МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА:
РОЗРАХУНКОВІ РОБОТИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальностями 124 «Системний аналіз»,
122 «Комп'ютерні науки»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Дискретна математика: Розрахункові роботи [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей 124 «Системний аналіз», 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І. Я. Спекторський, О. В. Стусь, В. М. Статкевич. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 84 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 19.10.2017 р.) за поданням Вченої ради ІПСА (протокол № 8 від 25.09.2017 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА:
РОЗРАХУНКОВІ РОБОТИ

Укладачі: *Спекторський Ігор Якович,* канд. фіз.-мат. наук, доц.
Стусь Олександр Вікторович, канд. фіз.-мат. наук.
Статкевич Віталій Михайлович, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний редактор *Богданський Ю. В.,* д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент: *Ільєнко А. Б.,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Посібник містить задачі для розрахункових робіт по основних розділах дисципліни «Дискретна математика» – теорія множин, теорія відношень, комбінаторика елементи теорії груп та кілець, решітки та булеві алгебри, автоматичне доведення теорем. Кожен розділ містить методичні вказівки із прикладами розв'язання.

Для студентів математичних і технічних спеціальностей університетів

Зміст

Вступ

Дисципліна «Дискретна математика» є однією з основних фундаментальних дисциплін у загальнонауковій підготовці студентів за математичними і технічними спеціальностями, зокрема – за спеціальностями 124 Системний аналіз і 122 Комп'ютерні науки.

Значну частину дискретної математики як учбової дисципліни становлять типові задачі, для розв'язання яких існують стандартні методи. Даний посібник має допомогти студентам у засвоєнні основних понять курсу та опануванні основних методів розв'язання типових задач.

Посібник містить задачі по розділах «Теорія множин», «Теорія відношень», «Комбінаторика», «Теорія груп та кілець», «Частково впорядковані множини та решітки», «Булеві алгебри», «Автоматичне доведення теорем». Для кожної типової задачі посібник пропонує по 30 варіантів завдань. Кожний розділ містить методичні вказівки із прикладами розв'язання. Поряд із засвоєнням стандартних методів розв'язання задачі, студенти стимулюються до пошуку нестандартних шляхів, що в багатьох випадках суттєво полегшує розв'язання.

Даний посібник можна використовувати на математичних і технічних факультетах та інститутах у вищих навчальних закладах та може бути корисним для інженерів та наукових працівників, які зацікавлені в опануванні методів розв'язання типових задач дискретної математики.

1. Алгебра множин

1.1. Аксіоматичне доведення тотожностей

Довести тотожність аксіоматично. Операції «$\setminus$» та «$\vartriangle$» розкрити за формулами $A \setminus B = A \cap B^c$ та $A \vartriangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

1. $A \setminus (A \setminus (A \vartriangle (A \vartriangle B))) = A \cap B$;
2. $A \cap (A \setminus (A \vartriangle (A \vartriangle B))) = A \setminus B$;
3. $B \cup ((B \vartriangle (B \vartriangle A)) \setminus B) = A \cup B$;
4. $A \cup ((B \vartriangle (B \vartriangle A)) \setminus B) = A$;
5. $A \cap ((B \vartriangle (B \vartriangle A)) \setminus B) = A \setminus B$;
6. $A \cup (A \setminus (B \vartriangle (B \vartriangle A))) = A$;
7. $B \cup (A \setminus (B \vartriangle (B \cup A))) = B$;
8. $B \setminus (A \setminus (B \vartriangle (B \vartriangle A))) = B$;
9. $(B \setminus (A \vartriangle (B \vartriangle A))) \setminus B = \varnothing$;
10. $(A \setminus (A \vartriangle (B \vartriangle A))) \setminus B = A \setminus B$;
11. $(A \cup (A \vartriangle (B \vartriangle A))) \setminus B = A \setminus B$;
12. $(B \setminus A) \cup (B \vartriangle (B \vartriangle A)) = A \cup B$;
13. $(B \setminus A) \cup (A \vartriangle (B \vartriangle A)) = B$;
14. $(A \setminus B) \cup (A \vartriangle (B \vartriangle A)) = A \cup B$;
15. $(A \setminus B) \cup (B \vartriangle (B \vartriangle A)) = A$;
16. $((A \setminus B) \cup A) \vartriangle (B \vartriangle A) = B$;
17. $((A \setminus B) \cup A)^c \vartriangle (B \vartriangle A) = B^c$;
18. $(A \setminus B) \cap (B^c \vartriangle (B \vartriangle A)) = \varnothing$;
19. $(A \setminus B) \cap (A^c \vartriangle (B \vartriangle A)) = (A \setminus B)$;

20. $(B \setminus A) \cup (A \vartriangle (B \vartriangle A))^c = (A \cap B)^c$;

21. $A \cup (B \setminus A) = (A \vartriangle B) \cup (A \cap B)$;

22. $A \cup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B)$;

23. $B \setminus (B \setminus (B \vartriangle (A \vartriangle B))) = A \cap B$;

24. $B \setminus (B \setminus (A \vartriangle (A \vartriangle B))) = B$;

25. $A \cap (B \setminus A) = (A \vartriangle B) \cap (A \cap B)$;

26. $A \vartriangle (B \setminus A) = (A \vartriangle B) \cup (A \cap B)$;

27. $A \cup (B \vartriangle A) = (A \vartriangle B) \cup (A \cap B)$;

28. $A \vartriangle B = (A \vartriangle B) \setminus (A \cap B)$;

29. $(A \vartriangle B) \vartriangle B = (A \cap B) \cup A$;

30. $(A \vartriangle B) \vartriangle B^c = (A^c \cap B) \cup A^c$.

Методичні вказівки

Нагадаємо, що аксіоматичне доведення тотожностей в алгебрі множин передбачає застосування чотирьох пар основних законів (комутативність, дистрибутивність, нейтральність та доповненість) без урахування змісту операцій над множинами:

1. Комутативність (переставний закон): $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. Дистрибутивність (розподільний закон):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. Нейтральність: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$.
4. Доповненість: $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \varnothing$.

При аксіоматичному доведенні можна застосовувати й інші закони, які були виведені з основних законів:

5. Універсальні межі: $A \cup U = U$,
$A \cap \varnothing = \varnothing$.

6. Абсорбція (поглинання): $A \cup (A \cap B) = A$,
$A \cap (A \cup B) = A$.

7. Ідемпотентність: $A \cup A = A$,
$A \cap A = A$.

8. Асоціативність (сполучний закон): $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

9. Єдиність доповнення: $\begin{cases} A \cup X = U, \\ A \cap X = \varnothing \end{cases} \Rightarrow (X = A^c)$.

10. Інволютивність: $(A^c)^c = A$.

11. Закон (правило) де Моргана: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

12. Закони склеювання: $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$;
$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

13. Закони Порецького: $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$;
$A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

При аксіоматичному доведенні тотожностей намагаються, як правило, звести більш складну частину рівності до більш простої. Якщо обидві частини рівності достатньо складні, слід перетворити обидві частини, зводячи їх до спільного більш простого вигляду.

Приклад 1.1. Довести аксіоматично тотожність

$$(A \setminus B) \cup (A \vartriangle (A \vartriangle B)^c) = B^c.$$

Праву частину рівності неможливо спростити. Спростимо ліву частину, зводячи її до вигляду B^c. Перетворення будемо робити поступово, спрощуючи підформули, які входять у ліву частину (над знаками рівності вказано номери законів, які застосовувалися на даному переході):

1. $(A \vartriangle B)^c = ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c \overset{11,10}{=} (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$;

2. $$A \vartriangle ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)) =$$
$$= (A \cap ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A))^c) \cup (A^c \cap ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A))) \overset{11,8,10}{=}$$
$$\overset{11,8,10}{=} (A \cap ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))) \cup ((A^c \cap (A^c \cup B)) \cap (B^c \cup A)) \overset{2,6}{=}$$
$$\overset{2,6}{=} ((A \cap (A \cap B^c)) \cup (A \cap (B \cap A^c))) \cup (A^c \cap (B^c \cup A)) \overset{8,7,1,2}{=}$$

$$\stackrel{8,7,1,2}{=} ((A \cap B^c)) \cup (B \cap (A \cap A^c)) \cup ((A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap A)) \stackrel{4}{=}$$
$$(A \cap B^c) \cup (B \cap \varnothing) \cup ((A^c \cap B^c) \cup \varnothing) \stackrel{5,3}{=}$$
$$\stackrel{5,3}{=} (A \cap B^c) \cup \varnothing \cup (A^c \cap B^c) \stackrel{3}{=} (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) \stackrel{2}{=}$$
$$\stackrel{2}{=} B^c \cap (A \cup A^c) \stackrel{4}{=} B^c \cap U \stackrel{3}{=} B^c;$$

3. $(A \setminus B) \cup B^c = (A \cap B^c) \cup B^c \stackrel{1,6}{=} B^c$.

Тотожність доведено.

1.2. Модельне доведення тотожностей

Довести тотожність модельним шляхом.

1. $((A \cup B) \times C) \setminus (A \times (C \cup D)) = (B \times C) \setminus (A \times (C \cup D))$;
2. $(A \times (C \cup D)) \setminus ((A \cup B) \times C) = (A \times D) \setminus ((A \cup B) \times C)$;
3. $(((A \cup B^c) \cap B) \times (C \setminus D)) \cap (A \times (C \cup D)) = ((A \cap B) \times (C \setminus D))$;
4. $((A \cap (A^c \cup B)) \times (C \vartriangle D)) \cup (A \times (C \cup D)) = (A \times (C \cup D))$;
5. $((A \setminus B) \times ((C \cup D^c) \cap D)) \cap ((A \cup B) \times C) = ((A \setminus B) \times (C \cap D))$;
6. $((A \setminus B) \times ((C \cup D^c) \cap D)) \cup ((A \cup B) \times C) = ((A \cup B) \times C)$;
7. $(A \vartriangle B) \times C = (A \times C) \vartriangle (B \times C)$;
8. $((A \setminus D) \times C) \setminus (A \times (B \setminus C)) = ((A \cup D) \setminus D) \times C$;
9. $((A \cup D) \times C) \setminus (A \times (B \setminus C)) = ((A \setminus D) \cup D) \times C$;
10. $((A \cup D) \times C) \vartriangle (A \times (B \setminus C)) = (A \times ((B \cup C) \setminus C)) \cup (((A \setminus D) \cup D) \times C)$;
11. $((A \vartriangle B) \times C) \setminus (B \times (D \setminus C)) = (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \times C)$;
12. $((A \cup D) \times (C \vartriangle B)) \setminus (A \times (B \cap C)) = ((A \setminus D) \cup D) \times (C \vartriangle B)$;
13. $((A \cup D) \times (C \cap B)) \setminus (A \times (B \vartriangle C)) = ((A \setminus D) \cup D) \times (C \cap B)$;
14. $((A \setminus D) \times (C \vartriangle B)) \setminus (A \times (B \cap C)) = ((A \cup D) \setminus D) \times (C \vartriangle B)$;
15. $((A \setminus D) \times (C \cap B)) \setminus (A \times (B \vartriangle C)) = ((A \cup D) \setminus D) \times (C \cap B)$;

16. $((A \setminus D) \times (C \cap B)) \cup (A \times ((B \cup C) \setminus (B \vartriangle C))) = A \times (C \cap B)$;
17. $((A \setminus D) \times (C \vartriangle B)) \cup (A \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) = A \times (C \vartriangle B)$;
18. $((A \setminus D) \times (C \cap B)) \cup (D \times ((B \cup C) \setminus (B \vartriangle C))) = (A \cup D) \times (C \cap B)$;
19. $((A \setminus D) \times (C \vartriangle B)) \cup (D \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) = (A \cup D) \times (C \vartriangle B)$;
20. $((A \cap D) \times (C \cap B)) \cup (A \times ((B \cup C) \setminus (B \vartriangle C))) = A \times (C \cap B)$;
21. $((A \cap D) \times (C \vartriangle B)) \cup (A \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) = A \times (C \vartriangle B)$;
22. $((A \setminus D) \times (C \cap B)) \cup ((D \setminus A) \times ((B \cup C) \setminus (B \vartriangle C))) = (A \vartriangle D) \times (C \cap B)$;
23. $((D \setminus A) \times (B \vartriangle C)) \cup ((A \setminus D) \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) = (A \vartriangle D) \times (C \vartriangle B)$;
24. $((A \setminus D) \times (C \cap B)) \cap (A \times ((B \cup C) \setminus (B \vartriangle C))) = (A \setminus D) \times (C \cap B)$;
25. $(A \times (C \vartriangle B)) \cap ((A \setminus D) \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) = (A \setminus D) \times (C \vartriangle B)$;
26. $((A \setminus D) \times ((C \cap B) \cup C)) \cup ((D \setminus A) \times ((C \cup B) \cap C)) = (A \vartriangle D) \times C$;
27. $((D \setminus A) \times ((C \cup B) \cap C)) \cup ((A \setminus D) \times ((C \cap B) \cup C)) = (A \vartriangle D) \times C$;
28. $(A \setminus D) \times ((C \setminus B) \cup B) \cap (A \times (C \cup (B \setminus C))) = (A \setminus D) \times (C \cup B)$;
29. $(A \times (C \cup (B \setminus C))) \cap ((A \setminus D) \times ((C \setminus B) \cup B)) = (A \setminus D) \times (C \cup B)$;
30. $(A \times (C \cup (B \setminus C))) \cup ((A \setminus D) \times ((C \setminus B) \cup B)) = A \times (C \cup B)$.

Методичні вказівки

Модельний спосіб доведення тотожностей базується на визначенні рівності множин та визначенні підмножини:

$$\begin{gathered}(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x \in A) \to (x \in B)) \wedge ((x \in B) \to (x \in A)).\end{gathered}$$

Нагадаємо, що декартовим добутком двох множин A та B називають множину $A \times B$, що складається з упорядкованих пар виду (x, y), де $x \in A$, $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A, y \in B\}.$$

При модельному доведенні тотожностей з декартовим добутком слід враховувати, що типовим елементом декартового добутку $A \times B$ є пара елементів (x, y):

$$(x, y) \in (A \times B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)).$$

Приклад 1.2. Довести тотожність

$$((A \cup B) \times (C \vartriangle D)) \setminus (A \times (C \cup D)) = (B \setminus A) \times ((C \cup D) \setminus (C \cap D)).$$

1. Розпишемо належність пари (x, y) лівій частині тотожності:

$$\begin{gathered}
(x, y) \in ((A \cup B) \times (C \vartriangle D)) \setminus (A \times (C \cup D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x, y) \in (A \cup B) \times (C \vartriangle D)) \wedge ((x, y) \notin A \times (C \cup D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x \in (A \cup B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D))) \wedge ((x \notin A) \vee (y \notin (C \cup D))) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D)) \wedge \\
\wedge ((x \notin A) \vee ((y \notin C) \wedge (y \notin D))) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D))) \vee \\
\vee ((y \notin C) \wedge (y \notin D) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D))) \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2,
\end{gathered}$$

де

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}_1 = (x \notin A) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D)); \\
\mathcal{E}_2 = (y \notin C) \wedge (y \notin D) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D)).
\end{gathered}$$

Спрощуючи вирази $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ окремо, отримуємо:

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}_1 \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \in A)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B)) \wedge (y \in (C \vartriangle D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (0 \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))) \wedge (y \in (C \vartriangle D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x \in B \setminus A) \wedge (y \in (C \vartriangle D)); \\
\mathcal{E}_2 \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \notin C) \wedge (y \notin D) \wedge \\
\wedge (((y \in C) \wedge (y \notin D)) \vee ((y \notin C) \wedge (y \in D))) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (((y \notin C) \wedge (y \notin D) \wedge (y \in C) \wedge (y \notin D)) \vee \\
\vee ((y \notin C) \wedge (y \notin D) \wedge (y \notin C) \wedge (y \in D))) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (0 \vee 0) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge 0 \Leftrightarrow 0.
\end{gathered}$$

Остаточно для лівої частини отримуємо:

$$\begin{gathered}
(x, y) \in ((A \cup B) \times (C \vartriangle D)) \setminus (A \times (C \cup D)) \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x \in B \setminus A) \wedge (y \in (C \vartriangle D)) \vee 0 \Leftrightarrow (x \in B \setminus A) \wedge (y \in (C \vartriangle D)).
\end{gathered}$$

2. Розпишемо належність пари (x, y) правій частині тотожності:

$$(x, y) \in (B \setminus A) \times ((C \cup D) \setminus (C \cap D)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in B \setminus A) \wedge (y \in ((C \cup D) \setminus (C \cap D))).$$

Отже, тепер для доведення вихідної тотожності достатньо показати, що

$$C \vartriangle D = (C \cup D) \setminus (C \cap D).$$

Використовуючи модельний спосіб доведення, отримуємо:

$$(y \in C \vartriangle D) \Leftrightarrow (y \in (C \cap D^c) \cup (D \cap C^c)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((y \in C) \wedge (y \notin D)) \vee ((y \notin C) \wedge (y \in D)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((y \in C) \vee (y \notin C)) \wedge ((y \in C) \vee (y \in D)) \wedge ((y \notin D) \vee$$
$$\vee (y \notin C)) \wedge ((y \notin D) \vee (y \in D)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \wedge ((y \in C) \vee (y \in D)) \wedge ((y \notin D) \vee (y \notin C)) \wedge 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((y \in C) \vee (y \in D)) \wedge ((y \notin D) \vee (y \notin C)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y \in (D \cup C)) \wedge \neg((y \in D) \wedge (y \in C)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y \in (C \cup D)) \wedge \neg(y \in (C \cap D)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y \in (C \cup D) \setminus (C \cap D)).$$

1.3. Розв'язання системи рівнянь

Розв'язати систему рівнянь відносно змінної X.

1. $\begin{cases} (A \setminus X) \cup C = B \cap C; \\ X \setminus A = B^c. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (A \setminus X) \cup (B \setminus C) = B; \\ (X \setminus A) = B^c \cup C. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (A \setminus X) \cup (C \cap B) = B; \\ X \setminus A = B. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (A \setminus X) \cup (A \cap B) = C; \\ X \setminus A = B. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (A \setminus X) \cap B = C \cup B; \\ (X \setminus A) \cup B = C. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (A \setminus X) \setminus B = C \cup B; \\ (X \setminus A) \setminus C = B. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (A \setminus X) \cap B = C \cap B; \\ (X \setminus A) \cup C = B. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (A \setminus X) \cap C = C \setminus B; \\ (X \setminus A) \setminus C = B. \end{cases}$

9. $\begin{cases}(A \setminus X) \vartriangle B = C;\\(X \setminus A) \cup C = B.\end{cases}$

10. $\begin{cases}(A \setminus X) \vartriangle B^c = C \cup A;\\(X \setminus A) \cap B = C.\end{cases}$

11. $\begin{cases}(A \cup X) \cup C = B \cap C;\\X \setminus A = B^c.\end{cases}$

12. $\begin{cases}(A \cup X) \cup (B \setminus C) = B;\\(X \setminus A) = B^c \cup C.\end{cases}$

13. $\begin{cases}(A \cup X) \cup (C \cap B) = B;\\X \setminus A = B.\end{cases}$

14. $\begin{cases}(A \cup X) \cup (A \cap B) = C;\\X \setminus A = B.\end{cases}$

15. $\begin{cases}(A \cup X) \cap B = C \cup B;\\(X \setminus A) \cup B = C.\end{cases}$

16. $\begin{cases}(A \cup X) \setminus B = C \cup B;\\(X \setminus A) \setminus C = B.\end{cases}$

17. $\begin{cases}(A \cup X) \cap B = C \cap B;\\(X \setminus A) \cup C = B.\end{cases}$

18. $\begin{cases}(A \cup X) \cap C = C \setminus B;\\(X \setminus A) \setminus C = B.\end{cases}$

19. $\begin{cases}(A \cup X) \vartriangle B = C;\\(X \setminus A) \cup C = B.\end{cases}$

20. $\begin{cases}(A \cup X) \vartriangle B^c = C \cup A;\\(X \setminus A) \cap B = C.\end{cases}$

21. $\begin{cases}(A \cup X) \cup C = B \cap C;\\X \cap A = B^c.\end{cases}$

22. $\begin{cases}(A \cup X) \cup (B \setminus C) = B;\\(X \cap A) = B^c \cup C.\end{cases}$

23. $\begin{cases}(A \cup X) \cup (C \cap B) = B;\\X \cap A = B.\end{cases}$

24. $\begin{cases}(A \cup X) \cup (A \cap B) = C;\\X \cap A = B.\end{cases}$

25. $\begin{cases}(A \cup X) \cap B = C \cup B;\\(X \cap A) \cup B = C.\end{cases}$

26. $\begin{cases}(A \cup X) \setminus B = C \cup B;\\(X \cap A) \setminus C = B.\end{cases}$

27. $\begin{cases}(A \cup X) \cap B = C \cap B;\\(X \cap A) \cup C = B.\end{cases}$

28. $\begin{cases}(A \cup X) \cap C = C \setminus B;\\(X \cap A) \setminus C = B.\end{cases}$

29. $\begin{cases}(A \cup X) \vartriangle B = C;\\(X \cap A) \cup C = B.\end{cases}$

30. $\begin{cases}(A \cup X) \vartriangle B^c = C \cup A;\\(X \cap A) \cap B = C.\end{cases}$

Методичні вказівки

Для розв'язання системи рівнянь з одним невідомим в алгебрі множин слід розв'язати кожне рівняння системи окремо.

Розглянемо загальний метод розв'язання рівняння вигляду

$$\mathcal{A}_1(X) = \mathcal{A}_2(X), \tag{1}$$

де $\mathcal{A}_1(X)$, $\mathcal{A}_2(X)$ – довільні формули алгебри множин, які можуть містити довільну скінченну кількість пропозиційних літер. Пропозиційна літера X вважається невідомим (тобто рівняння відносно X), всі інші пропозиційні літери вважаються фіксованими параметрами.

Загальний метод розв'язання рівняння типу (1) поділимо на чотири основні етапи.

1. Використовуючи еквівалентність $(A = B) \Leftrightarrow (A \vartriangle B = \varnothing)$, зводимо рівняння (1) до рівняння з порожньою множиною у правій частині:

$$(\mathcal{A}_1(X) = \mathcal{A}_2(X)) \Leftrightarrow (\mathcal{A}(X) = \varnothing), \quad \text{де } A(X) = \mathcal{A}_1(X) \vartriangle \mathcal{A}_2(X).$$

2. Рівняння $\mathcal{A}(X) = \varnothing$ зобразимо у вигляді

$$(\mathcal{B}_1 \cap X) \cup (\mathcal{B}_2 \cap X^c) \cup \mathcal{B}_3 = \varnothing, \tag{2}$$

де $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ – формули, що не містять входжень літери X. Для цього виконаємо наступні еквівалентні перетворення формули $\mathcal{A}(X)$.

1) Позбавимось операцій «$\setminus$» та «$\vartriangle$», використовуючи тотожності:

$$A \setminus B = A \cap B^c;$$
$$A \vartriangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \text{ або } A \vartriangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c).$$

2) Користуючись (необхідну кількість разів) правилом де Моргана

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

та законом інволютивності $(A^c)^c = A$, внесемо операції доповнення всередину формули $\mathcal{A}(X)$. У формулі $\mathcal{A}(X)$ не повинно залишитись зовнішніх операцій доповнення, тобто доповнення мають застосовуватися лише безпосередньо до пропозиційних літер.

3) Застосовуючи необхідну кількість разів закон дистрибутивності

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

внесемо операції перетину під аргументи об'єднання. У формулі $\mathcal{A}(X)$ не повинно залишитись операцій перетину, які були б зовнішніми до об'єднання, тобто аргументами перетинів мають бути лише пропозиційні літери та їх доповнення. У результаті зроблених перетворень формули $\mathcal{A}(X)$ отримуємо об'єднання перетинів

$$\mathcal{A}(X) = (\cdots \cap \cdots \cap \cdots) \cup \cdots \cup (\cdots \cap \cdots \cap \dots),$$

де аргументами кожного перетину можуть бути лише пропозиційні літери та їх доповнення.

Зазначимо, що кожна дужка, яка є аргументом зовнішнього об'єднання, може містити декілька входжень літери X, як з доповненням, так і без доповнення. Проте дужки із одночасними входженнями X та X^c дорівнюють порожній множині (властивості доповненості та універсальних границь) і можуть бути викреслені із зовнішнього об'єднання (властивість нейтральності).

Крім того, одночасне входження в одну дужку кількох літер X без входжень X^c еквівалентне, за ідемпотентністю, однократному входженню X (аналогічно, декілька входжень в одну дужку X^c без входжень X еквівалентне однократному входженню X^c).

Отже, у результаті зроблених перетворень формули $\mathcal{A}(X)$ отримуємо:

$$\mathcal{A}(X) = \left(\bigcup_{i=1}^{n_1}(\mathcal{B}_{1,i} \cap X)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_2}(\mathcal{B}_{2,i} \cap X^c)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_3}\mathcal{B}_{3,i}\right). \tag{3}$$

4) Застосовуючи до (3) закон дистрибутивності, виносимо за відповідні дужки X та X^c. В результаті отримуємо:

$$\mathcal{A}(X) = (\mathcal{B}_1 \cap X) \cup (\mathcal{B}_2 \cap X^c) \cup \mathcal{B}_3, \text{ де}$$
$$\mathcal{B}_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1}\mathcal{B}_{1,i}, \quad \mathcal{B}_2 = \bigcup_{i=1}^{n_2}\mathcal{B}_{2,i}, \quad \mathcal{B}_3 = \bigcup_{i=1}^{n_3}\mathcal{B}_{3,i}.$$

Отже, отримали зображення вихідного рівняння у вигляді (2).

3. Скориставшись еквівалентністю $(A \cup B = \varnothing) \Leftrightarrow ((A = \varnothing) \wedge (B = \varnothing))$, розкладемо рівняння (2) в еквівалентну систему:

$$(\mathcal{B}_1 \cap X) \cup (\mathcal{B}_2 \cap X^c) \cup \mathcal{B}_3 = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_1 \cap X = \varnothing, \\ \mathcal{B}_2 \cap X^c = \varnothing, \\ \mathcal{B}_3 = \varnothing. \end{cases}$$

4. Скориставшись еквівалентністю $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B^c = \varnothing)$, отримуємо умову на розв'язок отриманої системи:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 \cap X = \varnothing, \\ \mathcal{B}_2 \cap X^c = \varnothing, \\ \mathcal{B}_3 = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subset \mathcal{B}_1^c, \\ \mathcal{B}_2 \subset X, \\ \mathcal{B}_3 = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_2 \subset X \subset \mathcal{B}_1^c, \\ \mathcal{B}_3 = \varnothing. \end{cases}$$

Зазначимо, що рівняння $\mathcal{B}_3 = \varnothing$ є необхідною умовою на параметри вихідного рівняння.

Відповідь. *Якщо параметри рівняння* (1) *задовольняють умову* $\mathcal{B}_3 = \varnothing$, *розв'язками рівняння* (1) *є ті і тільки ті* X, *які задовольняють умову* $\mathcal{B}_2 \subset X \subset \mathcal{B}_1^c$. *Якщо параметри рівняння* (1) *не задовольняють умову* $\mathcal{B}_3 = \varnothing$, *рівняння* (1) *не має розв'язків.*

Зауваження 1. При розв'язанні реальних задач пункт 4 часто опускають, і від рівняння (3) одразу переходять до системи типу (4), але з більшою кількістю більш простих рівнянь:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n_1} (\mathcal{B}_{1,i} \cap X)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_2} (\mathcal{B}_{2,i} \cap X^c)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_3} \mathcal{B}_{3,i}\right) = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_{1,i} \cap X = \varnothing, \ 1 \leqslant i \leqslant n_1, \\ \mathcal{B}_{2,i} \cap X^c = \varnothing, \ 1 \leqslant i \leqslant n_2, \\ \mathcal{B}_{3,i} = \varnothing, \ 1 \leqslant i \leqslant n_3. \end{cases}$$

Для отримання остаточної відповіді в цьому випадку часто користуються еквівалентністю:

$$\begin{cases} A_1 \subset X \subset B_1, \\ A_2 \subset X \subset B_2, \end{cases} \Leftrightarrow (A_1 \cup A_2) \subset X \subset (B_1 \cap B_2). \tag{4}$$

Зауваження 2. При розв'язанні систем рівнянь з одним невідомим розв'язують описаним вище методом кожне рівняння окремо. Отримані розв'язки рівнянь зводять до загальної системи, після чого використовують еквівалентність (4).

Зауваження 3. Рівняння системи містять, як правило, спільні параметри. В цьому випадку пошук розв'язку може різко спроститись, якщо при послідовному розв'язанні рівнянь враховувати умови на параметри, отримані при розв'язанні як поточного рівняння, так і попередніх рівнянь системи.

Приклад 1.3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} C \cup X = A \setminus B, \\ X \setminus A = B \cap C. \end{cases} \tag{5}$$

I. Розв'яжемо перше рівняння системи.

$$C \cup X = A \setminus B \Leftrightarrow (C \cup X) \vartriangle (A \setminus B) = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((C \cup X) \cap (A \cap B^c)^c) \cup ((C \cup X)^c \cap (A \cap B^c)) = \varnothing \Leftrightarrow$$

(за правилом де Моргана вносимо доповнення до пропозиційних літер)

$$\Leftrightarrow ((C \cup X) \cap (A^c \cup B)) \cup ((C^c \cap X^c) \cap (A \cap B^c)) = \varnothing \Leftrightarrow$$

(за дистрибутивністю вносимо перетин під об'єднання)

$$\Leftrightarrow (C \cap A^c) \cup (X \cap A^c) \cup (C \cap B) \cup (X \cap B) \cup (C^c \cap X^c \cap A \cap B^c) = \varnothing \Leftrightarrow$$

(виписуємо і розв'язуємо еквівалентну систему рівнянь)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \cap A^c = \varnothing, \\ X \cap B = \varnothing, \\ X^c \cap C^c \cap A \cap B^c = \varnothing, \\ C \cap A^c = \varnothing, \\ C \cap B = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subset A, \\ X \subset B^c, \\ X \supset (C^c \cap A \cap B^c), \\ C \subset A, \\ C \cap B = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A \cap B^c \cap C^c) \subset X \subset (A \cap B^c), \\ C \subset A, \\ C \cap B = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus (B \cup C)) \subset X \subset (A \setminus B), \\ C \subset A, \\ C \cap B = \varnothing. \end{cases}$$

Отриманий розв'язок першого рівняння не піддається подальшому спрощенню.

II. Розв'яжемо друге рівняння системи, враховуючи умови, отримані при розв'язанні першого рівняння.

$$X \setminus A = B \cap C \Leftrightarrow X \setminus A = \varnothing \Leftrightarrow X \subset A.$$

III. Зводячи розв'язки першого і другого рівнянь до загальної системи, отримуємо:

$$\begin{cases} C \cup X = A \setminus B, \\ X \setminus A = B \cap C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus (B \cup C)) \subset X \subset (A \setminus B), \\ C \subset A, \\ C \cap B = \varnothing, \\ X \subset A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus (B \cup C)) \subset X \subset (A \setminus B) \cap A, \\ C \subset A, \\ C \cap B = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus (B \cup C)) \subset X \subset (A \setminus B), \\ C \subset A, \\ C \cap B = \varnothing. \end{cases}$$

Відповідь. *Якщо $C \subset A$ та $C \cap B = \varnothing$, розв'язками системи (5) є ті і тільки ті X, які задовольняють умову $(A \setminus (B \cup C)) \subset X \subset (A \setminus B)$. Якщо $C \not\subset A$ або $C \cap B \neq \varnothing$, система (5) розв'язків не має.*

Приклад 1.4. Розв'язати систему

$$\begin{cases} A \cap X = X \cup B, \\ X \setminus A = C \setminus X. \end{cases} \tag{6}$$

На прикладі системи (6) покажемо, як можна спростити розв'язок системи в алгебрі множин, якщо враховувати конкретні особливості заданих рівнянь.

I. Проаналізуємо перше рівняння системи (6). Враховуючи очевидний факт

$$(A \cap X) \subset X \subset (X \cup B),$$

отримуємо розв'язок першого рівняння :

$$(A \cap X = X \cup B) \Leftrightarrow (A \cap X = X = X \cup B) \Leftrightarrow (B \subset X \subset A).$$

II. Проаналізуємо друге рівняння системи (6). Легко зрозуміти, що множини $X \setminus A$ та $C \setminus X$ не мають спільних елементів. Дійсно, припустивши, що ці множини містять спільний елемент x, отримуємо протиріччя:

$$\begin{cases} x \in (X \setminus A), \\ x \in (C \setminus X) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in X, \\ x \notin X. \end{cases}$$

Але тоді отримуємо, що множини $X \setminus A$ та $C \setminus X$ є рівними і не містять жодного спільного елемента. Звідси негайно випливає, що

$$X \setminus A = C \setminus X = \varnothing.$$

Отже, можемо виписати розв'язок другого рівняння:

$$(X \setminus A = C \setminus X) \Leftrightarrow \begin{cases} X \setminus A = \varnothing, \\ C \setminus X = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow (C \subset X \subset A)$$

III. Зводячи отримані розв'язки першого і другого рівнянь у спільну систему, отримуємо:

$$\begin{cases} A \cap X = X \cup B, \\ X \setminus A = C \setminus X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \subset X \subset A, \\ C \subset X \subset A \end{cases} \Leftrightarrow (B \cup C) \subset X \subset A.$$

Відповідь. *Розв'язками системи (6) є ті і тільки ті множини X, які задовольняють умову*

$$(B \cup C) \subset X \subset A. \tag{7}$$

Зауважимо, що отримана відповідь не передбачає додаткових умов на параметри A, B та C. Однак, із умови (7) легко побачити, що система (6) має хоча б один розв'язок тоді і тільки тоді, коли $(B \cup C) \subset A$.

2. Теорія відношень

2.1. Дослідження властивостей відношення

Відношення $R \subset \mathbb{R}^2$ дослідити на:

- рефлексивність;
- антирефлексивність;
- симетричність;
- антисиметричність;
- транзитивність.

1. $(xRy) \Leftrightarrow (xy \geqslant 0)$.
2. $(xRy) \Leftrightarrow (y = kx, \quad k \in \mathbb{N})$.
3. $(xRy) \Leftrightarrow (y - x = n, \quad n \in \mathbb{Z})$.
4. $(xRy) \Leftrightarrow (0 < \frac{y}{x} < 1)$.
5. $(xRy) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 \geqslant 1)$.
6. $(xRy) \Leftrightarrow (|x| + |y| \leqslant 1)$.
7. $(xRy) \Leftrightarrow (y - x = n, \quad n \in \mathbb{N})$.
8. $(xRy) \Leftrightarrow (x + y = n, \quad n \in \mathbb{Z})$.
9. $(xRy) \Leftrightarrow (0 < (y - x) < 1)$.
10. $(xRy) \Leftrightarrow ((x \in \mathbb{Z}) \vee (y \in \mathbb{Z}))$.
11. $(xRy) \Leftrightarrow (2n - 1 \leqslant$ $\leqslant |y - x| \leqslant 2n, \quad n \in \mathbb{N})$.
12. $(xRy) \Leftrightarrow (y \geqslant x^2)$.
13. $(xRy) \Leftrightarrow (y^2 = x^2)$.
14. $(xRy) \Leftrightarrow (y^2 \geqslant x^2)$.
15. $(xRy) \Leftrightarrow (xy \leqslant 0)$.
16. $(xRy) \Leftrightarrow (0 < xy < 1)$.
17. $(xRy) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = n^2,$ $n \in \mathbb{N})$.
18. $(xRy) \Leftrightarrow (\max\{|x|, |y|\} \geqslant 1)$.
19. $(xRy) \Leftrightarrow (\min\{|x|, |y|\} \leqslant 1)$.
20. $(xRy) \Leftrightarrow (\max\{|x|, |y|\} \leqslant 1)$.
21. $(xRy) \Leftrightarrow (\min\{|x|, |y|\} \geqslant 1)$.
22. $(xRy) \Leftrightarrow (n \leqslant |y - x| \leqslant n + \frac{1}{2},$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.
23. $(xRy) \Leftrightarrow (n \leqslant (y - x) \leqslant n + \frac{1}{2},$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.
24. $(xRy) \Leftrightarrow ([x] + [y] = 2n,$ $n \in \mathbb{Z})$.
25. $(xRy) \Leftrightarrow ([x] + [y] = 2n + 1,$ $n \in \mathbb{Z})$.

26. $(xRy) \Leftrightarrow (\max\{x, y\} = n, \; n \in \mathbb{Z})$.

27. $(xRy) \Leftrightarrow (\min\{x, y\} = n, \; n \in \mathbb{Z})$.

28. $(xRy) \Leftrightarrow (\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2)$.

29. $(xRy) \Leftrightarrow (\frac{1}{2}|x| < y < 2|x|)$.

30. $(xRy) \Leftrightarrow (|x| \leqslant y \leqslant 2|x|)$.

Методичні вказівки

Нагадаємо, що відношення $R\colon A \to A$ (тобто $R \subset A \times A$) називають:

- *рефлексивним*, якщо $\forall\, x \in A\colon xRx$;
- *антирефлексивним*, якщо $\forall\, x \in A\colon x\not{R}x$;
- *симетричним*, якщо $\forall\, x, y \in A\colon xRy \Rightarrow yRx$;
- *антисиметричним*, якщо $\forall\, x, y \in A\colon (xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y)$;
- *транзитивним*, якщо $\forall\, x, y, z \in A\colon (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Зауваження 4. В означенні симетричності, виходячи із довільності $x, y \in A$, наслідок $\forall\, x, y \in A\colon xRy \Rightarrow yRx$ має місце одночасно із зворотним наслідком $\forall\, x, y \in A : yRx \Rightarrow xRy$, що дозволяє замінити в цьому означенні логічний наслідок на логічну еквівалентність: R симетричне тоді і тільки тоді, коли $\forall\, x, y \in A\colon xRy \Leftrightarrow yRx$.

Для дослідження відношень на вказані властивості у багатьох випадках зручно використовувати відповідні еквівалентні умови:

- (R рефлексивне) $\Leftrightarrow (I_A \subset R)$;
- (R антирефлексивне) $\Leftrightarrow (I_A \cap R = \varnothing)$;
- (R симетричне) $\Leftrightarrow (R = R^{-1})$;
- (R антисиметричне) $\Leftrightarrow (R \cap R^{-1} \subset I_A)$;
- (R транзитивне) $\Leftrightarrow (R \circ R \subset R)$,

де $I_A\colon A \to A$ позначає тотожне відношення на множині A.

Слід пам'ятати, що рефлексивність і антирефлексивність є взаємовиключними властивостями (принаймні для $A \neq \varnothing$), однак симетричність і антисиметричність не виключають одна одну; так, порожнє і тотожне відношення одночасно симетричні і антисиметричні.

Для доведення, що дане відношення не має певної властивості (тобто, щоб спростувати наявність властивості), достатньо навести хоча б один контрприклад – вказати елементи із A, для яких ця властивість не виконується. Однак для доведення, що дане відношення має певну властивість (тобто, щоб підтвердити наявність властивості), необхідно довести виконання цієї властивості для всіх елементів із A.

Приклад 2.1. Дослідити відношення $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задане еквівалентністю $xRy \Leftrightarrow (0 \leqslant x + y \leqslant 2)$.

Для наочності зобразимо на координатній площині геометричне місце точок, які належать відношенню R (рис. 1).

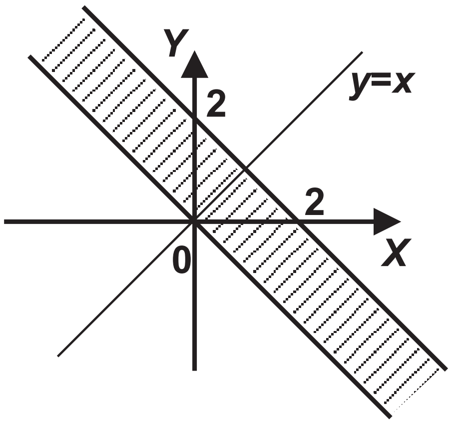


Рис. 1

Дослідимо відношення R на рефлексивність і антирефлексивність. Із рис. 1 видно, що існують пари (x, x) $(x \in \mathbb{R})$, які не належать заданому відношенню; з іншого боку, існують пари (x, x) $(x \in \mathbb{R})$, які належать заданому відношенню. Із рис. 1 видно, що за контрприклад для спростування рефлексивності достатньо взяти $x = 3$, а для спростування антирефлексивності можна взяти $x = 1$.

Дійсно, для пар $(1, 1)$ і $(3, 3)$ маємо:

$$1R1 \Leftrightarrow (1 + 1 \in [0, 2]); \quad 3R3 \Leftrightarrow (3 + 3 \in [0, 2]),$$

тобто відношення R не є ані рефлексивним (оскільки $3\not R3$), ані антирефлексивним (оскільки $1R1$).

Дослідимо відношення R на симетричність:

$$xRy \Leftrightarrow (0 \leqslant x + y \leqslant 2); \; yRx \Leftrightarrow (0 \leqslant y + x \leqslant 2),$$

звідки $xRy \Leftrightarrow yRx$. Отже, відношення R симетричне, що підтверджується і симетричністю графіка відношення відносно прямої $y = x$ (рис. 1).

Дослідимо відношення R на антисиметричність:

$$(xRy \wedge yRx) \Leftrightarrow (0 \leqslant x+y \leqslant 2) \wedge (0 \leqslant y+x \leqslant 2) \Leftrightarrow (x+y \in [0, 2]) \not\Rightarrow (x = y),$$

тобто R не антисиметричне; за контрприклад можна взяти пару $(0,1)$, оскільки $1R0$ і $0R1$ $(1+0=1\in[0,2])$, але $1\neq 0$.

Дослідимо відношення R на транзитивність:

$$(xRy\wedge yRz)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\in[0,2],\\ y+z\in[0,2]\end{cases}\not\Rightarrow xRz\Leftrightarrow(x+z\in[0,2]),$$

тобто відношення не є транзитивним; за контрприклад можна взяти елементи $x=2$, $y=0$, $z=2$ $(2+0\in[0,2]$, $0+2\in[0,2]$, але $2+2\notin[0,2])$.

Відповідь. *Задане відношення R не рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне.*

Приклад 2.2. Дослідити відношення $R\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, задане еквівалентністю $xRy\Leftrightarrow(x-y=n, n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$.

Зазначимо, що відношення R містить ті і тільки ті пари $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, для яких $x-y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Відношення є рефлексивним, оскільки умова $xRx\Leftrightarrow(x-x\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$. Звідси випливає, що це відношення не може бути антирефлексивним, оскільки умова $x\not R x$ не виконується для жодного $x\in\mathbb{R}$ (нагадаємо, що для спростування антирефлексивності достатньо спростувати умову $x\not R x$ хоча б для одного $x\in\mathbb{R}$).

Відношення, очевидно, не є симетричним, оскільки

$$(x-y\in\mathbb{N}\cup\{0\})\not\Rightarrow(y-x=-(x-y)\in\mathbb{N}\cup\{0\});$$

за контрприклад можна взяти $x=2$, $y=1$.

Відношення є антисиметричним, оскільки умови $x-y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ і $y-x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ можуть виконуватися одночасно лише у випадку $x=y\in\mathbb{R}$.

Дослідимо відношення R на транзитивність:

$$(xRy\wedge yRz)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\ y-z\in\mathbb{N}\cup\{0\}\end{cases}\Rightarrow(x-y)+(y-z)=x-z\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

тобто відношення транзитивне.

Відповідь. *Задане відношення R рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне.*

2.2. Операції над відношеннями

Для заданих $R\colon A \to B$ та $S\colon B \to C$, де $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, обчислити $(R \circ S)^{-1}$ та $(R \circ R^{-1})^{+}$. Композицію $R \circ S$ обчислити двома способами – матрицями та стрілочними діаграмами.

1. $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
2. $R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
3. $R = \{(a_1, b_1), (a_3, b_2), (a_2, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_2), (b_1, c_1), (b_2, c_3), (b_1, c_4)\}$.
4. $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
5. $R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
6. $R = \{(a_1, b_1), (a_3, b_2), (a_2, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_3), (b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_1, c_4)\}$.
7. $R = \{(a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_1, b_2)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
8. $R = \{(a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_1, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
9. $R = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$, $S = \{(b_1, c_2), (b_1, c_1), (b_2, c_3), (b_1, c_4)\}$.
10. $R = \{(a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_1, b_2)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
11. $R = \{(a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_1, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
12. $R = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$, $S = \{(b_2, c_3), (b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_1, c_4)\}$.
13. $R = \{(a_3, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
14. $R = \{(a_3, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
15. $R = \{(a_3, b_1), (a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$, $S = \{(b_1, c_2), (b_1, c_1), (b_2, c_3), (b_1, c_4)\}$.
16. $R = \{(a_3, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
17. $R = \{(a_3, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
18. $R = \{(a_3, b_1), (a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$, $S = \{(b_2, c_3), (b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_1, c_4)\}$.
19. $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
20. $R = \{(a_1, b_2), (a_1, b_1), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.

21. $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_2), (b_1, c_1), (b_2, c_3), (b_1, c_4)\}$.
22. $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
23. $R = \{(a_1, b_2), (a_1, b_1), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
24. $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_3), (b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_1, c_4)\}$.
25. $R = \{(a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
26. $R = \{(a_2, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
27. $R = \{(a_2, b_2), (a_1, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_1, c_2), (b_1, c_1), (b_2, c_3), (b_1, c_4)\}$.
28. $R = \{(a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
29. $R = \{(a_2, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}$.
30. $R = \{(a_2, b_2), (a_1, b_2), (a_3, b_1)\}$, $S = \{(b_2, c_3), (b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_1, c_4)\}$.

Методичні вказівки

Нехай $R\colon A \to B$, $S\colon B \to C$, де A, B, C – деякі множини.

Нагадаємо, що композиція $R \circ S$ визначається еквівалентністю

$$x(R \circ S)z \Leftrightarrow \exists y \in B\colon xRy \wedge ySz,$$

де $x \in A$, $z \in C$. Елемент $y \in B$, існування якого необхідно для виконання умови $x(R \circ S)z$, назвемо *транзитним*.

Для обчислення композиції відношень у випадку скінченних A, B, C зручно використовувати матричний спосіб, а також (якщо відношення R та S містять невелику кількість пар) стрілочні діаграми.

Приклад 2.3. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$. Розглянемо відношення

$$R\colon A \to B,\ R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)\};$$
$$S\colon B \to C,\ S = \{(b_1, c_1), (b_3, c_1), (b_3, c_2)\}.$$

Обчислимо композицію $R \circ S$ за допомогою матриць. За природної нумерації рядків та стовпців матриць отримуємо:

$$M_{R \circ S} = M_R M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки $R \circ S = \{(a_2, c_1), (a_2, c_2)\}$.

Нагадаємо, що «логічний» добуток матриць $M_R M_S$ аналогічний класичному добутку матриць (який відомий з курсу лінійної алгебри) із заміною арифметичних операцій суми і добутку на логічні операції – відповідно диз'юнкцію та кон'юнкцію. Наведемо відповідні обчислення для елементу $(M_{R\circ S})_{21}$:

$$(M_{R\circ S})_{21} = ((M_R)_{21} \wedge (M_S)_{11}) \vee ((M_R)_{22} \wedge (M_S)_{21}) \vee ((M_R)_{23} \wedge (M_S)_{31}) = \\ = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1 \vee 0 \vee 1 = 1.$$

Обчислимо $R \circ S$ за допомогою стрілочних діаграм (рис. 2).

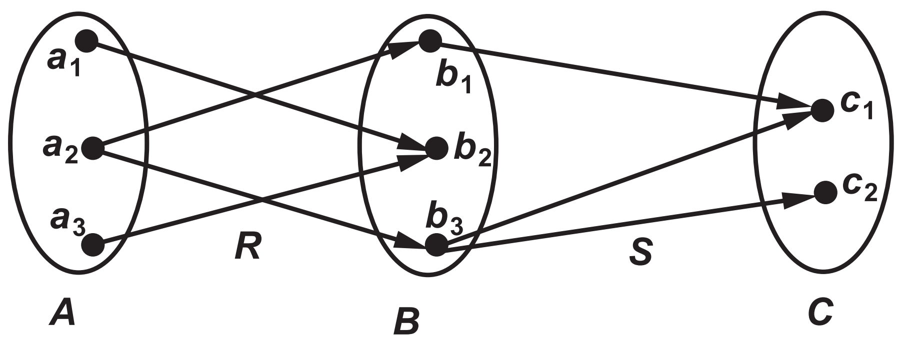


Рис. 2

Із рис. 2 бачимо, що композиція $R \circ S$ містить дві пари – (a_2, c_1) (транзитний елемент b_1) і (a_2, c_2) (транзитний елемент b_3). Таким чином, $R \circ S = \{(a_2, c_1), (a_2, c_2)\}$.

Відповідь. $R \circ S = \{(a_2, c_1), (a_2, c_2)\}$ *(обчислено двома способами).*

Для обчислення інверсного відношення $R^{-1}\colon B \to A$ у випадку скінченних множин A та B зручно використовувати матричний спосіб, транспонуючи матрицю вихідного відношення: $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$.

Приклад 2.4. Обчислимо $S^{-1}\colon C \to B$ для відношення $S\colon B \to C$ із попереднього прикладу:

$$M_{S^{-1}} = (M_S)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

звідки $S^{-1} = \{(c_1, b_1), (c_1, b_3), (c_2, b_3)\}$.

Відповідь. $S^{-1} = \{(c_1, b_1), (c_1, b_3), (c_2, b_3)\}$.

Нехай $R: A \to A$ – бінарне відношення на множині A. Нагадаємо, що транзитивне замикання $R^+ : A \to A$ відношення T є мінімальним розширенням відношення T до транзитивного (розгорнуте визначення див., напр. у [13, 23]). Отже, для обчислення транзитивного замикання R^+ у випадку скінченної множини A можна, виходячи із визначення транзитивного замикання, послідовно додавати до відношення ті пари, які необхідні для виконання умови транзитивності. Практично це означає, що за наявності у відношенні на даному кроці пар (x, y) і (y, z) до відношення необхідно додати пару (x, z). Обчислення зручно проводити, зображуючи відношення у вигляді орієнтованих графів.

Наведений спосіб, прийнятний для множин A з невеликою кількістю елементів, важко використовувати у випадку великої кількості елементів у множині A, і неможливо використовувати у випадку, коли множина A нескінченна. Універсальний спосіб для обчислення транзитивного замикання відношення $R\colon A \to A$ надає формула

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k \cup \cdots ,$$

де $R^1 = R$, $R^k = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{k}$. Для скінченної множини A об'єднання у правій частині реально міститиме лише скінченну кількість «композиційних степенів» R^k:

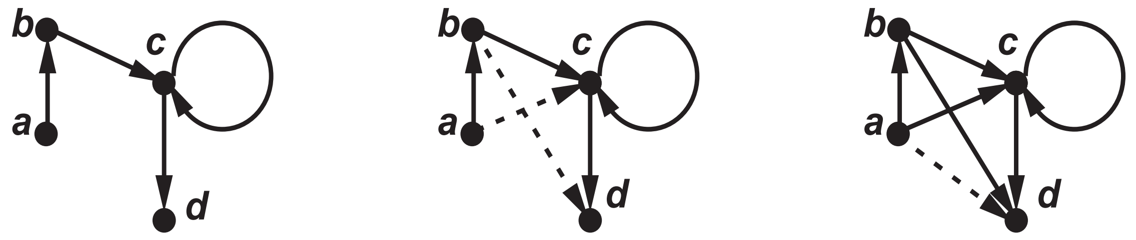
$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n,$$

де n – кількість елементів у множині A.

Корисно зрозуміти, що «композиційна степінь» R^{k+1} містить саме ті пари, які необхідно додати на k-му кроці до відношення $R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k$, виходячи із виконання умови транзитивності. Іншими словами R^{k+1} містить пару (x, z) тоді і тільки тоді, коли відношення $R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k$ містить пари (x, y) і (y, z) для деякого $y \in A$.

Приклад 2.5. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. На рис. 3 зображено процес побудови транзитивного замикання відношення

$$R\colon A \to A, \quad R = \{(a, b), (b, c), (c, c), (c, d)\}.$$



а б в

Рис. 3. Побудова транзитивного замикання відношення R:
а – відношення R; б – відношення $R \cup R^2$; в – відношення $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3$

На першому кроці до відношення R були додані дві пари: пара (a,c), оскільки R містить пари (a,b) і (b,c), та пара (b,d), оскільки R містить пари (b,c) і (c,d). У результаті отримали відношення $R \cup R^2$. Зазначимо, що $R^2 = \{(a,c),(b,d),(b,c),(c,d),(c,c)\}$, однак пари (b,c), (c,d), (c,c) вже містяться у відношенні R. У цьому прикладі ми не зупиняємось на обчисленні композиції відношень, оскільки відповідні пояснення були зроблені вище.

На другому кроці до відношення $R \cup R^2$ була додана одна пара (a,d), оскільки $R \cup R^2$ містить пари (a,b) і (b,d) (до необхідності додати (a,d) можна було прийти і через пари (a,c) і (c,d)). У результаті отримали відношення $R \cup R^2 \cup R^3$. Зазначимо, що $R^3 = \{(a,d),(a,c),(b,c),(c,d),(c,c)\}$, однак із цих п'яти пар лише (a,d) була «новою», тобто не містилась у відношенні $R \cup R^2$.

Очевидно, відношення $R \cup R^2 \cup R^3$ є транзитивним, і транзитивне замикання побудоване: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3$. Зазначимо, що

$$R^4 = \{(a,c),(b,c),(c,d),(c,c)\} \subset R \cup R^2 \cup R^3.$$

2.3. Обчислення фактор-множини

Відношення еквівалентності «$\sim$» задане відображенням $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$((x_1,x_2) \sim (y_1,y_2)) \Leftrightarrow (f(x_1,x_2) = f(y_1,y_2)).$$

Необхідно:

1. описати загальний вигляд фактор-множини $\mathbb{R}^2/_\sim$;
2. зобразити на координатній площині класи еквівалентності, що відповідають заданим значенням $\alpha = f(x_1,x_2)$.

1. $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad \alpha = 0; 1; -1.$

2. $f(x_1, x_2) = |x_1^2 - x_2^2|, \quad \alpha = 0; 1; 4.$
3. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad \alpha = 0; 1; -1.$
4. $f(x_1, x_2) = |x_1 x_2|, \quad \alpha = 0; 1; 4.$
5. $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}, \quad \alpha = 0; 2; -2.$
6. $f(x_1, x_2) = \min\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \alpha = 0; 2; 4.$
7. $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}, \quad \alpha = 0; 2; -2.$
8. $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \alpha = 0; 2; 4.$
9. $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|, \quad \alpha = 0; 2; 4.$
10. $f(x_1, x_2) = |x_1| - |x_2|, \quad \alpha = 0; 2; -2.$
11. $f(x_1, x_2) = ||x_1| - |x_2||, \quad \alpha = 0; 2; 4.$
12. $f(x_1, x_2) = [x_1] + [x_2], \quad \alpha = 0; 2; -2.$
13. $f(x_1, x_2) = [x_1] - [x_2], \quad \alpha = 0; 2; -2.$
14. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + |x_2|, \quad \alpha = 0; 4; 1.$
15. $f(x_1, x_2) = |x_1| - x_2^2, \quad \alpha = 0; 4; -4.$
16. $f(x_1, x_2) = |x_1| - |x_2^3|, \quad \alpha = 0; 1; -1.$
17. $f(x_1, x_2) = x_2 \cdot 2^{-x_1}, \quad \alpha = 0; 1; -2.$
18. $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot 2^{-x_2}, \quad \alpha = 0; 1; -2.$
19. $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot 2^{|x_2|}, \quad \alpha = 0; 1; -2.$
20. $f(x_1, x_2) = x_2 \cdot 2^{|x_1|}, \quad \alpha = 0; 1; -2.$
21. $f(x_1, x_2) = |x_2| - \cos x_1, \quad \alpha = 0; 1; -1/2.$
22. $f(x_1, x_2) = |x_2| - \sin x_1, \quad \alpha = 0; 1; -1/2.$
23. $f(x_1, x_2) = x_2 - |\cos x_1|, \quad \alpha = 0; 1; -1/2.$
24. $f(x_1, x_2) = x_2 - |\sin x_1|, \quad \alpha = 0; 1; -1/2.$

25. $f(x_1, x_2) = |x_2 - \cos x_1|, \quad \alpha = 0; 1; 1/2.$

26. $f(x_1, x_2) = |x_2 - \sin x_1|, \quad \alpha = 0; 1; 1/2.$

27. $f(x_1, x_2) = ||x_2| - \cos x_1|, \quad \alpha = 0; 1; 1/2.$

28. $f(x_1, x_2) = ||x_2| - \sin x_1|, \quad \alpha = 0; 1; 1/2.$

29. $f(x_1, x_2) = |x_2 - |\cos x_1||, \quad \alpha = 0; 1; 1/2.$

30. $f(x_1, x_2) = |x_2 - |\sin x_1||, \quad \alpha = 0; 1; 1/2.$

Методичні вказівки

Нагадаємо, що відношенням еквівалентності на множині A називають бінарне відношення $R\colon A \to A$, яке є одночасно рефлексивним, симетричним і транзитивним. Для факту xRy $(x, y \in A)$ у випадку відношення еквівалентності традиційно використовують позначення $x \sim y$ (кажуть, що елемент x еквівалентний елементу y). Класом еквівалентності, який породжений елементом $a \in A$, називають множину елементів, еквівалентних a: $[a] = \{x \in A : x \sim a\}$. Фактор-множиною $A/_{\sim}$ називають множину всіх класів еквівалентності:

$$A/_{\sim} = \{[a] \colon a \in A\}.$$

Слід пам'ятати, що фактор-множина $A/_{\sim}$ утворює розбиття множини A, тобто:

- класи еквівалентності або не перетинаються, або збігаються;
- класи еквівалентності – непорожні множини (принаймні $a \in [a]$);
- об'єднання всіх класів еквівалентності збігається з A: $\bigcup\limits_{a \in A} [a] = A$.

Розглянемо важливий випадок, коли відношення еквівалентності на множині A породжується відображенням $f\colon A \to B$, де B – деяка множина: $(x_1 \sim x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2))$. У цьому випадку класи еквівалентності мають вигляд:

$$A_\alpha = \{x \colon f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathrm{Im}_f,$$

де $\mathrm{Im}_f = \{f(x) : x \in A\}$ – образ відображення f. Множину A_α іноді називають множиною рівня α для заданої функції f.

Очевидно, що фактор-множина $A/_{\sim}$ є сукупністю всіх множин A_α: $A/_{\sim} = \{A_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{Im}_f\}$.

Приклад 2.6. Нехай $A = \mathbb{R}^2$, відношення еквівалентності «$\sim$» задається відображенням $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$:

$$((x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)) \Leftrightarrow (f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)).$$

Потрібно знайти фактор-множину $\mathbb{R}^2/_\sim$ і зобразити на координатній площині класи еквівалентності, що відповідають заданим значенням рівня: $\alpha = f(x_1, x_2) = -1; 0; 3$.

Визначимо вигляд класів еквівалентності як множину рівня α:

$$((x_1, x_2) \in A_\alpha) \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = \alpha) \Leftrightarrow ((x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \alpha + 1),$$

звідки видно, що α може набувати значень із множини $[-1; \infty)$.

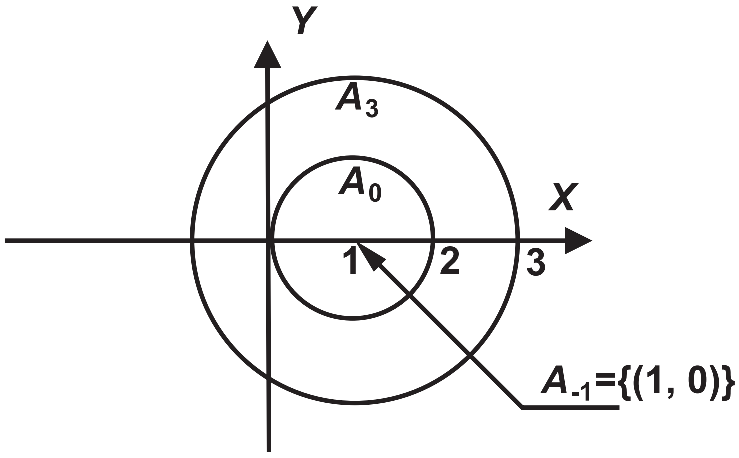


Рис. 4

Отже, фактор-множина $\mathbb{R}^2/_\sim$ є розбиттям координатної площини $\mathbb{R}^2$ на концентричні кола з центрами у точці $(1, 0)$ і радіусами $\sqrt{1+\alpha} \geqslant 0$ (випадку $r = 0$ відповідає одноточковий клас еквівалентності $[(1, 0)] = \{(1, 0)\}$).

Отже, отримуємо класи еквівалентності

$$A_\alpha = \{(x_1, x_2)\colon (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \alpha + 1\},$$

де $\alpha \geq -1$. Класи еквівалентності для випадків $\alpha = -1; 0; 3$ зображені на рис. 4.

Фактор-множина $\mathbb{R}^2/_\sim$ є множиною вказаних класів еквівалентності: $\mathbb{R}^2/_\sim = \{A_\alpha\colon \alpha \geq -1\}$.

3. Комбінаторика

3.1. Вибір нумерованих об'єктів

У посудині знаходяться n_1 білих, n_2 чорних та n_3 червоних кульок (всі кульки нумеровані). Скількома способами можна витягти k кульок без повернення та без урахування порядку так, щоб у вибірці було не менш ніж k_1 білих, k_2 чорних та k_3 червоних кульок?

№	n_1	n_2	n_3	k	k_1	k_2	k_3
1	3	4	5	6	1	1	2
2	3	4	5	7	2	1	2
3	3	4	5	7	1	2	2
4	4	6	2	6	2	2	0
5	4	6	2	6	3	1	0
6	4	4	6	8	3	2	1
7	4	4	6	8	2	1	3
8	4	4	6	8	1	3	2
9	4	5	6	8	2	1	3
10	4	5	6	8	3	2	1
11	4	4	6	8	3	0	3
12	4	4	6	8	1	1	4
13	4	4	6	7	0	3	2
14	4	5	6	7	2	0	3
15	4	5	6	7	3	2	0

№	n_1	n_2	n_3	k	k_1	k_2	k_3
16	3	4	5	6	1	2	1
17	3	4	5	7	2	2	1
18	4	6	2	7	2	1	1
19	4	6	2	6	2	1	1
20	4	6	2	6	1	3	0
21	4	4	6	8	3	1	2
22	4	4	6	8	2	3	1
23	4	5	6	8	2	3	1
24	4	5	6	8	3	1	2
25	4	5	6	8	1	2	3
26	4	4	6	8	3	3	0
27	4	4	6	7	2	3	0
28	4	5	6	7	2	3	0
29	4	5	6	7	3	0	2
30	4	5	6	7	0	2	3

Методичні вказівки

Стандартним методом аналізу невпорядкованого вибору нумерованих об'єктів (тобто об'єктів, які попарно розрізняються) є комбінаторна схема, відома під назвою «задача про деталі»: якщо у коробці міститься n_i деталей i-го сорту $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то витягти m деталей без повернення і без урахування порядку так, щоб у вибірці було m_i деталей i-го сорту $(i = 1, 2, \ldots, k)$, можна $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k}$ способами.

Якщо кількість елементів кожного сорту не жорстко фіксована, а задається певними обмеженнями, можна скористатися принципом суми, тобто перебрати всі варіанти розподілу деталей у вибірці по сортах, застосовуючи схему задачі про деталі для кожного фіксованого розподілу деталей по сортах.

Приклад 3.1. У посудині знаходяться 3 білих, 5 чорних та 4 зелених кульок (всі кульки нумеровані). Скількома способами можна витягти 7 кульок без повернення та без урахування порядку так, щоб у вибірці було не менш ніж 2 білих, 3 чорних та 1 зеленої кульки?

Зведемо у таблицю варіанти розподілу кульок у вибірці за кольорами, позначивши через $m_б$, $m_ч$, $m_з$ кількість у вибірці відповідно білих, чорних та зелених кульок.

$m_б$	$m_ч$	$m_з$	Кількість способів
2	3	2	$C_3^2 C_5^3 C_4^2 = 3 \cdot 10 \cdot 6 = 180$
2	4	1	$C_3^2 C_5^4 C_4^1 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$
3	3	1	$C_3^3 C_5^3 C_4^1 = 1 \cdot 10 \cdot 4 = 40$

Таким чином, загальна кількість способів $180 + 60 + 40 = 280$.

Відповідь. 280 *способів.*

3.2. Вибір ненумерованих об'єктів

Букет квітів може містити хризантеми, троянди, ромашки та півонії. Всі квіти вважаються ненумерованими, тобто квіти одного виду не розрізняються. Порядок квітів в букеті не має значення. Скільки можна скласти різних букетів із n квітів, якщо кожен букет повинен містити не менш ніж k_1 і не більш ніж n_1 хризантем, не менш ніж k_2 і не більш ніж n_2 троянд, не менш ніж k_3 і не більш ніж n_3 ромашок, не менш ніж k_4 і не більш ніж n_4 півоній?

№	n	k_1	n_1	k_2	n_2	k_3	n_3	k_4	n_4
1	10	2	4	1	3	1	4	2	3
2	10	2	4	3	5	1	3	1	4
3	10	3	5	1	4	1	3	1	4
4	10	3	5	1	3	1	4	1	5
5	10	3	6	1	4	1	5	1	3
6	10	1	4	2	3	1	4	2	3
7	10	1	4	3	5	1	3	1	4
8	10	1	4	1	4	1	3	1	4
9	10	1	4	2	4	1	4	1	5
10	10	1	4	4	6	1	3	1	3
11	11	2	4	1	3	1	4	0	2
12	11	2	4	3	5	1	3	0	3
13	11	3	5	1	4	0	3	1	4
14	11	3	5	1	3	0	2	1	5
15	11	3	6	0	3	1	5	1	3
16	11	1	4	0	2	1	4	2	3

№	n	k_1	n_1	k_2	n_2	k_3	n_3	k_4	n_4
17	11	0	3	3	5	1	3	1	4
18	11	0	3	1	4	1	3	1	4
19	11	1	4	0	4	1	4	1	5
20	11	1	4	0	3	1	3	1	3
21	12	2	4	1	3	0	4	0	2
22	12	2	4	3	5	0	3	0	3
23	12	3	5	0	4	0	3	1	4
24	12	3	5	0	3	0	2	1	5
25	12	0	6	0	3	1	5	1	3
26	12	0	4	0	2	1	4	2	3
27	12	0	3	3	5	0	3	1	4
28	12	0	3	1	4	0	3	1	4
29	12	0	4	0	4	1	4	1	5
30	12	0	4	0	3	1	3	1	3

Методичні вказівки

Стандартним методом аналізу вибору ненумерованих об'єктів (тобто об'єктів, які у межах одного типу не розрізняються) є схема комбінацій з повтореннями: кількість наборів із n об'єктів за наявності k типів об'єктів, якщо об'єкти одного типу не розрізняються і їх розташування у наборі не має значення, дорівнює $\widetilde{C}_k^n = C_{n+k-1}^n$.

Якщо задача містить «обмеження знизу», тобто набори в умові задачі мають містити не менш ніж n_k об'єктів k-го типу, можна легко перейти до задачі без обмежень: вважаючи, що набори містять мінімально необхідну кількість об'єктів кожного типу, формуємо набори меншої кількості об'єктів без обмеження.

Якщо задача містить «обмеження зверху», тобто набори в умові задачі мають містити не більш ніж n_k об'єктів k-го типу, можна перейти до зворотної задачі – обчислити кількість наборів, які не задовольняють заданим обмеженням знизу. Розв'язок вихідної задачі легко отримати як різницю між кількістю наборів для задачі без обмежень і кількістю можливих наборів для зворотної задачі. Зрозуміло, що для зворотної задачі обмеження зверху набудуть вигляду обмежень знизу, тобто ми зведемо задачу до такої, яку ми вміємо розв'язувати. Особливістю такого підходу є те, що з переходом до зворотної задачі кон'юнкція обмежень зверху набуває вигляду диз'юнкції обмежень знизу, і для переходу до кон'юнкції умов доводиться застосовувати формулу потужності об'єднання скінченних множин (об'єднуються множини наборів для кожної окремої умови зворотної задачі).

Нарешті, у випадку наявності як обмежень зверху, так і обмежень знизу, слід спочатку позбутися обмежень знизу (не навпаки!), а потім перейти до зворотної задачі. Переходячи до задачі без обмежень знизу, необхідно відповідним чином зменшувати числа, які задають обмеження зверху, оскільки кожен набір вже містить деяку (а саме мінімально необхідну) кількість об'єктів кожного типу.

Приклад 3.2. Букет квітів може містити хризантеми, троянди, ромашки та півонії. Всі квіти вважаються ненумерованими, тобто квіти одного виду між собою не розрізняються. Порядок квітів в букеті не має значення. Скільки можна скласти різних букетів із $n = 11$ квітів, якщо кожен букет повинен містити не менш ніж $k_1 = 1$ і не більш ніж $n_1 = 3$ хризантеми, не менш ніж $k_2 = 2$ і не більш ніж $n_2 = 3$ троянд, не менш ніж $k_3 = 1$ і не більш ніж $n_3 = 4$ ромашок, не менш ніж $k_4 = 2$ і не більш ніж $n_4 = 3$ півоній?

Перейдемо до задач без обмежень знизу, тобто будемо вважати, що букет вже містить 1 хризантему, 2 троянди, 1 ромашку і 2 півонії. Таким чином, отримуємо задачу: букет (із квітів, які ми додаємо до мінімально необхідних) має містити $\widetilde{n} = n - (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 5$ квіток, серед яких не більш ніж $\widetilde{n}_1 = n_1 - k_1 = 2$ хризантеми, не більш ніж $\widetilde{n}_2 = n_2 - k_2 = 1$ троянда, не більш ніж $\widetilde{n}_3 = n_3 - k_3 = 3$ ромашки і не більш ніж $\widetilde{n}_4 = n_4 - k_4 = 1$ півонія.

Отже, отримали задачу, яка містить лише обмеження зверху. Позначивши кількість хризантем, троянд, ромашок і півоній у букеті відповідно через m_1, m_2, m_3, m_4, запишемо отримане обмеження у вигляді

$$A = (m_1 \leqslant 2) \wedge (m_2 \leqslant 1) \wedge (m_3 \leqslant 3) \wedge (m_4 \leqslant 1).$$

Запишемо обмеження для зворотної задачі:

$$\neg A = (m_1 \geqslant 3) \vee (m_2 \geqslant 2) \vee (m_3 \geqslant 4) \vee (m_4 \geqslant 2).$$

Позначаючи через $N(P)$ кількість букетів, які задовольняють умові P, із формули для потужності об'єднання (чотирьох) множин у загальному вигляді отримуємо:

$$\begin{gathered} N(P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4) = N(P_1) + N(P_2) + N(P_3) + N(P_4) - \\ - N(P_1 \wedge P_2) - N(P_1 \wedge P_3) - N(P_1 \wedge P_4) - N(P_2 \wedge P_3) - \\ - N(P_2 \wedge P_4) - N(P_3 \wedge P_4) + N(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) + N(P_1 \wedge P_2 \wedge P_4) + \\ + N(P_1 \wedge P_3 \wedge P_4) + N(P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) - N(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4). \end{gathered} \tag{8}$$

Використовуючи формулу (8), запишемо вираз для $N(\neg A)$:

$$
\begin{aligned}
N(\neg A) = N(m_1 \geqslant 3) + N(m_2 \geqslant 2) + N(m_3 \geqslant 4) + N(m_4 \geqslant 2) - \\
-N((m_1 \geqslant 3) \wedge (m_2 \geqslant 2)) - N((m_1 \geqslant 3) \wedge (m_3 \geqslant 4)) - \\
-N((m_1 \geqslant 3) \wedge (m_4 \geqslant 2)) - N((m_2 \geqslant 2) \wedge (m_3 \geqslant 4)) - \\
-N((m_2 \geqslant 2) \wedge (m_4 \geqslant 2)) - N((m_3 \geqslant 4) \wedge (m_4 \geqslant 2)) + \\
+N((m_1 \geqslant 3) \wedge (m_2 \geqslant 2) \wedge (m_3 \geqslant 4)) + \\
+N((m_1 \geqslant 4) \wedge (m_2 \geqslant 2) \wedge (m_4 \geqslant 2)) + \\
+N((m_1 \geqslant 3) \wedge (m_3 \geqslant 4) \wedge (m_4 \geqslant 2)) + \\
+N((m_2 \geqslant 2) \wedge (m_3 \geqslant 4) \wedge (m_4 \geqslant 2)) - \\
-N((m_1 \geqslant 3) \wedge (m_2 \geqslant 2) \wedge (m_3 \geqslant 4) \wedge (m_4 \geqslant 2)).
\end{aligned}
$$

Тепер кожний доданок в отриманому виразі для $N(\neg A)$ є розв'язком задачі з обмеженнями знизу (без обмежень зверху) і обчислюється через формулу для комбінацій з повтореннями:

$$
\begin{aligned}
N(\neg A) = \widetilde{C}_4^2 + \widetilde{C}_4^3 + \widetilde{C}_4^1 + \widetilde{C}_4^3 - \widetilde{C}_4^0 - 0 - \widetilde{C}_4^0 - 0 - \widetilde{C}_4^1 - 0 + \\
+0 + 0 + 0 + 0 - 0 = C_5^2 + C_6^3 + C_4^1 + C_6^3 - C_3^0 - C_3^0 - C_4^1 = \\
= 10 + 20 + 4 + 20 - 1 - 1 - 4 = 48.
\end{aligned}
$$

Кількість букетів для задачі формування букетів із $\widetilde{n} = 4$ квітів без обмежень (умова обмеження тотожна 1):

$$N(1) = \widetilde{C}_4^5 = C_8^5 = 56.$$

Нарешті, остаточний результат отримаємо як різницю

$$N(1) - N(\neg A) = 56 - 48 = 8.$$

Відповідь. 8 *букетів.*

4. Теорія груп та кілець

4.1. Визначення групи

Дослідити, чи є алгебрична структура $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ групою за вказаною операцією «$*$». Якщо ні, звузити $\mathbb{R}$ так, щоб отримана множина була групою за вказаною операцією (за можливості такого звуження). Вказати нейтральний елемент групи, для кожного елемента вказати обернений, дослідити групу на комутативність.

№	Операція	№	Операція
1	$a*b = 15a + 15b + 5ab + 42$	**16**	$a*b = 2a + 2b + 6ab + \frac{1}{3}$
2	$a*b = -\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}b - \frac{4}{3}ab - \frac{7}{3}$	**17**	$a*b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{10}ab - \frac{5}{2}$
3	$a*b = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + 2ab - \frac{1}{9}$	**18**	$a*b = -\frac{1}{5}a - \frac{1}{5}b + \frac{1}{10}ab + \frac{12}{5}$
4	$a*b = 2a + 2b + \frac{1}{2}ab + 4$	**19**	$a*b = 21a + 21b + 7ab + 60$
5	$a*b = -2a - 2b + 3ab + 2$	**20**	$a*b = -3a - 3b - \frac{1}{7}ab - 84$
6	$a*b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{8}ab - 2$	**21**	$a*b = -\frac{6}{5}a - \frac{6}{5}b + \frac{6}{5}ab + \frac{11}{5}$
7	$a*b = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}ab - \frac{5}{6}$	**22**	$a*b = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{4}ab + 1$
8	$a*b = 3a + 3b - ab - 6$	**23**	$a*b = \frac{8}{3}a + \frac{8}{3}b + 8ab + \frac{5}{9}$
9	$a*b = 4a + 4b + 4ab + 3$	**24**	$a*b = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b + \frac{1}{2}ab + \frac{15}{2}$
10	$a*b = -a - b + \frac{1}{11}ab + 22$	**25**	$a*b = \frac{7}{3}a + \frac{7}{3}b - \frac{1}{3}ab - \frac{28}{3}$
11	$a*b = 3a + 3b - \frac{1}{11}ab - 66$	**26**	$a*b = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}ab + \frac{8}{9}$
12	$a*b = 2a + 2b - \frac{1}{7}ab - 14$	**27**	$a*b = \frac{5}{3}a + \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}ab - \frac{10}{3}$
13	$a*b = 14a + 14b + 7ab + 26$	**28**	$a*b = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}ab + \frac{10}{3}$
14	$a*b = -3a - 3b + \frac{1}{3}ab + 36$	**29**	$a*b = -2a - 2b - \frac{1}{2}ab - 12$
15	$a*b = -a - b + 3ab + \frac{2}{3}$	**30**	$a*b = -\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}ab - \frac{15}{2}$

Методичні вказівки

Нагадаємо, що алгебричну структуру $\langle G, * \rangle$ називають групою, якщо виконуються умови:

- замкненість: $\forall a, b \in G \colon a*b \in G$;
- асоціативність: $\forall a, b, c \in G \colon (a*b)*c = a*(b*c)$;

- існування нейтрального елемента: $\exists e \in G\colon \forall a \in G\colon a * e = e * a = a$;
- існування оберненого елемента:

$$\forall a \in G\colon \exists a^{-1} = a^{-1,*} \in G\colon a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Якщо операція «$*$» комутативна, групу називають абелевою.

Приклад 4.1. Дослідимо, чи є множина $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ групою за операцією $a * b = a + b + ab$. Операція замкнена, оскільки з $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ випливає $a * b \in \mathbb{R}$, та комутативна, оскільки $a * b = b * a$. Для перевірки асоціативності запишемо:

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= a * b + c + (a * b)c = a + b + ab + c + (a + b + ab)c = \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc, \\ a * (b * c) &= a + b * c + a(b * c) = a + b + c + bc + a(b + c + bc) = \\ &= a + b + c + ab + ac + ab + abc.\end{aligned}$$

Дійсно, операція є асоціативною.

Шукаємо нейтральний елемент. Для пошуку правого нейтрального елемента запишемо: $a * e_r = a \Leftrightarrow a + e_r + ae_r = a \Leftrightarrow (1 + a)e_r = 0$. Рівність повинна виконуватись для всіх $a \in \mathbb{R}$, тому $e_r = 0$.[1] Операція комутативна, тому 0 є одночасно й лівим нейтральним, а, отже, двостороннім нейтральним. Отже, $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ є комутативним моноїдом.

Для $a \in \mathbb{R}$ шукаємо обернений елемент. Для пошуку правого оберненого запишемо: $a * a^{-1,r} = e \Leftrightarrow a + a^{-1,r} + aa^{-1,r} = 0 \Leftrightarrow (1 + a)a^{-1,r} = -a$. Елемент $a = -1$ не має правого оберненого, тому $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ не є групою. Але для всіх $a \neq -1$ правий обернений існує і дорівнює $a^{-1,r} = -\frac{a}{a+1}$. Операція комутативна, тому $-\frac{a}{a+1}$ є одночасно й лівим оберненим до a, отже, двостороннім оберненим.

Дослідимо, чи є $\langle \mathbb{R} \setminus \{-1\}, * \rangle$ групою.

Для перевірки замкненості операції «$*$» потрібно впевнитися, що з $a \neq -1$ та $b \neq -1$ випливає $a + b + ab \neq -1$. Припустимо супротивне: нехай $a + b + ab = -1$. Тоді $(a + 1)(b + 1) = 0$, але $a \neq -1$, $b \neq -1$. Отримана суперечність доводить замкненість операції.

Асоціативність операції «$*$» та існування нейтрального елемента $e = 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ перевірені вище. Також було доведено, що для кожного

[1] Перехід до запису $e_r = \frac{0}{(1+a)}$ є некоректним без додаткової перевірки випадку $a = -1$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ існує елемент $a^{-1} = -\frac{a}{a+1} \in \mathbb{R}$, такий, що $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$; однак необхідно впевнитися, що $a^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Припустимо супротивне: $a^{-1} = -1$ для деякого $a \neq -1$. Тоді $-\frac{a}{a+1} = -1$, звідки $a = a+1$ – отримана суперечність доводить, що $a^{-1} \neq -1$, тобто $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Таким чином, елемент a^{-1} є оберненим до $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ в структурі $\langle \mathbb{R} \setminus \{-1\}, *\rangle$.

Висновок. $\langle \mathbb{R}, *\rangle$ є комутативним моноїдом, але не групою, оскільки елемент -1 не має оберненого. $\langle \mathbb{R} \setminus \{-1\}, *\rangle$ є абелевою групою з нейтральним елементом $e = 0$, для елемента a оберненим елементом є $a^{-1} = -\frac{a}{a+1}$.

4.2. Групи підстановок

Для заданої підстановки $\sigma \in S_{12}$:

- знайти розклад у незалежні цикли;
- визначити, чи є підстановка σ парною;
- обчислити порядок $|\sigma|$ елемента $\sigma \in S_{12}$.

Варіанти завдань див. в таблиці 3.

Методичні вказівки

Розкладання підстановки $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ у незалежні цикли можна починати з будь-якого елемента $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Зафіксувавши, наприклад, $i_0 = 1$, будують послідовність

$$i_0 = 1,\ i_1 = \sigma(i_0),\ i_2 = \sigma(i_1) = \sigma^2(1),\ i_3 = \sigma(i_2) = \sigma^3(1), \ldots, i_k = \sigma^k(1), \ldots$$

Ураховуючи скінченність множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, елементи послідовності $i_0, i_1, \ldots, i_k, \ldots$ почнуть повторюватися. Далі, враховуючи бієктивність (якщо більш конкретно – ін'єктивність) підстановки σ, повторення може початися лише з елемента i_0. Отже, для деякого номера m отримаємо попарно різні $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}$, але $\sigma(i_{m-1}) = i_0$. Побудована послідовність визначає цикл $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$.

Якщо у множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ залишились елементи, які не увійшли у побудований цикл, будують вищеописаним методом наступний цикл, починаючи з будь-якого елемента $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j_0 \notin \{i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}\}$. Якщо у множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ залишились елементи, які не увійшли у побудовані цикли, будують третій цикл і т.д.

Табл. 3. **Групи підстановок. Варіанти завдань**

№	σ	**№**	σ
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 11 & 2 & 12 & 4 & 6 & 10 & 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 11 & 6 & 10 & 12 & 3 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 1 & 12 & 6 & 10 & 4 & 11 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & 10 & 7 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 3 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 4 & 2 & 12 & 1 & 5 & 10 & 11 & 9 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 4 & 12 & 11 & 3 & 9 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 12 & 2 & 5 & 7 & 9 & 1 & 10 & 11 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 11 & 6 & 3 & 8 & 4 & 7 & 5 & 10 & 1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 7 & 12 & 2 & 6 & 3 & 8 & 4 & 9 & 11 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 8 & 10 & 7 & 4 & 3 & 2 & 11 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$	**21**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 & 6 & 10 & 12 & 9 & 11 & 8 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 1 & 12 & 8 & 11 & 6 & 10 & 9 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	**22**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 12 & 9 & 7 & 2 & 4 & 6 & 11 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 10 & 7 & 5 & 6 & 1 & 12 & 3 & 9 & 11 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	**23**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 12 & 10 & 11 & 2 & 7 & 4 & 8 & 1 & 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 8 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 12 & 2 & 11 \end{pmatrix}$	**24**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 2 & 5 & 11 & 4 & 3 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 1 & 5 & 11 & 7 & 2 & 4 & 6 & 10 & 9 & 3 & 12 \end{pmatrix}$	**25**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 9 & 10 & 2 & 11 & 12 & 7 & 3 & 1 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 10 & 8 & 1 & 4 & 6 & 5 & 11 & 12 & 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	**26**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 11 & 6 & 7 & 1 & 10 & 5 & 12 & 2 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 1 & 11 & 6 & 8 & 12 & 3 & 2 & 4 & 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	**27**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 1 & 7 & 11 & 8 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 9 & 12 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 1 & 11 & 12 & 7 & 2 & 4 & 10 & 3 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$	**28**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 8 & 12 & 1 & 2 & 7 & 10 & 9 & 5 & 6 & 11 & 4 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 1 & 11 & 3 & 7 & 9 & 2 & 12 & 8 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	**29**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 9 & 6 & 5 & 8 & 2 & 12 & 1 & 3 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 12 & 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	**30**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 11 & 5 & 1 & 9 & 7 & 4 & 12 & 3 & 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

Процес має закінчитись за скінченну кількість кроків, оскільки множина $\{1, 2, \ldots, n\}$ скінченна. Побудовані описаним методом цикли завжди незалежні, оскільки за побудовою не можуть мати спільних елементів (випливає з ін'єктивності підстановки).

Приклад 4.2. Зобразимо у вигляді композиції незалежних циклів підстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 6 & 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$:

1) побудуємо перший цикл, починаючи з елемента 1:

$$1,\ \sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 5,\ \sigma(5) = 4,\ \sigma(4) = 6,\ \sigma(6) = 1,$$

тобто отримуємо цикл довжиною 5: $(1, 2, 5, 4, 6)$; процедура має продовжуватися, оскільки існують елементи (наприклад, 3), що не увійшли до побудованого циклу;

2) побудуємо другий цикл, починаючи з елемента 3:

$$3,\ \sigma(3) = 8,\ \sigma(8) = 3,$$

тобто отримуємо цикл довжиною 2: $(3, 8)$; процедура має продовжуватися, оскільки залишився елемент 7, що не увійшов до побудованих циклів;

3) побудуємо третій цикл, починаючи з елемента 7:

$$7,\ \sigma(7) = 7,$$

тобто отримуємо цикл довжиною 1 (тотожну підстановку): $(7) = \varepsilon$.

Отже, підстановка σ допускає такий розклад у композицію незалежних циклів:

$$\sigma = (1, 2, 5, 4, 6) \circ (3, 8) \circ (7).$$

Зв'язок побудованих циклів з підстановкою σ цікаво простежити, переставивши відповідно стовпці матриці σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо незалежність результату композиції незалежних циклів від порядку запису аргументів (кажуть, що незалежні цикли між собою *комутують*). Так, для підстановки σ із прикл. 4.2 існує 6 варіантів запису у композицію незалежних циклів:

$$\sigma = (1, 2, 5, 4, 6) \circ (3, 8) \circ (7) = (3, 8) \circ (1, 2, 5, 4, 6) \circ (7) = \ldots.$$

Для обчислення парності підстановки, яку розкладено у композицію незалежних циклів, слід враховувати, що цикл парної довжини є непарною підстановкою, оскільки розкладається у композицію непарної (на 1 меншої за довжину цикла) кількості транспозицій, і навпаки – цикл непарної довжини є парною підстановкою. Отже, парність композиції незалежних циклів визначається кількістю циклів парної довжини (непарних підстановок), оскільки цикли непарної довжини (парні підстановки) не змінюють парність композиції. Остаточно маємо: якщо розклад підстановки у композицію незалежних циклів містить парну кількість циклів парної довжини, вихідна підстановка парна, якщо непарну кількість – непарна.

Приклад 4.3. Підстановка $\boldsymbol{\sigma} = (1, 2, 5, 4, 6) \circ (3, 8) \circ (7)$ із прикл. 4.2 має один цикл парної довжини (цикл $(3, 8)$), а отже є непарною.

Для обчислення порядку підстановки $\boldsymbol{\sigma}$, яку розкладено у композицію незалежних циклів, слід враховувати, що порядок кожного циклу дорівнює його довжині – це випливає з означення порядку елемента групи як найменшого додатного показника степеня, при піднесенні до якого отримуємо нейтральний елемент (тотожну підстановку).

Далі, оскільки незалежні цикли комутують, степінь композиції незалежних циклів дорівнює композиції степенів:

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_2 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\sigma}_k)^m = \boldsymbol{\sigma}_1^m \circ \boldsymbol{\sigma}_2^m \circ \cdots \circ \boldsymbol{\sigma}_k^m,$$

де $\boldsymbol{\sigma}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ – незалежні цикли. Із наведеної рівності одразу випливає, що порядок підстановки $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_2 \circ \cdots \circ \boldsymbol{\sigma}_k$ має бути найменшим із чисел, які кратні порядкам циклів $\boldsymbol{\sigma}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, тобто $|\boldsymbol{\sigma}| = \text{НСК}(|\boldsymbol{\sigma}_1|, |\boldsymbol{\sigma}_2|, \ldots, |\boldsymbol{\sigma}_k|)$.

Приклад 4.4. Підстановка $\boldsymbol{\sigma} = (1, 2, 5, 4, 6) \circ (3, 8) \circ (7)$ із прикл. 4.2 містить три незалежні цикли з довжинами 5, 2 та 1. Таким чином, $|\boldsymbol{\sigma}| = \text{НСК}(5, 2, 1) = 10$.

4.3. Гомоморфізми груп класів лишків

Знайти всі гомоморфізми з адитивної групи $\mathbb{Z}_n$ в адитивну групу $\mathbb{Z}_m$.

№	n	m	№	n	m	№	n	m	№	n	m	№	n	m
1	4	18	**7**	8	12	**13**	6	21	**19**	12	16	**25**	12	14
2	10	15	**8**	4	10	**14**	6	10	**20**	9	12	**26**	12	15
3	10	12	**9**	10	18	**15**	4	18	**21**	9	15	**27**	14	20
4	16	18	**10**	16	20	**16**	15	20	**22**	16	22	**28**	15	21
5	18	21	**11**	20	25	**17**	12	20	**23**	15	24	**29**	12	21
6	18	20	**12**	20	26	**18**	20	28	**24**	21	27	**30**	24	28

Методичні вказівки

Гомоморфізм, що діє із будь-якої циклічної групи, однозначно визначається своїм значенням на твірній, оскільки будь-який елемент циклічної групи є за визначенням деяким степенем твірної. Таким чином, для визначення гомоморфізму $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ достатньо визначити $f(\overline{1})$, оскільки елемент $\overline{1} \in \mathbb{Z}_n$ є твірним (як правило, однією із твірних в адитивній групі $\mathbb{Z}_n$).

Введемо позначення $\overline{k} = f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_m$, де $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Із означення гомоморфізму маємо:

$$f(\overline{0}) = f(\overline{n}) = f\left((\overline{1})^{n,+}\right) = \left(f(\overline{1})\right)^{n,+} = \overline{k}^{n,+} = \overline{kn} \in \mathbb{Z}_m.$$

З іншого боку, $f(\overline{0}) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_m$ (гомоморфний образ нейтрального елемента – нейтральний елемент). Отже, отримаємо таку рівність у $\mathbb{Z}_m$:

$$(\overline{kn} = \overline{0}) \Leftrightarrow ((kn \bmod m) = 0).$$

Таким чином, число k може набувати лише таких значень із множини $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, за яких kn ділиться на m. Введемо до розгляду числа m_1 та n_1 із рівностей

$$m = \text{НСД}(n, m) \cdot m_1,\ \ n = \text{НСД}(n, m) \cdot n_1.$$

Оскільки $\text{НСД}(n_1, m_1) = 1$ (числа m_1 та n_1 за побудовою взаємно прості), отримуємо:

$$(\overline{kn} = \overline{0}) \Leftrightarrow ((kn \bmod m) = 0) \Leftrightarrow ((kn_1 \bmod m_1) = 0) \Leftrightarrow ((k \bmod m_1) = 0).$$

Отже, отримуємо такі можливі значення k (нагадаємо, що нас цікавлять лише значення $0 \leq k \leq m-1$):

$$k \in \{0, m_1, 2m_1, \ldots, (\text{НСД}(n,m)-1)m_1\}.$$

Тепер значення гомоморфізму f на кожному елементі $\overline{j} \in \mathbb{Z}_n$ можна обчислити із співвідношення

$$f(\overline{j}) = (f(\overline{1}))^{j,+} = \overline{k}^{j,+} = \overline{kj} \in \mathbb{Z}_m.$$

Зауваження 5. Загальна кількість гомоморфізмів $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ дорівнює НСД(n,m) (за кількістю можливих значень $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$).

Зауваження 6. За будь-яких $n, m \in \mathbb{N}$, завжди існує так званий *тривіальний гомоморфізм* $f_0 \colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, який завжди приймає значення $\overline{0} \in \mathbb{Z}_m$ (f_0, очевидно, відповідає значенню $k = 0$).

Приклад 4.5. Побудуємо гомоморфізми із адитивної групи $\mathbb{Z}_{12}$ у групу $\mathbb{Z}_8$. У введених позначеннях маємо:

$$n = 12,\ m = 8,\ \text{НСД}(n,m) = 4,\ n_1 = 3,\ m_1 = 2.$$

Отже, отримуємо такі можливі значення для $f(\overline{1}) = \overline{k} \in \mathbb{Z}_8$, $0 \leq k \leq 7$:

$$k_0 = 0 \cdot 2 = 0,\ k_1 = 1 \cdot 2 = 2,\ k_2 = 2 \cdot 2 = 4,\ k_3 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Гомоморфізми, які відповідають знайденим значенням k, позначимо через f_0, f_2, f_4, f_6; їхні значення зведемо в таблицю (обчислення значень наведемо лише для f_2):

$\overline{j}$	$f_0(\overline{j})$	$f_2(\overline{j})$	$f_4(\overline{j})$	$f_6(\overline{j})$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 2} = \overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 3} = \overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 4} = \overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 5} = \overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 6} = \overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 7} = \overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 8} = \overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 9} = \overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 10} = \overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{2 \cdot 11} = \overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$

4.4. Мультиплікативна група кільця

Для заданого натурального числа n:

- визначити мультиплікативну групу $\mathbb{Z}_n^*$ кільця $\mathbb{Z}_n$;
- для кожного елемента $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n^*$:
  - визначити обернений елемент $\overline{x}^{-1}$;
  - побудувати циклічну підгрупу $[\overline{x}]$;
  - визначити порядок $|\overline{x}|$;
- зробити висновок щодо циклічності групи $\mathbb{Z}_n^*$;
- для заданого елемента $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n^*$:
  - побудувати фактор-групу $\mathbb{Z}_n^* / _{[\overline{a}]}$;
  - побудувати таблицю Келі групи $\mathbb{Z}_n^* / _{[\overline{a}]}$;
  - дослідити $\mathbb{Z}_n^* / _{[\overline{a}]}$ на циклічність.

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	9	15	16	20	24	30	28	32	28	27
a	4	2	9	3	23	7	3	25	13	10

№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
n	16	20	18	30	32	15	35	9	16	20
a	15	9	17	11	9	4	11	8	3	19

№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
n	28	27	15	28	32	28	30	19	14	24
a	9	19	11	5	17	15	29	16	13	5

Методичні вказівки

Кільце лишків $\mathbb{Z}_n$ є прикладом скінченного кільця з одиницею. Оскільки у скінченних кільцях оборотними є всі ненульові елементи, які не є дільниками нуля, несkладно довести, що мультиплікативна група $\mathbb{Z}_n^*$ кільця $\mathbb{Z}_n$ складається із класів лишків $\overline{k}$, де k – взаємно просте з n:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{\overline{k} \colon \text{НСД}(n, k) = 1\}, \tag{9}$$

Вправа. *Довести співвідношення* (9).

Зауваження 7. Функцію $\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$, що визначає кількість елементів в $\mathbb{Z}_n^*$, називають *функцією Ейлера*. Для обчислення значень функції Ейлера відомі (див., напр., [10]) такі формули:

$$\varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}; \tag{10}$$

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{m_1})\varphi(p_2^{m_2})\cdots\varphi(p_k^{m_k}) = n(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})\cdots(1-\tfrac{1}{p_k}), \tag{11}$$

де p – довільне просте число, $n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\dots p_k^{m_k}$ розкладено в добуток степенів k різних простих чисел. Формулу (10) легко отримати із (9), розбивши послідовність $1,\dots,p,p+1,\dots,2p,\dots,p^{m-1}+1,\dots,p^m$ на $\frac{p^m}{p} = p^{m-1}$ інтервалів по p чисел: кожен з інтервалів $jp+1,\dots,(j+1)p$ містить p чисел, з яких $p-1$ число (усі, окрім $(j+1)p$) взаємно прості з p^m; отже, згідно з (9), група $\mathbb{Z}_n^*$ дійсно містить $(p-1)p^{m-1}$ чисел. Формулу (11) можна довести з (10), використовуючи розклад кільця $\mathbb{Z}_n$ у пряму суму кілець $\mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{m_k}}$ (див., напр., [10]).

Приклад 4.6. Визначимо мультиплікативну групу $\mathbb{Z}_{40}^*$ кільця лишків $\mathbb{Z}_{40}$, усі циклічні підгрупи $\mathbb{Z}_{40}^*$, порядки елементів, а також обернені елементи $\overline{x}^{-1}$ для кожного $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{40}^*$. Використовуючи (9), отримуємо:

$$\mathbb{Z}_{40}^* = \{\overline{1},\overline{3},\overline{7},\overline{9},\overline{11},\overline{13},\overline{17},\overline{19},\overline{21},\overline{23},\overline{27},\overline{29},\overline{31},\overline{33},\overline{37},\overline{39}\}.$$

Отже, $|\mathbb{Z}_{40}^*| = 16$, що відповідає (11): $\varphi(40) = 40(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 16$.

Обчислимо циклічні підгрупи $\mathbb{Z}_{40}^*$. Зазначимо, що, обчислюючи циклічну підгрупу $[\overline{x}]$, ми автоматично отримуємо порядок $|\overline{x}|$ твірного елемента $\overline{x}$. Крім того, одразу отримуємо обернений елемент $\overline{x}^{-1} = \overline{x}^{|\overline{x}|-1}$.

$\overline{x}$	$[\overline{x}]$	$\lvert\overline{x}\rvert$	$\overline{x}^{-1}$
$\overline{1}$	$\{\overline{1}\}$	1	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\{\overline{3},\overline{9},\overline{27},\overline{1}\}$	4	$\overline{27}$
$\overline{7}$	$\{\overline{7},\overline{9},\overline{23},\overline{1}\}$	4	$\overline{23}$
$\overline{9}$	$\{\overline{9},\overline{1}\}$	2	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\{\overline{11},\overline{1}\}$	2	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\{\overline{13},\overline{9},\overline{37},\overline{1}\}$	4	$\overline{37}$
$\overline{17}$	$\{\overline{17},\overline{9},\overline{33},\overline{1}\}$	4	$\overline{33}$
$\overline{19}$	$\{\overline{19},\overline{1}\}$	2	$\overline{19}$

$\overline{x}$	$[\overline{x}]$	$\lvert\overline{x}\rvert$	$\overline{x}^{-1}$
$\overline{21}$	$\{\overline{21},\overline{1}\}$	2	$\overline{21}$
$\overline{23}$	$\{\overline{23},\overline{9},\overline{7},\overline{1}\}$	4	$\overline{7}$
$\overline{27}$	$\{\overline{27},\overline{9},\overline{3},\overline{1}\}$	4	$\overline{3}$
$\overline{29}$	$\{\overline{29},\overline{1}\}$	2	$\overline{29}$
$\overline{31}$	$\{\overline{31},\overline{1}\}$	2	$\overline{31}$
$\overline{33}$	$\{\overline{33},\overline{9},\overline{17},\overline{1}\}$	4	$\overline{17}$
$\overline{37}$	$\{\overline{37},\overline{9},\overline{13},\overline{1}\}$	4	$\overline{13}$
$\overline{39}$	$\{\overline{39},\overline{1}\}$	2	$\overline{39}$

Отже, жоден елемент $\mathbb{Z}_{40}^*$ не має порядок $|\mathbb{Z}_{40}^*| = 16$, тобто жодна з її підгруп не збігається із самою групою. Таким чином, група $\mathbb{Z}_{40}^*$ не циклічна.

Для обчислення фактор-групи $\mathbb{Z}_n^*/_{[\overline{a}]}$ бачиться недоцільним використовувати еквівалентність $(\overline{(\overline{x})} = \overline{(\overline{y})}) \Leftrightarrow (\overline{x} * \overline{y}^{-1} \in [\overline{a}])$ (див., напр., [23]), оскільки немає явної формули для обчислення оберненого елемента в $\mathbb{Z}_n^*$. Натомість, враховуючи скінченність $\mathbb{Z}_n^*$, можна обчислювати суміжні класи безпосередньо за визначенням: $\overline{(\overline{x})} = \{\overline{xa^k} \colon 0 \le k \le |\overline{a}| - 1\}$.

Приклад 4.7. Обчислимо фактор-групу $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$, складемо таблицю Келі та дослідимо $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$ на циклічність. З урахуванням попереднього прикладу: $[\overline{9}] = \{\overline{9}, \overline{1}\}$, $|[\overline{9}]| = 2$, а отже $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$ має містити $\frac{16}{2} = 8$ (різних) суміжних класів, кожен з яких містить 2 елементи. Безпосередньо за визначенням $\overline{(\overline{x})} = \overline{x} \cdot [\overline{9}] = \{\overline{x \cdot 9}, \overline{x \cdot 1}\}$ отримуємо:

$\overline{x}$	$\overline{(\overline{x})}$
$\overline{1}$	$\{\overline{9}, \overline{1}\}$
$\overline{3}$	$\{\overline{27}, \overline{3}\}$
$\overline{7}$	$\{\overline{23}, \overline{7}\}$
$\overline{9}$	$\{\overline{1}, \overline{9}\}$

$\overline{x}$	$\overline{(\overline{x})}$
$\overline{11}$	$\{\overline{19}, \overline{11}\}$
$\overline{13}$	$\{\overline{37}, \overline{13}\}$
$\overline{17}$	$\{\overline{33}, \overline{17}\}$
$\overline{19}$	$\{\overline{11}, \overline{19}\}$

$\overline{x}$	$\overline{(\overline{x})}$
$\overline{21}$	$\{\overline{29}, \overline{21}\}$
$\overline{23}$	$\{\overline{7}, \overline{23}\}$
$\overline{27}$	$\{\overline{3}, \overline{27}\}$
$\overline{29}$	$\{\overline{21}, \overline{29}\}$

$\overline{x}$	$\overline{(\overline{x})}$
$\overline{31}$	$\{\overline{39}, \overline{31}\}$
$\overline{33}$	$\{\overline{17}, \overline{33}\}$
$\overline{37}$	$\{\overline{13}, \overline{37}\}$
$\overline{39}$	$\{\overline{31}, \overline{39}\}$

Як і очікувалося, отримано 8 різних суміжних класів, що попарно не перетинаються (кожен клас у наведеній таблиці повторюється двічі):

$$\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]} = \{\overline{(\overline{1})}, \overline{(\overline{3})}, \overline{(\overline{7})}, \overline{(\overline{11})}, \overline{(\overline{13})}, \overline{(\overline{17})}, \overline{(\overline{21})}, \overline{(\overline{31})}\} =$$
$$= \{\{\overline{1}, \overline{9}\}, \{\overline{3}, \overline{27}\}, \{\overline{7}, \overline{23}\}, \{\overline{11}, \overline{19}\}, \{\overline{13}, \overline{37}\}, \{\overline{17}, \overline{33}\}, \{\overline{21}, \overline{29}\}, \{\overline{31}, \overline{39}\}\}.$$

Операція «$\cdot$» переноситься на фактор-групу згідно визначення (див., напр., [10, 23]):

$$\overline{(\overline{x})} \cdot \overline{(\overline{y})} = \overline{(\overline{x} \cdot \overline{y})} = \overline{(\overline{x \cdot y})}.$$

Так, для $\overline{(\overline{21})} \cdot \overline{(\overline{17})}$ маємо:

$$\overline{(\overline{21})} \cdot \overline{(\overline{17})} = \overline{(\overline{21 \cdot 17})} = \overline{(\overline{357})} = \overline{(\overline{357 \mod 40})} = \overline{(\overline{37})} = \{\overline{13}, \overline{37}\} = \overline{(\overline{13})}.$$

Складемо таблицю Келі групи $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$.

$\cdot$	$\overline{(\overline{\mathbf{1}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{3}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{7}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{11}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{13}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{17}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{21}})}$	$\overline{(\overline{\mathbf{31}})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{1}})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{7})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{31})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{3}})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{7})}$	$\overline{(\overline{13})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{7}})}$	$\overline{(\overline{7})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{17})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{11}})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{23})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{21})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{13}})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{23})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{3})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{17}})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{7})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{21}})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{7})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{1})}$	$\overline{(\overline{11})}$
$\overline{(\overline{\mathbf{31}})}$	$\overline{(\overline{31})}$	$\overline{(\overline{13})}$	$\overline{(\overline{17})}$	$\overline{(\overline{21})}$	$\overline{(\overline{3})}$	$\overline{(\overline{7})}$	$\overline{(\overline{11})}$	$\overline{(\overline{1})}$

Користуючись таблицею Келі, випишемо циклічні підгрупи $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$:

$\overline{(\overline{x})}$	$[\overline{(\overline{x})}]$
$\overline{(\overline{1})}$	$\{\overline{(\overline{1})}\}$
$\overline{(\overline{3})}$	$\{\overline{(\overline{3})}, \overline{(\overline{1})}\}$
$\overline{(\overline{7})}$	$\{\overline{(\overline{7})}, \overline{(\overline{1})}\}$
$\overline{(\overline{11})}$	$\{\overline{(\overline{11})}, \overline{(\overline{1})}\}$

$\overline{(\overline{x})}$	$[\overline{(\overline{x})}]$
$\overline{(\overline{13})}$	$\{\overline{(\overline{13})}, \overline{(\overline{1})}\}$
$\overline{(\overline{17})}$	$\{\overline{(\overline{17})}, \overline{(\overline{1})}\}$
$\overline{(\overline{21})}$	$\{\overline{(\overline{21})}, \overline{(\overline{1})}\}$
$\overline{(\overline{31})}$	$\{\overline{(\overline{31})}, \overline{(\overline{1})}\}$

Отже, всі елементи $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$, окрім нейтрального елемента $\overline{(\overline{1})}$, мають порядок 2, тобто жодна з її підгруп не збігається із самою групою. Таким чином, група $\mathbb{Z}_{40}^*/_{[\overline{9}]}$ не циклічна.

5. Частково впорядковані множини та решітки

5.1. Частково впорядковані множини. Верхні та нижні межі

Для заданої системи множин A, впорядкованої за відношенням вкладення «$\subset$», необхідно:

- побудувати діаграму Гессе;
- для заданої підмножини $B \subset A$ визначити максимальні та мінімальні елементи, найбільші та найменші елементи, супремум та інфімум;
- визначити, чи є задана частково впорядкована множина $\langle A, \subset \rangle$ решіткою;
- якщо $\langle A, \subset \rangle$ є решіткою, дослідити її на дистрибутивність та визначити доповнення для кожного елемента.

1. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,4\},\{1,2\},\{1\}\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,4\}\}$.
2. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2\}\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\}\}$.
3. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{1,2\},\{4\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{3,4\}\}$.
4. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{4\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,4\}\}$.
5. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{1,2\},\{4\},\{2\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{3,4\}\}$.
6. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{3\},\{2\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{3,4\}\}$.
7. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3\},\{4\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3\}\}$.

8. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1\},\{2,3,4\},\{2,3\},\{4\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{4\}\}$.

9. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1\},\{2,3,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{4\},\varnothing\}$,
   $B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{4\}\}$.

10. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,3\},\{1,2\},\{1\},\{2,3,4\},\{2,3\},\{4\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{2,3,4\},\{1,2\},\{4\}\}$.

11. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\},\{2\},\{1\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,4\}\}$.

12. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{2,3,4\},\{3,4\},\{3\},\{2,3\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{3,4\}\}$.

13. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{2\},\{1\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1\}\}$.

14. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{2,3\}\}$.

15. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{2,3,4\},\{2,3\},\{3\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{2,3\}\}$.

16. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

17. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

18. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

19. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2\},\{4\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

20. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,2,4\},\{1,4\},\{2,4\},\{4\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{1,4\}\}$.

21. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,2,4\},\{1,4\},\{4\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{4\},\{1,4\}\}$.

22. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,2,4\},\{1,4\},\{2,4\},\{2\},\varnothing\}$,
    $B = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{1,4\}\}$.

23. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\},\{1,2,4\},\{1,4\}\}$,
$B = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,4\}\}$.

24. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3\},\{1\},\{2,3\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,4\},\{2,3\},\{1\}\}$.

25. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{1\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1\}\}$.

26. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,3\},\{1,3\},\{1\}\}$.

27. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\}\}$.

28. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,3\},\{3\},\{1\}\}$.

29. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,3\},\{1,3\},\{1,2\}\}$.

30. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\varnothing\}$,
$B = \{\{1,2,3\},\{1,3\},\{1,2\}\}$.

Методичні вказівки

Для побудови діаграми Гессе заданої частково впорядкованої множини (ЧВМ) необхідно:

1. Розташувати на площині елементи заданої ЧВМ згідно з обраним напрямком «зростання». Ми вважатимемо, що елементи «зростають» знизу вгору, тобто для $a \prec b$ елемент a розташовується нижче елемента b.

2. З'єднати ребром кожну пару елементів $a \prec b$ з безпосереднім передуванням.

Приклад 5.1. Розглянемо сукупність множин

$$A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1\},\{2,4\},\varnothing\},$$

впорядковану за відношенням вкладення «$\subset$». Множині $\{1,2,3,4\}$ передують всі елементи сукупності A, сама множина $\{1,2,3,4\}$, очевидно, не передує жодній з множин сукупності A (окрім самої себе). Множини $\{1,2,3\}$ та $\{1,2,4\}$ передують множині $\{1,2,3,4\}$ безпосередньо, оскільки містять лише на один елемент менше, ніж містить $\{1, 2, 3, 4\}$. Множині $\{1, 2, 3\}$ строго передують множини $\{1\}$ і $\varnothing$, однак безпосередньо передує лише $\{1\}$. Множині $\{1, 2, 4\}$ строго передують множини $\{1\}$, $\{2, 4\}$ і $\varnothing$, безпосередньо передують $\{1\}$ і $\{2, 4\}$. Кожній з множин $\{1\}$ та $\{2, 4\}$ строго передує лише $\varnothing$, і це передування безпосереднє. Нарешті, порожній множині $\varnothing$ не передує жодна з множин, окрім самої $\varnothing$. Тепер маємо все необхідне для побудови діаграми Гессе (див. рис. 5).

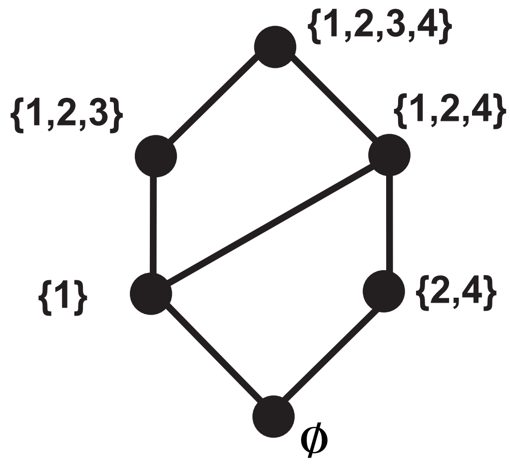


Рис. 5

Мінімальний (максимальний) елемент підмножини B частково впорядкованої множини A – це елемент, який належить B, і якому не передує (відповідно, за яким не слідує) жоден інший елемент із B. У випадку невеликої кількості елементів у множині B, пошук мінімальних та максимальних елементів зручно проводити на діаграмі Гессе. Зазначимо, що будь-яка скінченна непорожня множина B обов'язково містить принаймні один мінімальний і один максимальний елемент.

Приклад 5.2. Знайдемо мінімальні та максимальні елементи для множини $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2, 4\}\}$ у складі ЧВМ $\langle A, \subset \rangle$ з прикладу 5.1. Елемент $\{1, 2, 3\}$ слідує за $\{1\}$ і непорівнянний з $\{2, 4\}$, а отже є максимальним (але не мінімальним) в B. Елемент $\{1\}$ передує елементу $\{1, 2, 3\}$ і непорівнянний з $\{2, 4\}$, а отже є мінімальним (але не максимальним) в B. Елемент $\{2, 4\}$ непорівнянний з елементами $\{1, 2, 3\}$ та $\{1\}$, а отже є одночасно мінімальним і максимальним в B.

Найменший (найбільший) елемент підмножини B частково впорядкованої множини A – це елемент, який належить B, і який передує всім іншим елементам (слідує за всіма іншими елементами) множини B. На відміну від мінімального (максимального) елемента, найменший (найбільший) елемент множини B має бути порівнянний з кожним елементом множини B. Зазначимо, що будь-яка множина B містить не більше одного мінімального та не більше одного максимального елемента. За визначенням, найменший (найбільший) елемент множини B є одночасно мінімальним (максимальним) елементом B, зворотного наслідку немає.

Приклад 5.3. Множина $\{\{1,2,4\},\{1\},\{2,4\}\}$ у складі ЧВМ $\langle A, \subset\rangle$ з прикладу 5.1 містить найбільший елемент $\{1,2,4\}$ (який одночасно є максимальним) і не містить найменшого (хоча містить мінімальні елементи $\{1\}$ і $\{2,4\}$).

Для визначення супремуму (інфімуму) підмножини B заданої ЧВМ $\langle A, \subset\rangle$ слід спочатку визначити всі верхні (нижні) межі множини B. *Супремум (інфімум)*, якщо існує, є найменшою (найбільшою) у сенсі заданого відношення порядку серед усіх верхніх (відповідно нижніх) меж множини B. Підкреслимо, що супремум та інфімум, як і будь-яка верхня чи нижня межа, належать заданій ЧВМ A і можуть не належати множині $B \subset A$.

У випадку скінченної ЧВМ з невеликою кількістю елементів, пошук інфімумів та супремумів зручно здійснювати на діаграмі Гессе.

Приклад 5.4. Множина $B = \{\{1,2,4\},\{1\},\{2,4\}\}$ у складі ЧВМ $\langle A, \subset\rangle$ з прикладу 5.1 має верхні межі $\{1,2,3,4\}$ та $\{1,2,4\}$, найменшою з яких є $\{1,2,4\}$. Єдиною (і, очевидно, точною) нижньою межею B є порожня множина. Отже, $\sup B = \{1,2,4\}$, $\inf B = \varnothing$.

Частково впорядкована множина $\langle A, \subset\rangle$ визначає решітку з операціями $x \vee y = \sup\{x,y\}$ та $x \wedge y = \inf\{x,y\}$ тоді й тільки тоді, коли $\sup\{x,y\}$ та $\inf\{x,y\}$ існують для будь-яких $x, y \in A$. Оскільки

$$(x \prec y) \Leftrightarrow (\sup\{x,y\} = y) \Leftrightarrow (\inf\{x,y\} = x),$$

існування $\sup\{x,y\}$ та $\inf\{x,y\}$ достатньо перевірити лише для непорівнянних $x, y \in A$. Нагадаємо, що решітку іноді визначають саме як ЧВМ $\langle A, \subset\rangle$ з умовою, що $\sup\{x,y\}$ та $\inf\{x,y\}$ існують для будь-яких $x, y \in A$.

Приклад 5.5. Частково впорядкована множина $\langle A, \subset\rangle$ з прикладу 5.1 є решіткою (визначає решітку), оскільки допускає лише дві пари непорівнянних елементів, для яких існує супремум та інфімум:

$$\sup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\} = \sup\{\{1,2,3\},\{2,4\}\} = \{1,2,3,4\},$$
$$\inf\{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\} = \{1\},\ \inf\{\{1,2,3\},\{2,4\}\} = \varnothing.$$

Дистрибутивність решітки з невеликою кількістю елементів доцільно перевіряти за допомогою відомого критерія дистрибутивності: решітка є дистрибутивною тоді і тільки тоді, коли вона не містить підрешіток, ізоморфних решіткам N_5 та M_3 (див. рис. 6 і 7 відповідно).

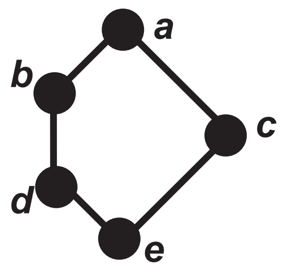


Рис. 6. Решітка N_5

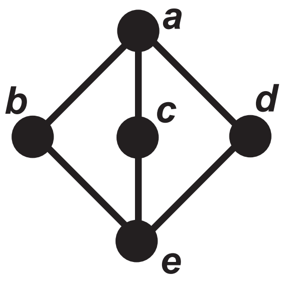


Рис. 7. Решітка M_3

Приклад 5.6. Дослідимо на дистрибутивність решітку $\langle A, \subset \rangle$ з прикладу 5.1. Оскільки множина A містить лише 6 елементів, тобто містить лише $C_6^5 = 6$ підмножин з 5 елементів, доцільно скористатись критерієм дистрибутивності. Підмножина $A \setminus \{\{1,2,3,4\}\}$ (див. рис. 8) не є решіткою, оскільки не містить супремуму множини $\{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\}$. Підмножина $A \setminus \{\varnothing\}$ є дуальною до $A \setminus \{\{1,2,3,4\}\}$. Множина $A \setminus \{\{1,2,3\}\}$ (див. рис. 9) є решіткою, і є підрешіткою решітки A, але ця підрешітка не ізоморфна ані N_5, ані M_3. Підмножина $A \setminus \{\{2,4\}\}$ є дуальною до $A \setminus \{\{1,2,3\}\}$. Підмножина $A \setminus \{\{1,2,4\}\}$ (див. рис. 10) є решіткою, але не є підрешіткою решітки A, оскільки супремум множини $\{\{1\},\{2,4\}\}$ набуває різних значень в A і в $A \setminus \{\{1,2,4\}\}$ ($\{1,2,4\}$ і $\{1,2,3,4\}$ відповідно). Підмножина $A \setminus \{\{1\}\}$ є дуальною до $A \setminus \{\{1.2,4\}\}$.

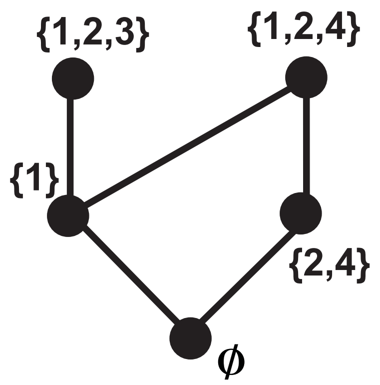


Рис. 8

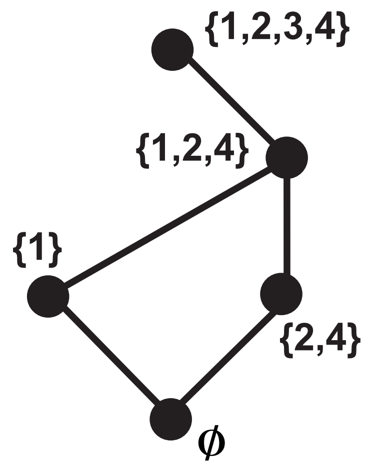


Рис. 9

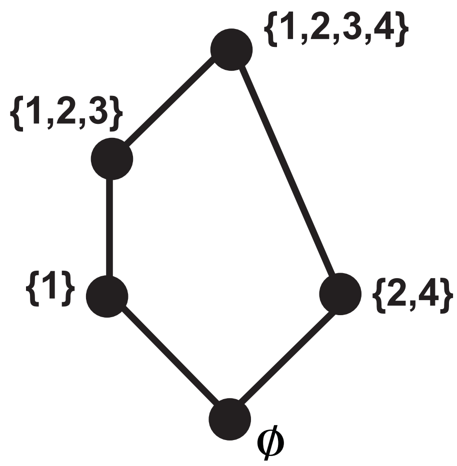


Рис. 10

Отже, жодна з 5-елементних підмножин решітки $\langle A, \subset\rangle$ не є підрешіткою, ізоморфною N_5 чи M_3, а отже, згідно з критерієм дистрибутивності, решітка $\langle A, \subset\rangle$ дистрибутивна.

Доповнення до елементів в обмеженій решітці можна шукати безпосередньо за визначенням, тобто для фіксованого елемента a знайти всі такі елементи b, що $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Зазначимо, що порівнянні елементи можуть бути доповненням один до одного лише тоді, коли один з них є одиницею, а другий – нулем решітки. Отже, якщо елемент a не є одиницею чи нулем решітки, доповнення до нього слід шукати лише серед елементів, непорівнянних з a.

Приклад 5.7. Визначимо доповнення до кожного елементу в решітці $\langle A, \subset\rangle$ з прикладу 5.1. Елемент $\{1, 2, 3, 4\}$ є одиницею решітки, а отже має єдине доповнення $\varnothing$ (нуль решітки). Аналогічно, елемент $\varnothing$ є нулем решітки, а отже має єдине доповнення $\{1, 2, 3, 4\}$ (одиниця решітки). Елемент $\{1, 2, 3\}$ непорівнянний лише з елементами $\{1, 2, 4\}$ та $\{2, 4\}$. Обчислюючи відповідні диз'юнкції і кон'юнкції, отримуємо:

$$\{1,2,3\} \vee \{1,2,4\} = \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3\} \wedge \{1,2,4\} = \{1\} \neq \varnothing;$$
$$\{1,2,3\} \vee \{2,4\} = \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3\} \wedge \{2,4\} = \varnothing.$$

Отже, елемент $\{1, 2, 3\}$ має одне доповнення – елемент $\{2, 4\}$. Аналогічно, елемент $\{2, 4\}$ непорівнянний з елементами $\{1, 2, 3\}$ та $\{1\}$, але $\{2, 4\} \vee \{1\} = \{1, 2, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4\}$; отже, $\{2, 4\}$ має одне доповнення – елемент $\{1, 2, 3\}$. Елемент $\{1, 2, 4\}$ непорівнянний лише з $\{1, 2, 3\}$, але $\{1, 2, 3\} \wedge \{1, 2, 4\} = \{1\} \neq \varnothing$; отже, елемент $\{1, 2, 4\}$ не має жодного доповнення. Аналогічно, жодного доповнення не має елемент $\{1\}$ – він непорівнянний лише з $\{2, 4\}$, але $\{2, 4\} \vee \{1\} = \{1, 2, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4\}$. Отже, отримали дві пари взаємодоповнених елементів:

$$\{1,2,3,4\} \leftrightsquigarrow \varnothing,\ \{1,2,3\} \leftrightsquigarrow \{2,4\}.$$

Дана решітка не доповнена, оскільки два елементи ($\{1, 2, 4\}$ та $\{1\}$) не мають жодного доповнення.

Приклад 5.8. Розглянемо сукупність множин

$$\{\{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \varnothing\},$$

впорядковану за відношенням вкладення «$\subset$» (діаграма Гессе зображена на рис. 11).

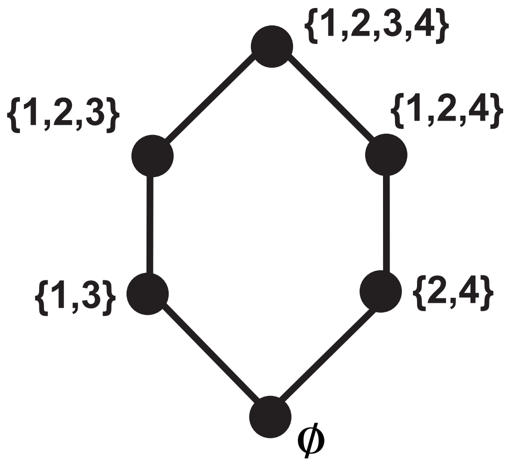


Рис. 11

Ця ЧВМ є решіткою, оскільки для всіх пар елементів (достатньо перевірити лише пари непорівнянних елементів) існує супремум та інфімум:

$$\sup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\} = \sup\{\{1,2,3\},\{2,4\}\} = \{1,2,3,4\},$$
$$\sup\{\{1,3\},\{1,2,4\}\} = \sup\{\{1,3\},\{2,4\}\} = \{1,2,3,4\},$$
$$\inf\{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\} = \inf\{\{1,2,3\},\{2,4\}\} = \varnothing,$$
$$\inf\{\{1,3\},\{1,2,4\}\} = \inf\{\{1,3\},\{2,4\}\} = \varnothing.$$

Із наведених співвідношень бачимо, що елементи $\{1,2,3\}$ і $\{1,3\}$ мають по два доповнення – $\{1,2,4\}$ і $\{2,4\}$. Отже, отримали п'ять пар взаємодоповнених елементів (враховуючи одиницю і нуль решітки):

$$\{1,2,3,4\} \leftrightsquigarrow \varnothing,\ \{1,2,3\} \leftrightsquigarrow \{1,2,4\},\ \{1,2,3\} \leftrightsquigarrow \{2,4\},$$
$$\{1,3\} \leftrightsquigarrow \{1,2,4\},\ \{1,3\} \leftrightsquigarrow \{2,4\}.$$

Дана решітка доповнена, оскільки кожен елемент має принаймні одне доповнення.

Нагадаємо, що в дистрибутивній обмеженій решітці кожен елемент має не більше одного доповнення. Цей факт іноді дозволяє довести недистрибутивність решітки. Так, решітка з прикладу 5.8 недистрибутивна, оскільки деякі елементи мають по два доповнення.

5.2. Решітка дільників натурального числа

Для решітки L_n дільників фіксованого числа $n \in \mathbb{N}$ (диз'юнкція та кон'юнкція визначені відповідно як найменше спільне кратне та найбільший спільний дільник) необхідно:

- побудувати діаграму Гессе;
- визначити, які елементи мають в L_n доповнення;
- обчислити супремум та інфімум підмножини $A \subset L_n$.

№	n	A	№	n	A
1	30	$\{2, 6, 15\}$	**16**	30	$\{3, 5, 10\}$
2	30	$\{2, 5, 15\}$	**17**	30	$\{3, 6, 10\}$
3	20	$\{2, 4, 5\}$	**18**	20	$\{4, 5, 10\}$
4	28	$\{4, 7, 14\}$	**19**	28	$\{2, 4, 7\}$
5	24	$\{4, 6, 12\}$	**20**	24	$\{6, 8, 12\}$
6	24	$\{2, 4, 6\}$	**21**	24	$\{2, 3, 4\}$
7	18	$\{2, 6, 9\}$	**22**	18	$\{3, 6, 9\}$
8	18	$\{2, 3, 9\}$	**23**	18	$\{2, 3, 6\}$
9	40	$\{2, 5, 8\}$	**24**	40	$\{4, 5, 10\}$
10	40	$\{5, 8, 20\}$	**25**	40	$\{2, 8, 10\}$
11	90	$\{2, 5, 15\}$	**26**	90	$\{2, 10, 45\}$
12	90	$\{6, 18, 45\}$	**27**	90	$\{2, 9, 45\}$
13	60	$\{3, 6, 15\}$	**28**	60	$\{3, 20, 30\}$
14	60	$\{4, 10, 20\}$	**29**	60	$\{2, 3, 20\}$
15	84	$\{4, 6, 12\}$	**30**	84	$\{3, 12, 42\}$

Методичні вказівки

Для побудови діаграми Гессе заданої ЧВМ необхідно:

1. Розташувати на площині елементи заданої ЧВМ згідно з обраним напрямком «зростання». Ми вважаємо, що елементи «зростають» знизу вгору, тобто для $a \prec b$ елемент a розташовується нижче елемента b.

2. З'єднати ребром кожну пару елементів $a \prec b$ з безпосереднім передуванням.

Приклад 5.9. Побудувати діаграму Гессе решітки L_{72}.

Нагадаємо, що в решітці L_n (згідно прийнятих в нашому курсі позначень) відношення порядку збігається з відношенням подільності:

$$(a \preccurlyeq b) \Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z} \colon b = ka).$$

Очевидно, що $L_{72} = \{2^i 3^j : 0 \leq i \leq 3;\ 0 \leq j \leq 2\}$. Легко перевірити, що $a \prec b$ безпосередньо тоді і тільки тоді, коли $b = p \cdot a$, де p – деяке просте число. Тепер можемо побудувати діаграму Гессе (див. рис. 12).

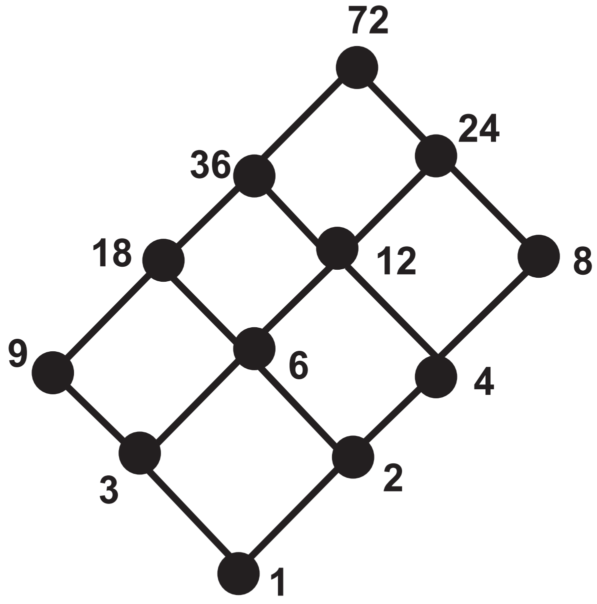


Рис. 12

Для визначення, які елементи в заданій решітці L_n мають доповнення, слід розкласти число n на прості множники:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m},$$

де p_1, p_2, …,p_m – прості числа. Очевидно, що будь-який елемент $a \in L_n$ має в розкладі на прості множники лише числа p_1, p_2, …, p_m:

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m},$$

де $0 \le a_j \le n_j$ $(j = 1, 2, \dots, m)$.

Відомо, що елемент a має доповнення тоді і тільки тоді, коли

$$\forall\, j \in \{1, 2, \dots, m\} \colon a_j \in \{0, n_j\}.$$

Доповнення $b \in L_n$ до елемента $a \in L_n$ можна обчислити за наступним правилом:

$$\begin{gathered} a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}, \quad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_m^{b_m}, \\ (a_j = 0) \Rightarrow (b_j = n_j), \quad (a_j = n_j) \Rightarrow (b_j = 0); \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{gathered} \tag{12}$$

Доповнення до елементів в решітці L_n можна шукати і безпосередньо, користуючись визначенням доповнення. Оскільки диз'юнкція і кон'юнкція в L_n обчислюються відповідно як НСК та НСД, отримуємо:

$$(b \in L_n \text{ є доповненням до } a \in L_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{НСК}(a, b) = n, \\ \text{НСД}(a, b) = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Приклад 5.10. Визначити, які елементи в решітці L_{72} мають доповнення.

Розкладемо число 72 на прості множники: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Згідно з правилом (12) отримуємо наступні пари «елемент $\leftrightarrows$ доповнення»:

$$1 = 2^0 \cdot 3^0 \leftrightarrows 72 = 2^3 \cdot 3^2;$$
$$8 = 2^3 \cdot 3^0 \leftrightarrows 9 = 2^0 \cdot 3^2.$$

Зазначимо, що отриманий результат підтверджується і співвідношеннями (13):

$$\text{НСК}(9, 8) = \text{НСК}(72, 1) = 72; \quad \text{НСД}(9, 8) = \text{НСД}(72, 1) = 1.$$

Для визначення супремуму (інфімуму) підмножини A заданої ЧВМ слід спочатку визначити всі верхні (нижні) межі множини A. Супремум (інфімум), якщо існує, є найменшою (найбільшою) у сенсі заданого відношення порядку серед усіх верхніх (відповідно нижніх) меж множини A. Нагадаємо, що супремум та інфімум належать заданій ЧВМ і можуть не належати самій множині A.

У випадку скінченної ЧВМ з невеликою кількістю елементів, пошук інфімумів та супремумів зручно здійснювати на діаграмі Гессе.

Приклад 5.11. У частково впорядкованій множині L_{72} знайти інфімум та супремум множини $A = \{4, 6, 12\}$.

Діаграма Гессе множини L_{72} наведена вище (рис. 12). Легко зрозуміти, що верхніми межами множини $\{4, 6, 12\}$ є елементи 12, 24, 36 та 72, серед яких найменшою (тобто супремумом) є 12. Нижніми межами множини $\{4, 6, 12\}$ є елементи 1 і 2, серед яких найбільшою (тобто інфімумом) є 2. Отже, отримуємо:

$$\sup\{4, 6, 12\} = 12, \quad \inf\{4, 6, 12\} = 2.$$

6. Булеві алгебри

6.1. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми

Для булевої функції, заданої вектором значень:
1) побудувати ДДНФ і ДКНФ;
2) знайти всі тупикові диз'юнктивні нормальні форми:
   а) за допомогою карт Карно або діаграм Вейча;
   б) методом Квайна – Мак-Класкі з подальшим застосуванням метода Петріка.

1. $f = (0000\ 0011\ 1101\ 1011)$;
2. $f = (0000\ 0011\ 1110\ 0111)$;
3. $f = (0000\ 0101\ 1011\ 1101)$;
4. $f = (0000\ 0101\ 1110\ 0111)$;
5. $f = (0000\ 0111\ 0111\ 1010)$;
6. $f = (0000\ 0000\ 0111\ 1110)$;
7. $f = (0000\ 0000\ 1011\ 1101)$;
8. $f = (0000\ 0000\ 1101\ 1011)$;
9. $f = (0000\ 0000\ 1110\ 0111)$;
10. $f = (0000\ 0001\ 0111\ 1110)$;
11. $f = (0000\ 0111\ 0111\ 1100)$;
12. $f = (0000\ 0111\ 1010\ 1110)$;
13. $f = (0000\ 0111\ 1011\ 1100)$;
14. $f = (0000\ 0111\ 1011\ 1101)$;
15. $f = (0000\ 0111\ 1011\ 1110)$;
16. $f = (0000\ 0001\ 1011\ 1101)$;
17. $f = (0000\ 0001\ 1101\ 1011)$;
18. $f = (0000\ 0001\ 1110\ 0111)$;
19. $f = (0000\ 0010\ 0111\ 1110)$;
20. $f = (0000\ 0010\ 1011\ 1101)$;
21. $f = (0000\ 0111\ 1100\ 1110)$;
22. $f = (0000\ 0111\ 1101\ 1010)$;
23. $f = (0000\ 0111\ 1101\ 1011)$;
24. $f = (0000\ 0111\ 1101\ 1110)$;
25. $f = (0000\ 1010\ 0111\ 1110)$;
26. $f = (0000\ 0110\ 0111\ 1110)$;
27. $f = (0000\ 0110\ 1110\ 0111)$;
28. $f = (0000\ 0111\ 0110\ 1110)$;
29. $f = (0000\ 1001\ 1011\ 1101)$;
30. $f = (0000\ 1001\ 1101\ 1011)$.

Методичні вказівки

Нехай булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана вектором значень, тобто значеннями на наборах із 0 та 1 при нумерації наборів згідно двійкової системи числення. Для побудови ДДНФ (досконалої диз'юнктивної нормальної форми) булевої функції f користуються тим фактом, що кон'юнкт повної довжини приймає значення 1 в точності на одному наборі із 0 та 1 («одиничний» набір функції f, який відповідає даному кон'юнкту). Тепер ДДНФ будується як диз'юнкція кон'юнктів, які відповідають одиничним наборам функції f.

Аналогічно, для побудови ДКНФ (досконалої кон'юнктивної нормальної форми) користуються тим фактом, що диз'юнкт повної довжини приймає значення 0 лише на одному наборі із 0 та 1 («нульовий» набір функції f, який відповідає даному диз'юнкту). Тепер ДКНФ будується як кон'юнкція диз'юнктів, які відповідають нульовим наборам функції f.

Підкреслимо, що ДДНФ і ДКНФ для заданої булевої функції визначаються однозначно (з точністю до переставлень аргументів всередині диз'юнкцій і кон'юнкцій).

Приклад 6.1. Нехай $f = (1111\ 1110\ 0001\ 0011)$. Очевидно, що f є функцією чотирьох аргументів. Для зручності випишемо таблицю значень функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на наборах із 0 та 1. Для кожного «одиничного» набору функції f вкажемо відповідний кон'юнкт, а для кожного «нульового» набору – відповідний диз'юнкт.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	диз'юнкт/кон'юнкт
0	0	0	0	1	$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4$
0	0	0	1	1	$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$
0	0	1	0	1	$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$
0	0	1	1	1	$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$
0	1	0	0	1	$\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4$
0	1	0	1	1	$\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$
0	1	1	0	1	$\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$
0	1	1	1	0	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$
1	0	0	0	0	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$
1	0	0	1	0	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4$
1	0	1	0	0	$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4$
1	0	1	1	1	$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$
1	1	0	0	0	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$
1	1	0	1	0	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4$
1	1	1	0	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$
1	1	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

Тепер ми можемо виписати ДДНФ як диз'юнкцію вказаних кон'юнктів та ДКНФ як кон'юнкцію вказаних диз'юнктів.

ДДНФ: $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee$
$(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4) \vee$
$(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee$
$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$;
ДКНФ: $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4) \wedge$
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$.

При пошуку тупикових диз'юнктивних форм методом карт Карно слід враховувати такі факти:

- сусіднім рядкам (стовпцям) карти Карно мають відповідати сусідні набори змінних, причому крайні рядки (стовпчики) вважаються сусідніми; так, для функції чотирьох змінних можна співставити чотирьом рядкам набори $(x_1, x_2), (\overline{x}_1, x_2), (\overline{x}_1, \overline{x}_2), (x_1, \overline{x}_2)$, а чотирьом стовпцям – набори $(x_3, x_4), (\overline{x}_3, x_4), (\overline{x}_3, \overline{x}_4), (x_3, \overline{x}_4)$;

- кожному кон'юнкту на карті Карно взаємно однозначно відповідає прямокутник (із одиниць) розмірності $2^k \times 2^j$, тобто площа 2^{k+j} є цілим степенем числа 2, причому число $k + j$ дорівнює кількості змінних, відсутніх у кон'юнкті;

- всі одиниці на карті Карно необхідно покрити системою прямокутників розмірності $2^k \times 2^j$ $(k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ (кожен прямокутник відповідає деякому кон'юнкту тупикової диз'юнктивної форми), причому:

  – жоден прямокутник не можна збільшити так, щоб його площа залишилась цілим степенем числа 2 (тобто, щоб він і надалі відповідав деякому кон'юнкту);

  – жоден прямокутник не може цілком дублюватися іншими прямокутниками (проте, окремі одиниці прямокутника можуть входити в інші прямокутники).

Приклад 6.2. За допомогою карт Карно знайти всі тупикові ДНФ для функції, заданої своїм вектором значень: $f = (1111\ 1110\ 0001\ 0011)$.

Побудуємо карту Карно для даної функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, поки що не визначаючись із тупиковими формами (див. табл. 5).

Табл. 5. **Карта Карно для функції f (без мінімізації)**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Перебір тупикових форм почнемо з покриття одиниці, що відповідає кон'юнкту $\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$. Цю одиницю можна покрити лише одним прямокутником, площу якого не можна збільшити – це прямокутник, що відповідає кон'юнкту $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$ (табл. 6).

Табл. 6. **Карта Карно для функції f (кон'юнкт $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$)**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Далі розберемо можливі покриття одиниці $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$. Цю одиницю можна покрити одним з двох прямокутників, площу яких не можна збільшити – це прямокутники, що відповідають кон'юнктам $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ та $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ (тут і надалі ми аналізуємо лише ті прямокутники, площа яких є цілим степенем числа 2). Наведемо дві карти Карно з цими прямокутниками, враховуючи раніше зафіксований прямокутник, що відповідає кон'юнкту $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$ (див. табл. 7 та 8).

Табл. 7. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$ та $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 8. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$ та $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

1. На карті з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$ та $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ (табл. 7) розберемо варіанти покриття одиниці $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$. Цю одиницю можна покрити двома способами – прямокутником $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ (табл. 9) та прямокутником $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$ (табл. 10). Зазначимо, що площу жодного з цих прямокутників не можна збільшити так, щоб площа залишилась цілим степенем двійки.

Табл. 9. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 10. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

1.1. На карті з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ та $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ (табл. 9) розберемо варіанти покриття одиниці $x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$. Цю одиницю можна покрити двома способами – прямокутником $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$ (табл. 11) та прямокутником $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ (табл. 12).

Табл. 11. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$, $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 12. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$, $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

1.1.1. На карті з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ та $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$ (табл. 11) розберемо варіанти покриття останньої одиниці – $\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$. Цю одиницю можна покрити двома способами – прямокутником $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 13) та прямокутником $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 14).

Табл. 13. **Кон'юнкти $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3}$, $\boldsymbol{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$, $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}$, $\boldsymbol{\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4}$, $\boldsymbol{x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4}$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 14. **Кон'юнкти $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3}$, $\boldsymbol{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$, $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}$, $\boldsymbol{\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4}$, $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4}$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Карта Карно на табл. 13 визначає тупикову ДНФ заданої функції:

$$(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4).$$

Однак карта Карно на табл. 14 не визначає тупикової форми, оскільки всі одиниці кон'юнкта $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ дублюються іншими кон'юнктами – $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$ та $\overline{x}_2 \wedge x_3$.

1.1.2. На карті з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ та $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ (табл. 12) розберемо варіанти покриття останньої одиниці – $\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$. Цю одиницю можна покрити двома способами – прямокутником $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 15) та прямокутником $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 16).

Табл. 15. **Кон'юнкти $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3}$, $\boldsymbol{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$, $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}$, $\boldsymbol{x_1 \wedge x_3 \wedge x_4}$, $\boldsymbol{x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4}$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 16. **Кон'юнкти $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3}$, $\boldsymbol{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$, $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}$, $\boldsymbol{x_1 \wedge x_3 \wedge x_4}$, $\boldsymbol{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4}$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Карта Карно на табл. 15 не визначає тупикової диз'юнктивної форми, оскільки кон'юнкт $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ повністю покривається кон'юнктами $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ та $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$. Однак карта на табл. 16 визначає тупикову диз'юнктивну форму:

$$(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4).$$

1.2. На карті з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ та $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$ (табл. 10) розберемо варіанти покриття двох останніх одиниць – $\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ та $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$. Легко зрозуміти, що ці одиниці можна коректно (без дублювання прямокутників) покрити двома способами: одним прямокутником – $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 17); двома прямокутниками – $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ та $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ (табл. 18).

Табл. 17. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 18. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$, $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Отримані карти Карно визначають тупикові диз'юнктивні форми, але карта на табл. 18 збігається з картою на табл. 13. Випишемо тупикову диз'юнктивну форму, яка відповідає карті Карно на табл. 17:

$$(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4).$$

2. На карті з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$ та $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ розберемо варіанти покриття одиниці $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$. Цю одиницю можна покрити двома способами – прямокутником $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ та $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$. Однак всі варіанти з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ та $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ були розібрані в пункті **1**. Наведемо карту Карно з кон'юнктами $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$ та $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 19).

Табл. 19. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$, $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

На табл. 19 непокритими залишаються дві одиниці – $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$ та $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$. Легко зрозуміти, що ці одиниці можна коректно покрити двома способами: одним прямокутником – $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$ (табл. 20); двома прямокутниками – $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$ та $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$ (табл. 21).

Табл. 20. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$, $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Табл. 21. **Кон'юнкти $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3$, $x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$, $x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$, $\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$, $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4$**

	x_1x_2	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
x_3x_4	1		1	1
$\overline{x}_3x_4$		1	1	
$\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	1	
$x_3\overline{x}_4$	1	1	1	

Отже, ми знайшли всі тупикові диз'юнктивні форми заданої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Випишемо ці форми.

1. $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4)$ (табл. 13).

2. $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4)$ (табл. 16).

3. $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4)$ (табл. 17).

4. $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$ (табл. 20).

5. $(\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4)$ (табл. 21).

Метод Квайна – Мак-Класкі передбачає, що булева функція задана у вигляді ДДНФ. Суть методу полягає у застосуванні двох тотожностей:

1) $(A \wedge x) \vee (A \wedge \overline{x}) = (A \wedge x) \vee (A \wedge \overline{x}) \vee A$ (неповне склеювання);

2) $(A \wedge B) \vee A = A$ (поглинання).

Тотожності застосовують зліва направо; спочатку застосовують неповне склеювання доти, поки це можливо, а потім, поки можливо – поглинання. Результатом роботи алгоритму є скорочена ДНФ (диз'юнкція всіх простих імплікант). Підкреслимо, що скорочена ДНФ найчастіше не є тупиковою.

Кон'юнкт K, отриманий на першому етапі неповним склеюванням кон'юнктів K_1 і K_2, на другому етапі їх поглине. Справджується і зворотний наслідок: на другому етапі поглинаються ті й тільки ті кон'юнкти, які використовувалися на першому етапі для неповного склеювання. Тому на першому етапі слід указувати, які саме кон'юнкти використовуються для неповного склеювання, навіть якщо один кон'юнкт можна отримати кількома варіантами.

У комп'ютерній реалізації алгоритму використовують спеціальну нумерацію кон'юнктів: кожній змінній x_k ставлять у відповідність один із трьох символів: «1», якщо x_k входить до кон'юнкту без доповнення; «0», якщо x_k входить до кон'юнкту з доповненням; «–», якщо x_k взагалі не входить до кон'юнкту. Отримані коди розбивають на групи за кількістю входжень символа «1», що суттєво підвищує ефективність пошуку кон'юнктів для склеювання, оскільки достатньо перевіряти пари кодів із «сусідніх» груп [2].

Приклад 6.3. Методом Квайна-Мак-Класкі знайти скорочену ДНФ для функції, заданої своїм вектором значень: $f = (1111\ 1110\ 0001\ 0011)$.

Досконала ДНФ заданої функції була знайдена в прикладі 6.1. Випишемо коди кон'юнктів цієї ДДНФ, розбивши їх на групи за зростанням кількості символів «1».

1. 0000

---

2. 0100
3. 0010
4. 0001

---

5. 0110
6. 0101
7. 0011

---

8. 1110
9. 1011

---

10. 1111

Застосувавши закон неповного склеювання, отримуємо додатково 13 кон'юнктів (у дужках вказано номера кон'юнктів, що використовувалися). Зазначимо, що, завдяки групуванню кон'юнктів по групах за кількістю одиниць, довелось перевірити $1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$; без групування довелося б зробити $C_{10}^2 = 45$ перевірок.

11. 0-00 (1, 2)
12. 00-0 (1, 3)
13. 000- (1, 4)

---

14. 01-0 (2, 5)
15. 010- (2, 6)
16. 0-10 (3, 5)
17. 001- (3, 7)
18. 0-01 (4, 6)
19. 00-1 (4, 7)

---

20. -110 (5, 8)
21. -011 (7, 9)

---

22. 111- (8, 10)
23. 1-11 (9, 10)

Отримані кон'юнкти допускають подальше застосування неповного склеювання, отримуючи 3 кон'юнкти (кожен із них двома способами).

24. 0--0 (11, 16)(12, 14)
25. 0-0- (11, 18)(13, 15)
26. 00-- (12, 19)(13, 17)

Подальше застосування неповного склеювання неможливе. Застосування закону поглинання зводиться до викреслювання тих кон'юнктів, які хоч раз використовувалися на першому етапі - це кон'юнкти 1–19. Отже, задана функція f допускає 7 простих імплікант – кон'юнкти 20–26, тобто функція f має таку скорочену ДНФ:

$$(x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee$$
$$\vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2).$$

Для знаходження тупикових ДНФ за скороченою ДНФ доцільно скласти імплікантну таблицю, рядки якої нумерують простими імплікантами, а стовпці – кон'юнктами повної довжини, які входять до складу ДДНФ заданої функції. У комірки імплікантної таблиці вписують символ «*», якщо проста імпліканта, що відповідає рядку комірки, поглинає кон'юнкт повної довжини, який відповідає стовпцю. Побудова тупикової ДНФ зводиться до знаходження ненадлишкової множини простих імплікант, які б у сукупності поглинали всі кон'юнкти повної довжини заданої функції.

Далі доцільно визначити ядрові імпліканти (ті прості імпліканти, які увійдуть до складу будь-якої тупикової ДНФ заданої функції), а також кон'юнкти повної довжини, які поглинаються ядром. Очевидно, що ядрові імпліканти та кон'юнкти повної довжини, які поглинаються ядром, можна виключити із подальшого розгляду, тобто пошук тупикових форм зводиться до покриття неядровими імплікантами тих кон'юнктів повної довжини, які не поглинуло ядро.

Отже, доцільно побудувати спрощену імплікантну таблицю, яку отримують із імплікантної таблиці викреслюванням тих рядків, які відповідають ядровим імплікантам, та тих стовпців, які відповідають кон'юнктам повної довжини, що поглинаються ядром.

Приклад 6.4. Побудувати імплікантну таблицю, визначити ядро та побудувати спрощену імплікантну таблицю для функції, заданої своїм вектором значень: $f = (1111\ 1110\ 0001\ 0011)$.

Скорочена ДНФ (фактично – прості імпліканти) заданої функції була знайдена в прикладі 6.3. Побудуємо імплікантну таблицю (табл. 22).

Табл. 22

	0000	0100	0010	0001	0110	0101	0011	1110	1011	1111
-110					*			*		
-011							*		*	
111-								*		*
1-11									*	*
0--0	*	*	*		*					
0-0-	*	*		*		*				
00--	*		*	*			*			

Імпліканта 0-0- ядрова, оскільки тільки вона поглинає кон'юнкт повної довжини 0101 (відповідний стовпець містить лише один символ «*»). Оскільки інші стовпці містять принаймні два символи «*», інші прості імпліканти неядрові. Ядрова імпліканта 0-0- поглинає 4 кон'юнкти повної довжини: 0000, 0100, 0001, 0101. Викресливши з імплікантної таблиці рядок, який відповідає єдиній ядровій імпліканті 0-0-, а також 4 стовпця, які відповідають кон'юнктам повної довжини 0000, 0100, 0001 та 0101, що поглинаються ядром, отримуємо спрощену імплікантну таблицю (табл. 23).

Табл. 23

	0010	0110	0011	1110	1011	1111
-110		*		*		
-011			*		*	
111-				*		*
1-11					*	*
0--0	*	*				
00--	*		*			

Метод Петріка пошуку тупикових форм за спрощеною імплікантною таблицею полягає у зіставленні кожній неядровій простій імпліканті S висловлення A_S = «Імпліканта S входить до тупикової ДНФ». Далі, для кожного кон'юнкта K у складі вихідної ДДНФ будують висловлення B_K = «K поглинає принаймні одна імпліканта тупикової ДНФ», яке, очевидно, є диз'юнкцією тих висловлень A_S, для яких S поглинає кон'юнкт K. Нарешті, у коректно побудованій тупиковій ДНФ прості імпліканти мають поглинати всі кон'юнкти повної довжини із вихідної ДДНФ, тобто коректність тупикової ДНФ означає істинність кон'юнкції всіх висловлень B_K. Метод передбачає зведення отриманої формули алгебри висловлень до ДНФ застосуванням законів дистрибутивності та, якщо це можливо, поглинання:

1) $(A + B)\&C = (A\&C) + (B\&C)$ (дистрибутивність);
2) $(A + B)\&(A + C) = A + (B\&C)$ (дистрибутивність);
3) $(A\&B) + A = A$ (поглинання),

де «+» та «&» позначають операції над висловленнями – відповідно диз'юнкцію та кон'юнкцію в алгебрі висловлень. Зазначимо, що для зведення виразу до ДНФ достатньо використання закону дистрибутивності 1, але використання (якщо можливо) дистрибутивності 2 дозволяє отримати ДНФ з меншою кількістю кон'юнктів.

В отриманій ДНФ кожен кон'юнкт задає певну тупикову ДНФ: кожна літера у складі кон'юнкта відповідає входженню до тупикової ДНФ відповідної простої неядрової імпліканти.

Приклад 6.5. Методом Петріка знайти всі тупикові ДНФ для функції, заданої своїм вектором значень: $f = (1111\ 1110\ 0001\ 0011)$.

Ядрові імпліканти та спрощена імпліканта таблиця були знайдена в прикладі 6.4. Для побудови тупикових ДНФ пронумеруємо неядрові прості імпліканти літерами A–F, які позначають умову входження відповідної імпліканти до тупикової ДНФ; для зручності наведемо спрощену імплікантну таблицю з цими позначеннями:

Табл. 24

		0010	0110	0011	1110	1011	1111
A	-110		$*$		$*$		
B	-011			$*$		$*$	
C	111-				$*$		$*$
D	1-11					$*$	$*$
E	0--0	$*$	$*$				
F	00--	$*$		$*$			

Випишемо у вигляді формули алгебри висловлень умову коректності тупикової ДНФ (прості імпліканти мають поглинати всі кон'юнкти повної довжини із вихідної ДДНФ):

$$(E+F)\&(A+E)\&(B+F)\&(A+C)\&(B+D)\&(C+D).$$

Зведемо цю формулу до ДНФ, користуючись двома законами дистрибутивності (знак «&» для скорочення запису опускатимемо):

$$\begin{gathered}(E+F)(A+E)(B+F)(A+C)(B+D)(C+D)=\\=((E+F)(E+A))((B+F)(B+D))((C+A)(C+D))=\\=(E+AF)(B+DF)(C+AD)=\\=BCE+ABDE+CDEF+ADEF+\\+ABCF+ABDF+ACDF+ADF.\end{gathered}$$

Застосувавши закон поглинання, отримуємо остаточну умову

$$BCE+ABDE+CDEF+ABCF+ADF$$

що означає наявність п'яти тупикових форм:

$$\begin{gathered}T_1=(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_3)\vee(\overline{x}_2\wedge x_3\wedge x_4)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_4);\\T_2=(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_3)\vee(x_2\wedge x_3\wedge\overline{x}_4)\vee(\overline{x}_2\wedge x_3\wedge x_4)\vee(x_1\wedge x_3\wedge x_4)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_4);\\T_3=(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_3\wedge x_4)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_4)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_2);\\T_4=(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_3)\vee(x_2\wedge x_3\wedge\overline{x}_4)\vee(\overline{x}_2\wedge x_3\wedge x_4)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_2);\\T_5=(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_3)\vee(x_2\wedge x_3\wedge\overline{x}_4)\vee(x_1\wedge x_3\wedge x_4)\vee(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_2).\end{gathered}$$

Отримані тупикові ДНФ збігаються із знайденими для цієї функції методом карт Карно (див. приклад 6.2): T_1 – табл. 17, T_2 – табл. 21, T_3 – табл. 16, T_4 – табл. 13, T_5 – табл. 20.

6.2. Функціональна повнота набору булевих функцій

Дослідити належність заданих функцій кожному з п'яти основних функціонально-замкнених класів (звівши дані у таблицю Поста) і для кожної функції заданого набору побудувати поліном Жегалкіна. Зробити висновок щодо функціональної повноти заданого набору функцій.

1. $(x \wedge y) \to z$, $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \vee z)$, $x \vee \overline{y}$;
2. $(x \vee y) \to z$, $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \vee z)$, $x \wedge \overline{y}$;
3. $(x \wedge y) \leftarrow z$, $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \vee z)$, $x \oplus y$;
4. $(x \vee y) \leftarrow z$, $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \wedge z)$, $x \to y$;
5. $(x \to y) \vee z$, $(\overline{x} \oplus y) \leftrightarrow (x \vee z)$, $\overline{x} \to y$;
6. $(x \to y) \wedge z$, $(x \oplus y) \leftrightarrow (\overline{x} \vee z)$, $x \to \overline{y}$;
7. $(\overline{x} \to y) \vee z$, $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (x \vee z)$, $\overline{x} \leftarrow y$;
8. $(x \to \overline{y}) \vee z$, $(\overline{x} \oplus y) \leftrightarrow (\overline{x} \vee z)$, $x \leftarrow \overline{y}$;
9. $(x \to y) \vee \overline{z}$, $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \vee z)$, $\overline{x} \leftrightarrow y$;
10. $(\overline{x} \to y) \wedge z$, $(\overline{x} \oplus y) \leftrightarrow (x \wedge z)$, $x \oplus \overline{y}$;
11. $(x \to \overline{y}) \wedge z$, $(x \oplus y) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge z)$, $\overline{x} \to \overline{y}$;
12. $(x \to y) \wedge \overline{z}$, $(\overline{x} \oplus y) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge z)$, $\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$;
13. $(\overline{x} \wedge y) \to z$, $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge z)$, $\overline{x} \oplus \overline{y}$;
14. $(x \wedge y) \to \overline{z}$, $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (x \wedge z)$, $\overline{x} \wedge \overline{y}$;
15. $(\overline{x} \vee y) \to z$, $(x \leftrightarrow y) \oplus (x \vee z)$, $\overline{x} \vee \overline{y}$;
16. $(x \to y) \vee \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow y) \oplus (x \vee z)$, $(x \vee y) \wedge z$;
17. $(\overline{x} \vee y) \leftarrow z$, $(x \leftrightarrow y) \oplus (\overline{x} \vee z)$, $(x \wedge y) \vee z$;
18. $(x \vee y) \leftarrow z$, $(\overline{x} \leftrightarrow y) \oplus (\overline{x} \vee z)$, $x \vee y \vee z$;
19. $(\overline{x} \vee y) \leftarrow \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (x \vee z)$, $x \wedge y \wedge z$;

20. $(\overline{x} \to \overline{y}) \wedge z$, $(\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (\overline{x} \vee z)$, $(x \vee y) \wedge \overline{z}$;

21. $(x \to \overline{y}) \wedge \overline{z}$, $(x \leftrightarrow y) \oplus (x \wedge z)$, $(x \wedge y) \vee \overline{z}$;

22. $(\overline{x} \to y) \wedge \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow y) \oplus (x \wedge z)$, $\overline{x} \vee y \vee z$;

23. $(\overline{x} \to \overline{y}) \vee z$, $(x \leftrightarrow y) \oplus (\overline{x} \wedge z)$, $\overline{x} \wedge y \wedge z$;

24. $(x \to \overline{y}) \vee \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow y) \oplus (\overline{x} \wedge z)$, $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$;

25. $(\overline{x} \to y) \vee \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (x \wedge z)$, $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$;

26. $(\overline{x} \to \overline{y}) \wedge \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (\overline{x} \wedge z)$, $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$;

27. $(\overline{x} \to \overline{y}) \vee \overline{z}$, $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus z)$, $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$;

28. $(\overline{x} \wedge y) \to \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus z)$, $x \oplus y \oplus z$;

29. $(\overline{x} \vee y) \to \overline{z}$, $(x \leftrightarrow y) \wedge (\overline{x} \oplus z)$, $\overline{x} \oplus y \oplus z$;

30. $(\overline{x} \vee y) \leftarrow \overline{z}$, $(\overline{x} \leftrightarrow y) \wedge (\overline{x} \oplus z)$, $\overline{x} \oplus \overline{y} \oplus z$.

Методичні вказівки

Для перевірки функціональної повноти набору булевих функцій користуються теоремою Поста: набір булевих функцій K є функціонально повним тоді і тільки тоді, коли він не є підмножиною жодного з основних функціонально-замкнених класів:

$$K \text{ -- функціонально повний} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, f_{T_0} \in K : f_{T_0} \notin T_0; \\ \exists\, f_{T_1} \in K : f_{T_1} \notin T_1; \\ \exists\, f_M \in K : f_M \notin M; \\ \exists\, f_S \in K : f_L \notin S; \\ \exists\, f_L \in K : f_L \notin L. \end{cases}$$

Ми використовуємо стандартні позначення для основних функціонально-замкнених класів:

- T_0 – клас функцій, які зберігають 0;
- T_1 – клас функцій, які зберігають 1;
- M – клас монотонних функцій;

- S – клас самодвоїстих функцій;
- L – клас лінійних функцій.

Зазначимо, що для перевірки функціональної повноти (неповноти) набору K найчастіше не потрібно проводити повне дослідження на належність кожній функції з набору K кожному із п'яти основних функціонально-замкнених класів. Так, для доведення функціональної повноти набору K слід знайти в K: одну функцію, що не належить класу T_0; одну функцію, що не належить класу T_1; одну функцію, що не належить класу M; одну функцію, що не належить класу S; одну функцію, що не належить класу L (це не обов'язково мають бути п'ять функцій, оскільки одна функція може не належати двом або більше основним функціонально-замкненим класам). З іншого боку, для доведення неповноти набору K достатньо довести, що один із функціонально-замкнених класів містить всі функції набору K.

Приклад 6.6. Перевірити функціональну повноту набору булевих функцій:

$$K = \{(x \wedge \overline{y}) \to z,\ (x \oplus y) \leftrightarrow (x \wedge \overline{z}),\ \overline{x} \wedge y\}.$$

1. Дослідимо на належність основним функціонально-замкненим класам функцію $f_1(x, y, z) = (x \wedge \overline{y}) \to z$. Перепишемо функцію у вигляді, зручному для дослідження:

$$f_1(x, y, z) = \overline{(x \wedge \overline{y})} \vee z = \overline{x} \vee y \vee z.$$

Безпосередньо перевіряється: $f_1 \notin T_0$, $f_1 \in T_1$.

Перевіривши значення f_1 на наборах $(0, 0, 0)$ та $(1, 0, 0)$, можна впевнитись у немонотонності f_1:

$$f_1(0, 0, 0) = 1, \quad f_1(1, 0, 0) = 0,$$

тобто $f_1 \notin M$.

Обчислимо функцію, двоїсту до f_1:

$$f_1^*(x, y, z) = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{y} \vee \overline{z}} = \overline{x} \wedge y \wedge z.$$

Легко переконатись, що $f_1^* \neq f_1$: наприклад, $f_1(0, 0, 0) \neq f_1^*(0, 0, 0)$. Отже, $f_1 \notin S$.

Нарешті, поліном Жегалкіна для f_1 легко обчислити, використавши зображення f_1 через кон'юнкцію та доповнення:

$$f_1(x,y,z) = \overline{x} \vee y \vee z = \overline{x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}} = 1 \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) = 1 \oplus x \oplus xy \oplus xz \oplus xyz.$$

Отже, $f_1 \notin L$.

2. Дослідимо на належність основним функціонально-замкненим класам функцію $f_2(x,y,z) = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \wedge \overline{z})$. Перепишемо функцію у вигляді, зручному для дослідження:

$$f_2(x,y,z) = \overline{x \oplus y \oplus (x \wedge \overline{z})} = x \oplus y \oplus (x \wedge (z \oplus 1)) \oplus 1 = y \oplus (x \wedge z) \oplus 1.$$

Безпосередньо перевіряється: $f_2 \notin T_0$, $f_2 \in T_1$.

Перевіривши значення f_2 на наборах $(0,0,0)$ та $(0,1,0)$, можна впевнитись у немонотонності f_2:

$$f_2(0,0,0) = 1, \quad f_2(0,1,0) = 0,$$

тобто $f_2 \notin M$.

Обчислимо функцію, двоїсту до f_2:

$$f_2^*(x,y,z) = \overline{\overline{y} \oplus (\overline{x} \wedge \overline{\overline{z}}) \oplus 1} = y \oplus (\overline{x} \wedge z) = y \oplus z \oplus (x \wedge z).$$

Легко переконатись, що $f_2^* \neq f_2$: наприклад, $f_2(0,0,0) \neq f_2^*(0,0,0)$. Отже, $f_2 \notin S$.

Нарешті, поліном Жегалкіна для f_2 легко обчислити, використавши зображення f_2 через операцію «$\oplus$», кон'юнкцію та доповнення:

$$f_2(x,y,z) = y \oplus (x \wedge z) \oplus 1 = 1 \oplus y \oplus xz.$$

Отже, $f_2 \notin L$.

3. Дослідимо на належність основним функціонально-замкненим класам функцію $f_3(x,y) = \overline{x} \wedge y$. Безпосередньо перевіряється: $f_3 \in T_0$, $f_3 \notin T_1$.

Перевіривши значення f_3 на наборах $(0,1)$ та $(1,1)$, можна впевнитись у немонотонності f_3:

$$f_3(0,1) = 1, \quad f_3(1,1) = 0,$$

тобто $f_3 \notin M$.

Обчислимо функцію, двоїсту до f_3:

$$f_3^*(x,y) = \overline{\overline{x} \wedge y} = x \vee \overline{y}.$$

Легко переконатись, що $f_3^* \neq f_3$: наприклад, $f_3(0,0) \neq f_3^*(0,0)$. Отже, $f_3 \notin S$.

Нарешті, поліном Жегалкіна для f_3 легко обчислити, використавши зображення f_3 через кон'юнкцію та доповнення:

$$f_3(x,y) = \overline{x} \wedge y = (1 \oplus x)y = x \oplus xy.$$

Отже, $f_3 \notin L$.

Заповнимо таблицю Поста (таблицю належності функцій основним функціонально-замкненим класам) для заданого набору функцій K (табл. 25).

Табл. 25. **Таблиця Поста для набору *K*.**

	T_0	T_1	M	S	L
$(x \wedge y) \to \overline{z}$	+	−	−	−	−
$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \wedge z)$	−	+	−	−	−
$\overline{x} \wedge y$	+	−	−	−	−

Отже, для кожного з п'яти основних функціонально-замкнених класів існує принаймні одна функція із набору K, яка цьому класу не належить (в кожному із п'яти стовпців таблиці 25 є принаймні один знак '−'). Таким чином, за теоремою Поста набір K є функціонально повним.

7. Автоматичне доведення теорем

7.1. Доведення загальнозначущості формули

Довести загальнозначущість заданої формули в алгебрі предикатів:
1) побудовою семантичного дерева;
2) методом резолюцій.

1. $(\forall x\, B(x,c) \to \exists x\, A(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, B(x,c) \to A(f(x)))$;
2. $(\forall x\, B(f(x),c) \to \exists x\, A(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, B(f(x),c) \to A(x))$;
3. $(\exists x\, B(x,c) \to \exists x\, A(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\exists x\, B(x,c) \to A(f(x)))$;
4. $(\exists x\, B(f(x),c) \to \exists x\, A(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\exists x\, B(f(x),c) \to A(x))$;
5. $(\forall x\, B(x,c) \to \forall x\, A(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, B(x,c) \to A(f(x)))$;
6. $(\forall x\, B(f(x),c) \to \forall x\, A(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, B(f(x),c) \to A(x))$;
7. $(\exists x\, B(x,c) \to \forall x\, A(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, B(x,c) \to A(f(x)))$;
8. $(\exists x\, B(f(x),c) \to \forall x\, A(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, B(f(x),c) \to A(x))$;
9. $(\forall x\, A(x,c) \to \exists x\, B(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, A(x,c) \to B(f(x)))$;
10. $(\forall x\, A(f(x),c) \to \exists x\, B(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, A(f(x),c) \to B(x))$;
11. $(\forall x\, A(x,c) \to \forall x\, B(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, A(x,c) \to B(f(x)))$;
12. $(\forall x\, A(f(x),c) \to \forall x\, B(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, A(f(x),c) \to B(x))$;
13. $(\exists x\, A(x,c) \to \forall x\, B(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, A(x,c) \to B(f(x)))$;
14. $(\exists x\, A(f(x),c) \to \forall x\, B(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, A(f(x),c) \to B(x))$;
15. $(\forall x\, B(x,c) \leftarrow \exists x\, A(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, B(x,c) \leftarrow A(f(x)))$;
16. $(\forall x\, B(f(x),c) \leftarrow \exists x\, A(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, B(f(x),c) \leftarrow A(x))$;
17. $(\exists x\, B(x,c) \leftarrow \exists x\, A(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, B(x,c) \leftarrow A(f(x)))$;
18. $(\exists x\, B(f(x),c) \leftarrow \exists x\, A(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, B(f(x),c) \leftarrow A(x))$;
19. $(\forall x\, B(x,c) \leftarrow \forall x\, A(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, B(x,c) \leftarrow A(f(x)))$;

20. $(\forall x\, B(f(x), c) \leftarrow \forall x\, A(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, B(f(x), c) \leftarrow A(x))$;

21. $(\exists x\, B(x, c) \leftarrow \forall x\, A(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\exists x\, B(x, c) \leftarrow A(f(x)))$;

22. $(\exists x\, B(f(x), c) \leftarrow \forall x\, A(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\exists x\, B(f(x), c) \leftarrow A(x))$;

23. $(\forall x\, A(x, c) \leftarrow \exists x\, B(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, A(x, c) \leftarrow B(f(x)))$;

24. $(\forall x\, A(f(x), c) \leftarrow \exists x\, B(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\forall x\, A(f(x), c) \leftarrow B(x))$;

25. $(\exists x\, A(x, c) \leftarrow \exists x\, B(f(x))) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, A(x, c) \leftarrow B(f(x)))$;

26. $(\exists x\, A(f(x), c) \leftarrow \exists x\, B(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\exists x\, A(f(x), c) \leftarrow B(x))$;

27. $(\forall x\, A(x, c) \leftarrow \forall x\, B(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, A(x, c) \leftarrow B(f(x)))$;

28. $(\forall x\, A(f(x), c) \leftarrow \forall x\, B(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\forall x\, A(f(x), c) \leftarrow B(x))$;

29. $(\exists x\, A(x, c) \leftarrow \forall x\, B(f(x))) \leftrightarrow \exists x\, (\exists x\, A(x, c) \leftarrow B(f(x)))$;

30. $(\exists x\, A(f(x), c) \leftarrow \forall x\, B(x)) \leftrightarrow \exists x\, (\exists x\, A(f(x), c) \leftarrow B(x))$.

Методичні вказівки

Продемоструємо застосування методу семантичних дерев та методу резолюцій на конкретному прикладі.

Приклад 7.1. Довести загальнозначущість методом семантичних дерев та методом резолюцій:

$$(\forall x\, B(x, c) \rightarrow \exists x\, A(f(x))) \rightarrow \exists x\, (\forall x\, B(x, c) \rightarrow A(f(x))).$$

Оскільки обидва методи (семантичних дерев та резолюцій) дозволяють доводити протирічність, ми маємо звести задачу доведення загальнозначущості до задачі доведення протирічності: формула є загальнозначущою тоді і тільки тоді, коли її заперечення протирічне. При подальших перетвореннях (зведення до попередньої нормальної форми та скулемівської стандартної форми) може порушуватися логічна еквівалентність, однак зберігається протирічність чи непротирічність.

Отже, візьмемо заперечення від заданої формули і зведемо отриману формулу до попередньої нормальної форми.

$$\begin{aligned}
&\neg\,((\forall\,x\,B(x,c)\to\exists\,x\,A(f(x)))\to\exists\,x\,(\forall\,x\,B(x,c)\to A(f(x))))\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\neg\,(\neg(\neg\forall\,x\,B(x,c)\vee\exists\,x\,A(f(x)))\vee\exists\,x\,(\neg\forall\,x\,B(x,c)\vee A(f(x))))\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(\neg\forall\,x\,B(x,c)\vee\exists\,x\,A(f(x)))\wedge\neg\exists\,x\,(\neg\forall\,x\,B(x,c)\vee A(f(x)))\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(\exists\,x\,\neg B(x,c)\vee\exists\,x\,A(f(x)))\wedge\forall\,x\,(\forall\,x\,B(x,c)\wedge\neg A(f(x)))\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(\exists\,x_1\,\neg B(x_1,c)\vee\exists\,x_2\,A(f(x_2)))\wedge\forall\,x_3\,(\forall\,x_4\,B(x_4,c)\wedge\neg A(f(x_3)))\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\exists\,x_1\,\exists\,x_2\,\forall\,x_3\,\forall\,x_4\,((\neg B(x_1,c)\vee A(f(x_2)))\wedge B(x_4,c)\wedge\neg A(f(x_3)))
\end{aligned}$$

Для зведення отриманої формули до скулемівської стандартної форми необхідно позбавитись кванторів існування. Зробимо це, використовуючи стандартне правило введення скулемівських констант (функцій):

$$\begin{aligned}
&\exists\,x_1\,\exists\,x_2\,\forall\,x_3\,\forall\,x_4\,((\neg B(x_1,c)\vee A(f(x_2)))\wedge B(x_4,c)\wedge\neg A(f(x_3)))\rightsquigarrow\\
&\qquad\rightsquigarrow\forall\,x_3\,\forall\,x_4\,((\neg B(a,c)\vee A(f(b)))\wedge B(x_4,c)\wedge\neg A(f(x_3)))\,.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що елімінація кванторів існування не є переходом за еквівалентністю, проте ця операція зберігає протирічність та непротирічність (відповідний перехід позначено символом '$\rightsquigarrow$').

Останнім кроком переходу до скулемівської стандартної форми має стати зведення «підкванторної» частини формули до кон'юнктивної форми (КНФ) . Проте, в даному випадку підкванторна частина формули вже знаходиться у КНФ, отже ми отримали скулемівську стандартну форму.

Випишемо отриману множину диз'юнктів:

1. $\neg B(a,c)\vee A(f(b))$;
2. $B(x_4,c)$;
3. $\neg A(f(x_3))$.

Доведемо протирічність отриманої множини диз'юнктів заданими методами.

1. Метод семантичних дерев.

Для отриманої множини диз'юнктів ербранівський універсум $\mathcal{H}$ та ербранівський базис $\mathcal{A}$ нескінченні:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}=\{a,b,c,f(a),f(b),f(c),f(f(a)),f(f(b)),f(f(c)),\dots\};\\
&\mathcal{A}=\{A(a),A(b),A(c),B(a,a),B(a,b),B(a,c),\dots,B(c,c),\\
&\qquad A(f(a)),A(f(b)),A(f(c)),B(a,(f(a)),\dots\}.
\end{aligned}$$

При побудові семантичного дерева, з метою прискорення процесу розв'язання задачі, використовуватимемо в першу чергу ті елементи ербранівського базису, які спростовують літери множини диз'юнктів (рис. 13).

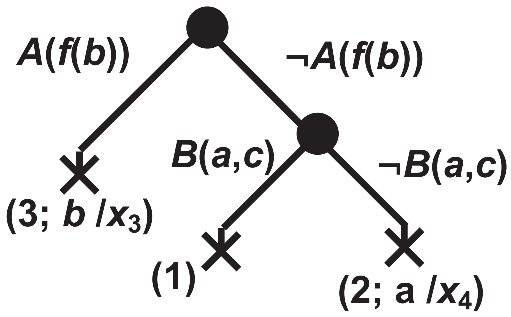


Рис. 13

Біля спростовуючих вузлів (позначені хрестиками) у дужках записано номер диз'юнкта, який спростовує даний вузол, а також відповідні підстановки.

2. Метод резолюцій.

Застосовуючи метод резолюцій, отримуємо порожній диз'юнкт за два кроки:

1. $\neg B(a,c) \vee A(f(b))$;
2. $B(x_4,c)$;
3. $\neg A(f(x_3))$;

---

4. $A(f(b))$ $\quad$ $(R(1,2),\ a/x_4)$;
5. $\square$ $\quad$ $(R(4,3),\ b/x_3)$.

Рекомендована література

1. Биркгоф Г. Теория решеток [Текст] / Г. Биркгоф. – М. : Наука, 1984. – 568 с. – 9400 пр.

2. Бондаренко М. Ф. Дискретна математика [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с. – 1000 пр. – ISBN 966-8530-10-1.

3. Ван дер Варден Б. Алгебра [Текст] / Б. Ван дер Варден. – М. : Наука, 2004. – 624 с. – 2000 экз. – ISBN 5-8114-0552-9.

4. Верещагин Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Начала теории множеств [Текст] / Н. К. Верещагин, А. Шень. – М. : Моск. центр непрерыв. мат. образования, 1999. – 128 с. – 3000 экз. – ISBN 5-900916-36-7.

5. Виленкин Н. Я. Комбинаторика [Текст] / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 327 с.

6. Винберг Э. Б. Курс алгебры [Текст] / Э. Б. Винберг. – М. : Издательство «Факториал Пресс», 2002. – 544 с.

7. Владимиров Д. А. Булевы алгебры [Текст] / Д. А. Владимиров. – М. : Наука, 1969. – 320 с. – 15000 экз.

8. Гаврилов Г. П. Задачи и упражения по дискретной математике [Текст] / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М. : Физматлит, 2005. – 416 с. – ISBN 5-9221-0477-2.

9. Донской В. И. Дискретная математика [Текст] / В. И. Донской. – Симферополь : СОНАТ, 2000. – 360 с. – 5000 экз. – ISBN 966-7347-42-7.

10. Завало С. Т. Курс алгебри [Текст] / С. Т. Завало. – К. : Вища шк., 1985. – 503 с. – 2300 пр.

11. Клини С. К. Математическая логика [Текст] / С. К. Клини. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 480 с. – 500 экз. – ISBN 5-354-01011-X.

12. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с. – 35000 экз. – ISBN 5-02-013993-9.

13. Кук Д. Компьютерная математика [Текст] / Д. Кук, Г. Бейз. – М. : Наука, 1990. – 384 с. – 23000 экз. – ISBN 5-02-014216-6.

14. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре [Текст] / А. Г. Курош. – М. : Физматгиз, 1962. – 396 с. – 30000.

15. Курош А. Г. Теория групп [Текст] / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1967. – 648 с.

16. Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритомв [Текст] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Физматлит, 2004. – 256 с. – 2000 экз. – ISBN 5-9221-0026-2.

17. Ленг С. Алгебра [Текст] / С. Ленг. – М. : Мир, 1968. – 564 с.

18. Лихтарников Л. М. Математическая логика: Курс лекций. Задачник–практикум и решения [Текст] / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – СПб. : Лань, 1999. – 288 с. – 3000 экз. – ISBN 5-8114-0082-9.

19. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций [Текст] / С. С. Марченков . – М. : Физматлит, 2000. – 128 с. – 1000 экз. – ISBN 5-9221-0066-1.

20. Мендельсон Э. Введение в математическую логику [Текст] / Э. Мендельсон. – М. : Наука, 1984. – 320 с. – 23000.

21. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов [Текст] / Ф. А. Новиков. – СПб. : Издат. дом «Питер», 2001. – 304 с. – 5000 экз. – ISBN 5-272-00183-4.

22. Скорняков Л. А. Элементы теории структур [Текст] / Л. А. Скорняков. – М. : Наука, 1970. – 148 с. – 12000 экз.

23. Спекторський І. Я. Дискретна математика: алгебра висловлень, теорія множин, теорія відношень, елементи комбінаторики, теорія графів, елементи теорії груп та кілець [Текст] / І. Я. Спекторський. – К. : ІВЦ «Політехніка», 2004. – 220 с. – 2000 пр. – ISBN 966-622-136-5.

24. Спекторський І. Я. Дискретна математика: частково впорядковані множини, решітки, булеві алгебри [Текст] / І. Я. Спекторський, О. В. Стусь. – К. : ІВЦ «Політехніка», 2009. – 136 с. – 100 пр. – ISBN 978-966-622-324-4.

25. Чень Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем [Текст] / Ч. Чень, Р. Ли. – М. : Наука, 1983. – 360 с. – 8500 экз.

26. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику [Текст] / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986. – 384 с. – 30000 экз.

27. Яблонский С. В. Функции алгебры логики и классы Поста [Текст] / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев. – М. : Наука, 1966. – 119 с.

28. Яглом И. М. Булева структура и ее модели [Текст] / И. М. Яглом. – М. : Сов. радио, 1980. – 192 с. – 25000 экз.

Покажчик термінів