

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**І. К. Рисцов**

# **Вища математика в управлінні бізнесом**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітньою програмою «Промисловий маркетинг»  
спеціальності D5 Маркетинг,  
за освітньою програмою «Цифрова економіка та менеджмент»  
спеціальності С1 Економіка та міжнародні економічні відносини

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2025

УДК [512+514+517](075.8)  
М34

Автор: *Рисцов Ігор Костянтинович*, д-р фіз.-мат наук, проф.  
Рецензент: *Кузьмін А. В.*, канд. фіз.-мат. наук, доц., Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
Відповідальний редактор: *Солнцев С.О.*, д-р фіз.-мат наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 9 від 26.06.25 р.)  
за поданням вченої ради факультету менеджменту та маркетингу  
(протокол № 11 від 26.05.2025 р.)*

**Рисцов І.К.**  
М34 Вища математика в управлінні бізнесом. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Промисловий маркетинг» спец. D5 Маркетинг / І.К. Рисцов ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 143 с.

Вища математика в управлінні бізнесом є навчальним комплексом, що складається з посібника та практикуму. В посібнику викладено основи вищої алгебри, аналітичної геометрії і математичного аналізу, які складають скорочений односеместровий курс. Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю D5 Маркетинг, а також за спеціальністю С1 Економіка та міжнародні економічні відносини, але він буде корисним для всіх студентів факультету менеджменту та маркетингу.

УДК [512+514+517](075.8)

Реєстр. № 24/25-560. Обсяг 8,5 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

## Зміст

1. Лінійний простір і матриці .....	4
2. Визначник матриці та обернена матриця .....	14
3. Ранг матриці і системи лінійних рівнянь .....	23
4. Аналітична геометрія на площині.....	34
5. Континуум і дійсні функції.....	46
6. Теорія границь.....	54
7. Неперервні і диференційовані функції .....	63
8. Диференціали та похідні функції.....	72
9. Інтегралі.....	81
10. Методи інтегрування.....	90
11. Застосування інтегрального числення.....	98
12. Функції кількох змінних .....	106
13. Подвійний і криволінійний інтегралі.....	114
14. Диференціальні рівняння першого порядку .....	122
15. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	131
Список використаної літератури.....	143

## 1. Лінійний простір і матриці

Нехай  $\mathbb{R}$  - множина дійсних чисел, які будемо називати *скалярами*, щоб відрізнити їх від векторів. Нагадаємо, що в  $\mathbb{R}$  всюди визначені чотири арифметичних операції додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на нуль). Такі числові множини називаються в алгебрі полями, тому множина  $\mathbb{R}$  виступає тут як *поле скалярів*.

Нехай  $V$  – множина, елементи якої будемо називати *векторами* і на якій визначена операція *додавання* (складання) векторів, яка задовольняє такі умови для всіх  $v, w, x \in V$ :

- (A1)  $v + w = w + v$  (комутативність);  
 (A2)  $(v + w) + x = v + (w + x)$  (асоціативність);  
 (A3)  $\bar{0} + v = v$  (існування нульового вектору);  
 (A4)  $v + (-v) = \bar{0}$  (існування протилежного вектору).

Крім того, на множині  $V$  визначена операція множення векторів на скаляри із  $\mathbb{R}$ , яка задовольняє такі умови для всіх векторів  $v, w$  і скалярів  $c, d$ :

- (M1)  $(c + d)v = cv + dv$ , дистрибутивність відносно множення на вектор;  
 (M2)  $c(v + w) = cv + cw$ , дистрибутивність відносно множення на скаляр;  
 (M3)  $(cd)v = c(dv)$ , асоціативність множення скалярів на вектор;  
 (M4)  $1v = v$ , унітарність множення на одиницю.

**Означення 1.1.** *Лінійним* (або векторним) *простором* над полем  $\mathbb{R}$  називається множина  $V$ , на якій визначені лінійні операції додавання і множення на скаляр із  $\mathbb{R}$ , які задовольняють аксіомам (A1) – (A4) і (M1) – (M4).

Послідовність із  $n$  дійсних чисел  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  будемо називати *вектором* (або *кортежем*), а числа  $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$ , називаються *компонентами* (або координатами) вектору  $v$ . Кортежі  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  і  $w = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  однакового розміру можна додавати за компонентами  $v + w = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ , а також помножити скаляр  $c \in \mathbb{R}$  на вектор  $v$  також за компонентами  $cv = (c\alpha_1, \dots, c\alpha_n)$ . Нульовим тут буде вектор  $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ . Із властивостей дійсних чисел випливає, що ці операції задовольняють всім аксіомам (A1) – (A4) і (M1) – (M4). лінійного простору (перевірити самостійно) і таким чином ми отримуємо найбільш важливий приклад векторного простору.

**Означення 1.2.** Множина  $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$  всіх кортежів розміру  $n$  разом з лінійними операціями додавання і множення на число називається *лінійним координатним* (або арифметичним)  $n$ -вимірним простором.

Частковими випадками координатного простору є числа вісь  $\mathbb{R}$  – одновимірний простір,  $\mathbb{R}^2$  – двовимірний простір,  $\mathbb{R}^3$  – трьох-вимірний простір, які є основними об'єктами вивчення в геометрії. В лінійній алгебрі лінійний простір вивчається у загальному вигляді.

Зауважимо, що в лінійному просторі  $V$  з'являються два різних нуля, перший це скаляр  $0 \in \mathbb{R}$ , а другий це нульовий вектор  $\bar{0} \in V$ . Вони задовольняють такі умови для будь-якого скаляра  $c \in \mathbb{R}$  і вектору  $v \in V$ :

$$0v = \bar{0}, \quad c\bar{0} = \bar{0}, \quad (1.1)$$

$$\text{якщо } cv = \bar{0}, \text{ то } c = 0, \text{ або } v = \bar{0}. \quad (1.2)$$

### 1.1. Лінійна залежність і незалежність векторів

*Лінійною комбінацією* скалярів  $c_1, \dots, c_m$  із  $\mathbb{R}$  і векторів  $v_1, \dots, v_m$  із  $V$  називається вираз  $c_1v_1 + \dots + c_mv_m$ . Лінійна комбінація називається *тривіальною* (нульовою), якщо всі скаляри у неї дорівнюють нулю і *нетривіальною* (ненульовою) в іншому випадку. Допускаючи вільність мови (яку ми також будемо використовувати) лінійною комбінацією скалярів  $c_1, \dots, c_m$  і векторів  $v_1, \dots, v_m$  називають також вектор  $w$ , якій визначається рівністю:

$$w = c_1v_1 + \dots + c_mv_m. \quad (1.3)$$

Говорять, що вектор  $w$  *лінійно виражається* через вектори  $v_1, \dots, v_m$ , або вектор  $w$  *розкладається* за векторами  $v_1, \dots, v_m$ , якщо існують скаляри (коефіцієнти)  $c_1, \dots, c_m$ , такі, що виконується рівність (1.3).

Послідовність векторів  $v_1, \dots, v_m$  назвемо *набором*, якщо не має значення порядок їх слідування. Зауважимо, що в наборі вектори можуть повторюватися.

**Означення 1.3.** Набір векторів  $v_1, \dots, v_m$  із лінійного простору  $V$  називаються *лінійно залежним*, якщо існує їх нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору:

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = \bar{0} . \quad (1.4)$$

Наприклад, один нульовий вектор  $\{\bar{0}\}$  створює лінійно залежний набір в силу другої рівності у формулі (1.1). Два пропорційних вектори  $\{v, cv\}$  також створюють лінійно залежний набір. Будемо писати, що  $A \subseteq B$ , якщо кожен вектор із набору  $A$  належить набору  $B$  з урахуванням їх кратності.

**Твердження 1.1.** Якщо набір векторів  $A = (v_1, \dots, v_m)$  лінійно залежний і  $A \subseteq B$ , то набір векторів  $B$  також буде лінійно залежним.

**Доведення.** Якщо  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = \bar{0}$ , де  $c_i$  ненульовий скаляр, то можна додати в ліву частину вектори із різниці  $B \setminus A$ , яких немає в наборі  $A$ , з нульовими коефіцієнтами і отримати нетривіальну лінійну комбінацію векторів із  $B$ , яка дорівнює нулю.  $\square$

Як видно із рівності (1.4) поняття лінійної залежності набору векторів не залежить від порядку слідування векторів в наборі, однак наступна лема буде дуже корисною в подальшому викладанні.

**Лема 1.2.** Нехай  $A = (v_1, \dots, v_m)$ , де  $m \geq 2$ , – лінійно залежний набір ненульових векторів, тоді при будь-якому впорядкуванні цих векторів знайдеться вектор  $v_k$ , де  $k > 1$ , і скаляри  $d_1, \dots, d_{k-1}$  такі, що виконується рівність:

$$v_k = d_1 v_1 + \dots + d_{k-1} v_{k-1} . \quad (1.5)$$

**Доведення.** Нехай  $v_1, \dots, v_m$  будь-яке впорядкування векторів із набору  $A$ , тоді в силу лінійної залежності цих векторів виконується умова (1.4), де не всі скаляри  $c_k$  дорівнюють нулю. Виберемо вектор  $v_k$  з найбільшим номером  $k$ , таким, що  $c_k \neq 0$ . Тоді  $k \geq 2$ , оскільки  $v_1 \neq \bar{0}$ , та із (1.4) випливає така рівність:

$$v_k = -\frac{c_1}{c_k} v_1 - \dots - \frac{c_{k-1}}{c_k} v_{k-1} .$$

Таким чином, виконується рівність (1.5) зі скалярами  $d_i = -c_i/c_k$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , і тому лему доведено.  $\square$

Наприклад, набір векторів  $v_1 = (3, 2, 1)$ ,  $v_2 = (-7, 3, 2)$ ,  $v_3 = (-4, -5, -3)$ ,  $v_4 = (-4, -8, -4)$  із  $\mathbb{R}^3$  буде лінійно залежним, оскільки  $5v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = (0, 0, 0)$  і кожний з них векторів лінійно виражається через інші. Тому вектор  $v_4$  задовольняє умову (1.5).

**Означення 1.4.** Набір векторів  $v_1, \dots, v_m$  із лінійного простору  $V$  називаються *лінійно незалежним*, якщо він не є лінійно залежним, тобто із умови  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = \bar{0}$ , випливає, що  $c_i = 0$  для всіх  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Один ненульовий вектор  $\{x\}$  створює лінійно незалежний набір в силу умови (1.2). Два непропорційних вектори також створюють лінійно незалежний набір. Із твердження 1.1 випливає такий наслідок.

**Твердження 1.3.** Якщо набір векторів  $B$  лінійно незалежний і  $A \subseteq B$ , то набір векторів  $A$  також буде лінійно незалежним.

Дійсно, як би набір  $A$  був лінійно залежним, то за твердженням 1.1 впливало би, що набір  $B$  також є лінійно залежний, а це суперечить умові твердження 1.3.

Вектор  $w$  назвемо лінійно залежним від векторів  $v_1, \dots, v_m$ , якщо  $w$  лінійно виражається через ці вектори за формулою (1.3) і назвемо лінійно незалежним від векторів  $v_1, \dots, v_m$  в іншому випадку. Із твердження 1.1 і леми 1.2 випливає таке твердження.

**Твердження 1.4.** Набір векторів  $v_1, \dots, v_m$ , де  $m \geq 2$ , буде лінійно залежним тоді і тільки тоді, коли, принаймні, один з них лінійно залежний від інших, і набір векторів буде лінійно незалежним, тоді і тільки тоді, коли кожний з них лінійно незалежний від інших.

Тепер трошки узагальнимо лему 1.2.

**Лема 1.5.** Нехай задана послідовність  $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ , де  $n \geq 2$ , із лінійно залежного набору ненульових векторів, в якому вектори  $v_1, \dots, v_m$  – лінійно незалежні, тоді

знайдеться вектор  $v_k$ , де  $k > m$ , і скаляри  $d_1, \dots, d_{k-1}$  такі, що виконується рівність (1.5).

**Доведення.** Оскільки послідовність  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  складена із лінійно залежного набору ненульових векторів, то згідно з лемою 1.2 знайдеться вектор  $v_k$  і скаляри  $d_1, \dots, d_{k-1}$  такі, що виконується рівність (1.5). Але  $v_k$  не може знаходитися серед векторів  $v_1, \dots, v_m$ , так як в іншому випадку один із цих векторів лінійно виражався би через вектори з меншими номерами, а це суперечить твердженню 1.4. Тому  $k > m$  і лему доведено.  $\square$

## 1.2. Базиси лінійного простору і розмірність

Набір векторів  $v_1, \dots, v_m$  називається *повним* в просторі  $V$ , якщо будь-який вектор із  $V$  є лінійною комбінацією векторів  $v_1, \dots, v_m$ . Наприклад, множина кортежів:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1), \quad (1.6)$$

є повною в просторі  $\mathbb{R}^n$ , оскільки для будь-якого вектору  $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  маємо розкладання  $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ . Якщо набір векторів  $A$  повний і  $A \subseteq B$ , то очевидно, що набір векторів  $B$  також буде повним.

**Твердження 1.6.** Якщо набір векторів  $(v_1, \dots, v_m)$  повний і вектор  $v_m$  лінійно виражається через вектори  $v_1, \dots, v_{m-1}$ , то набір  $(v_1, \dots, v_{m-1})$  також буде повним.

**Доведення.** Нехай  $x = c_1 v_1 + \dots + c_{m-1} v_{m-1} + c_m v_m$  і  $v_m = d_1 v_1 + \dots + d_{m-1} v_{m-1}$ , тоді маємо  $x = c_1 v_1 + \dots + c_{m-1} v_{m-1} + c_m (d_1 v_1 + \dots + d_{m-1} v_{m-1}) = (c_1 + c_m d_1) v_1 + \dots + (c_{m-1} + c_m d_{m-1}) v_{m-1}$ .

Таким чином, будь-який вектор лінійно виражається через вектори  $v_1, \dots, v_{m-1}$  і тому цей набір також буде повним.  $\square$

**Означення 1.5.** Набір векторів  $v_1, \dots, v_n$  називається *базисом* лінійного простору  $V$ , якщо він є лінійно незалежним і повним у  $V$ .

Наприклад, набір  $E = (e_1, \dots, e_n)$  векторів (1.6) буде базисом простору  $\mathbb{R}^n$ , оскільки з рівності  $c_1 e_1 + \dots + c_n e_n = (0, \dots, 0)$  випливає, що  $(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$ , і тому  $c_i = 0$ , для всіх  $i, 1 \leq i \leq n$ . Отже набір векторів  $E$  буде лінійно незалежним і повним.

**Означення 1.6.** Базис  $E$  називається *стандартним базисом* простору  $\mathbb{R}^n$ .

Кожний вектор  $x \in V$  за означенням розкладається за базисом  $(v_1, \dots, v_n)$ , тобто існують скаляри  $c_1, \dots, c_n$  такі, що  $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ , і які називаються *координатами вектору  $x$*  за базисом  $(v_1, \dots, v_n)$ .

**Твердження 1.7.** Координати вектору  $x$  визначаються *однозначно* за будь-яким базисом  $(v_1, \dots, v_n)$ .

**Доведення.** Нехай маємо розкладання  $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$ , тоді віднімаємо одну рівність із другої і отримуємо  $(c_1 - d_1) v_1 + \dots + (c_n - d_n) v_n = \vec{0}$ . Звідси, в силу лінійної незалежності векторів базису слідує, що  $(c_i - d_i) = 0$  для всіх  $i, 1 \leq i \leq n$ , тобто  $c_i = d_i, 1 \leq i \leq n$ .  $\square$

Тепер доведемо допоміжне, але дуже важливе твердження.

**Лема 1.8.** Нехай  $A = (v_1, \dots, v_m)$  – лінійно незалежний набір векторів, а  $B = (w_1, \dots, w_n)$  – повний набір ненульових векторів із лінійного простору  $V$ , тоді  $m \leq n$ .

**Доведення.** Припустимо протилежне, що  $m > n$ . Додаймо до набору  $B$  вектор  $v_m$ , тоді згідно твердження 1.4 отримуємо лінійно залежний набір  $\{v_m\} \cup B$ , оскільки вектор  $v_m$  лінійно виражається через вектори із набору  $B$ . Впорядкуємо набір  $\{v_m\} \cup B$  таким чином, щоб вектор  $v_m$  був першим  $v_m, w_1, \dots, w_n$ , тоді за лемою 1.2 знайдеться вектор  $w_k$  в цієї послідовності, якій лінійно виражається через попередні вектори. Без обмеження загальності будемо вважати, що  $w_k = w_n$ , так як в іншому випадку вектори  $w_k$  і  $w_n$  можна переставити. Видалімо вектор  $w_n$  із набору, тоді отримуємо набір  $B_1 = (v_m, w_1, \dots, w_{n-1})$ . Згідно твердженню 1.6 набір векторів  $B_1$  залишився повним і крім того,  $|B_1| = n$ , де  $|B_1|$  число векторів в наборі  $B_1$  з урахуванням кратності.

Додаймо до  $B_1$  вектор  $v_{m-1}$ , тоді згідно твердження 1.4 отримуємо лінійно залежний набір  $\{v_{m-1}\} \cup B_1$ , оскільки вектор  $v_{m-1}$  лінійно виражається через вектори із набору  $B_1$ . Впорядкуємо набір  $\{v_{m-1}\} \cup B_1$  таким чином, щоб вектори  $v_{m-1}$  і  $v_m$  були першими  $v_{m-1}, v_m, w_1, \dots, w_{n-2}, w_{n-1}$ . Тоді за лемою 1.5 знайдеться вектор  $w_k$  в цієї послідовності,

якій лінійно виражається через попередні вектори, оскільки набір  $\{v_{m-1}, v_m\}$  буде лінійно незалежним згідно твердженню 1.3. Знову будемо вважати, що  $w_k = w_{n-1}$ . В результаті видалення вектору  $w_{n-1}$  ми отримуємо повний набір  $B_2 = (v_{m-1}, v_m, w_1, \dots, w_{n-2})$ , якій складається з  $n$  векторів  $|B_2| = n$ .

Продовжимо цей процес, тобто додаймо до  $B_2$  вектор  $w_{m-2}$  і т. д. В результаті ми отримуємо ланцюг повних наборів  $B_1, \dots, B_k$ , які містять  $n$  векторів. При цьому ніколи не буде видалений вектор із набору  $A$ , оскільки він лінійно незалежний. Крім того, набір  $B$  буде вичерпаний раніше ніж буде вичерпаний набір  $A$ , в силу нерівності  $m > n$ . В результаті отримуємо повний набір  $B_k = (v_{m-n+1}, \dots, v_m)$ , на якому процес зупиниться. Тоді вектори  $A \setminus B_k = \{v_1, \dots, v_{m-n}\}$  будуть лінійно виражатися через вектори із набору  $B_k$ , що суперечить лінійній незалежності набору векторів  $A$ . Таким чином, лема доведена від протилежного.  $\square$

Лінійний простір  $V$  називається *скінчено-вимірним*, якщо у нього є скінченний базис  $B$ . В цьому випадку всі базиси простору  $V$  будуть скінченними, так як в силу леми 1.8 вони не можуть містити більше векторів ніж у базису  $B$ . В подальшому ми будемо розглядати тільки скінчено-вимірні простори.

**Теорема 1.9** (о базисах). Будь-які два базису  $B_1$  і  $B_2$  лінійного скінчено-вимірного простору  $V$  складаються із однакового числа векторів.

**Доведення.** Нехай  $|B_1|$  і  $|B_2|$  це число векторів в скінченних базисах  $B_1$  і  $B_2$  відповідно, тоді за лемою 1.5 маємо  $|B_1| \leq |B_2|$ , оскільки набір  $B_1$  лінійно незалежний, а  $B_2$  повний. І навпаки, маємо  $|B_2| \leq |B_1|$ , оскільки набір  $B_2$  лінійно незалежний, а  $B_1$  повний. Звідси випливає, що  $|B_1| = |B_2|$  і теорему доведено.  $\square$

Теорема 1.9 є одною з основних теорем лінійної алгебри, яка дозволяє надати таке означення.

**Означення 1.7.** Розмірністю скінчено-вимірного простору  $V$  називається кількість векторів в його базисі. Розмірність простору позначається як  $\dim(V)$ .

**Наслідок 1.10.** Розмірність простору  $\mathbb{R}^n$  дорівнює  $n$ .

Дійсно, оскільки кількість векторів в стандартному базисі  $E$  дорівнює  $n$ . Наприклад, набір векторів  $(1,1,1)$ ,  $(0,2,0)$ ,  $(0,0,2)$  буде базисом в  $\mathbb{R}^3$ . Із теореми 1.9 випливає багато наслідків, частину з яких ми приведемо у вигляді теореми.

**Теорема 1.11.** В лінійному просторі  $V$  розмірності  $n$  виконуються такі умови:

- (F1) Будь-який набір із  $n + 1$  вектору буде лінійно залежним;
- (F2) Будь-який набір із  $n - 1$  вектору буде неповним;
- (F3) Кожний лінійно незалежний набір із  $n$  векторів буде базисом;
- (F4) Кожний повний набір із  $n$  векторів буде базисом.
- (F5) Будь-який лінійно незалежний набір векторів  $v_1, \dots, v_m$ , де  $1 \leq m < n$ , можна доповнити до базису;
- (F6) Будь-який повний набір векторів  $v_1, \dots, v_m$ , де  $m > n$  містить базис.

**Доведення.** (F1) Як би існував лінійно незалежний набір векторів  $A$  такий, що  $|A| > n$ , то  $|A| > |B|$ , де  $B$  – базис  $V$ , а це суперечило би лемі 1.8.

(F2) Як би існував повний набір векторів  $A$  такий, що  $|A| < n$ , то  $|A| < |B|$ , де  $B$  – базис  $V$ , а це також суперечило би лемі 1.8.

(F3) Нехай  $B = (v_1, \dots, v_n)$  – лінійно незалежний набір векторів і  $x \in V$ . Додаймо до набору  $B$  вектор  $x$ , тоді отримуємо згідно пункту (F1) лінійно залежний набір  $B \cup \{x\}$ , оскільки він містить  $n + 1$  вектор. Впорядкуємо цей набір таким чином, щоб вектор  $x$  був останнім  $v_1, \dots, v_n, x$ , тоді із леми 1.5 слідує, що вектор  $x$  лінійно виражається через вектори  $v_1, \dots, v_n$ . Таким чином, набір  $B$  буде повним, і тому він буде базисом.

(F4) Нехай  $B = (v_1, \dots, v_n)$  – повний набір векторів, тоді кожен вектор  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , буде лінійно незалежним від інших, так як в іншому випадку вектор  $v_i$  можна видалити згідно твердженню 1.6 і отримати повний набір із  $n - 1$  вектору, а це суперечить

пункту (F2) цієї теореми. Тоді із твердження 1.4 випливає, що набір  $B$  буде лінійно незалежним і тому буде базисом.

(F5) Нехай  $A = (v_1, \dots, v_m)$  – лінійно незалежний набір векторів, де  $1 \leq m < n$ , тоді додаймо до нього вектори деякого базису  $B = (w_1, \dots, w_n)$ . В результаті отримуємо повний набір векторів  $A \cup B$ , якій згідно пункту (F1) цієї теореми буде лінійно залежним. Впорядкуємо цей набір таким чином, щоб вектори  $v_1, \dots, v_m$  були розташовані спочатку  $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$ , тоді за лемою 1.5 існує вектор  $w_k$ , якій є лінійною комбінацією попередніх векторів. Видалимо вектор  $w_k$ , тоді згідно твердженню 1.6 знову отримуємо повний набір векторів. Після  $n - m$  видалень отримуємо повний набір із  $n$  векторів  $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_{n-m}$ , якій містить набір  $A$ , і якій згідно пункту (F4) цієї теореми буде базисом.

(F6) Нехай  $A = (v_1, \dots, v_m)$  – повний набір векторів, де  $m > n$ , тоді впорядкуємо набір  $A$  якимось чином  $v_1, \dots, v_m$  і згідно лемі 1.2 будемо послідовно видаляти вектори, які лінійно залежні від векторів з меншими номерами. Після  $m - n$  видалень отримуємо повний набір із  $n$  векторів, якій згідно пункту (F4) цієї теореми буде базисом.  $\square$

### 1.3. Підпростори лінійного простору

**Означення 1.8.** Непуста підмножина  $U \subseteq V$  називається (лінійним) *підпростором* простору  $V$ , якщо вона замкнена відносно лінійних комбінацій, тобто для будь-яких скалярів  $c, d \in \mathbb{R}$  і векторів  $v, w \in U$  виконується така умова:

$$(cv + dw) \in U. \quad (1.7)$$

Зауважимо, що разом з вектором  $v \in U$  підпростір містить нульовий вектор  $v - v = \bar{0}$ , тому будь-який підпростір містить нульовий вектор. Двома особливими підпросторами є нульовий підпростір  $\{\bar{0}\}$  і сам простір  $V$ , які називаються *тривіальними* (або *невласними*) підпросторами. Всі інші підпростори називаються *нетривіальними* (або *власними*) підпросторами. Наприклад, нехай цілі числа  $m$  і  $n$  задовольняють умову  $1 \leq m < n$ , тоді множина всіх кортежів  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  із  $\mathbb{R}^n$ , для яких  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ , буде нетривіальним підпростором простору  $\mathbb{R}^n$ .

**Означення 1.9.** *Лінійною оболонкою* (або лінійним замиканням)  $L(A)$  набору векторів  $A = (v_1, \dots, v_m)$  із  $V$  називається множина всіх їх лінійних комбінацій:

$$L(A) = \{c_1v_1 + \dots + c_mv_m : c_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m\}. \quad (1.8)$$

**Теорема 1.12.** Лінійна оболонка  $L(A)$  будь-якого набору векторів  $A = (v_1, \dots, v_m)$  буде підпростором простору  $V$ .

**Доведення.** Якщо  $v, w \in L(A)$ , то із формули (1.8) випливає, що існують скаляри  $c_1, \dots, c_m$  і  $d_1, \dots, d_m$  такі, що  $v = c_1v_1 + \dots + c_mv_m$  і  $w = d_1v_1 + \dots + d_mv_m$ . Нехай  $c, d \in \mathbb{R}$ , тоді обчислимо лінійну комбінацію  $cv + dw$ . Із аксіом (M1)–(M4) дістаємо:

$$cv + dw = (cc_1 + dd_1)v_1 + \dots + (cc_m + dd_m)v_m.$$

Тому маємо  $(cv + dw) \in L(A)$  і згідно означенню 1.8 теорему доведено.  $\square$

Лінійна оболонка  $L(A)$  буде найменшим (за включенням) підпростором, якій містить набір векторів  $A$ , оскільки із включення  $A \subseteq U$ , де  $U$  – лінійний підпростір, слідує, що  $L(A) \subseteq U$ . Тому лінійну оболонку часто називають також підпростором, натягнутим на набір  $A$  або підпростором породженим набором  $A$ .

#### 1.3.1. Операції над підпросторами

Якщо  $U$  і  $W$  – підпростори  $V$ , тоді їх *перетин*  $U \cap W$  також буде підпростором  $V$ . Дійсно, нехай  $u, w \in U \cap W$  і  $c, d \in \mathbb{R}$ , тоді за умовою (1.7) маємо  $(cu + dw) \in U$  і  $(cu + dw) \in W$ , тому  $cu + dw \in U \cap W$ .

*Сумою* підпросторів  $U$  і  $W$  називається множина  $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ , яка також буде підпростором. Дійсно, нехай  $c, d \in \mathbb{R}$  і  $x_1, x_2 \in U + W$ , де  $x_1 = u_1 + w_1$ ,  $x_2 = u_2 + w_2$ ,  $u_1, u_2 \in U$  і  $w_1, w_2 \in W$ , тоді із аксіом (M1)–(M4) дістаємо:

$$cx_1 + dx_2 = c(u_1 + w_1) + d(u_2 + w_2) = (cu_1 + du_2) + (cw_1 + dw_2).$$

За умовою (1.7)  $(cu_1 + du_2) \in U$  і  $(cw_1 + dw_2) \in W$ , тому  $(cx_1 + dx_2) \in (U + W)$ . Отже за сума  $U + W$  також буде підпростором простору  $V$ . Підпростір  $U$  називається (прямим) доповненням підпростору  $W$ , якщо  $U + W = V$  і  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ .

### 1.3.2. Базиси підпростору

Зауважимо, що підпростір  $U \subseteq V$  сам є лінійним простором, оскільки аксіоми (A1)–(A4) і (M1)–(M4) в ньому автоматично виконуються.

**Теорема 1.13.** Нехай  $U = L(A)$ , де  $A = (v_1, \dots, v_m)$ , тоді базисом підпростору  $U$  буде лінійно незалежний під-набір  $B \subseteq A$  такий, що  $L(A) = L(B)$ .

**Доведення.** Дійсно, набір  $B$  буде лінійно незалежним і повним в підпросторі  $U = L(A)$ , тому за означенням 1.5 він буде базисом  $U$ .  $\square$

Якщо простір  $V$  скінчено-вимірний, то існування скінченного базису у будь-якому підпросторі слідує із такої теореми.

**Теорема 1.14.** Якщо  $\dim(V) = n$ , то підпростір  $U$  простору  $V$  буде лінійним простором розмірності  $m$ , де  $m \leq n$ .

**Доведення.** Виберемо ненульовий вектор  $u_1 \in U$ , і покладемо  $B_1 = \{u_1\}$ . Якщо  $L(B_1) = U$ , то згідно теоремі 1.13 набір  $B_1$  буде базисом  $U$  і теорему доведено. В іншому випадку виберемо елемент  $u_2 \in U \setminus L(B_1)$ , тоді в послідовності  $u_1, u_2$  ніякий вектор не є лінійною комбінацією векторів з меншими номерами і тому із леми 1.2 слідує, що набір  $B_2 = \{u_1, u_2\}$  буде лінійно незалежним. Знову перевіряємо умову  $L(B_2) = U$  і т. д. Процес додавання векторів закінчується, коли буде виконуватися умова  $L(B_m) = U$ . Згідно теоремі 1.11 (F1) такий момент настане не пізніше  $n$  кроку. Таким чином,  $|B_m| = m \leq n$  і набір  $B_m$  буде базисом підпростору  $U$  згідно теоремі 1.13. Таким чином, теорему доведено.  $\square$

## 1.4 Матриці

*Матрицею*  $A$  розміру  $m \times n$  називається прямокутна таблиця дійсних чисел, розташованих в  $m$  рядках та  $n$  стовпцях.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожен елемент  $a_{ij}$  матриці  $A$  має два індекси: перший індекс  $i$  вказує номер рядка, в якому знаходиться цей елемент, другий індекс  $j$  вказує номер стовпця, який містить цей елемент. Так, елемент  $a_{23}$  знаходиться на перетині другого рядка та третього стовпця матриці  $A$ .

Матриця розміру  $m \times 1$  називається *вектором-стовпцем* (або просто вектором), а матриця розміру  $1 \times n$  називається *вектором-рядком* (або ковектором). Таким чином, вектори виявляються окремим випадком матриць, але тут заявляються два типу векторів.

*Квадратною матрицею*  $n$ -го порядку називають матрицю розміру  $n \times n$ . Елементи квадратної матриці с однаковими індексами  $a_{ii}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , утворюють *головну діагональ* матриці. Іншу діагональ квадратної матриці називають *допоміжною* (або побічною, неголовною) з елементами  $a_{i(n-i+1)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Квадратну матрицю називають *діагональною*, якщо всі її елементи, які не лежать на головній діагоналі дорівнюють нулю, тобто  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Діагональна матриця з одиницями на головній діагоналі називається *одиначною* і позначається як  $E$  або  $I$ :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

*Нульовою* називається матриця усі елементи якої дорівнюють нулю. Нульову матрицю розміру  $m \times n$  позначимо як  $0_{m,n}$ . Матриці  $A$  і  $B$  однакового розміру  $m \times n$  називаються *рівними*, якщо  $a_{ij} = b_{ij}$  для всіх  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

### 1.4.1. Операції над матрицями

Транспонування матриці це заміна її рядків на стовпці і навпаки. Для матриці  $A$  розміру  $m \times n$  транспонованою матрицею називається матриця  $A^t$  розміру  $n \times m$ , елементи якої  $a'_{ji}$  визначаються за формулою:

$$a'_{ji} = a_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m. \quad (1.10)$$

Якщо транспонувати вектор  $x$  розміру  $n \times 1$ , то отримуємо ковектор  $x^t$  розміру  $1 \times n$  і навпаки. Наприклад, такі матриці є транспонованими одна до одної.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається *симетричною*, якщо  $A^t = A$ . Це означає, що елементи матриці  $A$  розміру  $n \times n$  задовольняють умову  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , тобто матриця симетрична щодо головної діагоналі. Квадратна матриця називається *косиметричною*, якщо  $A^t = -A$ . Це означає, що елементи матриці  $A$  розміру  $n \times n$  задовольняють умову  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Сумою матриць  $A$  та  $B$  однакового розміру  $m \times n$  називається матриця  $C = A + B$  того ж розміру, елементи якої визначаються за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Аналогічно, *різницею* матриць  $A$  та  $B$  однакового розміру називається матриця  $C = A - B$  того ж розміру, елементи якої визначаються за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 10 & 16 & 18 \\ 15 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці  $A$  на скаляр (число)  $c$  називається матриця  $B = cA$ , елементи якої визначаються за формулою:

$$b_{ij} = ca_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Операції додавання, множення на скаляр і транспонування задовольняють таким правилам:

- (MT1)  $A + B = B + A$ , комутативність додавання матриць;
- (MT2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ , асоціативність додавання матриць;
- (MT3)  $(cd)A = c(dA)$ , асоціативність множення скаляра на матрицю;
- (MT4)  $(c + d)A = cA + dA$ , дистрибутивність додавання щодо множення на матрицю;
- (MT5)  $c(A + B) = cA + cB$ , дистрибутивність додавання щодо множення на скаляр;
- (MT6)  $(A^t)^t = A$ , двоїстість транспонування матриці;
- (MT7)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ , дистрибутивність транспонування щодо суми матриць.

**Множення матриць.** Для того, щоб матрицю  $A$  помножити на матрицю  $B$  необхідно, щоб кількість стовпців матриці  $A$  дорівнювала кількості рядків матриці  $B$ . Розглянемо спочатку окремий випадок, коли ковектор  $a^t = (a_{11}, \dots, a_{1n})$  розміру  $1 \times n$  множиться на вектор  $b = (b_{11}, \dots, b_{n1})$  розміру  $n \times 1$ , в результаті отримуємо число (матрицю розміру  $1 \times 1$ ), яке в геометрії називається скалярним добутком векторів:

$$a^t \cdot b = \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}. \quad (1.11)$$

В загальному випадку *добутком*  $C = A \cdot B$  матриці  $A$  розміру  $m \times n$  на матрицю  $B$  розміром  $n \times p$  називається матриця  $C$  розміром  $m \times p$ , елементи якої дорівнюють скалярному добутку  $i$ -го рядка  $a_i^t$  матриці  $A$  на  $j$ -й стовпець  $b_j$  матриці  $B$  за формулою:

$$c_{ij} = a_i^t \cdot b_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Тут ми вперше зустрічаємось з *некомутативною алгебраїчною операцією*, тобто в загальному випадку маємо  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Наприклад, якщо помножити ковектор  $a^t$  розміру  $1 \times n$  на вектор  $b$  розміру  $n \times 1$ , то отримуємо число (матрицю розміру  $1 \times 1$ ), а якщо навпаки  $b \cdot a^t$ , то отримуємо матрицю розміру  $n \times n$ . Не комутативність по результату (коли розміри  $A \cdot B$  і  $B \cdot A$  однакові) проявляється, вже для матриць розміру  $2 \times 2$ :

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому для матриць треба розрізняти множення на матрицю *зліва* від множення на нею *з права*. Множення матриць асоціативно, тобто  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  і добуток не залежить від розташування скобок. Тому можна узагальнити добуток матриць на будь-яке число множників  $C = A_1 \cdot \dots \cdot A_n$ . Зокрема, можна визначити *ступінь квадратної матриці*  $A^n$  за формулою  $A^n = A \cdot \dots \cdot A$  при  $n \geq 1$ . Якщо  $n = 0$ , то для будь-якої квадратної матриці  $A$  вважають, що  $A^0 = E$ , де  $E$  – одинична матриця того ж розміру, що і матриця  $A$ .

Таким чином, квадратну матрицю  $A$  можна підставляти в поліном  $p(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0$  замість змінної  $x$  і отримати квадратну матрицю:

$$p(A) = c_m A^m + \dots + c_1 A + c_0 A^0, \quad (1.12)$$

того ж розміру, що матриця  $A$ . Наприклад, значення полінома  $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$  на матриці  $A$  розміру  $3 \times 3$  буде матриця  $p(A) = 2A^2 + 5A - 3E$ , де  $E$  – одинична матриця розміру  $3 \times 3$ .

### 1.5. Зразки розв'язування вправ

Типові задачі, які стосуються лінійного простору ми розглянемо на наступному занятті, а поки обмежимося операціями з матрицями.

**1.5.1.** Знайти транспоновану матрицю  $A^t$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Матриця має розмір  $2 \times 3$ , тому матриця  $A^t$  матиме розмір  $3 \times 2$ . Перший і другий рядок матриці  $A$  запишемо в перший і другий стовпець матриці  $A^t$ , тоді отримуємо:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**1.5.2.** Нехай задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $3A$ .

*Розв'язання.*

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 + 5 & 2 + 1 & 4 + 0 \\ 1 - 6 & 0 + 2 & -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 - 5 & 2 - 1 & 4 - 0 \\ 1 + 6 & 0 - 2 & -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 12 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**1.5.3.** Знайти матрицю  $X$  з рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Розв'язання.* Матриця  $X$  визначається з рівності:

$$X = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ -2 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 4 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 9/2 & 1 & -9/2 \end{pmatrix}.$$

**1.5.4.** Для заданих матриць  $A$  і  $B$  знайти добуток матриць  $A \cdot B$  та  $B \cdot A$ .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

*Розв'язання.* Матриці  $A$  і  $B$  мають розмір відповідно  $2 \times 3$  і  $3 \times 2$ , тому виконується умова для добутку  $A \cdot B$ , тобто кількість стовпців матриці  $A$  дорівнює кількості рядків матриці  $B$ . В результаті отримуємо матрицю  $A \cdot B$  розміру  $2 \times 2$ . З аналогічних причин матриця  $B \cdot A$  буде мати розмір  $3 \times 3$ . Обчислимо спочатку добуток  $C = A \cdot B$ . Для обчислення елемента  $c_{11}$  обчислимо скалярний першого рядка матриці  $A$  і першого стовпця матриці  $B$ :  $(-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 5$ . Аналогічно обчислимо інші елементи:

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -37 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток  $BA$ :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -7 & 0 & -7 \\ -8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**1.5.5.** Для заданої матриці  $A$  обчислити  $A^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Маємо:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}.$$

**1.5.6.** Для заданого полінома  $p(x)$  і матриці  $A$  обчисліть матричний поліном  $p(A)$ :

$$p(x) = -2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Значення матричного полінома  $p(A)$  визначається формулою (1.12) і в даному випадку дорівнює  $p(A) = -2 \cdot A^2 + 5 \cdot A - 3 \cdot E$ . Обчислимо спочатку  $A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо:

$$p(A) = -2 \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

## 1.6. Завдання для самостійної роботи студентів

**1.6.1.** Транспонувати матрицю  $A$  (за варіантами):

$$1) A = (2, 1, 3); \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 4) A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 5) A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

**1.6.2.** Для заданих матриць  $A$  і  $B$  знайти матриці (за варіантами):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1) 2A - 3B, \quad 2) A + 2B^t, \quad 3) 2A^t - B, \quad 4) A^t - 2B^t, \quad 5) (A + B)^t.$$

**1.6.3.** Знайти добуток матриць  $A \cdot B$  та  $B \cdot A$  (за варіантами):

$$1) A = (4, 8, 9), B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad 4) A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 8 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 9 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1.6.4.** Піднести задану матрицю  $A$  до степеня  $A^3$  (за варіантами):

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

**1.6.5.** Для заданого полінома  $p(x) = 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 1$  і матриці  $A$  обчислите матричний поліном  $p(A)$  (за варіантами):

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; 3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; 4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; 5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.6.6.** Доведіть, що для будь-якої квадратної матриці  $A$  матриця  $A + A^t$  буде симетричною, а матриця  $A - A^t$  буде кососиметричною. *Вказівка.* Скористайтесь властивостями М6) і М7) матричних операцій.

**1.6.7.** Доведіть, що будь-яку квадратну матрицю  $A$  можна виразити у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриці. *Вказівка.* Скористайтесь попередньою вправою.

## 2. Визначник матриці та обернена матриця

Визначник  $|A|$  або *детермінант*  $\det(A)$  це число, яке за певними правилами з'являється *квадратній матрице*  $A$ . Детермінант можна також розглядати як функцію  $\det: A \rightarrow |A|$ , яка квадратній матрице  $A$  з'являє у відповідність її визначник. Розглянемо спочатку визначники матриць другого і третього порядку.

**Визначник матриці 2-го порядку.** Визначник матриці другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та допоміжної діагоналей, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \quad (2.1)$$

Наприклад, обчислимо визначник матриці:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3 \cdot 4) = 10 + 12 = 22 .$$

**Визначник матриці 3-го порядку.** Визначник матриці третього порядку знаходять за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} . \quad (2.2)$$

Цю формулу вже складніше запам'ятати, тому існують спеціальні (мнемонічні) правила її запам'ятання. Зауважимо, що кожен доданок у правій частині формули (2.2) є добутком 3 елементів матриці, які беруться по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці. Три перших доданка, які беруться зі знаком «плюс», є добутками елементів головної діагоналі і вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі. Три останні доданки у правій частині формули (2.2), які беруться зі знаком «мінус», є добутками елементів допоміжної діагоналі та вершин трикутників із основами паралельними допоміжній діагоналі. Таким чином, знаки доданків легко запам'ятати, скориставшись «правилом трикутників», яке ілюструється рисунком 2.1.



Рис. 2.1. Правило трикутників.

Існує також «правило Саррюса», яке полягає в дописуванні з права від матриці двох перших її стовпців (рис. 2.2). Тоді добутки, які розташовані вздовж "червоних стрілок" (діагоналей) беруться зі знаком «плюс», а добутки, які розташовані вздовж "синіх стрілок" беруться зі знаком «мінус».

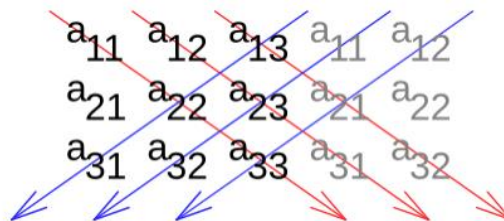


Рис. 2.2. Правило Саррюса.

Наприклад, обчислимо визначник матриці:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 \cdot (-5) + 0 \cdot 1 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 \cdot 6 - (-3) \cdot 1 \cdot 0 =$$

$$= 45 - 36 = 9 .$$

## 2.1. Властивості визначника

Загальна формула обчислення визначника матриці  $n$ -го порядку (формула Лейбніца) достатньо складна і вимагає введення ряду понять. Тому обмежимося тут рекурентним (індуктивним) означенням визначника матриці  $n$ -го порядку.

**Означення 2.1.** 1) Якщо  $n = 1$  і  $A = (a_{11})$ , то  $\det(A) = a_{11}$ . 2) Якщо  $n > 1$ , то визначником матриці  $A$  називається число:

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}\det(A_{21}) + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(A_{n1}), \quad (2.3)$$

де  $A_{j1}, 1 \leq j \leq n$ , це квадратна матриця  $(n-1)$ -порядку, яка виходить із матриці  $A$  видаленням  $j$ -го рядка та першого стовпця.

Студенти можуть самостійно перевірити, що із цього означення при  $n = 2$  і  $n = 3$  ми отримуємо формули (2.1) і (2.2) відповідно. При обчисленні визначника матрицю можна транспонувати, що випливає із формули, до якої ми ще повернемося:

$$|A| = |A^t|. \quad (2.4)$$

Тому рядки і стовпці матриці при обчисленні визначника в деякому сенсі *рівноправні*, тобто будь яка властивість визначника, яка стосується рядків, має аналог для стовпців і навпаки.

Більш того, якщо представити квадратну матрицю  $A$  розміру  $n \times n$  у вигляді набору її стовпців  $(a_1, \dots, a_n)$ , то детермінант  $\det(A)$  перетворюється на функцію від  $n$  векторів  $\det(a_1, \dots, a_n)$ , яка в лінійній алгебрі називається  $n$ -формою. В такому вигляді визначник квадратної матриці має такі властивості, які випливають із формули (2.3):

- V1) *Косо-симетричність.* Якщо в матриці  $A$  переставити два стовпця (рядка), то визначник змінює знак  $\det(a_2, a_1, \dots, a_n) = -\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Якщо в матриці  $A$  є, принаймні, два однакових стовпця (рядка), то визначник дорівнює нулю  $\det(a_1, a_1, \dots, a_n) = 0$ ;
- V2) *Лінійність.* Якщо стовпець (рядок) матриці  $A$  є лінійною комбінацією векторів  $a_1 = cx + dy$ , то  $\det(cx + dy, a_2, \dots, a_n) = c\det(x, a_2, \dots, a_n) + d\det(y, a_2, \dots, a_n)$ . Зокрема, якщо стовпець (рядок) матриці  $A$  помножити на число  $k$ , то визначник помножиться на те саме число  $\det(ka_1, a_2, \dots, a_n) = k\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Визначник матриці дорівнює нулю, якщо матриця містить нульовий стовпець (рядок) (*однорідність*);
- V3) При додаванні до будь-якого стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на скаляр, визначник матриці не змінюється.
- V4) Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B). \quad (2.5)$$

Іншими словами, визначник є кососиметричною  $n$ -лінійною формою від векторів. Властивість V3 слідує із V1 і V2 і грає ключову роль в обчисленні визначника. Наприклад, якщо додати до першого стовпця другий помножений на число  $k$ , то отримуємо:

$$\det(a_1 + ka_2, a_2, \dots, a_n) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) + k\det(a_2, a_2, \dots, a_n) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Квадратну матрицю  $A$  розміру  $(m+n) \times (m+n)$  називають *зведеною*, якщо вона має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & B \\ 0_{n,m} & A_{22} \end{pmatrix},$$

де  $A_{11}$  – матриця розміру  $m \times m$ ,  $A_{22}$  – матриця розміру  $n \times n$ ,  $B$  – матриця розміру  $m \times n$  і  $0_{n,m}$  – нульова матриця розміру  $n \times m$ . Для зведеної матриці має місце така рівність:

$$\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22}). \quad (2.6)$$

Квадратну матрицю  $A$  називають *верхнє* (нижнє) *трикутною*, якщо всі її елементи, які лежать під (над) головною діагоналлю дорівнюють нулю, тобто  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$  (при  $i < j$ ) (рис. 2.3).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Рис. 2.3. Верхнє трикутна матриця.

Очевидно, що верхнє трикутна матриця буде зведеною, тому застосовуючи декілька разів формулу (2.6) приходимо до висновку, що визначник верхнє трикутної матриці  $A$  розміру  $n \times n$  дорівнює добутку діагональних елементів:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} . \quad (2.7)$$

Із формули (2.4) випливає, що формула (2.7) вірна і для нижнє трикутної матриці. Зокрема, визначник одиничної матриці (формула (1.9) 1 лекція) дорівнює одиниці:

$$\det(E) = 1 . \quad (2.8)$$

## 2.2. Мінори та алгебраїчні доповнення

Доповненням елемента  $a_{ij}$  квадратної матриці  $A$   $n$ -го порядку назовемо під-матрицю  $(n - 1)$ -го порядку  $A_{ij}$ , яку одержують з матриці  $A$  вилученням  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця.

**Означення 2.2.** Мінором  $M_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  матриці  $A$  називається визначник його доповнення  $M_{ij} = \det(A_{ij})$ .

Наприклад, для квадратна матриця третього порядку має дев'ять мінорів:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

**Означення 2.3.** Алгебраїчне доповнення  $D_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  матриці  $A$  визначається за формулою  $D_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ .

Таким чином, алгебраїчне доповнення може відрізнятися від мінору тільки знаком. Наприклад, обчислимо алгебраїчне доповнення елемента  $a_{21}$  в матрице:

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 13 = -13 .$$

**Теорема 2.1** (Лаплас). Визначник матриці дорівнює скалярному добутку будь-якого рядка (стовпця) матриці на вектор алгебраїчних доповнень їх елементів:

$$\det(A) = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots + a_{in}D_{in} = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \cdots + a_{nj}D_{nj} . \quad (2.9)$$

Формула (2.9) називається розкладом визначника за елементами  $i$ -го рядку ( $j$ -го стовпця) і може розглядатися як рекурентна формула обчислення визначника матриці  $n$ -го порядку через визначники під-матриць  $(n - 1)$ -го порядку. В нашому випадку вона впливає із формули (2.3) перестановкою стовпців. Наприклад, обчислимо визначник матриці розкладанням його по третьому рядку, тоді отримуємо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$|A| = (-1)^{3+1}2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-2) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-7) + (-2)(-1) = -12.$$

Теорема Лапласа має важливе доповнення. Назвемо вектор-рядок  $x^t$  розміру  $1 \times n$  ортогональним вектору-стовпцю  $y$  розміру  $n \times 1$ , якщо  $x^t \cdot y = 0$ .

**Теорема 2.2** (Ортогональності). Скалярний добуток елементів будь-якого рядка (стовпця) квадратної матриці на вектор алгебраїчних доповнень елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:

$$a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \cdots + a_{in}D_{jn} = a_{1i}D_{1j} + a_{2i}D_{2j} + \cdots + a_{ni}D_{nj} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n . \quad (2.10)$$

**Доведення.** Замінімо в матриці  $A$  її  $j$ -й рядок на  $i$ -й рядок, де  $i < j$ , тоді отримуємо матрицю  $B$ , яка містить два однакових рядка. За властивістю визначника в1 маємо  $\det(B) = 0$ . Розкладемо визначник матриці  $B$  за  $j$ -им рядком, тоді із означення 2.3 і теореми 2.1 отримуємо таку рівність:

$$(-1)^{j+1}b_{j1} \det(B_{j1}) + \cdots + (-1)^{j+n}b_{jn} \det(B_{jn}) = 0 . \quad (2.11)$$

Із побудови матриці  $B$  маємо  $b_{jk} = a_{ik}$ , для всіх  $1 \leq k \leq n$ . Крім того,  $B_{jk} = A_{jk}$ , оскільки доповнення елементів матриці не залежать від самих елементів. Звідси та із рівності (2.11)

дістаємо рівність  $(-1)^{j+1}a_{i1} \det(A_{j1}) + \dots + (-1)^{j+n}a_{in} \det(A_{jn}) = 0$ , що й потрібно було довести. Для стовпців матриці доведення аналогічно.  $\square$

### 2.3. Метод елементарних перетворень

*Елементарним перетворенням* матриці називається така операція:

(ЕП1) Додавання до деякого її рядка (стовпця) іншого рядка (стовпця) помноженого на ненульовий множник.

**Означення 2.4.** Матриці  $A$  та  $B$  називають *еквівалентними*, якщо одна з них одержана з іншої серією елементарних перетворень.

Еквівалентні матриці позначають таким чином  $A \sim B$ . Із властивості визначника ВЗ впливає таке твердження.

**Твердження 2.3.** При елементарному перетворенні ЕП1 визначник матриці не змінюється.

На елементарних перетвореннях і твердженні 2.3 заснований метод Гаусса зниження порядку матриці, який є ефективнішим методом обчислення визначника матриці.

*Д. Процедура Гаусса зниження порядку визначника елементарними перетвореннями.*

Нехай задана матриця  $A$  розміру  $n \times n$  і треба обчислити її визначник.

D1) Якщо в матриці  $A$  є нульовий рядок або стовпець, то  $\det(A) = 0$ ;

D2) Виберемо в деякому стовпці елемент  $a_{ij} \neq 0$  (головний елемент), якій належить  $i$ -му рядку. Припустимо, що в  $j$ -му стовпці є ще ненульові елементи  $a_{kj} \neq 0$ , тоді для кожного з цих елементів виконуємо таке елементарне перетворення. До елементів  $k$ -го рядка додаємо елементи  $i$ -го рядка помноженого на скаляр  $-a_{kj}/a_{ij}$ . У результаті отримуємо матрицю  $B$ , яка еквівалентна матриці  $A$  і у якої всі елементи  $j$ -го стовпця крім головного елементу  $a_{ij}$  рівні нулю. Тоді із формули (2.9) маємо  $\det(A) = \det(B) = (-1)^{i+j}a_{ij}\det(B_{ij})$ , де  $B_{ij}$  – доповнення елемента  $a_{ij}$  в матриці  $B$ . Зауважимо, що порядок матриці  $B_{ij}$  на одиницю менше порядку матриці  $A$ ;

D3) Повторюємо перший і другий крок для матриці  $B_{ij}$  і т. д. Після  $(n-2)$  ітерацій (повторів) отримуємо матрицю  $2 \times 2$ , визначник якої визначається за формулою (2.1). На цьому процедура закінчується.

Більш докладно цей метод буде розглянутий на прикладах при розв'язуванні вправ. Наприклад, обчислимо визначник для матриці другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 33547 & 33647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник виглядає страшним, але тут можна зробити всього одне елементарне перетворення, а саме відняти від другого стовпця перший, тоді за лінійності отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 33547 & 33647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33547 & 100 \\ 28423 & 100 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 33547 & 1 \\ 28423 & 1 \end{vmatrix} = 512400.$$

### 2.4. Формула Лейбніца

Індуктивне означення визначника не дозволяє увидити, як визначник залежить від елементів матриці. Існує формула Лейбніца для визначника  $n$ -го порядку, яку зазвичай приймають за його означення. Хоча вона і складна, але для повноти ми її приведемо.

Перестановкою  $\varphi$  з  $n$  чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  називається упорядкована послідовність всіх цих чисел (без повторення) у будь-якому порядку  $\varphi = i_1 i_2, \dots, i_n$ . Першим елементом перестановки  $\varphi$  вважається елемент  $\varphi(1) = i_1$ , другим  $\varphi(2) = i_2$  і т. д. Загальне число перестановок із  $n$  чисел дорівнює  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  ( $n$  факторіал).

Наприклад при  $n = 3$  маємо шість перестановок  $123, 231, 312, 321, 132, 213$ , які можна бачити у формулі (2.2) в якості послідовності других індексів, тобто доданку  $a_{12}a_{23}a_{31}$  відповідає перестановка  $231$  і т. д.

Кажуть, що пара індексів  $k$  і  $m$ , де  $1 \leq k < m \leq n$ , утворюють інверсію в перестановки  $\varphi$ , якщо  $\varphi(k) > \varphi(m)$ . Числом інверсій в перестановки  $\varphi$  називається сума всіх її інверсій, яка визначається формулою:

$$\text{inv}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^n s(\varphi(k) - \varphi(m)),$$

де  $s(x)$  це функція знаку, тобто  $s(x) = 0$ , якщо  $x < 0$  і  $s(x) = 1$ , якщо  $x > 0$ . Наприклад,  $\text{inv}(123) = 0$ ,  $\text{inv}(231) = 2$ , тому що числа 2 і 3 стоять перед 1. Перестановка  $\varphi$  називається *парною*, якщо число її інверсій парне і *непарною* в іншому випадку. Наприклад, перестановки 123, 231, 312 парні, а перестановки 321, 132, 213 непарні. Зауважимо, що в формулі (2.2) парні перестановки беруться зі знаком плюс, а непарні зі знаком мінус. Введемо функцію  $\text{sgn}(\varphi)$ , яка визначає знак перестановки  $\varphi$  за формулою:

$$\text{sgn}(\varphi) = (-1)^{\text{inv}(\varphi)}.$$

Таким чином, для парних перестановок  $\text{sgn}(\varphi) = 1$ , а для непарних  $\text{sgn}(\varphi) = -1$ .

Формула Лейбніца для визначника матриці  $n$ -го порядку має такий вигляд:

$$\det(A) = \sum_{\varphi} \text{sgn}(\varphi) \cdot a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \quad (2.12)$$

Тут сумування іде по всім перестановкам  $\varphi$  із  $n$  чисел. Зауважимо, що формули (2.1) і (2.2) є частковими випадками формули (2.12) при  $n = 2$  і  $n = 3$ .

Формула (2.12) має в основному теоретичний інтерес, наприклад, з неї випливає формула (2.4), але для обчислення визначника вона не підходить. Вже при  $n = 4$  маємо  $4! = 24$  доданка, а при  $n = 5$  маємо  $5! = 120$  доданків. Тому для обчислення визначників матриць великого розміру використовують метод елементарних перетворень Гаусса.

## 2.5. Обернена матриця

Квадратна матриця  $A$  називається *невиродженою* (неособливою), якщо її визначник ненульовий  $|A| \neq 0$  і *виродженою* (особливою) в іншому випадку, коли  $|A| = 0$ . Нагадаємо, що  $E$  це одинична матриця (див. формулу (1.9) з 1 лекції). При множенні на одиничну матрицю будь яка квадратна матриця  $A$  того ж розміру не змінюється, тобто виконуються такі рівності:

$$A \cdot E = E \cdot A = A. \quad (2.13)$$

**Означення 2.5.** *Оберненою* матрицею для квадратної матриці  $A$  називається матриця  $A^{-1}$  того ж розміру, яка задовольняє таким умовам:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (2.14)$$

Нехай  $A$  – квадратна матриця розміру  $n \times n$ , тоді *транспонована* матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці  $A$  називається *приспівненою* до матриці  $A$  і позначається таким чином:

$$A^* = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

де  $D_{ij}$  це алгебраїчні доповнення елементів  $a_{ij}$  матриці  $A$ .

**Теорема 2.4.** Квадратна матриця  $A$  буде мати обернену матрицю  $A^{-1}$  тоді і тільки тоді, коли  $A$  є невивродженою і в цьому випадку матриця  $A^{-1}$  визначається формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*. \quad (2.16)$$

**Доведення.** Нехай матриця  $A$  є невивродженою і  $A^*$  є приспівненою до неї матрицею, яка визначається формулою (2.15). Із формул (2.9) і (2.10) випливає така рівність:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E.$$

Оскільки  $|A| \neq 0$ , то поділив цю рівність на визначник  $|A|$  заключаємо, що  $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$ , тобто матриця  $A$  має обернену.

Навпаки, нехай матриця  $A$  має обернену, тоді із формул (2.5), (2.8) і (2.14) маємо:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |E| = 1.$$

Звідси слідує, що  $|A| \neq 0$  і теорему доведено.  $\square$

Наприклад, знайдемо обернену матрицю до такої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислимо визначник матриці  $A$ , тоді отримуємо  $|A| = 2$ . Таким чином, матриця  $A$  є невивродженою, тому для неї існує обернена матриця. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці  $A$ :

$$A_{11} = 2, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = (-1) \cdot 3 = -3, \quad A_{22} = 1.$$

Далі, за формулами (2.15) і (2.16) отримуємо елементи оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку результату:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формула (2.16) вимагає обчислення  $n^2$  визначників порядку  $n - 1$ , тому її можна застосувати для невеликих  $n$ ,  $2 \leq n \leq 4$ . При  $n > 4$ , вона вимагає занадто великих обчислень і стає практично непридатною. Тут як і при обчисленні визначників на допомогу приходять елементарні перетворення. Для визначеності будемо працювати тільки з рядками матриці і доповнимо перетворення ЕП1 ще двома *елементарними перетвореннями*:

(ЕП1) Додавання до деякого рядка матриці іншого рядка помноженого на ненульовий множник;

(ЕП2) Множення всіх елементів рядка матриці на ненульове число;

(ЕП3) Перестановка двох рядків матриці.

Зауважимо, що при елементарному перетворенні ЕП1 визначник матриці не змінюється, при перетворенні ЕП2 множиться на нульове число, а при перетворенні ЕП3 множиться на  $-1$ .

I. *Процедура Гаусса-Йордана одночасної побудови одиничної та оберненої матриці.*

Нехай задана невивроджена матриця  $A$  розміру  $n \times n$  і треба знайти її обернену  $A^{-1}$ . Створюємо розширену матрицю  $B = [A, E_n]$  розміру  $n \times 2n$ . Потім елементарними перетвореннями (ЕП1)-(ЕП3) над рядками розширеної матриці  $B$  в лівій частині розміру  $n \times n$  на місці матриці  $A$  отримаємо одиничну матрицю  $E_n$ . При цьому в правій частині розміру  $n \times n$  з'явиться обернена матриця  $A^{-1}$ . В процедурі описується дії тільки над лівою частиною матриці  $B$ , але кожна дія повинна виконуватися і над відповідним рядком в правій частині матриці  $B$ .

II) *Базис індукції.* Виберемо в першому стовпці матриці  $A$  елемент  $a_{i1} \neq 0$  і поділімо всі елементи  $i$ -го рядку (включно з правою частиною) на елемент  $a_{i1}$ . Перестановкою рядків (включно з правою частиною) перемістим  $i$ -й рядок на перше місце, тоді ми отримуємо матрицю, у якій  $a_{11} = 1$ . Для всіх елементів  $a_{k1} \neq 0$ , де  $k > 1$ , виконуємо таке елементарне перетворення (включно з правою частиною). До елементів  $k$ -го рядка додаємо елементи першого рядка помноженого на скаляр  $-a_{k1}$ . У результаті в лівій частині матриці  $B$  отримуємо зведену матрицю  $C_1$ , у якій в першому стовпці розташований базисний вектор  $e_1$ . Позначимо, як  $A_{11}$  доповнення елементу  $a_{11}$  в матриці  $C_1$ , тоді із властивостей визначника В1, В2 і рівності (2.6) випливає, що  $|A| = (-1)^{i-1} a_{i1} |C_1| = (-1)^{i-1} a_{i1} |A_{11}|$ . Звідси заключаємо,  $|A_{11}| \neq 0$ , оскільки  $|A| \neq 0$ ;

II2) *Крок індукції.* Припустимо, що в лівій частині матриці  $B$  ми вже отримали зведену матрицю  $C_r$ , яка має такий вигляд:

$$C_r = \begin{pmatrix} E_{rr} & D \\ 0_{n-r,r} & A_{rr} \end{pmatrix},$$

де  $E_{rr}$  – одинична матриця порядку  $r$ ,  $1 \leq r < n$ ,  $A_{rr}$  – невивроджена матриця порядку  $(n - r)$ ,  $D$  – матриця розміру  $r \times (n - r)$  і  $0_{n-r,r}$  – нульова матриця розміру  $(n - r) \times r$ . Виберемо в першому стовпці під-матриці  $A_{rr}$  (в  $(r + 1)$ -стовпці матриці  $C_r$ ) елемент  $a_{i(r+1)} \neq 0$ , де  $i > r$ , і поділімо всі елементи  $i$ -го рядку (включно з правою частиною) на

елемент  $a_{i(r+1)}$ . Перестановкою рядків (включно з правою частиною) перемістим  $i$ -й рядок на  $(r+1)$  місце, тоді отримуємо матрицю, у якій  $a_{(r+1)(r+1)} = 1$ . Для всіх рядків з номером  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , крім  $(r+1)$ -рядка, виконуємо таке елементарне перетворення (включно з правою частиною). До елементів  $k$ -го рядка додаємо елементи  $(r+1)$ -рядка помноженого на скаляр  $-a_{k(r+1)}$ . У результаті в лівій частині матриці  $B$  отримуємо зведену матрицю  $C_{r+1}$ , у якій в  $(r+1)$ -стовпці розташований базисний вектор  $e_{r+1}$ . Таким чином, ми збільшили розмір одиничної під-матриці на одиницю, тому після  $n$  ітерацій в лівій частині матриці  $B$  отримуємо одиничну матрицю  $E_n$ , а в правій частині обернену матрицю  $A^{-1}$ .

## 2.6. Зразки розв'язування вправ

**2.6.1.** Обчислити визначник методом елементарних перетворень.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Застосовуємо процедуру D зменшення порядку визначника. Утворимо більше нулів у третьому стовпці. Для цього помножимо перший рядок на  $-4$  і додамо добуток до третього, а також до четвертого рядку додамо перший рядок, тоді отримуємо (знизу матриці указані номери рядків над якими проводиться перетворення):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-4I+III \rightarrow III \\ I+IV \rightarrow IV}]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -7 & -12 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Отже у третьому стовпці відмінний від нуля лише один елемент  $a_{13}$ . Тому цей визначник дорівнює:

$$|A| = a_{13} \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & -6 \\ -7 & -12 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримали мінор третього порядку  $M_{13}$ . До нього знову застосуємо процедуру D. Утворимо два нуля у третьому стовпці, а потім скористуємося формулою (2.1) для визначника другого порядку. Для цього до першого рядка додаємо другий, помножений на  $-6$ , а до третього рядка додамо другий, помножений на  $3$ . Тоді отримуємо:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 37 & 69 & 0 \\ -7 & -12 & -1 \\ -14 & -32 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 37 & 69 \\ -14 & -32 \end{vmatrix} = (37(-32) - 69(-14)) = -218.$$

**2.6.2.** Знайти обернену матрицю до матриці за формулою (2.16):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* В цієї лекції після теореми Лапласа був обчислений визначник цієї матриці  $|A| = -12$ . Тому матриця  $A$  є невинороженою і для неї існує обернена матриця. Тепер обчислимо дев'ять алгебраїчних доповнень елементів матриці  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -2 - 0 = -2, & A_{12} &= -(4 - 6) = 2, & A_{13} &= 0 - 2 = -2, \\ A_{21} &= -(4 - 0) = -4, & A_{22} &= -6 - 2 = -8, & A_{23} &= -(0 + 4) = -4, \\ A_{31} &= -6 - 1 = -7, & A_{32} &= -(9 + 2) = -11, & A_{33} &= 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Отже, за формулою (2.16) отримуємо елементи оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо правильність результату:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.6.3.** Знайти обернену матрицю до матриці з попередньої вправи методом елементарних перетворень.

*Розв'язання.* Застосуємо процедуру Гауса-Йордана (процедуру I). Допишемо до матриці  $A$  праворуч одиничну матрицю  $E$  розміру  $3 \times 3$  і отримуємо розширену матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки  $a_{11} \neq 0$ , то ділімо перший рядок на 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{I/3 \rightarrow I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множимо 1 рядок на 2 і складаємо з другим, потім множимо його на  $-2$  і складаємо з 3-им:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{2I+II \rightarrow II \\ -2I+III \rightarrow III}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базовий крок ми зробили. Вибираємо в якості головного елемент  $a_{22} \neq 0$  і множимо 2 рядок на  $-3$  (ділімо на  $-1/3$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-3II \rightarrow II} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множимо 2 рядок на  $2/3$  і складаємо з 1, потім множимо його на  $-4/3$  і складаємо з 3-им:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{2/3II+I \rightarrow I \\ -4/3II+III \rightarrow III}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, другий крок зроблено. Вибираємо в якості головного елемент  $a_{33} \neq 0$  і ділімо 3 рядок на 12:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{1/12III \rightarrow III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/3 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Множимо 3 рядок на 7 і складаємо з 1, потім множимо його на 11 і складаємо з 2-им:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/3 & 1/12 \end{pmatrix}_{\substack{7III+I \rightarrow I \\ 11III+II \rightarrow II}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 7/12 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 2/3 & 11/12 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/3 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, зліва ми отримали одиничну матрицю, а з права матрицю  $A^{-1}$ , яка співпадає з матрицею отриманої в попередньої вправи.

**2.6.4.** Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Введемо позначення для матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді матричне рівняння можна записати наступним чином  $A \cdot X = B$ . Обчислимо визначник матриці  $A$ , тоді маємо  $|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0$ . Тому матриця  $A$  має обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Помножимо матричне рівняння  $A \cdot X = B$  зліва на матрицю  $A^{-1}$ , тоді одержимо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Перетворимо ліву частину цього рівняння  $A^{-1} \cdot A \cdot X = E \cdot X = X$ , тоді маємо:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 31 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

**2.6.5.** Розв'язати матричне рівняння:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Введемо позначення для матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді матричне рівняння можна записати наступним чином  $X \cdot A = B$ . Ми вже знаємо обернену матрицю  $A^{-1}$  для матриці  $A$ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Помножимо матричне рівняння  $X \cdot A = B$  з *права* на матрицю  $A^{-1}$ , тоді одержимо:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}.$$

Перетворимо ліву частину цього рівняння  $X \cdot A \cdot A^{-1} = X \cdot E = X$ , тоді маємо:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -29 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}.$$

## 2.7. Завдання для самостійної роботи студентів

**2.7.1.** Обчислити визначник матриці третього порядку за правилом трикутників або правилом Саррюса (за варіантами):

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.7.2.** Обчислити визначник матриці методом елементарних перетворень (за варіантами):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & -2 & -1 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**2.7.3.** Обчислити визначники матриць за допомогою властивостей визначників.

$$1) \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & 1 \\ \sin^2(\beta) & \cos^2(\beta) & 1 \\ \sin^2(\gamma) & \cos^2(\gamma) & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} a+b & c & 1 \\ a+c & b & 1 \\ b+c & a & 1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 & x_1 & x_2 \\ a \cdot y_1 + b \cdot y_2 & y_1 & y_2 \\ a \cdot z_1 + b \cdot z_2 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}.$$

**2.7.4.** Знайти обернену матрицю до наступних матриць методом елементарних перетворень (за варіантами):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

**2.7.5.** Розв'язати наступні матричні рівняння (за варіантами):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; 2) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; 5) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 3. Ранг матриці і системи лінійних рівнянь

#### 3.1. Ранг матриці

Спочатку доведемо таке твердження.

**Теорема 3.1.** Квадратна матриця  $A$  буде невикорджененою (тобто  $|A| \neq 0$ ) тоді і тільки тоді, коли набір її стовпців (або рядків) є лінійно незалежним.

**Доведення.** Необхідність. Нехай  $|A| \neq 0$  і припустимо, що стовпці  $a_1, \dots, a_n$  матриці  $A$  лінійно залежні, тоді існує ненульова послідовність скалярів  $c_1, \dots, c_n$  така, що  $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = 0_n$ . Припустимо, що  $c_1 \neq 0$ , тоді помножимо перший стовець  $a_1$  на  $c_1$  і додаємо до нього лінійну комбінацію  $c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$  інших стовпців. Тоді отримуємо матрицю  $B$ , у якій перший стовець нульовий, тому  $|B| = 0$ . Матриця  $B$  виходить із  $A$  одним перетворенням ЕП2 (2 лекція) і серією перетворень ЕП1, які не змінюють визначника. Тоді  $0 = |B| = c_1 |A|$ , звідси випливає, що  $|A| = 0$ , оскільки  $c_1 \neq 0$ , але це суперечить умові  $|A| \neq 0$ . Таким чином, твердження доведено від протилежного

Достатність. Нехай стовпці матриці  $A$  лінійно незалежні, тоді за теоремою 1.11 (F3) (лекція 1) набір стовпців  $a_1, \dots, a_n$  буде базисом простору  $\mathbb{R}^n$ . Отже для кожного вектору  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , стандартного базису існує набір скалярів  $b_i = (c_{1i}, \dots, c_{ni})$  такий, що  $e_i = c_{1i} a_1 + c_{2i} a_2 + \dots + c_{ni} a_n$ . Цю рівність можна записати як добуток матриці на вектор  $A b_i = e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Звідси випливає, що  $A \cdot B = E$ , де  $B$  – матриця, стовпцями якої є вектори  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , а  $E$  – одинична матриця. Тоді із рівності (2.5) (лекція 2) слідує, що  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(E) = 1$ . Таким чином,  $\det(A) \neq 0$  і теорему доведено.  $\square$

**Означення 3.1.** Базисом набору векторів  $A = (v_1, \dots, v_m)$  із лінійного простору  $V$  називається лінійно незалежний під-набір  $B \subseteq A$  такий, що  $L(A) = L(B)$ .

Згідно з теоремою 1.13 (лекція 1) базис  $B$  набору векторів  $A$  буде також базисом підпростору  $L(A)$ . Зауважимо, що базис  $B$  буде максимальним за числом векторів лінійно незалежним під-набором набору векторів  $A$ .

**Означення 3.2.** Рангом  $\text{rk}(A)$  набору векторів  $A = (v_1, \dots, v_m)$  із лінійного простору  $V$  називається число векторів в його базисі.

Із теореми 1.13 (лекція 1) випливає, що ранг набору векторів  $A$  співпадає з розмірністю підпростору  $L(A)$ , тобто  $\text{rk}(A) = \dim(L(A))$ , тому ранг визначений коректно, оскільки згідно теоремі о базисі (теорема 1.9 лекція 1) всі базиси набору векторів  $A$  будуть складатися із однакового числа векторів. Наприклад, базисом набору векторів  $(1,1,1)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,1)$  в просторі  $\mathbb{R}^3$  буде набір  $(1,1,1)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ , або набір  $(1,1,1)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,1,1)$ , або набір  $(1,1,1)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,1)$ .

Нехай задано матрицю  $A$  розміру  $m \times n$ , тоді у неї з'являються два ранги, один за рядками  $\text{rk}(A) = \text{rk}(a_1^t, \dots, a_m^t)$ , а другий за стовпцями  $\text{rk}(a_1, \dots, a_n)$ . На щастя вони співпадають між собою, але щоб це довести нам буде необхідний ще один ранг.

Покладемо  $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$  і нехай  $J \subseteq [1, n]$  – деяка непуста множина індексів. Зрізом вектору  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  за множиною індексів  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  називається вектор  $v(J) = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k})$ , тобто у зрізі залишаються тільки ті компоненти, які є у множині  $J$ .

**Твердження 3.2.** Нехай заданий набір векторів  $v_1, \dots, v_m$  із  $\mathbb{R}^n$ . Якщо зрізи  $v_1(J), \dots, v_m(J)$  лінійно незалежні для деякої множини  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ , то вектори  $v_1, \dots, v_m$  також будуть лінійно незалежними.

**Доведення.** Припустимо, що  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0_n$ . Оскільки це співвідношення виконується для всіх індексів  $1 \leq j \leq n$ , то воно буде виконуватися і для підмножини  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ , тому  $c_1 v_1(J) + \dots + c_m v_m(J) = 0_k$ . Звідси в силу лінійної незалежності зрізів маємо  $c_1 = \dots = c_m = 0$ , а це означає, що вектори  $v_1, \dots, v_m$  лінійно незалежні.  $\square$

Нехай  $A$  – матриця розміру  $m \times n$ , де для зручності будемо вважати, що  $m \leq n$ . Зафіксуємо число  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , і виберемо в матриці довільно  $k$  рядків  $I$  та  $k$  стовпців  $J$ . Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну під-матрицю  $A_{IJ}$   $k$ -го порядку. Її визначник  $M_{IJ} = |A_{IJ}|$  називається *мінором  $k$ -го порядку* матриці  $A$ . Матриця  $A$  має мінори від першого до  $m$ -го порядку.

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$

Рис. 3.1. Мінор другого порядку.

На рис. 3.1 показаний мінор другого порядку зеленого кольору, утворений двома жовтими рядками і двома синіми стовпцями.

**Означення 3.3.** Мінорним рангом матриці  $A$  називається найбільший порядок її мінорів, які відмінні від нуля. Мінорний ранг матриці позначимо як  $r(A)$ :

$$r(A) = \max\{k : M_{IJ} \neq 0, |I| = |J| = k\}.$$

Під-матрицю  $A_{IJ}$  та її визначник  $M_{IJ} \neq 0$ , порядок якої дорівнює рангу матриці  $r(A)$ , називають *базисними*. Рядки  $I$  і стовпці  $J$ , що утворюють базисний мінор, також називають *базисними* рядками і стовпцями. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

**Теорема 3.3** (про ранг матриці). Ранг матриці  $A$  за рядками  $\text{rk}(A)$  співпадає з її рангом за стовпцями і дорівнює її мінорному рангу  $\text{rk}(A) = \text{rk}(a_1, \dots, a_n) = r(A)$ .

**Доведення.** Ми доведемо теорему тільки для рангу матриці за рядками, оскільки доведення для рангу за стовпцями повністю аналогічно. Нехай  $A$  – матриця розміру  $m \times n$ , тоді очевидно, що  $\text{rk}(A) \leq m$  і  $\text{rk}(A) \leq n$ , тобто  $\text{rk}(A) \leq \min(m, n)$ . Для наочності будемо вважати, що перші  $r$  рядків і перші  $r$  стовпців є базисними, тобто  $I = J = \{1, \dots, r\}$ , де  $r = r(A)$ . Позначимо базисний мінор як  $\Delta = M_{IJ}$ , тоді із умови  $\Delta \neq 0$  і теореми 3.1 випливає, що зрізи рядків  $a_1^t(J), \dots, a_r^t(J)$  будуть лінійно незалежними, тому за твердженням 3.2 базисні рядки також будуть лінійно незалежними. Отже  $r \leq \text{rk}(A) \leq \min(m, n)$ . Таким чином, якщо  $r = \min(m, n)$ , то  $r = \text{rk}(A) = \min(m, n)$  і теорема доведена.

Нехай  $r < \min(m, n)$ , тоді додаймо до базисних рядків рядок  $a_i^t$ , де  $r < i \leq m$ , і покажемо, що він лінійно виражається через базисні рядки. Для цього допишемо до базисної матриці  $A_{IJ}$  розміру  $r \times r$  в якості останнього рядка зріз  $a_i^t(J)$   $i$ -го рядка, тоді отримуємо матрицю  $B$  розміру  $(r + 1) \times r$ . Потім допишемо до матриці  $B$  в якості останнього стовпця зріз  $a_k(I \cup \{i\})$   $k$ -го стовпця, де  $1 \leq k \leq n$ . В результаті отримуємо матрицю  $C$  розміру  $(r + 1) \times (r + 1)$ , яка показана на рис. 3.2.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rk} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ik} \end{vmatrix}.$$

Рис. 3.2. Матриця, яка обрамляє базову матрицю.

Розглянемо два випадка. Якщо  $1 \leq k \leq r$ , то матриця  $C$  буде містити два однакових стовпця ( $k$ -ий і останній) і тому  $|C| = 0$ . Якщо  $r < k \leq n$ , то  $|C|$  буде мінором  $(r + 1)$ -порядку матриці  $A$  в рядках  $I \cup \{i\}$  і в стовпцях  $J \cup \{k\}$ , тому згідно з означенням 3.3  $|C| = 0$ . Таким чином,  $|C| = 0$  для всіх стовпців  $k, 1 \leq k \leq n$ . Розкладемо  $|C|$  за елементами останнього стовпця, тоді із рівності (2.9) (2 лекція) дістанемо рівність:

$$a_{1k}D_{1k} + \dots + a_{rk}D_{rk} + a_{ik}\Delta = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

де  $a_{jk}$ ,  $1 \leq j \leq r$ , - елементи останнього стовпця матриці  $C$ ,  $D_{jk}$ ,  $1 \leq j \leq r$ , - алгебраїчні доповнення елементів  $a_{jk}$  в матриці  $C$ ,  $a_{ik}$  - останній елемент матриці  $C$ ,  $\Delta$  - базовий мінор матриці  $A$ . Звідси отримуємо  $a_{ik} = \lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_r a_{rk}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , де скаляри  $\lambda_j = -D_{jk}/\Delta$ ,  $1 \leq j \leq r$ , не залежать від елементів  $a_{jk}$   $k$ -го стовпця і тому вони одні й ті самі для всіх  $k, 1 \leq k \leq n$ . У векторній формі ці рівності означають, що  $a_i^t = \lambda_1 a_1^t + \dots + \lambda_r a_r^t$  для всіх  $r < i \leq m$ . Тому набір  $a_1^t, \dots, a_r^t$  буде базисом рядків матриці  $A$  і теорему доведено.  $\square$

**Означення 3.4.** Два набору векторів  $A = (v_1, \dots, v_k)$  і  $B = (w_1, \dots, w_m)$  із простору  $\mathbb{R}^n$  називаються *лінійно еквівалентними*, якщо  $L(A) = L(B)$ .

Це означає, що кожен вектор із набору  $A$  лінійно виражається через вектори із набору  $B$  і, навпаки, кожен вектор із  $B$  лінійно виражається через вектори із набору  $A$ .

**Твердження 3.4.** Якщо набори  $A$  і  $B$  лінійно еквівалентні, то  $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$ .

Дійсно, із означення 3.2 маємо  $\text{rk}(A) = \dim(L(A)) = \dim(L(B)) = \text{rk}(B)$ . Для знаходження ранга матриці можна скористатися елементарними перетвореннями ЕП1-ЕП3 (лекція 2). Зауважимо, що ці елементарні перетворення не змінюють числа векторів в наборі. Цей метод заснований на твердженні 3.4 і такому твердженні.

**Теорема 3.5.** Якщо із набору векторів  $A = (v_1, \dots, v_m)$  ланцюгом елементарних перетворень ЕП1-ЕП3 виходить набір векторів  $B = (w_1, \dots, w_m)$ , то  $L(A) = L(B)$ .

**Доведення.** Нехай в наборі  $A = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  елементарним перетворенням ЕП1 ми додали до першого вектору  $v_1$  другий  $v_2$  помножений на скаляр  $c$ , тоді отримуємо набір  $B = (w_1, v_2, \dots, v_m)$ , де  $w_1 = v_1 + cv_2$ . Очевидно, що  $w_1 \in L(A)$  і тому  $L(B) \subseteq L(A)$ . І навпаки,  $v_1 = w_1 - cv_2$ , тому  $v_1 \in L(B)$  і  $L(A) \subseteq L(B)$ . Таким чином, в цьому випадку маємо  $L(A) = L(B)$ . Аналогічно доводиться, що при виконанні перетворення ЕП2 (множення на ненульовий скаляр) набори  $A = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  і  $B = (cv_1, v_2, \dots, v_m)$ , де  $c \neq 0$  будуть лінійно еквівалентні. При виконанні перетворення ЕП3 (перестановка векторів) рівність  $L(A) = L(B)$  очевидна, оскільки лінійна оболонка набору векторів не залежить від порядку слідування векторів (формула (1.8) 1 лекція).  $\square$

Нехай тепер  $A$  – матриця розміру  $m \times n$ , Ненульовий елемент рядка з найменшим номером стовпця називають *лідером* або *головним* (провідним) *елементом* рядка.

**Означення 3.5.** Матриця  $A$  називається *східчастою* (ступеневою), якщо вона задовольняє такі умови:

- 1) Ненульові рядки розташовані в порядку зростання номерів лідерів, тобто якщо  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  – лідери ненульових рядків, тоді  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ ;
- 2) Нульові рядки матриці розташовані нижче від ненульових;

Ці умови означають, що всі елементи східчастої матриці, які розташовані зліва й нижче від лідера рядка будуть нульовими. Приклади східчастих матриць показані на рисунку 3.3 (чорним кольором показні лідери, зірочками — довільні елементи) [1].

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.3. Приклади східчастих матриць

Зауважимо, що верхня трикутна матриця, яка показана зліва на рис. 3.3 є частковим випадком східчастої матриці. Східчасту матрицю називають *зведеною*, якщо всі лідери рядків дорівнюють одиниці, а над лідерами розташовані нулі (рис. 3.4).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.4. Зведена східчаста матриця.

**Твердження 3.6.** Ранг східчастої (зведеної східчастої) матриці  $A$  дорівнює кількості її ненульових рядків.

**Доведення.** Нехай  $I = \{1, \dots, r\}$  – множина ненульових рядків матриці  $A$ , а  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$  – множина рядків де розташовані лідери ненульових рядків, тоді матриця  $A_{IJ}$  розміру  $r \times r$  буде верне трикутною з ненульовими елементами на головні діагоналі. Тому за формулою (2.7) (лекція 2) її визначник буде базовим мінором, отже  $r(A) = r$ .  $\square$



$$A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

**Означення 3.7.** Систему рівнянь (3.1) називають *сумісною* (або розв'язною), якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* (нерозв'язною), якщо вона не має розв'язків.

Нехай  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , - стовпці матриці  $A$ , тоді систему (3.1) у *векторному вигляді* можна записати таким чином:

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b. \quad (3.2)$$

Звідси видно, що система (3.1) буде сумісною тоді і тільки тоді, коли вектор  $b$  є лінійною комбінацією стовпців матриці  $A$ , що еквівалентно умові  $b \in L(a_1, \dots, a_n)$ , де  $L(a_1, \dots, a_n)$  - лінійна оболонка стовпців матриці  $A$ . Звідси випливає класичний критерій сумісності.

**Теорема 3.7** (Кронекера-Капеллі). Система рівнянь (3.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці  $A$  дорівнює рангу розширеної матриці  $A|b$ , тобто  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$ .

**Доведення.** Якщо система (3.1) сумісна, то із умови (3.2) слідує, що  $b \in L(a_1, \dots, a_n)$  і тому  $L(a_1, \dots, a_n) = L(a_1, \dots, a_n, b)$ . Звідси, а також з теореми 3.3 о ранги матриці і твердження 3.4 маємо  $\text{rk}(A) = \text{rk}(a_1, \dots, a_n) = \text{rk}(a_1, \dots, a_n, b) = \text{rk}(A|b)$ .

Навпаки, якщо що  $r(A) = r(A|b)$ , то  $b \in L(a_1, \dots, a_n)$ , так як в іншому разі вектор  $b$  був би лінійно незалежним від стовпців  $a_1, \dots, a_n$  і тому  $r(A) < r(A|b)$ , що суперечить умові теореми. Отже існують числа  $x_1, \dots, x_n$ , які задовольняють умову (3.2), і тому система (3.1) сумісна. Таким чином, теорему доведено.  $\square$

**Означення 3.8.** Сумісну систему лінійних рівнянь називають *визначеною*, якщо вона має *один розв'язок*, і *невизначеною*, в іншому випадку. Дві системи рівнянь називають *рівносильними* (еквівалентними), якщо вони мають *однакову множину розв'язків*.

Теорему 3.7 можна доповнити такою теоремою.

**Теорема 3.8.** Для сумісної системи (3.1) справедливі такі твердження:

- 1) Якщо  $\text{rk}(A) = n$ , то система (3.1) визначена, тобто має один розв'язок;
- 2) Якщо  $\text{rk}(A) < n$ , то система (3.1) невизначена і має безліч розв'язків.

Ця теорема впливає із метода Гауса розв'язування системи (3.1), якій буде описаний далі.

### 3.2.1. Розв'язання невідроджених систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь у матричній формі  $A \cdot X = b$  з невідродженою квадратною матрицею  $A$   $n$ -го порядку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих. Покажемо, що в цьому випадку система буде мати єдиний розв'язок.

**Метод оберненої матриці.** Оскільки матриця коефіцієнтів  $A$  є невідродженою, тобто  $|A| \neq 0$ , то за теоремою 2.4 (2 лекція) вона має обернену матрицю  $A^{-1}$ . Помножимо зліва рівність  $A \cdot X = b$  на матрицю  $A^{-1}$ , тоді одержимо  $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b$ . Оскільки  $A^{-1} \cdot A \cdot X = E \cdot X = X$ , то отримуємо єдиний розв'язок системи у такому вигляді:

$$X = A^{-1} \cdot b. \quad (3.3)$$

У цьому полягає *метод оберненої матриці* для розв'язання невідродженої системи (3.1). Цей метод вимагає обчислення оберненої матриці, що може представляти складності для великого числа  $n$ .

**Метод Крамера.** Обчислимо визначник  $\Delta = |A|$  матриці  $A$ , а далі обчислимо допоміжні визначники  $\Delta_j = |B_j|$ ,  $1 \leq j \leq n$ , де матриця  $B_j$  одержується із матриці  $A$  заміною її  $j$ -го стовпця на стовпець вільних членів  $b$ . Тоді єдиний розв'язок  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  невідродженої системи (3.1) знаходять за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.4)$$

Метод Крамера близький до метода оберненої матриці, але він більш економний в обчисленнях, оскільки він вимагає обчислення  $n + 1$  визначника  $n$ -го порядку.

### 3.2.2. Метод Гаусса

Метод Гаусса, якій називається також методом послідовного виключення невідомих, є найбільш поширеним методом розв'язування лінійної системи, який базується на елементарних перетвореннях її матриці. Крім того, метод Гауса є універсальним, тобто його можна застосувати при будь-якому співвідношенні між числом рівнянь і числом невідомих.

*Елементарними перетвореннями* системи  $A \cdot X = b$  називають елементарні перетворення ЕП1-ЕП3 (2 лекція), які виконуються над рядками розширеної матриці  $A|b$ . Нагадаємо, що матриці називаються еквівалентними, якщо вони одержані одна з одної елементарними перетвореннями.

**Теорема 3.9.** Системи лінійних рівнянь з *еквівалентними* розширеними матрицями *рівносильні*, тобто мають однакову множину розв'язків.

Ця теорема доводиться аналогічно теоремі 3.5. Метод Гауса базується на теоремі 3.9 і полягає в застосуванні процедури R1 до розширеної матриці  $A|b$  системи (3.1), яка приводиться до східчастого вигляду. При розв'язку систем рівнянь процедура R1 називається *прямим ходом метода Гаусса*. Прямий хід закінчується на східчастій матриці  $F|g$ , де  $r = \text{rk}(A)$  і  $f_{ii} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Для простоти тут показана трикутна матриця.

$$F|g = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1r} & \cdots & f_{1n} & g_1 \\ 0 & f_{22} & \cdots & f_{2r} & \cdots & f_{2n} & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_{rr} & \cdots & f_{rn} & g_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & g_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & g_m \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

В подальшому  $F$  буде означати під-матрицю розміру  $m \times n$  матриці (3.5), а  $g$  – останній стовпець цієї матриці. Метод Гауса після прямого ходу надає такий критерій сумісності системи (3.1).

**Теорема 3.10.** Система (3.1) буде сумісною тоді і тільки тоді, коли виконується умова  $g_{r+1} = \cdots = g_m = 0$ .

**Доведення.** Якщо, наприклад,  $g_{r+1} \neq 0$ , то розширена матриця  $F|g$  буде мати більше ненульових рядків ніж матриця  $F$  і тому  $\text{rk}(F) < \text{rk}(F|g)$ . При цьому, очевидно, що у рівняння  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = g_{r+1}$ , де  $g_{r+1} \neq 0$ , немає розв'язків. Якщо  $g_{r+1} = \cdots = g_m = 0$ , то  $r(F) = r(F|g) = r$  і за теоремою 3.7 система буде сумісною.

Після отримання матриці (3.5) у випадку сумісності системи починається *зворотній хід* метода Гаусса для розв'язування еквівалентної лінійної системи  $F \cdot X = g$ . Припустимо, що  $r = n$ , тоді матриця (3.5) буде трикутною і останнє рівняння міститиме одну невідому  $f_{nn}x_n = g_n$ . Звідси знаходимо  $x_n = g_n/f_{nn}$ . Підставляємо це значення змінної  $x_n$  у попередні рівняння та із передостаннього рівняння знаходимо значення наступної змінної  $x_{n-1} = (g_{n-1} - f_{n-1n} \cdot x_n)/f_{n-1n-1}$  і т. д. Нарешті, з першого рівняння знаходиться значення змінної  $x_1$ . Таким чином в методі Гауса послідовно знаходять (виключають) всі змінні, звідки метод і отримав назву.

Замість послідовного виключення змінних можна скористатися процедурою *Гауса-Йордана* R2 побудови зведеної східчастої матриці, яка застосовується до розширеної матриці  $F|g$ . В цьому разі процедуру R2 називають *зворотнім ходом* метода Гаусса. В результаті приходимо до зведеної східчастої матриці, яка має такий вигляд:

$$P|q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{1n} & q_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & p_{2n} & q_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & p_{rn} & q_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Тепер, якщо  $r = n$ , то розв'язок виписується одразу:

$$x_i = q_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.7)$$



### 3.3. Зразки розв'язування вправ

**3.3.1.** Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Застосуємо до матриці процедуру R1. Число 2 є лідером першого рядка, тому помножимо другий і третій рядки на  $-2$ , а потім додамо до них перший рядок, тоді отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2) \cdot II \rightarrow II \\ (-2) \cdot III \rightarrow III}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -6 & -10 \\ -2 & 10 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{I+II \rightarrow II \\ I+III \rightarrow III}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Число  $-3$  є лідером другого рядка, тому помножимо другий рядок на  $3$  і додамо його до третього рядка, тоді дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \cdot II \rightarrow III} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали східчасту (трикутну) матрицю, яка має два ненульових рядка, тому її ранг дорівнює  $2$ . Отже  $\text{rk}(A) = 2$ .

**3.3.2.** Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Матриця і вектор вільних членів цієї системи мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

На попередньому занятті ми знайшли визначник цієї матриці  $|A| = -12$  та її обернену матрицю  $A^{-1}$  (приклад 2.6.2), тому цю систему можна розв'язувати *методом оберненої матриці*. За формулою (3.3) дістаємо розв'язок системи:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже єдиним розв'язком цієї системи буде  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1$ .

Оскільки  $|A| \neq 0$ , то для розв'язку системи можна застосувати також *метод Крамера*. Визначник матриці  $A$  вже обчислений  $\Delta = -12$ . Обчислимо допоміжні визначники  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ , і  $\Delta_3$ . Для обчислення визначника  $\Delta_1$  замінімо перший стовпець матриці  $A$  на стовпець вільних членів системи, тоді отримуємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -42 - 6 = -48.$$

Для обчислення  $\Delta_2$  замінімо другий стовпець матриці  $A$  на стовпець вільних членів системи:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12) + (-1) \cdot 9 \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) = -24.$$

Для обчислення  $\Delta_3$  замінімо третій стовпець матриці  $A$  на стовпець вільних членів системи:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12.$$

Скориставшись формулами Крамера (3.4) дістаємо такий же розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

**3.3.3.** Знайти загальний розв'язок лінійної системи методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Складемо розширену матрицю системи:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right).$$

Застосуємо до неї процедуру R1 для виконання прямого ходу метода Гаусса, щоб звести матрицю до східчастого вигляду. Число 3 є лідером першого рядка, тому помножимо перший рядок на 2, другий на 3 і складемо їх між собою залишивши результат у другому рядку. Потім помножимо перший рядок на  $-2$ , третій на 3 і додамо до третього рядка перший. В результаті отримуємо:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right) \underset{\substack{2 \cdot I + 3 \cdot II \rightarrow II \\ -2 \cdot I + 3 \cdot III \rightarrow III}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array} \right).$$

Число  $-1$  є лідером другого рядка, тому помножимо другий рядок на 4 і додамо його до третього.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array} \right) \underset{4 \cdot II + III \rightarrow III}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 36 & 36 \end{array} \right).$$

Остання матриця є трикутною (східчастою), тому прямий хід метода Гаусса завершений. Ранг матриці системи, дорівнює рангу розширеної матриці (у них однакова кількість ненульових рядків), тому за теоремою 3.7 система є сумісною. Ранг матриці системи дорівнює числу невідомих, тому за теоремою 3.8 ця система має один розв'язок. Останній розширеній матриці відповідає така система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ -x_2 + 11x_3 = 9, \\ 36x_3 = 36. \end{cases}$$

Починаємо зворотній хід за методом Гауса. Із третього рівняння знаходимо  $x_3 = 1$ . Підставляємо це значення в друге рівняння і отримуємо  $-x_2 + 11 = 9$ , звідки знаходимо  $x_2 = 2$ . З першого рівняння після виключення змінних  $x_2$  і  $x_3$  отримуємо  $3x_1 - 4 + 1 = 9$ , звідки знаходимо  $x_1 = 4$ . Отже розв'язком системи рівнянь буде такий самий розв'язок  $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$ .

В якості зворотного ходу можна використати процедуру Гаусса-Йордана R2, щоб отримати зведену східчасту розширену матрицю системи:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 & \\ 0 & -1 & 11 & 9 & \\ 0 & 0 & 36 & 36 & \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2/3 & 1/3 & 3 & \\ 0 & 1 & -11 & -9 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 8/3 & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

Звідси одразу знаходимо розв'язок  $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$ .

**3.3.4.** Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь методом Гауса або Гауса-Йордана:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Складемо розширену матрицю системи, і як в попередньому прикладі, застосуємо до неї процедуру R1, щоб звести її до східчастого вигляду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \underset{\substack{-3 \cdot I + II \rightarrow II \\ -I + III \rightarrow III}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right) \underset{-5 \cdot III + II \rightarrow III}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отримали східчасту матрицю, у якій ранги матриці системи і розширеної матриці співпадають  $\text{rk}(F) = \text{rk}(F|g) = 2$ , але цей ранг менше числа невідомих ( $n = 3$ ). Тому згідно з теоремами 3.7 і 3.8 система сумісна і має безліч розв'язків. Виберемо змінну  $x_3$  в якості

вільної, оскільки ей відповідає тривіальне рівняння  $0x_3 = 0$ , а змінні  $x_1$  і  $x_2$  будуть базисними. Складемо систему рівнянь, яка відповідає східчастій матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -5x_2 - 10x_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 - 3x_3 \\ -5x_2 = -5 + 10x_3 \end{cases}$$

При виконання зворотного ходу метода Гаусса із другого рівняння знаходимо  $x_2 = 1 - 2c_3$ , де  $x_3 = c_3$ , а з першого рівняння після виключення змінної  $x_2$  знаходимо  $x_1 = 1 + c_3$ . Таким чином, загальним розв'язком системи буде  $x_1 = 1 + c_3$ ,  $x_2 = 1 - 2c_3$ ,  $x_3 = c_3$ , де  $c_3$  – довільне число.

За методом Гауса-Йордана при зворотному ході східчасту матрицю  $3 \times 4$  треба привести до зведеного вигляду. Поділимо другий рядок матриці на  $-5$ , а потім помножимо його на  $-2$  і додамо до першого рядка, тоді отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II/-5 \rightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot II + I \rightarrow I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок  $x_1 = 1 + c_3$ ,  $x_2 = 1 - 2c_3$ ,  $x_3 = c_3$ , де  $c_3$  – довільне число. Запишемо цей розв'язок у векторній формі (3.9) згідно з теоремою 3.11:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0) + c_3(1, -2, 1).$$

Тут вектор  $(1, 1, 0)$  є частинним розв'язком неоднорідної початкової системи рівнянь, а вектор  $(1, -2, 1)$  згідно наслідку 3.12 є базисом одновимірного лінійного підпростору  $L(1, -2, 1)$  розв'язків відповідної однорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

**3.3.5.** Заданий набір векторів  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  з простору  $\mathbb{R}^3$ :  $a_1 = (1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 2, 0)$ ,  $a_3 = (2, 1, 1)$ ,  $a_4 = (-1, 0, -1)$ . Треба знайти ненульовий набір скалярів  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , такий що  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = 0_3$ :

*Розв'язання.* Складемо матрицю  $A$  стовпцями якої є вектори  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , тоді із формули (3.2) видно, що нам треба розв'язати однорідну систему рівнянь  $A \cdot X = 0_3$ . Застосуємо процедуру R1 до матриці  $A$  цієї системи для виконання прямого ходу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-I+II \rightarrow II \\ -I+III \rightarrow III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+III \rightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже змінні  $x_1, x_2, x_3$  – базисні, а змінна  $x_4$  – вільна. Покладемо  $x_4 = 2$ , тоді отримуємо розв'язок системи  $x_3 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_1 = 1$ . Таким чином набір  $(1, -1, 1, 2)$  буде ненульовим розв'язком однорідної системи. Перевіряємо  $(1, 1, 1) + (-1, -2, 0) + (2, 1, 1) + (-2, 0, -2) = 0$ .

### 3.4. Завдання для самостійної роботи студентів

**3.4.1.** Знайти ранги матриць методом елементарних перетворень (за варіантами):

$$\begin{aligned} & 1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \\ & 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**3.4.2.** Розв'язати систему рівнянь методом Крамера (за варіантами):

$$\begin{aligned} & 1) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}; 2) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 23 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}; 3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}; \\ & 4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 7 \end{cases}; 5) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -10 \\ 4x_1 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}. \end{aligned}$$

**3.4.3.** Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь методом Гаусса або Гауса-Йордана (за варіантами):

$$\begin{aligned}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 - x_5 = 4 \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 17 \end{array} \right. ; 4) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 - x_5 = 4 \end{array} \right. \\
 5) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 9 \end{array} \right. .
 \end{aligned}$$

**3.4.4.** Заданий набір векторів  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  з простору  $\mathbb{R}^3$ . Треба знайти ненульовий набір скалярів  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , такий що  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = 0_3$  (за варіантами).

- 1)  $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 1, -2), a_3 = (3, 1, 1), a_4 = (-1, 1, -1)$ .
- 2)  $a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (4, 1, 3), a_3 = (5, 2, 1), a_4 = (11, 6, 3)$ .
- 3)  $a_1 = (3, 1, 1), a_2 = (4, 2, 3), a_3 = (8, 1, 2), a_4 = (23, 5, 8)$ .
- 4)  $a_1 = (1, 3, 1), a_2 = (4, 2, 3), a_3 = (3, -3, 3), a_4 = (-1, 9, -1)$ .
- 5)  $a_1 = (1, 4, 2), a_2 = (2, -1, -5), a_3 = (-1, -2, 1), a_4 = (-4, -3, 7)$ .

**3.4.5.** Швейна фабрика виробляє три види костюмів (дитячі, жіночі, чоловічі) використовуючи тканині трьох типів ( $A_1, A_2, A_3$ ). Норми витрат кожної тканини на кожний вид костюма за один день і щоденні обсяги витрат тканин подані в таблиці. Знайти щоденний обсяг випуску костюмів кожного виду.

Тип тканини	Норми витрат тканин на один костюм ум. од.			Обсяг витрат тканини ум. од.
	дитячий	жіночий	чоловічий	
$A_1$	1	3	4	1900
$A_2$	2	5	5	3100
$A_3$	1	2	5	1800

## 4. Аналітична геометрія на площині

Зі шкільного курсу математики відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об'єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри є числа, рівняння, функції. Але між ними існує тісний зв'язок і тому *аналітична геометрія вивчає геометричні об'єкти алгебраїчними методами*.

### 4.1. Векторна алгебра

Зафіксуємо площину  $\mathbb{P}$ , яка є двовимірним геометричним простором і яку можна вважати сценою, на якій відбуватимуться всі дії.

**Означення 4.1.** *Вектором* на площині  $\mathbb{P}$  називають *направлений відрізок*, у якого визначений початок у вигляді точки  $A \in \mathbb{P}$  та кінець у вигляді точки  $B \in \mathbb{P}$ .

Позначають вектор двома літерами з різкою  $\overline{AB}$  або однією літерою з різкою  $\overline{a}$ , якщо його кінці несуттєві. Вектор зображують як напрямлений відрізок (рис. 4.1).

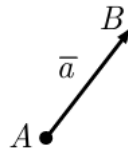


Рис. 4.1. Вектор.

*Довжиною (модулем)* вектору  $\overline{AB}$  називають довжину відрізка  $AB$  (відстань між точками  $A$  і  $B$ ) і позначають її як  $|\overline{AB}|$  або  $|\overline{a}|$ . Якщо  $|\overline{a}| = 1$ , то вектор називається *одичним* або *ортом*. *Нульовим вектором* (або нуль-вектором) називають вектор, початок і кінець якого співпадають, і позначають його як  $\overline{0}$ . Нульовий вектор має нульову довжину і не має напрямлення. Вектор  $\overline{BA}$  (з початком у точці  $B$  й кінцем у точці  $A$ ) називають *протилежним* вектору і позначають як  $-\overline{AB}$ .

Два вектори  $\overline{a}$  і  $\overline{b}$  називають *колінеарними*  $\overline{a} \parallel \overline{b}$ , якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих (рис. 4.2).

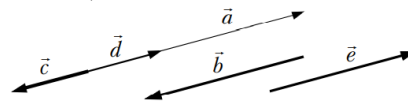


Рис. 4.2. Колінеарні вектори.

Зауважимо, що протилежні вектори колінеарні, мають однакову довжину і протилежно напрямлені. Наприклад, на рис. 4.2 вектори  $\overline{a}$  і  $\overline{b}$  будуть протилежними.

**Означення 4.2.** Два вектори називаються *рівними*, якщо їх можна поєднати один з одним за допомогою паралельного переносу.

Таким чином, рівні вектори колінеарні, мають однакову довжину і однаково напрямлені, але можуть бути відкладені від різних точок. Якщо поєднати початки рівних векторів, то їх *кінці також співпадуть*. Наприклад, вектори  $\overline{a}$  і  $\overline{e}$  на рис. 4.2 являються рівними. Клас рівних векторів (відкладених від різних точок) називають також *вільним вектором*, початок якого не фіксований.

#### 4.1.1. Операції над векторами

**Додавання векторів.** Сумою  $\overline{a} + \overline{b}$  двох векторів  $\overline{a}$  і  $\overline{b}$  називають вектор  $\overline{c}$ , який направлений з початку вектора  $\overline{a}$  у кінець вектора  $\overline{b}$  за умови, що початок вектора  $\overline{b}$  співпадає з кінцем вектора  $\overline{a}$  (правило трикутника рис. 4.3). Можна відкласти два вектори  $\overline{a}$  і  $\overline{b}$  зі спільного початку і побудувати на цих векторах паралелограм, тоді сумою  $\overline{a} + \overline{b}$  буде вектор діагоналі, яка виходить зі спільного початку цих векторів (правило паралелограма рис. 4.4). Сума вектору  $\overline{a}$  з нульовим вектором за визначенням не змінює вектора  $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ .

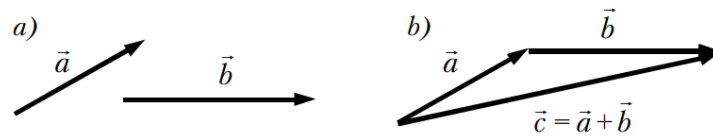


Рис. 4.3. Сума двох векторів (правило трикутника).

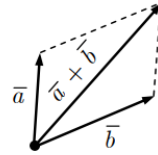
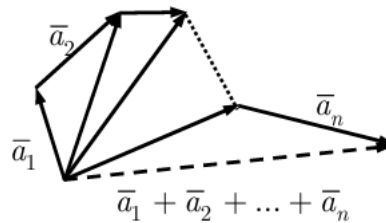


Рис. 4.4. Сума двох векторів (правило паралелограма).

Зауважимо, що додавання векторів комутативне і асоціативне, тобто виконуються такі рівності для довільних векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (4.1)$$

Тому додавання векторів можна поширити на будь-яку кількість векторів за формулою  $\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n = (\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{n-1}) + \vec{a}_n$ . Ця сума не залежить ні від порядку слідування доданків і ні від розташування скобок між ними і може бути знайдена за правилом замикача (рис. 4.5).



4.5. Правило замикача.

*Різниця двох векторів.* Різницею  $\vec{a} - \vec{b}$  двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називають вектор  $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , який дорівнює сумі вектора  $\vec{a}$  з вектором протилежним до вектору  $\vec{b}$ . Тому різниця вектору з самим собою дорівнює нульовому вектору  $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ . На рис. 4.6 зображена різниця векторів.

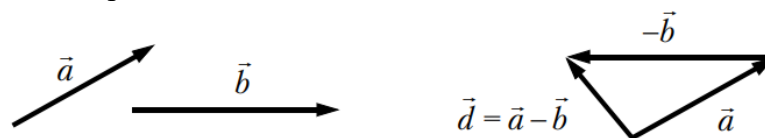


Рис. 4.6. Різниця двох векторів.

*Множення вектора на число.* Добутком ненульового вектора  $\vec{a}$  на ненульове дійсне число (скаляр)  $c$  називають вектор  $\vec{b} = c\vec{a}$ , який колінеарний вектору  $\vec{a}$ , має довжину  $|\vec{b}| = |c| \cdot |\vec{a}|$ , однаково направлений з вектором  $\vec{a}$ , при  $c > 0$ , і протилежно направлений, при  $c < 0$ . Якщо  $c = 0$  або  $\vec{a} = \vec{0}$ , то  $c\vec{a} = \vec{0}$ . Операції додавання векторів і множення вектора на число називаються *лінійними операціями* векторної алгебри. Вони пов'язані одне з одним законами дистрибутивності, які виконуються для довільних скалярів  $c$ ,  $d$  і векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}, \quad (c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}. \quad (4.2)$$

#### 4.1.2. Система координат

Відкладемо ненульові вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  від спільного початку  $\vec{OA} = \vec{a}$  і  $\vec{OB} = \vec{b}$ , тоді *кутом між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$*  називається кут  $\angle AOB$ , який відміряється від вектора  $\vec{OA}$  його найкоротшим обертанням навколо точки  $O$  до вектора  $\vec{OB}$  (рис. 4.7). Тому кут між векторами змінюється від  $0$  до  $\pi$ .

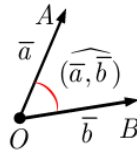


Рис. 4.7. Кут між векторами

Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називають *ортогональними*, якщо кут між ними дорівнює  $\pi/2$ . Ортогональні вектори позначають як  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

Зафіксуємо на площині  $\mathbb{P}$  точку  $O$  в якості початку координат і відкладемо від неї два взаємно перпендикулярних орта  $\vec{i}$  і  $\vec{j}$  (рис. 4.8)

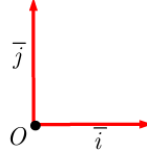


Рис. 4.8. Орти на площині.

Проведемо через точку  $O$  паралельно ортам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  орієнтовані прямі лінії, які називаються *осьми координат*. В результаті отримуємо *прямокутну декартову систему координат*, яка показана на рис. 4.9. Вісь з ортом  $\vec{i}$  називається *віссю абсцис* і позначається як  $Ox$ , вісь з ортом  $\vec{j}$  називається *віссю ординат* і позначається як  $Oy$ .

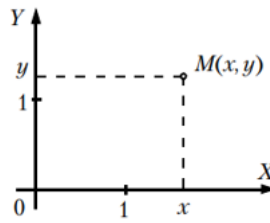


Рис. 4.9. Декартова система координат на площині.

Нагадаємо, що координати  $(x, y)$  точки  $M$  у декартовій системі координат дорівнюють її проекціям на вісі координат (рис. 4.9). Але не тільки точки, но вектори отримують координати в системі координат. Вектор  $\overline{OM}$ , початок якого розміщується на початку координат, а кінець у точці  $M$  називають *радіусом-вектором* точки  $M$ . Розглянемо множину всіх радіус векторів з початком у началі координат  $V_0 = \{\overline{OM} : M \in P\}$ , тоді із означення векторних операцій додавання і множення на скаляр, а також із формул (4.1) і (4.2) випливає, що  $V_0$  буде лінійним простором, оскільки для нього виконуються всі аксіоми (A1)-(A4) і (M1-M4) (лекція 1). Як видно, із рисунку 4.9, в просторі  $V_0$  вірна рівність  $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , тому набір векторів  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  буде базисом простору  $V_0$  і координати  $(x, y)$  радіусу-вектору  $\overline{OM}$  в цьому базисі співпадають з координатами точки  $M$ . Базис  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  називається *ортонормованим*.

Розглянемо тепер довільний вектор  $\vec{a} = \overline{M_1M_2}$  з початком в точці  $M_1 = (x_1, y_1)$  і кінцем у точці  $M_2 = (x_2, y_2)$ . Тоді за *означенням* його координати визначаються так:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1. \quad (4.3)$$

Рис. 4.10 ілюструє формули (4.3).

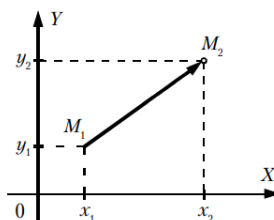


Рис. 4.10. Координати вектору.

Наприклад, вектор  $\vec{a}$ , початок якого знаходиться в точці  $M_1 = (2, -3, 0)$ , а кінець – в точці  $M_2 = (1, 1, 2)$  має координати  $(-1, 4, 2)$ . Якщо цей вектор відкласти від будь-якої іншої точки, то його координати не зміняться.

Таким чином, оскільки координати вектору залежать тільки від різниці координат його вершин, то рівні вектори мають однакові координати. І навпаки, якщо вектори мають однакові координати, то їм в просторі  $V_O$  відповідає один і той же вектор і тому вони будуть рівними. Звідси ми отримуємо таке важливе твердження.

**Твердження 4.1.** Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  с координатами  $(a_x, a_y)$  і  $(b_x, b_y)$  будуть рівними  $\vec{a} = \vec{b}$  тоді і тільки тоді, коли їх координати співпадають  $a_x = b_x$ , і  $a_y = b_y$ .

Два лінійно незалежних вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  створюють базис на площині так як  $\dim(V_O) = 2$ . Крім того, вони не колінеарні і тоді з твердження 4.1 випливає, що кортежі їх координат  $(a_x, a_y)$  і  $(b_x, b_y)$  не пропорційні, тобто лінійно незалежні в просторі  $\mathbb{R}^2$ . Тоді із теореми 3.1 (лекція 3) випливає, що їх визначник не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \neq 0 . \quad (4.4)$$

Таким чином, вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  створюють базис на площині (точніше в просторі  $V_O$ ) тоді і тільки тоді, коли виконується умова (4.4).

*Поділ відрізка у заданому відношенні.* Нехай задані координати кінців відрізка  $A = (x_1, y_1)$  і  $B = (x_2, y_2)$ . Поділити відрізок  $AB$  у відношенні  $\lambda > 0$  означає, що треба знайти точку  $P = (x, y)$  на відрізку таку, що виконується співвідношення  $\overline{AP} = \lambda \overline{PB}$ . Оскільки вектор  $\overline{AP}$  має координати  $(x - x_1, y - y_1)$ , а вектор  $\overline{PB}$  має координати  $(x_2 - x, y_2 - y)$ , то із співвідношення  $\overline{AP} = \lambda \overline{PB}$  і твердження 4.1 маємо  $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ ,  $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$ . Звідки отримуємо координати точки поділу  $P$ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} , \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} . \quad (4.5)$$

Довжина вектору  $\vec{a}$  з координатами  $(a_x, a_y)$  визначається за теоремою Піфагора такою формулою (рис. 4.10):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} . \quad (4.6)$$

Відстань між точками  $A = (x_1, y_1)$  і  $B = (x_2, y_2)$  дорівнює довжині вектору  $\overline{AB}$  і згідно формулам (4.3) і (4.5) визначається такою формулою (рис. 4.10):

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \quad (4.7)$$

Якщо вектор  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  утворює кути  $\alpha, \beta$  з осями координат  $Ox, Oy$ , то косинуси цих кутів називають *напрямними косинусами вектора  $\vec{a}$*  і визначаються за формулами:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} , \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} . \quad (4.8)$$

Тоді із формули (4.6) маємо рівність  $\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 = 1$ . Звідси випливає, що вектор з координатами  $(\cos(\alpha), \cos(\beta))$  буде ортом  $\vec{a}/|\vec{a}|$ , якій колінеарний і однакою направлений з вектором  $\vec{a}$ :

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos(\alpha) \vec{i} + \cos(\beta) \vec{j} . \quad (4.9)$$

#### 4.1.3. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  позначають як  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  або  $(\vec{a}, \vec{b})$  і визначають за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\varphi) . \quad (4.10)$$

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то скалярний добуток вважають рівним нулю. Із формули (4.10) випливає формула для косинуса кута  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :

$$\cos(\varphi) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} . \quad (4.11)$$

Якщо вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  задані своїми координатами  $(a_x, a_y)$  і  $(b_x, b_y)$  в ортонормованому базисі  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ , то можна показати, що їх скалярний добуток визначається за формулою:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y . \quad (4.12)$$

Із формул (4.6), (4.11) і (4.12) отримуємо формулу для косинуса кута  $\varphi$  між векторами  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  у координатній формі:

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} . \quad (4.13)$$

Із формул (4.10) і (4.12) випливають такі властивості скалярного добутку векторів для всіх векторів  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  і скаляра  $k \in \mathbb{R}$ :

- 1)  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ , (комутативність);
- 2)  $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ ,  $(k\bar{a}) \cdot \bar{b} = k(\bar{a} \cdot \bar{b})$  (лінійність);
- 3)  $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 \geq 0$ . (додатна визначеність);
- 4)  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ , тоді і тільки тоді, коли вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  перпендикулярні.

## 4.2. Рівняння прямої лінії

Зв'язок між геометрією і алгеброю першим встановив французький математик Рене Декарт (1596–1650) за допомогою системи координат. Найпростішому геометричному об'єкту – точці він становив у відповідність упорядкований набір чисел – координати цієї точки. Інші геометричні об'єкти розглядаються як множини точок, що задовольняють певним умовам. Ці умови зв'язують координати точок у відповідне рівняння. Таким чином, система координат дозволяє кожному геометричному об'єкту поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об'єкта.

В аналітичній геометрії співвідношення  $F(x, y) = 0$  між координатами  $x$  і  $y$  називається *рівнянням лінії  $L$* , якщо координати  $(x, y)$  точок лінії  $L$ , і тільки вони, задовольняють цьому співвідношенню:

$$L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} . \quad (4.14)$$

Кажуть також, що лінія  $L$  є *геометричним місцем точок*, координати яких задовольняють співвідношенню  $F(x, y) = 0$ . Рівняння лінії (4.14) називають *неявним*. Якщо зі співвідношення  $F(x, y) = 0$  можна виразити одну з координат через іншу  $y = f(x)$  або  $x = g(y)$ , то такий вигляд рівняння називають *явним*.

Найпростішою лінією на площині є *пряма лінія*. Рівняння прямої лінії задає умови, які визначають її положення відносно координатних осей. Умови можуть бути різними, тому рівняння прямої може мати різний вигляд.

*Загальним рівнянням прямої лінії* на площині називають *лінійне співвідношення першого порядку*, яке має неявний вигляд:

$$A x + B y + C = 0 , \quad (4.15)$$

де  $A, B, C$  – дійсні числа, причому  $A \neq 0$  або  $B \neq 0$ . Зауважимо, що рівняння прямої в загальному вигляді визначено з точністю до ненульового множника, оскільки рівняння  $kAx + kB y + kC = 0$ , де  $k \neq 0$  задає ту же саму лінію:

$$L = \{(x, y) : Ax + By + C = 0\} = \{(x, y) : kAx + kB y + kC = 0\} .$$

Окремі випадки рівняння (4.15) мають такий вигляд:

- 1) При  $A = 0$ , маємо рівняння прямої  $y = -C/B$ , яка паралельна осі абсцис;
- 2) При  $B = 0$ , маємо рівняння прямої  $x = -C/A$ , яка паралельна осі ординат;
- 3) При  $C = 0$ , пряма проходить через початок координат.

*Вектор нормалі  $\bar{n} = (A, B)$*  буде перпендикулярний прямої (4.15). Дійсно, візьмемо дві різні точки  $M_1 = (x_1, y_1)$  і  $M_2 = (x_2, y_2)$  на прямій (4.15), тоді  $A x_1 + B y_1 + C = 0$  і  $A x_2 + B y_2 + C = 0$ . Віднімемо із другого рівняння перше, тоді отримуємо:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0 .$$

Це означає, що вектор нормалі  $\vec{n} = (A, B)$  перпендикулярний вектору  $\overline{M_1M_2}$ , який розташований на прямій (4.15). Звідси отримуємо загальне рівняння прямої, що проходить через задану точку  $M_0 = (x_0, y_0)$ , перпендикулярно вектору нормалі  $\vec{n} = (A, B)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \quad (4.16)$$

Це рівняння також описує пряму з точністю до ненульового множника. На рис. 4.11 показана пряма, що описується рівнянням (4.16).

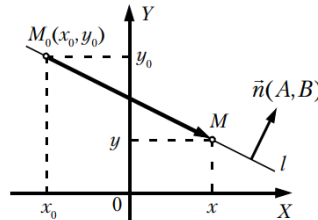


Рис. 4.11. Пряма перпендикулярна вектору нормалі.

Рівняння (4.15) при різних числових значеннях коефіцієнтів  $A, B, C$  визначає будь-яку пряму на площині, тому пряма лінія називається *лінією першого порядку*.

#### 4.2.1. Канонічні рівняння прямої на площині

Якщо пряма  $L$  не паралельна осі ординат, тобто в її загальному рівнянні  $B \neq 0$ , то поділив загальне рівняння на цей коефіцієнт отримуємо явні рівняння прямої лінії, які називаються *канонічними*.

- 1) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом  $k$  має вигляд:

$$y = kx + b , \quad (4.17)$$

де  $k = -A/B$  – коефіцієнт, що дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі  $Ox$ ,  $b = -C/B$  – ордината точки перетину прямої з віссю  $Oy$ .

- 2) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом  $k$ , що проходить через задану точку  $M_1 = (x_1, y_1)$  має вигляд:

$$y = k(x - x_1) + y_1 . \quad (4.18)$$

Якщо підставити в це рівняння  $x = 0$ , то видно, що пряма (4.18) перетинає вісь ординат в точці  $b = y_1 - kx_1$ . Тому рівняння (4.18) можна отримати із рівняння (4.17).

- 3) Рівняння прямої, що проходить через дві точки  $M_1 = (x_1, y_1)$ ,  $M_2 = (x_2, y_2)$  ( $x_1 \neq x_2$ ) має вигляд:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 . \quad (4.19)$$

Це рівняння випливає із (4.18), оскільки тут коефіцієнт  $k$  дорівнює  $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ .

- 4) Рівняння прямої, що проходить через точку  $M_1 = (x_1, y_1)$  паралельно вектору  $\vec{a} = (m, n)$ , де  $m \neq 0$ , має вигляд:

$$y = \frac{n}{m} \cdot (x - x_1) + y_1 . \quad (4.20)$$

Це рівняння випливає з рівняння (4.18) при  $k = n/m$ . В цьому разі вектор  $\vec{a}$  називається *напрямним вектором* прямої  $L$ .

- 5) Параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $M_1 = (x_1, y_1)$  паралельно вектору  $\vec{a} = (m, n)$  має вигляд:

$$x = x_1 + t \cdot m, \quad y = y_1 + t \cdot n , \quad (4.21)$$

де  $t$  – параметр, якій є довільним дійсним числом  $t \in \mathbb{R}$ .

- 6) Якщо пряма не проходить через початок координат і не паралельна осям координат, тобто в її загальному рівнянні  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  і  $C \neq 0$ , то поділив рівняння (4.15) на  $C$  отримуємо *рівнянням прямої у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 , \quad (4.22)$$

де  $a = -C/A$  – абсциса точки перетину прямої з віссю  $Ox$ , а  $b = -C/B$  – ордината точки перетину прямої з віссю  $Oy$ .

#### 4.2.2. Розташування прямих на площині

Якщо дві прямі  $L_1$  і  $L_2$  задані своїми кутовими коефіцієнтами  $k_1$ ,  $k_2$ , і не перпендикулярні, то один із кутів між ними  $\alpha$  визначається рівністю:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} . \quad (4.23)$$

Другий кут між цими прямими буде дорівнювати  $\pi - \alpha$ . Якщо дві прямі  $L_1$  і  $L_2$  задаються рівняннями у загальній формі (7.8)  $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$  і  $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ , то один із кутів  $\alpha$  між цими прямими визначається кутом між двома нормальними до них  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$  та  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} . \quad (4.24)$$

Прямі  $L_1$  і  $L_2$  на площині будуть *паралельні*, якщо рівні їх кутові коефіцієнти, або колінеарні їх нормалі, або колінеарні їх напрямні вектори:

$$k_1 = k_2, \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2, \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 . \quad (4.25)$$

Прямі на площині  $L_1$  та  $L_2$  *перетинаються* (мають лише одну спільну точку), якщо вони не паралельні, тобто виконується будь-яка з таких умов:

$$k_1 \neq k_2, \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2, \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2 . \quad (4.26)$$

Прямі  $L_1$  і  $L_2$  на площині будуть *перпендикулярні*, якщо перпендикулярні їх нормалі або напрямні вектори, або  $k_2 = -1/k_1$ :

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0, \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0, . \quad (4.27)$$

Відстань  $d$  від точки  $M(x_0, y_0)$  до прямої  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$  визначається наступною формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \quad (4.28)$$

Площа трикутника на площині з вершинами  $M_1 = (x_1, y_1)$ ,  $M_2 = (x_2, y_2)$  і  $M_3 = (x_3, y_3)$  дорівнює половині площі паралелограма побудованого на векторах  $\vec{M_1 M_2}$  і  $\vec{M_1 M_3}$ , і визначається за такою формулою  $S = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|/2$ .

#### 4.3. Лінії другого порядку на площині

Лінією (або кривою) другого порядку на площині називається множина точок, координати яких у декартовій системі координат задовольняють загальному рівнянню другого порядку від двох змінних:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 , \quad (4.29)$$

де  $A, B, C, D, E, F$  – довільні коефіцієнти, причому  $A, B$  і  $C$  одночасно не дорівнюють нулю. Наведемо загальну теорему, яка описує усі розв'язки рівняння другого порядку (4.29).

**Теорема 4.2.** Будь-яка лінія (крива) другого порядку на площині, яка описується рівнянням (4.29), є або колом, або еліпсом, або гіперболою, або параболою, або парєю прямих, або точкою, або порожньою множиною.

Таким чином, до *кривих 2-го порядку* належать: *коло, еліпс, гіпербола та парабола*.

**Коло.** Коло це множина точок на площині, рівновіддалених від точки  $C$  на величину  $r$  (рис. 4.12). Точка  $C$  називається *центром кола*, а число  $r$  – його *радіусом*. Рівняння кола з центром  $C(x_0, y_0)$  і радіусом  $r$  має такий вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 . \quad (4.30)$$

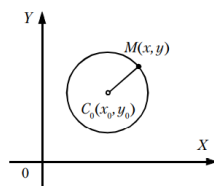


Рис. 4.12. Коло та його центр і радіус.

Радіусом кола називають також відрізок, якій зв'язує центр кола з будь-якою його

точкою. Рівняння кола з центром на початку координат  $O(0,0)$  називають *канонічним*:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (4.31)$$

Рівняння кола (4.30) можна записати також в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases} \quad (4.32)$$

де параметр  $t$  змінюється в діапазоні  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Еліпс.** *Еліпсом* називають множину точок на площині, сума відстаней яких до двох заданих точок  $F_1$  і  $F_2$ , дорівнює постійній величині  $2a$ . Точки  $F_1$  і  $F_2$  називаються *фокусами еліпса*, а довжина відрізка  $F_1F_2 = 2c$  називають *фокусною відстанню*, причому  $c < a$ . Середина відрізка  $F_1F_2$  називається *центром* еліпса. На рис. 4.13 показаний еліпс  $\{M : F_1M + MF_2 = 2a\}$ :

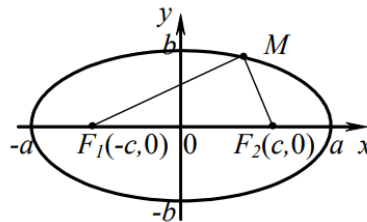


Рис. 4.13. Еліпс.

Числа  $a > b$  називають відповідно *великою і малою піввіссю* еліпса. Вони пов'язані між собою і з параметром  $c$  рівністю:

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (4.33)$$

Ця рівність випливає із рис. 4.13, коли точка  $M$  знаходиться у найвищій точці еліпсу  $(0, b)$ . Тоді прямокутний трикутник  $F_1OM$  буде мати гіпотенузу  $a$  і катети  $b$  і  $c$ .

Число  $\varepsilon = c/a$  називають *ексцентриситетом* еліпса. Ексцентриситет задовольняє умові  $0 < \varepsilon < 1$  і характеризує ступінь витягнутості еліпса. При  $a = b$  і  $c = \varepsilon = 0$  фокуси еліпса зливаються і він перетворюється на коло. При  $a = c$ ,  $b = 0$  і  $\varepsilon = 1$  еліпс перетворюється на відрізок. Прямі  $x = \pm a/\varepsilon$  називаються *директрисами* еліпса, а  $d_1$  і  $d_2$  – відстані від точки еліпса  $M$  до лівої та правої директриси відповідно (рис. 4.14).

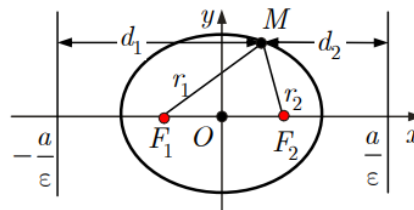


Рис. 4.14. Характеристики еліпса.

Якщо центром еліпса буде початок координат  $O(0,0)$ , а його піввісі  $a$  і  $b$  паралельні осям координат, то отримуємо *канонічне* (найпростіше) рівняння еліпса (рис. 4.13):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.34)$$

Еліпс з центром у точці  $C(x_0, y_0)$  і півосями  $a$  і  $b$ , що паралельні осям координат, має таке рівняння:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (4.35)$$

Рівняння еліпса (4.35) можна записати також в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y = y_0 + b \cdot \sin(t) \end{cases} \quad (4.36)$$

де  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Гіпербола.** *Гіперболою* називають множину точок на площині, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок  $F_1$  і  $F_2$  дорівнює постійній величині  $2a$  (рис. 4.15).

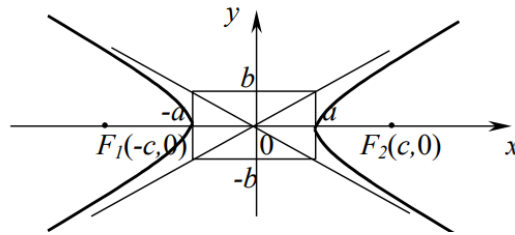


Рис. 4.15. Гіпербола.

Точки  $F_1$  і  $F_2$  називаються *фокусами* гіперболи, а відстань між ними  $F_1F_2 = 2c$  – фокусною відстанню, причому  $c > a$ . Середина відрізка  $F_1F_2$  називається *центром* гіперболи. Числа  $a$  і  $b$  називають *півосями* гіперболи відповідно *дійсною* і *уявною*. Вони пов'язані між собою і з числом  $c$  рівністю:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (4.37)$$

Число  $\varepsilon = c/a$  називають *ексцентриситетом* гіперболи, причому для гіперболи  $\varepsilon > 1$ . Прямі  $y = \pm(b/a)x$  називаються *асимптотами* гіперболи (рис. 4.15), тобто прямими до яких гілки гіперболи наближаються як завгодно близько, але не торкаючись їх. Якщо  $a = b$ , то гіпербола називається *рівнобічною*. Прямі  $x = \pm a/\varepsilon$  називаються *директрисами* гіперболи (рис. 4.16).

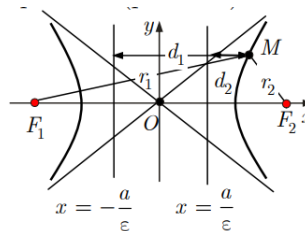


Рис. 4.16. Характеристики гіперболи.

Якщо центром гіперболи буде початок координат  $O(0,0)$ , а її піввісі паралельні осям координат, то отримуємо *канонічне* рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.38)$$

Гіпербола із центром у точці  $C(x_0, y_0)$  і півосями  $a$  і  $b$ , що паралельні осям координат має таке рівняння:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (4.39)$$

Рівняння гіперболи (4.39) можна записати також в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cdot \text{ch}(t) \\ y = y_0 + b \cdot \text{sh}(t) \end{cases} \quad (4.40)$$

де  $t \in \mathbb{R}$  – параметр, а  $\text{ch}(t)$ ,  $\text{sh}(t)$  – гіперболічний косинус і синус (вони будуть визначені на наступному занятті. Тут знак мінус відповідає лівій гілці гіперболи, а знак плюс – її правій гілці, оскільки  $\text{ch}(t) > 0$  для всіх  $t \in \mathbb{R}$ ).

**Парабола.** *Параболою* називають множину точок на площині, відстань яких до заданої прямої та заданої точки рівні (рис. 4.17). Задану точку  $F$  називають *фокусом* параболи, а пряму  $D$  її *директрисою*. Відстань від фокуса до директриси називають *фокальним параметром* параболи і позначають як  $p$ . Парабола симетрична відносно осі абсцис і точку її перетину з цією віссю називають *вершиною* параболи. На рис. 4.17 вершина параболи розміщена на початку координат.

Ексцентриситет параболи вважається рівним одиниці  $\varepsilon = 1$ . Відстань  $r$  від точки  $M$  параболи до фокуса називається *фокальним радіусом*, а число  $d$  це відстань від точки  $M$  параболи до директриси. За означенням для будь-якої точки  $M$  параболи с координатами  $(x, y)$  виконується така рівність:

$$r = d = x + p/2. \quad (4.41)$$

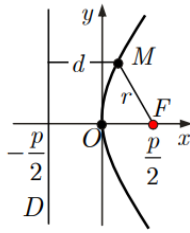


Рис. 4.17. Парабола.

Якщо фокусом параболи буде точка  $F = (p/2, 0)$ , а директрисою пряма  $x = -p/2$ , то отримуємо *канонічне* рівняння параболи (рис. 4.17):

$$y^2 = 2px \quad (4.42)$$

Якщо вершина параболи розміщується у точці  $C(x_0, y_0)$  та її вісь симетрії паралельна осі абсцис, то рівняння параболи матиме такий вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (4.43)$$

Якщо вершина параболи розміщується на початку координат і вона симетрична відносно осі ординат, то рівняння параболи буде мати більш звичний вигляд:

$$x^2 = 2py \quad (4.44)$$

У цьому разі точка  $F(0, p/2)$  буде фокусом параболи, а пряма  $y = -p/2$  її директрисою.

Відмітимо спільну властивість кривих другого порядку, яка називається *фокально-директоріальною властивістю*.

**Теорема 4.3.** Еліпс, гіпербола і парабола є множинами точок  $M$ , для яких відношення  $r/d = \varepsilon$  є константою, яка дорівнює ексцентриситету кривої, де  $r = FM$  - фокальний радіус точки  $M$  до відповідного фокуса, а  $d$  - відстань від точки  $M$  до директриси, яка відповідає цьому фокусу.

#### 4.4. Зразки розв'язання вправ

**4.4.1.** Знайти координати вектора  $\overline{AB} = \vec{a}$  та його довжину за його вершинами  $A(-1, 1)$  і  $B(2, -3)$ .

*Розв'язання.* Координати вектору  $\overline{AB}$  знаходимо за формулою (4.3):

$$a_x = 2 - (-1) = 3, \quad a_y = -3 - 1 = -4.$$

Отже  $\overline{AB} = (3, -4)$ . Довжину вектора обчислюємо за формулою (4.6):

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

**4.4.2.** Показати, що вектори  $\vec{a} = (3, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1)$  утворюють базис в просторі  $V_0$  і розкласти вектор  $\vec{d} = (4, 2)$  за цим базисом.

*Розв'язання.* Згідно формулі (4.4) обчислимо визначник матриці, стовпцями якої є координати цих векторів:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0.$$

Отже ці вектори лінійно незалежні і тому утворюють базис в просторі  $V_0$ . Коефіцієнти розкладання  $k_1, k_2$  вектору  $\vec{d} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$  визначаються із системи лінійних рівнянь. Стовпцями матриця цієї системи являються координати векторів:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3k_1 + k_2 = 4 \\ k_1 + k_2 = 2 \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи  $k_2 = 2 - k_1$  і  $3k_1 + (2 - k_1) = 4$ . Отже  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ , тому розкладання за базисом має вигляд  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ .

**4.4.3.** Знайти косинус кута між векторами  $\vec{a} = (2, 5)$  і  $\vec{b} = (-4, 2)$ .

*Розв'язання.* Знайдемо скалярний добуток і довжини цих векторів за формулами (4.6) і (4.12). Маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = -8 + 10 = 2, \\ |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, \end{aligned}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Тепер за формулою (4.13) знаходимо косинус кута між цими векторами:

$$\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{145}}.$$

**4.4.4.** Знайти відстань між точками  $M_1(6,5)$  і  $M_2(1,2)$ , а також координати точки  $M$ , що поділяє відрізок  $M_1M_2$  навпіл.

*Розв'язання.* За формулою (4.7) знайдемо відстань між цими точками:

$$\sqrt{(1-6)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

Координати точки  $M(x, y)$ , що поділяє відрізок  $M_1M_2$  навпіл знайдемо за формулою (4.5):

$$x = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}, \quad y = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}.$$

**4.4.5.** Задано вершини трикутника  $A(6,0)$ ,  $B(2,-3)$ ,  $C(8,-1)$ . Скласти рівняння сторін трикутника, висоти  $BD$ , опущеної на сторону  $AC$ , і знайти координати точки  $D$ .

*Розв'язання.* Знайдемо рівняння сторін трикутника із формули (4.19), як прямих, які проходять через дві точки і запишемо їх у загальному вигляді:

1) Для  $AB$   $y = (-3 - 0)(x - 6)/(2 - 6)$ . Звідси отримуємо  $3x - 4y - 18 = 0$ ;

2) Для  $AC$   $y = (-1 - 0)(x - 6)/(8 - 6)$ . Звідси отримуємо  $x + 2y - 6 = 0$ ;

3) Для  $BC$   $y = (-1 + 3)(x - 2)/(8 - 2) - 3$ . Звідси отримуємо  $x - 3y - 11 = 0$ ;

Нормаллю прямої  $AC$  буде вектор  $\vec{n} = (1, 2)$ , тоді рівняння висоти  $BD$  знаходимо із формули (4.20), як рівняння прямої, яка проходить через точку  $B(2, -3)$  паралельно вектору  $\vec{n} = (1, 2)$   $y = 2(x - 2)/(8 - 2) - 3$  або в загальному вигляді  $2x - y - 7 = 0$ . Оскільки точка  $D$  є перетином прямих  $AC$  і  $BD$ , то її координати знаходимо із системи лінійних рівнянь  $x + 2y = 6$  і  $2x - y = 7$ . Знайшовши розв'язок цієї системи  $x = 4$  і  $y = 1$ , отримуємо координати точки  $D(4, 1)$ .

**4.4.6.** Визначити пів-осі, координати фокусів, ексцентриситет і директриси еліпса заданого канонічним рівнянням  $x^2/16 + y^2/9 = 1$ .

*Розв'язання.* Це канонічне рівняння еліпса (4.34), центр якого розташований на початку координат, тому  $a = 4$  і  $b = 3$ . Далі, з формули (4.31) знаходимо фокусну піввідстань  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$  та ексцентриситет еліпса  $\varepsilon = c/a = \sqrt{7}/4$ . Отже, велика піввісь дорівнює 4, мала - 3, координати фокусів  $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ ,  $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$ , а ексцентриситет дорівнює  $\varepsilon = \sqrt{7}/4$ . Директриси еліпса є прямі, які задаються рівняннями  $x = \pm 16/\sqrt{7}$ .

**4.4.7.** Визначити пів-осі, фокуси і асимптоти гіперболи, що визначається рівнянням  $x^2/16 - y^2/9 = 1$ .

*Розв'язання.* Із рівняння гіперболи (4.38) випливає, що  $a = 4$  і  $b = 3$ . Параметр  $c$ , знайдемо з рівності (4.37)  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ . Отже дійсна піввісь гіперболи  $a = 4$ , уявна піввісь  $b = 3$ , координати фокусів  $F_1 = (-5, 0)$ ,  $F_2 = (5, 0)$  та її асимптоти  $y = \pm 3x/4$ .

**4.4.8.** Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо її фокусна відстань дорівнює 10, а асимптоти задаються рівняннями  $y = \pm 2x$ .

*Розв'язання.* Із рівняння асимптот випливає, що  $b/a = 2$  або  $b = 2a$ . За умовою для фокусної відстані маємо  $2c = 10$ , тому  $c = 5$ . З рівностей  $c^2 = a^2 + b^2$  і  $b = 2a$  отримуємо рівняння  $c^2 = 5a^2$ , або  $25 = 5a^2$ . Додатним розв'язком цього рівняння є  $a = \sqrt{5}$ , тоді  $b = 2\sqrt{5}$ . Отже рівняння гіперболи має такий вигляд  $x^2/5 - y^2/20 = 1$ .

**4.4.9** Знайти координати фокуса і записати рівняння директриси параболи, заданої канонічним рівнянням  $y^2 = 12x$ .

*Розв'язання.* Віссю симетрії параболи  $y^2 = 12x$  буде вісь абсцис і тому  $2p = 12$ . Звідки отримуємо  $p/2 = 3$ , тоді фокус параболи має координати  $F = (3, 0)$  і рівняння директриси  $x = -3$ .

## 4.5. Завдання для самостійної роботи студентів

**4.5.1.** Знайти координати вектору  $\overline{AB}$  на площині, його довжину та його напрямні косинуси, якщо задані координати його початку і кінця (за варіантами):

- 1)  $A(3,1), B(1,0)$ ; 2)  $A(0,1), B(1, -1)$ ; 3)  $A(7,1), B(4,0)$ ; 4)  $A(3, -2), B(-1,3)$ ;  
5)  $A(6,1), B(2,0)$ .

**4.5.2.** Показати, що два вектори  $\overline{a}, \overline{b}$  утворюють базис на площині (у просторі) і розкласти вектор  $\overline{d}$  за цим базисом (за варіантами):

- 1)  $\overline{a} = (3, -1), \overline{b} = (3, -2), \overline{d} = (0, 3)$ ; 2)  $\overline{a} = (1, -5), \overline{b} = (2, 3), \overline{d} = (3, 5)$ ;  
3)  $\overline{a} = (3, 0), \overline{b} = (-2, 5), \overline{d} = (-7, 3)$ ; 4)  $\overline{a} = (2, 1), \overline{b} = (1, -1), \overline{d} = (3, -4)$ ;  
5)  $\overline{a} = (2, 1); \overline{b} = (4, 3); \overline{d} = (10, 5)$ .

**4.5.3\*.** Нехай на площині заданий довільний чотирикутник  $ABCD$  (не обов'язкове паралелограм або трапеція) і  $K, M$  – середини сторін  $AB$  і  $CD$ . Показати, що має місце співвідношення між векторами  $\overline{KM} = (\overline{BC} + \overline{AD})/2$ .

**4.5.4.** Звести до рівнянь з кутовим коефіцієнтом виду (4.17) та у відрізках виду (4.22) задані рівняння прямих у загальному вигляді і побудувати їх графіки (за варіантами):

- 1)  $6x + 4y - 12 = 0$ ; 2)  $5x - 2y + 10 = 0$ ; 3)  $2x + 3y - 1 = 0$ ; 4)  $3x + 4y - 6 = 0$ ;  
5)  $-2x + 3y + 9 = 0$ .

**4.5.5.** Знайти рівняння сторін трикутника на площині у зальному вигляді, вершини якого мають координати (за варіантами):

- 1)  $A(2, 2), B(-3, 2), C(1, -1)$ ; 2)  $A(-1, -1), B(0, 2), C(3, -1)$ ; 3)  $A(3, 1), B(0, 0), C(1, 2)$ ;  
4)  $A(-2, 0), B(1, 2), C(-3, -1)$ ; 5)  $A(4, 1), B(2, 2), C(1, -1)$ .

**4.5.6.** Розв'язати такі задачі (за варіантами):

- 1) Чи лежить точка  $M(4, 3)$  на колі радіуса 5 з центром на початку координат;  
2) Чи лежить точка  $M(4, 4)$  на колі радіуса 5 з центром на початку координат;  
3) Чи лежить точка  $M(\sqrt{21}, 2)$  на колі радіуса 5 з центром в точці  $O(0, 0)$ ;  
4) Чи перетинає коло  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$  пряму  $2x - 3y - 3 = 0$ ;  
5) Чи перетинає коло  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$  пряму  $2x - 3y + 3 = 0$ .

**4.5.7.** Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо таке (за варіантами):

- 1) Відстань між фокусами дорівнює 8, мала піввісь  $b = 3$ ;  
2) Відстань між фокусами дорівнює 9, мала піввісь  $b = 4$ ;  
3) Велика піввісь  $a = 6$ , а ексцентриситет  $\varepsilon = 0.5$ ;  
4) Відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет  $\varepsilon = 0.6$ ;  
5) Відстань між фокусами дорівнює 6, і  $a + b = 9$ .

**4.5.8.** Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо таке (за варіантами):

- 1) Відстань між фокусами дорівнює 10, дійсна піввісь  $a = 4$ ;  
2) Відстань між фокусами дорівнює 8, дійсна піввісь  $a = 3$ ;  
3) Дійсна піввісь  $a = 4$ , а ексцентриситет  $\varepsilon = 1.2$ ;  
4) Відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет  $\varepsilon = 1.5$ ;  
5) Відстань між фокусами дорівнює 20, і рівняння асимптот  $y = \pm 4x/3$ .

**4.5.9.** Написати рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола симетрична відносно (за варіантами):

- 1) осі абсцис і проходить через точку  $M(4, 1)$ ;  
2) осі абсцис і проходить через точку  $M(-4, 1)$ ;  
3) осі ординат і проходить через точку  $M(1, 1)$ ;  
4) осі ординат і проходить через точку  $M(1, -1)$ ;  
5) осі абсцис і проходить через точку перетину прямих  $y = x$  і  $x + y = 2$ .

**4.5.10.** Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого міститься Сонце. Найменша з віддалей від Землі до Сонця дорівнює приблизно 147 500 000 км., а найбільша 152 500 000 км. Знайти більшу піввісь та ексцентриситет орбіти Землі.

## 5. Континуум і дійсні функції

Математичний аналіз вивчає змінні величини та функціональні залежності між ними на множині дійсних чисел  $\mathbb{R}$  (від англійського Real (дійсний)). Множина дійсних чисел  $\mathbb{R}$  називається *континуумом* (continuum), що на латині означає «неперервний». Тому приділимо трохи уваги властивостям дійсних чисел.

### 5.1. Властивості континууму

На рисунку 5.1 показана числова ієрархія, яка складається із основних числових множин, більшість із яких (крім комплексних чисел) вивчається у школі.

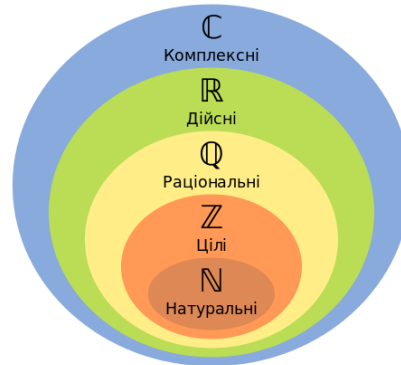


Рис. 5.1. Числова ієрархія.

Як видно із рис. 5.1 дійсні числа розташовані між раціональними і комплексними числами, але за своїми властивостями, вони відрізняються і від тих і від інших. Дійсні числа складаються із *раціональних* та *ірраціональних* чисел. Раціональні числа  $\mathbb{Q}$  (від англійського слова quotient (частка, дріб)) складаються з нескоротних дробів  $m/n$  із цілим чисельником  $m$  і натуральним знаменником  $n$ . Тому символічно множину  $\mathbb{Q}$  можна подати у такому вигляді  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}/\mathbb{N}$ . Раціональні числа створюють *поле*, тобто множину чисел в якій можна виконувати чотири алгебраїчних операції (додавання, множення, віднімання і ділення). Але тут не завжди можна отримати квадратний корінь, оскільки ще давні греки знали, що число  $\sqrt{2}$  не є раціональним числом. Вони виражали цей факт фразою: «сторона квадрата несорозмірна з його діагоналлю», тобто не існує відрізка, якій ціле число разів укладався би на стороні квадрата і на його діагоналі. Таким чином, в множині раціональних чисел є «дірки». З іншої сторони, раціональні числа дуже щільно розташовані на числовій осі  $\mathbb{R}$ , оскільки між будь-якими двома раціональними числами  $q_1$  і  $q_2$  є безліч інших раціональних чисел, наприклад,  $(q_1 + q_2)/2$ .

Перша структура, яка присутня на множині  $\mathbb{R}$  це структура *поля*, тобто (як і для раціональних чисел) для дійсних чисел всюди визначені чотири арифметичних операції (крім ділення на нуль). Ми не будемо виписувати довгий список аксіом поля, оскільки властивості арифметичних операцій вивчаються у школі. Друга структура пов'язана з цим, що  $\mathbb{R}$  є *лінійно впорядкована множина*, тобто на  $\mathbb{R}$  визначено відношення порядку  $x \leq y$  і для будь-яких дійсних чисел  $x$  і  $y$  можна сказати яке з них менше, а яке більше іншого. Крім того, ці дві структури узгоджені друг з другом в тому сенсі, що арифметичні операції узгоджені з відношенням порядку, наприклад, із умови  $x \leq y$  випливає, що  $x + z \leq y + z$  і т. д. Якщо взяти всі разом алгебраїчні аксіоми, то вони стверджують, що множина  $\mathbb{R}$  є *впорядкованим полем*.

Але математичний аналіз починається з *аксіоми неперервності*, яка стверджує, що у множині  $\mathbb{R}$  немає «дірок».

R16) (Аксіоми неперервності (повноти)). Якщо  $X$  і  $Y$  – непусті підмножини із  $\mathbb{R}$  такі, що  $x \leq y$  для всіх елементів  $x \in X$  і  $y \in Y$ , то існує дійсне число  $c$ , таке, що  $x \leq c \leq y$  для всіх  $x \in X$  і  $y \in Y$ .

Цю аксіому називають також неперервністю континууму за Дедекіндом. Множина  $X \subset \mathbb{R}$  називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує число  $c$  таке, що  $x \leq c$  ( $c \leq x$ )

для всіх  $x \in X$ . Число  $c$  в цьому разі називається верхньою (нижньою) межею множини  $X$ . Множина  $X$  називається *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху і знизу.

**Означення 5.1.** Число  $b$  називається *точною верхньою межею* (гранню) множини  $X$ , якщо  $b$  є *найменшою* із всіх верхніх меж для  $X$ . Аналогічно, число  $b$  називається *точною нижньою межею* (гранню) множини  $X$ , якщо  $b$  є *найбільшою* із всіх нижніх меж для  $X$ .

Точна верхня грань множини  $X$  називається її *супремумом* і позначається як  $\sup(X)$ . Точна нижня межа (грань) множини  $X$  називається її *інфімумом*, позначається як  $\inf(X)$ .

R17) (Принцип інфімуму і супремума). Кожна непуста обмежена знизу множина дійсних чисел має точну нижню грань і кожна непуста обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню грань.

На відміну від аксіоми R1 принцип R2 інтуїтивно очевидний. Його можна довести за допомогою аксіоми R1 (і навпаки), але ми будемо розглядати ці твердження як аксіоми континууму, які не вимагають доведення. Ще одним важливим принципом є принцип давньогрецького математика Архімеда (287-212 р. до н. е.).

R18) (Принцип Архімеда). Якщо  $a$  і  $b$  – дійсні числа такі, що  $0 < a < b$ , то існує натуральне число  $n$  таке, що  $an > b$ .

Архімед говорив о відрізках (рис. 5.2), але це не змінює суті діла.

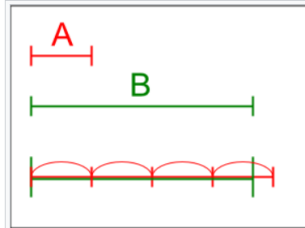


Рис. 5.2. Принцип Архімеда.

Принцип Архімеда можна вивести із принципу R2, але яке може бути доведення у очевидного (тривіального) твердження, яке випливає із необмеженості натуральних чисел. Проте принцип Архімеда виявився глибшим ніж він здається. Насправді він заперечує існування нескінченно малих та нескінченно великих дійсних чисел. Тому він був гідно оцінений лише в 20 столітті, коли заперечення цього принципу призвело до появи «нестандартного» математичного аналізу.

Нехай  $a$  і  $b$  – дійсні числа такі, що  $a < b$ , тоді множина  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$  називається *відкритим* відрізком (або інтервалом), оскільки вона не включає його кінців, а множина  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  називається *замкненим* відрізком (або просто відрізком), оскільки вона включає його кінці. Запис  $X \subseteq Y$  означає нестроге включення, тобто  $X$  є підмножиною  $Y$ , але можлива їх рівність  $X = Y$ . Запис  $X \subset Y$  означає строге включення, тобто  $X$  є підмножиною  $Y$  і в  $Y$  є елементи, які не належать  $X$ .

R19) (Принцип Коші-Кантора). Будь-яка (нескінченна) послідовність вкладених відрізків:
$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots \quad (5.1)$$
має непустий перетин, тобто існує, принаймні, одне число, яке належить всім відріzkам цієї послідовності.

У цього принципу є підсилений варіант. Якщо в послідовності (5.1) довжина відрізків збігається до нуля, то перетин складається із одного числа. Умова  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$  означає, що для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  існує номер  $n_0$  такий, що для всіх  $n \geq n_0$  виконується нерівність  $(b_n - a_n) < \varepsilon$ . Принцип R4 називається також лемою о вкладених відрізках. Він слідує із аксіоми неперервності, але частіше він вважається аксіомою, яка називається неперервністю континууму за Кантором. Зауважимо, що для відкритих інтервалів ця лема не має місця. Наприклад, послідовність вкладених відкритих інтервалів  $(0, 1/n)$ ,  $n \geq 1$ , має пустий перетин.

На цьому ми завершимо перелік фундаментальних принципів математичного аналізу, хоча до них відносять також лему Гейне-Бореля о покритті відріzkу, а також лему Больцано-Вейерштрасса о граничній точці, які ми будемо розглядати як теореми.

## 5.2. Функції

Поняття функції (відображення) є одним з фундаментальних (первинних) понять математики.

**Означення 5.2.** Нехай  $X$  і  $Y$  – деякі множини, тоді кажуть, що на множині  $X$  визначена функція  $f: X \rightarrow Y$ , якщо кожному елементу  $x \in X$  поставлений у відповідність елемент  $y \in Y$ , який називається *образом* елемента  $x$  і позначається як  $y = f(x)$ .

Якщо між змінними величинами  $x$  і  $y$  існує якійсь причинно наслідковий зв'язок, то можна говорити, що між ними існує функціональна залежність. Елементи  $x \in X$  називають *аргументом функції*, а  $x$  незалежною змінною, а елементи  $y = f(x)$  називають *значенням функції* і  $y$  залежною змінною.

Множину  $X$  називають *областю визначення функції*  $f$  і позначають  $D(f)$  (або  $\text{Dom}(f)$  від англійського Domain (область)), а множину  $I(f) = \{f(x) : x \in X\}$ , називають *множиною значень функції*  $f$  або *образом функції*  $f$  і позначають також як  $\text{Im}(f)$  (від англійського Image (образ)). Відзначимо, що образ  $I(f)$  є підмножиною множини  $Y$ . Наприклад, якщо  $f(x) = x^2$  і  $D(f) = [-1, 2]$ , то  $I(f) = [0, 4]$ .

**Означення 5.3.** Функція  $f: X \rightarrow Y$  називається *сюр'єкцією*, якщо  $f(X) = Y$ , тобто, коли кожний елемент із  $Y$  є образом деякого елемента із  $X$ . Функція  $f: X \rightarrow Y$  називається *ін'єкцією*, коли вона взаємно-однозначна, тобто, із умови  $x \neq y$  слідує, що  $f(x) \neq f(y)$ . Функція  $f: X \rightarrow Y$  називається *бієкцією*, якщо вона одночасно є ін'єкцією і сюр'єкцією.

Зауважимо, що один і той же закон відповідності може бути визначений на різних множинах. Наприклад, нехай  $f(x) = \sin(x)$ , тоді функція  $f: [0, \pi] \rightarrow [0, 2]$  не буде ін'єкцією, оскільки  $f(0) = f(\pi)$  і не буде сюр'єкцією, оскільки  $\sin(x) \leq 1$ , функція  $f: [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$  буде сюр'єкцією, а функція  $f: [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$  буде бієкцією.

Нагадаємо, що  $\mathbb{R}$  це множина дійсних чисел. В цьому курсі ми будемо в основному розглядати функції, які визначені і приймають значення на множини  $\mathbb{R}$  і будемо називати такі функції *дійсними функціями* (однієї змінної). Якщо  $a, b \in \mathbb{R}$ , то інтервал  $(a, b)$  або відрізок  $[a, b]$  називають *скінченим*. Знаком  $\infty$  в математичному аналізі позначають нескінченність. Для зручності допускають для інтервалів і відрізків значення  $a = -\infty$  або  $b = \infty$  і в цьому випадку вони називаються *нескінченими*. Наприклад, якщо дійсна функція визначена на всій множині  $\mathbb{R}$ , то можна записати  $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

**Способи задавання функцій.** До основних способів завдання функцій відносяться такі способи: *аналітичний* (за допомогою формул або співвідношень), *графічний* (у вигляді графіка функції), і *табличний* (у вигляді таблиці значень).

В основному функції задають аналітично *формулою у явному виді*  $y = f(x)$ . Якщо область її означення  $D(f)$  не вказано, то під нею розуміють найбільшу множину дійсних значень аргументу, для яких формула має сенс. Наприклад, функція  $f(x) = 1/x$  визначена всюди на  $\mathbb{R}$  крім нуля, тому  $D(1/x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , логарифм  $y = \ln(x)$  визначений тільки для додатних чисел, тому  $D(\ln(x)) = (0, \infty)$ . Функцію можна задати *неявно* співвідношенням  $F(x, y) = 0$ , де  $F(x, y)$  – формула від  $x$  і  $y$ . Говорять, що функція  $y = f(x)$  задовольняє співвідношенню  $F(x, y) = 0$ , якщо виконується тотожність  $F(x, f(x)) \equiv 0$  для всіх  $x \in D(f)$ . Цей спосіб може визначати функцію неоднозначно, оскільки співвідношенню може задовольняти декілька функцій. Наприклад, співвідношенню  $x^2 + y^2 = 4$  задовольняють дві функції  $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ . Проміжною формою між явним і неявним завданням функції є *параметрична* форма, коли функція задається рівняннями  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  для  $a \leq t \leq b$ . Зазвичай так задаються криві на площині.

*Графіком функції*  $y = f(x)$  називають множину точок площини  $Oxy$  з координатами  $\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$ . Коли функцію задають її графіком у прямокутній системі координат, то говорять о графічному способі задавання функції. В цьому випадку абсциси точок графіка належать області визначення функції  $D(f)$ , а ординати рівні відповідним значенням функції. Будь-яка вертикальна пряма перетинає графік функції не більше ніж в одній точці. Звісно, що в цьому випадку ми лише приблизно будемо знати значення функції.

*Табличний спосіб* задавання функції, складається з таблиці, в якій задані набір значень аргументу і відповідних значень функції. Але цей спосіб надає лише скінченне число значень функції. Можна також говорити об *алгоритмічному (програмному)* способі, коли функція задається комп'ютерною програмою.

**Композиція функцій (складна функція).** Основною операцією над функціями являється операція *композиції* (або *суперпозиції*). Нехай задані дві функції  $f: X \rightarrow Y$  і  $g: Y \rightarrow Z$ , тоді можна визначити нову функцію  $h: X \rightarrow Z$  за формулою:

$$h(x) = g(f(x)) \quad , \quad \text{для всіх } x \in X. \quad (5.2)$$

Функцію  $z = h(x)$  називають *складною функцією* від  $x$  або *композицією* (суперпозицією) функцій  $f$  і  $g$ , та її позначають як  $h = g \circ f$ . Функцію  $f$  називають *внутрішньою* функцією композиції, а  $g$  – її *зовнішньою* функцією. Наприклад, функція  $z = \cos^2(x) = \cos(x)^2$  є композицією функцій  $y = \cos(x)$  і  $z = y^2$ . Звернемо увагу, що із функцій  $f$  і  $g$  можна створити складну функцію  $g \circ f$  тоді і тільки тоді, коли  $I(f) \subseteq D(g)$ .

**Обернена функція.** Якщо функція  $f: X \rightarrow Y$  є бієкцією, то її позначають двома стрілками  $f: X \leftrightarrow Y$ . Бієкції (і тільки вони) мають *обернену функцію*  $f^{-1}: Y \leftrightarrow X$ , яка також буде бієкцією і яка визначається для усіх  $y \in Y$  за формулою  $f^{-1}(y) = x$ , якщо  $y = f(x)$ . Позначимо як  $1_X$  тотожну функцію на множині  $X$ , тобто  $1_X(x) = x$  для всіх  $x \in X$  і аналогічно позначимо як  $1_Y$  тотожну функцію на множині  $Y$ . Обернена функція задовольняє таким умовам для всіх  $x \in X$  і  $y \in Y$ :

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y. \quad (5.3)$$

Іншими словами, *композиція функції з її оберненою буде тотожною функцією*:

$$f^{-1} \circ f = 1_X, \quad f \circ f^{-1} = 1_Y.$$

Наприклад, оберненою функцією для експоненти  $e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , де  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ , буде натуральний логарифм  $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , тому  $\exp^{-1} = \ln$ .

### 5.3. Класифікація елементарних функцій

**Основні елементарні функції.** Нагадаємо, що  $\mathbb{Z}$  це множина цілих чисел, а  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  це множина додатних дійсних чисел. До основних елементарних функцій відносяться:

- 1) *Стала функція* (константа)  $f_c(x) = c$ , для всіх  $x \in \mathbb{R}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $I(f) = \{c\}$ ;
- 2) *Степенева функція*  $y = x^n$ , де  $n$  – натуральне число,  $D(f) = \mathbb{R}$ . Показник степеню може бути також раціональним числом, але тоді область  $D(f)$  може змінитися;
- 3) *Показникова функція* (експонента)  $y = a^x$ , де  $a > 1$ ,  $D(a^x) = \mathbb{R}$ ,  $I(a^x) = \mathbb{R}^+$ ;
- 4) *Логарифмічна функція* (логарифм)  $y = \log_a x$ , де  $a > 1$ , ця функція є оберненою до показникової функції,  $D(\log_a x) = \mathbb{R}^+$ ,  $I(\log_a x) = \mathbb{R}$ .
- 5) *Тригонометричні функції*  $y = \sin(x)$ ,  $y = \cos(x)$ ,  $y = \operatorname{tg}(x)$ ,  $y = \operatorname{ctg}(x)$ . Синус і косинус визначені всюди  $D(\sin(x)) = D(\cos(x)) = \mathbb{R}$ , тангенс  $\operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$  визначений всюди за виключенням точок  $\pi/2 + \pi \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , і котангенс  $\operatorname{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$  визначений всюди за виключенням точок  $\pi \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 6) *Обернені тригонометричні функції*  $y = \arcsin(x)$ ,  $y = \arccos(x)$ ,  $y = \operatorname{arctg}(x)$ ,  $y = \operatorname{arcctg}(x)$  (рис. 5.3, 5.4)

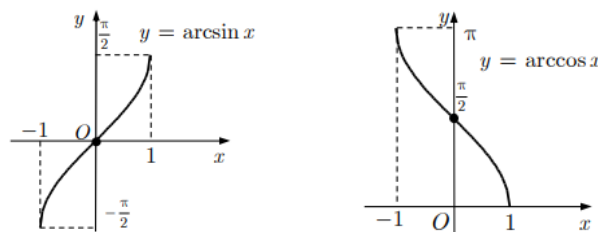


Рис. 5.3. Арксинус і арккосинус.

Тригонометричні функції не являються бієкціями, оскільки вони періодичні. Якщо їх визначити на одному (*головному*) півперіоді, де вони монотонно зростають або

спадають, то вони будуть бієкціями. Тому ці функції мають такі області визначення і області значень:  $D(\arcsin(x)) = [-1, 1]$ ,  $I(\arcsin(x)) = [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $D(\arccos(x)) = [-1, 1]$ ,  $I(\arccos(x)) = [0, \pi]$ ,  $D(\operatorname{arctg}(x)) = \mathbb{R}$ ,  $I(\operatorname{arctg}(x)) = (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $D(\operatorname{arcctg}(x)) = \mathbb{R}$ ,  $I(\operatorname{arcctg}(x)) = (0, \pi)$  (см. рис. 5.3 і 5.4).

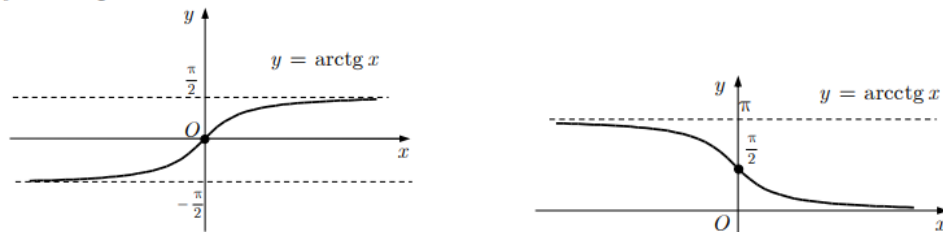


Рис. 5.4. Арктангенс і арккотангенс.

**Елементарні функції.** З основних елементарних функцій за допомогою арифметичних операцій і композиції функцій утворюють *елементарні функції*. Серед елементарних функцій відмітимо такі класи:

- *Поліноми* (многочлени)  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , де  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – коефіцієнти многочлена  $P(x)$ ,  $a_n \neq 0$ . Число  $n$  називається *степенем*  $P(x)$ .
- *Раціональні* (або дробове-раціональні) *функції*, є відношенням двох многочленів  $R(x) = P(x)/Q(x)$ , де  $Q(x) \neq 0$ ;
- *Ірраціональні функції* це композиція арифметичних операцій, раціональних функцій  $R(x)$  і степеневих функцій з дробовими показниками  $x^{m/n}$ . Раціональні та ірраціональні функції утворюють клас *алгебраїчних функцій*.
- *Трансцендентні функції* це композиція арифметичних операцій з показниковою, логарифмічною і тригонометричними функціями, які не є алгебраїчними.

До класу елементарних трансцендентних функцій відносяться також *гіперболічні функції*:

- гіперболічний синус  $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ ;
- гіперболічний косинус  $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$ ;
- гіперболічний тангенс  $th(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ ;
- гіперболічний котангенс  $cth(x) = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$ .

Назви цих функцій аналогічні назвам тригонометричних функцій, оскільки вони задовольняють подібним тотожностям, наприклад,  $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$ ,  $th(x) \cdot cth(x) = 1$ . Але на відміну від тригонометричних функцій, гіперболічні функції неперіодичні (рис. 5.5). Ці функції також мають обернені функції.

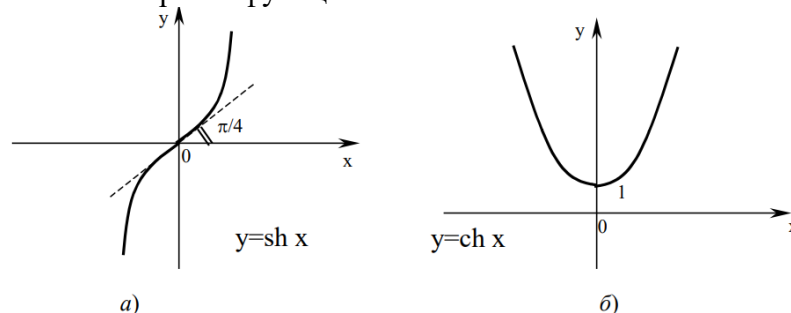


Рис. 5.5. Гіперболічний синус і косинус.

## 5.5. Основні властивості дійсних функцій

**Парні (непарні) функції.** Функція  $f(x)$  називається *парною* (*непарною*), якщо виконується умова  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ) для всіх  $x \in X$ . Графік парної функції симетричний відносно осі ординат  $Oy$ , а непарної функції – симетричний відносно початку координат. На рис. 5.6 показано графік непарної функції  $y = x^3$  і парної функції  $y = x^2$ .

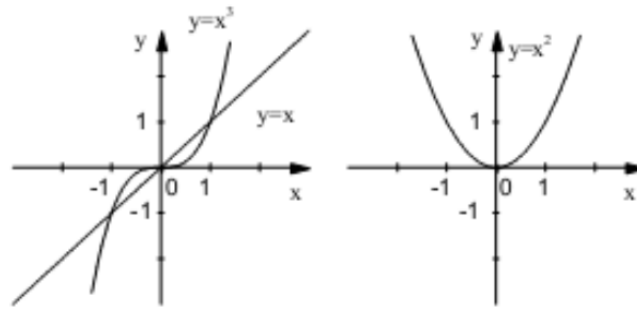


Рис. 5.6. Непарна і парна функції.

**Періодичні функції.** Функція  $y = f(x)$  називається *періодичною*, якщо існує число  $T > 0$ , що виконується така рівність для всіх  $x, x + T \in D(f)$ :

$$f(x + T) = f(x) . \quad (5.4)$$

Число  $T$ , що задовольняє рівності (5.4), називається *періодом функції*. Якщо існує найменший додатний період, то його називають *основним періодом функції*. Наприклад, функції  $\sin(x)$  та  $\cos(x)$  періодичні з основним періодом  $2\pi$  (рис. 5.7).

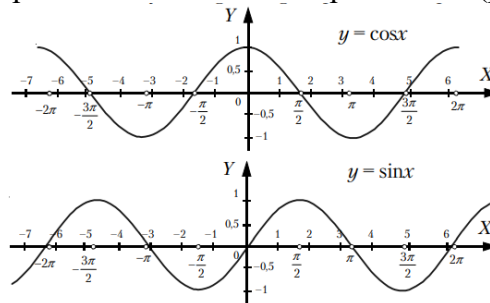


Рис. 5.7. Косинус і синус.

**Монотонні функції.** Функція  $f(x)$  називається *зростаючою (спадною)* на множині  $X$  якщо для всіх  $x_1, x_2 \in X$  із нерівності  $x_1 < x_2$  випливає така умова:  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) (рис. 5.8). Функцію  $f(x)$  називають *неспадною (незростаючою)* на множині  $X$ , якщо будь-яких значень  $x_1, x_2 \in X$  із нерівності  $x_1 < x_2$  випливає що  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ).

Зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі функції називають *монотонними*, а зростаючі і спадні функції називають також *строго монотонними*. Кожна строго монотонна функція буде бієкцією і тому має обернену функцію (рис. 5.8).



5.8. Графік зростаючої і спадної функції.

**Обмежені функції.** Функцію  $f(x)$  називають *обмеженою зверху (знизу)* на множині  $X$ , якщо обмежена зверху (знизу) її область значень  $f(X)$ , тобто існує таке число  $M$ , що  $f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq M$ ) для всіх  $x \in X$ . Функція  $f(x)$  називається *обмеженою* на  $X$ , якщо вона обмежена і зверху і знизу, тобто існує число  $M$  таке, що  $|f(x)| \leq M$  для всіх  $x \in X$ .

Функцію називають *необмеженою зверху (знизу)* на множині  $X$ , якщо вона не є обмеженою зверху (знизу) на  $X$ . Наприклад, функція  $y = x^2$  є обмеженою знизу і необмежена зверху на  $\mathbb{R}$ , функція  $y = \cos(x)$  – обмежена на  $\mathbb{R}$ , а функція  $\text{tg}(x)$  – необмежена ні зверху, ні знизу на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

## 5.5. Зразки розв'язання вправ

### 5.5.1. Знайти області визначення функцій:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}; \quad \text{б) } y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}; \quad \text{в) } y = \ln(9 - x^2);$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \arcsin\left(\frac{x-2}{x}\right).$$

*Розв'язання.* а) Ця функція визначена на всій множині дійсних чисел  $\mathbb{R}$ , крім тих значень змінної  $x$ , коли  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Розв'язуючи останнє рівняння, дістаємо  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ . Отже  $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$ , де знак  $\cup$  означає об'єднання множин.

б) Підкореневий вираз має бути невід'ємним, тобто  $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ . Ця нерівність виконується для всіх дійсних чисел, оскільки у квадратного рівняння  $x^2 - 2x + 3 = 0$  немає дійсних коренів, тому що його дискримінант  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$  менше нуля. Крім того, можна помітити, що  $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$ . Отже  $D(f) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

в) Вираз під знаком логарифма має бути додатним, тобто  $9 - x^2 > 0$ . Розв'язуючи цю нерівність отримуємо  $|x| < 3$ , тому  $D(f) = (-3, 3)$ .

г) Маємо суму двох функцій  $f_1(x) = 1/\sqrt{4-x}$  і  $f_2(x) = \arcsin((x-2)/x)$ , тому множина  $D(f)$  буде перетином множин  $D(f_1)$  і  $D(f_2)$ , тобто  $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$ . Для функції  $f_1$  має виконуватись нерівність  $4 - x > 0$ , звідки випливає, що  $D(f_1) = (-\infty, 4)$ . Для функції  $f_2$  має виконуватись умова:

$$\left| \frac{x-2}{x} \right| \leq 1,$$

оскільки арксинус визначений на відрізку  $[-1, 1]$ . Цю нерівність можна записати у вигляді  $|x - 2| \leq |x|$ ,  $x \neq 0$ . Щоб розв'язати цю нерівність розглянемо декілька випадків. Для від'ємних  $x$  нерівність матиме вигляд  $-(x - 2) \leq -x$ , тобто  $2 \leq 0$ , тому на інтервалі  $(-\infty, 0)$  немає розв'язків. Для  $x \in (0, 2)$ , нерівність матиме вигляд  $-(x - 2) \leq x$ , звідки випливає, що  $x \geq 1$ , тобто  $x \in [1, 2)$ . Для  $x \in [2, \infty)$  нерівність матиме вигляд  $x - 2 \leq x$ , тобто  $-2 \leq 0$ , тому нерівність справедлива для всіх  $x \in [2, \infty)$ . Об'єднавши одержані розв'язки нерівності  $|x - 2| \leq |x|$ , дістаємо  $D(f_2) = [1, \infty)$ . Остаточо маємо:

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = (-\infty, 4) \cap [1, \infty) = [1, 4).$$

### 5.5.2. Знайти множину значень функції $f(x) = 1/(2 + \sin(3x))$ .

*Розв'язання.* Ураховуючи, що  $I(\sin(3x)) = [-1, 1]$ , маємо  $I(2 + \sin(3x)) = [1, 3]$ . Тоді маємо нерівності:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin(3x)} \leq 1,$$

звідки дістаємо  $I(f) = [1/3, 1]$ .

### 5.5.3. Дослідити на обмеженість функцію $f(x) = 1/(1 + x^4)$ на множині $\mathbb{R}$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $x^4 \geq 0$  для всіх дійсних чисел  $x$ , то  $1 + x^4 \geq 1$ . Тоді маємо:

$$0 < \frac{1}{1 + x^4} \leq 1.$$

Отже функція  $f(x)$  є обмеженою і знизу і зверху на множині  $\mathbb{R}$ .

### 5.5.5. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = 1/x^3$ .

*Розв'язання.* Областю визначення цей функції є множина  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Незавжно бачити, що на інтервалах  $(-\infty, 0)$  і  $(0, \infty)$  функція буде спадною, але вона не буде монотонною на множині  $D(f)$ , тому що при переході через ноль вона зростає  $f(x) < 0$  при  $x < 0$  і  $f(x) > 0$  при  $x > 0$ .

5.5.5. Дослідити на парність функції а)  $f(x) = x^2 + \cos(x)$ , б)  $f(x) = x/(x^2 - 1)$ , в)  $f(x) = (x - 1)/(x^2 + 1)$ .

*Розв'язання.* Зауважимо, що необхідною умовою парності або непарності функції є симетричність її області визначення відносно нуля.

а) Задана функція визначена всюди і  $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = f(x)$ . Тому ця функція є парною.

б) У цьому разі функція визначена всюди за виключенням точок  $-1$  і  $1$ , тому її область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки виконуються рівності:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x),$$

то функція є непарною.

в) Задана функція визначена всюди, але  $f(-x) \neq f(x)$  і  $f(-x) \neq -f(x)$ . Отже ця функція ні парна, ні непарна.

**5.5.6.** Дослідити на періодичність функції а)  $f(x) = \sin(2x)$ , б)  $f(x) = x^3$ .

*Розв'язання.* а) Оскільки період синуса дорівнює  $2\pi$ , період функції  $f(x) = \sin(2x)$  буде в два рази меншим, тобто  $T = 2\pi/2 = \pi$ .

б) Функція  $f(x) = x^3$  не є періодичною, оскільки для будь-якого  $T \neq 0$  рівність  $(x + T)^3 = x^3$  неможлива, наприклад, при  $x = 0$ .

## 5.6. Завдання для самостійної роботи студентів

**5.6.1.** Знайдіть множину  $E(f)$ , на яку функція  $f$  відображує множину  $X$  (за варіантами):

- 1)  $f(x) = x^2, X = [-1, 2]$ ; 2)  $f(x) = x^3, X = [-2, 1]$ ; 3)  $f(x) = \log_3 x, X = (3, 27]$ ;  
4)  $f(x) = \log_2 x, X = [2, 8]$ ; 5)  $f(x) = 4^{-x}, X = (0, 1)$ .

**5.6.2.** Знайдіть область визначення функції (за варіантами):

- 1)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x}}$ ; 2)  $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}$ ; 3)  $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$ ;  
4)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$ ; 5)  $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-2)}$ .

**5.6.3.** З'ясуйте, чи є функція  $f(x)$  обмеженою (знизу, зверху) або необмеженою (знизу, зверху) на вказаній множині  $X$  (за варіантами):

- 1)  $f(x) = x^2 + 2, X = [-1, 3]$ ; 2)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, X = \mathbb{R}$ ;  
3)  $f(x) = \frac{1}{x^3}, X = (0, 1)$ ; 4)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, X = (-2, 2)$ ;  
5)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, X = [-1, 1]$ .

**5.6.4.** З'ясувати, чи є функція  $f(x)$  парною, непарною чи загального вигляду (за варіантами):

- 1)  $f(x) = x^4 + 3$ ; 2)  $f(x) = 2x^3 - x$ ; 3)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ;  
4)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ; 5)  $f(x) = x^2 - 8x + 20$ .

**5.6.5.** З'ясуйте, чи є функція  $f(x)$  періодичною, і в разі періодичності визначте основний період (за варіантами):

- 1)  $f(x) = \cos(3x - 4)$ ; 2)  $f(x) = \sin(\pi x)$ ; 3)  $f(x) = 3\sin(4x)$ ;  
4)  $f(x) = \sin(3x)^2$ ; 5)  $f(x) = \cos(5x)^2$ .

## 6. Теорія границь

Одним із основних понять математичного аналізу є поняття *границі*, з якою пов'язаний *граничний перехід*. Розглянемо спочатку границі числових послідовностей.

### 6.1. Границя послідовності

*Числова послідовність це функція натурального аргументу* виду  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка кожному натуральному числу  $n \in \mathbb{N}$  ставить у відповідність дійсне число  $x_n = f(n)$ . Тому отримуємо послідовність, тобто впорядкований набір дійсних чисел:

$$(x_n) = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Елемент  $x_n = f(n)$  називається *загальним членом* послідовності. Послідовність задається, як правило, формулою її загального члена, наприклад:

$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Нехай  $\varepsilon > 0$  додатне число, тоді  $\varepsilon$ -околом точки  $a$  називається такий інтервал:

$$O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x: |x - a| < \varepsilon\}. \quad (6.1)$$

**Означення 6.1.** Число  $a$  називають *границею послідовності*  $(x_n)$ , якщо для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  існує номер  $n_\varepsilon$  такий, що *при всіх*  $n > n_\varepsilon$  виконується умова  $x_n \in O_\varepsilon(a)$ , тобто  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Геометричний (інтуїтивний) зміст границі послідовності полягає в тому, що у будь-якому  $\varepsilon$ -околі точки  $a$  знаходиться нескінченний «хвіст» послідовності  $(x_n)$ , а поза цим околом може знаходитися тільки скінченне число елементів послідовності. Таким чином, із означення 6.1 маємо таке твердження.

**Твердження 6.1.** Якщо в деякому околі числа  $a$  знаходиться скінченна кількість членів послідовності  $(x_n)$ , то число  $a$  не буде границею послідовності  $(x_n)$ .

Границю послідовності позначають таким чином:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a, \quad (6.2)$$

і говорять, що послідовність  $(x_n)$  *збігається до числа*  $a$ . Також пишуть  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$  і говорять, що  $x_n$  *прямує до*  $a$ , коли  $n$  *прямує до нескінченності*. Якщо послідовність має скінченну границю, то її називають *збіжною*, у противному разі – *розбіжною*. Із означення 6.1 випливає також таке твердження.

**Твердження 6.2.** Послідовність  $(x_n)$  збігається до числа  $a$  тоді і тільки тоді, коли послідовність  $(x_n - a)$  збігається до нуля.

Наприклад, покажемо, що послідовність  $(1/n)$  збігається до нуля. Дійсно, зафіксуємо довільне число  $\varepsilon > 0$  і виберемо  $n_\varepsilon$  так, щоб  $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ . Тоді для всіх  $n > n_\varepsilon$  буде виконуватись умова  $1/n < 1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$ , і тому послідовність  $(1/n)$  збігається до нуля. Звідси та з твердження 6.2 заключаємо, що послідовність  $(n+1)/n$  збігається до одиниці, оскільки  $(n+1)/n - 1 = 1/n$ . Прикладом розбіжної послідовності може слугувати послідовність  $(n)$ , яка прямує до нескінченності, або послідовність  $1, -1, 1, -1, \dots$ , яка не має границі. Послідовність називається *обмеженою*, якщо у неї існує і верхня і нижня межа, тобто існує число  $M$  таке, що  $|x_n| \leq M$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 6.3.** Збіжна послідовність  $(x_n)$  задовольняє такі умови:

1) послідовність  $(x_n)$  є обмеженою; 2) послідовність  $(x_n)$  має тільки одну границю.

**Доведення.** 1) Нехай  $(x_n)$  збігається до числа  $a$ , тоді існує номер  $n_1$  такий, що для всіх  $n > n_1$  виконується умова  $a - 1 < x_n < a + 1$ . Покладемо  $M$  рівним максимальному з чисел  $\max(x_i : 1 \leq i \leq n_1)$  і  $a + 1$ , тоді  $x_n \leq M$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Аналогічно, покладемо  $m$  рівним мінімальному з чисел  $\min(x_i : 1 \leq i \leq n_1)$  і  $a - 1$ , тоді  $m \leq x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Нехай  $(x_n)$  збігається до числа  $a$  і  $b \neq a$ . Припустимо, що  $a < b$ , тоді для числа  $\varepsilon = (b - a)/2$  околи  $O_\varepsilon(a)$  і  $O_\varepsilon(b)$  не будуть перетинатись. Згідно означення 6.1 в околі  $O_\varepsilon(a)$  знаходяться всі члени послідовності  $(x_n)$ , починаючи з номера  $n_\varepsilon + 1$ , тому в околі  $O_\varepsilon(b)$  буде не більше  $n_\varepsilon$  членів. Тоді згідно твердженню 6.1 число  $b$  не буде границею послідовності  $(x_n)$ . Аналогічно міркування вірне для числа  $\varepsilon = (a - b)/2$ , якщо  $a > b$ . Таким чином, ніяке число відмінне від  $a$  не буде границею  $(x_n)$  і теорему доведено.  $\square$

Аналогічно доводиться таке твердження.

**Твердження 6.4.** Якщо  $x_n \leq y_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  збігаються до чисел  $a$  і  $b$  відповідно, то  $a \leq b$ .

Це твердження показує, що в нерівності  $x_n \leq y_n$  можна здійснювати граничний перехід, якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  збігаються. Для послідовностей природним чином визначаються арифметичні операції, а саме сумою послідовностей  $(x_n)$  і  $(y_n)$  називається послідовність  $(x_n + y_n)$ , добутком послідовність  $(x_n \cdot y_n)$ , часткою послідовність  $(x_n/y_n)$ , якщо  $y_n \neq 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 6.6.** Нехай  $(x_n)$  і  $(y_n)$  – збіжні послідовності з границями  $a$  і  $b$  відповідно, тоді виконуються такі рівності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = a/b, \quad \text{якщо } b \neq 0.$$

Таким чином, при виконанні арифметичних операцій над збіжними послідовностями можна виконувати і граничний перехід. Для послідовностей монотонність визначається як для функцій натурального аргументу. Послідовність  $(x_n)$  називається зростаючою (спадаючою), якщо  $x_n < x_{n+1}$  ( $x_n > x_{n+1}$ ) для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Послідовність  $(x_n)$  називається неспадною (незростаючою), якщо  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_n \geq x_{n+1}$ ) для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 6.6** (Больцано-Вєрштрасса). Кожна неспадна (незростаюча) обмежена зверху (знизу) послідовність  $(x_n)$  збігається до своєї точної верхньої (нижньої) грані.

**Доведення.** Ми доведемо теорему тільки для неспадної обмеженої зверху послідовності  $(x_n)$ , оскільки доведення двоїстого твердження аналогічно. Позначимо як  $X = \{x_n : n \geq 1\}$  множину членів послідовності. За умовою леми множина  $X$  обмежена зверху, тоді згідно з принципом R2 (лекція 4) множина має  $X$  точну верхню грань  $m = \sup(X)$ . Зафіксуємо довільне число  $\varepsilon > 0$ , тоді перетин  $X \cap O_\varepsilon(m)$  буде непустим, так як в іншому випадку число  $m - \varepsilon$  буде верхньою межею для  $X$ , а це суперечить тому, що  $m$  є найменшою верхньою межею для  $X$ . Отже існує член  $x_N \in X$  такий, що  $m - \varepsilon < x_N \leq m$ . Тоді в силу монотонності послідовності  $(x_n)$  виконується умова  $m - \varepsilon < x_n \leq m$  для всіх  $n > N$ . Таким чином, за означенням 6.1 число  $m$  буде границею послідовності  $(x_n)$ .  $\square$

Ця теорема є одним із фундаментальних фактів математичного аналізу, тому її в іншій формі часто включають в список аксіом континуума, який був приведений на попередній лекції. Наприклад, можна показати, що послідовність  $(1 + 1/n)^n$  є зростаючою і обмеженою зверху, тому згідно з теоремою 6.6 вона має границю, яка називається основою натуральних логарифмів і позначається символом  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718 \quad . \quad (6.3)$$

### 6.1.1. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

Будемо говорити, що послідовність  $(x_n)$  збігається до нескінченності, якщо для будь якого числа  $\varepsilon > 0$  існує номер  $n_\varepsilon$  такий, що при всіх  $n > n_\varepsilon$  виконується нерівність  $x_n > \varepsilon$ . Зауважимо, що в деякому сенсі можна говорити о збіжності такої послідовності згідно означенню 6.1, якщо  $\varepsilon$ -околом нескінченності вважати множину  $\{x : x > \varepsilon\}$ .

**Означення 6.2.** Послідовність  $(x_n)$  називається нескінченно малою, якщо її границя дорівнює нулю і нескінченно великою, якщо вона збігається до нескінченності.

Наприклад, як було показано, послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою, а послідовність натуральних чисел  $(n)$  очевидно, нескінченно велика.. Між ними існує простий зв'язок, який відображається у такому твердженні.

**Твердження 6.7.** Послідовність додатних чисел  $(x_n)$  буде нескінченно великою тоді і тільки тоді, коли послідовність  $(1/x_n)$  буде нескінченно малою.

При виконанні арифметичних операцій з нескінченно малими і нескінченно великими послідовностями можливі «невизначені» ситуації. Наприклад, добуток нескінченно малої послідовності на нескінченно велику може бути яким завгодно, а саме, нескінченно малим, або мати відмінну від нуля скінченну границю, або нескінченно

великим. У цей ситуації говорять про невизначеність типу " $0 \cdot \infty$ ". Усього існує 7 типів невизначеності:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0. \quad (6.4)$$

Розкрити невизначеність — означає знайти границю відповідного виразу, якщо вона існує. Розкриття невизначеності буде розглянуто на практичних заняттях, а поки обмежимося прикладом. Покажемо, що послідовність  $x_n = (2n + 1)/(4n - 1)$  збігається до  $1/2$ . Маємо невизначеність типу  $\infty/\infty$ , тому поділімо чисельник і знаменник на число  $n$  (яке називається головною частиною росту):

$$\frac{2n + 1}{4n - 3} = \frac{2 + 1/n}{4 - 3/n}.$$

Оскільки  $1/n \rightarrow 0$  і  $3/n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то чисельник цього дробу збігається до 2, а знаменник до 4. Тоді за теоремою 6.5 заключаємо, що  $x_n$  збігається до  $1/2$ .

## 6.2. Границя функції

Нагадаємо, що  $\varepsilon$ -окіл точки  $a$  визначається за формулою (6.1). Аналогічно визначається  $\delta$ -окіл точки  $x_0$ , за формулою  $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Проколений  $\delta$ -окіл  $U_\delta(x_0)$  це  $\delta$ -окіл точки  $x_0$  без самої точки  $x_0$ :

$$U_\delta(x_0) = O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta). \quad (6.5)$$

Нехай функція  $f(x)$  визначена в деякому околі точки  $x_0$ , окрім, можливо самої точки  $x_0$ .

**Означення 6.3** (Коші). Число  $a$  називається границею функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta > 0$  таке, що:

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(a). \quad (6.6)$$

Умова (6.6) означає, що  $f(x) \in O_\varepsilon(a)$  для усіх  $x \in U_\delta(x_0)$  або  $|f(x) - a| < \varepsilon$ , якщо  $|x - x_0| < \delta$ . Тому означення 6.3 називається границею функції за Коші «на мові  $\varepsilon$ - $\delta$ ». Ми трошки змінили цю мову і сформулювали умову (6.6) в термінах околів. Інтуїтивний зміст умови (6.6) полягає в тому що, якщо вибрати  $x$  достатньо близько до точки  $x_0$ , то можна як завгодно близько наблизитися до границі  $a$ . Якщо функція  $f(x)$  має границю  $a$  в точці  $x_0$ , то її позначають таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

і говорять, що  $f(x)$  прямує до  $a$  коли  $x$  прямує до  $x_0$  ( $f(x) \rightarrow a$  при  $x \rightarrow x_0$ ). Границю функції можна визначити також за допомогою послідовностей.

**Теорема 6.8** (Гейне). Число  $a$  буде границею функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ , тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності  $(x_n)$  із області  $D(f)$ , яка збігається до точки  $x_0$ , послідовність  $f(x_n)$  збігається до числа  $a$ .

Границя функції має властивості подібні границі послідовності. Зокрема із теореми 6.3 випливає, що функція може мати у точці не більше однієї границі. Зауважимо, що точку  $x_0$  проколюють тому, що значення функції  $f(x_0)$  може відрізнитися від границі  $a$ , або функція  $f(x)$  може бути не визначена в  $x_0$ , але границя існує. На рис. 6.1 показана границя, коли  $x_0$  і  $a$  — звичайні числа, а червоною точкою відмічене що  $f(x_0) \neq a$ .

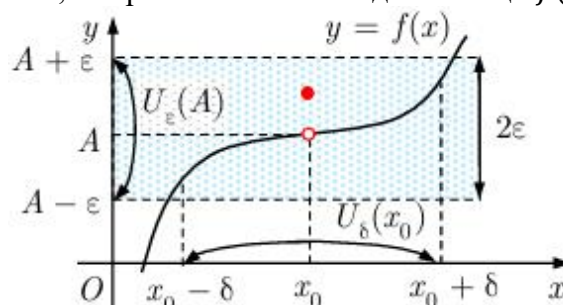


Рис. 6.1. Скінченна границя функції в точці.

### 6.2.1. Властивості границі функції

Границі функції в точці може залежить від того, з якого боку (зліва чи справа)  $x$  прямує до  $x_0$ . Інтервал  $O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$  назвемо *лівим*  $\delta$ -околом точки  $x_0$ , а інтервал  $O_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$  – її *правим*  $\delta$ -околом. Із формули (6.5) випливає така рівність:

$$U_\delta(x_0) = O_\delta^-(x_0) \cup O_\delta^+(x_0). \quad (6.7)$$

**Означення 6.4.** Число  $a$  називається *лівою (правою) однобічною границею функції*  $f(x)$  в точці  $x_0$ , якщо для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta > 0$  таке, що:

$$f(O_\delta^-(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(a) \quad (f(O_\delta^+(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(a)) \quad (6.8)$$

Ліву і праву границю функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  позначають відповідно таким чином:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

На рис. 6.2 показана функція, яка має різні однобічні границі в точці  $x_0 = 2$ .

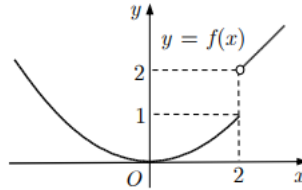


Рис. 6.2. Різні однобічні границі (розрив функції в точці).

**Теорема 6.9.** Число  $a$  буде границею функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  тоді і тільки тоді, коли  $a$  буде і лівою і правою границею функції  $f(x)$  в цій точці  $a = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ .

**Доведення.** Нехай функція  $f(x)$  має границю  $a$  в точці  $x_0$ , тоді із формул (6.6) і (6.7) випливає, що  $f(O_\delta^-(x_0)) \cup f(O_\delta^+(x_0)) = f(U_\delta(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(a)$ . Звідси заключаємо, що  $f(O_\delta^-(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(a)$  і  $f(O_\delta^+(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(a)$ . Тоді із формул (6.8) випливає, що виконується умови  $a = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ . Оскільки це міркування можна обернути в протилежному напрямку, то теорема доведена.  $\square$

Якщо функції мають границю в точці, то можна здійснювати граничний перехід скрізь арифметичні операції.

**Теорема 6.10.** Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  визначені в деякому околі точки  $x_0$  і мають скінченні границі в точці  $x_0$ , тоді виконуються такі твердження:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) / g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ .

Якщо функції мають границю в точці, то її можна переносити скрізь нерівності.

**Теорема 6.11.** Якщо функції  $f(x)$  і  $g(x)$  мають скінченні границі  $a$  і  $b$  в точці  $x_0$  і в деякому проколотому околі  $U_0$  точки  $x_0$  виконується нерівність  $f(x) \leq g(x)$ , то  $a \leq b$ .

**Доведення.** Припустимо протилежне, що  $b < a$ , тоді для  $\varepsilon = (a - b)/2$  буде виконуватись умова:

$$y_1 < b + \varepsilon = a - \varepsilon < y_2 \text{ для всіх } y_1 \in O_\varepsilon(b) \text{ і } y_2 \in O_\varepsilon(a). \quad (6.9)$$

Із означення 6.1 випливає, що існують проколотий  $\delta_1$ -оکیل  $U_1 \subseteq U_0$  і проколотий  $\delta_2$ -оکیل  $U_2 \subseteq U_0$  точки  $x_0$  такі, що  $f(U_1) \subseteq O_\varepsilon(a)$  і  $g(U_2) \subseteq O_\varepsilon(b)$ . Зауважимо, що  $U_1 \cap U_2 = U_\delta(x_0)$ , де  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , і розглянемо точку  $x_1 \in U_\delta(x_0)$ . Тоді  $f(x_1) \in O_\varepsilon(a)$  і  $g(x_1) \in O_\varepsilon(b)$ , звідси та із формули (6.9) заключаємо, що  $g(x_1) < f(x_1)$ . Але це суперечить умові теореми о том, що  $f(x) \leq g(x)$  для всіх  $x \in U_0$  і таким чином, теорему доведено від протилежного.  $\square$

Аналогічно доводиться така теорема.

**Теорема 6.12** (про двох вартових). Якщо функції  $f(x)$  і  $g(x)$  мають скінченну границю  $a$  в точці  $x_0$  і в деякому проколотому околі  $U_0$  точки  $x_0$  виконуються нерівності  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , то  $h(x) \rightarrow a$  при  $x \rightarrow x_0$ .

### 6.3. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

**Означення 6.6.** Функцію  $f(x)$  називають *нескінченно малою* (*нескінченно великою*) в точці  $x_0$ , якщо  $f(x) \rightarrow 0$  ( $|f(x)| \rightarrow \infty$ ) при  $x \rightarrow x_0$ .

Нескінченно малі функції мають такі властивості відносно арифметичних операцій (теж вірно і для нескінченно малих послідовностей):

- (m1) Сума і різниця двох нескінченно малих функцій в точці  $x_0$  буде нескінченно малою функцією в цей точці;
- (m2) Добуток нескінченно малої функції в точці  $x_0$  на обмежену в околі точки  $x_0$  функцію буде нескінченно малою функцією в цей точці;
- (m3) Частка від ділення нескінченно малої функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  на функцію  $g(x)$ , що має відмінну від нуля границю в точці  $x_0$  буде нескінченно малою функцією в цей точці.

Нескінченно малі функції (н. м. ф.) у деякому розумінні протиставляються нескінченно великим функціям (н. в. ф.). Між ними існує простий зв'язок, який ми вже відмічали для послідовностей.

**Твердження 6.13.** Якщо  $f(x)$  є нескінченно малою функцією в точці  $x_0$  і  $f(x) \neq 0$  в проколотому околі цієї точки, то функція  $1/f(x)$  буде нескінченно великою в точці  $x_0$  і, навпаки, якщо  $f(x)$  є нескінченно великою в точці  $x_0$ , то функція  $1/f(x)$  буде нескінченно малою в цей точці.

Властивостям нескінченно малих функцій відповідають такі властивості нескінченно великих функцій:

- (M1) Сума (але не різниця) двох нескінченно великих функцій в точці  $x_0$  буде нескінченно великою функцією в цей точці;
- (M2) Добуток нескінченно великої функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  на функцію  $g(x)$ , що має відмінну від нуля скінченну границю в точці  $x_0$  буде нескінченно великою функцією;
- (M3) Частка від ділення нескінченно великої функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  на функцію  $g(x)$ , що має скінченну границю в точці  $x_0$  буде нескінченно великою функцією в цей точці.

При виконанні арифметичних операцій з нескінченно малими і нескінченно великими функціями можливі «невизначені» ситуації. Наприклад, добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику може бути яким завгодно, а саме, нескінченно малим, або мати скінченну границю, або нескінченно великим. У цей ситуації говорять про невизначеність типу " $0 \cdot \infty$ ". Усього існує 7 типів невизначеності, які приведені у формулі (6.4).

#### 6.3.1. Еквівалентні нескінченно малі та великі функції

Нескінченно малі та нескінченно великі функції порівнюють між собою, досліджуючи їхню частку. Нехай  $f(x)$  і  $g(x)$  є нескінченно малі (нескінченно великі) функції в точці  $x_0$ , тоді їх порівнюють таким чином:

- 1) Якщо  $f(x)/g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $f(x)$  називають нескінченно малою функцією *вищого порядку мализни* ніж  $g(x)$  і позначають  $f(x) = o(g(x))$  (*o-мале*). Або говорять, що нескінченно велика функція  $g(x)$  має *вищий порядок росту* ніж  $f(x)$  і позначають таким же чином (ті ж позначення використовують і для послідовностей).
- 2) Якщо частка  $f(x)/g(x)$  збігається до скінченної границі в точці  $x_0$ , яка відмінна від нуля, то говорять, що функції  $f(x)$  і  $g(x)$  мають *однаковий порядок мализни* в точці  $x_0$  (або *однаковий порядок росту* в точці  $x_0$ ) і пишуть  $f(x) = O(g(x))$  (*O-велике*) (ті ж позначення використовують і для послідовностей).

Якщо границі частки  $f(x)/g(x)$  не існує в точці  $x_0$ , то функції  $f(x)$  і  $g(x)$  називають *непорівнянними* нескінченно малими (нескінченно великими) функціями в точці  $x_0$ . Наприклад, нескінченно мала функція  $f(x) = x^2$  має вищий порядок мализни в точці  $x_0 = 0$  ніж функція  $g(x) = x$ . Нескінченно малі функції  $f(x) = 2x$  і  $g(x) = x$  мають однаковий порядок мализни в точці 0.

**Означення 6.6.** Нескінченно малі (великі) функції  $f(x)$  і  $g(x)$  називають *еквівалентними* в точці  $x_0$  і пишуть  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , якщо вірна така умова:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (6.10)$$

Наприклад, нескінченно малі функції  $f(x) = x$  і  $g(x) = x^2 + x$  будуть еквівалентні в нулі і, аналогічно, нескінченно великі функції  $f(x) = 1/x$  і  $g(x) = 1/(x^2 + x)$  будуть також еквівалентні в нулі.

**Означення 6.7.** Якщо нескінченно малі (нескінченно великі) функції  $f(x)$  і  $g(x)$  еквівалентні в точці  $x_0$  і  $f(x) \leq g(x)$  для всіх  $x$  із проколеного околу точці  $x_0$ , то говорять, що  $f(x)$  є *головною частиною мализни (росту)* функції  $g(x)$  в точці  $x_0$ .

Наприклад, функція  $x^2$  є головною частиною функції  $x^2 + x^3$  в нулі, а функція  $x^3$  буде головною частиною росту суми  $x^2 + x^3$ , коли  $x \rightarrow \infty$ .

**Твердження 6.14.** Якщо  $f(x)$  є головною частиною мализни (росту) функції  $g(x)$  в точці  $x_0$ , то функція  $g(x) - f(x)$  буде мати більш високий порядок мализни (менший порядок росту) ніж функція  $g(x)$  в точці  $x_0$ .

**Доведення.** Із теореми 6.10 і умови (6.10) випливають такі рівності:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 1 - 1 = 0.$$

Тому  $(g(x) - f(x)) = o(g(x))$  в точці  $x_0$ .  $\square$

Еквівалентні функції мають такі властивості:

- (E1) Границя в точці  $x_0$  не зміниться, якщо будь-яку функцію замінити на еквівалентну їй функцію в точці  $x_0$ .
- (E2) Сума двох нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку мализни, тобто головній частині всієї суми.
- (E3) Сума двох нескінченно великих функцій різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку росту, тобто головній частині всієї суми.

Заміну суми нескінченно малих (нескінченно великих) функцій її головною частиною називають *відкиданням нескінченно малих функцій вищих порядків мализни (нескінченно великих функцій нижчих порядків росту)*.

#### 6.4. Визначні границі

При знаходженні границі використовують такі *визначні (чудові, важливі)* границі.

1. *Перша визначна границя:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (6.11)$$

За означенням 6.6 границю (6.11) можна записати як  $\sin(x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ . Наслідками першої визначної границі є таке твердження.

**Теорема 6.16.** Мають місце такі еквівалентності при  $x \rightarrow 0$ :

$$1) \operatorname{tg}(x) \sim x, \quad 2) 2 \cdot (1 - \cos(x)) \sim x^2, \quad 3) \arcsin(x) \sim x, \quad 4) \operatorname{arctg}(x) \sim x. \quad (6.12)$$

**Доведення.** 1) Скористаємося принципом еквівалентності E1 і замінимо у частки  $\operatorname{tg}(x)/x = \sin(x)/(x \cdot \cos(x))$  функцію  $\sin(x)$  на еквівалентну їй функцію  $x$  тоді отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Границя  $\cos(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$  буде пояснена на наступній лекції.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (1 - \cos(x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \right)^2 = 1.$$

3) Замінимо у функції  $\arcsin(x)$  аргумент  $x$  на еквівалентну йому функцію  $\sin(x)$ , тоді згідно формули (4.3) (4 лекція) маємо  $\arcsin(\sin(x)) = x$ , оскільки  $\arcsin(x)$  є оберненою функцією для синусу на відрізку  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Таким чином, ми отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sin(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

4) Згідно першому пункту цієї теореми  $\operatorname{tg}(x) \sim x$ , тому замість  $x$  у функцію  $\operatorname{arctg}(x)$  підставимо  $\operatorname{tg}(x)$ , тоді дістаємо  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x$ . Таким чином, теорему доведено.  $\square$

### 2. Друга визначна границя.

Означенням числа  $e$  є друга визначна границя, де послідовність (6.3) змінюється на функцію:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad (6.13)$$

Наслідками другої визначної границі є такі формули:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a); \quad (6.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}; \quad (6.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha. \quad (6.17)$$

## 6.6. Зразки розв'язання вправ

**6.6.1.** Обчислити границю послідовностей:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{3n^2 - 2n + 1}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - n^3}{n^2 + 1}$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 5}$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$ ;  
 д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1}$ .

*Розв'язання.* а) Маємо невизначеність типу  $\infty/\infty$ . Головна частина росту чисельника це  $n^2$ , оскільки  $(n^2 + n + 5)/n^2 \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , а головна частина росту знаменника це  $3n^2$ , оскільки  $(3n^2 - 2n + 1) \sim 3n^2$  (перевірити!). Тому маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{3n^2 - 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

б) Головна частина росту (зменшення) чисельнику це  $-n^3$ , а головна частина росту знаменника це  $n^2$  при  $n \rightarrow \infty$ , тому отримуємо::

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - n^3}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

в) Головна частина росту знаменника це  $n^2$ , тому дістаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0.$$

г) Позбавимось ірраціональності в чисельнику, помноживши чисельник і знаменник (який дорівнює 1) на  $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ . Потім використаємо твердженням 6.7, тоді маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

д) Скористаємось формулою (6.3) і принципом еквівалентності, тоді отримуємо.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \frac{(2n-1)}{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(2n-1)}{(n+1)}} = e^2,$$

оскільки  $(2n-1)/(n+1) \rightarrow 2$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**6.6.2.** Обчислити границю послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

*Розв'язання.* Ураховуючи, що  $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$ , визначаємо:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Звідки отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

**6.6.3.** Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 4}{\sqrt{x + 7}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{4x^2 + 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{1 - 3x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}; \quad \text{є) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x});$$

*Розв'язання.* а) Застосовуючи теорему 6.10 про суму і частку границь, дістаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 4}{\sqrt{x + 7}} = \frac{2^2 - 2 + 4}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2.$$

б) Тут маємо невизначеність типу  $0/0$ , оскільки  $(x^2 - 1) \rightarrow 0$  і  $(x^2 + x - 2) \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow 1$ . Для усунення невизначеності розкладемо чисельник і знаменник дроби на множники та скоротимо їх на множник  $(x - 1)$ , що наближається до 0. Отже маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)}{(x + 2)} = \frac{2}{3}.$$

в) У цьому випадку також маємо невизначеність типу  $0/0$ . Для її розкриття скористаємося тотожністю  $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$  і використаємо першу визначну границю, тоді дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x)}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{x \cdot x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

г) Тут маємо невизначеність типу  $\infty/\infty$ . Для її розкриття зауважимо, що головна частина росту чисельника це  $x^2$ , а знаменника  $4x^2$  при  $x \rightarrow \infty$ , тоді отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{4x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

д) Тут є невизначеність типу  $\infty/-\infty$ . Маємо  $\sqrt{x^2 + 4} \sim x$  і  $(1 - 3x) \sim (-3x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , тому отримуємо (можна також поділити чисельник і знаменник дроби на  $x > 0$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(-3x)} = -\frac{1}{3}.$$

е) Оскільки синус є обмеженою функцією на всій числової осі, тому добуток обмеженої функції  $\sin(x)$  на нескінченно малу функцію  $1/x$ , при  $x \rightarrow \infty$ , буде нескінченно малою функцією при  $x \rightarrow \infty$  (властивість  $m^2$  нескінченно малих функцій):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin(x) \cdot \frac{1}{x} \right) = 0.$$

є) Маємо невизначеність типу  $\infty - \infty$ . Позбудемося ірраціональності в чисельнику дроби  $(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})/1$ , помноживши її на  $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}$ , тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 - 1/x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 - 1/x}} = \frac{2}{1 + 1} = 1. \end{aligned}$$

**6.6.4.** Довести формули (6.15)-(6.17) як наслідки другої визначної границі (6.14).

*Розв'язання.* Із формули (6.14) і теореми 6.10 маємо  $(1 + x)^{1/x} \sim e$ , при  $x \rightarrow 0$ . Тоді із принципу еквівалентності E1 отримуємо:

$$e^x \sim (1 + x)^{x/x} \sim (x + 1) \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (6.18)$$

Звідси отримуємо першу границю у формулі (6.15):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Зауважимо, що функція  $\ln(x)$  є оберненою для функції  $e^x$ , тоді із формули (6.18) і формули (4.3) (4 лекція) дістаємо першу границю у формулі (6.16):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Друга границя у формулі (6.16) впливає із попередньої рівності, теореми 6.10 і тотожності:

$$\log_a(1+x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(a)}.$$

Зауважимо, що перша границя у формулі (6.17) є частковим випадком другої при  $\alpha = 1/n$ . Друга границя у формулі (6.17) випливає із наближення Ньютона  $(1+x)^\alpha \sim (1+\alpha x)$  при  $x \rightarrow 0$ , де  $\alpha$  – дійсне число:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

Наприкінці цієї вправи, зауважимо, що друга границя у формулі (6.15) слідує із тотожності  $a = e^{\ln(a)}$ , формул (6.17), (6.18) і принципу еквівалентності E1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^{\ln(a)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\ln(a)} - 1}{x} = \ln(a).$$

**6.6.6.** Знайти границю функції:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{3x-2}.$$

*Розв'язання* Скористаємося визначною границею (6.13) і доведемо таку формулу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{x+1}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1}} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Далі виконаємо такі перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{(x+1) \frac{(3x-2)}{(x+1)}} = (e^{-1})^3 = e^{-3},$$

оскільки  $(3x-2)/(x+1) \rightarrow 3$  при  $x \rightarrow \infty$ .

## 6.6. Завдання для самостійної роботи студентів

**6.6.1.** Обчислити границю послідовності (за варіантами):

$$1) \frac{3n+1}{2n+3}; \quad 2) \frac{n+5}{1-n}; \quad 3) \frac{n^2-2n}{n^2+3n+2}; \quad 4) \frac{n^3-n^2}{4n^3+1}; \quad 5) \frac{5n}{n^2-1}.$$

**6.6.2.** Обчислити границю послідовності (за варіантами):

$$1) \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}; \quad 2) \frac{3n-2}{\sqrt{n^3+1}}; \quad 3) \frac{\sqrt{n^3+1}}{n+2}; \quad 4) \frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}; \quad 5) \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}.$$

**6.6.3\*.** Довести, що послідовність  $\sqrt[n]{2}$ ,  $n \geq 1$ , збігається і знайти її границю. *Вказівка.* Скористайтесь теоремою Больцано-Вейєрштрасса.

**6.6.4.** Обчислити границі функцій (за варіантами):

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-4x-5};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}.$$

**6.6.6.** Обчислити границі функцій (за варіантами):

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{7-x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

**6.6.6.** Обчислити границі функцій (за варіантами):

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(4x)}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{1-\cos(x)}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1-\cos(2x)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

## 7. Неперервні і диференційовані функції

### 7.1. Неперервні функції

Неперервні функції є основним класом функцій, які розглядають у математичному аналізі. Інтуїтивно неперервну функцію можна уявляти собі як функцію, графік якої можна накреслити не відриваючи олівця від паперу. Але це інтуїтивно уявлення вимагає формального уточнення. Нехай функція  $f(x)$  визначена в деякому околі точки  $x_0 \in D(f)$ .

**Означення 7.1.** Функцію  $f(x)$  називають *неперервною в точці  $x_0$* , якщо значення функції у цій точці дорівнює границі функції у цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) . \quad (7.1)$$

На мові околів це означає, що, для будь-якого  $\varepsilon$ -околу  $O_\varepsilon(f(x_0))$  точки  $f(x_0)$  існує  $\delta$ -окіл  $O_\delta(x_0)$  точки  $x_0$  такий, що:

$$f(O_\delta(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(f(x_0)) . \quad (7.2)$$

Тут не треба проколювати точку  $x_0$ , оскільки неперервна функція визначена у точці  $x_0$ . Рівність (7.1) можна переписати так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) .$$

Це означає, що *граничний перехід можна переносити через неперервну функцію*.

Назвемо різницю  $\Delta x = x - x_0$  *приростом аргументу* в точці  $x_0$  і позначимо як  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  відповідний йому *приріст функції*  $f(x)$ . Тоді умову неперервності (7.1) можна переписати таким чином:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta f(x_0)) = 0 . \quad (7.3)$$

Іншими словами, функція буде неперервною в точці  $x_0$ , якщо (нескінченно) малому приросту аргументу в цей точці відповідає (нескінченно) малий приріст функції в цей точці.

#### 7.1.1. Властивості неперервних функцій

Властивості функцій, неперервних у точці, впливають з означення 7.1 і відповідних властивостей границі функції в точці.

**Теорема 7.1.** Неперервні функції в точці мають такі властивості:

- 1) Функція, неперервна в точці  $x_0$ , обмежена в деякому околі цієї точки.
- 2) Якщо функція  $f(x)$  неперервна в точці  $x_0$  і не дорівнює нулю, то існує окіл точки  $x_0$ , у якому функція  $f(x)$  має той же знак, що і  $f(x_0)$ .
- 3) Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  неперервні в точці  $x_0$ , тоді неперервними в цей точці будуть також функції  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$ , якщо  $g(x_0) \neq 0$ .

**Доведення.** 1) Покладемо  $\varepsilon = 1$ , тоді згідно формулі (7.2) існує  $\delta$ -окіл  $O_\delta(x_0)$  точки  $x_0$  такий, що  $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$ , тому функція  $f(x)$  обмежена в околі  $O_\delta(x_0)$ .

2) Нехай  $f(x_0) = a > 0$ , тоді покладемо  $\varepsilon = a$ . Із формули (7.2) слідує, що існує  $\delta$ -окіл  $O_\delta(x_0)$  точки  $x_0$  такий, що  $0 = (f(x_0) - a) < f(x)$ . Тому  $f(x) > 0$  для  $x \in O_\delta(x_0)$ . При  $f(x_0) < 0$ , доведення аналогічно.

3) Впливає із теореми 6.10 (лекція 6).  $\square$

Із формули (7.2) слідує також теорема о неперервності складної функції.

**Теорема 7.2.** Нехай функція  $f(x)$  неперервна в точці  $x_0$ , а функція  $g(y)$  неперервна в точці  $y_0 = f(x_0)$ , тоді складена функція  $g(f(x))$  буде неперервною в точці  $x_0$ .

**Означення 7.2.** Функцію  $f(x)$  називають *неперервною на множині  $X \subseteq \mathbb{R}$* , якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини. Функцію  $f(x)$  називають *неперервною*, якщо вона неперервна у кожній точці своєї області визначення  $D(f)$ .

Наприклад, стала і тотожна функції будуть неперервними. Наступна теорема надає нам величезну кількість прикладів неперервних функцій.

**Теорема 7.3.** Елементарні функції (степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні функції) неперервні на своїй області визначення.

Ця теорема впливає із формули (7.3) і студентам буде запропоновано довести її для окремих елементарних функцій.

### 7.1.2. Точки розриву функції

Нагадаємо, що  $f(x_0 - 0)$  ( $f(x_0 + 0)$ ) означає ліву (праву) границю функції у точці  $x_0$  (лекція 6). Якщо  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$  ( $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ ), то функція  $f(x)$  називається *неперервною зліва* (з *права*) в точці  $x_0$ . Із теореми 5.9 (5 лекція) випливає такий критерій.

**Твердження 7.4.** Функція  $f(x)$  буде неперервною в точці  $x_0$ , тоді і тільки тоді, коли вона неперервна і зліва і з права:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0). \quad (7.4)$$

Нехай функція  $f(x)$  визначена в деякому околі точки  $x_0$ , крім, можливо, самої точки.

**Означення 7.3.** Точку  $x_0$  називають *точкою розриву* функції  $f(x)$ , якщо  $f(x)$  не є неперервною в цей точці.

Точки розриву функції розрізняють за такою ознакою:

- 1) *Точкою розриву першого роду* (або *точкою скінченного розриву*) називають точку  $x_0$ , в якій існують скінченні однібічні границі  $f(x_0 - 0)$  і  $f(x_0 + 0)$ , але не виконується умова (7.4). Число  $\Delta(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  називається *стрибком*  $f(x)$  у  $x_0$ .
- 2) *Точкою розриву другого роду* називають точку  $x_0$ , коли хоча б одна із цих границь  $f(x_0 - 0)$  або  $f(x_0 + 0)$  є нескінченно великою.

На рис. 7.1 показана функція та її точка розриву першого роду  $x_1$  і точка розриву другого роду  $x_2$ .

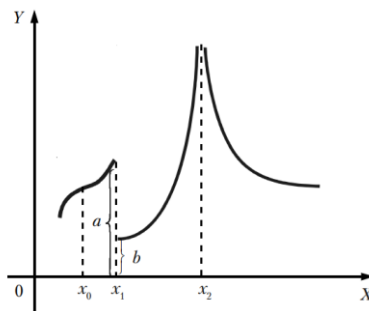


Рис. 7.1. Точки розриву функції першого і другого роду.

Якщо  $\Delta(x_0) = 0$ , то точку  $x_0$  називають *точкою усувного розриву*, оскільки в цьому випадку розрив можна усунути, якщо покласти  $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$  (рис. 7.2). Якщо  $\Delta(x_0) \neq 0$ , то розрив першого роду називається *неусувним* (рис. 7.3).

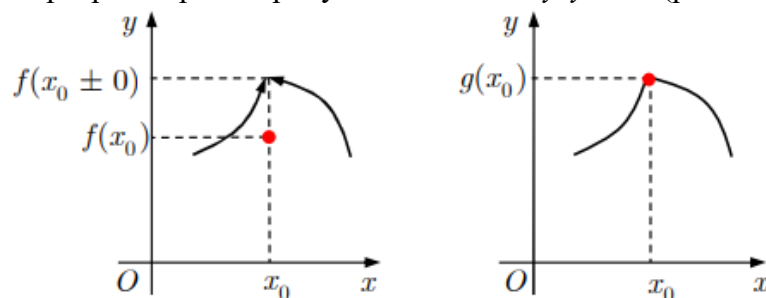


Рис. 7.2. Усувний розрив першого роду.

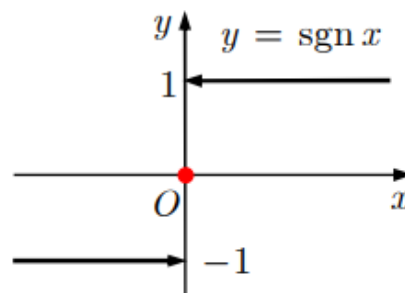


Рис. 7.3. Неусувний розрив першого роду.

### 7.1.3. Класичні теореми о неперервних функціях на відрізку

Нехай  $a$  і  $b$  – скінченні числа, тоді функція  $f(x)$  називають неперервною на замкнутому відрізку  $[a, b]$ , якщо вона неперервна на відкритого інтервалу  $(a, b)$ , а також неперервна справа в точці  $a$  і неперервна зліва в точці  $b$ . Класичні теореми, які стосуються неперервних функцій були доведені приблизно у другій половині 19 століття.

**Теорема 7.5** (перша теорема Веєрштрасса). Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , тоді вона обмежена на цьому відрізку (рис. 7.4).

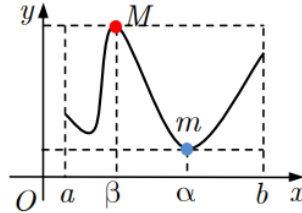


Рис. 7.4. Обмеженість неперервної функції.

Зауважимо, що ця теорема і всі наступні теореми не мають місця на відкритому інтервалі. Прикладом може слугувати функція  $1/x$ , яка неперервна на інтервалі  $(0,1)$ , але не обмежена на ньому.

**Теорема 7.6** (друга теорема Веєрштрасса). Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , тоді вона досягає на ньому свого мінімуму  $m$  і максимуму  $M$  (рис. 7.4).

Наступна теорема застосовується при пошуку коренів функцій (рис. 7.5), а друга теорема Больцано-Коши узагальнює попередню (рис. 7.6).

**Теорема 7.7** (перша теорема Больцано-Коши). Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і набуває на його кінцях різних за знаком значень  $f(a)f(b) < 0$ , тоді існує точка  $x_0 \in (a, b)$ , для якої  $f(x_0) = 0$ .

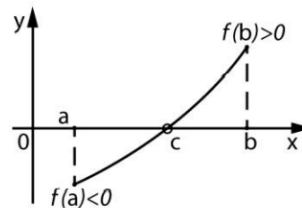


Рис. 7.5. Існування кореня.

**Теорема 7.8** (друга теорема Больцано-Коши). Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і набуває на його кінцях значень  $A$  і  $B$ , де  $A < B$ , тоді для будь-якого числа  $y \in (A, B)$  існує принаймні одна точка  $x_0 \in (a, b)$  така, що  $f(x_0) = y$ .

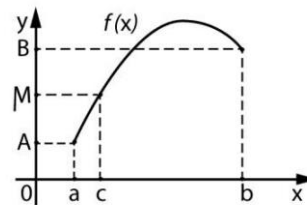


Рис. 7.7. Існування проміжної точки.

Позначимо як  $I(f) = f([a, b])$  область значень функції на відрізку. На початку 20 століття (на півстоліття пізніше класичних теорем) у топології (науки о неперервних функціях) була доведена така фундаментальна теорема (рис. 7.7).

**Теорема 7.9.** Нехай функція  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ , тоді існують скінченні числа  $m = \inf(I(f))$  і  $M = \sup(I(f))$ , для яких виконується рівність  $I(f) = [m, M]$ .

Іншими словами, *неперервним образом замкнутого відрізка буде знову замкнений відрізок*. Із цієї теореми випливають всі класичні теореми о неперервних функціях.

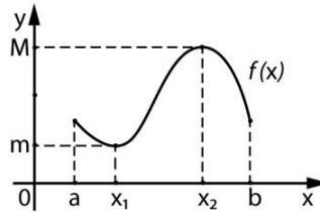


Рис. 7.7. Неперервний образ відрізка.

Дійсно, оскільки множина  $I(f)$  обмежена, то вірна перша теорема Вейєрштрасса. Далі, із рівності  $I(f) = [m, M]$ , випливає, що  $f(x_1) = m$  і  $f(x_2) = M$  для деяких точок  $x_1, x_2$  із  $[a, b]$ , що стверджує друга теорема Вейєрштрасса. Із умови першої теореми Больцано-Коші випливає, що  $m < 0 < M$ , тому за теоремою 7.9  $0 \in I(f)$ , що і стверджує ця теорема. Аналогічні аргументи можна застосувати і до другої теореми Больцано-Коші.

## 7.2. Диференціальне числення функцій одної змінної

Поняття швидкості перебігу будь-якого процесу, приводить до поняття *похідної функції*. Функції, які мають похідну називаються *диференційованими*. Розділ математичного аналізу, який вивчає властивості диференційованих функцій називають *диференціальним численням*.

### 7.2.1. Похідна функції

Одним із основних понять аналізу є поняття похідної функції. Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в деякому  $\delta$ -околі  $O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$  точки  $a$ , розглянемо приріст  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$  функції  $f(x)$  в точці  $a$ , який відповідає приросту аргументу  $\Delta x$ .

**Означення 7.4.** Якщо існує скінченна границя відношення  $\Delta y / \Delta x$ , коли приріст аргументу прямує до нуля, то цю границю називають *похідною функції  $f(x)$  в точці  $a$*  і позначають таким чином:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \quad (7.5)$$

Наприклад, функція  $y = x^2$  має в будь-якій точці  $a$  похідну  $2a$ , оскільки маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + \Delta x) = 2a.$$

Якщо границя (7.5) дорівнює  $+\infty$  (або  $-\infty$ ), то говорять, що функція  $f(x)$  має у точці  $a$  *нескінченну похідну*, якщо границі (7.5) не існує, то функція  $f(x)$  називається *недиференційованою* у точці  $a$ .

**Геометричний зміст похідної.** Похідна  $f'(a)$  в точці  $a$  це *кутовий коефіцієнт дотичної* до графіка функції  $y = f(x)$  у точці  $M(a, f(a))$ , який дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до осі абсцис (рис. 7.1):

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

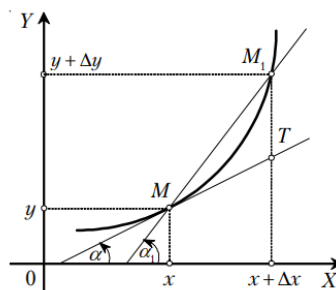


Рис. 7.8. Кутівий коефіцієнт (тангенс) дотичної.

Якщо в точці  $a$  функція  $f(x)$  має скінченну похідну, то *рівняння дотичної в точці  $(a, f(a))$*  має вигляд  $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ . Якщо функція  $f(x)$  має в точці  $a$  *нескінченну похідну*, то рівняння дотичної в цей точці має вигляд  $x = a$  (вертикальна дотична).

*Фізичний зміст похідної.* Якщо точка рухається за законом  $s = f(t)$  то похідна  $f'(t_0)$  дорівнює швидкості руху точки в момент часу  $t_0$ . *Економічний зміст похідної* пов'язаний зі швидкістю протікання будь-яких економічних процесів у фіксований момент часу (продуктивність праці, маргінальна вартість, маргінальний дохід і т. д.). Якщо функція має похідну в точці, то говорять також, що вона *гладка* в цієї точці.

**Означення 7.5.** *Лівобічною (правобічною) похідною  $f'(a-0)$  ( $f'(a+0)$ ) функції  $y = f(x)$  в точці  $a$  називається границя частки  $\Delta y/\Delta x$  при  $x \rightarrow -a$ , ( $x \rightarrow +a$ ), тобто коли  $x$  прямує до  $a$  зліва (з права):*

$$f'(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (7.6)$$

Праву та ліву похідні функції в точці називають також *однобічними похідними*. Із теореми 5.9 (5 лекція) випливає такий критерій.

**Твердження 7.10** (Критерій існування похідної). Функція  $f(x)$  має скінченну похідну  $f'(a)$  в точці  $a$ , тоді і тільки тоді, коли виконуються такі рівності:

$$f'(a-0) = f'(a) = f'(a+0).$$

Наприклад у функції  $f(x) = |x|$  не має похідної у точці 0 (рис. 7.9). оскільки,  $f'(-0) = -1$  і  $f'(0+) = 1$ . Іншими словами, має місце розрив похідної, вона ламається і функція втрачає гладкість в точці 0.

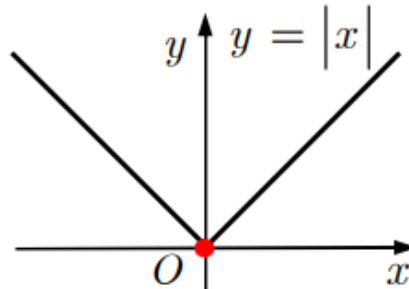


Рис. 7.9. Недиференційована функція в точці.

Якщо функція  $f(x)$  диференційована в точці  $a$ , то із формули (7.5) випливає, що  $f(a + \Delta x) \rightarrow f(a)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тоді із умови неперервності функції (7.3) випливає таке твердження.

**Твердження 7.11.** Якщо функція диференційована в точці, то вона буде неперервною в цій точці.

Зворотне твердження невірне. Наприклад функція  $f(x) = |x|$  неперервна в точці 0, але не має похідної у цій точці (рис. 7.9).

### 7.2.2. Диференційовані функції

**Означення 7.7.** Функція  $f(x)$  називається *диференційованою на множині  $X \subseteq \mathbb{R}$* , якщо вона диференційована в кожній точці множини  $X$ . Функція  $f(x)$  називається *диференційованою* (або *гладкою*), якщо вона диференційована у кожній точці області  $D(f)$ .

Зауважимо, що похідна в точці  $f'(x_0)$  це *число*, а похідна диференційованої на множині  $X$  функції  $f(x)$  це *функція  $f': x \rightarrow f'(x)$* ,  $x \in X$ , оскільки число  $f'(x)$  залежить від точки  $x$ . Таким чином, означення 7.6 дозволяє перейти від *локального* поняття похідної як числа, до *глобального* поняття похідної як функції. Наприклад, похідною функції  $y = x^2$  на множині  $\mathbb{R}$  буде функція  $y'(x) = 2x$ .

Похідну функції  $y = f(x)$  розглядають як *нову функцію від  $x$*  і позначають її таким чином:

$$y'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

При цьому говорять, що функція  $f'(x)$  *походить* від функції  $f(x)$ . Операцію знаходження похідної від  $f(x)$  називають *диференціюванням* функції  $f(x)$ .

### 7.2.3. Правила диференціювання функцій

Знаходити похідну функції безпосередньо за означенням достатньо складно. Тому на практиці функції диференціюють за допомогою низки правил і формул. Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  диференційовані на множині  $X$ , далі надаються основні правила диференціального числення:

D1. Якщо  $f(x) = c$  для всіх  $x \in X$ , то  $f'(x) = 0$  для всіх  $x \in X$  (похідна константи);

D2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ , (похідна суми (різниці) функцій);

D3.  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ , (сталий множник можна виносити за знак похідної);

D4.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ , (правило добутку Лейбніца);

D5)  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ , (похідна частки).

Доповнимо ці правила декількома теоремами.

**Теорема 7.12** (похідна оберненої функції). Нехай функція  $f: X \leftrightarrow Y$  є диференційованою бієкцією (означення 4.3 4 лекція) і  $f'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in X$ , тоді вона має обернену функцію  $g: Y \leftrightarrow X$ , похідна якої задається формулою:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \quad (7.7)$$

Тут після диференціювання по  $x$  треба у вираз  $1/f'(x)$  замість  $x$  підставити обернену функцію  $x = g(y)$ , щоб похідна залежала від  $y$ .

**Теорема 7.13** (похідна складеної функції). Нехай задані диференційовані функції  $f: X \rightarrow U$  і  $g: U \rightarrow V$ , тоді похідна складеної функції  $h(x) = g(f(x))$  задається формулою:

$$h'(x) = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx} = g'(u) \cdot f'(x). \quad (7.8)$$

Тут після диференціювання треба у вираз для похідної  $g'(u)$  підставити функцію  $u = f(x)$  (ланцюгове правило диференціювання).

**Теорема 7.14** (похідна параметрично заданої функції). Нехай функції  $x = f(t)$  і  $y = g(t)$  диференційовані на інтервалі  $(a, b)$  і  $f'(t) \neq 0$  на цьому інтервалі, тоді  $y'(x) = g'(t)/f'(t)$ .

Тут також замість  $t$  треба підставити обернену функцію  $t = f^{-1}(x)$ , якщо вона існує. В таблиці 7.1 приведені похідні основних елементарних функцій.

**Таблиця 7.1.**

<b>Основні формули диференціювання</b>	
1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , зокрема	
$(x)' = 1$ , $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .	
2. $(a^x)' = a^x \ln a$ .	2'. $(e^x)' = e^x$ .
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .	3'. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .
4. $(\sin x)' = \cos x$ .	5. $(\cos x)' = -\sin x$ .
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .	7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .	9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .	11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

Зауважимо, що в цей таблиці в кожену формулу можна замість незалежної змінної  $x$  підставляти будь-яку диференційовану функцію  $u(x)$ , але в цьому випадку згідно з формулою (7.8) треба помножити похідну на  $u'(x)$ . Наприклад, якщо  $y = \ln(u(x))$ , то із таблиці 7.1 дістаємо:

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (7.9)$$

Цей вираз називається *логарифмічною похідною*.

### 7.3. Зразки розв'язання вправ

**7.3.1.** Довести неперервність функцій: а)  $y(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ; б)  $f(x) = \sin(2x)$ .

*Розв'язання.* а) Задана функція визначена всюди, тому зафіксуємо точку  $a \in \mathbb{R}$ , надаймо аргументу приросту  $x = a + \Delta x$ , тоді отримуємо:

$$\Delta y = 3(a + \Delta x)^2 + 2(a + \Delta x) + 1 - 3a^2 - 2a - 1 = 3\Delta x(2a + \Delta x) + 2\Delta x.$$

Звідси випливає, що  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Таким чином, в силу умови (7.3) функція  $f(x)$  буде неперервною в будь-якій точці  $a \in \mathbb{R}$ .

б) Ця функція також визначена всюди. Зафіксуємо довільну точку  $a$  і надаймо аргументу приросту  $x = a + \Delta x$ , тоді за формулою для суми синусів із тригонометрії маємо:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(2(a + \Delta x)) - \sin(2a) = \sin(2a)(\cos(2\Delta x) - 1) + \cos(2a)\sin(2\Delta x) = \\ &= -2\sin(2a)\sin^2(\Delta x) + \cos(2a)\sin(2\Delta x) \end{aligned}$$

В силу формули (5.11) (5 лекція перша визначна границя) маємо  $\sin^2(\Delta x) \sim (\Delta x)^2$  і  $\sin(2\Delta x) \sim 2\Delta x$ , тому  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Таким чином, в силу умови (7.3) функція  $\sin(2x)$  буде неперервною в будь-якій точці  $a \in \mathbb{R}$ .

**7.3.2.** Дослідити функції на неперервність і з'ясувати характер їх точок розриву:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}; \quad \text{б) } f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

*Розв'язання.* У відповідності до формули (7.4), щоб дослідити функцію  $f(x)$  на неперервність у точці  $a$  треба обчислити ліву і праву границю функції в цій точці і перевірити їх на збіг зі значенням  $f(a)$ .

а) Ця функція є частка елементарних неперервних функцій і тому за теоремою 7.1 3) вона буде неперервною всюди за виключенням точок  $x_1 = -3$  і  $x_2 = 3$ , в яких вона не визначена. Точка  $x_1 = -3$  є точкою розриву другого роду, оскільки виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{x+3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{x+3} = \infty.$$

В точці  $x_2 = 3$  маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

Тому точка  $x_2 = 3$  є точкою розриву першого роду з усувним розривом, оскільки  $f(x_2 - 0) = f(x_2 + 0) = 1/6$ .

б) Задана функція є елементарною, тому вона неперервна в області її визначення, тобто на множині  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Точка  $a = 0$  є точкою розриву першого роду (зі стрибком), оскільки виконуються такі рівності:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

**7.3.3.** Визначити, чи має рівняння  $x^3 - 3x - 1 = 0$  корінь на відрізку  $[0, 2]$ .

*Розв'язання.* Оскільки функція  $f(x) = x^3 - 3x - 1$  неперервна всюди на множині дійсних чисел, то вона буде неперервною і на відрізку  $[0, 2]$  та на його кінцях вона набуває різних за знаком значень  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 1$ . Тоді за першою теоремою Больцано-Коши (теорема 13.8) існує точка  $x_0 \in (0, 2)$ , в якій  $f(x_0) = 0$ .

**7.3.4.** Використовуючи формули диференціювання, знайти похідні функцій:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccos}(x) + 1; \quad \text{б) } y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 4x; \\ \text{в) } y &= (x^2 + 5) \cdot \ln(x); \quad \text{г) } y = e^x / \operatorname{tg}(x). \end{aligned}$$

*Розв'язання.* а) За правилами D1 і D2 та із формул 9 і 10 таблиці 7.1 дістаємо:

$$y'(x) = (\operatorname{arctg}(x))' + (\operatorname{arccos}(x))' + (1)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) Запишемо  $y(x)$  у степеневому вигляді  $y(x) = 3x^{-1/3} + 2x^{1/2} - x^{-1} + 4x$ . Застосовуючи правила диференціювання D2 і D3 і формулу 1 із таблиці 7.1, знаходимо:

$$y'(x) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-4/3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} + x^{-2} + 4 = -\frac{1}{x^3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + 4.$$

в) Використовуючи правила D2-D4 і формули 1 і 3' із таблиці 7.1 дістаємо:

$$y'(x) = (x^2 + 5)' \cdot \ln(x) + (x^2 + 5) \cdot (\ln(x))' = 2x \cdot \ln(x) + \frac{x^2 + 5}{x}.$$

г) Використовуючи правило D5 частки та формули 2 і 6 із таблиці 7.1 дістаємо:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(e^x)' \cdot \operatorname{tg}(x) - e^x \cdot (\operatorname{tg}(x))'}{\operatorname{tg}(x)^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)^2} \left( e^x \cdot \operatorname{tg}(x) - \frac{e^x}{\cos(x)^2} \right) = \\ &= \frac{e^x}{\operatorname{tg}(x)} - \frac{e^x}{\sin(x)^2} = \frac{e^x(\sin(x)\cos(x) - 1)}{\sin(x)^2}. \end{aligned}$$

**7.3.5.** Застосовуючи правило диференціювання складної функції (формула 7.8) знайти похідні таких функцій а)  $y(x) = (2x + 3)^5$ ; б)  $y(x) = e^{-3x}$ ; в)  $y(x) = \cos(x)^2$ .

*Розв'язання.* а) Покладемо  $u(x) = 2x + 3$ , тоді  $y(u) = u^5$ . Використовуючи формулу 7.8 і таблицю 7.1 маємо:

$$y'(x) = 5u^4 \cdot u' = 5 \cdot (2x + 3)^4 \cdot (2x + 3)' = 5 \cdot (2x + 3)^4 \cdot 2 = 10 \cdot (2x + 3)^4.$$

б) Введемо позначення  $u(x) = -3x$ , тоді  $y(u) = e^u$ . Застосуємо формулу 7.8 і таблицю 7.1 дістаємо  $y'(x) = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3 \cdot e^{-3x}$ .

в) Покладемо  $u(x) = \cos(x)$ , тоді  $y(u) = u^2$  і як в попередньому прикладі маємо:  $y' = (u^2)' = 2 \cdot u \cdot u' = 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)' = -2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) = -\sin(2x)$ .

**7.3.6.** Знайти похідну функції, яка задана параметрично  $x = \operatorname{tg}(t)$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $-\pi/2 < t < \pi/2$ .

*Розв'язання.* За теорема 7.14 дістаємо:

$$y'(x) = \frac{(\sin(t))'}{(\operatorname{tg}(t))'} = \frac{\cos(t)}{1/\cos(t)^2} = \cos(t)^3.$$

Оскільки на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$  тангенс має обернену функцію, то  $t = \operatorname{arctg}(x)$ . Звідси отримуємо  $y'(x) = \cos(t)^3 = \cos(\operatorname{arctg}(x))^3$ .

**7.3.7.** За допомогою логарифмічної похідної знайти похідну функції  $y = x^x$ .

*Розв'язання.* Цю функцію можна диференціювати як складну функцію, якщо виразити її у такому вигляді  $y(x) = x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{\ln(x) \cdot x}$ . Можна спочатку логарифмувати її  $\ln(y) = x \cdot \ln(x)$ . Диференціюючи ліву частину за формулою (7.9), а праву частину за правилом D4 (Лейбніца), маємо  $y'/y = \ln(x) + 1$ , звідки отримуємо  $y'(x) = y \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$ .

**7.3.8.** Записати рівняння дотичної до параболи  $y = x^2 - x - 3$  у точці  $x = 2$ .

*Розв'язання.* Нехай  $y(x) = x^2 - x - 3$ , тоді  $y(2) = -1$ , тобто точка дотику до параболи має координати  $(2, -1)$ . Обчислимо похідну параболи  $f'(x) = 2x - 1$  та її значення в точці  $f'(2) = 3$ . Тоді за рівнянням  $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ , де  $a = 2$ , отримуємо рівняння дотичної  $y = 3(x - 2) - 1$ , або  $y = 3x - 7$ .

#### 7.4. Завдання для самостійної роботи студентів

7.4.1. Довести неперервність таких функцій при всіх  $x \in \mathbb{R}$  (за варіантами):

- 1)  $y(x) = x^3$ ; 2)  $y(x) = x^3 + x^2$ ; 3)  $y(x) = \ln(x)$ ; 4)  $y(x) = \cos(x)$ ; 5)  $y(x) = e^x$ .

7.4.2. Дослідити функції на неперервність і з'ясувати характер їх точок розриву (за варіантами):

$$1) \frac{x}{x-5}; \quad 2) \frac{x^2-1}{x+1}; \quad 3) \frac{\sin(x)}{2x}; \quad 4) e^{\frac{1}{x}}; \quad 5) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

7.4.3. Обчислити похідні заданих функцій (за варіантами):

$$1) y = x^3 + \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}; \quad 2) y = x^5 + 2^{-x} - \ln(3); \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2^3\sqrt{x^2};$$

$$4) y = e^{x-3}; \quad 5) y = 2 \cdot 4^x.$$

7.4.4. Визначити похідну складних функцій (за варіантами):

$$1) y = (1-2x)^3; \quad 2) y = \sqrt{1-x^2}; \quad 3) y = \sqrt{\ln(x)+1}; \quad 4) y = (x+1)^2;$$

$$5) y = \sin(2x-1).$$

7.4.5. Знайти похідні функцій, які задані параметрично (за варіантами):

$$1) x = 2\cos(t), y = 3\sin(t); \quad 2) x = t \cdot e^t, y = e^{2t}; \quad 3) x = \sin^2(t),$$

$$y = \cos(2t); \quad 4) x = e^t \cdot \cos(t), y = e^t \cdot \sin(t); \quad 5) x = \cos^3(t), y = \sin^3(t).$$

7.4.6. За допомогою логарифмічної похідної знайти похідну функцій (за варіантами):

$$1) y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 2) y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}; \quad 3) y = x^{\cos(x)};$$

$$4) y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x; \quad 5) y = x^{\ln(x)}.$$

7.4.7. Розв'язати наступні задачі (за варіантами):

- 1) Ракета після старту рухається за законом  $s(t) = 2t^2 + 3t + 1$  (в метрах). Визначити швидкість її руху через три секунди після початку руху.
- 2) Швидкість тіла визначається за формулою  $v = 2t^2 + 4t$  (в метрах в секунду). Яке прискорення матиме тіло через 3 секунди після початку руху.
- 3) Обсяг продукції, виробленої бригадою, описується функцією  $-t^3 + 9t^2 + 120t + 60$ , де  $t$  – робочий час (в годинах),  $0 \leq t \leq 8$ . Визначити продуктивність праці (обсяг продукції в одиницю часу) через сім годин після початку роботи.
- 4) Витрати підприємства на виробництво продукції (у гривнях) за час  $t$ ,  $1 \leq t \leq 7$ , виражається функцією  $V(t) = 250 + 120t - 0,2t^2$ . Знайти маргінальні витрати виробництва  $V'(t)$  через п'ять годин після початку роботи.
- 5) Визначити маргінальний прибуток  $P'(x)$  при обсязі випуску продукції п'ять одиниць, якщо функція доходу дорівнює  $D(x) = 80x - 2x^2$ , а функція витрат дорівнює  $V(x) = x^3 - 13x^2 + 111x - 21$ . Прибуток визначається за формулою  $P(x) = D(x) - V(x)$ .

## 8. Диференціали та похідні функції

Продовжимо вивчення диференціального числення і розглянемо спочатку основні (класичні) теореми о диференційованих функціях.

### 8.1. Основні теореми диференціального числення

Застосування похідних для дослідження функції базується на основних теоремах, що були відкриті математиками у 17 та 18 століттях.

**Теорема 8.1** (Ферма). Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована на інтервалі  $(a, b)$  і досягає найбільшого (або найменшого) значення у точці  $p \in (a, b)$ , тоді  $f'(p) = 0$ .

**Доведення.** Нехай  $p$  – точка максимуму, тоді  $\Delta f(p) = f(p + \Delta x) - f(p) \leq 0$  (рис. 8.1). Із формул (7.6) (лекція 7) випливає, що  $f'(p - 0) \geq 0$  і  $f'(p + 0) \leq 0$ , оскільки зліва від точки  $p$  маємо  $\Delta x < 0$ , а з права  $\Delta x > 0$ . Тоді із твердження 7.10 (7 лекція) випливає, що  $f'(p - 0) = f'(p) = f'(p + 0) = 0$ . В точці мінімуму доведення аналогічно.  $\square$

Рисунок 8.1 ілюструє геометричний зміст теореми Ферма, а саме дотична до графіку диференційованої функції  $f(x)$  в екстремальній точці буде паралельна осі абсцис.

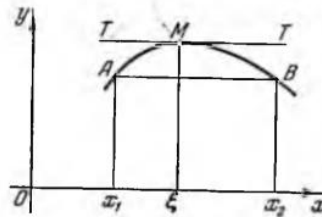


Рис. 8.1. Дотична в точки максимуму паралельна осі абсцис.

Наступні теореми називаються теоремами про *середнє значення* і відносяться до функцій, які диференційовані на відрізку  $[a, b]$ . Зауважимо, що у функції немає похідних на кінцях відрізка, оскільки немає околу, на якому вона визначена. Тому функція називається диференційованою на замкнутому відрізку  $[a, b]$ , якщо вона диференційована на відкритому інтервалі  $(a, b)$  і має односторонні похідні на його кінцях.

**Теорема 8.2** (Роль). Нехай функція  $f(x)$  диференційована на відрізку  $[a, b]$  і  $f(a) = f(b)$ , тоді існує точка  $p \in (a, b)$  така, що  $f'(p) = 0$ .

**Доведення.** За твердженням 6.11 (6 лекція) функція  $f(x)$  буде неперервною на відрізку  $[a, b]$ , тому із теорема 6.6 (шоста лекція) випливає, що функція  $f(x)$  досягає на відрізку  $[a, b]$  свого мінімуму  $m$  і максимуму  $M$ . Якщо  $m = f(a) = f(b) = M$ , то  $f(x)$  буде константою, і тому  $f'(x) \equiv 0$  для всіх  $x \in (a, b)$ . Припустимо, що  $m < f(a) = f(b)$  або  $f(a) = f(b) < M$ , тоді функція  $f(x)$  досягає мінімуму (або максимуму) во внутрішній точці  $p \in (a, b)$ . Отже згідно з теоремою Ферма маємо  $f'(p) = 0$ .  $\square$

Рисунок 8.1 може також слугувати ілюстрацією до теореми Ролля.

**Теорема 8.3** (Лагранж). Нехай функція  $f(x)$  диференційована на відрізку  $[a, b]$ , тоді знайдеться точка  $p \in (a, b)$  така, що:

$$f(b) - f(a) = f'(p) \cdot (b - a) \quad (8.1)$$

**Доведення.** Розглянемо допоміжну функцію  $g(x) = f(x) - \lambda x$ , де  $\lambda$  – коефіцієнт нахилу прямиї  $M_1M_2$ ,  $\lambda = (f(b) - f(a))/(b - a)$  (рис. 8.2). Функція  $g(x)$  задовольняє всім умовам теореми Ролля. Дійсно, вона диференційована на  $[a, b]$ , як різниця диференційованих функцій. Крім того на кінцях відрізка вона приймає рівні значення (відрізки  $M_1N_1$  і  $M_2N_2$  на рис. 8.2):

$$g(a) = f(a) - \frac{a(f(b) - f(a))}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{b(f(b) - f(a))}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Тоді із теореми Ролля випливає, що знайдеться точка  $p \in (a, b)$ , така що  $g'(p) = 0$ . Оскільки  $g'(x) = f'(x) - \lambda$ , то  $f'(p) = \lambda = (f(b) - f(a))/(b - a)$ .  $\square$

Теорема Лагранжа є одною з основних теорем у математичному аналізі. Рисунок 8.2 ілюструє геометричний зміст теореми Лагранжа, а саме дотична до графіку функції  $f(x)$  в точці  $p$  буде паралельна хорді приросту функції.

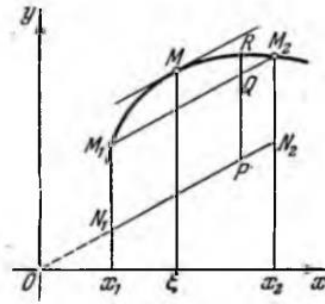


Рис. 8.2. Дотична паралельна хорді приросту функції.

Формула (8.1) називається *формулою Лагранжа* і має багато застосувань. Зауважимо, що теорема 8.2 є частковим випадком теореми Лагранжа при  $f(a) = f(b)$ , але доказ теореми Лагранжа спирається на теорему Ролля.

**Теорема 8.4** (Коші). Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  диференційовані на відрізку  $[a, b]$  і  $g'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a, b)$ , тоді існує точка  $p \in (a, b)$  для якої виконується така рівність:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} .$$

Доведення теореми Коші аналогічно теоремі Лагранжа. Зауважимо, що теорема Лагранжа є частковим випадком теореми Коші при  $g(x) = x$ , але вона була відома набагато раніше теореми Коші. Для розкриття невизначеностей типу  $0/0$  і  $\infty/\infty$  можна використовувати правило Лопітальє, яке сформулюємо у вигляді такої теореми.

**Теорема 8.5** (Лопітальє). Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  диференційовані в проколотому околі  $U(p) = O(p) \setminus \{p\}$  точки  $p$  і  $g'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in U(p)$ . Припустимо, що при  $x \rightarrow p$  обидві функції одночасно збігаються до нуля або до нескінченності, тоді, якщо відношення їх похідних має границю при  $x \rightarrow p$ , то має місце така рівність:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} . \quad (8.2)$$

Формула (8.2) називається *правилом Лопітальє*.

## 8.2. Диференціал функції

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована в точці  $p \in D(f)$ , тобто має скінченну похідну в цій точці, тоді із формули (6.5) (6 лекція) випливає, що відношення її приросту  $\Delta y = f(p + \Delta x) - f(p)$  до приросту аргументу  $\Delta x$  можна записати таким чином:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x} = f'(p) + o(\Delta x) ,$$

де  $o(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тоді приріст функції  $\Delta y$  в цій точці можна записати так:

$$\Delta y = f(p + \Delta x) - f(p) = f'(p) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \Delta x . \quad (8.3)$$

Таким чином, згідно означенню 5.7 (5 лекція) величина  $f'(p) \cdot \Delta x$  буде головною частиною малізми функції  $\Delta y$  в точці  $p$ .

**Означення 8.1.** Диференціалом функції  $f(x)$  у точці  $p$  називають функцію  $f'(p) \cdot \Delta x$ , яка є головною лінійною частиною приросту функції  $f(x)$  в точці  $p$ .

Іншими словами, будь-яка диференційована в точці  $p$  функція локально може бути наближена лінійною функцією. Із формули (8.3) випливає, що в деякому околі  $O(p)$  точки  $p$  для  $x = p + \Delta x$  виконується така наближена рівність для всіх  $x \in O(p)$ :

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p) . \quad (8.4)$$

Якщо функція  $y = f(x)$  є диференційованою на множині  $X$ , то її нескінченно малий диференціал  $dy$ , який відповідає нескінченно малому приросту аргументу  $dx$  визначають за формулою :

$$dy = f'(x)dx , \quad (8.5)$$

і вважають функцією від двох незалежних змінних  $x$  і  $dx$ . Зауважимо, що із формули (8.5) випливає одне із позначень похідної:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} .$$

Тому похідну можна розглядати як відношення двох нескінченно малих диференціалів.

Властивості диференціалу функцій аналогічні властивостям похідних. Диференціал суми, добутку і частки диференційованих функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  обчислюється за аналогами формул D3-D5 (лекція 7):

$$\text{DF1)} \quad d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x), \quad d(c \cdot f(x)) = c \cdot df(x), \quad (\text{лінійність});$$

$$\text{DF2)} \quad d(f(x) \cdot g(x)) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x), \quad (\text{правило Лейбніца});$$

$$\text{DF3)} \quad d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0 .$$

Диференціал складної функції  $z = g(f(x))$  від диференційованих функцій  $y = f(x)$  і  $z = g(y)$  обчислюється за формулою ланцюга:

$$dz = \frac{dz}{dy} dy = \frac{dg(y)}{dy} dy = g'(y) \frac{dy}{dx} dx = g'(f(x)) \frac{df(x)}{dx} dx = g'(f(x)) f'(x) dx .$$

Із цієї формули випливає рівність:

$$dz = z'(y) dy = z'(x) \cdot dx ,$$

яка показує, що формула (8.5) буде вірна і в тому випадку, коли  $x$  буде диференційованою функцією від іншої змінної. Цю властивість називають *інваріантністю форми першого диференціала*.

### 8.3. Похідні вищих порядків

Нехай функція  $y = f(x)$  є диференційованою на множині  $X$ , тоді її похідну  $y'(x)$  називають *похідною 1-го порядку* (або першою похідною). Якщо функція  $y'(x)$  є диференційованою по  $x$ , то можна обчислити похідну від похідної першого порядку:

$$(y'(x))' = y''(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} ,$$

яку називають *похідною 2-го порядку* (другою похідною) функції  $y = f(x)$ .

*Фізичний зміст другої похідної.* Нехай  $s = f(t)$  — закон руху матеріальної точки, тоді перша похідна  $v(t) = f'(t)$  визначає швидкість руху, а друга похідна є швидкістю зміни швидкості, тобто буде прискоренням  $a(t) = f''(t)$ .

**Означення 8.2.** *Похідною  $n$ -порядку* (або  $n$ -ю похідною) функції  $y = f(x)$  називають похідну від похідної  $(n - 1)$ -го порядку, яку позначають наступним чином:

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)' = \frac{d^n y(x)}{dx^n} .$$

Похідні 1-го, 2-го та 3-го порядку позначають штрихами  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ ,  $y'''(x)$ . Починаючи з похідної 4-го порядку, похідні позначають цифрами (римськими або арабськими), узятими в дужки  $y^{(4)}(x) = y^{(IV)}(x)$ . Функцію  $y = f(x)$  називають  *$n$ -разів диференційованою* на множині  $X$ , якщо вона має скінченні похідні до  $n$ -го порядку включно на цієї множині. Функцію  $f(x)$ , що має похідні будь-якого порядку в кожній точці множини  $X$ , називають *нескінченно диференційованою* на цієї множині. Наприклад, функції  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  є нескінченно диференційованими на всієї осі  $\mathbb{R}$ .

Методом математичної індукції можна одержати такі формули, де  $n$  – натуральне число:

$$\begin{aligned} 1) \quad (x^m)^{(n)} &= \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad n \leq m; & 2) \quad (e^{ax})^{(n)} &= a^n e^{ax}; \\ 3) \quad (\sin(x))^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right); & 4) \quad (\cos(x))^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right); & (8.6) \\ 5) \quad \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}; & 6) \quad \ln(x+a)^{(n)} &= \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+a)^n}. \end{aligned}$$

Якщо функції  $f(x)$  та  $g(x)$  мають похідні  $n$ -го порядку на множині  $X$ , то функції  $f(x) + g(x)$  та  $f(x) \cdot g(x)$  також мають похідні того ж порядку на  $X$  причому виконуються такі формули:

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f(x)^{(n)} + g(x)^{(n)}, \quad (8.7)$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + \dots + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + C_n^n f g^{(n)}, \quad (8.8)$$

де  $C_n^k = n!/(n-k)!k!$  – біноміальний коефіцієнт. Формула (8.8) називається також формулою *Лейбніца*. Вона подібна біному Ньютона, але замість степенів функцій тут стоять похідні відповідних порядків.

#### 8.4. Диференціали вищих порядків

Розглянемо двічі диференційовану функцію  $y = f(x)$  на множині  $X$  та її диференціал 1-го порядку  $dy(x) = y'(x) \cdot dx$ , який залежить від  $x$  і  $dx$ . *Диференціалом 2-го порядку* (другим диференціалом) функції  $y(x)$  називають диференціал від диференціалу першого порядку, тобто такий вираз  $d^2y(x) = d(dy(x)) = d(y'(x) \cdot dx)$ . За правилом Лейбніца маємо:

$$d(y'(x) \cdot dx) = d(y'(x))dx + y'(x)d(dx) = y''(x)(dx)^2 + y'(x)d^2x.$$

Степені диференціалу  $dx$  записуються як  $(dx)^2 = dx^2$ . Далі, змінна  $dx$  символізує приріст аргументу  $x$ , тому вона не залежить від  $x$  і при диференціюванні по  $x$  її вважають константою. Таким чином,  $d(dx) = d^2x = 0$  і ми приходимо до такої формули:

$$d^2y(x) = y''(x) \cdot (dx)^2 = y''(x)dx^2.$$

Зауважимо, що ця формула не має місця, якщо змінна  $x$  буде функцією, оскільки в цьому випадку вираз  $d(dx)$  може не дорівнювати нулю. Іншими словами другий диференціал (і вище) вже не мають інваріантної форми. Поняття диференціалу також узагальнюється на будь-який порядок.

**Означення 8.3.** Диференціалом  $n$ -го порядку функції  $y = f(x)$  називають диференціал від диференціала  $(n-1)$ -го порядку  $d^n y(x) = d(d^{n-1}y(x))$ .

Методом математичної індукції можна довести, що для будь-якого натурального числа  $n$  має місце така формула:

$$d^n y(x) = y^{(n)}(x) \cdot (dx)^n = y^{(n)}(x) \cdot dx^n. \quad (8.9)$$

#### 8.5. Формула Тейлора

Нехай функція  $y = f(x)$   $n$  разів диференційована в околі  $O(p)$  точки  $p$ , тоді її *поліномом* (або *многочленом*) *Тейлора степені  $n$*  у точці  $p$  називається такий поліном:

$$P_n(x) = y(p) + \frac{y'(p)}{1!}(x-p) + \dots + \frac{y^{(n)}(p)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Можна перевірити диференціюванням, що значення похідних функції  $y = f(x)$  та її полінома Тейлора степеня  $n$  збігаються у точці  $p$  до похідних  $n$ -го порядку включно:

$$f(p) = P_n(p), \quad f^{(k)}(p) = P_n^{(k)}(p), \quad 1 \leq k \leq n.$$

**Означення 8.4.** *Формулою Тейлора  $n$ -го порядку* функції  $y = f(x)$  в околі  $O(p)$  точки  $p$  називають рівність, яка виконується для всіх  $x \in O(p)$ :

$$y(x) = P_n(x) + r_n(x),$$

де  $P_n(x)$  – поліном Тейлора, а  $r_n(x)$  – *залишковий член* формули Тейлора.

Якщо із формули Тейлора вилучити залишковий член  $r_n(x)$ , то отримує *наближення Тейлора  $n$ -го порядку* для всіх  $x \in O(p)$ :

$$y(x) \approx y(p) + \frac{y'(p)}{1!}(x-p) + \dots + \frac{y^{(n)}(p)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (8.10)$$

Ця формула є одною із основних формул для наближення значень функцій. Зауважимо, що формула (8.4) є окремим випадком наближення Тейлора при  $n = 1$ . Таким чином, залишковий член формули Тейлора  $r_n(x)$  визначає похибку наближення функції  $f(x)$  її поліномом Тейлора.

## 8.6. Дослідження функцій

Одним із важливих застосувань диференціального числення є дослідження функції за допомогою похідних. *Інтервалом (проміжком) монотонності* функції  $f(x)$  називається максимальний (за включенням) інтервал  $(a, b)$ , на якому функція  $f(x)$  спадає (або зростає). Із означення похідної виливають критерії сталості, спадання і зростання функції.

**Твердження 8.6.** Якщо функція  $y = f(x)$  диференційована на інтервалі  $(a, b)$ , то мають місце такі твердження:

- (1) Функція є сталою  $y(x) = c$  тоді і тільки тоді, коли  $y'(x) = 0$  для усіх  $x \in (a, b)$ ;
- (2) Функція  $y(x)$  буде незростаючою тоді і тільки тоді, коли  $y'(x) \leq 0$  для усіх  $x \in (a, b)$ ;
- (3) Функція  $y(x)$  буде неспадною тоді і тільки тоді, коли  $y'(x) \geq 0$  для усіх  $x \in (a, b)$ ;

Для строгої монотонності функції необхідні сильніші умови. Нагадаємо, що функція  $y = f(x)$  називається *зростаючою (спадною)* на інтервалі  $(a, b)$  якщо для всіх  $p, q \in (a, b)$  із нерівності  $p < q$  випливає умова  $y(p) < y(q)$  ( $y(p) > y(q)$ ).

**Теорема 8.8.** Якщо  $y'(x) > 0$  ( $y'(x) < 0$ ) для усіх  $x \in (a, b)$ , то функція  $y = f(x)$  буде зростати (спадати) на інтервалі  $(a, b)$ .

**Доведення.** Нехай  $p, q \in (a, b)$ , де  $p < q$ , тоді функція  $y = f(x)$  буде диференційованою на відрізку  $[p, q]$  і тому до неї на цьому відрізку можна застосувати теорему 8.3 (Лагранжа). Згідно цієї теореми існує точка  $c \in (p, q)$  для якої виконується рівність  $y(q) - y(p) = y'(c) \cdot (q - p)$ . Отже, якщо  $y'(c) > 0$ , то  $y(q) > y(p)$ , оскільки  $q > p$ . Аналогічно, якщо  $y'(c) < 0$ , то  $y(p) > y(q)$ . Це вірно для усіх точок  $p, q \in (a, b)$ , де  $p < q$ , тому теорему доведено.  $\square$

### 8.6.1. Локальні екстремуми функції

Точка  $p \in D(f)$  називається точкою *локального максимуму (мінімуму)* функції  $y = f(x)$ , якщо існує виколотий окіл  $U(p) = O(p) \setminus \{x_0\}$  точки  $p$ , що виконується нерівність:

$$y(x) < y(p) \quad (y(x) > y(p)), \quad \text{для всіх } x \in U(p). \quad (8.11)$$

Точку локального максимуму (мінімуму) називають *точкою локального екстремуму функції*, а значення функції в цей точці – *локальним екстремумом* функції. Значення функції в точці локального екстремуму позначають як  $f_{\max}$  (або  $f_{\min}$ ). На рис. 8.3 показані точки локального максимуму та мінімуму. Із цього рисунку видно, що саме *точки локального екстремуму відділяють інтервали спадання і зростання функції*.

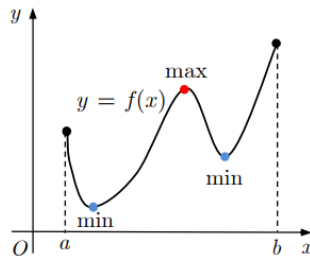


Рис. 8.3. Точки локального екстремуму.

Локальність екстремуму означає, що нерівність (8.11) виконується лише в деякому околі точки  $p$ . Функція може мати декілька локальних екстремумів, причому локальний максимум може бути меншим, ніж локальний мінімум. Розглянемо необхідні і достатні умови існування локального екстремуму, які можна застосувати на практиці.

**Теорема 8.8** (Необхідна умова локального екстремуму). Якщо точка  $p$  є точкою локального екстремуму диференційованої функції  $y = f(x)$ , то  $y'(p) = 0$ .

**Доведення.** Із умови (8.11) слідує, що існує окіл  $(p - \delta, p + \delta)$  точки  $p$ , в якому  $y(p)$  буде найбільшим (найменшим) значенням функції. Тоді із теореми 8.1 (Ферма) випливає, що  $y'(p) = 0$ . Теорему доведено.  $\square$

Точка  $p$  називається *стаціонарною точкою* для диференційованої функції  $y = f(x)$ , якщо  $y'(p) = 0$ . Таким чином, із теореми 8.8 слідує, що кожна точка локального

екстремуму буде стаціонарною, але не кожна стаціонарна точка буде точкою локального екстремуму. Прикладом тут може слугувати кубічна парабола  $y = x^3$ , у якої точка 0 стаціонарна, однак не є точкою локального екстремуму, оскільки вона відокремлює один проміжок зростання від іншого. Такі точки називаються *точками перегину*. Щоб відрізнити точки локального екстремуму від точок перегину (підозрілих на екстремум) існують достатні умови локального екстремуму. Нагадаємо, що лівий і правий  $\delta$ -околиці точки  $p$  були визначені у лекції 6  $O_\delta^-(p) = (p - \delta, p)$ ,  $O_\delta^+(p) = (p, p + \delta)$  (формула (6.7)).

**Теорема 8.9** (Перша достатня умова локального екстремуму). Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована в околиці  $O_\delta(p) = \{x : p - \delta < x < p + \delta\}$  стаціонарної точки  $p$  тоді:

- (E1) Якщо  $y'(x) < 0$  при всіх  $x \in O_\delta^-(p)$  і  $y'(x) > 0$  при всіх  $x \in O_\delta^+(p)$ , то точка  $p$  буде локальним мінімумом;
- (E2) Якщо  $y'(x) > 0$  при  $x \in O_\delta^-(p)$ , і  $y'(x) < 0$  при  $x \in O_\delta^+(p)$ , то точка  $p$  буде локальним максимумом;
- (E3) Якщо похідна не змінює знаку в околиці точки  $p$ , то функція  $y = f(x)$  не має локального екстремуму в цій точці.

**Доведення.** Нехай  $y'(x) < 0$  при всіх  $x \in O_\delta^-(p)$ , тоді розглянемо точку  $q \in O_\delta^-(p)$ . Застосуємо терему 8.3 (Лагранжа) до відрізка  $[q, p]$ , тоді із цієї теореми випливає, що існує точка  $c \in (q, p)$  така, що  $y(p) - y(q) = y'(c) \cdot (p - q)$ . Звідси та із умови  $y'(c) < 0$  заключаємо, що  $y(q) > y(p)$  для всіх  $q \in O_\delta^-(p)$ . Нехай тепер  $y'(x) > 0$  при всіх  $x \in O_\delta^+(p)$ , тоді розглянемо точку  $q \in O_\delta^+(p)$ . Застосуємо терему 8.3 (Лагранжа) до відрізка  $[p, q]$ , тоді із цієї теореми випливає, що існує точка  $c \in (p, q)$  така, що  $y(q) - y(p) = y'(c) \cdot (q - p)$ . Звідси та із умови  $y'(c) > 0$  заключаємо, що  $y(q) > y(p)$  для всіх  $q \in O_\delta^+(p)$ . Отже із умови  $y'(x) < 0$  при всіх  $x \in O_\delta^-(p)$  і  $y'(x) > 0$  при всіх  $x \in O_\delta^+(p)$  слідує, що  $y(x) > y(p)$  для всіх  $x \in O_\delta^-(p) \cup O_\delta^+(p)$ , тобто точка  $p$  буде точкою локального мінімуму. Таким чином, твердження E1 доведено. Аналогічно доводиться твердження E2. Якщо похідна  $f'(x)$  зберігає знак в околиці точки  $p$ , то із теореми 8.7 слідує, що функція  $f(x)$  буде монотонною в околиці точки  $p$ , тому вона не буде точкою локального екстремуму. Теорему доведено.  $\square$

Зауважимо, що теорема 8.9 вірна не тільки для стаціонарних точок, но і для локальних екстремумів, які виникають в точках де похідна нескінченна або її не існує. Такі точки називаються *критичними* і вони показані на рис. 8.4 разом з точками перегину і стаціонарними точками локального екстремуму.

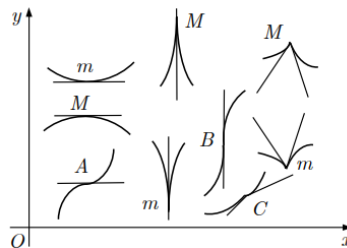


Рис. 8.4. Критичні точки локального екстремуму і точки перегину.

Якщо функція гладка і має другу похідну, то до для неї існує ще одна достатня умова локального екстремуму, яка впливає із попередньої теореми.

**Теорема 8.10** (Друга достатня умова локального екстремуму). Нехай в стаціонарній точці  $p$  функція  $y = f(x)$  має другу похідну, тоді:

- (E'1) Якщо  $y''(p) > 0$ , то функція  $y = f(x)$  має в точці  $p$  локальний мінімум;
- (E'2) Якщо  $y''(p) < 0$ , то функція  $y = f(x)$  має в точці  $p$  локальний максимум.

Якщо  $y''(p) = 0$ , то ситуація не визначена і треба проводити додаткове дослідження.

### 8.6.2. Глобальні екстремуми функції

**Означення 8.5.** Точка  $p$  називається точкою *глобального максимуму* (мінімуму) функції  $f(x)$  на замкнутому відрізку  $[a, b]$ , якщо виконується нерівність  $f(x) \leq f(p)$  ( $f(p) \leq f(x)$ ) для всіх  $x \in [a, b]$ .

Глобальний екстремум це найбільше (або найменше) значення функції на відрізку  $[a, b]$ . За другою теоремою Вейєрштрасса (теорема 7.6 лекція 7) неперервна функція  $f(x)$  на замкнутому відрізку  $[a, b]$  досягає свого максимуму і мінімуму і можливо не один раз. Глобальний екстремум може досягатися у внутрішній точці  $p \in (a, b)$ , або на межі відрізка в точці  $a$  або  $b$  (рис. 8.3). Якщо глобальний екстремум досягається у внутрішній точці  $p \in (a, b)$ , то він буде і локальним екстремумом, тому з теореми 8.8 випливає, що ця точка буде стаціонарною. Наприклад, функція  $y = x^2$  на відрізку  $[-2, 1]$  набуває свого найменшого значення в стаціонарній точці  $x = 0$ , а свого найбільшого значення на лівому кінці відрізка у точці  $x = -2$ .

Таким чином, процедура пошуку глобальних екстремумів функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  складається з наступних кроків:

- 1) Знайти всі стаціонарні точки  $S = \{x : f'(x) = 0\}$  функції  $f(x)$  на інтервалі  $(a, b)$ ;
- 2) Із стаціонарних точок можна видалити точки перегінну, де похідна не змінює знак. Тоді отримуємо множину точок  $C$  підозрілих на глобальний екстремум;
- 3) Обчислити значення функції  $f(x)$  в точках із множини  $C$  і на кінцях відрізка  $a$  і  $b$ ;
- 4) Найбільше з одержаних значень буде глобальним максимумом на відрізку  $[a, b]$ , а найменше – глобальним мінімумом на цьому відрізку.

## 8.7. Зразки розв'язання вправ

**8.7.1.** Визначити диференціали заданих функцій:

$$\text{а) } y(x) = e^{2-x^2}; \quad \text{б) } y(x) = (2x^3 + 3x)^4.$$

*Розв'язання.* Із формули (8.5), лінійності диференціалу DF1 і ланцюгового правила диференціювання маємо:

$$\text{а) } dy(x) = (e^{2-x^2})' dx = e^{2-x^2} \cdot (-2x) dx = -2xe^{2-x^2} dx.$$

$$\text{б) } dy(x) = ((2x^3 + 3x)^4)' dx = 4(2x^3 + 3x)^3 (2x^3 + 3x)' dx = 4(2x^3 + 3x)^3 (6x^2 + 3) dx.$$

**8.7.2.** Нехай  $y(x) = (x + 1)^2(x - 2)$ , наблизити значення функції  $y(1,98)$  за допомогою диференціала.

*Розв'язання.* Покладемо  $p = 2$  і  $x = 1,98$ . У точці  $p = 2$  значення функції дорівнює  $y(2) = 0$ . Знайдемо похідну заданої функції, тоді маємо:

$$y'(x) = 2(x + 1)(x - 2) + (x + 1)^2.$$

Звідси  $y'(2) = 9$ . За формулою (8.4) дістаємо наближене значення функції:

$$y(1,98) \approx y(2) + y'(2) \cdot (1,98 - 2) = 9 \cdot (-0,02) = -0,18.$$

**8.7.3.** Знайти похідну другого порядку для наступних функцій:

$$\text{а) } y = x^4 - 3x^2 + 1; \quad \text{б) } y = e^{-x}; \quad \text{в) } y = \sqrt{x^2 - 4}.$$

*Розв'язання.* Визначимо послідовно першу, а потім другу похідну:

$$\text{а) } y' = 4x^3 - 6x, \quad y'' = 12x^2 - 6; \quad \text{б) } y' = -e^{-x}, \quad y'' = e^{-x};$$

в) Позначимо  $u(x) = x^2 - 4$ , тоді для першої похідної маємо:

$$\text{в) } y' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}} (x^2 - 4)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Для другої похідної з тем же означенням маємо:

$$y'' = \left( \frac{x}{\sqrt{u}} \right)' = \frac{\sqrt{u} - x(\sqrt{u})'}{u} = \frac{\sqrt{u} - x^2/\sqrt{u}}{u} = \frac{u - x^2}{u\sqrt{u}} = -\frac{4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}.$$

**8.7.4.** Визначити похідну  $n$ -го порядку від функції  $y = e^{ax}$ .

*Розв'язання.* Послідовно знаходимо  $y' = ae^{ax}$ ,  $y'' = a^2e^{ax}$ ,  $y''' = a^3e^{ax}$ . Тоді за методом математичної індукції отримуємо  $y^{(n)} = a^n e^{ax}$ .

**8.7.5.** Визначити третій диференціал  $d^3y(x)$  для функції  $y(x) = x \cdot \ln(x)$ .

*Розв'язання.* Знаходимо похідні до третього порядку включно:

$$y'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1, \quad y''(x) = \frac{1}{x}, \quad y'''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

За формулою (8.9) визначаємо диференціал третього порядку:

$$d^3y(x) = -\frac{dx^3}{x^2}.$$

**8.7.6.** Знайти наближення Тейлора третього порядку для функції  $y(x) = (x+1)^2(x-2)$  в точці  $x = 1,98$ .

*Розв'язання.* Покладемо  $p = 2$  і  $x = 1,98$ . Із вправи 8.8.2 ми вже знаємо, що  $y(2) = 0$  і  $y'(x) = 2(x+1)(x-2) + (x+1)^2$ . Обчислимо другу і третю похідні:

$$y''(x) = 2(x-2) + 2(x+1) + 2(x+1) = 2x - 4 + 4x + 4 = 6x.$$

Тому  $y'''(x) = 6$ . Із формули (8.10) маємо наближення Тейлора при  $n = 3$  і  $p = 2$ :

$$y(x) \approx y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{y'''(2)}{6}(x-2)^3.$$

Підставимо в цю формулу  $x = 1,98$ , тоді отримуємо:

$$y(1,98) \approx -0,18 + \frac{12}{2} \cdot 0,02^2 - \frac{6}{6} \cdot 0,02^3 = -0,18 + 0,0024 - 0,000008 = -0,177608.$$

Програма Excel надає повний збіг цього числа зі значенням  $y(1,98)$ .

**8.7.7.** Дослідити функції на локальні екстремуми:

а)  $y(x) = x(x-1)^2$ ; б)  $y(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ; в)  $y(x) = x \cdot e^x$ ; г)  $y(x) = |x+2|$ .

*Розв'язання.* а) Спочатку знаходимо похідну функції  $y(x)$ :

$$y'(x) = (x-1)^2 + x \cdot 2(x-1) = (x-1)(3x-1).$$

Потім знаходимо її стаціонарні точки  $p = 1/3$  і  $q = 1$ , де похідна дорівнює нулю. Оскільки  $y'(x)$  визначена і неперервна всюди, то точками підозрілими на екстремум будуть тільки стаціонарні точки. Одержані стаціонарні точки поділяють область визначення функції на три інтервали:  $(-\infty, 1/3)$ ,  $(1/3, 1)$  і  $(1, \infty)$ . В силу неперервності похідної  $y'(x)$ , вона зберігає знак в цих інтервалах, тому її достатньо обчислити в будь-якій точці кожного інтервалу. Маємо  $y'(0) = 1$ ,  $y'(2/3) = -1/3$ , і  $y'(2) = 5$ . Таким чином, в точці  $p = 1/3$  похідна  $f'(x)$  змінює знак з плюса на мінус, тому за теоремою 8.9 точка  $p$  буде точкою локального максимуму. В точці  $q = 1$  похідна  $y'(x)$  змінює знак з мінуса на плюс, тому за теоремою 8.9 точка  $q$  буде точкою локального мінімуму.

б) Запишемо функцію  $y(x)$  у степеневому вигляді  $y(x) = x^{2/3}$  і обчислимо її похідну:

$$y'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Похідна  $y'(x)$  не дорівнює нулю при жодному значенні змінної  $x$ , тому функція  $y(x)$  не має стаціонарних точок. Проте в точці  $p = 0$  похідна буде нескінченною, отже точка  $p$  буде критичною і тому підозрілою на екстремум. Оскільки  $y'(x) < 0$  при  $x < 0$  і  $y'(x) > 0$  при  $x > 0$ , то згідно теореми 8.9 у точці  $p = 0$  функція  $y(x)$  має локальний мінімум  $y(0) = 0$ , якій в цьому випадку буде і глобальним, оскільки  $y(x) \geq 0$  для усіх  $x$ .

в) Обчислимо похідну функції  $y'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$ , отже точка  $p = -1$  буде єдиною стаціонарною точкою функції  $y(x)$  і єдиною підозрілою на екстремум, оскільки похідна  $y'(x)$  всюди неперервна. Знаходимо другу похідну:

$$y''(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x.$$

Оскільки  $y''(-1) = e^{-1} > 0$ , то згідно з теоремою 8.10 точка  $p = -1$  є точкою локального мінімуму і  $y(-1) = -e^{-1}$ .

г) Задана функція не є диференційованою в точці  $p = -2$ , але вона має в цей точці однобічні похідні  $f'(-2-0) = -1$  і  $f'(-2+0) = 1$  різних знаків. Тому згідно з теоремою 8.9 точка  $p = -2$  є точкою локального мінімуму  $f(-2) = 0$ , якій в цьому випадку буде і глобальним мінімумом, оскільки  $f(x) \geq 0$  для усіх  $x$ .

**8.7.8.** Знайти найбільше і найменше значення функції (глобальні екстремуми)  $f(x) = 2x^2 - 3x$  на відрізку  $[-1, 2]$ .

*Розв'язання.* Згідно з процедурою пошуку глобального екстремуму функції спочатку знаходимо стаціонарні точки. Дістаємо похідну  $f'(x) = 4x - 3$ , тому точка  $p = 3/4$  буде єдиною стаціонарною функції  $f(x)$  на цьому відрізку. Обчислюємо значення функції в

точці  $p$  і на кінцях відрізка  $[-1, 2]$ . Маємо  $f(-1) = 5$ ,  $f(3/4) = -9/8$ ,  $f(2) = 2$ , звідки заключаємо, що найбільше значення функції на цьому відрізку дорівнює  $f(-1) = 5$ , а найменше  $f(3/4) = -9/8$ .

### 8.8. Завдання для самостійної роботи студентів

**8.8.1.** Визначити диференціал заданих функцій (за варіантами):

$$1) (5x + 3)^2; \quad 2) \frac{x}{1 - x^2}; \quad 3) \arccos(x^3); \quad 4) x(\sin(x) - \cos(x));$$

$$5) x \cdot \arctg(x).$$

**8.8.2.** За допомогою першого диференціала обчислити наближені значення функцій (за варіантами):

$$1) \sqrt[4]{16,02}; \quad 2) \cos(60^\circ 1'); \quad 3) \arctg(0,98); \quad 4) \ln(1,02); \quad 5) \operatorname{arcctg}(1,02).$$

**8.8.3.** Для заданої функції знайти похідну другого порядку (за варіантами):

$$1) y = \sin(2x); \quad 2) y = \frac{x}{x^2 - 1}; \quad 3) y = \cos^2(x); \quad 4) y = \operatorname{arcctg}(x); \quad 5) y = \sqrt[3]{x}.$$

**8.8.4.** Для заданої функції знайти похідну третього порядку (за варіантами):

$$1) f(x) = (x^2 + x + 1)e^{3x}; \quad 2) y = (5x - 8)2^x; \quad 3) y = \ln(x - 2)/(x - 2);$$

$$4) y = e^{-x}\sin(x); \quad 5) y = (5x - 1) \cdot \ln(x)^2.$$

**8.8.5.** Знайти наближення Тейлора третього порядку для заданих функцій в околі заданих точок і за його допомогою знайти наближені значення вказані у вправі 8.8.2 відповідного варіанту (за варіантами):

$$1) \sqrt[4]{x}, p = 16; \quad 2) \cos(x), p = \pi/3; \quad 3) \arctg(x), p = 1;$$

$$4) \ln(x), p = 1; \quad 5) \operatorname{arcctg}(x), p = 1.$$

**8.8.6.** Визначити локальні екстремуми заданих функцій (за варіантами):

$$1) f(x) = x + \frac{4}{x}; \quad 2) f(x) = x^2 \cdot \ln(x); \quad 3) f(x) = x^2 \cdot e^{-x};$$

$$4) f(x) = 2 - x^2; \quad 5) f(x) = x^2 + 4x + 1.$$

## 9. Інтеграли

### 9.1. Визначений інтеграл

Нам від природи дано інтуїтивне уявлення про площу фігури. Проте формально визначити поняття площі непросто. Для цього ми введемо поняття визначеного інтегралу, який дозволяє визначити та обчислити площу геометричної фігури. Розглянемо криволінійну трапецію, яка зображена на рис. 9.1.

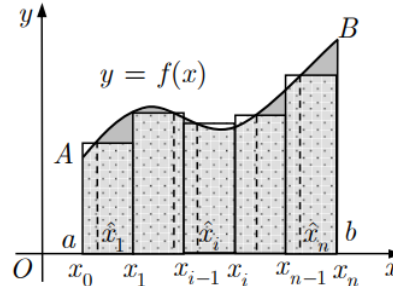


Рис. 9.1. Розбиття криволінійної трапеції.

Нехай функція  $f(x)$  визначена і обмежена на скінченному відрізку  $[a, b]$ , тоді розіб'ємо цей відрізок на  $n$  довільних частин за допомогою точок:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Позначимо це розбиття (розподіл точок) як  $P$  і нехай  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , буде довжиною відрізків  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , в цьому розбитті. Далі позначимо як  $d(P)$  найбільшу довжину відрізка  $[x_{i-1}, x_i]$  в розподілі  $d(P) = \max\{\Delta x_i; 1 \leq i \leq n\}$ . Проведемо вертикальні прямі  $x = x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , і поділімо трапецію на  $n$  менших трапецій. Виберемо на кожному відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$  довільну точку  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , і обчислюємо значення функції  $f(\xi_i)$  в цей точці. Інтегральною сумою функції  $f(x)$  на розбитті  $P$  називається така сума:

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (9.1)$$

Далі для розбиття  $P$  позначимо як  $m_i$  і  $M_i$  відповідно нижню і верхню грані обмеженої функції  $f(x)$  на відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , і складемо *нижню* і *верхню інтегральні суми* функції  $f(x)$  на розбитті  $P$ :

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i, \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i. \quad (9.2)$$

Таким чином, кожному розбиттю  $P$  відповідають певні суми  $s(f, P)$  і  $S(f, P)$ , а інтегральна сума  $I(f, P)$  залежить ще від вибору точок  $\xi_i$ . Але при будь-якому виборі проміжних точок із нерівностей  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$  і формул (9.1) і (9.2) випливають такі умови:

$$s(f, P) \leq I(f, P) \leq S(f, P). \quad (9.3)$$

Будемо говорити, що розподіл  $P$  вкладений в розподіл  $Q$ , або  $Q$  є продовженням розподілу  $P$ , якщо  $P \subset Q$ , тобто множина точок  $P$  є власною підмножиною множини  $Q$ . Це означає, що кожна точка із  $P$  належить  $Q$ , але в  $Q$  є точки, які не належать  $P$ . Якщо  $P \subset Q$ , то можна показати, що виконуються нерівності:

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P). \quad (9.4)$$

Розглянемо тепер нескінчену послідовність вкладених розподілів відрізка  $[a, b]$ :

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \dots. \quad (9.5)$$

Із умови (9.4) випливає, що нижні суми в послідовності (9.5) утворюють неспадну послідовність  $s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \leq \dots$ , яка обмежена зверху, наприклад, сумою  $S(f, P_1)$ . Тоді за теоремою 5.6 (Больцано-Вейєрштрасса 5 лекція) вона збігається до своєї верхньої грані, яка називається *нижнім інтегралом* функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  і позначається як  $\underline{I}$ . Аналогічно, верхні суми утворюють незростаючу послідовність  $S(f, P_1) \geq S(f, P_2) \geq \dots$ , яка обмежена знизу, наприклад, сумою  $s(f, P_1)$ . Тоді із теореми 5.6 випливає, що вона

збігається до своєї нижньої грані, яка називається *верхнім інтегралом* функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  і позначається як  $\bar{I}$ . Таким чином, будь-яка обмежена функція  $f(x)$  має на скінченному відрізку  $[a, b]$  нижній і верхній інтеграл, які задовольняють умову  $\underline{I} \leq \bar{I}$ . Послідовність розподілів (9.5) назвемо *правильною*, якщо  $d(P_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Означення 9.1.** Якщо для деякої правильної послідовності (9.5) нижній і верхній інтеграл функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  співпадають, то число  $I = \underline{I} = \bar{I}$  називається *визначеним інтегралом* (Рімана) функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  і позначається як:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) . \quad (9.6)$$

Якщо функція має визначений інтеграл на  $[a, b]$ , то її називають *інтегрованою на цьому відрізку*. Відрізок  $[a, b]$  називається *відрізком інтегрування*, а числа  $a$  та  $b$  називають *нижньою та верхньою межами інтегрування* і в подальшому будемо вважати, що  $a < b$ . Функція  $f(x)$  називається *підінтегральною функцією*; а  $x$  — *змінною інтегрування*. Із означення 9.1 випливають такі властивості визначеного інтегралу:

ВІ1. Інтеграл за відрізком  $[a, a]$  для будь-якої функції дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 .$$

ВІ2. (Адитивність). Нехай  $c \in (a, b)$ , тоді має місце така формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

ВІ3. (Нормування). Для будь-якої константи  $k$  виконується рівність:

$$\int_a^b k dx = k(b - a) .$$

Зокрема, рівність (9.9) виконується для  $k = 0$  і для  $k = 1$ .

ВІ4. (Монотонність). Якщо,  $f(x) \leq g(x)$  для всіх  $x \in [a, b]$ , то маємо умову:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

ВІ5. (Мінімум і максимум). Якщо  $m \leq f(x) \leq M$  для всіх  $x \in [a, b]$ , то із властивостей нормування і монотонності маємо нерівності:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) .$$

Виникає питання, які функції інтегровані за Ріманом. На це питання частково відповідає така теорема.

**Теорема 9.1** (Дарбу). Неперервна на замкненому відрізку  $[a, b]$  функція  $f(x)$  інтегрована за Ріманом.

Ключову роль в доказі теореми Дарбу грає таке поняття.

**Означення 9.2.** Функція  $f(x)$  називається *рівномірно неперервною* на відрізку  $[a, b]$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x_1, x_2 \in [a, b]$  виконується така умова  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , якщо  $|x_1 - x_2| < \delta$ .

**Теорема 9.2** (Гейне-Кантора). Неперервна на замкненому відрізку  $[a, b]$  функція  $f(x)$  буде рівномірно неперервна на ньому.

Із теореми Гейне-Кантора випливає теорема Дарбу. Дійсно, нехай задано як завгодно мале число  $\varepsilon > 0$ , тоді розглянемо деяку правильну послідовність розподілів (9.5). Оскільки  $d(P_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то вибрав достатньо велике число  $n$  можна зробити проміжок  $d(P_n)$

менше ніж будь-яке число  $\delta > 0$ . Звідси та із рівномірної неперервності функції  $f(x)$  випливає, що  $M_i - m_i < \varepsilon$  для всіх  $1 \leq i \leq n$ . Тоді  $S(f, P_n) - s(f, P_n) < \varepsilon(b - a)$  і тому  $(S(f, P_n) - s(f, P_n)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким чином, згідно означенню 9.1 неперервна функція  $f(x)$  буде інтегрованою на скінченному відрізку  $[a, b]$ .

Із теореми 9.1 слідує, що кускове неперервна функція, тобто функція яка має скінченне число розривів на відрізку буде інтегрованою за Ріманом. Однак, Діріхле визначив функцію  $D(x)$ , яка дорівнює 1 в раціональних точках і нулю в інших точках і яка розривна в кожній точці.

**Твердження 9.3.** Функція Діріхле  $D(x)$  не інтегрована на будь-якому відрізку  $[a, b]$ .

**Доведення.** Дійсно, оскільки на будь-якому малому відрізку є як раціональні, так і ірраціональні числа, то  $s(f, P_n) = 0$  і  $S(f, P_n) = b - a$  для всіх  $n$ . Отже  $0 = \underline{I} < \bar{I} = b - a$  і тому функція  $f(x)$  не буде інтегрованою за Ріманом на будь-якому відрізку  $[a, b]$ .  $\square$

## 9.2. Невизначений інтеграл і первісна функція

У диференціальному численні за заданою функцією знаходять її похідну, а в інтегральному численні, як буде показано, приходиться вирішувати *обернену задачу, а саме знаходять функцію, знаючи її похідну*.

**Означення 9.3.** Функція  $F(x)$  називається *первісною* для функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ , якщо  $F'(x) = f(x)$  для усіх  $x \in [a, b]$ .

Тут передбачається, що на кінцях відрізку функція  $F(x)$  має односторонні похідні і виконуються рівності  $F'(a + 0) = f(a)$  і  $F'(b - 0) = f(b)$ . Наприклад, функція  $F(x) = x^2$  буде первісною для  $f(x) = 2x$  на всій множині  $\mathbb{R}$  і тому на будь-якому відрізку.

**Теорема 9.4.** Нехай  $F(x)$  – первісна функція для функції  $f(x)$  на  $[a, b]$ , тоді множина всіх первісних функцій для  $f(x)$  на цьому відрізку дорівнює  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$ .

**Доведення.** Для будь-якого  $c \in \mathbb{R}$  маємо  $(F(x) + c)' = f(x) + 0 = f(x)$ , тому функція  $F(x) + c$  буде первісною для  $f(x)$ . Навпаки, нехай  $G(x)$  ще одна первісна для  $f(x)$  на  $[a, b]$ , тоді для функції  $H(x) = F(x) - G(x)$  маємо  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$  для всіх  $x \in [a, b]$ . Зафіксуємо деяке  $x \in (a, b)$  і застосуємо теорему 8.3 (Лагранжа, лекція 8) до функції  $H(x)$  на відрізку  $[a, x]$ , тоді заключаємо, що існує точка  $p \in (a, x)$  така, що виконується рівність  $H(x) = H(a) + H'(p)(x - a) = H(a)$ . Таким чином,  $H(x) = H(a)$  для всіх  $x \in [a, b]$  і тому функція  $H(x)$  буде константою.  $\square$

Ця теорема показує, що первісна функція визначена з *точністю до константи*.

**Означення 9.4.** Множину всіх первісних функцій  $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$ , називають *невизначеним інтегралом* від функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  і позначають таким чином:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Тут диференціал  $f(x)dx$  називають *підінтегральним виразом*,  $f(x)$  — *підінтегральною функцією*,  $x$  — *змінною інтегрування*. Більш коротко цю рівність записують таким чином:

$$\int f(x)dx = F(x) + c ,$$

де  $c$  – довільна стала.

Із означення 9.4 випливає, що правильність інтегрування завжди можна (і треба) перевірити диференціюванням, тобто *похідна від результату інтегрування повинна дорівнювати підінтегральній функції*.

Далі приводяться основні властивості невизначеного інтеграла, які впливають із правил диференціювання і які ми назвемо *правилами інтегрування*:

НІІ. Операція інтегрування є оберненою для диференціювання, тому знаки диференціала та інтеграла скорочуються, коли вони розташовані поруч друг з другом:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx , \quad \int dF(x) = F(x) + c .$$

де  $c$  – довільна стала. Зокрема, відмітимо невизначені інтеграли від нуля і одиниці:

$$\int 0 dx = c, \quad \int dx = \int 1 dx = x + c.$$

НІ2. (Лінійність) Невизначений інтеграл є лінійною операцією:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \quad (9.7)$$

де  $k$  – константа. Формула (9.7) узагальнюється на будь-яке скінченне число функцій.

НІ3. (Інваріантність диференціала складної функції) Якщо  $dF(x) = f(x)dx$ , то для будь-якої диференційованої функції  $u = g(x)$  має місце така формула:

$$\int f(u) du = \int dF(u) = F(u) + c.$$

Звернемо увагу, що під знаком інтегралу пишуть диференціал первісної функції, а не її похідну. Такий спосіб записи склався історично і має певні переваги.

### 9.3. Обчислення визначених інтегралів

На перший погляд між визначеним і невизначеним інтегралом немає нічого спільного, але це тільки на перший погляд. Щоб обчислити невизначений інтеграл від функції  $f(x)$  достатньо знайти її первісну функцію  $F(x)$ . Виявляється, що для обчислення визначеного інтеграла має місце *аналогічна ситуація*. Але щоб дійти до цього математика пройшла довгий шлях. Зауважимо, що обчислювати визначений інтеграл за формулою (9.6) це тяжка справа, яку, до речі, віртуозно здійснював великий давньогрецький математик Архімед (287 – 212 до н. е.), і тому його можна вважати піонером інтегрального числення. Через 18 століть з'явився більш зручний метод, який був названий на честь засновників математичного аналізу Лейбніца і Ньютона.

Нехай  $f(x)$  - неперервна функція на відрізку  $[a, b]$ , тоді за теоремою 9.1 вона буде інтегрована на будь-якій його частині  $[a, x]$ , де  $x \in [a, b]$ . Тому ми можемо розглядати визначений інтеграл як *числову функцію від змінної верхньої межі*:

$$S_f(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (9.8)$$

Інтеграл (9.8) дорівнює площі криволінійною трапеції на відрізку  $[a, x]$  (рис. 9.2).

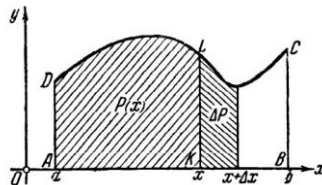


Рис. 9.2. Інтеграл зі змінною верхньою межею.

**Теорема 9.5** (Барроу). Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , тоді функція  $S_f(x)$  буде її первісною функцією на цьому відрізку.

**Доведення.** Розглянемо приріст функції  $S_f(x)$  в довільній точці  $p \in [a, b]$  при прирості аргументу  $\Delta x$ , тоді з адитивності визначеного інтеграла ВІ2 отримуємо (рис. 9.2):

$$\Delta S_f(p) = S_f(p + \Delta x) - S_f(p) = \int_a^{p+\Delta x} f(t) dt - \int_a^p f(t) dt = \int_p^{p+\Delta x} f(t) dt. \quad (9.9)$$

Нехай  $\varepsilon > 0$  – як завгодно мале число, тоді з неперервності функції  $f(x)$  в точці  $p$  при достатньо малому зміщенні  $\Delta x$  виконуються такі нерівності:

$$f(p) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(p) + \varepsilon, \quad \text{для всіх } p \leq x \leq p + \Delta x.$$

Звідси та з властивості ВІ5 отримуємо такі умови:

$$(f(p) - \varepsilon) \cdot \Delta x \leq \int_p^{p+\Delta x} f(t) dt \leq (f(p) + \varepsilon) \cdot \Delta x.$$

Звідси та з формули (9.9) дістаємо:

$$f(p) - \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta x} \int_p^{p+\Delta x} f(t)dt = \frac{\Delta S_f(p)}{\Delta x} \leq f(p) + \varepsilon.$$

Таким чином, за означенням похідної маємо  $S'_f(p) = f(p)$  і теорему доведено.  $\square$

Теорема Барроу пов'язує між собою визначені і невизначені інтеграли і надає основний метод обчислення визначених інтегралів.

**Теорема 9.6.** (Ньютон-Лейбніц). Якщо функція  $F(x)$  є первісною для функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ , то вірна формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) \quad . \quad (9.10)$$

**Доведення.** Нехай  $F(x)$  – довільна первісна функція для  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ , тоді за теоремою 9.5 функції  $S_f(x)$  також буде первісною для  $f(x)$  на цьому відрізку. Тому за теоремою 9.4 ці функції будуть відрізнятися на константу  $c$ :

$$F(x) = S_f(x) + c \quad . \quad (9.11)$$

Із властивості ВІ і формули (9.8) маємо  $S_f(a) = 0$ . Тоді підставив у формулу (9.21)  $x = a$  маємо  $F(a) = S_f(a) + c = c$ . Далі підставив у формулу (9.21)  $x = b$  дістаємо  $F(b) = S_f(b) + c = S_f(b) + F(a)$ , тому  $S_f(b) = F(b) - F(a)$ . Звідси, та з формули (9.8) маємо:

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)dx = S_f(b) = F(b) - F(a) \quad .$$

Таким чином, теорему доведено.  $\square$

Формула (9.10) називається формулою Ньютона–Лейбніца, яку записують також і у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad . \quad (9.12)$$

В таблиці 9.1 перераховані всі інтеграли, які розглядаються в інтегральному численні.

**Таблиця 9.1. Типи інтегралів**

Назва	Значення
Визначений інтеграл (з фіксованою верхньою і нижньою межею)	Число, яке дорівнює площі криволінійної трапеції на відрізку.
Інтеграл зі змінною верхньою межею	Первісна функція для підінтегральної функції.
Невизначений інтеграл	Клас первісних функцій для підінтегральної функції.

#### 9.4. Основні формули інтегрування

Оскільки інтегрування це операція, яка обернена до диференціювання, то формули для невизначених інтегралів можна одержати із відповідних формул для диференціювання, якщо їх записати у зворотному порядку. Таким чином, невизначений інтеграл грає допоміжну, але дуже важливу роль, оскільки він дозволяє обчислити визначений інтеграл. В таблиці 9.2 приведені *невизначені інтеграли від основних елементарних функцій*.

На відміну від диференціального числення, де існує загальний алгоритм диференціювання будь-якої функції, в інтегральному численні немає загальних методів знаходження інтегралів, а є лише окремі часткові методи, що дозволяють зводити заданий інтеграл до табличного. Метод табличного (безпосереднього) інтегрування полягає у використанні правил інтегрування та таблиці основних інтегралів. Наприклад, лінійне правило НІ2 (формула (9.7)) і формули 1 і 2 із таблиці 9.1 дозволяють інтегрувати будь який поліном (многочлен)  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ :

$$\int P(x) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c. \quad (9.13)$$

Таблиця 9.2. Інтегралі від елементарних функцій

1.	$\int a dx = ax + c.$
2.	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \neq -1.$
	Зокрема, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c, \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c.$
3.	$\int \frac{dx}{x} dx = \ln  x  + c.$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + c.$
5.	$\int \cos x dx = \sin x + c.$
6.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c.$
7.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c.$
8.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$ Зокрема, $\int e^x dx = e^x + c.$
9.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$ Зокрема, $\int \frac{dx}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c.$ Зокрема, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + c.$
11.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x  + c.$
12.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln  \sin x  + c.$
13.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x - a}{x + a} \right  + c.$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + c.$

**Заміна змінної (підстановка).** Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі полягає в запровадженні нової змінної інтегрування, наприклад  $t$ , замість змінної  $x$ , шляхом підстановки в інтеграл диференційованої функції  $x = g(t)$ . Отриманий інтеграл намагаються звести до табличного інтеграла, або «ближчого» до табличного. Метод підставки є одним із основних методів інтегрування, якій заснований на такий формулі:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(t) + c = F(g^{-1}(x)) + c. \quad (9.14)$$

Тут  $F(t)$  це первісна функція для функції  $f(g(t)) \cdot g'(t)$ , а  $c$ -константа. При повертанні до змінної  $x$  в первісну функцію  $F(t)$  підставляється обернена функція  $t = g^{-1}(x)$ . Тому бажано, щоб функція  $x = g(t)$  була монотонною, тоді вона буде мати обернену.

Замінити змінну шляхом підстановки  $x = g(t)$  можна і у визначеному інтегралі, але тут треба змінити межі інтегрування за допомогою оберненої функції  $t = g^{-1}(x)$ . Нехай  $c = g^{-1}(a)$  і  $d = g^{-1}(b)$ , тоді має місце формула заміни для підстановки  $x = g(t)$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt = F(t) \Big|_c^d = F(d) - F(c). \quad (9.15)$$

Тут  $F(t)$  це первісна функція для функції  $f(g(t)) \cdot g'(t)$ .

**Введення функції під знак диференціала.** Це також найбільш поширений на практиці метод, якій ґрунтується на властивості НІЗ. Тут важно «побачити» (угадати) в підінтегральній функції  $f(x)$  множник  $g'(x)$ , який можна ввести під знак диференціалу  $f(x) = h(g(x)) \cdot g'(x)$ , де  $h(u)$  – інша функція. Після цього замінюється не змінна, а функція  $u = g(x)$  і  $du = d(g(x))$ . Тоді інтеграл обчислюється за формулою:

$$\int f(x)dx = \int h(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int h(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c. \quad (9.16)$$

Тут  $F(u)$  це первісна функція для функції  $h(u)$ .

У визначеному інтегралі підстановка  $u = g(x)$  здійснюється аналогічно, але тут треба змінити межі інтегрування за допомогою функції  $u = g(x)$ . Нехай  $c = g(a)$  і  $d = g(b)$ , тоді має місце формула заміни для підстановки  $u = g(x)$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_c^d h(u)du = F(u) \Big|_c^d = F(d) - F(c). \quad (9.17)$$

Тут  $F(u)$  це первісна функція для функції  $h(u)$ .

**Інтегрування частинами.** Цей метод базується на формулі Лейбніца для диференціювання добутку двох функцій  $d(uv) = duv + u dv$ . Звідси випливає, що  $u dv = d(uv) - v du$ . Візьмемо невизначений інтеграл від обох частин цієї рівності, тоді із формули лінійності інтегралу (1.14) отримуємо формулу для інтегрування частинами:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \quad (9.18)$$

Цю формулу можна також застосувати безпосереднє для визначеного інтегралу:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x). \quad (9.19)$$

## 9.5. Зразки розв'язування вправ

**9.5.1.** Обчислити невизначені інтеграли методом табличного інтегрування:

$$\text{а) } \int \sqrt[3]{x} dx, \quad \text{б) } \int (2\sin(x) - 3\cos(x))dx, \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x^2 + 3}.$$

*Розв'язання.* а) За формулою 2 із таблиці 9.2 при  $m = 1/3$  отримуємо:

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + c.$$

Зауважимо, що число  $m$  в формулі 2 таблиці 9.2 може бути дробом.

б) Згідно з формулою (9.7) і табличними інтегралами для тригонометричних функцій, маємо такі рівності:

$$\int (2\sin(x) - 3\cos(x))dx = 2 \int \sin(x) \cdot dx - 3 \int \cos(x)dx = -2\cos(x) - 3\sin(x) + c.$$

в) Із формули 9 таблиці 9.2 при  $a = \sqrt{3}$  маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

**9.5.2.** Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx, \quad \text{б) } \int_0^\pi (2\sin(x) - 3\cos(x))dx, \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 3}.$$

*Розв'язання.* Нам вже відомі невизначені інтеграли (первісні функції) для цих функцій із попередньої вправи, тому скористаємося формулою Ньютона Лейбніца (9.12):

$$\text{а) } \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} (2\sin(x) - 3\cos(x)) dx = (-2\cos(x) - 3\sin(x)) \Big|_0^{\pi} = 2 - (-2) = 4.$$

$$\text{в) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

**9.5.3.** Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \sin(5x) dx.$$

*Розв'язання.* Замінімо змінну  $x = t/5$ , тоді оберненою функцією буде  $t = 5x$  і з формули (9.14) маємо:

$$\int \sin(5x) dx = \int \sin \left( \frac{5t}{5} \right) d \left( \frac{t}{5} \right) = \frac{1}{5} \int \sin(t) dt = -\frac{\cos(t)}{5} + c = -\frac{\cos(5x)}{5} + c.$$

**9.5.4.** Обчислити невизначені інтеграли методом введення функції під знак диференціалу і заміни її новою змінної:

$$\text{а) } \int \operatorname{tg}(x) dx, \quad \text{б) } \int \sin^3(x) \cos(x) dx, \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}.$$

*Розв'язання.* а) Введемо функцію  $\sin(x)$  під знак диференціалу, тоді отримуємо:

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)}.$$

Зробимо заміну  $u = \cos(x)$ , тоді із формули 3 таблиці 9.2 дістаємо:

$$- \int \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)} = - \int \frac{du}{u} = - \ln|u| + c = - \ln|\cos(x)| + c.$$

Таким чином, ми довели формулу 11 з таблиці 9.2.

б) Введемо функцію  $\cos(x)$  під знак диференціалу  $\cos(x) dx = d(\sin(x))$ , потім замінімо  $u = \sin(x)$  і за допомогою формули 2 таблиці 9.2 і формули (9.16) отримуємо:

$$\int \sin^3(x) \cos(x) dx = \int \sin^3(x) d(\sin(x)) = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4(x)}{4} + c.$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + (\sqrt{3})^2}.$$

Зробимо заміну  $u = x + 3$ , тоді із формули 9 таблиці 9.2 і формули (9.16) дістаємо:

$$\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{u}{\sqrt{3}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x+3}{\sqrt{3}} \right) + c.$$

**9.5.5.** Обчислити визначений інтеграл:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}.$$

*Розв'язання.* Введемо підкорінний вираз під знак диференціала, тоді отримуємо:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3} \int_0^4 \frac{d(3x+4)}{\sqrt{3x+4}}.$$

Далі замінімо функцію під знаком диференціалу  $t = 3x + 4$ . Знайдемо нові межі інтегрування  $c = 3 \cdot 0 + 4 = 4$  і  $d = 3 \cdot 4 + 4 = 16$ . Тоді за формулою (9.17) і формулою 2 з таблиці 9.2 маємо:

$$\frac{1}{3} \int_0^4 \frac{d(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3} \int_4^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} \sqrt{t} \Big|_4^{16} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

**9.5.6.** Обчислити невизначені інтеграли методом інтегрування за частинами:

$$\text{а) } \int x \cdot e^x dx, \text{ б) } \int x \cdot \cos(x) dx, \text{ в) } \int \ln(x) dx.$$

*Розв'язання.* а) Позначимо  $u = x$ ,  $v = e^x$ , тоді  $dv = e^x dx$ . Підставивши ці значення в формулу інтегрування за частинами (1.27), та із формули 8 таблиці 1.1 отримуємо:

$$\int x \cdot e^x dx = \int x \cdot d(e^x) = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

б) Введемо позначення  $u = x$ ,  $v = \sin(x)$ , тоді  $dv = \cos(x) dx$ . Підставимо ці значення в формулу інтегрування (1.27), тоді із формули 4 таблиці 1.1 дістаємо:

$$\int x \cdot \cos(x) dx = \int x \cdot d(\sin(x)) = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c.$$

$$\text{в) } \int \ln(x) dx = \ln(x) \cdot x - \int x \frac{dx}{x} = \ln(x) \cdot x - \int dx = \ln(x) \cdot x - x + c.$$

## 9.6. Завдання для самостійної роботи студентів

**9.6.1.** Обчислити невизначені інтеграли методом табличного інтегрування (за варіантами):

$$1) \int \frac{dx}{x^2+9}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^{12}}; \quad 3) \int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} dx; \quad 4) \int \frac{4}{\sqrt{x^2+2}} dx; \quad 5) \int \frac{4}{x-7} dx.$$

**9.6.2.** Обчислити невизначені інтеграли методом заміни змінної або введенням функції під знак диференціалу (за варіантами):

$$1) \int \cos(3x) dx; \quad 2) \int (1 + 8 \cdot \operatorname{tg}^7(x)) \frac{dx}{\cos^2(x)}; \quad 3) \int \frac{2 \cdot \ln^3(x) + 1}{x} dx;$$

$$4) \int \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{x^2}; \quad 5) \int \operatorname{arctg}^5(x) \frac{dx}{1+x^2}.$$

**9.6.3.** Обчислити невизначені інтеграли методом інтегрування за частинами (за варіантами):

$$1) \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int x \cdot e^{3x} dx; \quad 3) \int x \cdot 2^x dx; \quad 4) \int \arcsin(2x) dx; \quad 5) \int \arccos(4x) dx.$$

**9.6.4.** Обчислити визначені інтеграли (за варіантами):

$$1) \int_1^4 \frac{3}{x\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int_0^{\pi} (3x^3 + 6 \cdot \cos(x)) dx; \quad 3) \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5x dx}{2x^2 - 3};$$

$$4) \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx; \quad 5) \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \cdot \operatorname{tg}^3(x)) \frac{dx}{\cos^2(x)}.$$

**9.6.5.** Обчислити визначені інтеграли (за варіантами):

$$1) \int_0^{1/3} (4 - 3x) \cdot e^{-x} dx; \quad 2) \int_0^1 \operatorname{arctg}(x) dx; \quad 3) \int_0^1 (3x + 4) \cdot e^{3x} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/2} 4x \cdot \cos(2x) dx; \quad 5) \int_0^{\pi/4} 4x \cdot \sin(4x) dx.$$

## 10. Методи інтегрування

На попередньому занятті ми вже розглянули декілька методів інтегрування, тому повернемося до *методу інтегрування частинами* і розглянемо його більш уважно. По-перше метод інтегрування частинами можна застосовувати декілька разів. Таким чином можна інтегрувати цілі класи функцій. Наприклад, можна обчислювати інтеграли виду:

$$\int P(x)e^x dx, \quad \int P(x)(\sin(ax) + \cos(bx))dx, \quad (10.1)$$

де  $P(x)$  – поліном степеня  $n$ . Щоб знайти інтеграл виду (10.1) треба покласти  $u = P(x)$  і застосовувати формулу інтегрування частинами  $n$  разів, до тих пір, поки поліном не перетвориться на константу. Якщо метод інтегрування частинами застосовувати декілька разів, то іноді шуканий інтеграл з'являється в правій частині з деяким множником. Тоді можна *перенести його в ліву частину, поділити на множник і отримати відповідь*.

Покажімо як виглядає формула інтегрування частинами другого порядку. Для цього представимо формулу (8.27) (8 лекція) в такому вигляді:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \quad (10.2)$$

Звідси видно, що при переході від функції  $u(x)v'(x)$  до функції  $u'(x)v(x)$ , функцію  $u(x)$  треба *диференціювати*, а функцію  $v'(x)$  треба *інтегрувати*. Щоб продовжити цей процес введемо первісну функцію для  $v(x)$  і позначимо її як  $v^{(-1)}(x)$ :

$$v^{(-1)}(x) = \int v(x)dx.$$

Тепер застосуємо цю операцію до функції  $u'(x)v(x)$ , тоді отримуємо:

$$\int u'(x)v(x)dx = \int u'(x)d(v^{(-1)}(x)) = u'(x) \cdot v^{(-1)}(x) - \int u''(x)v^{(-1)}(x)dx.$$

Підставимо цей вираз в рівняння (10.2) і отримуємо *формулу інтегрування частинами другого порядку*:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - u'(x) \cdot v^{(-1)}(x) + \int u''(x)v^{(-1)}(x)dx. \quad (10.3)$$

Цей процес можна продовжити і далі до третього порядку і т. д. Із формули (10.3) видно, що після застосування формули інтегрування частинами  $n$  разів до інтегралів (10.1) під знаком інтегралу залишиться тільки функції  $e^x$  або  $\sin(ax)$  або  $\cos(bx)$ .

### 10.1. Інтегрування раціональних функцій

Важливим класом елементарних функцій є клас раціональних функцій. *Раціональною функцією* (або раціональним дробом) називається частка двох поліномів:

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_mx^m + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + \dots + b_1x + b_0}. \quad (10.4)$$

Степінь поліному  $P(x)$  позначимо як  $\deg(P(x))$ . Раціональний дріб (10.4) називається *правильним*, якщо  $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ , і *неправильним* в іншому випадку.

**Твердження 10.1.** Неправильний дріб є сумою полінома і правильного дроби.

**Доведення.** Якщо  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ , то можна поділити  $P(x)$  на  $Q(x)$  з остачею  $P(x) = M(x)Q(x) + R(x)$ , де  $M(x)$  – поліном частки ступеня  $m - n$ , а  $R(x)$  – поліном остачі, причому  $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ . Поділімо обидві частини рівності  $P(x) = M(x)Q(x) + R(x)$  на поліном  $Q(x)$ , тоді дістанемо:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (10.5)$$

де  $R(x)/Q(x)$  є правильним дробом. Таким чином, твердження доведено.  $\square$

Рівність (10.5) називають *виділенням цілої частини* раціонального дроби. Наприклад для раціональної функції  $(x^4 + x - 1)/(x^2 + 1)$  маємо  $x^4 + x - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + x$ , тому:

$$\frac{x^4 + x - 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Якщо інтегрувати обидві частини рівності (10.5), тоді отримуємо:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int M(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx .$$

Зауважимо, що формула (9.13) (9 лекція) дозволяє інтегрувати будь який поліном  $M(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ :

$$\int M(x) dx = \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x .$$

Тоді із твердження 2.1 випливає такий наслідок.

**Наслідок 10.2.** Інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування правильних дробів.

### 10.1.1. Розклад на елементарні дробі

Поліном з дійсними коефіцієнтами називається *незвідним*, якщо його не можна розкласти в добуток поліномів меншої степені з дійсними коефіцієнтами. Тому квадратний тричлен  $x^2 + px + q$  буде незвідним, якщо він не має дійсних коренів. Зауважимо, що тоді він має два комплексно спряжені корені.

*Елементарними дробами* називаються дробі чотирьох типів:

$$\frac{A_1}{x-r}, \frac{A_2}{(x-r)^m}, \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^n}, \quad m, n \geq 2, \quad (10.6)$$

де  $A_i, B_i, C_i, p, q, r$  – дійсні числа, а  $x^2 + px + q$  – незвідний квадратний тричлен. Звісно, дробі першого і третього типу є частковими випадками дробів другого і четвертого типів відповідно, але їх виділяють в окремий тип, тому що вони мають інші інтегралі.

Із алгебри відомо, що будь-який правильний дріб (10.4) розкладається на суму елементарних дробів виду (10.6). Ми опишемо цю процедуру коротко і неформально.

#### F1. Процедура розкладання правильного дроба на елементарні дробі

Нехай  $P(x)/Q(x)$  – правильний дріб, тоді з початку розкладемо знаменник  $Q(x)$  на множники. Будь який поліном третього ступеня або вище з дійсними коефіцієнтами буде звідним. Таким чином, незвідними множниками полінома  $Q(x)$  будуть поліноми першої степені  $x - r$  і поліноми другої степені  $x^2 + px + q$ , які не мають дійсних коренів. Тому маємо таке розкладання для полінома  $Q(x)$ :

$$Q(x) = b_n \cdot \prod_{i=1}^d (x - r_i)^{m_i} \cdot \prod_{j=1}^e (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}, \quad (10.7)$$

де  $b_n$  – старший коефіцієнт полінома  $Q(x)$ ,  $m_i$  – кратність дійсного кореня  $r_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , полінома  $Q(x)$ ,  $n_j$  – кратність комплексно спряжених коренів  $r_j$  і  $\bar{r}_j$ , полінома  $Q(x)$ , де  $x^2 + p_j x + q_j = (x - r_j)(x - \bar{r}_j)$ ,  $1 \leq j \leq e$ . Тут  $d$  – число різних дійсних коренів полінома  $Q(x)$ , а  $e$  – число різних пар комплексно спряжених коренів полінома  $Q(x)$ .

Основна теорема алгебри (теорема Гауса) стверджує, що поліном ступеня  $n$  має  $n$  комплексних коренів з урахуванням їх кратності. Тому сума кратностей всіх коренів полінома  $Q(x)$  дорівнює його степені:

$$\deg(Q(x)) = n = \sum_{i=1}^d m_i + 2 \sum_{j=1}^e n_j . \quad (10.8)$$

Будемо вважати, що розкладання (10.7) ми отримали, наприклад, методом підбору. Кожному множнику виду  $(x - r_i)^{m_i}$  поставимо у відповідність суму елементарних дробів:

$$f_i(x) = \frac{A_{i1}}{(x - r_i)} + \dots + \frac{A_{im_i}}{(x - r_i)^{m_i}}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (10.9)$$

де  $A_{ik}$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq k \leq m_i$ , – невизначені коефіцієнти. Аналогічно кожному множнику виду  $(x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}$  поставимо у відповідність таку суму елементарних дробів:

$$g_j(x) = \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + p_j x + q_j)} + \dots + \frac{B_{jn_j}x + C_{jn_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}}, \quad 1 \leq j \leq e, \quad (10.10)$$

де  $B_{jl}, C_{jl}$ ,  $1 \leq j \leq e$ ,  $1 \leq l \leq n_j$  – невизначені коефіцієнти. Поставимо у відповідність розкладенню (10.7) таке рівняння:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^d f_i(x) + \sum_{j=1}^e g_j(x) . \quad (10.11)$$

В подальшому ми покажемо, як із рівняння (10.11) визначити невідомі коефіцієнти  $A_{ik}$ ,  $B_{jl}, C_{jl}$ . На цьому процедура F1 завершується, оскільки рівняння (10.11) можна вважати розкладанням правильного дробу на елементарні.  $\square$

### 10.1.2. Метод невизначених коефіцієнтів

Для знаходження невизначених коефіцієнтів в рівності (10.11) можна скористатись одним із наступних способів або їх комбінацією.

#### F2. Процедура знаходження невизначених коефіцієнтів

**Прирівнювання коефіцієнтів.** Із рівностей (10.8), (10.9) і (10.10) слідує, що загальне число невизначених коефіцієнтів дорівнює степені  $n$  поліному  $Q(x)$ . Щоб знайти їх помножимо обидві частини рівності (10.11) на поліном  $Q(x)$ , тоді отримуємо таку тотожність між поліномами, яка виконується для всіх  $x$ :

$$P(x) = \sum_{i=1}^d f_i(x)Q(x) + \sum_{j=1}^e g_j(x)Q(x) . \quad (10.12)$$

Із рівностей (10.9) і (10.10) випливає, що доданки у рівності (10.12) мають такий вигляд:

$$f_i(x)Q(x) = \frac{(A_{i1}(x - r_i)^{m_i-1} + \dots + A_{im_i})Q(x)}{(x - r_i)^{m_i}} , \quad 1 \leq i \leq d ,$$

$$g_j(x)Q(x) = \frac{((B_{j1}x + C_{j1})(x^2 + p_jx + q_j)^{n_j-1} + \dots + B_{jn_j}x + C_{jn_j})Q(x)}{(x^2 + p_jx + q_j)^{n_j}} , \quad 1 \leq j \leq e .$$

Із формули (10.7) слідує, що поліном  $Q(x)$  ділиться націло (без остачі) на всі знаменники  $(x - r_i)^{m_i}$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $(x^2 + p_jx + q_j)^{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq e$ , тому всі доданки  $f_i(x)Q(x)$  і  $g_j(x)Q(x)$  в правій частині рівняння (10.12) будуть поліномами ступеня  $n - 1$ , а їх сума  $S(x)$  буде поліномом ступеня не вище  $n - 1$ , коефіцієнти якого залежать від  $n$  невідомих  $A_{ik}, B_{jl}, C_{jl}$ . Отже отримуємо тотожність поліномів:

$$P(x) \equiv S(x) , \quad (10.13)$$

яка виконується тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти поліномів будуть рівними. Оскільки дріб  $P(x)/Q(x)$  є правильною, то  $m \leq n - 1$ , де  $m = \deg(P(x))$ . Щоб урівняти степеня поліномів  $P(x)$  і  $S(x)$  будемо вважати, що  $n - 1 - m$  старших коефіцієнтів поліному  $P(x)$  рівні нулю. Прирівняємо коефіцієнти поліномів  $P(x)$  і  $S(x)$  при однакових степенях  $x^i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$  в обох частинах тотожності (10.13), тоді одержимо систему  $n$  лінійних рівнянь від  $n$  невідомих, яка завжди має єдиний розв'язок. Процедура F2 завершена.  $\square$

Розглянемо приклад, де  $P(x) = 12x$  і  $Q(x) = x^3 - 8$ . Розкладемо  $Q(x)$  на множники і отримуємо  $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ . Отже маємо рівняння (10.11):

$$\frac{12x}{x^3 - 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4} .$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на поліном  $Q(x)$ , тоді отримуємо:

$$12x \equiv A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2) . \quad (10.14)$$

Представимо цю тотожність у вигляді поліномів ступеня 2, тоді дістанемо рівняння (10.13):

$$0 \cdot x^2 + 12x + 0 \equiv (A + B)x^2 + (2A - 2B + C)x + (4A - 2C) .$$

Прирівняймо коефіцієнти при однакових степенях  $x^i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , тоді одержимо систему рівнянь  $A + B = 0$ ,  $2A - 2B + C = 12$ ,  $4A - 2C = 0$ . Звідси  $A = 2, B = -2, C = 4$ .

**Підстановка значень змінної.** Хоча метод прирівнювання коефіцієнтів універсальний, він при великому числі  $n$  дає велике число рівнянь. Пошук невідомих можна значно спростити, якщо в тотожність (10.13) підставляти конкретні значення змінної  $x$ ,

наприклад,  $x = 0$  або  $x = 1$ , що відразу приводить до лінійного співвідношення між невідомими. Наприклад, якщо в тотожність (10.14) послідовно підставити значення  $x = 0, x = 1, x = 2$ , то отримуємо лінійну систему  $4A - 2C = 0, 7A - B - C = 12, 24 = 12A$ , яка еквівалентна системі (10.13).

Але підставляти випадкові значення змінної  $x$  не треба, оскільки це може привести до лінійно залежної системи рівнянь. Більш систематичний метод полягає в підстановки в тотожність (10.13) дійсних коренів знаменника  $Q(x)$ . Якщо  $x = r_i$ , то в тотожності (10.12) тільки доданок  $f_i(x)Q(x)$  буде ненульовим, а все інші доданки в правій частині тотожності (10.12) будуть дорівнювати нулю. Це дозволяє відразу визначити коефіцієнт  $A_{im_i} = P(r_i)/Q_i(r_i)$ , де  $Q_i(x) = Q(x)/(x - r_i)^{m_i}$ , причому  $Q_i(r_i) \neq 0$ , оскільки  $r_i$  вже не буде коренем поліному  $Q_i(x)$ . Зокрема, якщо дійсний корінь простий (має кратність 1), то ми одразу визначаємо його коефіцієнт  $A$ . Наприклад, підстановка  $x = 2$  в тотожність (10.14) одразу дає  $A = 24/12 = 2$ . Якщо повторити цю процедуру для всіх дійсних коренів, то можна визначити всі коефіцієнти  $A_{im_i}$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Після цього можна перейти до методу прирівнювання коефіцієнтів, тому що невідомих буде значно менше.

### 10.1.3. Інтегрування елементарних дробів

Таким чином, процедури F1 і F2 зводять інтегрування правильних раціональних дробів до інтегрування елементарних дробів. Інтегралі від елементарних дробів першого та другого типу мають такий вигляд:

$$\int \frac{A}{(x-r)} dx = A \cdot \ln|x-r| + c, \quad (10.15)$$

$$\int \frac{A}{(x-r)^m} dx = \frac{A}{(1-m)(x-r)^{m-1}} + c, \quad m > 1. \quad (10.16)$$

Дійсно, інтеграл (10.15) по суті табличний, а інтеграл (10.16) обчислюються заміною змінної і застосуванням формули 2 із таблиці 8.2 (8 лекція):

$$\int \frac{A}{(x-r)^m} dx = A \int (x-r)^{-m} d(x-r) = \frac{A}{(1-m)(x-r)^{m-1}} + c.$$

Інтеграл від елементарних дробів третього типу, у яких  $4q > p^2$ , має такий вигляд:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2C-pB}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c. \quad (10.17)$$

Інтеграл (10.17) зводять до табличних інтегралів 3 і 9 (таблиця 8.2) введенням у чисельник дробі диференціала знаменника. Скористаємось такими співвідношеннями  $d(x^2+px+q) = 2x+p$ ,  $Bx+C = B(2x+p)/2 + C - Bp/2$ , тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \frac{2C-Bp}{2} \int \frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q-p^2/4} = \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2C-pB}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right). \end{aligned}$$

Інтеграл від елементарних дробів четвертого типу заміною змінною  $t = x + p/2$  зводиться до знаходження таких інтегралів:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2C-Bp}{2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad (10.18)$$

де  $a^2 = q - p^2/4$ . Перший із цих інтегралів заміною  $u = t^2 + a^2$  зводиться до табличного інтегралу (формула 2 таблиця 8.2). Отже інтеграл від елементарних дробів четвертого типу з точністю до константи зводиться до обчислення інтегралу:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n > 1. \quad (10.19)$$

Зауважимо, що при  $n = 1$  інтеграл  $I_1$  являється табличним (формула 9 таблиці 8.2). При  $n > 1$  інтеграл (10.19) знаходиться за такою рекурентною формулою, яка дозволяє його обчислити для будь-якого числа  $n$ :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left( (2n-3) \cdot I_{n-1} + \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} \right), \quad n > 1. \quad (10.20)$$

Зауважимо, що на практичних заняттях інтеграли четвертого типу виникають дуже рідко.

Підведемо підсумки і опишемо загальну процедуру інтегрування раціонального дробу, яка складається з наступних кроків:

1. Якщо  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ , то виділити цілу частину дробу  $P(x)/Q(x)$  і подати дріб у вигляді (10.5), а потім знайти інтеграл від поліному  $M(x)$ ;
2. Розкласти правильну дріб  $P(x)/Q(x)$  (або правильну дріб  $R(x)/Q(x)$ ) в суму елементарних дробів виду (10.6) методом невизначених коефіцієнтів;
3. Інтегрувати всі елементарні дроби за допомогою формул (10.15)-(10.20). Їх сума разом з інтегралом від полінома  $M(x)$  і буде результатом інтегрування дробу  $P(x)/Q(x)$ .

Звісно, не завжди треба виконувати всю складну процедуру інтегрування, наприклад, для знаходження інтегралу від раціональної функції іноді достатньо просто ввести функцію під знак диференціалу:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3 - 1)}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + c.$$

## 10.2. Інтегрування тригонометричних функцій

При інтегруванні тригонометричних виразів треба використовувати тригонометричні тотожності. Нехай функція  $R(\sin(x), \cos(x))$  утворена композицією арифметичних дій над функціями  $\sin(x)$  і  $\cos(x)$ . Розглянемо інтеграл:

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx. \quad (10.21)$$

**Універсальна тригонометрична підстановка.** Для обчислення інтегралів вигляду (10.21) існує універсальна тригонометрична підстановка (заміна змінної), яка перетворює інтеграл (10.21) на інтеграл від раціональної функції від нової змінної  $t$ :

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (10.22)$$

Дійсно, ця функція має обернену  $x = 2 \cdot \operatorname{arctg}(t)$  при  $-\pi < x < \pi$  і за відомими тригонометричними формулами маємо:

$$\sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(x/2)^2}{1 + \operatorname{tg}(x/2)^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad (10.23)$$

$$dx = d(2 \cdot \operatorname{arctg}(t)) = \frac{2dt}{1 + t^2}. \quad (10.24)$$

Отже, інтеграл (10.21) перетворюється на інтеграл від раціональної функції:

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Цей інтеграл можна знайти методами, які були викладені в попередньому пункті лекції.

**Типові підстановки.** На жаль універсальна підстановка (10.22) часто призводить до складних раціональних дробів з великими степенями. Тому в окремих випадках можна користуватися простішими підстановками.

T1) Якщо підінтегральний вираз має вигляд  $R(\sin(x)) \cos(x) dx$ , де  $R$  – раціональна функція від функції  $\sin(x)$ , то введемо  $\cos(x)$  під знак диференціалу і підстановкою  $u = \sin(x)$  цей інтеграл зводиться до раціональної функції:

$$\int R(\sin(x)) \cos(x) dx = \int R(\sin(x)) d(\sin(x)) = \int R(u) du.$$

T2) Аналогічно, якщо підінтегральний вираз має вигляд  $R(\cos(x)) \sin(x) dx$ , то введемо  $\sin(x)$  під знак диференціалу і підстановкою  $u = \cos(x)$  він також зводиться до раціональної функції:

$$\int R(\cos(x)) \sin(x) dx = - \int R(\cos(x)) d(\cos(x)) = - \int R(u) du.$$

T3) Якщо підінтегральна функція має вигляд  $\sin(x)^m \cdot \cos(x)^n$ , то метод інтегрування залежить від парності натуральних чисел  $m$  і  $n$ . Допустимо, що число  $m$  – непарне,  $m = 2k + 1$ , тоді відокремлюють від  $\sin(x)^{2k+1}$  один співмножник, а парний степінь, що залишився, виражають за допомогою формули  $\sin(x)^{2k} = (1 - \cos(x)^2)^k$ . Потім вводять  $\sin(x)$  під знак диференціалу і роблять заміну  $u = \cos(x)$ . Таким чином, інтеграл заводиться до інтегрування полінома:

$$\int \sin(x)^{2k+1} \cdot \cos(x)^n dx = - \int (1 - u^2)^k u^n du .$$

T4) Аналогічно, якщо  $n$  – непарне,  $n = 2k + 1$ , то вводять  $\cos(x)$  під знак диференціалу і роблять заміну  $u = \sin(x)$ :

$$\int \sin(x)^m \cdot \cos(x)^{2k+1} dx = \int u^m \cdot (1 - u^2)^k \cdot du .$$

T5) Якщо ж обидва числа  $m$  та  $n$  – парні числа, то степені понижують, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

T6) Для функцій виду  $\sin(ax) \cdot \cos(bx)$ ,  $\sin(ax) \cdot \sin(bx)$ ,  $\cos(ax) \cdot \cos(bx)$  вони представляються у вигляді суми та різниці синусів і косинусів:

$$\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2} [\sin(ax - bx) + \sin(ax + bx)], \quad (10.25)$$

$$\sin(ax) \cdot \sin(bx) = \frac{1}{2} [\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)], \quad (10.26)$$

$$\cos(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2} [\cos(ax - bx) + \cos(ax + bx)]. \quad (10.27)$$

### 10.3 Зразки розв'язування вправ

10.3.1. Обчислити інтеграли від раціональних функцій:

$$1) \int \frac{dx}{(x-4)^3}; \quad 2) \int \frac{dx}{(5-3x)^3}; \quad 3) \int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx;$$

$$4) \int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx; \quad 5) \int \frac{3x^3+8}{x^2+4} dx.$$

Розв'язання. 1) За формулою (10.16) для елементарного дробу другого типу маємо:

$$\int \frac{dx}{(x-4)^3} = -\frac{1}{2(x-4)^2} + c .$$

2) Зробимо перетворення і введемо знаменник під знак диференціалу, а потім зробимо заміну  $u = 5 - 3x$  і використаємо формулу 2 таблиці інтегралів 8.2:

$$\int \frac{dx}{(5-3x)^3} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(5-3x)}{(5-3x)^3} = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u^3} dx = \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{u^2} + c = \frac{1}{6(5-3x)^2} + c$$

3) Оскільки трьохчлен  $x^2 + 2x + 5$  не має дійсних коренів, то за формулою (10.17) для елементарного дробу третього типу маємо такий інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{-2}{\sqrt{16}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{16}}\right) + c = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c . \end{aligned}$$

4) Маємо правильний дріб, тому розкладемо знаменник  $x^3 + 4x^2 + 4x$  на множники:  
 $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x+2)^2 .$

Складемо тепер рівняння (10.11) для розкладання підінтегрального дробу на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} .$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на поліном  $x(x+2)^2$ , тоді отримуємо рівняння:  
 $3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx .$

Це рівняння можна розв'язати методом невизначених коефіцієнтів, якщо привести подібні члени у правій частині рівняння і прирівняти коефіцієнти лівого і правого поліномів. Але ще просте, покласти  $x = 0$ , тоді дістаємо  $8 = 4A$ , звідки  $A = 2$ . Потім покладемо  $x = -2$ , тоді дістаємо  $20 = -2C$ , звідки отримуємо  $C = -10$ . Наприкінці покладемо  $x = -1$ , тоді дістаємо  $11 = 2 - B + 10$ , звідки отримуємо  $B = 1$ . Таким чином, отримуємо рівність:

$$\frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Обчислимо інтеграли від елементарних дробів, тоді за формулами (10.15) і (10.16) маємо:

$$\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx = \int \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + c.$$

5) Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, тому спочатку виділимо цілу частину цього дробу, тоді отримуємо:

$$\frac{3x^3 + 8}{x^2 + 4} = 3x + \frac{-12x + 8}{x^2 + 4}.$$

Обчислимо тепер інтеграл від раціонального дробу, тоді за формулою (10.17) маємо:

$$\int \frac{3x^3 + 8}{x^2 + 4} dx = \int 3x \cdot dx + \int \frac{-12x + 8}{x^2 + 4} dx = \frac{3x^2}{2} - 6 \cdot \ln(x^2 + 4) + 4 \cdot \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

**10.3.2.** Обчислити такі інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1) \int \cos^3(x) dx; \quad 2) \int \cos(x)\cos(3x) dx; \quad 3) \int \sin^7(x) dx; \quad 4) \int \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} dx.$$

*Розв'язання.* 1) Цей інтеграл має тригонометричний вигляд Т4, тому він підстановкою  $u = \sin(x)$  зводиться до інтегралу від полінома:

$$\int \cos^3(x) dx = \int \cos^2(x)\cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x))d(\sin(x)) = \int (1 - u^2) du.$$

Звідси отримуємо:

$$\int \cos^3(x) dx = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin(x) + \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

2) Цей інтеграл має вигляд Т6, тому його можна обчислити за формули (10.27):

$$\int \cos(x)\cos(3x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos(2x) + \cos(4x)) dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{8} + c.$$

3) Цей інтеграл має вигляд Т3, тому він підстановкою  $u = \cos(x)$  зводиться до інтегралу від поліному:

$$\begin{aligned} \int \sin^7(x) dx &= \int \sin^6(x)\sin(x) dx = \int (\sin^2(x))^3 \sin(x) dx = \\ &= - \int (1 - \cos^2(x))^3 d(\cos(x)). \end{aligned}$$

Тепер скористаємося підстановкою  $u = \cos(x)$ :

$$\begin{aligned} \int \sin^7(x) dx &= - \int (1 - u^2)^3 du = - \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du = \\ &= -u + u^3 - \frac{3}{5}u^5 + \frac{u^7}{7} + c = -\cos(x) + \cos^3(x) - \frac{3\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^7(x)}{7} + c. \end{aligned}$$

4) Цей інтеграл має вигляд Т2, тому він підстановкою  $u = \cos(x)$  зводиться до раціональної функції:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} dx &= \int \frac{\sin^2(x) \cdot \sin(x) dx}{\cos(x)} = - \int \frac{(1 - \cos^2(x))d(\cos(x))}{\cos(x)} = - \int \frac{(1 - u^2) du}{u} \\ &= - \int \frac{du}{u} + \int u \cdot du = -\ln|u| + \frac{u^2}{2} + c = -\ln|\cos(x)| + \frac{\cos^2(x)}{2} + c. \end{aligned}$$

**10.3.3.** Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx .$$

*Розв'язання.* Оскільки ступінь косинуса мала і підінтегральна функція має вигляд (10.21), то скористаємось універсальною тригонометричною підстановкою  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ . Тоді за формулами (10.23) і (10.24) маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx &= \int \frac{2dt}{((1-t^2)/(1+t^2) + 1)(1+t^2)} = \\ &= \int \frac{2(1+t^2)dt}{(1-t^2+1+t^2)(1+t^2)} = \int dt = t + c = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + c . \end{aligned}$$

#### 10.4 Завдання для самостійної роботи студентів

**10.4.1.** Обчислити невизначені інтеграли від раціональних функцій (за варіантами):

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx; \quad 2) \int \frac{3x+2}{x^2+2x+3} dx; \quad 3) \int \frac{4x+3}{x^2+3x+4} dx; \\ 4) \int \frac{5x-1}{x^2+6x+10} dx; \quad 5) \int \frac{4x-5}{x^2-6x+10} dx . \end{aligned}$$

**10.4.2.** Обчислити невизначені інтеграли від раціональних функцій (за варіантами):

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x-3}{x^3-x} dx; \quad 2) \int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx; \quad 3) \int \frac{5x+18}{(x+3)(x+4)} dx; \\ 4) \int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} dx; \quad 5) \int \frac{3x-1}{x^2-2x-3} dx; \end{aligned}$$

**10.4.3.** Обчислити невизначені інтеграли від раціональних функцій (за варіантами):

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x} dx; \quad 2) \int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx; \quad 3) \int \frac{3x^3-1}{x(x^2+1)} dx; \\ 4) \int \frac{x^3-1}{x^2-4x+3} dx; \quad 5) \int \frac{2x^3+3}{x^2-x-2} dx . \end{aligned}$$

**10.4.4.** Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій (за варіантами):

$$\begin{aligned} 1) \int \cos(3x)\cos(6x)dx; \quad 2) \int \sin(3x)\cos(4x)dx; \quad 3) \int \sin\left(\frac{3x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx; \\ 4) \int \sin(5x) \cdot \sin(x)dx; \quad 5) \int \sin(4x)\cos(6x) dx . \end{aligned}$$

**10.4.5** Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій (за варіантами)

$$\begin{aligned} 1) \int \sin^2(x) \cdot \cos^5(x)dx; \quad 2) \int \sin^5(x)dx; \quad 3) \int \sin^2(x) \cdot \cos^2(x)dx; \\ 4) \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^7(x)} dx; \quad 5) \int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)} dx . \end{aligned}$$

**10.4.6** Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій методом заміни змінної (за варіантами):

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{\sin^3(x)}; \quad 2) \int \frac{dx}{\cos^3(x)}; \quad 3) \int \frac{dx}{1+\sin(x)}; \quad 4) \int \frac{dx}{2+\cos(x)}; \\ 5) \int \frac{1}{1+\operatorname{tg}(x)} dx . \end{aligned}$$

## 11. Застосування інтегрального числення

Спочатку ми розглянемо інтегрування ірраціональних функцій, яке буде нам в нагоді при застосуванні інтегрального числення в природознавстві.

### 11.1. Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо ірраціональні функції утворені композицією арифметичних дій над радикалами виду  $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ , де  $m, n$  – натуральні числа. Нагадаємо, що частка двох натуральних чисел буде раціональним числом  $r = m/n$ . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int R(x^{r_1}, \dots, x^{r_k}) dx, \quad (11.1)$$

де  $R$  – раціональна функція від радикалів  $x^{r_i}$ ,  $r_i = m_i/n_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , – раціональні числа. Покладемо число  $n$  рівному найменшому спільному кратному (НСК) всіх знаменників  $n_i$ :

$$n = \text{НСК}(n_1, \dots, n_k). \quad (11.2)$$

Нагадаємо, що  $\text{НСК}(n_1, \dots, n_k) = n_1 \cdot \dots \cdot n_k / \text{НСД}(n_1, \dots, n_k)$ , де  $\text{НСД}(n_1, \dots, n_k)$  – найбільший спільний дільник чисел  $n_1, \dots, n_k$ . Наприклад,  $\text{НСК}(6, 8) = 48 / \text{НСД}(6, 8) = 24$ .

**Твердження 11.1.** Інтеграл (11.1) заміною змінною  $x = t^n$ , де число  $n$  визначається формулою (11.2), зводиться до інтегрування раціональної функції від змінної  $t$ .

**Доведення.** Дійсно, при заміні  $x = t^n$  інтеграл (11.1) набуває вигляду:

$$\int R(x^{r_1}, \dots, x^{r_k}) dx = n \int R(t^{d_1}, \dots, t^{d_k}) t^{n-1} dt,$$

де всі числа  $d_i = m_i n / n_i$  будуть натуральними, оскільки число  $n$  ділиться націло на всі числа  $n_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Отже, функція  $R(t^{d_1}, \dots, t^{d_k}) t^{n-1}$  буде раціональною від  $t$ .  $\square$

#### 11.1.1. Квадратичні ірраціональності

Розглянемо декілька інтегралів від радикалу  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ , якій називається квадратичною ірраціональністю. Спочатку розглянемо такий інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (11.3)$$

Цей інтеграл обчислюється виділенням повного квадрату під квадратним коренем і зведенням його до табличного інтегралу, але результат залежить від знаку  $a$ , тому спочатку розглянемо випадок  $a > 0$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

Тоді із формули 14 таблиці інтегралів 9.2 (лекція 9) отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left[ x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right] + c, \quad (11.4)$$

де  $c$  – довільна стала. Аналогічно, якщо  $a < 0$ , то  $a = -|a|$  і ми маємо:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{|a|} \sqrt{-x^2 + \frac{bx}{|a|} + \frac{c}{|a|}} = \sqrt{|a|} \sqrt{\frac{b^2 + 4|a|c}{4|a|^2} - \left(x - \frac{b}{2|a|}\right)^2}$$

Тут будемо вважати, що  $b^2 + 4|a|c > 0$ , так як в іншому випадку підкорінний вираз буде від'ємним. Тоді із формули 10 таблиці інтегралів 9.2 (лекція 9) отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \left[ \frac{2|a|x - b}{\sqrt{b^2 + 4|a|c}} \right] + c, \quad a < 0, \quad (11.5)$$

де  $c$  – довільна стала.

Розглянемо тепер такий інтеграл:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx. \quad (11.6)$$

Цей інтеграл знаходиться виділенням у чисельнику диференціала від підкореневого виразу:

$$\int \frac{(Ax + B) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (11.7)$$

Перший інтеграл з правої частини формули (11.7) дорівнює:

$$\frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + c, \quad (11.8)$$

де  $c$  – довільна стала. Другий інтеграл з правої частини формули (11.7) з точністю до константи дорівнює інтегралу (11.3). Таким чином, інтеграл (11.6) знаходиться за формулами (11.4), (11.5) і (11.8).

Інтеграл виду:

$$\int \frac{dx}{(x - A)\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (11.9)$$

зводять до інтеграла вигляду (11.3) заміною змінної  $x = A + 1/t$ .

Нарешті, розглянемо інтеграл від самого виразу  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ , якій виділенням повного квадрату і заміною  $u = x \pm b/2|a|$  зводиться до одного з інтегралів від функцій  $\sqrt{u^2 + d^2}$ ,  $\sqrt{u^2 - d^2}$  або  $\sqrt{d^2 - u^2}$ , які мають такий вигляд:

$$\int \sqrt{u^2 \pm d^2} du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm d^2} \pm \frac{d^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 \pm d^2}) + c. \quad (11.10)$$

$$\int \sqrt{d^2 - u^2} du = \frac{d^2}{2} \arcsin\left(\frac{u}{d}\right) + \frac{1}{2}u\sqrt{d^2 - u^2} + c. \quad (11.11)$$

Особливо часто ці інтеграли зустрічаються, коли  $d = 1$ :

$$\int \sqrt{u^2 \pm 1} du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm 1} \pm \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 \pm 1}) + c. \quad (11.12)$$

$$\int \sqrt{1 - u^2} du = \frac{1}{2} \arcsin(u) + \frac{1}{2}u\sqrt{1 - u^2} + c. \quad (11.13)$$

Треба зауважити, що різні способи інтегрування ірраціональних функцій часто призводять до різних аналітичних виразів первісної. Проте, за теоремою 9.4 (лекція 9) ми отримуємо вирази, які відрізняються тільки на константу. Для перевірки правильності інтегрування корисне перевірити цей факт.

## 11.2. Неелементарні інтеграли

Інтегрування елементарних функцій може привести до неелементарних функцій. Доведено, що інтеграли від деяких трансцендентних функцій не можуть бути виражені в елементарних функціях. Наприклад:

$$\int e^{-x^2} dx; \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx; \quad \int \frac{dx}{\ln(x)}. \quad (11.14)$$

Інтеграли від алгебраїчних функцій, також не завжди виражаються через елементарні функції. Прикладом може слугувати еліптичні інтеграли:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1. \quad (11.15)$$

## 11.3. Застосування визначеного інтегралу

За допомогою визначеного інтеграла можна обчислювати реальні величини такі, як довжина дуги, площа фігури, об'єм тіла і т. д.

### 11.3.1. Обчислення площі геометричних фігур

За означенням визначеного інтеграла (означення 9.1 лекція 9) він дорівнює площі  $S$  криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної і невід'ємної функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  (рис. 9.1 лекція 9):

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (11.16)$$

Зауважимо, що формула (11.16) є *означенням площі фігури*, а не навпаки, оскільки визначений інтеграл виступає у якості формальної основи поняття площі. Але при такому означенні площа може бути як додатною, так і від'ємною, в залежності від знаку  $f(x)$ . Тому

визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ, які розташовані над віссю абсцис і під цією віссю на відрізку  $[a, b]$  (рис. 11.1)

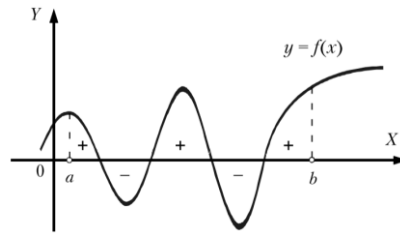


Рис. 11.1. Площа зі знаком.

Нехай функції  $f$  і  $g$  неперервні на відрізку  $[a, b]$  та виконується нерівність  $f(x) \geq g(x)$  для всіх  $a \leq x \leq b$ . Тоді площу фігури, обмеженої цими лініями, знаходять за такою формулою (рис. 11.2):

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx . \quad (11.17)$$

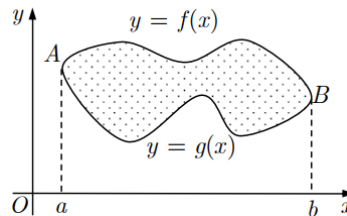


Рис. 11.2. Площа фігури, обмеженою двома лініями.

Крім того, визначений інтеграл залежить від напрямку інтегрування. Дійсно, якщо нумерувати точки розбиття від  $b$  до  $a$ , то  $x_i < x_{i-1}$ , тому  $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) < 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , і тому інтегральна сума  $I(f, P)$  (формула (9.1) лекція 9) змінює знак. Звідси маємо:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx .$$

Таким чином, визначений інтеграл можна вважати орієнтованою площею фігури.

Залежність від напрямку інтегрування, яскраво проявляється, якщо крива лінія  $L$ , що обмежує площу, задана в параметричній формі рівняннями  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Тоді площу фігури знаходять за формулою:

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \cdot f'(t) dt \right| . \quad (11.18)$$

Абсолютна величина тут необхідна, як показує такий приклад.

**Приклад 11.2.** Застосуємо формулу (11.18) для обчислення площі одиничного круга, центр якого розташований на початку координат. Тоді параметричне рівняння кола, яке обмежує круг, має вигляд  $x = \cos(t)$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Зауважимо, що добуток  $g(t) \cdot f'(t) = -\sin(t)^2$  буде від'ємним, тому маємо:

$$\int_0^{2\pi} -\sin(t)^2 dt = - \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 dt = - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = - \left. \frac{t}{2} \right|_0^{2\pi} = -\pi .$$

### 11.3.2. Обчислення довжини ліній

Лінія  $L$  на площині називається гладкою, якщо в параметричній формі вона задається неперервно диференційованими функціями  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , тобто функціями  $f(t)$  і  $g(t)$ , які мають неперервні похідні. Довжиною  $l$  гладкої лінії  $L$  називається

границя, до якого збігається довжина вписаної в неї ламаною при необмеженому збільшенні числа її відрізків і при збіганні довжини найбільшого з відрізків до нуля (рис. 11.3).

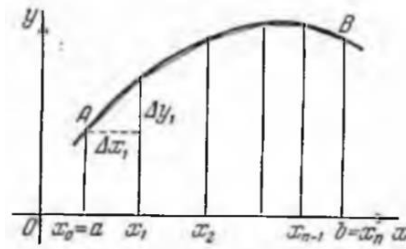


Рис. 11.3. Довжина лінії.

Довжина  $dl$  відрізка ламаної (рис. 11.3) за теоремою Піфагора дорівнює  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Оскільки,  $dx = x'(t)dt = f'(t)dt$  і  $dy = y'(t)dt = g'(t)dt$ , то довжина лінії  $L$  обчислюється за таким інтегралом:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt . \quad (11.19)$$

Якщо гладка лінія  $L$  задана явним чином і описується неперервно диференційованою функцією  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то в цьому випадку  $x = t$ ,  $y = f(t)$ . Тоді  $dl = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$  та із формули (11.19), як частковий випадок, маємо таку формулу:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx . \quad (11.20)$$

**Приклад 11.3.** Знайдемо довжину дуги параболи  $y = x^2/2$  на проміжку  $0 \leq x \leq 2$ , тобто від початку координат до точки  $(2,2)$ . Маємо  $y'(x) = x$ , тоді з формул (11.20) і (11.12) отримуємо:

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] \Big|_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) .$$

**Приклад 11.4.** Обчислимо довжину дуги еліпса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , де  $a$  – велика піввісь, а  $b$  – мала піввісь еліпсу. Рівняння еліпсу в параметричній формі має вигляд  $x = a \cos(t)$ ,  $y = b \sin(t)$ . Звідси маємо  $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = \sqrt{a^2 \cos^2(t) + (a^2 - c^2) \sin^2(t)} = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2(t)} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)}$ , де  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  – пів-відстань між фокусами еліпсу, а  $\varepsilon = c/a$  – ексцентриситет еліпсу. Обчислимо довжину дуги на проміжку  $0 \leq t \leq z$ , тоді отримуємо:

$$E(z) = a \int_0^z \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt .$$

Цей інтеграл називається «еліптичним», оскільки він пов'язаний з довжиною дуги еліпса. Він не виражається в елементарних функціях і тому вважається спеціальною математичною функцією, яку вивчав французький математик Лежандр (1753-1833 р.).

### 11.3.3. Обчислення об'ємів тіл

Будемо спиратися на інтуїтивне поняття об'єму. Розглянемо тіло, обмежене поверхнею  $S$ . Нехай  $S(x)$  - площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис і яка перетинає цю ось в точці  $x \in [a, b]$  (рис. 11.4). Будемо вважати функцію  $S(x)$  неперервною. Тоді об'єм  $dV$  нескінченно малого елемента тіла, пов'язаного з перерізом, дорівнює  $dV = S(x)dx$ . Звідси випливає, що об'єм тіла обчислюється за таким інтегралом:

$$V = \int_a^b S(x) dx . \quad (11.21)$$

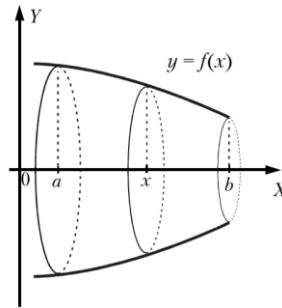


Рис. 11.4. Переріз тіла площиною.

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженою графіком неперервної і невід'ємної функції  $y = f(x)$ , відрізком осі абсцис і прямими  $x = a$  і  $x = b$  (рис. 11.4). Таке тіло називають *тілом обертання*. Площа поперечного перерізу тіла обертання в точці  $x$  дорівнює площі круга з радіусом  $f(x)$ , тобто  $S(x) = \pi \cdot f(x)^2$ . Тоді із формули (11.21) отримуємо формулу для *об'єму тіла обертання*:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx . \quad (11.22)$$

В точці перерізу  $x$  тіла обертання довжина кола перерізу з радіусом  $f(x)$  дорівнює  $L(x) = 2\pi f(x)$  (рис. 11.4). Елемент площі поверхні  $dS(x)$  тіла обертання дорівнює  $dS(x) = L(x)dl$ , де  $dl$  – довжина елемента ламаної, яка наближає криву  $f(x)$ . Тоді із формули (11.20) маємо  $dl = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$  і тоді  $dS(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ . Таким чином, *площа поверхні тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx . \quad (11.23)$$

## 11.4. Зразки розв'язування вправ

**11.4.1.** Обчислити такі інтеграли від ірраціональних функцій:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} ; \quad 2) \int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx ; \quad 3) \int \sqrt{x^2 + x + 2} dx .$$

*Розв'язання.* 1) Інтеграл має вигляд (11.1) і підінтегральний вираз містить коріння другого та третього ступеня. Найменшим спільним кратним чисел 2 і 3 є число 6. Тому робимо підстановку  $x = t^6$ , тоді  $dx = 6t^5 dt$ ,  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ . В результаті отримуємо такий інтеграл від раціональної функції:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t + 1} = 6 \int \frac{(t^3 + 1 - 1)}{t + 1} dt = \\ &= 6 \int \frac{(t^3 + 1)}{t + 1} dt - 6 \int \frac{dt}{t + 1} = 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \cdot \ln|t + 1|. \end{aligned}$$

Залишився інтеграл від полінома і тоді остаточно отримуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t + 1| \right) + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \cdot \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c .$$

2) Інтеграл має вигляд (11.6), тому виділимо у чисельнику диференціал від підкореневого виразу, тоді за формулами (11.7) і (11.8) маємо:

$$\int \frac{(2x + 5)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{d(x^2 + 2x + 5) + 3dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = 2\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} .$$

Інтеграл в правій частині має вигляд (11.3) та обчислюється за формулою (11.4):

$$3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = 3 \cdot \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + c .$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx = 2\sqrt{x^2+2x+5} + 3 \cdot \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2+2x+5} \right| + c.$$

3) Зробимо заміну  $u = (2x+1)/2$ , щоб виділити повний квадрат, тоді з формули (11.10) маємо:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+x+2} dx &= \int \sqrt{u^2+7/4} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2+7/4} + \frac{7}{8} \ln \left( u + \sqrt{u^2+7/4} \right) + c = \\ &= \frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2+x+2} + \frac{7}{8} \ln \left( \frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+2} \right) + c. \end{aligned}$$

**11.4.2.** Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

*Розв'язання.* Помножимо і чисельник і знаменник підкореневого виразу на  $\sqrt{x-1}$ , тоді отримуємо:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = d(\sqrt{x^2-1}) - \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Звідси, а також із формули 14 таблиці 9.2 (лекція 9) дістаємо;

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int d(\sqrt{x^2-1}) - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

**11.4.3.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $xy = 3$  і  $x + y = 4$ .

*Розв'язання.* Побудуємо графіки ліній. Графіком функції  $y = 3/x$  є гіпербола, одна із гілок якої розміщені в першій чверті, а лінія  $x + y = 4$  є пряма, що проходить через точки (0,4) і (4,0). Треба обчислити площу, яка утворена графіками цих функцій (рис. 11.5).

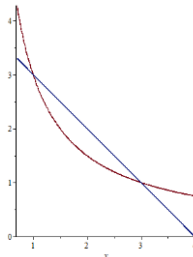


Рис. 11.5. Перетин гіперболи і прямої.

Знайдемо абсциси точок перетину цих графіків. Для цього розв'яжемо рівняння  $3/x = 4 - x$ , звідки  $x_1 = 1$ , і  $x_2 = 3$ . Тоді за формулою (11.17) дістаємо:

$$S = \int_1^3 \left( 4 - x - \frac{3}{x} \right) dx = \left( 4x - \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \ln(x) \right) \Big|_1^3 = 4 - 3 \cdot \ln(3).$$

**11.4.4.** Знайти площу еліпса, заданого канонічним рівнянням  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

*Розв'язання.* Ми вже знаємо параметричне рівняння еліпсу  $x = a \cdot \cos(t)$ ,  $y = b \cdot \sin(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тоді за формулою (11.18) отримуємо:

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_0^{2\pi} (-ab \cdot \sin(t)^2) dt \right| = ab \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt = \\ &= \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} - \frac{ab}{4} \sin(2t) \Big|_0^{2\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

**11.4.5.** Обчислити довжину гілки параболи  $y = 2\sqrt{x}$  від  $x = 0$  до  $x = 1$ .

*Розв'язання.* Похідна функції  $y = 2\sqrt{x}$  дорівнює  $y' = 1/\sqrt{x}$ . Тоді за формулою (11.20) дістаємо:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 1/x} dx = \int_0^1 \sqrt{x+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^1 \sqrt{x+1} d(\sqrt{x}) = 2 \int_0^1 \sqrt{u^2+1} dv.$$

Тут була зроблена заміна  $u = \sqrt{x}$ . Тоді із формули (11.12) маємо:

$$l = 2 \int_0^1 \sqrt{u^2+1} du = [u\sqrt{u^2+1} + \ln(u + \sqrt{u^2+1})] \Big|_0^1 = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**11.4.6.** Обчислити об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні дуги параболи  $y^2 = 2x$ ,  $0 \leq x \leq a$ , навколо осі  $Ox$ .

*Розв'язання.* За формулою (11.22) дістаємо:

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a 2x dx = 2\pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \pi a^2.$$

**11.4.7.** Обчислити площу поверхні, утвореної при обертанні дуги параболи  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , навколо осі  $Ox$ .

*Розв'язання.* Площа поверхні обчислюється за формулою (11.23):

$$S = 2\pi \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx.$$

Оскільки цей інтеграл достатньо складний, обчислимо спочатку за частинами невизначений інтеграл без множника  $2\pi$  тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{12} \int x \cdot d(1 + 4x^2)^{3/2} = \frac{1}{12} x \cdot (1 + 4x^2)^{3/2} - \frac{1}{12} \int (1 + 4x^2)^{3/2} dx = \\ &= \frac{x + 4x^3}{12} \sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{12} \int (1 + 4x^2) \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ &= \frac{x + 4x^3}{12} \sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{12} \int \sqrt{1 + 4x^2} dx - \frac{1}{3} \int x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \end{aligned}$$

Другий інтеграл заміною  $u = 2x$  зводиться до інтегралу, який нам вже зустрічався у вправі 11.4.5, а останній інтеграл з точністю до множника співпадає з інтегралом з лівої частини рівняння, звідки дістаємо:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{x + 4x^3}{12} \sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{24} \int \sqrt{1 + u^2} dv = \\ &= \frac{x + 4x^3}{12} \sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{48} [2x\sqrt{1 + 4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2})] = \\ &= \frac{x + 8x^3}{24} \sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{48} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}). \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{x + 8x^3}{32} \sqrt{1 + 4x^2} - \frac{1}{64} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}).$$

Тепер обчислюємо визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніця:

$$\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{x + 8x^3}{32} \sqrt{1 + 4x^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{64} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) \Big|_0^1 = \frac{9\sqrt{5}}{32} - \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{64}.$$

Нарешті множимо це число на  $2\pi$ , тоді отримуємо площу поверхні:

$$S = \frac{\pi(18\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5}))}{32}.$$

### 11.5. Завдання для самостійної роботи студентів

**11.5.1.** Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій (за варіантами):

$$1) \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}; \quad 2) \int \frac{\sqrt{x} dx}{3x - \sqrt[3]{x^2}}; \quad 3) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}; \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}}; \quad 5) \int \frac{dx}{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})x}.$$

**11.5.2.** Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій (за варіантами):

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 3}}; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}; \quad 3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x - 1}}; \\ 4) \int \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} dx; \quad 5) \int \sqrt{x^2 + 4x + 2} dx.$$

**11.5.3.** Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями. Зробіть рисунок і знайдіть всі точки перетину ліній (за варіантами):

1)  $y = x^2/2$ ,  $y = 2 - 3x/2$ ; 2)  $y = \sin(x)$ ,  $y = \cos(x)$  ( $0 \leq x \leq \pi/4$ );

3)  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ ; 4)  $y = \ln(x + 2)$ ,  $y = 2 \cdot \ln(x)$ ,  $x = 1$ ;

5)  $y = \operatorname{tg}(x)$ ,  $x = \pi/3$ ,  $y = 0$ .

**11.5.4.** Знайти довжину дуги кривої (за варіантами):

1)  $y = 1 - 2x^{3/2}$ , ( $0 \leq x \leq 11$ ); 2)  $y = x^2/2$ , ( $0 \leq x \leq 1$ );

3)  $y = \sqrt{9 - x^2}$ , ( $0 \leq x \leq 3$ ); 4)  $y = \ln(\sin(x))$ , ( $\pi/3 \leq x \leq 2\pi/3$ );

5)  $y = y = x^2/4$ , ( $0 \leq x \leq 2$ ).

**11.5.5.** Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями (за варіантами):

1)  $y^2 = 4x$ ,  $y = x$ ; 2)  $x^2/9 - y^2/4 = 1$ ,  $x = 5$ ; 3)  $y = x^2 + 1$ ,

$y = 3x + 1$ ; 4)  $y = \sin(2x)$ ,  $y = 4x/\pi$ ; 5)  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ .

*Вказівка:* Зробіть рисунок.

**11.5.6.** Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями (за варіантами):

1)  $y = x^3/3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ; 2)  $y^2 = 4x$ ,  $x = 3$ ; 3)  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ;

4)  $y = 2 + \sqrt{9 - x^2}$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ ; 5)  $y = \sin(x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . *Вказівка:* Зробіть рисунок.

## 12. Функції кількох змінних

Сукупність упорядкованих наборів дійсних чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , як нам відомо із алгебри (лекція 1), створюють  $n$ -вимірний лінійний простір  $\mathbb{R}^n$ . Функцією  $n$  змінних називається числова функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка визначена в деякій області  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$  і приймає значення на множині  $\mathbb{R}$ . В подальшому ми будемо розглядати переважно функції двох дійсних змінних, які за традицією позначаються як  $x$  і  $y$ , але більшість понять нескладно узагальнити на функції більшого числа змінних.

Графіком функції двох змінних  $z = f(x, y)$  називається множина точок  $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ , де  $(x, y) \in D(f)$ . Графіком функції  $z = f(x, y)$  буде деяка поверхня у просторі  $\mathbb{R}^3$ , проекція якої на площину  $Oxy$  збігається з її областю визначення (рис. 12.1).

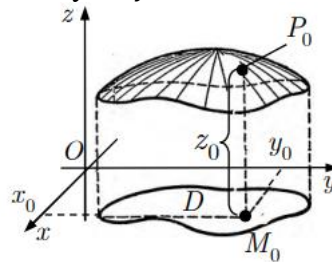


Рис. 12.1. Графік функції двох змінних.

### 12.1. Неперервні функції кількох змінних

В просторі  $\mathbb{R}^n$  можна визначити *евклідову метрику*, тобто *відстань* між точками  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  і  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  за формулою:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (12.1)$$

Метрика перетворює лінійний простір  $\mathbb{R}^n$  в *метричний простір*, якій називається  *$n$ -вимірним евклідовим простором* і позначається як  $\mathbb{E}^n$ . Елементи евклідова простору прийнято називати *точками* і позначати як  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Зокрема, площина є двовимірним евклідовим простором  $\mathbb{E}^2$ . Нехай  $\delta > 0$ , тоді  $\delta$ -окіл точки  $p(x_0, y_0)$  на площині визначається за формулою  $O_\delta(p) = \{q : d(p, q) < \delta\}$ . Це буде відкритий круг (без кола) радіусу  $\delta$  з центром в точці  $p(x_0, y_0)$  (рис. 12.2). Нагадаємо, що  $\varepsilon$ -окіл  $O_\varepsilon(b)$  числа  $b \in \mathbb{R}$  визначається за формулою (6.1) (лекція 6).

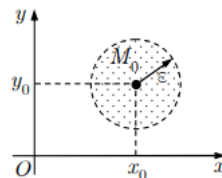


Рис. 12.2. Окіл точки на площині.

**Означення 12.1.** Функція  $z = f(x, y)$  називається *неперервною* в точці  $p(x_0, y_0)$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу  $O_\varepsilon(z(p))$  існує  $\delta$ -окіл  $O_\delta(p)$  такий, що  $z(O_\delta(p)) \subseteq O_\varepsilon(z(p))$ .

Якщо функція  $z = f(x, y)$  неперервна в точці  $p$ , то це позначають таким чином:

$$\lim_{q \rightarrow p} z(q) = z(p) \quad .$$

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена в деякому околі  $O(p)$  точки  $p(x_0, y_0)$ , тоді розглянемо зміщення із точки  $p$  в іншу точку цього околу  $p + h = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , де  $h = (\Delta x, \Delta y)$  – вектор зміщення. Довжина (або норма)  $|h|$  вектору  $h$  визначається через евклідову метрику  $|h| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Позначимо як  $\Delta z(x_0, y_0) = z(p + h) - z(p)$  відповідний приріст функції  $z(x, y)$  в точці  $p$ , тоді умову в означенні 12.1 можна записати таким чином  $\Delta z(x_0, y_0) \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Іншими словами, для неперервних функцій кількох змінних залишається вірною властивість (7.3) (лекція 7) неперервних функцій однієї змінної. Залишається вірною також теорема 7.1 (лекція 7). Функція називається *неперервною на області  $D$* , якщо вона неперервна в кожній точці із області  $D$ .

## 12.2. Диференційовані функції кількох змінних

### 12.2.1. Частинні похідні функції

Розглянемо функцію  $z = f(x, y)$  і припишемо аргументу  $y$  постійне значення  $y = y_0$ . Отриману при цьому функцію  $z(x) = f(x, y_0)$  від однієї змінної  $x$  можна зобразити геометрично як переріз поверхні  $z = f(x, y)$  площиною  $y = y_0$  перпендикулярною осі ординат (рис. 12.3). Припустимо, що у функції  $z(x) = f(x, y_0)$  є звичайна похідна в точці  $x = x_0$  (формула (7.5) лекція 7). Вона називається частинною похідною функції  $z(x, y)$ .

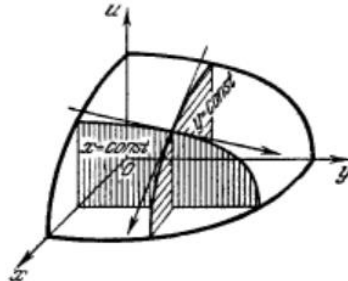


Рис. 12.3. Частинні похідні функції кількох змінних.

**Означення 12.2.** Частинною похідною функції  $z = f(x, y)$  за змінною  $x$  (за змінною  $y$ ) у точці  $p(x_0, y_0)$  називають такі границі (якщо вони існують):

$$z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad (12.2)$$

$$z'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)}{\Delta y}. \quad (12.3)$$

Частинні похідні перетворюються на функції, коли точка  $p$  пробігає область визначення функції  $D(f)$ . Частинні похідні як функції від  $x$  і  $y$  позначається таким чином:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, \quad z'_x(x, y), \quad z'_y(x, y).$$

Зауважимо, що частинна похідна це звичайна похідна, у якої одна зі змінних фіксована, тому частинну похідну функції  $z = f(x, y)$  знаходять за звичайними правилами обчислення похідних функцій однієї змінної при цьому іншу змінну вважають сталою. Наприклад, для функції  $z = x^y$  маємо:

- 1)  $z'_x(x, y) = yx^{y-1}$ , за правилом диференціювання степеневі функції;
- 2)  $z'_y(x, y) = x^y \ln(x)$  за правилом диференціювання показникової функції.

Студенти часто помиляються при обчисленні частинних похідних через наявність кількох змінних. Тут можна поради, позначити одну змінну як константу та диференціювати за іншою, оскільки диференціювати функцію  $x^{y_0}$  або  $x_0^y$  значно простіше чим функцію  $x^y$ . Після диференціювання треба підставити замість константи змінну.

### 12.2.2. Повний диференціал функції

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена в околі  $O(p)$  точки  $p(x_0, y_0)$ , і має в ньому частинні похідні  $z'_x(x, y)$  і  $z'_y(x, y)$ , тоді розглянемо зміщення із точки  $p$  в іншу точку цього околу  $p + h = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , де  $h = (\Delta x, \Delta y)$  – вектор зміщення. Диференціалом  $dz(h)$  функції  $z = f(x, y)$  в точці  $p(x_0, y_0)$  відносно зміщення  $h = (\Delta x, \Delta y)$  називається такий вираз:

$$dz(h) = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (12.4)$$

Таким чином, диференціал залежить від частинних похідних і вектору зміщення.

**Означення 12.4.** Функція  $z = f(x, y)$  називається диференційованою в околі точки  $P$ , якщо вона має в цьому околі повний диференціал, тобто виконується така умова:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{z(p + h) - z(p) - dz(h)}{|h|} = 0. \quad (12.5)$$

Умова (12.5) означає, що диференціал  $dz(h)$  являється головною лінійною (за

змінними  $\Delta x$  і  $\Delta y$ ) частиною приросту функції  $z = f(x, y)$  в точці  $p$ . Умову (12.5) можна також записати у такому вигляді в околі точки  $P$ :

$$z(p + h) = z(p) + dz(h) + o(|h|), \quad (12.6)$$

де величина  $o(|h|)$  нескінченно мала за відношенням до  $|h|$ , тобто  $o(|h|)/|h| \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Тому повний диференціал можна використати для наближеного обчислення значень функції  $z = f(x, y)$ , оскільки із формули (12.6) випливає, що при достатньо малому зсуві  $(\Delta x, \Delta y)$  буде виконуватися така наближена рівність:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (12.7)$$

Зауважимо, що з існування частинних похідних і диференціала у точці ще не випливає диференційованість функції в цієї точці. Наприклад, функція  $z(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$  має частинні похідні в околі нуля, але не є диференційованою в нулі. Однак, існує проста достатня умова диференційованості функції. Будемо вважати, що величини  $\Delta x, \Delta y$  і  $|h| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  мають однаковий порядок мализни.

**Теорема 12.1.** Якщо функція  $z = f(x, y)$  має неперервні частинні похідні в деякому околі точки  $p$ , то функція  $z(x, y)$  буде диференційована в цій точці.

**Доведення.** Повний приріст  $\Delta z(x_0, y_0) = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$  функції  $z(x, y)$  в околі точки  $p(x_0, y_0)$  можна записати таким чином:

$$\Delta z(x_0, y_0) = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0 + \Delta y) + z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0). \quad (12.8)$$

Застосуємо теорему 8.3 о середньому значенні (теорема Лагранжа, лекція 8) до функції однієї змінної  $z(x, y_0 + \Delta y)$  на відрізку  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , тоді заключаємо, що існує точка  $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$  така, що  $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0 + \Delta y) = z'_x(c, y_0 + \Delta y)\Delta x$ . Аналогічно застосуємо теорему Лагранжа до функції однієї змінної  $z(x_0, y)$  на відрізку  $[y_0, y_0 + \Delta y]$ , тоді заключаємо, що існує точка  $d \in (y_0, y_0 + \Delta y)$  така, що виконується рівність  $z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = z'_y(x_0, d)\Delta y$ . Звідси та з формули (12.8) маємо:

$$\Delta z(x_0, y_0) = z'_x(c, y_0 + \Delta y)\Delta x + z'_y(x_0, d)\Delta y. \quad (12.9)$$

Оскільки частинні похідні  $z'_x(x, y)$  і  $z'_y(x, y)$  неперервні в точці  $(x_0, y_0)$ , то ми можемо записати  $z'_x(c, y_0 + \Delta y) = z'_x(x_0, y_0) + \alpha_1(|h|)$  і  $z'_y(x_0, d) = z'_y(x_0, y_0) + \alpha_2(|h|)$ , де  $\alpha_1(|h|) \rightarrow 0$  і  $\alpha_2(|h|) \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Звідси і з формули (12.9) маємо:

$$\Delta z(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(|h|),$$

де  $o(|h|) = \alpha_1(|h|)\Delta x + \alpha_2(|h|)\Delta y$ . Отже ми отримали в іншій формі рівність (12.6) і тому функція  $z(x, y)$  буде диференційованою в точці  $p$ . Таким чином, теорему доведено.  $\square$

Функцію, яка має неперервні частинні похідні називається неперервно диференційованою функцією.

### 12.2.3. Похідна за напрямом і градієнт функції

Диференційована функція має частинні похідні не тільки за змінними  $x$  і  $y$ , але і за будь-яким напрямом. Напрямок на площині визначається кутом  $\alpha$ , якій вектор  $h$  утворює з віссю абсцис. Цей кут співпадає з напрямом орта (вектору одиничної довжини)  $h_\alpha = h/|h| = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ .

**Означення 12.5.** Похідною функції  $z = f(x, y)$  у точці  $p(x_0, y_0)$  за напрямом вектору  $h$ , якій утворює кут  $\alpha$  з віссю абсцис, називається така границя:

$$D_\alpha z(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\sin(\alpha)) - z(x_0, y_0)}{t}. \quad (12.10)$$

**Теорема 12.2.** Якщо функція  $z = f(x, y)$  диференційована в точці  $p(x_0, y_0)$ , то вона має похідну  $D_\alpha z(p)$  за будь-яким напрямом  $h$ , яка дорівнює:

$$D_\alpha z(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0)\cos(\alpha) + z'_y(x_0, y_0)\sin(\alpha). \quad (12.11)$$

**Доведення.** Із формули (12.10) маємо  $\Delta x = t\cos(\alpha)$  і  $\Delta y = t\sin(\alpha)$ , тобто вектор зміщення  $h = th_\alpha$  і тому  $|h| = |t||h_\alpha| = |t|$ . Звідси, а також із формул (12.6) і (12.10) маємо:

$$D_\alpha z(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z'_x(p)t\cos(\alpha) + z'_y(p)t\sin(\alpha) + o(|t|)}{t} = z'_x(p)\cos(\alpha) + z'_y(p)\sin(\alpha).$$

Таким чином, теорему доведено.  $\square$

Похідна за напрямом  $D_\alpha z(p)$  характеризує швидкість зміни функції  $z(x, y)$  у точці  $p$  у напрямі орту  $h_\alpha$ . При цьому абсолютна величина похідної  $|D_\alpha z(p)|$  характеризує величину швидкості зміни, а знак вказує на спад або зростання функції в цьому напрямку.

**Означення 12.6.** Градієнтом диференційованої функції  $z = f(x, y)$  у точці  $p(x_0, y_0)$  називається вектор (рядок), складений із часткових похідних  $\text{grad}z(p) = (z'_x(p), z'_y(p))$ .

Довжина градієнта дорівнює  $|\text{grad}z(x_0, y_0)| = \sqrt{z'_x(x_0, y_0)^2 + z'_y(x_0, y_0)^2}$ . З формули (12.11) випливає, що похідна за напрямом  $D_\alpha z(p)$  дорівнює скалярному добутку вектору-рядка  $\text{grad}z(p)$  на орт  $h_\alpha$ , тобто  $D_\alpha z(p) = \text{grad}z(p) \cdot h_\alpha$ . З іншого боку із аналітичної геометрії відомо, що скалярний добуток двох векторів на площині дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними:

$$D_\alpha z(p) = \text{grad}z(p) \cdot h_\alpha = |\text{grad}z(p)| \cos(\varphi), \quad (12.12)$$

де  $\varphi$  - кут між векторами  $\text{grad}(z, p)$  і  $h_\alpha$ . Із формули (12.12) заключаємо, що напрям за градієнтом (коли  $\varphi = 0$ ) є напрямом найшвидшого зростання функції у даній точці, а протилежний напрям (коли  $\varphi = \pi$ ) є напрямом найшвидшого її спадання.

Таким чином, градієнт  $\text{grad}z(x_0, y_0)$  можна розглядати у певному сенсі як аналог похідної в точці, оскільки через нього обчислюється диференціал і похідна за напрямом при умові, що диференціал повний. Будемо вважати, що студенти приблизно представляють себе як узагальнити означення і результати цього параграфу на функції від трьох і більшого числа аргументів.

#### 12.2.4. Похідна складної функції і неявної функції

Розглянемо функцію  $z = f(x, y)$  двох змінних, кожна з яких є функцією змінної  $t$ , тоді функція  $z(t) = f(x(t), y(t))$  є складною функцією від  $t$ . Якщо функції  $x(t), y(t), f(x, y)$  диференційовані, то функція  $z(t)$  також буде диференційованою та її похідну знаходять за «ланцюговою» формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (12.13)$$

Нехай задано рівняння  $F(x, y) = 0$ , де  $F(x, y)$  неперервно диференційована функція, така, що в околі деякої точки  $p(x_0, y_0)$  виконується умова  $F'_y(x, y) \neq 0$ . Тоді в околі точки  $p$  рівняння  $F(x, y) = 0$  задає неявну функцію  $y = f(x)$ . Диференціюємо рівняння  $F(x, y) = 0$  по  $x$ , тоді з формули (12.13) маємо  $F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0$ . Звідки отримуємо похідну неявної функції  $y = f(x)$  за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (12.14)$$

### 12.3. Похідні та диференціали вищих порядків

#### 12.3.1. Похідні вищих порядків для функції кількох змінних

Точка  $p(x_0, y_0)$  називається внутрішньою точкою області  $D \subseteq \mathbb{E}^2$ , якщо точка  $p$  входить в область  $D$  разом з деяким своїм околom  $O(p) \subseteq D$ . Нехай функція  $z = f(x, y)$  диференційована в кожній внутрішній точці області  $D$  і має в неї обидві частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y(x, y).$$

Ці похідні своєю чергою є функціями незалежних змінних  $x$  і  $y$ , оскільки вони залежать від точки  $p(x, y)$ , де обчислюється похідна. Частинні похідні від цих функцій (якщо вони існують) називаються частинними похідними другого порядку від функції  $z = f(x, y)$ . Кожна похідна першого порядку утворює дві частинні похідні другого порядку, тому ми отримуємо чотири частинні похідні другого порядку, які позначаються таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}. \end{aligned}$$

Похідні  $z''_{xy}$  і  $z''_{yx}$  називаються змішаними. Функція  $z = f(x, y)$  належить класу  $C^2$  в області  $D$ , якщо вона має неперервні частинні похідні другого порядку во всіх внутрішніх точках області  $D$ . Такі функції називаються *двічі неперервне диференційованими*.

**Теорема 12.3.** Якщо функція  $z = f(x, y)$  належить класу  $C^2$  в області  $D$ , то другі змішані похідні рівні між собою  $z''_{xy}(x, y) = z''_{yx}(x, y)$ .

**Доведення.** Нехай  $a(x_0, y_0)$  – внутрішня точка області  $D$ , тоді розглянемо ненульові зміщення  $\Delta x$  і  $\Delta y$  із точки  $a$ , які дають ще три точки  $b(x_0 + \Delta x, y_0)$ ,  $c(x_0, y_0 + \Delta y)$  і  $d(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ . Виберемо зміщення  $\Delta x$  і  $\Delta y$  настільки малими, щоб весь прямокутник  $abcd$  належав внутрішності області  $D$ . Складемо такий вираз:

$$E = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0 + \Delta y) + z(x_0, y_0). \quad (12.15)$$

Введемо допоміжну функцію  $\varphi(x) = z(x, y_0 + \Delta y) - z(x, y_0)$ ,  $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$ , яка дорівнює різниці значень функції  $z(x, y)$  в точках, розташованих на прямих  $cd$  і  $ab$ , які мають однакову абсцису. Зокрема на кінцях відрізка маємо  $\varphi(x_0) = z(c) - z(a)$  і  $\varphi(x_0 + \Delta x) = z(d) - z(b)$ . Звідси і з формули (12.15) дістаємо  $E = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ . Зауважимо, що функція  $\varphi(x)$  диференційована на відрізку  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ :

$$\varphi'(x) = z_x(x, y_0 + \Delta y) - z_x(x, y_0). \quad (12.16)$$

Тому застосуємо теорему 8.3 (Лагранжа, лекція 8) до функції  $\varphi(x)$  на відрізку  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , тоді із (12.16) маємо:

$$E = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\alpha)\Delta x = (z_x(\alpha, y_0 + \Delta y) - z_x(\alpha, y_0))\Delta x, \quad (11.17)$$

де  $\alpha \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ . За умовою теореми функція  $z_x(\alpha, y)$  також буде диференційованою на відрізку  $[y_0, y_0 + \Delta y]$ , тому за теоремою 7.3 існує точка  $\beta \in (y_0, y_0 + \Delta y)$  така, що  $z_x(\alpha, y_0 + \Delta y) - z_x(\alpha, y_0) = z_{xy}(\alpha, \beta)\Delta y$ . Звідси та з формули (12.17) дістаємо:

$$E = z_{xy}(\alpha, \beta)\Delta x\Delta y. \quad (12.18)$$

Аналогічно вводиться функція  $\psi(y) = z(x_0 + \Delta x, y) - z(x_0, y)$ ,  $y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y$ , за допомогою якої аналогічним міркуванням доводиться, що існує точка  $(\gamma, \delta)$  всередині прямокутника  $abcd$  така, що  $E = z_{yx}(\gamma, \delta)\Delta x\Delta y$ . Тоді із формули (12.18) заключаємо:

$$z_{xy}(\alpha, \beta) = z_{yx}(\gamma, \delta). \quad (12.19)$$

Нехай тепер  $\Delta x \rightarrow 0$  і  $\Delta y \rightarrow 0$ , тоді  $(\alpha, \beta) \rightarrow (x_0, y_0)$  і  $(\gamma, \delta) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Отже переходячи до границі в рівності (12.19) в силу неперервності других похідних  $z_{xy}(x, y)$  і  $z_{yx}(x, y)$  в точці  $(x_0, y_0)$  заключаємо, що  $z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0)$  і теорему доведено.  $\square$

Умова неперервності похідних є суттєвою, якщо вона не виконана, то змішані похідні можуть бути нерівними. Такий приклад надає функція:

$$z(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)},$$

з додатковою умовою  $z(0,0) = 0$ . У неї другі похідні в нулі різні.

Таким чином, функція класу  $C^2$  має не 4, а лише 3 частинних похідних 2 порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Частинні похідні від частинних похідних другого порядку називаються частинними похідними третього порядку і т. д. Функція  $z = f(x, y)$  належить класу  $C^n$ , якщо вона має неперервні частинні похідні до  $n$ -го порядку включно. Теорема 12.3 має важливий наслідок.

**Теорема 12.4.** Якщо функція  $z = f(x, y)$  належить класу  $C^n$ , то всі її частинні похідні до  $n$ -го порядку включно не залежать від порядку диференціювання.

Із цієї теореми випливає, що функція  $z = f(x, y)$  класу  $C^n$  має  $n + 1$  неперервну частинну похідну  $n$ -го порядку, які можна записати таким чином:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

### 12.3.2. Диференціали вищих порядків функції кількох змінних

За аналогією з формулою (12.4) *перший диференціал* функції  $z = f(x, y)$  в області  $D$ , де функція диференційована, має вигляд:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (12.20)$$

де  $dx$  і  $dy$  – диференціали (зсуви) незалежних змінних. Таким чином, диференціал функції залежить від чотирьох незалежних змінних  $x, y, dx$  і  $dy$ . Тому при диференціюванні за змінними  $x$  та  $y$  диференціали вважаються константами.

*Повним диференціалом другого порядку* для функції  $z = f(x, y)$  класу  $C^2$  називається диференціал від диференціалу першого порядку  $dz$ . Тоді отримуємо таку рівність:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) dy.$$

Обчисливши частинні похідні від виразів у круглих дужках ( $dx$  і  $dy$  вважаються постійними) та підставивши їх у формулу для  $d^2z$ , з урахуванням теореми 12.3, отримаємо:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2. \quad (12.21)$$

Тут вирази  $dx^2$  і  $dy^2$  означають скорочений запис для виразів  $(dx)^2$  та  $(dy)^2$  відповідно, а не диференціали функцій  $x^2$  і  $y^2$ . Вираз (12.21) нагадує квадратний тричлен, тому для його запам'ятовування іноді другий диференціал  $d^2z$  записують у символічній формі:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z.$$

Аналогічно визначаються диференціали вищих порядків. Наприклад, для функції  $z = f(x, y)$  класу  $C^3$  повний диференціал третього порядку можна записати так:

$$d^3z = \sum_{i=0}^3 C_3^i \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^{3-i} \partial y^i} dx^{3-i} dy^i = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z,$$

де  $C_3^i$ ,  $0 \leq i \leq 3$ , – біноміальні коефіцієнти. Ця формула нагадує біном Ньютона і за допомогою математичної індукції її можна узагальнити на диференціали будь-якого порядку. Таким чином, для функції  $z = f(x, y)$  класу  $C^n$  повний диференціал  $n$ -го порядку має такий вигляд:

$$d^n z = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i} \partial y^i} dx^{n-i} dy^i = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z,$$

де  $C_n^i$ ,  $0 \leq i \leq n$  – біноміальні коефіцієнти.

## 12.4. Зразки розв'язування вправ

**12.4.1.** Знайти частинні похідні першого порядку для таких функцій:

$$\text{а) } z = 3x^2y + 5xy + 8x; \quad \text{б) } z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

*Розв'язання.* а) Припускаючи, що  $y = y_0$  – константа, маємо  $z'_x = 6xy_0 + 5y_0 + 8$ . Звідки отримуємо  $z'_x = 6xy + 5y + 8$ . Далі, припускаючи, що  $x = x_0$  – константа, аналогічно отримуємо  $z'_y = 3x^2 + 5x$ .

б) Диференціюючи логарифм як складну функцію, отримуємо:

$$z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**12.4.2.** Знайти диференціал першого порядку функції  $z = x^y$ .

*Розв'язання.* Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку  $z'_x = y \cdot x^{y-1}$  і  $z'_y = x^y \cdot \ln(x)$ . Звідки за формулою (12.20) отримуємо диференціал:

$$dz = y \cdot x^{y-1} dx + x^y \cdot \ln(x) dy.$$

**12.4.3.** Обчислити наближене значення  $1,01^{4,02}$  за допомогою повного диференціалу.

*Розв'язання.* Обчислимо функцію  $z(x, y) = x^y$  у точці  $p(1,4)$ , тоді маємо  $z(1,4) = 1$ . Обчислимо частинні похідні цієї функції  $z'_x = y \cdot x^{y-1}$ ,  $z'_y = x^y \cdot \ln(x)$  та їх значення в точці  $z'_x(1,4) = 4$ ,  $z'_y(1,4) = 0$ . Частинні похідні неперервні в околі точки  $p$ , тоді з теореми 12.1 слідує, що функція  $x^y$  диференційована в точці  $p$  і тому її диференціал повний в  $p$ . Тоді за формулою (12.7) маємо:

$$1,01^{4,02} = z(1 + 0,01, 4 + 0,02) \approx z(1,4) + df(0,01, 0,02) = 1 + 4 \cdot 0,01 = 1,04.$$

**12.4.4.** Знайти похідну функції  $z = x^2 + 2x + y^2$  в точці  $p(1,7)$  за напрямом вектору  $h = (5,12)$ .

*Розв'язання.* Спочатку знайдемо орт (одичинний вектор) за напрямом вектору  $h$ :

$$h_\alpha = \frac{h}{|h|} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} h = \left( \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right).$$

Далі, обчислимо градієнт функції в точці  $p(1,7)$ . Маємо  $z'_x = 2x + 2$ ,  $z'_y = 2y$ ,  $z'_x(1,7) = 4$  і  $z'_y(1,7) = 14$ . Тоді  $\text{grad}z(1,7) = (4,14)$  і за формулою (12.11) (або (12.12)) отримуємо похідну за напрямом:

$$D_\alpha z(1,7) = \text{grad}z(1,7) \cdot h_\alpha = 4 \cdot \frac{5}{13} + 14 \cdot \frac{12}{13} = \frac{188}{13}.$$

**12.4.5.** Знайти градієнт функції  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  та його довжину в точці  $p(\sqrt{3}, 1)$ .

*Розв'язання.* Обчислимо частинні похідні цієї функції:

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Звідки отримуємо  $z'_x(\sqrt{3}, 1) = \sqrt{3}/2$ ,  $z'_y(\sqrt{3}, 1) = 1/2$ . Таким чином, вектор градієнта  $\text{grad}z(\sqrt{3}, 1)$  має координати  $(\sqrt{3}/2, 1/2)$  і довжину 1.

**12.4.6.** Знайти похідну складної функції  $z(t) = f(x(t), y(t))$ , якщо  $f(x, y) = xy$ ,  $x = \cos(t)$ ,  $y = \sin(t)$ .

*Розв'язання.* За формулою (12.13) маємо:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = y(-\sin(t)) + x\cos(t) = -\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = \cos(2t).$$

**12.4.7.** Знайти похідну  $y'(x)$  неявної функції, якщо  $\sin(x) - e^y = 0$ .

*Розв'язання.* За формулою (12.14) маємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\cos(x)}{-e^y} = \frac{\cos(x)}{e^y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{ctg}(x).$$

Тут ми скористались рівнянням  $\sin(x) = e^y$ , яке випливає із умови задачі.

**12.4.8.** Знайти частинні похідні другого порядку для функції  $z = 2x^2 + 4y^2 + 8xy$ . Обчислити значення  $z''_{xy}(2,1)$ .

*Розв'язання.* Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку  $z'_x = 4x + 8y$ ,  $z'_y = 8y + 8x$ . Потім знайдемо частинні похідні другого порядку:  $z''_{xx} = (4x + 8y)'_x = 4$ ,  $z''_{xy} = (4x + 8y)'_y = 8$ ,  $z''_{yx} = (8x + 8y)'_x = 8$ ,  $z''_{yy} = (8x + 8y)'_y = 8$ . Наприкінці, обчислимо значення частинної похідної  $z''_{xy}(2,1) = 8$ . Зауважимо, що другі похідні неперервні, тоді згідно з теоремою 12.3  $z''_{xy} = z''_{yx}$ , і тому похідну  $z''_{yx}$  можна було і не обчислювати.

**12.4.9.** Знайти диференціал 2-го порядку для функції  $z = \sin(x) \cdot e^y$ .

*Розв'язання.* Знаходимо похідні 2-го порядку:

$$z''_{xx} = -\sin(x) \cdot e^y, \quad z''_{xy} = \cos(x) \cdot e^y, \quad z''_{yy} = \sin(x) \cdot e^y.$$

Підставляємо ці значення у формулу (12.21) для диференціала 2-го порядку:

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2 = \\ &= -\sin(x) \cdot e^y dx^2 + 2\cos(x) \cdot e^y dx dy + \sin(x) \cdot e^y dy^2. \end{aligned}$$

### 12.5. Завдання для самостійної роботи студентів

**12.5.1.** Знайти всі частинні похідні і диференціал 1-го порядку функції (за варіантами):

$$1) z = x^3y - xy^3; \quad 2) z = 2x^3y + 5x^2y^2 - xy^3;$$

$$3) z = x^3 + 3x^2y^2 - xy + 3x; \quad 4) z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad 5) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

**12.5.2.** Замінюючи приріст функції її повним диференціалом обчислити наближене значення заданого числа (за варіантами):

$$1) 10,02^{5,01}; \quad 2) 1,03^{8,02}; \quad 3) \ln(0,07^2 + 0,99^2); \quad 4) \ln(0,05^3 + 0,98^3);$$

$$5) \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}.$$

**12.5.3.** Знайти похідну функції  $z = f(x, y)$  в точці  $p$  за напрямом вектору  $h$  (за варіантами):

$$1) z = \frac{xy}{x+y}, p(1,1), h(3,4); \quad 2) z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, p(2,3), h(12, -5); \quad 3) z = x^y, p(1,2), h(6, -8);$$

$$4) z = \sqrt{x^2 + y^2}, p(3,4), h(1,0); \quad 5) z = \ln(xy), p(1,1), h(0,1).$$

**12.5.4.** Знайти градієнт функції  $z = f(x, y)$  в точці  $p$  (за варіантами):

$$1) z = x \cdot \sin(y), p(3, \pi/2); \quad 2) z = y \cdot \cos(x), p(\pi, 2);$$

$$3) z = x^4 + y^4, p(1, 1); \quad 4) z = \ln(x^3 + y^3), p(2, 2); \quad 5) z = (x + y)^2, p(3, 3).$$

**12.5.5.** Знайти значення похідних другого порядку  $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$  в точці  $p$  (за варіантами):

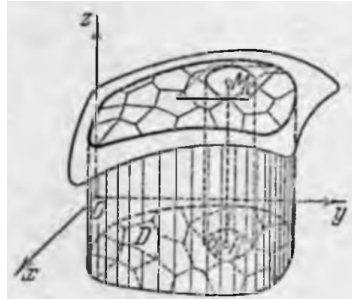
$$1) z = \cos(xy), p(\pi/2, 4); \quad 2) z = \cos(x) \cdot \cos(y), p(\pi/2, 4);$$

$$3) z = (x + 2y)^3, p(2, 1); \quad 4) z = x^3 + y^3, p(1, 3); \quad 5) z = \cos(x) + e^y, p(\pi/2, 0).$$

### 13. Подвійний і криволінійний інтеграли

Розглянемо поняття подвійного інтеграла, тобто інтеграла за плоскою областю. Нагадаємо, що криву називають *гладкою* (лекція 11), якщо вона задається в параметричній формі  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , неперервно диференційованими функціями  $\varphi$  і  $\psi$  на відрізку  $[a, b]$ . Криву  $L$ , як утворена зі скінченної кількості гладких кривих називають *кускове-гладкою*.

Подвійний інтеграл за плоскою областю є двомірним аналогом визначеного інтегралу Рімана і тому визначається аналогічно. Нехай неперервна функція  $z = f(x, y)$  визначена в обмеженій області  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , межа якої є замкненою кусково-гладкою кривою. Розіб'ємо область  $D$  на прямокутники (рис. 13.1), а решта процедура визначення подвійного інтегралу повторює процедуру, яка була описана в лекції 8. Тому ми одразу приведемо означення.



13.1. Розбиття плоскої області.

**Означення 13.1.** Якщо для деякої правильної послідовності розбиттів нижній і верхній інтеграл функції  $f(x, y)$  в області  $D$  співпадають, то це число називається *подвійним інтегралом* (Рімана) функції  $f(x, y)$  в області  $D$  і позначається таким чином:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) . \quad (13.1)$$

Якщо функція  $f(x, y)$  буде невід'ємною в області  $D$ , то інтеграл (13.1) дорівнює *об'єму криволінійного циліндру*, показаного на рис. 13.1. В цьому полягає геометричний зміст подвійного інтегралу.

#### 13.1. Повторні інтеграли

Властивості подвійного інтегралу аналогічні властивостям визначеного інтегралу від однієї змінної (лінійність, адитивність і т. д., лекція 9). Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення *повторного інтегралу*, який складається з двох звичайних визначених інтегралів.

Нехай область інтегрування  $D$  обмежена кусково-гладкою кривою  $L$ , яка складається із двох відрізків прямих  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ) і графіків двох гладких функцій  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$ , де  $y_1(x) \leq y_2(x)$ . В цьому випадку область  $D$  називають *правильною в напрямі осі  $Oy$* , тобто будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку відрізка  $[a, b]$  перетинає межу області не більше як у двох точках (рис. 13.2).

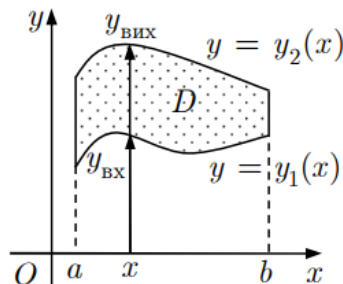
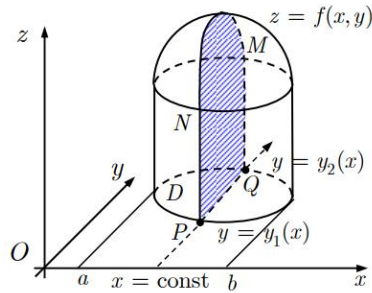


Рис. 13.2. Область правильна в напрямі осі  $Oy$ .

Нехай криволінійний циліндр заданий на області  $D$ , яка правильна в напрямі осі  $Oy$ . Зробимо переріз циліндричного тіла площиною, перпендикулярною до осі  $Ox$  в точці  $x \in [a, b]$  і позначимо як  $S(x)$  площу криволінійної трапеції, яку дістаємо з поперечного перерізу (рис. 13.3).



13.3. Переріз циліндричного тіла.

Для елемента об'єму  $dV$  пов'язаного з перерізом, будемо мати  $dV = S(x)dx$ . Звідси випливає, що об'єм тіла обчислюється інтегралом за відрізком  $[a, b]$ :

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx . \quad (13.2)$$

Площу  $S(x)$  криволінійної трапеції можна обчислити за формулою, в якій змінна  $x$  вважається константою:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy , \quad x \in [a, b] .$$

Таким чином, подвійний інтеграл від неперервної функції  $f(x, y)$  за областю  $D$  правильною в напрямі осі  $Oy$  обчислюється за такою формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx . \quad (13.3)$$

Праву частину формули (13.3) називають *повторним інтегралом* від функції  $f(x, y)$  за областю  $D$ . Визначений інтеграл в квадратних дужках називається *внутрішнім інтегралом* повторного інтегралу (13.3), а визначений інтеграл (13.2) називають *зовнішнім інтегралом* інтегралу (13.3). Повторний інтеграл (13.3) записують також в такому вигляді:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy .$$

Тепер змінимо ролі змінних  $x, y$  і розглянемо область інтегрування  $D$ , яка обмежена відрізками прямих  $y = c, y = d$  ( $c < d$ ) і графіками двох гладких функцій  $x_1(y)$  та  $x_2(y)$ , де  $x_1(y) \leq x_2(y)$ . Таку область  $D$  називають *правильною в напрямі осі  $Ox$* , тобто будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку відрізка  $[c, d]$  перетинає межу області не більше як у двох точках (рис. 13.4).

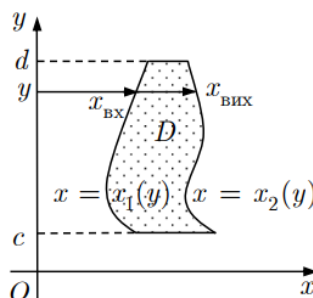


Рис. 13.4. Область правильна в напрямі осі  $Ox$ .

Подвійний інтеграл від неперервної функції  $f(x, y)$  за областю  $D$  правильною в напрямі осі  $Ox$  обчислюється за такою формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx . \quad (13.4)$$

Якщо область не є правильною в жодному з напрямів, то її треба *розбити на області, правильні в одному з напрямів*. Приклад такого розбиття, приведений на рис. 13.5.

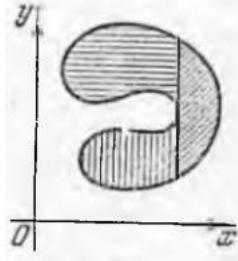


Рис. 13.5. Розбиття неправильної області.

Якщо область  $D$  — прямокутник, обмежений вертикальними лініями  $x = a$ ,  $x = b$ , та горизонтальними прямими  $y = c$ ,  $y = d$ , то має місце формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx , \quad (13.5)$$

тобто порядок інтегрування тут не має значення. Якщо підінтегральна функція є добутком функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ , то подвійний інтеграл за прямокутником  $D$  є добутком двох незалежних визначених інтегралів:

$$\iint_R f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy .$$

Площина  $S(D)$  двомірної області  $D$ , яка обмежена замкненою кусково-гладкою лінією, обчислюється за формулою:

$$S(D) = \iint_D dx dy . \quad (13.6)$$

Середнім значенням функції  $z = f(x, y)$  на області  $D$ , яка обмежена замкненою кусково-гладкою лінією, називається таке число:

$$A(f, D) = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dx dy . \quad (13.7)$$

Іншими словами, середнє значення функції  $z = f(x, y)$  на області  $D$  дорівнює об'єму криволінійного циліндру поділеного на площу його основи.

### 13.2. Криволінійні інтеграли

Нехай на площині задана кусково-гладка крива  $C$  своїм параметричним рівнянням  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , де функції  $x(t)$  і  $y(t)$  мають кусково-неперервні похідні  $x'(t)$  і  $y'(t)$ . Тут точка  $a(x(\alpha), y(\alpha))$  називається *початковою*, а точка  $b(x(\beta), y(\beta))$  — *кінцевою* і крива  $C$  вважається *орієнтованою*. Криволінійний інтеграл від функції  $f(x, y)$  за кривою  $C$  можна визначити як границю інтегральних сум, але в цьому немає потреби, оскільки його одразу можна обчислити як звичайний визначений інтеграл:

$$\int_C f(x, y) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) x'(t) dt . \quad (13.8)$$

Тут зліва позначений криволінійний інтеграл від функції  $f(x, y)$  за кривою  $C$ , а з права визначений інтеграл. В застосунках криволінійні інтеграли виникають як комбінація двох диференціалів, але ця комбінація обчислюється аналогічно:

$$\int_C (f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy) = \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t))dt . \quad (13.9)$$

### 13.2.1. Векторна запис криволінійного інтегралу

Якщо нам задані дві функції  $f_1(x, y)$  і  $f_2(x, y)$ , то ми можемо їх розглядати в прямокутній системі координат як компоненти (координати) одної *вектор функції*  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ . Точніше виникає вектор функція точки  $F(x, y) = F(r)$ , де  $r = (x, y)$  – радіус вектор точки  $(x, y)$ . Вектор дотичної до кривої  $C$  дорівнює  $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ , а його диференціал виражається таким чином  $dr = (dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt)$ . Отже інтеграл (13.9) можна записати як скалярний добуток векторів  $F(r)$  і  $dr$ :

$$\int_C F(r) \cdot dr = \int_{\alpha}^{\beta} F(r(t)) \cdot r'(t)dt . \quad (13.10)$$

Саме в такому векторному вигляді криволінійні інтеграли зустрічаються у фізиці. Наприклад, інтеграл (13.10) виражає роботу, яку здійснює силове поле  $F(r)$ , при переміщенні матеріальної точки із точки  $a$  в точку  $b$  вздовж кривою  $C$ . В такому вигляді також зручно записати властивості криволінійних інтегралів.

C1) Для будь-яких чисел  $d$  і  $e$  виконується рівність (лінійність):

$$\int_C (dF(r) \cdot dr + eG(r) \cdot dr) = d \int_C F(r) \cdot dr + e \int_C G(r) \cdot dr .$$

C2) Якщо криву  $C$  розбито на дві криви  $C_1$  і  $C_2$ , то (адитивність):

$$\int_C F(r) \cdot dr = \int_{C_1} F(r) \cdot dr + \int_{C_2} F(r) \cdot dr .$$

C3) Якщо на кривій  $C$  змінити орієнтацію на протилежну, то знак криволінійного інтегралу зміниться на протилежний (орієнтованість):

$$\int_{C^+} F(r) \cdot dr = - \int_{C^-} F(r) \cdot dr .$$

### 13.2.2. Формули Остроградського-Гріна і Гауса-Остроградського

Для функції однієї незалежної змінної ми довели в лекції 9 формулу Ньютона-Лейбніца, де інтегрування поглинається диференціюванням і зводиться до межі відрізка:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) .$$

Аналогічну формулу можна вивести і для функції двох змінних в тому сенсі, що тут подвійний інтеграл перетворюється на криволінійний інтеграл.

Нехай на площині  $Oxy$  задано замкнену область  $D$  обмеженою кривою  $L$ . Будемо вважати, що крива  $L$  орієнтована додатно, тобто під час руху вздовж  $L$  область  $D$  розташована ліворуч (проти годинникової стрілки) (рис. 13.6).

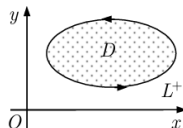


Рис. 13.6. Область обмежена додатною кривою.

**Теорема 13.1** (Остроградського-Гріна). Якщо функції  $f(x, y)$  і  $g(x, y)$  мають неперервні частинні похідні у замкненої області  $D$ , яка обмежена кусковою гладкою замкненою кривою  $C$ , то правдива така формула:

$$\iint_D \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} (f(x, y) dx + g(x, y) dy) . \quad (13.11)$$

Формула (13.11) називається формулою Остроградського-Гріна або формулою Стокса для площини. Із теореми 13.1 випливає теорема Гаусса-Остроградського для площини..

**Теорема 13.2** (Гаусса-Остроградського). Якщо функції  $f(x, y)$  і  $g(x, y)$  мають неперервні частинні похідні у замкненої області  $D$ , яка обмежена кусковою гладкою замкненою кривою  $C$ , то правдива така формула:

$$\iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} (f(x, y) dy - g(x, y) dx) . \quad (13.12)$$

### 13.2.3. Інтегрування повного диференціала

Для криволінійних інтегралів особливо важливий випадок виникає, коли вектор поля  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  є градієнтом скалярної функції  $u(x, y)$  (потенціалу):

$$f(x, y) = u_x(x, y), \quad g(x, y) = u_y(x, y) .$$

Якщо  $F(x, y) = \text{grad}u(x, y)$ , то функцію  $u(x, y)$  називають *потенціалом векторного поля*  $F(x, y)$ , а поле  $F(x, y)$  називають *потенціальним*.

Криволінійний інтеграл в потенціальному векторному полі залежить тільки від початкової і кінцевої точки інтегрування і *не залежить від шляху інтегрування*. Дійсно, якщо  $F(x, y) = \text{grad}u(x, y)$ , маємо такі рівності:

$$\int_C F(r) \cdot dr = \int_C \text{grad}u(x, y) \cdot dr = \int_C (u_x(x, y) dx + u_y(x, y) dy) .$$

Звідси, а також з формули (13.9) і формули (12.13) (лекція 12) маємо:

$$\int_C (u_x dx + u_y dy) = \int_{\alpha}^{\beta} (u_x x'(t) + u_y y'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(x(t), y(t))}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} du = u(b) - u(a) .$$

Таким чином, якщо *диференціальна форма*  $f(x, y) dx + g(x, y) dy$  є *повним диференціалом функції двох змінних*  $du(x, y) = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ , то криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Замкнена область  $D$  на площині називається *однозв'язною*, якщо із будь-якої її точки можна перейти в будь-яку іншу точку області вдовж кривої, яка повністю належить області  $D$ . Криволінійний інтеграл вдовж кривої  $C$  називається *контурним*, якщо крива  $C$  є замкненою. Має місце така загальна теорема.

**Теорема 13.3** (О потенціалі). Нехай функції  $f(x, y)$  і  $g(x, y)$  неперервно диференційовані в однозв'язній області  $D$  тоді такі твердження еквівалентні:

- 1) Криволінійний інтеграл від форми  $f(x, y) dx + g(x, y) dy$  не залежить від шляху інтегрування;
- 2) Будь-який контурний інтеграл від форми  $f(x, y) dx + g(x, y) dy$  дорівнює нулю;
- 3) Векторне поле  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  потенціальне, тобто  $F(x, y) = \text{grad}u(x, y)$ ;
- 4) Виконуються умови інтегрування Ейлера  $f_y(x, y) = g_x(x, y)$ .

## 13.3. Зразки розв'язування вправ

**13.3.1.** Обчислити інтеграл в прямокутнику  $1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 2$ :

$$\iint_D (2 + x^2 - y) dx dy .$$

*Розв'язання.* Ця область правильна як в напрямку осі  $Ox$ , так і в напрямку осі  $Oy$ . Тоді за формулами (13.5) маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D (2 + x^2 - y) dx dy &= \int_1^4 dx \int_{-1}^2 (2 + x^2 - y) dy = \int_1^4 dx \left[ (2 + x^2) \int_{-1}^2 dy - \int_{-1}^2 y dy \right] = \\ &= \int_1^4 dx (2 + x^2) \cdot y \Big|_{-1}^2 - \int_1^4 dx \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^2 = 3 \int_1^4 (2 + x^2) dx - \frac{3}{2} \int_1^4 dx = \\ &= 6 \cdot x \Big|_1^4 + x^3 \Big|_1^4 - \frac{3}{2} x \Big|_1^4 = 6 \cdot 3 + 63 - 6 + \frac{3}{2} = 75 + \frac{3}{2} = \frac{153}{2}. \end{aligned}$$

**13.3.2.** Обчислити подвійний інтеграл, якщо область  $D$  є чверть круга  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ :

$$\iint_D (x \cdot y) dx dy.$$

*Розв'язання.* Ця область також правильна як в напрямку осі  $Ox$ , так і в напрямку осі  $Oy$ . На чверті кола виконується рівність  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , тоді за формулою (13.5) (можна також використати формулу (13.4)) маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D x \cdot y dx dy &= \int_0^2 x dx \left[ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right] = \int_0^2 x dx \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 x dx - \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = x^2 \Big|_0^2 - \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

**13.3.3.** Обчисліть подвійний інтеграл за областю  $D$ , яка обмежена лініями  $y = x$  і  $y = 2x^2 - x$ :

$$\iint_D (x + 2y) dx dy.$$

*Розв'язання.* Спочатку зобразимо область інтегрування на площині  $Oxy$  (рис. 13.7). Із цього рисунку видно, що у даному випадку зручніше розглядати область як правильну в напрямі осі  $Oy$ , тоді використовуємо формулу (13.3), і отримуємо:

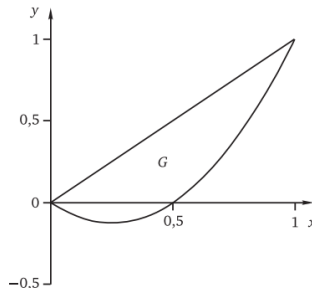


Рис. 13.7. Область інтегрування обмежена лініями.

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{2x^2-x}^x (x + 2y) \cdot dy = \\ &= \int_0^1 dx \left[ x \int_{2x^2-x}^x dy + 2 \int_{2x^2-x}^x y dy \right] = \int_0^1 dx \left( xy \Big|_{2x^2-x}^x + y^2 \Big|_{2x^2-x}^x \right) = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (2x^2 - 2x^3 + x^2 - (2x^2 - x)^2) dx = \int_0^1 (-4x^4 + 2x^3 + 2x^2) dx = -\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{30}.$$

**13.3.4.** Обчислити інтеграл вдовж параболи від точки  $a(0,0)$  до точки  $b(1,1)$ :

$$\int_C (x dy - y dx).$$

*Розв'язання.* Параметричне рівняння параболи буде  $x = x$ ,  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , тому  $dy = 2x dx$ . Підставляємо рівняння кривої в інтеграл, тоді з формули (13.9) маємо:

$$\int_C (x dy - y dx) = \int_0^1 (2x^2 dx - x^2 dx) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**13.3.5.** Обчислити інтеграл уздовж ламаної  $abc$ , де  $a = (1,1)$ ,  $b = (3,1)$  і  $c = (3,5)$ :

$$\int_{abc} (x^3 dx + y^3 dy).$$

*Розв'язання.* Оскільки ламана складається з ланок  $ab$  і  $bc$ , згідно властивості адитивності  $C2$  отримуємо:

$$\int_{abc} (x^3 dx + y^3 dy) = \int_{ab} (x^3 dx + y^3 dy) + \int_{bc} (x^3 dx + y^3 dy).$$

Для першого інтегралу маємо  $dy = 0$ , тому дістаємо:

$$\int_{ab} (x^3 dx + y^3 dy) = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{81 - 1}{4} = 20.$$

Для другого інтегралу маємо  $dx = 0$ , тому:

$$\int_{bc} (x^3 dx + y^3 dy) = \int_1^5 y^3 dy = \frac{y^4}{4} \Big|_1^5 = \frac{625 - 1}{4} = 156.$$

Тепер знайдемо інтеграл вдовж ламаної:

$$\int_{abc} (x^3 dx + y^3 dy) = 20 + 156 = 176.$$

**13.3.6.** Обчислити контурний інтеграл вздовж кола  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

*Розв'язання.* Маємо рівняння кола  $x = r \cos(t)$ ,  $y = r \sin(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , тоді за формулою (13.9) дістаємо:

$$\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(t)^2 + r^2 \sin(t)^2}{r^2 \cos(t)^2 + r^2 \sin(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

*Коментар.* Функції  $f(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$  і  $g(x, y) = x/(x^2 + y^2)$  мають розрив у точці  $(0,0)$ , але ця точка знаходиться всередині кола. Тому область  $D$  тут не є однозв'язною і тому теорема 13.3 тут невірна. Зокрема цей контурний інтеграл не дорівнює нулю.

### 13.4. Завдання для самостійної роботи студентів

**13.4.1.** Обчислити повторні інтеграли (за варіантами):

$$1) \int_0^1 dx \int_x^{2x} (3x + 2y) dy; 2) \int_{-4}^1 dx \int_{3x}^{4-x^2} y dy; 3) \int_0^2 dx \int_{x/2}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy;$$

$$4) \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2+\sin(y)} \frac{x}{2} dx; \quad 5) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx .$$

**13.4.2.** Обчислити повторним інтегралом подвійні інтеграли, якщо область  $D$  являється прямокутником (за варіантами):

$$1) \iint_D (x+y) dx dy, 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2; \quad 2) \iint_D x\sqrt{y} dx dy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$3) \iint_D xy(x-y) dx dy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$4) \iint_D \frac{dx dy}{(x-y)^2}, 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4; \quad 5) \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}, 2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 3 .$$

**13.4.3.** Зробіть рисунок та обчисліть площі областей  $S(D)$ , обмежених вказаними лініями, за формулою (8.10) (за варіантами):

- 1) Область  $D$  обмежена лініями  $4y = x^2 - 4x, y = 3 - x$ ;
- 2) Область  $D$  обмежена лініями  $10x = y^2 - 25, 6x = 9 - y^2$ ;
- 3) Область  $D$  обмежена лініями  $4x = y^2 - 4, x + y = 2$ ;
- 4) Область  $D$  обмежена лініями  $y = 0, x = 3; y = x^2$ ;
- 5) Область  $D$  обмежена лініями  $x = 0, y = 9, y = x^2$ .

**13.4.4.** Знайти середнє значення функції  $f(x, y)$  в області  $D$  (за варіантами):

- 1)  $f(x, y) = 3x + 2y, D$  – трикутник з вершинами  $(0,0), (1,0), (0,1)$ ;
- 2)  $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$ , область  $D$  обмежена прямими  $12 - 2x - 3y = 0, x = 0, y = 0$ ;
- 3)  $f(x, y) = x + 6y, D$  – трикутник обмежений прямими  $y = x, y = 5x, x = 1$ ;
- 4)  $f(x, y) = \cos^2(x) \cdot \cos^2(y), D$  – прямокутник  $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$ ;
- 5)  $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, D$  – круг,  $x^2 + y^2 \leq r^2, r$  – радіус круга.

**13.4.5.** Обчислити криволінійні інтеграли (за варіантами):

- 1) Обчислити інтеграл вздовж дуги  $C$  параболи  $y = x^3$  від точки  $a(0,0)$  до точки  $b(2,8)$ :

$$\int_C (x dy - y dx) .$$

- 2) Обчислити інтеграл вздовж дуги  $C$  кривою  $y = \ln(x)$  від точки  $a(1,0)$  до точки  $b(e, 1)$ :

$$\int_C \left( \frac{y}{x} dx + dy \right) .$$

- 3) Обчислити інтеграл вздовж верхньої дуги  $C$  еліпса  $x = a \cos(t), y = b \sin(t)$ , що обходить проти руху годинникової стрілки  $0 \leq t \leq \pi$ :

$$\int_C (y^2 dx + x^2 dy) .$$

- 4) Обчислити контурний інтеграл вздовж кола  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} .$$

- 5) Обчислити інтеграл вздовж відрізка прямої  $ab$ , від точки  $a(1,1)$  до точки  $b(2,3)$ :

$$\int_{ab} (x dx + y dy) .$$

## 14. Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння, які зв'язують невідому функцію  $y(x)$  та її похідні називаються *диференціальними*. Найвищий порядок похідної, яка входить у диференціальне рівняння, називають *порядком* диференціального рівняння. *Диференціальним рівнянням першого порядку*, називається рівняння такого виду  $F(x, y, y') = 0$ , яке пов'язує між собою незалежну змінну  $x$ , невідому функцію  $y$  та її похідну  $y'$ . Наприклад, диференціальне рівняння  $y' + xy = 0$  має перший порядок. Диференціальним рівнянням першого порядку в *нормальній формі* (розв'язаним відносно похідної), називається таке рівняння:

$$y' = f(x, y). \quad (14.1)$$

Функція  $f(x, y)$  вважається визначеною у відкритій області  $D$  площини  $Oxy$ .

**Означення 14.1.** *Розв'язком диференціального рівняння (14.1) називається функція  $y(x)$ , яка визначена на інтервалі  $I = (a, b)$  і яка після підстановки в рівняння (14.1) перетворює його на тотожність, тобто для всіх  $x \in (a, b)$  виконується рівність  $y'(x) = f(x, y(x))$ .*

Процес пошуку розв'язків диференціального рівняння називається його *інтегруванням*, а *графік його розв'язку  $y(x)$*  називається *інтегральною кривою*. Диференціальне рівняння (14.1), як правило, має безліч розв'язків, які залежать від довільної сталої  $c \in \mathbb{R}$ . Щоб з нескінченної множини розв'язків рівняння відокремити певний розв'язок, на цей розв'язок накладають *початкову умову*:

$$y(x_0) = y_0, \text{ де } (x_0, y_0) \in D. \quad (14.2)$$

Задачу пошуку розв'язку  $y = y(x)$  рівняння (14.1), який задовольняє початкову умову (14.2), називають *задачею Коші* для рівняння (14.1). Розв'язок задачі Коші називають *частинним розв'язком* рівняння (14.1). Як правило, він тільки один, що впливає із основної теореми теорії диференціальних рівнянь. Інтегральна крива, яка відповідає розв'язку задачі Коші (14.2) проходить через точку  $(x_0, y_0) \in D$ .

**Означення 14.2.** *Загальним розв'язком* рівняння (14.1) називають сукупність функцій  $y = \varphi(x, c)$ , які при всіх значеннях сталої  $c \in \mathbb{R}$  розв'язками рівняння (14.1) і для будь-якої початкової умови (14.2) існує значення  $c = c_0$  таке, що функція  $\varphi(x, c_0)$  задовольняє початкову умову (14.2).

Загальний розв'язок рівняння (14.1) може бути заданим неявно у вигляді співвідношення  $F(x, y) = c$ . *Лінією рівня* функції  $F(x, y)$  називається крива, яка визначається формулою  $L_c = \{(x, y): F(x, y) = c\}$ . Іншими словами, лінія рівня це множина точок, на яких функція  $F(x, y)$  приймає постійне значення.

**Означення 14.3.** *Загальним (або першим) інтегралом* рівняння (14.1) називається неперервно диференційована функція  $F(x, y)$ , яка приймає постійне значення на всіх розв'язках рівняння (14.1).

### 14.1. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Диференціальним рівнянням з *відокремленими змінними* називається рівняння першого порядку такого виду:

$$f(x)dx = g(y)dy, \quad (14.3)$$

де  $f(x)$  і  $g(y)$  – неперервні функції в області  $D$ . Як видно із рівняння (14.3) змінні в ньому знаходяться в різних частинах рівняння, тобто відокремлені друг від друга. Рівняння (14.3) можна привести у нормальну форму  $y' = f(x)/g(y)$ , якщо  $g(y) \neq 0$  в області  $D$ .

Основна ідея інтегрування рівняння (14.3) полягає в тому, що, ми можемо інтегрувати обидві частини рівняння (14.3) окремо за відповідними змінними. Це базується на інваріантності форми першого диференціала (формула (8.5) лекція 8). Таким чином, дістаємо таке співвідношення:

$$\int f(x)dx + c = \int g(y)dy, \quad (14.4)$$

де  $c$  – довільна стала.

Нехай  $F(x)$  і  $G(y)$  – первісні функції для функцій  $f(x)$  і  $g(y)$  відповідно, тоді із (14.4) отримуємо загальний інтеграл рівняння (14.3):

$$G(y) = F(x) + c. \quad (14.5)$$

Якщо функція  $G(y)$  має обернену функцію  $G^{-1}$ , то застосувавши до обох частин рівності (14.5) функцію  $G^{-1}$ , ми отримуємо загальний розв'язок рівняння (14.3) у явному вигляді  $y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$ .

**Приклад 14.1.** Розв'яжемо диференціальне рівняння:

$$2y \cdot y' = 1. \quad (14.6)$$

Користуючись рівністю  $y' = dy/dx$  відокремимо змінні і одержуємо рівняння  $2ydy = dx$ . Проінтегруємо обидві частини цього співвідношення, тоді отримуємо  $y^2 = x + c$ . Таким чином, отримали загальний інтеграл рівняння (14.6) у вигляді сімейства парабол зрушених уздовж осі абсцис. Загальний розв'язок можна записати у вигляді двох гілок параболи  $y(x) = \sqrt{x + c}$  і  $y(x) = -\sqrt{x + c}$ . Звідси видно, що розв'язок цього рівняння визначений на інтервалі  $(-c, \infty)$ . Перевіримо, що цей розв'язок загальний. Розглянемо точку  $(x_0, y_0)$  і покладемо  $c_0 = y_0^2 - x_0$ , тоді парабола  $y(x) = \sqrt{x + c_0}$  або парабола  $y(x) = -\sqrt{x + c_0}$  буде проходити через точку  $(x_0, y_0)$  в залежності від знаку  $y_0$ . Таким чином, ми отримали загальний розв'язок рівняння (14.6) у явному вигляді.  $\square$

## 14.2. Однорідні диференціальні рівняння

Функція  $f(x, y)$  називається *однорідною порядку  $k \geq 0$*  в області  $D$ , якщо виконується умова  $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$  для всіх  $t \neq 0$ , і  $(x, y) \in D$ . Наприклад, функція  $f(x, y) = x^2 + y^2$  є однорідною другого порядку.

**Означення 14.4.** Диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  називається *однорідним*, якщо функція  $f(x, y)$  є однорідною функцією нульового порядку, тобто  $f(tx, ty) = f(x, y)$ .

Однорідне диференціальне рівняння можна подати в більш загальному вигляді:

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0,$$

де  $g(x, y)$  і  $h(x, y)$  є однорідними функціями однакового порядку. В цьому випадку функція:  $f(x, y) = g(x, y)/h(x, y)$  буде однорідною функцією нульового порядку і тому рівняння  $y' = f(x, y)$  буде однорідним.

Інтегрують однорідне рівняння шляхом заміни змінної  $y = ux$  і зведенням його до рівняння з відокремленими змінними. Дійсно в цьому випадку маємо  $dy = du \cdot x + u \cdot dx$ , тоді підставив нову змінну в диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  і, скориставшись умовою однорідності, маємо:

$$\frac{du \cdot x + u \cdot dx}{dx} = f(x, ux) = f(1, u) = g(u),$$

де  $x \neq 0$  і  $g(u) = f(1, u)$ . Звідси, відносно нової змінної отримуємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини цього рівняння за відповідними змінними і отримуємо такий загальний інтеграл:

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + c.$$

Нехай  $G(u)$  – первісна функція для функції  $1/(g(u) - u)$ , тоді розв'язок однорідного диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$  отримуємо у вигляді такого загального інтегралу:

$$G(y/x) - \ln(x) = c. \quad (14.7)$$

Якщо функція  $G(u)$  має обернену функцію  $G^{-1}$ , то загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у явному вигляді  $y(x) = x \cdot G^{-1}(\ln(x) + c)$ .

### 14.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають диференціальне рівняння такого виду:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (14.8)$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$  – задані неперервні функції на інтервалі  $I = (a, b)$ . Якщо  $q(x) \equiv 0$ , то рівняння (14.8) називається *лінійним однорідним рівнянням*:

$$y' + p(x) \cdot y = 0, \quad (14.9)$$

в іншому випадку, лінійним *неоднорідним рівнянням*.

**Теорема 14.2.** Загальний розв'язок  $y = \varphi(x, c)$  неоднорідного рівняння (14.8) має вигляд  $\varphi(x, c) = \psi(x, c) + \varphi_0(x)$ , де  $\psi(x, c)$  – загальний розв'язок однорідного рівняння (14.9), а  $\varphi_0(x)$  – один частинний розв'язок рівняння (14.8).

**Доведення.** Зафіксуємо частинний розв'язок  $\varphi_0(x)$  рівняння (14.8) і нехай  $\varphi(x)$  – будь-який його розв'язок, тоді маємо рівності:

$$\varphi'(x) + p(x) \cdot \varphi(x) = q(x) \text{ і } \varphi_0'(x) + p(x) \cdot \varphi_0(x) = q(x).$$

Віднімімо із першого рівняння друге, тоді функція  $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$  буде розв'язком однорідного рівняння (14.9). Таким чином,  $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi_0(x)$  і теорему доведено.  $\square$

Лінійне однорідне рівняння (14.9) є рівнянням з відокремленими змінними, оскільки його можна записати у вигляді  $dy/y = -p(x)dx$ . Нехай  $P(x)$  буде первісну функцію для функції  $p(x)$ , тоді інтегруємо обидві частини цього рівняння і отримуємо інтеграл  $\ln(y) = -P(x) + c$ . Звідси отримуємо загальний розв'язок однорідного рівняння (14.9):

$$y(x) = c \cdot e^{-P(x)},$$

де  $c$  – постійна стала. Частинний розв'язок рівняння (14.8) знаходять методом *варіації довільної сталої Лагранжа*, За допомогою цього методу, з яким ми ще познайомимся, отримуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.8):

$$y(x) = e^{-P(x)} \left( c + \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx \right), \quad (14.10)$$

де  $c$  – довільна стала.

### 14.4. Рівняння Бернуллі

Диференціальним рівнянням Бернуллі називається таке рівняння:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad (14.11)$$

де  $m$  – дійсне число таке, що  $m \neq 0$  і  $m \neq 1$ . Зауважимо, що при  $m = 0$  рівняння Бернуллі перетворюється в лінійне неоднорідне рівняння, а при  $m = 1$  в лінійне однорідне рівняння.

Інтегрують рівняння Бернуллі шляхом зведення до лінійного рівняння за допомогою підстановки  $z = y^{1-m}$ . Дійсно, в цьому випадку маємо:

$$z' = (1 - m) \cdot y^{-m} \cdot y'. \quad (14.12)$$

Поділімо обидві частини рівняння (14.11) на  $y^m$ , тоді маємо  $y' \cdot y^{-m} + p(x) \cdot y^{1-m} = q(x)$ . Підставимо нову змінну  $z$  в це рівняння, тоді з урахуванням (14.12) маємо:

$$\frac{1}{1-m} z' + p(x) \cdot z = q(x).$$

Помножимо ліву і праву частини цього рівняння на число  $1 - m$ , тоді отримуємо лінійне рівняння відносно нової змінної  $z$ :

$$z' + (1 - m) \cdot p(x) \cdot z = (1 - m) \cdot q(x).$$

### 14.5. Рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння в повних диференціалах є найбільш загальним рівнянням першого порядку із якого розв'язки всіх інших рівнянь першого порядку можна отримати як часткові випадки. Диференціальне рівняння 1 порядку в *симетричній формі* має вигляд:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0, \quad (14.13)$$

де  $f(x, y)$  і  $g(x, y)$  – функції, які мають неперервні частинні похідні в області  $D$ . Область  $D$  повинна бути замкненою і однозв'язною, але для простоти будемо вважати, що область  $D$  співпадає зі всією площиною.

**Означення 14.5.** Рівняння (14.13) називається рівнянням у повних диференціалах, якщо існує двічі неперервно диференційована функція  $u(x, y)$ , яка задовольняє умовам:

$$f(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad g(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \quad (14.14)$$

Ця умова нам вже знайома по попередньої лекції 12, а саме вона означає, що диференціальна форма  $f(x, y)dx + g(x, y)dy$  є повним диференціалом функції двох змінних  $du(x, y) = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ . Тоді рівняння (14.13) можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du(x, y) = 0.$$

Звідси отримуємо загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах, оскільки повний диференціал дорівнює нулю тільки для постійної функції:

$$u(x, y) = c, \quad (14.15)$$

де  $c$  – довільна стала. Функцію  $u(x, y)$ , яка задовольняє умовам (14.14) називають *потенціалом* рівняння (14.13). Таким чином, розв'язок рівняння (14.13) зводиться до пошуку його потенціалу, але виникає питання, коли рівняння (14.13) буде рівнянням в повних диференціалах. На це питання відповідає теорема 13.3, (лекція 13) яку ми тут частково доведемо, оскільки це надасть нам метод розв'язку рівняння (14.13).

**Теорема 14.3.** Рівняння (14.13) буде рівнянням у повних диференціалах тоді і тільки тоді, коли виконується умова Ейлера:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}. \quad (14.16)$$

**Доведення.** Необхідність цієї умови випливає із умови (14.14), оскільки  $f_y(x, y) = u_{xy}(x, y) = u_{yx}(x, y) = g_x(x, y)$  в силу неперервності других похідних функції  $u(x, y)$ .

Припустимо що умова (14.16) виконується, тоді зафіксуємо на площині довільну точку  $p(x_0, y_0)$  і розглянемо функцію:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y)dt + \varphi(y), \quad (14.17)$$

де  $\varphi(y)$  - невідома диференційована функція, яку виберемо пізніше. Тоді із теореми 8.5 (Барроу 8 лекція) випливає, що інтеграл зі змінною верхньою межею в рівності (14.17) буде первісною функцією для функції  $f(x, y)$  при постійному значенні змінної  $y$ . Звідси маємо:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x f(t, y)dt + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(y) = f(x, y).$$

Отже, перша умова в (14.14) задоволена. Тепер підберемо функцію  $\varphi(y)$  таким чином, щоб виконувалася друга умова в (14.14). Диференціюючи рівність (14.7) по  $y$  дістаємо:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x f(t, y)dt + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dt + \varphi'(y).$$

Тут ми часткову похідну переставили з інтегралом, оскільки вони обчислюються за різними змінними, що випливає із лінійності інтегралу. Тоді із попереднього рівняння з урахуванням умови Ейлера (14.16) і формули Ньютона-Лейбніца (лекція 9) отримуємо:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial g(t, y)}{\partial t} dt + \varphi'(y) = g(x, y) - g(x_0, y) + \varphi'(y), \quad (14.18)$$

оскільки функція  $g(x, y)$  буде первісною для функції  $\partial g(x, y)/\partial x$  при постійному  $y$ .

Покладемо  $\varphi'(y) = g(x_0, y)$ , тоді із (14.18) маємо  $\partial u/\partial y = g(x, y)$ , тобто буде задоволена і друга умова в (14.14). Таким чином, така функція:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y) dt + \int_{y_0}^y g(x_0, t) dt, \quad (14.19)$$

буде потенціалом рівняння (14.13) і теоремою доведено.  $\square$

Із формули (14.19) видно, що функція  $u(x, y)$  є сумою двох інтегралів, причому інтеграл від функції  $g(x, y)$  обчислюється по вертикальному відрізку від точки  $(x_0, y_0)$  до точки  $(x_0, y)$ , а інтеграл від функції  $f(x, y)$  обчислюється по горизонтальному відрізку від точки  $(x_0, y)$  до точки  $(x, y)$  (рис. 14.1)

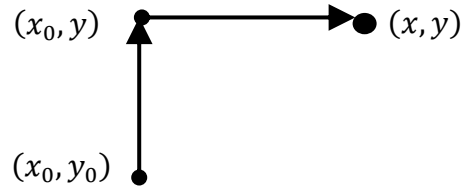


Рис. 14.1. Обчислення потенціалу.

Оскільки потенціал визначений з точністю до константи, то початкова точка  $(x_0, y_0)$  вибирається довільно.

#### 14.5.1. Інтегруючий множник

Зауважимо, що диференціальне рівняння з відокремленими змінними виду  $f(x)dx - g(y)dy = 0$  є частковим випадком рівняння в повних диференціалах, оскільки  $\partial f/\partial y = 0 = \partial g/\partial x$ . Однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремленими змінними, тому можна вважати, що вони також зводяться до рівняння в повних диференціалах. Лінійні рівняння можуть не бути рівняннями у повних диференціалах, оскільки може не виконуватись умова Ейлера (14.16). Але існує метод, що розширює клас рівнянь у повних диференціалах, якій називається методом *інтегруючого множника*.

**Означення 14.6.** Неперервно диференційована функція  $\mu(x, y)$ , яка не обертається в нуль в жодній точці області  $D$ , називається інтегруючим множником рівняння (14.13), якщо функції  $\mu f$  і  $\mu g$  задовольняють умову Ейлера (14.16):

$$\frac{\partial(\mu \cdot f)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot g)}{\partial x}. \quad (14.20)$$

Тоді диференціальне рівняння:

$$\mu(x, y)f(x, y)dx + \mu(x, y)g(x, y)dy = 0, \quad (14.21)$$

буде рівнянням у повних диференціалах і ми можемо для нього знайти потенціальну функцію  $u(x, y)$ . Але рівняння (14.20) і (14.21) еквівалентні, тобто вони мають одну і ту ж множину розв'язків, оскільки вони відрізняються на ненульовий множник  $\mu(x, y)$ . Таким чином, співвідношення  $u(x, y) = c$  буде загальним інтегралом рівнянь (14.20) і (14.21).

**Приклад 14.4.** Покажемо, що для диференціального лінійного рівняння 1 порядку  $y' + p(x) \cdot y = q(x)$  існує інтегруючий множник. Представимо лінійне рівняння у симетричній формі:

$$(p(x) \cdot y - q(x))dx + dy = 0. \quad (14.22)$$

Звідси видно, що умова Ейлера (14.16) може не виконуватись, оскільки в загальному випадку  $\partial(p(x) \cdot y - q(x))/\partial y = p(x) \neq 0$ . Помножимо рівняння (14.20) на множник  $e^{P(x)} > 0$ , де  $P(x)$  – первісна функція для функції  $p(x)$ , тоді отримуємо таке рівняння:

$$e^{P(x)}(p(x) \cdot y - q(x))dx + e^{P(x)}dy = 0. \quad (14.23)$$

Тут  $f(x, y) = e^{P(x)}(p(x) \cdot y - q(x))$  і  $g(x, y) = e^{P(x)}$  і легко перевірити, що тепер умова (14.16) виконується

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^{P(x)}p(x) = e^{P(x)}p'(x) = \frac{de^{P(x)}}{dx} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}.$$

Таким чином, рівняння (14.23) є рівнянням у повних диференціалах, а  $e^{P(x)}$  – інтегруючий множник для лінійного рівняння.

Покладемо  $x_0 = y_0 = 0$ , та застосуємо формулу (14.19) для потенціалу рівняння (10.12), тоді отримуємо:

$$u(x, y) = y \int_0^x e^{P(t)} p(t) dt - \int_0^x e^{P(x)} q(t) dt + \int_0^y e^{P(0)} dt = c.$$

Оскільки  $e^{P(t)} p(t) dt = d(e^{P(t)})$ , то з формули Ньютона-Лейбніца отримуємо:

$$y \cdot e^{P(x)} - y \cdot e^{P(0)} - \int_0^x e^{P(x)} q(t) dt + y \cdot e^{P(0)} = c.$$

Звідси отримуємо загальний розв'язок рівняння (14.23) у такому вигляді:

$$y(x) = e^{-P(x)} \left( c + \int_0^x e^{P(t)} q(t) dt \right).$$

Таким чином, ми іншим шляхом отримали формулу (14.10) для загального розв'язку лінійного рівняння (14.8) у вигляді визначеного інтегралу зі змінною верхньою межею.  $\square$

Виникає питання, як можна знайти інтегруючий множник. Якщо записати умову (14.20) на інтегруючий множник  $\mu(x, y)$  у вигляді рівняння, то виходить диференціальне рівняння у *частинних похідних*:

$$g \frac{\partial \mu}{\partial x} - f \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right). \quad (14.24)$$

Диференціальні рівняння від функцій однієї змінної називаються *звичайними*. Таким чином, розв'язуючи звичайне диференціальне рівняння (14.13) ми звели його до розв'язання більш складного рівняння (14.24) у частинних похідних, тому загального методу пошуку інтегруючого множника не існує.

На практиці інтегруючий множник шукають зазвичай у вигляді функції тільки від однієї якоїсь змінної  $x$  або  $y$ , і намагаються звести рівняння (14.24) до звичайного диференціального рівняння. Якщо  $\mu = \mu(x)$ , то  $\partial \mu / \partial y = 0$  і рівняння (14.24) перетворюється на рівняння:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial f / \partial y - \partial g / \partial x}{g}.$$

Якщо права частина цього рівняння не залежить від  $y$ , то воно перетворюється на рівняння з відокремленими змінними і інтегруючий множник  $\mu(x)$  знаходиться шляхом інтегрування:

$$\ln(\mu(x)) = \int \frac{\partial f / \partial y - \partial g / \partial x}{g} dx. \quad (14.25)$$

Аналогічно, якщо  $\mu = \mu(y)$ , то  $\partial \mu / \partial x = 0$  і рівняння (14.24) перетворюється на рівняння:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{\partial g / \partial x - \partial f / \partial y}{f}$$

Якщо права частина цього рівняння не залежить від  $x$ , то воно перетворюється на рівняння з відокремленими змінними і інтегруючий множник  $\mu(y)$  знаходить шляхом інтегрування:

$$\ln(\mu(y)) = \int \frac{\partial g / \partial x - \partial f / \partial y}{f} dy.$$

## 14.6. Зразки розв'язування вправ

**14.6.1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремленими змінними:

$$1) y^2 \cdot y' = \frac{1 - 2x}{3}; \quad 2) xy' + y = y^2.$$

*Розв'язання.* 1) Множимо рівняння на диференціал  $3dx$  і дістаємо рівняння  $3y^2 dy = (1 - 2x)dx$ . Інтегрування дає загальний інтеграл  $y^3 = x - x^2 + c$ . Тоді розв'язок рівняння

можна записати у явному вигляді  $y = \sqrt[3]{x - x^2 + c}$ . Студентам пропонується перевірити, що це є загальний розв'язок рівняння  $3y^2 dy = (1 - 2x) dx$ .

2) Перенесемо змінну  $y$  в праву частину, поділімо рівняння на  $x$ , а потім на  $(y^2 - y)$  і помножимо на  $dx$ . Тоді отримуємо рівняння з відокремленими змінними  $dy/(y^2 - y) = dx/x$ . Зауважимо, що при діленні ми припускаємо, що  $y^2 - y \neq 0$ . Потім проінтегруємо обидві частини за відповідними змінними, тоді дістаємо таке співвідношення інтегралів:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

Звідси отримуємо загальний інтеграл  $\ln(y-1) - \ln(y) = \ln(x) + c$ . Перетворимо цей вираз на  $\ln((y-1)/y) = \ln(c \cdot x)$  і застосуємо до обох частин експоненту, тоді отримуємо  $(y-1)/y = c \cdot x$ . Звідси маємо розв'язок  $y(x, c) = 1/(1 - c \cdot x)$ . Для отримання загального розв'язку треба додати два стаціонарних розв'язки  $y \equiv 0$  і  $y \equiv 1$ , які утворюються при  $y^2 - y = 0$ . Зауважимо, що для стаціонарних розв'язків виконується умова  $y' = 0$ .

**14.6.2.** Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y' = (y/x) \cdot \ln(y/x). \quad (14.26)$$

*Розв'язання.* Рівняння однорідне, оскільки функція в правій частині залежить від частки  $y/x$ . Після заміни  $y = u \cdot x$  будемо мати рівняння  $u'x + u = u \cdot \ln(u)$ , звідки отримуємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{du}{u(\ln(u) - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегрування дає співвідношення  $\ln(\ln(u) - 1) = \ln(x) + c$ . Звідси шляхом застосування експоненти дістаємо, що  $\ln(u) = c \cdot x + 1$ . Повторним застосуванням експоненти і підстановкою  $u = y/x$  отримуємо розв'язок цього рівняння у явному вигляді:

$$y(x, c) = x \cdot e^{c \cdot x + 1}. \quad (14.27)$$

Підставивши цей розв'язок в рівняння (14.26) шляхом диференціювання переконуємося, що воно є розв'язком при будь-якому значенні сталої  $c$ . Зауважимо, що рівняння (14.26) визначено в області  $D$ , де  $x \neq 0$  і  $y/x > 0$ . Візьмемо в області  $D$  точку  $(x_0, y_0)$  і покладемо:

$$c_0 = (\ln(y_0/x_0) - 1)/x_0,$$

тоді інтегральна крива  $y = x \cdot e^{c_0 \cdot x + 1}$  пройде через точку  $(x_0, y_0)$ . Таким чином, розв'язок (14.27) буде загальним розв'язком рівняння (14.26).

**14.6.3.** Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

*Розв'язання.* Тут  $p(x) = -1/x$  і  $q(x) = x$ . Знайдемо первісну функцію  $P(x)$ :

$$P(x) = \int p(x) dx = - \int \frac{dx}{x} = -\ln(x).$$

Тоді  $e^{-P(x)} = e^{\ln(x)} = x$  і  $e^{P(x)} = 1/x$ . За формулою (14.10) маємо загальний розв'язок цього рівняння:

$$y(x) = x \left( c + \int x \cdot \frac{dx}{x} \right) = x(c + x) = c \cdot x + x^2.$$

**14.6.4.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x} y^2.$$

*Розв'язання.* Зробимо заміну  $z = 1/y$ , тоді  $y = 1/z$  і  $y' = -z'/z^2$ . Підставимо нову змінну в рівняння і помножимо його на  $-z^2$ , тоді отримуємо лінійне рівняння:

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln(x)}{x}.$$

Тут  $p(x) = -1/x$ ,  $q(x) = -\ln(x)/x$ , тоді  $P(x) = -\ln(x)$ ,  $e^{-P(x)} = x$  і  $e^{P(x)} = 1/x$ . За формулою (14.10) маємо загальний розв'язок лінійного рівняння:

$$z(x, c) = x \left( c - \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx \right) = x \left( c + \frac{\ln(x) + 1}{x} \right) = c \cdot x + \ln(x) + 1.$$

Тут інтеграл обчислюється частинами за допомогою перетворення:

$$-\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \int \ln(x) d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln(x) + 1}{x}.$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння Бернуллі буде функція:

$$y(x, c) = \frac{1}{z(x, c)} = \frac{1}{c \cdot x + \ln(x) + 1}.$$

**14.6.5.** Розв'язати рівняння  $(x + e^y)dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ .

*Розв'язування.* Тут  $f(x, y) = x + e^y$  і  $g(x, y) = xe^y - 2y$ . Перевіримо, що це рівняння в повних диференціалах. Маємо  $\partial f/\partial y = e^y = \partial g/\partial x$ , тобто умова Ейлера (14.16) виконується. Покладемо  $x_0 = y_0 = 0$ , та обчислимо потенціал за формулою (14.19):

$$u(x, y) = \int_0^x (t + e^y) dt + \int_0^y (-2t) dt = \frac{x^2}{2} + e^y x - y^2.$$

Отже маємо загальний інтеграл рівняння  $x^2/2 + xe^y - y^2 = c$ . Перевіримо, що відповідь правильна і виконуються умови (14.14):

$$\frac{\partial(x^2/2 + xe^y - y^2)}{\partial x} = x + e^y, \quad \frac{\partial(x^2/2 + xe^y - y^2)}{\partial y} = xe^y - 2y.$$

**14.6.6.** Розв'язати рівняння  $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ .

*Розв'язування.* Тут  $f(x, y) = x + y^2$  і  $g(x, y) = -2xy$ . Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 2y + 2y = 4y \neq 0,$$

тобто умова Ейлера не виконується, але помічаємо, що виконується рівність:

$$\frac{\partial f/\partial y - \partial g/\partial x}{g} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Тому інтегруючий множник можна отримати за формулою (14.25):

$$\ln(\mu(x)) = -2 \int \frac{dx}{x} = -2\ln(x).$$

Звідси дістаємо  $\mu(x) = 1/x^2$ . Помножимо початкове рівняння на інтегруючий множник при  $x \neq 0$  і маємо рівняння у повних диференціалах:

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - 2\frac{y}{x} dy = 0.$$

Покладемо  $x_0 = 1, y_0 = 0$ , та обчислимо потенціал за формулою (14.19):

$$u(x, y) = \int_1^x \frac{t + y^2}{t^2} dt - 2 \int_0^y t dt = \ln(x) - \frac{y^2}{x} + y^2 - y^2 = \ln(x) - \frac{y^2}{x}.$$

Звідси отримуємо загальний інтеграл цього рівняння  $\ln(x) - y^2/x = c$ , або  $y^2 = x(\ln(x) - c)$ , де  $c$  – довільна стала і  $x > 0$ .

## 14.7. Завдання для самостійної роботи студентів

**14.7.1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремленими змінними (за варіантами):

$$1) y \cdot y' = \frac{1 - x^2}{x}; \quad 2) y' = \frac{y + 1}{\operatorname{tg}(x)}; \quad 3) y' = \frac{y \cdot \ln(y)}{x};$$

$$4) y' = xy^2 + 2xy; \quad 5) y \cdot y' = \frac{e^x}{(1 + e^x)}.$$

**14.7.2.** Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння (за варіантами):

$$1) y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos(y/x)}; \quad 2) y' = \frac{y + x}{x}; \quad 3) y' = \frac{xy + y^2}{x^2}; \quad 4) y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2};$$

$$5) y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}.$$

**14.7.3.** Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння (за варіантами):

$$1) y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}; \quad 2) y' + 2 \cdot \operatorname{ctg}(x) \cdot y = \frac{1}{\sin(x)};$$

$$3) y' + 2xy = 2x; \quad 4) y' + \frac{y}{x} = x^2; \quad 5) y' + y = x^2.$$

**14.7.4.** Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі (за варіантами):

$$1) y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \cdot \ln(x)}{x}; \quad 2) y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \ln(x);$$

$$3) y' + 2y = e^x y^2; \quad 4) y' + 2xy = 2xy^2; \quad 5) y' + 2xy = e^{x^2} y^2.$$

**14.7.5.** Розв'язати рівняння в повних диференціалах (за варіантами):

$$1) 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0; \quad 2) (2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0;$$

$$3) e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0; \quad 4) \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln(x))dy = 0;$$

$$5) (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$$

**14.7.6.** Знайти інтегруючий множник у вигляді функції  $\mu(x)$  і розв'язати такі рівняння (за варіантами):

$$1) (1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0; \quad 2) (x^2 + y)dx - xdy = 0; \quad 3) (x + y^2)dx - 2xydy = 0;$$

$$4) (2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0; \quad 5) (x^4 \ln(x) - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0.$$

## 15. Диференціальні рівняння вищих порядків

Загальною формою диференціального рівняння  $n$ -го порядку розв'язаного відносно вищої похідної є рівняння, яке пов'язує між собою невідому функцію  $y(x)$  з її похідними до  $n$ -го порядку включно:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \quad (15.1)$$

де  $y^{(0)} = y$  і  $y^{(1)} = y'$ . Розглянемо задачу Коші для цього рівняння.

### 15.1. Задача Коші

Розв'язок диференціального рівняння (15.1) визначається також як для рівнянь першого порядку, а саме функція  $y(x)$ , буде розв'язком рівняння (15.1) на інтервалі  $I = (a, b)$ , якщо після її підстановки в рівняння (15.1) вона перетворює його на тотожність за незалежною змінною  $x$ . В загальному випадку рівняння (15.1) має безліч розв'язків, які залежать від  $n$  довільних сталих  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , тому на розв'язок цього рівняння накладають початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \quad (15.2)$$

Задачу пошуку розв'язку  $y = y(x)$  рівняння (15.1), який задовольняє початкові умові (15.2), називають *задачею Коші* для рівняння (15.1). Важливість задачі Коші полягає в тому, що при певних умовах, які накладаються на функцію  $f(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$ , з правої частини рівняння (15.1), ця задача має один розв'язок.

**Теорема 15.1** (про існування та єдність розв'язку задачі Коші). Якщо в рівнянні (15.1) функція  $f(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$  та її частинні похідні  $\partial f / \partial y^{(i)}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , неперервні в області  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , то для будь-якої точки  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$  задача Коші (15.2) для рівняння (15.1) має єдиний розв'язок  $y(x)$ , визначений в деякому околі точки  $x_0$ .

Це основна теорема теорії диференціальних рівнянь. Спираючись на цю теорему можна визначити загальний розв'язок рівняння (15.1).

**Означення 15.1.** Загальним розв'язком рівняння (15.1) на інтервалі  $I = (a, b)$  називається сукупність функцій  $M$  залежних від довільних констант  $c_1, c_2, \dots, c_n$ :

$$M = \{\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) : c_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}, \quad (15.3)$$

які визначені на інтервалі  $(a, b)$  і задовольняють такі умови:

- 1) всі функції із множини  $M$  є розв'язками рівняння (15.1) на інтервалі  $(a, b)$ ;
- 2) для будь-якого частинного розв'язку  $y(x)$  задачі Коші (15.2) існує набір значень сталих  $c_1 = c_1^0, \dots, c_n = c_n^0$ , і функція  $\varphi(x, c_1^0, \dots, c_n^0) \in M$  такі, що  $y(x) = \varphi(x, c_1^0, \dots, c_n^0)$ .

### 15.2. Спеціальні рівняння вищих порядків

Виділимо деякі класи рівнянь вищого порядку виду (15.1), що допускають інтегрування або зводяться до рівнянь меншого порядку.

#### 15.2.1. Функція $f$ залежить тільки від незалежної змінної

Розглянемо рівняння  $y^{(n)} = f(x)$ , де  $f(x)$  – задана неперервна функція. Це рівняння розв'язується  $n$ -кратним інтегруванням:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1 = F_1(x) + c_1, \quad y^{(n-2)} = \int F_1(x) dx + c_1 x + c_2,$$

і т. д. Відповідь отримуємо у вигляді:

$$y(x) = F_n(x) + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n,$$

де  $F_1(x), \dots, F_n(x)$  – первісні функції, які дістаємо інтегруванням.

Наприклад, рівняння  $y'' = \sin(x)$  розв'язується двократним інтегруванням:

$$y'(x) = \int \sin(x) dx + c_1 = -\cos(x) + c_1,$$

$$y(x) = -\int \cos(x) + \int c_1 dx + c_2 = -\sin(x) + c_1 x + c_2.$$

#### 15.2.2. Функція $f$ залежить тільки від змінних $x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)}$

Розглянемо рівняння:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (15.4)$$

В цьому випадку порядок рівняння можна понизити на  $k$  одиниць за допомогою заміни  $z = y^{(k)}$ . Після цього рівняння (15.4) набуває вигляду  $z^{(n-k)} = f(x, z, \dots, z^{(n-k-1)})$ . Після знаходження розв'язку  $z(x)$  цього рівняння, розв'язок рівняння (15.4) можна отримати із рівняння  $y^{(k)} = z(x)$  шляхом  $k$ -кратного інтегрування, як у першому пункті.

Наприклад, розглянемо рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y'). \quad (15.5)$$

Здійсимо заміну  $z = y'$ , тоді  $y'' = z'$  і рівняння (15.5) зводиться до рівняння першого порядку  $z' = f(x, z)$ . Якщо знайдемо загальний розв'язок цього рівняння  $z(x, c_1)$ , то загальний розв'язок рівняння (15.5) отримуюмо шляхом інтегрування рівняння  $y' = z(x, c_1)$ :

$$y(x, c_1, c_2) = \int z(x, c_1) dx + c_2.$$

### 15.2.3. Функція $f$ не містить незалежної змінної

Розглянемо рівняння:

$$y^{(n)} = f(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (15.6)$$

В цьому випадку порядок рівняння можна понизити на одиницю заміною  $y' = z$ , де  $z = z(y)$  розглядають як нову невідому функцію від  $y$  і одночасно як складну функцію  $z = z(y(x))$  від  $x$ . Всі похідні  $y^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , виражають через функцію  $z$ :

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = z'z,$$

і т. д. Після підстановки нових виразів для похідних в рівняння (15.6) отримуємо нове рівняння  $(n-1)$  порядку:

$$z^{(n-1)} = g(y, z, \dots, z^{(n-2)}),$$

відносно нової невідомої функції  $z(y)$ .

Якщо ми знайдемо загальний розв'язок цього рівняння у вигляді  $z = \varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ , то шуканий розв'язок виходить інтегруванням рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}).$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо загальний інтеграл рівняння (15.6) в неявному виді (або можна вважати змінну  $x$  функцією від  $y$ ):

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} + c_n.$$

## 15.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке лінійно відносно функції  $y(x)$  та її похідних. Лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР)  $n$ -го порядку має такий вигляд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y^{(0)} = 0, \quad (15.7)$$

де  $p_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , – задані коефіцієнти, які неперервні на інтервалі  $(a, b)$ . Рівняння (15.7) можна записати у вигляді (15.1):

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_n(x)y^{(0)}.$$

Позначимо як  $f_L(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) = -p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_n(x)y^{(0)}$  праву частину цього рівняння, тоді  $\partial f_L / \partial y^{(i)} = -p_{n-i}(x)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Таким чином, із неперервності коефіцієнтів  $p_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , і теореми 15.1 отримуємо таке твердження.

**Теорема 15.2.** При довільних початкових умовах (15.2) задача Коші для ЛОДР (15.7) має єдиний розв'язок на інтервалі  $(a, b)$ .

Позначимо як  $C^0(a, b)$  множину неперервних функцій на інтервалі  $(a, b)$  і як  $C^n(a, b)$ ,  $n \geq 1$ , множину неперервно диференційованих функцій до  $n$ -го порядку включно на інтервалі  $(a, b)$ . При фіксованих коефіцієнтах  $p_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ліву частину рівняння (15.7) можна записати у вигляді диференціального оператора:

$$L[y(x)] = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y^{(0)}(x),$$

якій відображає функцію  $y(x) \in C^n(a, b)$  у функцію  $L[y(x)] \in C^0(a, b)$ . Таким чином, розв'язок рівняння (15.7) зводиться до пошуку всіх функцій  $y(x)$ , таких що  $L[y(x)] = 0$ , тобто до знаходження ядра оператора  $L[y(x)]$ .

Лінійною комбінацією функцій  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  зі сталими  $c_1, c_2, \dots, c_m$  називається функція  $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)$ . Із лінійності операції диференціювання випливає, що лінійна комбінація функцій  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  із  $C^n(a, b)$  також належить  $C^n(a, b)$  і тому множина  $C^n(a, b)$  є лінійним простором. Із лінійності рівняння (15.7) випливає лінійність оператора  $L[y]$ :

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + p_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + p_n (y_1 + y_2) = c_1 (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \dots + p_n y_1) + c_2 (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \dots + p_n y_2) = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2].$$

Цю властивість за індукцією можна узагальнити на будь-яке число доданків:

$$L(c_1 y_1 + \dots + c_m y_m) = c_1 L[y_1] + \dots + c_m L[y_m].$$

Зокрема, якщо  $L[y_i(x)] = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , то  $L(c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)) = 0$ . Таким чином, ми отримали таке твердження.

**Теорема 15.3.** Якщо функції  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  є розв'язками рівняння (15.7), то їх лінійна комбінація  $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)$  також буде розв'язком цього рівняння.

Це твердження показує, що розв'язки рівняння (15.7) створюють *лінійний підпростір* в просторі  $C^n(a, b)$ , тому можна говорити о лінійній залежності і незалежності функцій, що було визначено в лінійній алгебрі для векторів (лекція 1). Нехай маємо набір функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  визначених на інтервалі  $(a, b)$ .

**Означення 15.2.** Набір функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  називається *лінійно залежним*, якщо існують сталі  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , не всі з яких дорівнюють нулю, такі що:

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x) = 0, \text{ для всіх } x \in (a, b). \quad (15.8)$$

В іншому випадку, коли тотожність (15.8) виконується тільки при  $c_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , то набір функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  називається *лінійно незалежними*.

Нехай  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  – набір функцій із простору  $C^m(a, b)$ , тоді зіставимо йому квадратну матрицю функцій (функціональну матрицю) розміру  $m \times m$ :

$$W_Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x), & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix},$$

яка називається *матрицею Вронського* набору функцій  $Y$ .

**Означення 15.3.** Визначником Вронського (або *вронськiаном*) набору функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  називається визначник  $w_Y(x) = \det(W_Y(x))$  матриці  $W_Y(x)$ .

**Лема 15.4.** Якщо набір функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  із простору  $C^m(a, b)$  лінійно залежний, то їх вронськiан тотожно дорівнює нулю  $w_Y(x) = 0$  для всіх  $x \in (a, b)$ .

**Доведення.** Диференціюючи тотожність (15.8)  $(m-1)$  раз, дістаємо такі тотожності  $c_1 y_1^{(i)}(x) + \dots + c_m y_m^{(i)}(x) \equiv 0$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ . Це означає, що стовпці матриці  $W_Y(x)$  будуть лінійно залежні для будь-якої точки  $x \in (a, b)$ . Тому за теоремою 3.1 (лекція 3)  $w_Y(x) = 0$ , для всіх  $x \in (a, b)$ . Таким чином, лему доведено.  $\square$

За логічним принципом контрапозиції (лекція 0 вступна) із леми 15.4 отримуємо таке твердження.

**Наслідок 15.5.** Якщо  $w_Y(p) \neq 0$  для деякої точки  $p \in (a, b)$ , то набір функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  із простору  $C^m(a, b)$  буде лінійно незалежним.

Наприклад, визначник Вронського для функцій  $\cos(x)$  і  $\sin(x)$  має вигляд:

$$\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} \equiv 1, \quad (15.9)$$

тому ці функції є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі  $(a, b)$ .

**Означення 11.4.** Лінійно незалежний набір розв'язків  $Y = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  рівняння  $n$ -го порядку (15.7) називається його *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР).



### 15.4. Лінійні однорідні рівняння 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

Оскільки лінійне однорідне рівняння (15.7) не завжди інтегрується в елементарних функціях, то перейдемо до лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (повний титул ЛОДР-СК), розв'язок яких можна отримати у явному вигляді. Розглянемо спочатку лінійне однорідне диференціальне рівняння 2 порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, \quad (15.11)$$

де коефіцієнти  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$  – дійсні числа (сталі коефіцієнти). Рівняння (15.11) можна розв'язувати на всій числовій осі  $\mathbb{R}$ , оскільки сталі коефіцієнти неперервні всюди на  $\mathbb{R}$ . Нагадаємо, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (15.11), нам достатньо знайти два його лінійно незалежні розв'язки (теорема 15.9).

**Метод Ейлера.** Згідно з методом Ейлера (Ойлера) будемо шукати розв'язок у вигляді функції  $y(x) = e^{\lambda x}$ , де  $\lambda$  – невідоме число (змінна). Підставимо вирази  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$  і  $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$  в рівняння (15.1), тоді отримуємо  $e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0$ . Оскільки  $e^{\lambda x} \neq 0$ , для всіх  $x$ , то цю рівність можна скоротити на  $e^{\lambda x}$  і отримати квадратне алгебраїчне рівняння відносно числа  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0. \quad (15.12)$$

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням* для рівняння (15.11), оскільки розв'язок диференціального рівняння (15.11) по суті звівся до розв'язку алгебраїчного рівняння (15.12). Розглянемо три можливих випадки для коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , рівняння (15.12), які впливають на розв'язки рівняння (15.11).

#### 15.4.1. Дійсні і різні корені характеристичного рівняння

Припустимо, що дискримінант  $D = p_1^2 - 4p_2$  більше нуля, тоді корені рівняння (15.12) будуть дійсними  $\lambda_1 = (-p_1 - \sqrt{D})/2$ ,  $\lambda_2 = (-p_1 + \sqrt{D})/2$  і різними  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тому отримуємо набір із двох лінійно незалежних розв'язків  $Y = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ , оскільки їх вронський  $w_Y(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x}$  не дорівнює нулю для всіх  $x$ . Отже набір  $Y = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$  утворює ФСР рівняння (15.11) і згідно теореми 15.9 ми отримуємо загальний дійсний розв'язок рівняння (15.11) у вигляді  $L(Y) = \{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ .

#### 15.4.2. Дійсний кратний корінь характеристичного рівняння

Припустимо, що  $D = p_1^2 - 4p_2 = 0$ , тоді корені дійсні і рівні  $\lambda_1 = \lambda_2 = -p_1/2$ . За методом Ейлера маємо один розв'язок  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  і треба знайти другий. Розглянемо характеристичний поліном  $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_2$ , якій в нашому випадку з урахуванням рівностей  $p_1 = -2\lambda_1$ ,  $p_2 = \lambda_1^2$ , має вигляд  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda_1 \lambda + \lambda_1^2 = (\lambda - \lambda_1)^2$ . Якщо диференціювати поліном  $p(\lambda)$  за  $\lambda$ , то маємо  $p'(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_1)$  і тому  $p'(\lambda_1) = 0$ . Це відображає загальний факт, що кратний корінь поліному буде і коренем його похідної.

Звернемо увагу, що функція  $y(x, \lambda) = e^{\lambda x}$  гладко залежить як від  $x$ , так і від параметра  $\lambda$  і тому частинні похідні за  $x$  і за  $\lambda$  можна переставляти між собою (теорема 12.4, лекція 12). Звідси випливає, що частинну похідну  $\partial y(x, \lambda)/\partial \lambda$  можна переставляти з оператором  $L[y(x, \lambda)] = y''(x, \lambda) + p_1 y'(x, \lambda) + p_2 y(x, \lambda)$ , де штрихи означають похідні за  $x$ . Розрахунок показує, що виконується така рівність  $L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = e^{\lambda x} p(\lambda)$ . Звідси, користуючись правилом Лейбніца диференціювання добутку, отримуємо:

$$L[xe^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial e^{\lambda x}}{\partial \lambda}\right] = \frac{\partial L[e^{\lambda x}]}{\partial \lambda} = \frac{\partial (e^{\lambda x} p(\lambda))}{\partial \lambda} = e^{\lambda x}(xp(\lambda) + p'(\lambda)). \quad (15.13)$$

Підставив сюди корінь  $\lambda = \lambda_1$  дістаємо  $L[xe^{\lambda_1 x}] = e^{\lambda_1 x}(xp(\lambda_1) + p'(\lambda_1)) = 0$ , оскільки  $p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = 0$ . Таким чином, функція  $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$  буде другим розв'язком рівняння (15.11), який, очевидно, лінійно незалежний від  $y_1(x)$ , так як  $y_2(x)/y_1(x) = x \neq \text{const}$ . Отже в цьому випадку розв'язки  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  і  $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$  утворюють ФСР рівняння (15.11) і загальний розв'язок має вигляд  $y(x, c_1, c_2) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}$  де  $c_1, c_2$  – довільні дійсні стали.

### 15.4.3. Комплексні корені

Припустимо, що дискримінант  $D = p_1^2 - 4p_2$  від'ємний, тоді обидва корені  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – комплексно спряжені, тобто симетричні відносно осі абсцис  $\lambda_1 = (-p_1 - i\sqrt{|D|})/2$ ,  $\lambda_2 = (-p_1 + i\sqrt{|D|})/2$ , де  $i$  – уявна одиниця. Введемо для зручності позначення:

$$\alpha = -p_1/2, \quad \beta = \sqrt{|D|}/2 = \sqrt{4p_2 - p_1^2}/2, \quad (15.14)$$

тоді  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  і  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , причому  $\beta > 0$ .

Функція  $z(x)$  від дійсного аргументу  $x$  називається комплекснозначною, якщо  $z(x) = u(x) + iv(x)$ , де  $u(x)$  і  $v(x)$  – дійсні функції. Такі функції диференціюються за компонентами  $z'(x) = u'(x) + iv'(x)$ ,  $z''(x) = u''(x) + iv''(x)$  т. д. Тоді оператор  $L[y(x)] = y''(x) + p_1y'(x) + p_2y(x)$  можна визначити і для комплекснозначної функції  $z(x)$ , оскільки виконується рівність:

$$L[z(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)]. \quad (15.15)$$

Розглянемо комплекснозначну функцію  $z(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ , яка узагальнює метод Ейлера на комплексні числа. Тоді із формули Ейлера (Введення, лекція 0) дістаємо  $z(x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$ . Студентам пропонується самостійно переконатися, що дійсні функції  $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ,  $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$  будуть дійсними розв'язками рівняння (15.11) підставив їх в рівняння і виразив коефіцієнти при функціях  $\cos(\beta x)$  і  $\sin(\beta x)$  через коефіцієнти полінома  $p_1$  і  $p_2$  з урахуванням формул (15.14). Тоді із формули (15.15) випливає, що функція  $z(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$  також буде розв'язком цього рівняння. Таким чином, метод Ейлера працює і для комплексних значень параметра  $\lambda$ .

Набір розв'язків  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  буде лінійно незалежним, оскільки  $y_2(x)/y_1(x) = \tan(\beta x) \neq \text{const}$ . Отже розв'язки  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  утворюють ФСР рівняння (15.11) і його загальний розв'язок у цьому випадку має вигляд  $y(x, c_1, c_2) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$ , де  $c_1, c_2$  – довільні дійсні стали.

**Приклад 15.11.** Розв'язати диференціальне рівняння  $y'' - y' - 2y = 0$  і знайти його загальний розв'язок і частковий розв'язок, який задовольняє початковим умовам  $y(0) = 2$  і  $y'(0) = -5$  (задача Коші).

*Розв'язання.* Це рівняння з постійними коефіцієнтами, тому складаємо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$  і знаходимо його корені  $\lambda_1 = 2$  і  $\lambda_2 = -1$ . Оскільки корені дійсні і різні, маємо перший випадок методу Ейлера, тому функції  $\{e^{2x}, e^{-x}\}$  утворюють ФСР цього рівняння. Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд  $y(x, c_1, c_2) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ , де  $c_1$  і  $c_2$  – довільні стали.

Щоб розв'язати задачу Коші, знаходимо похідну  $y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} - c_2 \cdot e^{-x}$ . Тоді із початкових умов складаємо систему лінійних рівнянь відносно констант  $c_1$  і  $c_2$ :

$$y(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y'(0) = 2c_1e^0 - c_2e^0 = 2c_1 - c_2 = -5.$$

Із системи  $c_1 + c_2 = 2$ ,  $2c_1 - c_2 = -5$  знаходимо  $c_1 = -1$  і  $c_2 = 3$ . Таким чином, частковий розв'язок, який задовольняє початкові умови, має вигляд  $y(x) = -e^{2x} + 3e^{-x}$ .

### 15.5. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = 0, \quad (15.16)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – дійсні числа. Це рівняння також розв'язується за методом Ейлера, причому метод розв'язку є прямим узагальненням методу, описаному для рівняння другого порядку.

Введемо диференціальний оператор  $L[y(x)] = y^{(n)}(x) + p_1y^{(n-1)}(x) + \dots + p_ny(x)$ , характеристичний поліном  $p(\lambda) = (\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n)$  і визначимо характеристичне алгебраїчне рівняння  $p(\lambda) = 0$ :

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0. \quad (15.17)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (15.16) у вигляді функції  $y(x) = e^{\lambda x}$ , де  $\lambda$  – невідома константа. Підставляючи функцію  $y(x) = e^{\lambda x}$  в оператор  $L[y(x)]$  отримуємо рівність:

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}p(\lambda). \quad (15.18)$$

Оскільки  $e^{\lambda x} \neq 0$  для всіх  $x$ , навіть, якщо  $\lambda$  – комплексне число, то отримуємо твердження.

**Твердження 15.12.** Функція  $y(x) = e^{\lambda x}$  буде розв'язком рівняння (15.16) тоді і тільки тоді, коли  $p(\lambda) = 0$ , тобто коли число  $\lambda$  буде коренем рівняння (15.17).

Тому процедура розв'язання рівняння (15.16) виглядає таким чином:

1) Знаходимо корені характеристичного полінома  $p(\lambda)$ . Загального метода тут не існує, але для  $n \leq 5$  можна знайти корені підбором, знижуючи степінь полінома.

2) Кожному дійсному кореню  $r_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , кратності  $k_i$  відповідає  $k_i$  розв'язків

$$e^{r_i x}, x e^{r_i x}, \dots, x^{k_i-1} e^{r_i x}, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (15.19)$$

3) Кожній парі комплексно-спряжених коренів  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ ,  $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ ,  $1 \leq j \leq e$ , кратності  $m_j$  відповідає  $2m_j$  дійсних розв'язків:

$$e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \dots, x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \quad (15.20)$$

$$e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \dots, x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x). \quad (15.21)$$

4) Об'єднаємо всі розв'язки (15.19), (15.20) і (15.21) для різних коренів, тоді отримуємо точно  $n$  лінійно незалежних дійсних розв'язків  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  рівняння (15.16).

Зупинимось коротко на обґрунтуванні процедури. Із основної теореми алгебри (теореми Гаусса) випливає, що сума кратностей всіх коренів полінома  $p(\lambda)$  дорівнює його степені (см. також формулу (10.8) лекція 10):

$$\sum_{i=1}^d k_i + 2 \sum_{j=1}^e m_j = n.$$

тому об'єднання всіх розв'язків дає ФСР рівняння (15.16). Поява розв'язків (15.19) у кореня  $r$  кратності  $k$  доводиться за допомогою узагальнення тотожності (15.13). Зауважимо, що  $x^i e^{\lambda x} = \partial^i (e^{\lambda x}) / \partial \lambda^i$ ,  $1 \leq i < k$ . Якщо рівність (15.18) диференціювати  $(k-1)$  раз за змінною  $\lambda$ , то для кожного  $1 \leq i < k$  отримуємо такі рівності:

$$L[x^i e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} [p^{(i)}(\lambda) + i x p^{(i-1)}(\lambda) + \dots + x^i p(\lambda)], \quad 1 \leq i < k.$$

Звідси випливає, що всі функції  $x^i e^{rx}$ ,  $1 \leq i < k$ , також будуть розв'язками рівняння (15.8), оскільки  $p^{(i)}(r) = 0$ ,  $1 \leq i < k$ , для кореня  $r$  кратності  $k$ .

Лінійну комбінацію розв'язків  $c_0 e^{r_i x} + c_1 x e^{r_i x} + \dots + c_{k_i-1} x^{k_i-1} e^{r_i x}$  можна представити як добуток  $P_i(x) e^{r_i x}$  полінома ступеня  $k_i - 1$  на функцію  $e^{r_i x}$ . Припустимо, що існують ненульові поліноми  $P_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , такі, що  $P_1(x) e^{r_1 x} + \dots + P_d(x) e^{r_d x} \equiv 0$ . Якщо  $r_1 < \dots < r_d$ , то поділімо цю тотожність на  $e^{r_d x}$ , тоді отримуємо таку тотожність:

$$-P_d(x) \equiv P_1(x) e^{(r_1-r_d)x} + \dots + P_{d-1}(x) e^{(r_{d-1}-r_d)x}.$$

Оскільки функція  $e^{(r_i-r_d)x}$  зменшується скоріше ніж зростає поліном  $P_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq d-1$ , то права частина цієї тотожності збігається до нуля при  $x \rightarrow \infty$ , в той час, як поліном  $-P_d(x)$  після останнього нуля буде зростати або зменшуватися нескінченно. Отримане протиріччя показує, що функції (15.19) лінійно незалежні. Таким чином, отримали ФСР  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  і тому дістаємо загальний дійсний розв'язок рівняння (15.16) у вигляді  $y(x, c_1, \dots, c_n) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ , де  $c_1, \dots, c_n$  – довільні дійсні сталі.

## 15.6. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами  $n$ -го порядку (ЛНДР-СК):

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n \cdot y = f(x), \quad (15.22)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – дійсні числа, а  $f(x)$  – неперервна функція на інтервалі  $(a, b)$ , яка не дорівнює тотожно нулю. Рівнянню (15.22) відповідає лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, яке ми будемо називати асоційованим з рівнянням (15.22) і яке має теж самі коефіцієнти, що і рівняння (15.22):

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0. \quad (15.23)$$

**Теорема 15.13.** Загальний розв'язок  $\varphi_N(x, c_1, \dots, c_n)$  рівняння (15.22) дорівнює сумі загального розв'язку  $\psi_0(x, c_1, \dots, c_n)$  асоційованого однорідного рівняння (15.23) і будь-якого частинного розв'язку  $y_0(x)$  рівняння (15.22):

$$\varphi_N(x, c_1, \dots, c_n) = \psi_0(x, c_1, \dots, c_n) + y_0(x).$$

Ця теорема нам вже зустрічалась для лінійних рівнянь першого порядку (Теорема 14.2, лекція 14). Вона описує структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння і доводиться також як і для рівнянь першого порядку. Методи пошуку розв'язку однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами були розглянуті в попередньому параграфі. Тому наша задача зводиться до пошуку одного частинного розв'язку рівняння (15.22). Спочатку розглянемо загальний метод Лагранжа, а потім метод, якій застосовуються для окремих функцій  $f(x)$ .

### 15.6.1. Метод Лагранжа варіації довільних сталих

Метод варіації довільних сталих Лагранжа має загальний характер, і може застосовуватися для будь-яких функцій  $f(x)$  в рівнянні (15.22). Проілюструємо його на прикладі лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку:

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = f(x). \quad (15.24)$$

Спочатку знаходимо ФСР  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  асоційованого лінійного однорідного рівняння  $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$  як у параграфі 15.4. Згідно з методом Лагранжа будемо шукати загальний розв'язок рівняння (15.24) у вигляді

$$y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x), \quad (15.25)$$

де  $c_1(x)$  і  $c_2(x)$  – невідомі функції. Іншими словами, довільні стали перетворюються на функції, звідси метод і отримав свою назву. Диференціюємо функцію  $y(x)$  і знаходимо вираз для її похідної  $y'(x)$  за формулою Лейбніца:

$$y'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Для того щоб у виразі для другої похідної  $y''(x)$  не входили похідні 2-го порядку  $c_1''(x)$  і  $c_2''(x)$  накладемо на функції  $c_1(x)$  і  $c_2(x)$  додаткову умову:

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0. \quad (15.26)$$

Отже, для функції  $y'(x)$  отримуємо вираз аналогічний виразу (15.25)

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Далі диференціюємо похідну  $y'(x)$ , тоді одержимо:

$$y''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Підставимо тепер вирази для функцій  $y(x)$ ,  $y'(x)$  і  $y''(x)$  в ліву частину рівняння (15.24), тоді після ряду перетворень і з урахуванням того, що  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  є розв'язками однорідного рівняння  $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ , отримуємо рівність:

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x).$$

Звідси та з рівняння (15.26) отримуємо лінійну алгебраїчну систему із двох рівнянь відносно функцій  $c_1'(x)$  і  $c_2'(x)$ :

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}, \quad (15.27)$$

Визначник цієї системи дорівнює вронскіану набору функцій  $Y = \{y_1(x), y_2(x)\}$ :

$$w_Y(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x),$$

якій не дорівнює нулю при всіх  $x$ , згідно наслідку 15.8. Тому єдиний розв'язок системи (15.27) можна отримати за методом Крамера:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{w_Y(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{w_Y(x)}.$$

Після інтегрування функцій  $c_1'(x)$  і  $c_2'(x)$  знаходимо функції  $c_1(x)$  і  $c_2(x)$ :

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x) \cdot f(x)}{w_Y(x)} dx + c_1, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{w_Y(x)} dx + c_2.$$

Таким чином, згідно з формулою (15.25) і теоремою 15.13 загальний розв'язок рівняння (15.24) отримуємо у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння  $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$  і часткового розв'язку  $y_0(x)$  рівняння (15.24) у формі Лагранжа:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int \frac{w_1(x)}{w_Y(x)} dx \cdot y_1(x) + \int \frac{w_2(x)}{w_Y(x)} dx \cdot y_2(x), \quad (15.28)$$

де  $w_1(x) = -y_2(x)f(x)$ , і  $w_2(x) = y_1(x)f(x)$ .

Для неоднорідного рівняння (15.22)  $n$ -го порядку загальний розв'язок за методом Лагранжа шукаємо у вигляді:

$$y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + \dots + c_n(x) \cdot y_n(x),$$

де  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  – невідомі функції, а  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – ФСР однорідного рівняння (15.23). Система лінійних рівнянь (15.27) відносно функцій  $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$  має такий вигляд:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n(x) = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n'(x) = 0, \\ \dots \\ c_1'(x) \cdot y_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \quad (15.29)$$

Визначник цієї системи дорівнює вронскіану набору функцій  $Y = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ , якій згідно з наслідком 15.8 не дорівнює нулю при всіх  $x$ . Тому єдиний розв'язок системи (15.29) за методом Крамера має вигляд  $c_i'(x) = w_i(x)/w_Y(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , де  $w_i(x)$  – визначник матриці, яка виходить із матриці Вронського  $W_Y(x)$  заміною її  $i$ -го стовпця на стовпець вільних членів  $(0, \dots, 0, f(x))^t$ . Звідси отримуємо загальний розв'язок рівняння (15.22) у формі Лагранжа:

$$y(x, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) + \sum_{i=1}^n \left( \int \frac{w_i(x)}{w_Y(x)} dx \right) y_i(x). \quad (15.30)$$

### 15.6.2. Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай функція  $f(x)$  з правої частини рівняння (15.22) має такий вигляд:

$$f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}, \quad (15.31)$$

де  $P(x) = a_0 x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + \dots + a_m$  – поліном степені  $m$ , а  $\alpha$  – дійсне число. Розглянемо характеристичне рівняння асоційованого однорідного рівняння (15.23):

$$\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0. \quad (15.32)$$

Покладемо  $\text{mult}(\alpha) = 0$ , якщо число  $\alpha$  не є коренем рівняння (15.32), а в іншому випадку  $\text{mult}(\alpha)$  дорівнює кратності кореня  $\alpha$  у рівняння (15.32) (називається явищем резонансу). Тоді частинний розв'язок рівняння (15.22) шукають у вигляді:

$$y_0(x) = x^k \cdot Q(x) \cdot e^{\alpha x},$$

де  $k = \text{mult}(\alpha)$  і  $Q(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m$  – поліном ступеня  $m$  з невизначеними коефіцієнтами  $A_i$ ,  $0 \leq i \leq m$ .

Коефіцієнти полінома  $Q(x)$  знаходяться *методом невизначених коефіцієнтів*. Для цього функція  $y_0(x)$  та її похідні підставляється в рівняння (15.22), функція  $e^{\alpha x}$  скорочується зліва і з права, а коефіцієнти поліномів прирівнюються один до одного в лівій і правій частинах при однакових степенях змінної  $x$ . Із отриманої системи, яка складається із  $m + 1$  лінійного рівняння визначаються коефіцієнти полінома  $Q(x)$ . З подібним методом ми вже зустрічались при розкладанні правильної дробі на елементарні дробі.

Зауважимо, що цей метод працює і при  $\alpha = 0$ , тобто коли  $f(x) = P(x)$ , але в цьому випадку частинний розв'язок шукають у вигляді  $y_0(x) = x^k Q(x)$ , де  $k = \text{mult}(0)$  дорівнює кратності нуля, як кореня характеристичного рівняння (15.32).

Тепер розглянемо функцію  $f(x)$  більш загального виду:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cdot \cos(\beta x) + P_2(x) \cdot \sin(\beta x)), \quad (15.33)$$

Де  $\alpha$  і  $\beta$  – дійсні числа, а  $P_1(x)$  і  $P_2(x)$  – поліноми степені  $m_1$  і  $m_2$  відповідно, які розглядаються як поліноми степені  $m = \max(m_1, m_2)$ , тобто дописуються нульові старші коефіцієнти в поліномі меншої степені. Зауважимо, що функція виду (15.31) є частковим випадком функції виду (15.33) при  $\beta = 0$ . Для функції  $f(x)$  виду (15.33) частковий розв'язок рівняння (15.14) шукають у вигляді:

$$y_0(x) = x^k e^{\alpha x} (Q_1(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_2(x) \cdot \sin(\beta x)), \quad (15.34)$$

де  $Q_1(x)$  і  $Q_2(x)$  – невідомі поліноми степені  $m$ , а  $k = \text{mult}(\alpha + i\beta)$ , тобто  $k = 0$  якщо комплексне число  $\alpha + i\beta$  не є коренем рівняння (15.32), і в іншому випадку  $k$  дорівнює кратності кореня  $\alpha + i\beta$  в цьому рівнянні (явище резонансу).

Коефіцієнти поліномів  $Q_1(x)$  і  $Q_2(x)$  знаходяться методом невизначених коефіцієнтів. Для цього функція  $y_0(x)$  та її похідні підставляються в рівняння (15.22), функція  $e^{\alpha x}$  скорочується зліва і з права, але тепер прирівнюються один до одного коефіцієнти в лівій і правій частинах при однакових функціях (функціональних виразах) виду  $x^i \cos(\beta x)$  або  $x^j \sin(\beta x)$  де  $0 \leq i, j \leq m$ . Важливу роль при розв'язанні лінійних неоднорідних рівнянь грає *принцип суперпозиції*.

**Теорема 15.14** (принцип суперпозиції). Якщо  $y_1(x)$  є розв'язком рівняння (15.22) з правою частиною  $f_1(x)$ , а  $y_2(x)$  є розв'язок цього рівняння з правою частиною  $f_2(x)$ , то  $y_1(x) + y_2(x)$  буде розв'язком рівняння (15.22) з правою частиною  $f_1(x) + f_2(x)$ .

Цей принцип дозволяє розбивати складну праву частину рівняння (15.22) на доданки, знаходити для них розв'язки, а потім шляхом складання цих розв'язків отримати частковий розв'язок для неоднорідного рівняння (15.22). Наприклад, так можна діяти, якщо права частина рівняння (15.22) складається з декількох доданків виду (15.31) або (15.33).

## 15.7. Зразки розв'язування вправ

**15.7.1.** Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

$$1) y'' = x - y'/x; \quad 2) 2yy'' + y'y' = 0.$$

*Розв'язання.* 1) Це рівняння виду (15.4), яке не містить функції  $y$  в правій частині. Здійснюємо заміну  $z = y'$  та отримуємо лінійне рівняння першого порядку відносно функції  $z(x)$ :

$$z' + \frac{z}{x} = x.$$

Тут первісна  $P(x)$  для функції  $p(x) = 1/x$  дорівнює  $\ln(x)$ , тоді за формулою (14.10) (лекція 14) маємо:

$$z(x) = e^{-\ln(x)} \left( c_1 + \int x \cdot e^{\ln(x)} dx \right) = \frac{1}{x} \left( \int x^2 dx + c_1 \right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Інтегруванням отримуємо відповідь на початкову задачу:

$$y(x) = \int \left( \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x} \right) dx + c_2 = \frac{x^3}{9} + c_1 \cdot \ln(x) + c_2.$$

2) Спочатку відокремлюємо старшу похідну при  $y \neq 0$ :

$$y'' = -\frac{(y')^2}{2y}.$$

Таким чином маємо рівняння виду (15.6), яке не містить явно змінної  $x$  в правій частині. Зробимо заміну  $y' = z(y)$ , тоді за правилом диференціювання складної функції маємо:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

Підставимо це співвідношення в початкове рівняння, скорочуємо на  $z$  тоді отримуємо рівняння відносно функції  $z(y)$ :

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{z}{2y}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними, тоді після його інтегрування маємо:

$$\ln(z) = -\int \frac{dy}{2y} + c_1 = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + \ln(c_1).$$

Звідси отримуємо  $z = c_1/\sqrt{y}$ , де  $c_1 > 0$ . Тепер визначимо функцію  $y(x)$  також із рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{y}}.$$

Звідси отримуємо відповідь у неявній формі  $y^{3/2} = c_1 x + c_2$  або  $y(x) = (c_1 x + c_2)^{2/3}$ . Тут треба зауважити, що розв'язок  $y(x) \equiv 0$ , який ми загубили, при введенні умови  $y \neq 0$ , виходить із загального при  $c_1 = c_2 = 0$ .

**15.7.2.** Розв'язати однорідне диференціальне рівняння  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

*Розв'язання.* Це рівняння типу (15.11), тому складаємо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$  і знаходимо його корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ . Оскільки корені дійсні і однакові, маємо другий випадок методу Ейлера, тому набір функцій  $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$  утворює ФСР цього рівняння. Отже, загальний дійсний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x, c_1, c_2) = (c_1 + c_2 x)e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**15.7.3.** Розв'язати однорідне диференціальне рівняння  $y'' - 4y' + 13y = 0$ .

*Розв'язання.* Це рівняння типу (15.11), тому складаємо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$  і знаходимо його корені  $\lambda_1 = 2 + 3i$ ,  $\lambda_2 = 2 - 3i$ . Оскільки корені комплексно спряжені, то маємо третій випадок методу Ейлера. Тому набір функцій  $\{e^{2x} \cos(3x), e^{2x} \sin(3x)\}$  утворює ФСР цього рівняння над полем дійсних чисел. Отже, загальний дійсний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y(x, c_1, c_2) = e^{2x}(c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**15.7.4.** Розв'язати однорідне диференціальне рівняння  $y''' - y'' + y' - y = 0$ .

*Розв'язання.* Це лінійне однорідне рівняння третього порядку виду (15.8). Тому складаємо характеристичне рівняння  $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$  і розкладаємо ліву частину на множники  $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ . Звідси отримуємо корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = i$ ,  $\lambda_3 = -i$ . Перший дійсний корінь  $\lambda_1 = 1$  дає частковий розв'язок цього рівняння  $y_1(x) = e^x$ . Пара комплексно спряжених коренів  $i = 0 + 1i$  та  $-i = 0 - 1i$  дають ще два розв'язки  $\cos(x)$  і  $\sin(x)$ . Тому набір функцій  $\{e^x, \cos(x), \sin(x)\}$  утворює ФСР цього рівняння, а загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot \cos(x) + c_3 \cdot \sin(x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

**15.7.5.** Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння  $y'' - 2y' + y = x + 1$ .

*Розв'язання.* Це лінійне неоднорідне рівняння 2 порядку зі сталими коефіцієнтами виду (15.22), тому складаємо характеристичне рівняння для асоційованого однорідного рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  і знаходимо його корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Маємо дійсний кратний корінь, тому набір функцій  $\{e^x, xe^x\}$  створює ФСР однорідного рівняння та його загальний розв'язок має вигляд  $y(x) = (c_1 + c_2 \cdot x)e^x$ .

У даному випадку функція  $f(x)$  має вид (15.31) при  $P(x) = x + 1$  і  $\alpha = 0$ , крім того  $\alpha = 0$  не є коренем характеристичного рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ . Тому будемо шукати частковий розв'язок у вигляді  $y_0(x) = Ax + B$ , за допомогою метода невизначених коефіцієнтів. Диференціюємо і підставляємо функції  $y_0''(x) = 0$ ,  $y_0'(x) = A$ , і  $y_0$  в неоднорідне рівняння, тоді маємо  $-2A + Ax + B = x + 1$ . Прирівнюємо коефіцієнти в лівій і правій частинах рівняння при однакових степенях  $x$ , тоді отримуємо  $A = 1$ , і  $-2A + B = 1$ . Звідси дістаємо  $A = 1$ ,  $B = 3$ . Таким чином, частковим розв'язком цього рівняння буде функція  $y_0(x) = x + 3$ , а загальним розв'язком згідно теореми 15.13 буде функція:

$$y(x, c_1, c_2) = (c_1 + c_2 \cdot x)e^x + x + 3.$$

**15.7.6.** Розв'язати диференціальне рівняння:  $y'' + y = \operatorname{tg}(x)$ .

*Розв'язання.* Це лінійне неоднорідне рівняння другого порядку виду (15.22), якому відповідає характеристичне рівняння асоційованого однорідного рівняння  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Його корені комплексно спряжені  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ , тому набір функцій  $Y = \{\cos(x), \sin(x)\}$  створює ФСР асоційованого лінійного однорідного рівняння. Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільних сталих Лагранжа:

$$y(x) = c_1(x) \cdot \cos(x) + c_2(x) \cdot \sin(x).$$

Складемо систему рівнянь (15.27) для пошуку функцій  $c_1'(x)$  і  $c_2'(x)$ :

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot \cos(x) + c_2'(x) \cdot \sin(x) = 0 \\ -c_1'(x) \cdot \sin(x) + c_2'(x) \cdot \cos(x) = \operatorname{tg}(x). \end{cases}$$

Визначник цієї системи дорівнює одиниці  $w_Y(x) = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ , тоді за формулами Крамера отримуємо функції:

$$c_1'(x) = -\sin(x) \cdot \operatorname{tg}(x) = -\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}, \quad c_2'(x) = \cos(x) \cdot \operatorname{tg}(x) = \sin(x).$$

Інтегрування дає:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= - \int \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos(x)^2 - 1}{\cos(x)} dx = \int \cos(x) dx - \int \frac{dx}{\cos(x)} = \\ &= \sin(x) + \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) + c_1. \end{aligned}$$

Інтеграл від секанса ( $1/\cos(x)$ ) обчислюється універсальною тригонометричною підстановкою  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ :

$$- \int \frac{dx}{\cos(x)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left( \frac{t - 1}{t + 1} \right) = \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\operatorname{tg}(x/2) + 1} \right) = \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Далі маємо:

$$c_2(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c_2,$$

де  $c_1, c_2$  – довільні стали. Тепер ми можемо записати загальний розв'язок цього рівняння:

$$c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \cos(x) \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

### 15.8. Завдання для самостійної роботи студентів

**15.8.1.** Знайти загальний розв'язок рівнянь другого порядку. Знайти також частинний розв'язок, якщо вказані початкові умови (за варіантами):

- 1)  $y'' = \sin(x), y(0) = y'(0) = 0$ ; 2)  $y''' + y'' = 1$ ;
- 3)  $y'' = 2yy', y(0) = 0, y'(0) = 1$ ; 4)  $y'' = (y')^2/x^2$ ;
- 5)  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ .

**15.8.2.** Знайти визначник Вронського для таких наборів функцій (за варіантами).

- 1)  $\{x, x^{-1}\}$ ; 2)  $\{e^{-x}, e^{-x}x\}$ ; 3)  $\{1, x\}$ ; 4)  $\{e^x, e^x x^2\}$ ; 5)  $\{\cos(x), -\sin(x)\}$ .

**15.8.3.** Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2 порядку (за варіантами):

- 1)  $y'' + y' - 2y = 0$ ; 2)  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ; 3)  $y'' - 2y' = 0$ ; 4)  $2y'' - 5y' + 2y = 0$ ;
- 5)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

**15.8.4.** Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку (за варіантами):

- 1)  $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ ; 2)  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ ; 3)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ ;
- 4)  $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$ ; 5)  $y''' - y'' + y' - y = 0$ .

**15.8.5.** Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння методом невизначених коефіцієнтів (за варіантами):

- 1)  $y'' - 5y' + 6y = e^x + x$ ; 2)  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x} + e^{-4x}$ ;
- 3)  $y'' + 3y' - 4y = e^{4x} + e^{-4x}$ ; 4)  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$ ;
- 5)  $y'' - 5y' = x + \sin(x)$ .

*Вказівка.* Скористайтесь принципом суперпозиції.

**15.8.6.** Розв'язати наступні лінійні неоднорідні диференціальні рівняння методом варіації довільних сталих Лагранжа (за варіантами):

- 1)  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ ; 2)  $y'' + 2y' + y = e^{-x}\sqrt{x+1}$ ;
- 3)  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ ; 4)  $y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$ ; 5)  $y'' + 2y' + 5y = \exp(-x) \cdot \cos(x)^2$ .

## Список використаної літератури

1. Рисцов І.К. Математика для економістів. Частина 1. Векторний та диференціальний аналіз. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра. Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2024. 123 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/67553>.
2. Рисцов І.К. Методичні вказівки до виконання практикумів з дисципліни «Математика для економістів, частина 2» : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра. Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022. 65 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/44403>.
3. Математика в технічному університеті : підручник / Алексеєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. ; за ред. О.І. Клесова. Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2018. Т. 1. 496 с.
4. Математика в технічному університеті : підручник / Алексеєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. за ред. О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. Т. 2. 504 с.
5. Математика в технічному університеті : підручник / Алексеєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. за ред. О. І. Клесова. Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2020. Т. 3. 454 с.