

УДК 517.58/.5892

DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.62211

Н.О. Вірченко

Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

## ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАММА-ФУНКЦІЙ

**Background.** The article is dedicated to studies of the main properties of new generalized gamma-functions, generalized incomplete gamma-functions, generalized digamma-functions for their best applications in applied sciences, for calculations of integrals which are absent in scientific literature.

**Objective.** Introduction and study of the basic properties of the new generalized gamma-functions, generalized incomplete gamma-functions, generalized digamma-functions and their applications.

**Methods.** We apply the following methods: the methods of the theory of functions of the real variable, the theory of the special functions, the theory of the mathematical physics, the methods of applied analysis.

**Results.** Some new forms of generalized gamma-functions, incomplete gamma-functions, digamma-functions are introduced. The main properties of these generalized special functions are explored. Examples of application of new generalized gamma-functions are given.

**Conclusions.** With the help of the  $r$ -generalized confluent hypergeometric functions the new generalization of gamma-functions, incomplete gamma-functions, digamma-functions are introduced. The main properties of the new generalized special functions are explored, examples of application of these functions are given.

**Keywords:** generalized gamma-functions; incomplete gamma-functions; digamma-functions.

## Вступ

До найпростіших і найважливіших спеціальних функцій належить гамма-функція, знання властивостей якої є необхідною умовою для дослідження, застосування інших спеціальних функцій. Стаття присвячена вивченню основних властивостей нових узагальнень гамма-функцій.

Гамма-функція вперше була запроваджена у 1729 р. Л. Ейлером, який і заклав основи її теорії. Далі видатні математики А.М. Лежандр, К.Ф. Гаус сприяли викладу теорії гамма-функції з єдиної точки зору, ширшому її застосуванню. Позначення  $\Gamma(\alpha)$  було запроваджено в науку А.М. Лежандром у 1809 р.:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

У зв'язку з ширшим використанням теорії спеціальних функцій у математичній фізиці, механіці суцільного середовища, теорії ймовірностей, астрофізиці, у квантовій механіці, квантовій оптиці, теорії дифракції, в аеродинаміці, у теорії надійності, теорії кодування, у біомедицині тощо інтерес до теорії спеціальних функцій, зокрема до гамма-функцій, значно посилюється [1–11].

У [9] подано гамма-функцію  $\Gamma_m(u, v)$ , що застосовується в теорії дифракції:

$$\Gamma_m(u, v) = \int_0^{\infty} \frac{t^{u-1} e^{-t}}{(t+v)^m} dt.$$

Трохи пізніше [8] дано таке узагальнення функції  $\Gamma_m(u, v)$ :

$$D \left( \begin{matrix} a, b, c, p \\ u, v; \end{matrix} \right) = v^{-a} \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-pt} {}_2F_1 \left( a, b, c; -\frac{t}{v} \right) dt,$$

де  $a, b, c, p$  – комплексні числа  $c \neq 0$ ,  $\operatorname{Re}(p) > 0$ ,  ${}_2F_1(z)$  – класична гіпергеометрична функція [10].

У [11] розглянуто нове узагальнення гамма-функції:

$$\Gamma \left( \begin{matrix} a, b, c; \\ u, v; \end{matrix} \begin{matrix} p, \omega, \mu \end{matrix} \right) = v^{-a} \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-pt} {}_2R_1 \left( a, b, c; \omega, \mu; -\frac{t}{v} \right) dt,$$

де  ${}_2R_1(\dots)$  – частинний випадок функції Райта [12]:

$$\begin{aligned} {}_2R_1^{\omega, \mu}(z) &= {}_2R_1(a, b, c; \omega, \mu; z) = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma\left(b + \frac{\omega}{\mu}n\right)}{\Gamma\left(c + \frac{\omega}{\mu}n\right)} \cdot \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

У цій же роботі [11] запроваджено узагальнені неповні гамма-функції.

**Постановка задачі**

Мета роботи – запровадження нових узагальнень гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дигамма-функцій, дослідження основних властивостей цих нових узагальнених функцій.

**Основні результати**

Запровадимо нове узагальнення гамма-функції у вигляді

$$r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta} = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t^\omega} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a; c; -\frac{r}{t^\delta} \right) dt, \quad (1)$$

де  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ ,  $(\tau, \beta) \subset \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau - \beta > 1$ ,  $\delta \leq 1$ ,  $\omega > 0$ ,  ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\dots)$  –  $r$ -узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [11]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z) = \frac{1}{\text{B}(a, c-a)} \times \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a, \tau); \\ (c, \beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \quad (2)$$

де  ${}_1\Psi_1[\dots]$  – функція Фокса–Райта [12],  $\text{B}(a, c-a)$  – бета-функція [10].

Справедливі такі результати.

**Лема 1** (про зображення функції  ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \times (a; c; z)$  рядом). Якщо  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau - \beta < 1$ , то виконується рівність

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n)} \frac{z^n}{n!}.$$

Доведення виконується безпосередньою перевіркою за допомогою (2).

**Лема 2** (про інтегральні зображення функції  $r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta}$ ). За умов існування функції  $r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta}$  справедливі такі інтегральні зображення для цієї функції:

$$r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta}(\alpha; \delta, \omega; r) = s^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-(st)^\omega} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a; c; -\frac{r}{(st)^\delta} \right) dt, \quad (3)$$

$$r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta}(\alpha; \delta, \omega; r) = 2 \int_0^\infty x^{2\alpha-1} e^{-x^{2\omega}} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a; c; -\frac{r}{x^{2\delta}} \right) dx, \quad (4)$$

$$r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta} = r^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\sqrt{ru})^\omega} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a; c; -\frac{r^{1-\frac{\delta}{2}}}{u^\delta} \right) du,$$

$$r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta} = r^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^\infty \exp(\alpha x - (\sqrt{r}e^x)^\omega) r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a; c; -\frac{r^{1-\frac{\delta}{2}}}{e^{x\delta}} \right) dx.$$

**Лема 3** (про зображення функції  $r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}$  рядом).

Якщо виконуються умови  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $a + n\tau \neq 0, -1, -2, \dots$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ ,  $\delta \geq 1$ , то справедлива формула

$$r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\omega} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-r)^n}{n!} \frac{\Gamma(a + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n)} \Gamma\left(\frac{\alpha - n\delta}{\omega}\right). \quad (5)$$

Доведення. Функцію  ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$  (2) підставимо у формулу для  $r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta}$  (1), далі виконуємо підстановку  $x = t^\omega$  та після перетворень отримаємо (5), де  $\Gamma\left(\frac{\alpha - n\delta}{\omega}\right)$  – класична гамма-функція [10].

**Теорема 1.** Формула

$$\mathcal{M}\{f'(t); \alpha\} = -(\alpha - 1)\mathcal{M}\{f(t); \alpha - 1\}, \quad (6)$$

де  $\mathcal{M}\{\dots\}$  – інтегральне перетворення Мелліна, для функції  $r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta}$  (1) матиме вигляд

$$\alpha r\tilde{\Gamma}_{(\alpha)}^{\tau,\beta} = \omega r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha + \omega - 1) - \text{Ar} \delta r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha - \delta - 1), \quad (7)$$

де

$$A = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a + \tau)}{\Gamma(c + \beta)}.$$

Доведення. Формулу (6) легко отримати за допомогою інтегрування частинами ( $u = t^{\alpha-1}$ ,  $dv = f'(t)dt$ ). Формулу (7) отримуємо також за допомогою інтегрування частинами (з використанням (6)):

$$u = e^{-r^\omega}, \quad dv = t^{\alpha-1} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a; c; -\frac{r}{t^\delta} \right) dt,$$

$$f'(t) = -\omega t^{\omega-1} e^{-r^\omega} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} +$$

$$+ \text{Ar} \delta t^{-\delta-1} e^{-r^\omega} r {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left( a + 1; c + 1; -\frac{r}{t^\delta} \right).$$

**Теорема 2.** Так звана формула відбиття для узагальненої гамма-функції  $r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha)$  має вигляд

$${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) = -r^\alpha {}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(-\alpha). \quad (8)$$

Доведення. Нехай  $t = r\gamma^{-1}$  в (1):

$$\begin{aligned} {}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) &= -r^\alpha \int_0^\infty \gamma^{-\alpha+1-2} e^{-\left(\frac{r}{\gamma}\right)^\omega} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r^{1-\delta}}{\gamma^{-\delta}}\right) d\gamma = \\ &= -r^\alpha \int_0^\infty \gamma^{-\alpha-1} e^{-\left(\frac{r}{\gamma}\right)^\omega} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r^{1-\delta}}{\gamma^{-\delta}}\right) d\gamma, \end{aligned}$$

звідки маємо (8), де

$${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta} = \int_0^\infty \gamma^{-\alpha-1} e^{-(r\gamma^{-1})^\omega} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -r\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{-\delta}\right) d\gamma.$$

Примітка. Зображення

$${}^{ar}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) = a^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-at} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{(at)^\delta}\right) dt,$$

де  $|a| + |r| \neq 0$ ;  $r = 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , корисне при обчисленні деяких інтегральних перетворень Мелліна, Лапласа.

**Теорема 3 (формула добутку).** За умов існування узагальнених гамма-функцій  ${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha)$ ,  ${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\gamma)$  справедлива формула

$$\begin{aligned} &{}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) {}^r\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\gamma) = \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2\alpha-1} y^{2\gamma-1} \exp\{-(x^2 + y^2)\} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta} \times \\ &\times \left(a; c; -\frac{r}{x^{2\delta}}\right) {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{y^{2\delta}}\right) dx dy. \quad (9) \end{aligned}$$

Доведення легко здійснюється за допомогою перемноження двох інтегралів вигляду (4) та переходу до полярних координат.

**Наслідок.** Поклавши в (9)  $r = 0$ , одержимо формулу Ейлера:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = B(\alpha, \beta).$$

### Узагальнені неповні гамма-функції

Узагальнені неповні гамма-функції запровадимо у вигляді

$$\tilde{\gamma}(\alpha, x; r) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt, \quad (10)$$

$$\tilde{\Gamma}(\alpha, x; r) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt,$$

де  $\alpha, x$  – комплексні параметри,  $r$  – комплексна змінна. При  $r = 0$  маємо класичні неповні гамма-функції  $\gamma(\alpha, x)$ ,  $\Gamma(\alpha, x)$  [10].

У [3] розглянуто густину ймовірності

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\sqrt{\alpha}t - \sqrt{\beta}t^{-2})^2 \\ &(\alpha > 0, \beta > 0, t > 0). \quad (11) \end{aligned}$$

Важливо зазначити, що функцію  $f(t)$  (див. (11)) можна виразити через узагальнену неповну гамма-функцію:

$$F(x) = 1 - \frac{e^{2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \alpha x^2; \alpha\beta\right),$$

а трипараметричну густину ймовірності можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} g(t) &= Ct^{\alpha-1} \exp(-\alpha t) {}^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) \\ &(\alpha > 0, r > 0, t > 0), \\ C^{-1} &= 2\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{ar}), \end{aligned}$$

де  $K_\alpha(\dots)$  – функція Макдональда.

Підкреслимо основну властивість узагальнених неповних гамма-функцій:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\alpha, x; r) + \tilde{\Gamma}(\alpha, x; r) &= \tilde{\Gamma}(\alpha) \\ &(\text{Re}(r) \geq 0). \quad (12) \end{aligned}$$

**Теорема 4 (про зв'язок функцій  ${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha; r)$  з функцією Макдональда).** За умов  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0, r > 0, \tau > 0$  виконується рівність

$$\begin{aligned} &{}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha; r) = \frac{2r^{\frac{\alpha}{2}}}{B(a, c-a)} \times \\ &\times \int_0^1 t^{\frac{a+\alpha\tau}{2}-1} (1-t)^{c-a-1} K_\alpha(2\sqrt{rt^\tau}) dt, \quad (13) \end{aligned}$$

де  $K_\alpha(\dots)$  – функція Макдональда.

Доведення. Використавши формули

$${}^\alpha\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha; r) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} {}^r\Phi_1^{\tau}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt,$$

$${}_1\Phi_1^\tau(\alpha; c; z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{c-a-1} e^{zt^\tau} dt,$$

матимемо:

$$\begin{aligned} {}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) &= \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} {}_1\Phi_1^\tau\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt = \\ &= \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} e^{-\frac{r}{t}u^\tau} du = \\ &= \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} du \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \frac{ru^\tau}{t} dt. \end{aligned}$$

Застосуємо формулу 3.471 (3) [10]:

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x}-\gamma x} dx = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma})$$

(Re(β) ≥ Re(γ) > 0).

У нашому випадку:

$$\nu = \alpha, \beta = ru^\tau, \gamma = 1,$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \frac{ru^\tau}{t} dt &= 2(ru^\tau)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{ru^\tau}) = \\ &= 2r^{\frac{\alpha}{2}} u^{\frac{\alpha\tau}{2}} K_\alpha(2\sqrt{ru^\tau}). \end{aligned}$$

Отримали (13).

**Наслідок.** Якщо  $\tau = 1, a = 2, r = 1$ , то одержимо

$$\begin{aligned} {}^r\tilde{\Gamma}^1(\alpha; 1) &= \Gamma(\alpha) {}_1F_2(2; 1-\alpha, c; 1) + \\ &+ \frac{4\Gamma(c)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(2)\Gamma(\alpha+c)} {}_1F_1(\alpha+2; 1+\alpha, \alpha+c; 1), \end{aligned}$$

де  $\text{Re}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) > -1 + \frac{1}{2}|\text{Re}(\nu)|, \text{Re}(c-a) > 0, {}_1F_2$  – гіпергеометрична функція [10].

**Теорема 5** (про інтегральні зображення узагальненої неповної гамма-функції  ${}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r)$ ). За умов  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0, \text{Re}(\alpha) > 0, r \geq 0, \tau > 0, x > 0, \text{Re}(\nu) > 0$  маємо:

$${}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) = x^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^\tau\left(a; c; -\frac{r}{xt}\right) dt,$$

$${}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) = \int_{-\infty}^\infty \exp(-e^x + \alpha x) {}_1\Phi_1^\tau(a; c; -re^{-x}) dx,$$

$${}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) = \nu^\alpha \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\nu-1} {}_1\Phi_1^\tau\left(a; c; \frac{r}{\nu \ln x}\right) dx.$$

**Теорема 6** (про інтегральні зображення узагальненої неповної гамма-функції  ${}^r\tilde{\gamma}^\tau(\alpha, x; r)$ ). За умов  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0, \text{Re}(\alpha) > 0, x > 0, r > 0, \mu > 0$  справедлива рівність

$${}^r\tilde{\gamma}^\tau(\alpha, x; r) = x^\alpha \int_0^\infty \exp(-xe^{-t} - \alpha t) {}_1\Phi_1^\tau\left(a; c; -\frac{r}{x}e^t\right) dt.$$

Доведення виконується за допомогою підстановки  $t = xe^{-\nu}$  у формулу (10).

Як наслідки (із теорем 5, 6) легко отримуємо значення інтегралів, відсутніх у наявній науковій літературі:

$$\int_0^\infty e^{-xt} {}_1\Phi_1^\tau(a; c; -r(xt)^{-1}) dt = \frac{1}{x} {}^r\tilde{\Gamma}^\tau(1; r),$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-2xcht} dt = x^{-\alpha} {}^r\tilde{\gamma}^\tau(\alpha, x; x^2).$$

**Перетворення Лапласа.** За умов  $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0, \tau \in \mathbb{R}, \tau > 0, \text{Re}(\delta) > 0$  маємо

$$Z \left\{ {}_1\Phi_1^\tau\left(a; c; -\frac{r}{t^\delta}\right) \right\} = \frac{\Gamma(\delta)}{P} {}_2R_1\left(a, \delta; c; -\frac{r}{p^\delta}\right), \quad (14)$$

де  ${}_2R_1(\dots)$  – узагальнена гіпергеометрична функція Фокса–Райта [11].

**Перетворення Мелліна.** Якщо  $\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0, \text{Re}(a - \tau s) > 0, \text{Re}(c - \tau s) > 0, \text{Re}(s) > 0, r > 0, \tau > 0, \omega > 0, \delta \geq 1$ , то справедлива рівність

$$\begin{aligned} M\{ {}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; \delta, \omega; r) \} &\equiv \int_0^\infty {}^r\tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; \delta, \omega; r) r^{s-1} dr = \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c-s\tau)} \Gamma\left(\frac{\alpha+\delta s}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Справедливість формул (14), (15) легко перевіряється за допомогою теореми Фубіні [10], значення інтеграла [10]

$$\Gamma(z)x^{-z} = \int_0^\infty e^{-xt} t^{z-1} dt.$$

Із (15) безпосередньо впливають формули

$$\int_0^\infty {}^r\tilde{\Gamma}^\tau\left(\alpha; \frac{1}{n}, \omega; r\right) r^{s-1} dr =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c-s\tau)\omega} \Gamma\left(\frac{\alpha}{\omega} + \frac{s}{n\omega}\right), n \in N,$$

$$\int_0^\infty t^{-\delta s} r {}_1\Phi_1^\tau\left(\alpha; c; -\frac{r}{t^\delta}\right) r^{s-1} dr = \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-\tau s)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau s)}.$$

**Узагальнена дигамма-функція**

Врахувавши інтегральне зображення узагальненої гамма-функції, маємо таке визначення узагальненої дигамма-функції:

$$\tilde{\Psi}_r(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \{\ln(\tilde{\Gamma}(\alpha))\} = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} \{\tilde{\Gamma}(\alpha)\}$$

або

$$\tilde{\Psi}_r(\alpha) = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (\ln t) e^{-t} r {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt,$$

де  $\text{Re}(r) > 0; r = 0, \text{Re}(\alpha) > 0$ .

**Теорема 7.** За умов  $\text{Re}(r) \geq 0; r = 0, \text{Re}(\alpha) > 0$  справедлива рівність

$$\tilde{\Psi}_r(\alpha) = \int_0^\infty \left\{ e^{-x} - (1+x)^{-\alpha} \frac{\tilde{\Gamma}_{r(1+x)}(\alpha)}{\tilde{\Gamma}_r(\alpha)} \right\} \frac{dx}{x}. \quad (16)$$

Доведення. Розглянемо подвійний інтеграл

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} r {}_1\Phi_1\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) \left\{ \frac{e^{-t-x} - e^{-t(1+x)}}{x} \right\} dt dx. \quad (17)$$

Розпишемо на два інтеграли, зауважимо, що внутрішні інтеграли – це узагальнені гамма-функції.

Отже, маємо

$$J = \int_0^\infty \left\{ e^{-x} \tilde{\Gamma}_r(\alpha) - (1+x)^{-\alpha} \tilde{\Gamma}_{r(1+x)}(\alpha) \right\} \frac{dx}{x}. \quad (18)$$

А запис подвійного інтеграла (17) по  $x$  дає

$$J = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} r {}_1\Phi_1 \left\{ \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx \right\} dt =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \left( \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} r {}_1\Phi_1 dt \right) = \frac{d}{d\alpha} (\tilde{\Gamma}_r(\alpha)). \quad (19)$$

Із (18) і (19) маємо

$$\frac{d}{d\alpha} (\tilde{\Gamma}_r(\alpha)) =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ e^{-x} \tilde{\Gamma}_r(\alpha) - (1+x)^{-\alpha} \tilde{\Gamma}_{r(1+x)}(\alpha) \right\} \frac{dx}{x}, \quad (20)$$

а поділивши обидві частини (20) на  $\tilde{\Gamma}_r(\alpha)$ , одержимо (16).

**Наслідок.** Із (16) при  $r = 0$  випливає формула Діріхле для класичної дигамма-функції [10]:

$$\Psi(\alpha) = \int_0^\infty \left( e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^\alpha} \right) \frac{dx}{x}.$$

**Теорема 8.** Справедлива така рівність для узагальненої дигамма-функції:

$$\tilde{\Psi}_r(\alpha) = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{\tilde{\Gamma}_{re'}(\alpha)}{\tilde{\Gamma}_r(\alpha)} \frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} \right) dt, \quad (21)$$

де  $\text{Re}(r) \geq 0; r = 0, \text{Re}(\alpha) > 0$ .

Доведення легко випливає із (16), підстановки  $x = e^t - 1$  в другий інтеграл та після відповідних перетворень.

**Наслідок.** Із (21) при  $r = 0$  маємо результат Гаусса для класичної псі-функції [10]:

$$\Psi(\alpha) = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} \right) dt, \text{Re}(\alpha) > 0.$$

**Теорема 9.** Для узагальненої дигамма-функції виконується рівність

$$\tilde{\Psi}_r(\alpha) = \ln \alpha + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{t} - (1-e^{-t})^{-1} \frac{\tilde{\Gamma}_{re'}(\alpha)}{\tilde{\Gamma}_r(\alpha)} \right\} e^{-\alpha t} dt$$

$$(\text{Re}(r) \geq 0, \text{Re}(\alpha) > 0). \quad (22)$$

Доведення. Додавши та віднявши  $\frac{e^{-\alpha t}}{t}$  у першому члені підінтегрального виразу (21) та врахувавши вираз для інтегрального зображення  $\ln \alpha$ , отримуємо (22).

**Наслідок.** При  $r = 0$  у (22) матимемо формулу Біне для класичної псі-функції [10]:

$$\Psi(\alpha) = \ln \alpha + \int_0^\infty \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) e^{-\alpha t} dt, \text{Re}(\alpha) > 0.$$

**Теорема 10** (інтегральне перетворення Мелліна функції  $\tilde{\Psi}^\tau(\alpha; r)$ ). За умов  $\text{Re}(a) > 0, \text{Re}(c) > 0, \text{Re}(a - \tau s) > 0, \text{Re}(c - \tau s) > 0, \text{Re}(s) > 0, \text{Re}(a + s) > 0$  справедлива рівність

$$\int_0^\infty \tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) \tilde{\Psi}^\tau(\alpha; r) r^{s-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-\tau s)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau s)} \Psi(\alpha + s), \quad (23)$$

де  $\Psi(\alpha + s)$  – класична  $\Psi$ -функція.

Д о в е д е н н я. Враховуючи визначення функцій  $\tilde{\Gamma}^\tau, \tilde{\Psi}^\tau$ , можливість перестановки порядку інтегрування (завдяки рівномірній збіжності відповідних інтегралів), маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) \tilde{\Psi}^\tau(\alpha; r) r^{s-1} dr = \\ & = \int_0^\infty r^{s-1} dr \int_0^\infty t^{\alpha-1} (\ln t) e^{-t} {}_1\Phi_1^\tau\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt = \\ & = A \int_0^\infty t^{\alpha-1} (\ln t) e^{-t} dt \int_0^\infty r^{s-1} dr \int_0^1 \omega^{a-1} (1-\omega)^{c-a-1} e^{-\frac{r}{t}\omega^\tau} d\omega = \\ & = \frac{\Gamma(s)\Gamma(c)\Gamma(a-\tau s)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau s)} \Psi(\alpha+s), \end{aligned}$$

тут враховано

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty r^{s-1} e^{-\frac{r}{t}\omega^\tau} dr = \omega^{-\tau s} t^s \Gamma(s), \\ & A = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}, \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

**Наслідок.** При  $s = 1$  (23) матимемо

$$\int_0^\infty \tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r) \tilde{\Psi}^\tau(\alpha; r) r^{s-1} dr = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau)} \Psi(\alpha+1).$$

### Список літератури

1. Alzer H. Some inequalities for the incomplete gamma function // *Math. Comp.* – 1997. – **66**. – P. 771–778.
2. Boudjelkha M., Chaudhry M.A. Asymptotic expansion of the generalized incomplete gamma functions with application to heat conduction problems // *J. of Math. Analysis and Applications.* – 2000. – **248**. – P. 509–519.
3. Chaudhry M.A., Zubair S.M. Generalized incomplete gamma function with application // *J. Comp. Appl. Math.* – 1994. – **55**. – P. 99–124.
4. Miller A.R. Reduction of a generalized incomplete gamma function, related Kampé de Fériet functions, and incomplete Weber integrals // *Rocky Mountain J. Math.* – 2000. – **30**, № 2. – P. 703–714.
5. Paris R.B., Wood A.D. Exponentially – improved asymptotic for the gamma function // *J. Comp. Appl. Math.* – 1992. – **41**. – P. 135–143.
6. Prym F.E. Zur Theorie der Gamma Function // *J. Reine Angew. Math.* – 1877. – **82**. – P. 165–172.
7. Tricomi F.G., Erdelyi A. The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions // *Pacific J. Math.* – 1951. – **1**. – P. 133–142.
8. Zubair S.M., Chaudhry M.A. Temperature solutions due to gamma – type heat sources in a finite medium // *ASME – HTD.* – 1992. – **207**. – P. 63–68.
9. Kobayashi K. On generalized gamma functions occurring in diffraction theory // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1991. – **60**. – P. 1501–1512.
10. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. – 296 p.
11. Virchenko N.O. On some generalizations of gamma functions // *Доп. АН України.* – 1999. – № 10. – С. 39–44.
12. Wright E.M. On the coefficient of power series having exponential singularities // *J. London Math. Soc.* – 1993. – **8**. – P. 71–79.

### References

1. H. Alzer, “Some inequalities for the incomplete gamma function”, *Math. Comp.*, vol. 66, pp. 771–778, 1997.
2. M. Boudjelkha and M.A. Chaudhry, “Asymptotic expansion of the generalized incomplete gamma functions with application to heat conduction problems”, *J. of Math. Analysis and Applications*, vol. 248, pp. 509–519, 2000.

### Висновки

У роботі подано нові узагальнення гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій. За допомогою  $r$ -узагальнених конфлюентних гіпергеометричних функцій вивчено їх основні властивості (різні інтегральні зображення, диференціальні співвідношення, інтегральні перетворення Мелліна, Лапласа), дано і приклади застосування нових узагальнених гамма-функцій. Для подальшого застосування нових узагальнень гамма-функцій важливими є формула зв'язку з функцією Макдональда та зображення узагальненої гамма-функції у вигляді ряду.

Одержані результати є вагомими та перспективним, оскільки відкривають можливості для ширшого використання гамма-функцій у теорії спеціальних функцій, у теорії ймовірностей, у математичній фізиці. Надалі планується застосувати узагальнення гамма-функцій у прикладних науках, до обчислення нових інтегралів, відсутніх у науковій літературі, до розв'язання нових задач теорії інтегральних рівнянь тощо.

3. M.A. Chaudhry and S.M. Zubair "Generalized incomplete gamma function with application", *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 55, pp. 99–124, 1994.
4. A.R. Miller, "Reduction of a generalized incomplete gamma function, related Kampe de Fariet functions, and incomplete Weber integrals", *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 30, no. 2, pp. 703–714, 2000.
5. R.B. Paris and A.D. Wood, "Exponentially – improved asymptotics for the gamma function", *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 41, pp. 135–143, 1992.
6. F.E. Prym, "Zur Theorie der Gamma Function", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 82, pp. 165–172, 1877.
7. F.G. Tricomi and A. Erdelyi, "The asymptotic expansion of aratio of gamma functions", *Pacific J. Math*, vol. 1, pp. 133–142, 1951.
8. S.M. Zubair and M.A. Chaudhry, "Temperature solutions due to gamma – type heat sources in a finite medium", *ASME – HTD*, vol. 207, pp. 63–68, 1992.
9. K. Kobayashi, "On generalized gamma functions occurring in diffraction theory", *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 60, pp. 1501–1512, 1991.
10. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 1. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953, 296 p.
11. N.O. Virchenko, "On some generalizations of gamma functions", *Dopovidi AN Ukrainy*, no. 10, pp. 39–44, 1999.
12. E.M. Wright, "On the coefficient of power series having exponential singularities", *J. London Math. Soc.*, vol. 8, pp. 71–79, 1933.

Н.О. Вірченко

#### ОСНОВНИ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАММА-ФУНКЦІЙ

**Проблематика.** Стаття присвячена вивченню основних властивостей нових узагальнених гамма-функцій, узагальнених неповних гамма-функцій, узагальнених дігамма-функцій для їх кращого застосування у прикладних науках, для обчислення інтегралів, відсутніх у науковій літературі.

**Мета дослідження.** Запровадження і дослідження основних властивостей нових узагальнених гамма-функцій, узагальнених неповних гамма-функцій, узагальнених дігамма-функцій та їх застосування.

**Методика реалізації.** Використано такі методи: методи теорії функцій дійсної змінної, теорії спеціальних функцій, теорії математичної фізики, методи прикладного аналізу.

**Результати дослідження.** Запроваджено нові форми узагальнених гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій. Досліджено основні властивості цих узагальнених спеціальних функцій, дано приклади застосування нових узагальнених гамма-функцій.

**Висновки.** За допомогою  $r$ -узагальнених конфлюентних гіпергеометричних функцій запроваджено нове узагальнення гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій.

**Ключові слова:** узагальнені гамма-функції; неповні гамма-функції; дігамма-функції.

Н.А. Вирченко

#### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ГАММА-ФУНКЦИЙ

**Проблематика.** Стаття посвящена изучению основных свойств новых обобщенных гамма-функций, обобщенных неполных гамма-функций, обобщенных дигамма-функций для их лучшего применения в прикладных науках, для вычисления интегралов, отсутствующих в научной литературе.

**Цель исследования.** Введение и исследование основных свойств новых обобщенных гамма-функций, обобщенных неполных гамма-функций, обобщенных дигамма-функций и их применения.

**Методика реализации.** Применены следующие методы: методы теории функции действительного переменного, теории специальных функций, теории математической физики, методы прикладного анализа.

**Результаты исследования.** Введены новые формы обобщенных гамма-функций, неполных гамма-функций, дигамма-функций. Исследованы основные свойства этих обобщенных специальных функций, приведены примеры применения новых обобщенных гамма-функций.

**Выводы.** При помощи  $r$ -обобщенных конфлюентных гипергеометрических функций введены новые обобщения гамма-функций, неполных гамма-функций, дигамма-функций.

**Ключевые слова:** обобщенные гамма-функции; неполные гамма-функции; дигамма-функции.

Рекомендована Радою  
фізико-математичного факультету  
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції  
18 лютого 2016 року