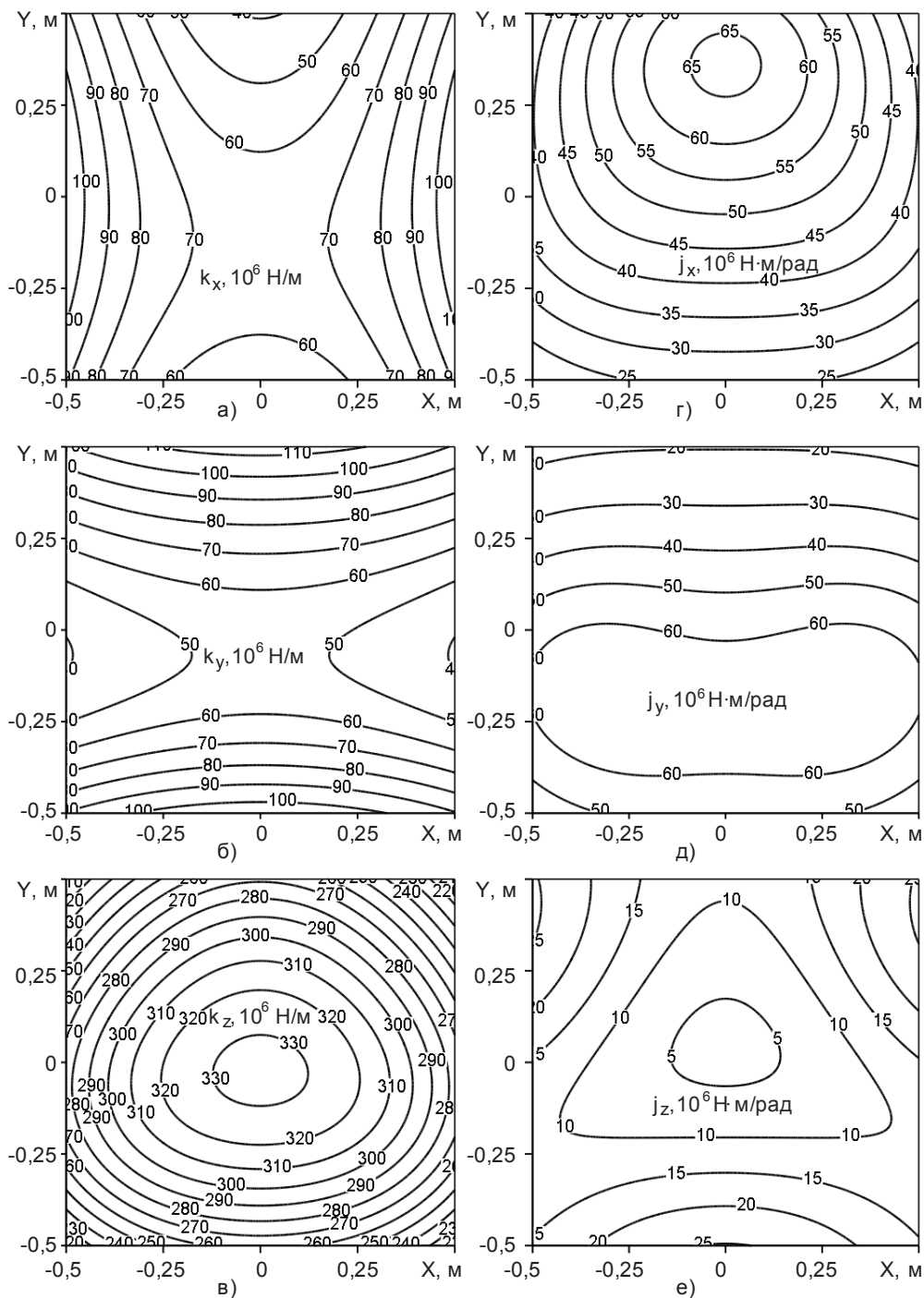


Рис. 5 Ізолії поступальної (а-в) та крутильної (г-е) жорсткості

2. Теоретично визначено матрицю просторової жорсткості шестикоординатного механізму паралельної структури, як поєднання якобіана механізму паралельної структури і матриці коефіцієнтів жорсткості ланок механізму.

3. Жорсткість у напрямках осей  $X$  та  $Y$  не перевищує жорсткості штанги змінної довжини, а жорсткість у напрямку осі  $Z$  більше у 4-5 разів. Встановлено розподіл жорсткості у робочому просторі верстата та орієнтацію осей поступальної і крутильної жорсткості, побудовано еліпсоїди жорсткості та лінії рівної жорсткості.

4. У подальшому необхідно дослідити вплив кутового положення рухомої платформи на поступальну та крутильну жорсткість у робочому просторі.

### Список літератури

1. Иванов А.В. Обеспечение качественных показателей компоновки станка-манипулятора с параллельной кинематикой. Автореф... дис. к.т.н. – Комсомольск-на-Амуре, 2006. – 21 с.
2. Кириченко А.М. Моделювання жорсткості верстата-гексапода // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету / техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація / – вип. 20. – Кіровоград: КНТУ, 2008. – С. 122-126.
3. Вайнштейн И.В., Серков Н.А., Сироткин Р.О. Экспериментальное исследование статической жесткости пятикоординатного фрезерного станка с параллельной кинематикой // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – №5. – С. 102-109.
4. Валявський А.І. Кириченко А.М. Експериментальне вимірювання пружних переміщень верстата-гексапода // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету / Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин / – вип. 38. – Кіровоград: КНТУ, 2008. – С. 119-124.