

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

**Л. І. Кублій**

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ  
ТА МАТЕМАТИЧНА  
СТАТИСТИКА-2**  
**РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ  
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ  
ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2019

Рецензент: *Островська О.В.*, к.ф.-м.н., доц. каф. диференціальних рівнянь  
ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний  
редактор: *Сидоренко Ю.В.*, к. т. н., доц. каф. АПЕПС

*Ухвалено Вченою радою ТЕФ (протокол № 9 від 22.04.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Кублій Лариса Іванівна*, канд. техн. наук, доц.

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА-2 РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Теорія ймовірностей та математична статистика-2: Рекомендації до виконання самостійної роботи студентів заочної форми навчання за освітньою програмою “Інженерія програмного забезпечення розподілених систем” / Л. І. Кублій; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 0,62 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 46 с.

Кредитний модуль “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” є необхідним теоретичним фундаментом для вивчення таких дисциплін, як “Системи штучного інтелекту”, “Конструювання та сучасні технології розподіленої обробки даних”, “Графічне моделювання”, “Програмування алгоритмів комп’ютерної графіки” та ін., які подаються в наступних семестрах і в яких необхідним є знання методів математичної статистики. Подано матеріал для самостійної та контрольних робіт студентів заочної форми навчання. Призначено для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою “Інженерія програмного забезпечення розподілених систем”.

© Л. І. Кублій, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

## Зміст

Вступ	4
1. Мета і завдання кредитного модуля	4
2. Структура кредитного модуля	6
3. Календарно-тематичний план	7
4. Самостійна робота	9
5. Завдання для самоконтролю	14
6. Контрольні роботи	22
7. Рейтингова система оцінювання результатів навчання	34
8. Методичні рекомендації	37
9. Рекомендована література	38
<i>Додаток А. Статистичні таблиці</i>	40

## **Вступ**

Рекомендації до виконання самостійної роботи студентів заочної форми навчання розроблені на підставі робочої програми кредитного модуля “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” і призначені для якісної організації самостійної роботи студентів при вивченні кредитного модуля, поліпшення результатів навчання.

Кредитний модуль “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” викладається студентам другого року підготовки першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ступеня “бакалавр” спеціальності “Інженерія програмного забезпечення” у четвертому навчальному семестрі, коли студенти вже прослухали такі дисципліни, як “Математичний аналіз”, “Лінійна алгебра та аналітична геометрія”, “Комп’ютерна дискретна математика”, набули певних теоретичних знань і володіють необхідним математичним апаратом.

Компетенції, отримані студентами в процесі вивчення дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” застосовуються ними при вивченні навчальних дисциплін “Системи штучного інтелекту”, “Конструювання та сучасні технології розподіленої обробки даних”, “Графічне моделювання”, “Програмування алгоритмів комп’ютерної графіки” та ін., які подаються в наступних семестрах.

При вивченні кредитного модуля “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” студентами заочної форми навчання на аудиторні заняття виділяється 6 академічних годин, тому основне опрацювання матеріалу виноситься на самостійну роботу.

### **1. Мета і завдання кредитного модуля**

1.1. Метою кредитного модуля є формування у студентів здатностей:

— розробляти й застосовувати ймовірнісно-статистичні методи для розв’язання професійних завдань при розробці програмного забезпечення (ПФ2-2).

## 1.2. Основні завдання кредитного модуля.

Згідно з вимогами програми навчальної дисципліни студенти після засвоєння кредитного модуля мають продемонструвати такі результати навчання:

### **знання**

закономірностей випадкових явищ, ймовірно-статистичних методів для розв'язання професійних завдань;

### **уміння**

застосовувати ймовірно-статистичні методи для розв'язання професійних завдань при розробці програмного забезпечення;

### **додаткові знання**

— основ математичної статистики;  
— статистичних оцінок параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали);

— статистичної перевірки гіпотез;

— елементів дисперсійного аналізу;

— елементів теорії кореляції;

— регресійних моделей;

— моделей часових рядів;

— числових характеристик шкал найменувань і порядку;

— методів багатовимірного шкалювання;

### **додаткові вміння**

розв'язувати математичні й фізичні задачі шляхом створення відповідних застосувань, а саме:

— розраховувати обсяги вибірок;

— задавати інформацію про розподіл вибірки в табличному, аналітичному й графічному вигляді;

— знаходити точкові й інтервальні статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали),

— виконувати перевірку статистичних гіпотез;

— застосовувати дисперсійний аналіз;

- будувати регресійні моделі і моделі часових рядів;
- знаходити числові характеристики для даних шкал найменувань і порядку;
- застосовувати методи багатовимірного шкалювання;
- правильно застосовувати статистичні методи для обробки вибірових даних;
- використовувати методи теорії ймовірностей та математичної статистики при розв’язанні математичних та фізичних задач шляхом створення відповідних застосувань.

## 2. Структура кредитного модуля

Розподіл навчальних годин кредитного модуля за видами навчальних занять здійснюється відповідно до робочих планів напряму підготовки 121 “Інженерія програмного забезпечення” спеціалізації “Програмне забезпечення розподілених систем та Web-технологій для студентів заочної форми навчання.

Назви розділів і тем	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
<b>Розділ 2. Математична статистика</b>				
Тема 2.1. Основи математичної статистики	13	0,5	—	12,5
Тема 2.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)	24	—	0,5	23,5
Тема 2.3. Елементи теорії кореляції (кількісні шкали). Регресійний аналіз	13	—	0,5	12,5
Тема 2.4. Статистичні критерії перевірки гіпотез	19	0,5	—	18,5
Тема 2.7. Моделі часових рядів	7	0,25	—	6,75

Назви розділів і тем	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
Тема 2.5. Числові характеристики шкали найменувань	7	0,25	—	6,75
Тема 2.6. Числові характеристики шкали порядку	11	0,25	—	10,75
Тема 2.8. Аналіз даних	12	0,25	—	11,75
Модульна контрольна робота	6	—	1	5
Підготовка до заліку	6	—	—	6
Залік	2	—	2	—
Усього годин	<b>120</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>114</b>

### 3. Календарно-тематичний план

№ з/п	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
Розділ 2. Математична статистика		
Тема 2.1. Основи математичної статистики		
1	<u>Лекція 1.1. Вибірki. Вимірювання. Групування емпіричних даних</u> Завдання математичної статистики. Повторна і неповторна вибірки. Типи шкал (найменувань, порядку, інтервалів, відношень). Групування емпіричних даних. Формула Стерджерса. Побудова інтервальних розподілів. Перехід від інтервального розподілу до дискретного Емпірична функція розподілу. Графічне подання емпіричних даних (гістограма, полігон).	1
Тема 2.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)		
2	<u>Практичне заняття 1.1</u> Точкові оцінки параметрів розподілу (середнє арифметичне значення, дисперсія) і методи їхнього одержання. Виправлена вибіркова дисперсія. Розрахунок загальних показників вибірок за груповими. Групові й загальне середні арифметичні значення. Групова, внутрішньогрупова, міжгрупова і загальна дисперсії. Асиметрія й	2

№ з/п	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
	ексцес емпіричного розподілу. Довірчі інтервали для генерального середнього значення. Довірчі інтервали для генерального середнього квадратичного відхилення і генеральної дисперсії нормально розподіленої ознаки.	
Тема 2.3. Елементи теорії кореляції (кількісні шкали). Регресійний аналіз		
3	<u>Практичне заняття 1.2.</u> Розрахунок коефіцієнта лінійної парної кореляції Пірсона за незгрупованими й згрупованими даними. Побудова довірчого інтервалу для коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона. Знаходження параметрів вибіркового рівняння лінійної регресії за незгрупованими даними (метод найменших квадратів).	2
Тема 2.4. Статистичні критерії перевірки гіпотез		
4	<u>Лекція 1.2. Статистичні гіпотези.</u> Нульова, конкуруюча (альтернативна), проста, складна гіпотези. Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези. Емпіричне й критичне значення критерію. Однобічна й двобічна критичні області. Помилки першого і другого роду. Потужність критерію. Параметричні й непараметричні критерії.	1,5
Тема 2.5. Моделі часових рядів		
5	<u>Лекція 1.3. Методи часових рядів</u> Часові ряди. Кумулятивний Т-критерій виявлення тенденції. Прогнозування на основі рядів Фур'є	1
Тема 2.6. Числові характеристики шкали найменувань		
6	<u>Лекція 1.4. Числові характеристики шкали найменувань</u> Мода. Індекс якісної варіації. Якісна дисперсія. Ентропія. Ентропійний коефіцієнт. Числові характеристики шкали найменувань.. Застосування моди в шкалах вищих типів. Коефіцієнті зв'язку в таблицях 2×2 і m×n.	1
Тема 2.7. Числові характеристики шкали порядку		
7	<u>Лекція 1.5. Числові характеристики шкали порядку</u> Медіана. Квартилі Коефіцієнти рангової кореляції Спірмена й Кендалла для звичайних і об'єднаних рангів. Коефіцієнт множинної рангової кореляції.	1,5

<i>№ з/п</i>	<i>Зміст навчальної роботи</i>	<i>Рекомендований час СРС</i>
Тема 2.8. Аналіз даних		
8	<u>Лекція 1.6. Факторний і кластерний аналізи</u> Факторний аналіз. Статистичні показники визначення мінімальної кількості факторів у факторному аналізі. Кластерний аналіз. Міри подібності. Алгоритми класифікації.	2
	<i>Модульна контрольна робота.</i>	5
	<i>Залік</i>	6

#### 4. Самостійна робота

Оскільки для студентів заочної форми навчання на аудиторні заняття виділяється незначна кількість годин, то основна частка матеріалу виноситься на самостійне опрацювання. Самостійна робота студентів заочної форми навчання є невід'ємною складовою процесу навчання і основним способом оволодіння навчальним матеріалом.

Теми, які виносяться на самостійну роботу студентів.

<i>№ з/п</i>	<i>Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання</i>	<i>Література</i>	<i>Кількість годин СРС</i>
Розділ 2. Математична статистика			
1	Тема 2.1. Основи математичної статистики		11,5
	Практичне застосування закону великих чисел. Вибірка (вибіркова сукупність), генеральна сукупність, обсяг сукупності.. Репрезентативна вибірка. Способи формування вибірок. Вимірювання. Характеристика шкал. Методи і числові характеристики шкал. Властивості шкал. Шкальні перетворення: зниження і підвищення рівня шкали.	с. 409-440 [2], 284-315 [3], 12-20 [5]; 8-18, 159-175 [8]	
	Приклади характеристик (метрик) програмно-	с. 12-20 [5];	

№ з/п	Назва теми, що виносить на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
	го й апаратного забезпечення, вимірюваних за шкалами різних типів. Методи і числові характеристики, які відповідають шкалам певних типів.	8-18, 159-166 [8], 26-31, 215-237 [1], 12, 21-25 [3]	
2	Тема 2.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)		21,5
	Числові характеристики кількісних шкал. Середні значення — середнє арифметичне, середнє квадратичне, середнє гармонійне, середнє геометричне; умови застосування. Характеристики варіаційного ряду: мода, медіана. Міри розсіювання: дисперсія, середнє квадратичне відхилення, розмах варіювання, середнє абсолютне відхилення, коефіцієнт варіації; умови застосування. Показники асиметрії (коефіцієнт асиметрії, спрощений коефіцієнт асиметрії) і крутизни (куртозис, ексцес) кривої розподілу. Умови застосування мір центральної тенденції і мір розсіювання кількісних шкал.	стор. 13-17, 34-39 [3]	
	Точкові оцінки параметрів розподілу. Незміщені, зміщені, ефективні та змістовні оцінки. Точкові оцінки параметрів розподілу. Вибіркове середнє арифметичне значення (дискретний і інтервальний розподіли). Оцінка генерального середнього за вибіркоvim середнім. Генеральна і вибіркова дисперсії. Оцінка генеральної дисперсії за вибірковою. Виправлена вибіркова дисперсія. Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення (стандартне відхилення). Метод моментів для точкової оцінки одного і двох параметрів розподілу. Метод найбільшої правдоподібності для точкової оцінки параметрів розподілу дискретних і неперервних випадкових величин.	с. 197-207, 211-212, 226-234 [6]	
	Групові й загальні характеристики. Групові й загальні середні значення. Внутрішньогрупова, міжгрупова і загальна дисперсії. Правило додавання дисперсій.. Зв'язок між внутріш-	с. 590-605 [4], 203-204, 207-211 [6]	

№ з/п	Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
	<p>ньогогуровою, міжгуровою і загальною дисперсіями. Застосування правила додавання дисперсій.</p>		
	<p>Інтервальні оцінки. Точність оцінки, довірча ймовірність (надійність), довірчий інтервал. Кількість ступенів свободи. Розподіли Хі-квадрат і Стюдента. Довірчі інтервали для генерального середнього значення. Побудова інтервальних оцінок для генеральної дисперсії. Довірчі інтервали для генерального середнього квадратичного відхилення і генеральної дисперсії нормально розподіленої ознаки. Довірчий інтервал для параметра біноміального розподілу. Довірчі інтервали для генеральної відносної частоти (дискретної ймовірності) ознаки. Розрахунок обсягу великої випадкової вибірки (повторної, неповторної). Одержання інтервальних оцінок на основі теореми Чебишова</p>	с. 207-211 [6]	
3	<p>Тема 2.3. Елементи теорії кореляції (кількісні шкали). Регресійний аналіз</p>		10,5
	<p>Кореляційний зв'язок кількісних ознак. Функціональна, статистична й кореляційна залежності. Показники зв'язку кількісних шкал. Умовне середнє. Кореляційна таблиця. Лінійна кореляція. Вибірковий коефіцієнт лінійної парної кореляції Пірсона. Довірчий інтервал для коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона. Криволінійна кореляція. Вибіркові кореляційні відношення: властивості. Множинна кореляція: сукупний коефіцієнт кореляції.</p>	с. 223-283 [3], 606-647 [4]	
	<p>Лінійна і нелінійна регресія. Умовне середнє значення. Кореляційне поле. Вибір вигляду рівняння регресії. Вибіркове рівняння регресії. Знаходження параметрів вибіркового рівняння лінійної регресії за незгрупованими даними (метод найменших квадратів). Кореляційна таблиця; знаходження параметрів вибі-</p>	с. 447-500 [1], 648-696 [4], 141-158 [8]	

№ з/п	Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
	ркового рівняння лінійної регресії за згрупованими даними. Знаходження параметрів вибіркового рівняння нелінійної регресії (метод найменших квадратів). Множинна регресія. Регресійне прогнозування.		
4	Тема 2.4. Статистичні критерії перевірки гіпотез		17
СРС: Основні статистичні розподіли (нормальний, $\chi^2$ Пірсона, Стюдента, Фішера-Снедекора). Прийняття рішень на основі перевірки статистичних гіпотез. Параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез (Стюдента, Фішера-Снедекора).	с. 130-182, 238-252 [1], 84-143 [3], 24-33, 44-61, 389-413 [4], 24-32 [5]		
Критерії узгодженості ( $\chi^2$ Пірсона, Колмогорова). Критерії однорідності ( $\chi^2$ , Колмогорова-Смирнова, Вілкоксона). Перевірка гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції Пірсона. Критерії перевірки гіпотези про нормальний розподіл: критерії Шапіро-Уїлка, Пірсона $\chi^2$ , Колмогорова, Ліллієфорса. Порівняння емпіричних значень асиметрії й ексцесу. Графічний метод. Умови застосування різних критеріїв перевірки нормальності розподілу.	стор. 314-357 [1], стор. 231-278 [4]		
Дисперсійний аналіз. Загальна, факторна (міжгрупова) і залишкова (внутрішньогрупова) дисперсії. Однофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп. Однофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп. Перевірка гіпотези про рівність групових генеральних дисперсій, виявлення впливу фактора на зміну ознаки. Двофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп. Двофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп..	с. 11-292 [2], 201-222 [3], 590-605 [4], 224-252 [5]		
5	Тема 2.5. Моделі часових рядів		5,75
СРС: Ковзне середнє значення. Авторегресійні моделі: звичайні і з врахуванням сезонності.	с. 12-14, 46-58 [9], [19]		

№ з/п	Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
	Порядок авторегресії, сезонність. Моделі експоненційного згладжування, підбір коефіцієнта згладжування. Прогнозування на основі рядів Фур'є. Адаптивна модель Хольта-Вінтерса, підбір коефіцієнтів. Особливості підбору коефіцієнтів у методі Хольта-Вінтерса.		
6	Тема 2.6. Числові характеристики шкали найменувань		5,75
7	Тема 2.7. Числові характеристики шкали порядку		9,25
8	Тема 2.8. Аналіз даних		9,75
	Сила і напрямок зв'язку в шкалі найменувань. Розрахунок коефіцієнтів зв'язку в таблицях 2×2 (асоціації Юла, контингенції Пірсона) і m×n (Чупрова, Крамера, спряженості Пірсона). Розрахунок g-коефіцієнта Гудмана. Розрахунок точкового бісеріального коефіцієнта кореляції Пірсона.	с. 31-34 [3]; 43-45, 57-60, 80-93 [8])	
	Застосування медіани в шкалах вищих типів. Квантилі (квартилі, квінтилі, децилі, персенти-лі). Міжквартильний розмах. Коефіцієнт диференціації. Розрахунок квантилів для інтервального і дискретного розподілів. Показники зв'язку шкали порядку. Коефіцієнти рангової кореляції Спірмена й Кендалла для звичайних і об'єднаних рангів. Коефіцієнт множинної рангової кореляції. Перевірка значущості коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена, Кендалла, коефіцієнта множинної рангової кореляції. Бісеріальний ранговий коефіцієнт кореляції	с. 30-40 [3], 208-223 [5], 42-43, 60-64, 93-96, 103-124 [8]	
	Факторний аналіз. Поняття фактора. Лінійна математична модель факторного аналізу. Розвідувальний і перевірочний (конфірматорний) факторний аналіз. Матриця кореляцій (коваріацій). Факторизація матриці кореляцій (коваріацій), редуційована матриця. Обертання факторної структури і змістовна інтерпретація результатів факторизації. Статистичні показники ви-	с. 5-68 [7], 210-217 [8]	

№ з/п	Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
	значення мінімальної кількості факторів у факторному аналізі: власні значення, критерій відсіювання, частка дисперсії, процент пояснюваної дисперсії.		
	Кластерний аналіз. Поняття кластера. Міри подібності в кластерному аналізі: евклідова й зважена евклідова відстані, квадрат евклідової відстані, манхеттенська відстань, відстань Чебишова, метрика Мінковського, коефіцієнт кореляції Пірсона, коефіцієнти асоціативності. Алгоритми класифікації: ієрархічні агломеративні, ієрархічних дивізімні, ітераційні методи групування, методи пошуку модальних значень щільності, факторні методи, методи згущень.	с. 139-209 [7], 207-209 [8]	
	Статистичні моделі в програмному забезпеченні.	с. 447-500 [1], 223-283 [3], 606-696 [4], 141-158 [8]	

## 5. Завдання для самоконтролю

Нижче подано типові задачі з математичної статистики. Щоб студенти могли перевірити правильність їхнього виконання, вказано відповіді. Частково ці задачі входять в домашнє завдання (подано після списку задач), а також в залікову контрольну роботу (п. 6).

1. Знайдіть обсяг вибірки і запишіть розподіл відносних частот  $w_i$ , якщо задано розподіл частот вибірки:

$$\begin{array}{cccccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ n_i & 3 & 8 & 14 & 16 & 7 & 2 \end{array}$$

$$\text{Відповідь: } n = 50; \begin{array}{cccccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ w_i & 0,06 & 0,16 & 0,28 & 0,32 & 0,14 & 0,04 \end{array}$$

2. Для вибірки обсягу  $n = 20$  розподіл відносних частот має вигляд:

$$\begin{array}{cccc} x_i & -1 & 3 & 8 & 10 \\ w_i & 0,15 & 0,10 & 0,35 & 0,40 \end{array}$$

Знайдіть розподіл частот  $n_i$ , побудуйте полігон частот, запишіть функцію розподілу і побудуйте її графік.

$$\text{Відповідь: } \begin{array}{cccc} x_i & -1 & 3 & 8 & 10 \\ n_i & 3 & 2 & 7 & 8 \end{array}, F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ 0,15 & \text{при } -1 < x \leq 3 \\ 0,25 & \text{при } 3 < x \leq 8 \\ 0,60 & \text{при } 8 < x \leq 10 \\ 1 & \text{при } x > 10 \end{cases}$$

3. За вибірковими даними: 15,3; 13,1; 12,4; 9,7; 8,1; 13,8; 14,3; 9,3; 11,4; 13,9; 12,8; 9,9; 15,1; 11,2; 13,6; 10,3; 8,9; 11,3; 11,4; 9,9; 12,2; 10,1; 12,5; 10,0; 10,5; 11,5; 8,0; 12,5; 11,3; 10,7; 7,2; 8,2; 13,9; 8,4; 15,2 побудуйте рівноінтервальний розподіл частот, подайте гістограму частот, запишіть функцію розподілу і побудуйте її графік.

$$\text{Відповідь: } n = 35; x_{\min} = 7,2; x_{\max} = 15,3; k = 6; h = 1,4; \Delta = 0,3 = 0,2 + 0,1;$$

$$\begin{array}{ccccccc} [x_i; x_{i+1}) & [7,0; 8,4) & [8,4; 9,8) & [9,8; 11,2) & [11,2; 12,6) & [12,6; 14,0) & [14,0; 15,4) \\ n_i & 4 & 4 & 7 & 10 & 6 & 4 \end{array},$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 7, \\ 4/35 & \text{при } x = 8,4, \\ 8/35 & \text{при } x = 9,8, \\ 15/35 & \text{при } x = 11,2, \\ 25/35 & \text{при } x = 12,6, \\ 31/35 & \text{при } x = 14,0, \\ 1 & \text{при } x > 15,4. \end{cases}$$

4. Знайдіть моду, медіану і розмах варіювання для заданого дискретного розподілу частот вибірки:

$$\begin{array}{cccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ n_i & 3 & 8 & 14 & 16 & 7 & 2 \end{array}$$

$$\text{Відповідь: } 2; 1,5; 6.$$

5. Знайдіть середнє арифметичне значення, середнє геометричне, середнє гармонійне, моду, медіану, розмах варіювання, середнє абсолютне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації за інтервальним розподілом:

$$\begin{array}{ccccc} [3;9) & [9;15) & [15;21) & [21;27) & [27;33] \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 2 \end{array} .$$

Відповідь: 18; 16,92; 15,69; 17,40; 17,67; 30 або 24; 4,2; 36; 6; 33,33%.

6. Сукупність складається з двох груп:

$$\begin{array}{ccccc} x_{Гр1i} & 5 & 10 & i & x_{Гр2i} & 1 & 3 & 8 \\ n_{Гр1i} & 4 & 1 & & n_{Гр2i} & 5 & 9 & 6 \end{array} .$$

Знайдіть групові і (двома способами) загальні середні арифметичні значення і дисперсії.

Відповідь:  $D_{Гр1} = 4$ ;  $D_{Гр2} = 7,5$ ;  $D_{визр} = 6,8$ ;  $D_{мзр} = 0,64$ ;  $D = 7,44$ .

7. За вибірковими даними:

$$\begin{array}{cccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ n_i & 39 & 30 & 17 & 12 & 2 \end{array}$$

оцініть генеральне середнє значення, генеральну дисперсію і генеральне середнє квадратичне відхилення.

Відповідь: 1,08; 1,23; 1,11.

8. Випадкова величина  $X$  має показниковий розподіл

$(f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases})$ . З генеральної сукупності зроблено вибірку:

$$\begin{array}{cccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ n_i & 20 & 17 & 9 & 3 & 1 \end{array} .$$

Знайдіть оцінку параметра  $\lambda$  ( $M(X) = 1/\lambda$ ) за методом: а) моментів; б) найбільшої правдоподібності.

Відповідь: 1,04.

9. Кількісна ознака  $X$  генеральної сукупності розподілена нормально з відомим середнім квадратичним відхиленням  $\sigma = 2,2$ . Знайти довірчі інтервали для оцінки невідомого математичного сподівання  $a$  за вибірковими середніми значеннями  $\bar{x}_B$ , якщо обсяг вибірки  $n = 49$  і задана довірна ймовірність оцінки  $\gamma = 0,95$ .

Відповідь:  $4,38 < a < 5,62$ . Вказівка: потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

10. Із нормально розподіленої генеральної сукупності взято вибірку:

$x_i$	-1	2	5	6	8
$n_i$	1	3	3	2	1

Оцініть математичне сподівання  $a$  кількісної ознаки  $X$  генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу з надійністю: а)  $\gamma = 0,95$ ; б)  $\gamma = 0,99$ .

*Відповідь:* а)  $2,09 < a < 5,91$ ; б)  $-0,33 < a < 8,33$ . *Вказівка:* потрібна таблиця критичних точок розподілу Стюдента (див. Додаток А, таблиця 2) чи таблиця значень величини  $t_\gamma$  (див. Додаток А, таблиця 3).

11. Із нормально розподіленої генеральної сукупності взято вибірку:

$x_i$	1	2	5	6	7	9
$n_i$	2	3	2	1	1	1

Оцініть середнє квадратичне відхилення  $\sigma$  кількісної ознаки  $X$  генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу з надійністю: а)  $\gamma = 0,95$ ; б)  $\gamma = 0,99$ .

*Відповідь:* а)  $0,98 < \sigma < 4,60$ ; б)  $0 < \sigma < 5,80$ . *Вказівка:* потрібна таблиця значень величини  $q_\gamma$  (див. Додаток А, таблиця 4).

12. Для випадково вибраних 900 програмістів віком від 18 до 62 років визначено їхній середній вік  $\bar{x}_b$ . З довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,9$  знайдіть довірчий інтервал, в якому міститься генеральне середнє значення віку, якщо вважати, що розподіл генеральної сукупності нормальний (врахуйте, що  $s \approx 0,22R$ ).

*Відповідь:*  $\bar{x}_b - 0,53 < a < \bar{x}_b + 0,53$ . *Вказівка:* потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

13. Серед 400 випадково вибраних програм виявлено, що 16 із них мають суттєві семантичні помилки. З довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,95$  знайдіть довірчий інтервал для частки програм з помилками (врахуйте, що досліджується альтернативна ознака).

*Відповідь:*  $0,0208 < w_r < 0,0592$ . *Вказівка:* потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

14. Для опитування випадково вибрано 650 користувачів Інтернету. Виявилось, що 52 із них ніколи не звертають уваги на рекламу. З довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,99$  знайдіть довірчий інтервал для частки таких осіб серед усіх користувачів мережі.

*Відповідь:*  $5,25\% < w_r < 10,75\%$ . *Вказівка:* потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

15. У країні є 36 млн. виборців. При проведенні екзитполу було опитано 10 тис. осіб і похибка результату становила не більше 2%. Визначте довірчу ймовірність  $\gamma$ .

*Відповідь:*  $z \approx 4$ ,  $\gamma = 0,9999$ . *Вказівка:* потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

16. Для проведення вибірових обстежень при допустимій похибці вибірки 1,5% з довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,9972$  визначте обсяг вибірки, якщо обсяг генеральної сукупності становить 36 млн. осіб.

*Відповідь:* 9998. *Вказівка:* потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

17. Визначте, наскільки тісний лінійний зв'язок між продуктивністю кодування відео й аудіо для лінійки процесорів AMD Athlon II (6 моделей):

52	63	70	85	100	119
95	71	84	99	100	115

З довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,95$  побудуйте довірчий інтервал для генерального коефіцієнта лінійної парної кореляції Пірсона.

*Відповідь:*  $r_{\text{Вху}} = 0,76$  — зв'язок прямий сильний;  $0,42 < r_{\text{Гху}} \leq 1$ . *Вказівка:* потрібна таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

18. За згрупованими вибіровими даними

X	1	5	8
Y			
-3	2	5	3
1	7	1	4
6	3	4	1

знайдіть коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона і кореляційні відношення.

*Відповідь:*  $r_{xy} = -0,165$ ;  $\eta_{yx} = 0,168$ ;  $\eta_{xy} = 0,225$ .

19. При оцінюванні продуктивності лінійок процесорів AMD Athlon II і Intel Pentium (Dual Core) відповідно одержано загальні бали 77, 90, 90, 104, 100, 114 і 75, 89, 86, 98, 97, 89, 103, 112. Визначте, чи є зв'язок між лінійкою процесорів і загальним балом.

*Відповідь:*  $r_{rb} = 0,008$ .

20. Для системи двох кількісних ознак ( $X, Y$ ) у 7 незалежних випробуваннях одержано значення:

$$\begin{array}{l} x_i \quad 5 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18 \quad 20 \quad 26 \\ y_i \quad -1 \quad 5 \quad 7 \quad 10 \quad 15 \quad 14 \quad 20 \end{array}$$

Побудуйте кореляційне поле і визначте характер залежності. Знайдіть рівняння регресії  $Y$  на  $X$  і  $X$  на  $Y$ . У кореляційному полі побудуйте лінії регресії, вкажіть, у якій точці вони перетинаються. Знайдіть коефіцієнт кореляції і коефіцієнт детермінації.

*Відповідь:* лінійна залежність;  $\bar{y}_x = 0,980x - 4,700$ ;  $\bar{x}_y = 0,847y + 5,704$ ;  $(15; 10)$ ;  $r_{xy} = 0,911$ ,  $R^2 = 0,830$ .

21. Знайдіть вибіркові кореляційні відношення  $\eta_{yx}$ ,  $\eta_{xy}$ , вибіркові рівняння регресії  $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$  і  $\bar{x}_y = dy^2 + ey + f$  за згрупованими даними:

	$X$	3	10	20
$Y$				
1		15	—	—
4		3	12	—
6		1	1	18

*Відповідь:*  $\eta_{yx} = 0,87$ ;  $\eta_{xy} = 0,91$ ;  $\bar{y}_x = -0,15x^2 + 1,53x + 1,62$ ;  $\bar{x}_y = 1,05y^2 - 4,72y + 3,67$ .

22. Для двох незалежних вибірок, обсяги яких  $n_1 = 13$ ,  $n_2 = 19$ , взятих з нормальних генеральних сукупностей  $X$  і  $Y$ , знайдено виправлені вибіркові дисперсії  $s_x^2 = 1,82$  і  $s_y^2 = 0,53$ . При рівні значущості  $\alpha = 0,01$  перевірте нульову

гіпотезу  $H_0 : D(X) = D(Y)$  про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі  $H_1 : D(X) > D(Y)$ .

*Відповідь:*  $F_{\text{емп}} = 3,43 > F_{\text{кр}}(0,01;12;18) = 3,37$  — гіпотезу  $H_0$  відхиляємо і приймаємо альтернативну гіпотезу  $H_1$ . *Вказівка:* потрібна таблиця критичних значень розподілу Фішера-Снедекора (див. Додаток А, таблиця 5).

23. Із генеральних нормально розподілених сукупностей  $X$  і  $Y$ , дисперсії яких рівні між собою, взято незалежні вибірки обсягів  $n_X = 10$  і  $n_Y = 7$  і для них знайдено вибіркові середні значення  $\bar{x}_B = 5,1$  і  $\bar{y}_B = 4,3$  і виправлені вибіркові дисперсії  $s_X^2 = 1,43$  і  $s_Y^2 = 1,72$ . При рівні значущості  $\alpha = 0,05$  перевірте нульову гіпотезу  $H_0 : M(X) = M(Y)$  про рівність генеральних середніх значень при альтернативній гіпотезі  $H_1 : M(X) \neq M(Y)$  про їхню відмінність.

*Відповідь:*  $T_{\text{емп}} = 1,306 < t_{\text{кр двов}}(0,05;15) = 2,13$  — немає підстав відхилити гіпотезу  $H_0$  про рівність генеральних середніх значень. *Вказівка:* потрібна таблиця критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2).

24. Для нормально розподіленої двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$  зроблено вибірку обсягом  $n = 8$  і знайдено значення коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона  $r_{\text{взу}} = 0,739$ . Перевірте його значущість при рівнях значущості: а)  $\alpha = 0,05$  і б)  $\alpha = 0,01$ .

*Відповідь:* а)  $T_{\text{емп}} = 2,687 > t_{\text{кр двов}}(0,05;6) = 2,45$  — значущий;  
б)  $T_{\text{емп}} = 2,687 < t_{\text{кр двов}}(0,01;6) = 3,71$  — незначущий. *Вказівка:* потрібна таблиця критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2).

25. Для послідовностей рангів:

ранги $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ранги $y_i$	5	2	4	3	1	8	10	7	9	11	6

знайдіть значення коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена і Кендалла (4 способами) і перевірте їхню значущість при рівні значущості  $\alpha = 0,05$ . Чим можна пояснити розходження результатів і висновків?

*Відповідь:*  $\rho_B = 0,664$ ,  $\tau_B = 0,455$ ;  $\rho_B = 0,664 > T_{кр} = 0,564$  — значущий;  $\tau_B = 0,418 < T_{кр} = 0,458$  — незначущий; пояснюється це тим, що коефіцієнт рангової кореляції Кендалла більш строгий, ніж коефіцієнт Спірмена. *Вказівка:* потрібні таблиці критичних значень вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Спірмена (див. Додаток А, таблиця 6) або критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2) і таблиця значень інтегральної функції Лапласа (див. Додаток А, таблиця 1).

26. Програми за двома ознаками мають такі бали:

$x_i$	98	93	83	83	75	70	70	70	60
$y_i$	94	91	94	82	85	70	68	64	68

Знайдіть величину сили зв'язку між рангами двох ознак, скориставшись коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена (точним і наближеним). Схарактеризуйте силу і напрямок зв'язку.

*Відповідь:* 0,8887; 0,8627. Зв'язок рангів сильний прямий.

27. Для дискретного розподілу відносних частот вибірки:

$x_i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$w_i$	0,15	0,10	0,45	0,20	0,10

знайдіть індекс якісної варіації, ентропію, нормовану ентропію.

*Відповідь:*  $J = 0,8938$ ,  $E = 1,426$ ,  $\varepsilon = 0,886$ .

28. Для інтервального розподілу частот вибірки:

$[x_i, x_{i+1})$	[2, 4)	[4, 9)	[9, 19)	[19, 25]
$n_i$	5	15	20	6

знайдіть індекс якісної варіації, ентропію, нормовану ентропію.

*Відповідь:*  $J = 0,901$ ,  $E = 1,234$ ,  $\varepsilon = 0,890$ . (*Вказівка:* при обчисленнях використовуйте натуральний логарифм  $\ln x$ ).

29. Для дихотомічних даних

10	8
6	11

обчисліть значення коефіцієнтів Юла і контингенції Пірсона.

*Відповідь:* 0,392; 0,203.

30. За даними комбінаційної таблиці

13	17	20
7	23	10

обчисліть значення величини  $\chi^2$ , коефіцієнти Чупрова, Крамера, спряженості Пірсона і  $g$ -коефіцієнт Гудмана.

*Відповідь:* 4,984; 0,229; 0,198; 0,166; 0,060; 0,150.

**Домашня робота** студента має бути виконана в окремому зошиті і включати 8 завдань. Перші 7 завдань студент вибирає за власним бажанням із наведених вище 30 задач для самоконтролю, але при цьому **завданням 1** має бути задача з номером чи 1, чи 2, чи 3; **завданням 7** має бути задача з номером чи 28, чи 29, чи 30; номери задач для **завдань 2-6** студент вибирає так, щоб при впорядкуванні всіх номерів вибраних задач ряд різниць кожних двох сусідніх номерів мав рівномірний розподіл. Ця вимога є умовою восьмого завдання домашньої роботи:

**Завдання 8.** За допомогою критерію Пірсона  $\chi^2$  при рівні значущості  $\alpha = 0,05$  перевірте рівномірність розподілу значень різниць вибраних впорядкованих сусідніх номерів задач.

Виконання студентами домашньої роботи оцінюється згідно з положенням про рейтингову систему оцінювання (п. 7).

## 6. Контрольні роботи

### Модульна контрольна робота

За семестровим (кредитним) модулем 2 передбачається одна модульна контрольна робота. Мета контрольної роботи полягає в перевірці засвоєння матеріалу дисципліни щодо застосування методів обробки вибіркового даних. Для проведення контрольної роботи виділяється 1 година за рахунок практичних занять.

На модульну контрольну роботу виносяться такі розділи: розрахунок статистичних оцінок параметрів розподілу; елементи кореляції і регресії; переві-

ка статистичних гіпотез. Для полегшення розрахунків студенти можуть використовувати засоби електронних таблиць Excel.

***Зразок завдання на модульну контрольну роботу***

Потрібні статистичні таблиці:

- критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2);
- значень величини  $t_\gamma$  (див. Додаток А, таблиця 3);
- значень величини  $q_\gamma$  (див. Додаток А, таблиця 4)
- критичних значень коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона (див. Додаток А, таблиця 7).

При розв’язуванні задач треба коротко записати умову, подати формули, які використовуються, підставити у формули числа, записати результат. Розрахунки можна виконувати на комп’ютері в Excel. Можна користуватися зошитами.

Кожен варіант контрольної роботи містить 5 завдань (у різних варіантах четверте завдання може відрізнятися за змістом):

*Завдання 1.* При проведенні вимірювань знайдено групові значення:

Група	Обсяг групи	Середнє групове значення	Стандартне відхилення
Група 1	71	11,1	2,1
Група 2	36	11,5	1,9
Група 3	93	10,8	1,5

Знайдіть загальне середнє арифметичне значення і загальне стандартне відхилення.

*Завдання 2.* Оцінено продуктивність лінійок процесорів при виконанні упаковки і розпаковки архівів:

Intel Celeron (7 моделей)	92	93	96	104	105	108	112
------------------------------	----	----	----	-----	-----	-----	-----

AMD Phenom II (12 моделей)	104	114	129	113	112	126	113	115	118	150	148	156
-------------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

За поданим дискретним розподілом (вибірки об'єднати) знайдіть середнє арифметичне значення, виправлену вибірку в дисперсію, “виправлене” середнє квадратичне відхилення.

*Завдання 3.* За умовою і результатами завдання 2 знайдіть значення асиметрії й ексцесу і, порівнюючи ці значення з критичними, встановіть, чи є розподіл досліджуваної ознаки генеральної сукупності нормальним.

*Завдання 4.* За умовою і результатами завдання 2 знайдіть з довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,999$  довірчий інтервал для генерального середнього значення або генерального середнього квадратичного відхилення.

*Завдання 5.* Оцінено продуктивність лінійки процесорів Intel Pentium (8 моделей) при роботі офісного програмного забезпечення:

Частота (ГГц)	2,5	3,2	2,8	3,33	2,933	2,2	2,6	2,9
Офісне ПЗ	94	117	100	117	125	106	125	139

Знайдіть точку перетину прямих ліній регресії. Обчисліть коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона і вкажіть силу і напрямок зв'язку між тактовою частотою процесорів (випадкова величина  $X$ ) і їхньою продуктивністю (випадкова величина  $Y$ ). За умови, що в генеральній сукупності двовимірна випадкова величина  $(X, Y)$  має нормальний розподіл, перевірте його значущість при рівні значущості  $\alpha = 0,01$ .

### ***Зразок виконання завдань модульної контрольної роботи***

*Завдання 1.* При проведенні вимірювань знайдено такі групові значення:

Група	Обсяг групи	Середнє групове значення	Стандартне відхилення
Група 1	71	11,1	2,1
Група 2	36	11,5	1,9
Група 3	93	10,8	1,5

Знайдіть загальне середнє арифметичне значення і загальне стандартне відхилення.

*Розв'язання.* Обчислимо загальне середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^g n_{\Gamma_{pj}} \bar{x}_{\Gamma_{pj}}}{n} = \frac{71 \cdot 11,1 + 36 \cdot 11,5 + 93 \cdot 10,8}{71 + 36 + 93} = 11,03.$$

Загальну дисперсію за груповими дисперсіями можна знайти за правилом додавання дисперсій:

$$D_{\text{заг}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{мгр}},$$

де

$$D_{\text{внгр}} = \frac{\sum_{j=1}^g n_{\Gamma_{pj}} D_{\Gamma_{pj}}}{n} = \frac{71 \cdot 2,1^2 + 36 \cdot 1,9^2 + 93 \cdot 1,5^2}{71 + 36 + 93} = 3,26,$$

$$D_{\text{мгр}} = \frac{\sum_{j=1}^g n_{\Gamma_{pj}} (\bar{x}_{\Gamma_{pj}} - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{71 \cdot (11,1 - 11,03)^2 + 36 \cdot (11,5 - 11,03)^2 + 93 \cdot (10,8 - 11,03)^2}{71 + 36 + 93} = 0,07.$$

Отже:

$$D_{\text{заг}} = 3,26 + 0,07 = 3,33;$$

$$\sigma_{\text{заг}} = \sqrt{3,33} = 1,82.$$

*Відповідь:* загальне середнє арифметичне значення  $\bar{x} = 11,03$ ; загальне стандартне відхилення  $\sigma_{\text{заг}} = 1,82$ .

*Завдання 2.* Оцінено продуктивність лінійок процесорів при виконанні упаковки і розпаковки архівів:

Intel Celeron (7 моделей)	92	93	96	104	105	108	112
------------------------------	----	----	----	-----	-----	-----	-----

AMD Phenom II (12 моделей)	104	114	129	113	112	126	113	115	118	150	148	156
-------------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

За поданим дискретним розподілом (вибірки об'єднати) знайдіть середнє арифметичне значення, виправлену вибіркoву дисперсію, “виправлене” середнє квадратичне відхилення.

*Розв'язання.* Обсяг вибірки  $n = 7 + 12 = 19$ . Обчислимо середнє вибіркоче значення за незгрупованими даними:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{92 + 93 + 96 + 104 + 105 + 108 + 112 + 104 + 114 + 129 + 113 + 112 + 126 + 113 + 115 + 118 + 150 + 148 + 156}{19} = 116,21.$$

Обчислимо виправлену вибіркочув дисперсію і “виправлене” середнє квадратичне відхилення:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1} = \frac{(92-116,21)^2 + (93-116,21)^2 + \dots + (156-116,21)^2}{19-1} = 338,06,$$

$$s = \sqrt{338,06} = 18,39.$$

*Відповідь:* середнє арифметичне значення  $\bar{x}_B = 116,21$ , виправлена вибіркочув дисперсія  $s^2 = 338,06$ , “виправлене” середнє квадратичне відхилення  $s = 18,39$ .

*Завдання 3.* За умовою і результатами завдання 2 знайдіть значення асиметрії й ексцесу і, порівнюючи ці значення з критичними, встановіть, чи є розподіл досліджуваної ознаки генеральної сукупності нормальним.

*Розв'язання.* Обсяг вибірки  $n = 19$ , середнє арифметичне значення  $\bar{x}_B = 116,21$ , “виправлене” середнє квадратичне відхилення  $s = 18,39$ . Знайдемо вибіркочув значення асиметрії й ексцесу:

$$A_{sB} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^3}{ns^3} = \frac{(92-116,21)^3 + (93-116,21)^3 + \dots + (156-116,21)^3}{19 \cdot 18,39^3} = 0,81,$$

$$E_{xB} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^4}{ns^4} - 3 = \frac{(92-116,21)^4 + (93-116,21)^4 + \dots + (156-116,21)^4}{19 \cdot 18,39^4} - 3 = -0,36,$$

Обчислимо критичні значення асиметрії й ексцесу при  $n = 19$ :

$$A_{s\text{кр}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (19-1)}{(19+1) \cdot (19+3)}} = 1,49,$$

$$E_{x\text{кр}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 19 \cdot (19-2) \cdot (19-3)}{(19+1)^2 \cdot (19+3) \cdot (19+5)}} = 2,20.$$

Оскільки

$$|A_{св}| = 0,81 \leq A_{скр} = 1,49 \quad \text{і} \quad |E_{х\text{емп}}| = 0,36 \leq E_{хкр} = 2,20,$$

то емпіричний розподіл значуще не відрізняється від нормального.

*Відповідь:* розподіл досліджуваної ознаки генеральної сукупності значуще не відрізняється від нормального.

*Завдання 4.* За умовою і результатами завдання 2 з довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,999$  знайдіть (1) довірчий інтервал для генерального середнього значення або (2) генерального середнього квадратичного відхилення.

*Розв'язання.* Обсяг вибірки  $n = 19$ , середнє арифметичне значення  $\bar{x}_B = 116,21$ , “виправлене” середнє квадратичне відхилення  $s = 18,39$ .

Розглянемо задачу (1). З довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,999$  побудуємо довірчий інтервал для генерального середнього значення:

$$\bar{x}_B - \delta < \bar{x}_Г < \bar{x}_B + \delta.$$

Оскільки обсяг вибірки незначний, то граничну похибку вибірки  $\delta$  знайдемо за формулою:

$$\delta_{\text{повт}} = t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де значення  $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n) = t_{\text{двоб}}(1 - \gamma; n - 1)$  можна знайти за таблицею критичних точок розподілу Стюдента (див. Додаток А, таблиця 2) для двобічної критичної області при рівні значущості  $\alpha = 1 - \gamma$  і кількості ступенів свободи  $k = n - 1$  або за спеціальною таблицею значень величини  $t_\gamma$  (див. Додаток А, таблиця 3):

$$t_\gamma = t_\gamma(0,999, 19) = t_{\text{двоб}}(0,001; 18) = 3,922.$$

Отже:

$$\delta_{\text{повт}} = 3,922 \cdot \frac{18,39}{\sqrt{19}} = 16,54,$$

$$\bar{x}_B - 16,54 < \bar{x}_Г < \bar{x}_B + 16,54,$$

$$116,21 - 16,54 < \bar{x}_Г < 116,21 + 16,54,$$

$$99,67 < \bar{x}_Г < 132,75.$$

Розглянемо задачу (2). З довірчою ймовірністю  $\gamma = 0,999$  побудуємо довірчий інтервал для генерального середнього квадратичного відхилення:

$$s \cdot (1 - q(\gamma; n)) < \sigma_{\Gamma} < s \cdot (1 + q(\gamma; n)) \text{ при } q(\gamma; n) < 1$$

або

$$0 < \sigma_{\Gamma} < s \cdot (1 + q(\gamma; n)) \text{ при } q(\gamma; n) \geq 1,$$

де  $q(\gamma; n)$  визначають за таблицею значень величини  $q_{\gamma}$  (див. Додаток А, таблиця 4):

$$q_{\gamma} = t_{\gamma}(0,999,19) = 0,92.$$

Отже:

$$18,39 \cdot (1 - 0,92) < \sigma_{\Gamma} < 18,39 \cdot (1 + 0,92),$$

$$1,47 < \sigma_{\Gamma} < 35,30.$$

*Відповідь:* (1) довірчий інтервал для генерального середнього значення  $99,67 < \bar{x}_{\Gamma} < 132,75$ ; (2) довірчий інтервал для генерального середнього квадратичного відхилення  $1,47 < \sigma_{\Gamma} < 35,30$ .

*Завдання 5.* Оцінено продуктивність лінійки процесорів Intel Pentium (8 моделей) при роботі офісного програмного забезпечення:

Частота (ГГц)	2,5	3,2	2,8	3,33	2,933	2,2	2,6	2,9
Офісне ПЗ	94	117	100	117	125	106	125	139

Знайдіть точку перетину прямих ліній регресії. Обчисліть коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона і вкажіть силу і напрямок зв'язку між тактовою частотою процесорів (випадкова величина  $X$ ) і їхньою продуктивністю (випадкова величина  $Y$ ). За умови, що в генеральній сукупності двовимірною випадковою величиною  $(X, Y)$  має нормальний розподіл, перевірте його значущість при рівні значущості  $\alpha = 0,01$ .

*Розв'язання.* Обсяг вибірки  $n = 8$ . Точкою перетину прямих ліній регресії є точка, координати якої — середні арифметичні значення складових  $(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$ :

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2,5 + 3,2 + 2,8 + 3,33 + 2,933 + 2,2 + 2,6 + 2,9}{8} = 2,81,$$

$$\bar{y}_B = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{94 + 117 + 100 + 117 + 125 + 106 + 125 + 139}{8} = 115,38.$$

Точка перетину прямих ліній регресії — (2,81; 115,38).

Обчислимо коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона, наприклад, за формулою:

$$r_{B,xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left( n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \cdot \left( n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}}.$$

Для цього побудуємо просту кореляційну таблицю і на її основі проведемо розрахунки:

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
2,5	94	6,25	8836,00	235,00
3,2	117	10,24	13689,00	374,40
2,8	100	7,84	10000,00	280,00
3,33	117	11,09	13689,00	389,61
2,933	125	8,60	15625,00	366,63
2,2	106	4,84	11236,00	233,20
2,6	125	6,76	15625,00	325,00
2,9	139	8,41	19321,00	403,10
Сума: 22,463	923	64,03	108021	2606,94

Тоді:

$$r_{B,xy} = \frac{8 \cdot 2606,10 - 22,463 \cdot 923}{\sqrt{(8 \cdot 64,04 - 22,463^2) \cdot (8 \cdot 108021 - 923^2)}} = 0,40.$$

Знайдене значення вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона вказує на існування між складовими  $X$  і  $Y$  прямого помірною лінійного зв'язку. Значущість при  $\alpha = 0,01$  знайденого значення  $r_{B,xy} = 0,40$  перевіримо за спеціальним критерієм. Розглянемо гіпотези:

$$H_0 : r_r = 0;$$

$$H_1 : r_r \neq 0.$$

Обчислимо емпіричне значення критерію:

$$T_{\text{емп}} = r_B \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_B^2}} = 0,40 \cdot \sqrt{\frac{8-2}{1-0,40^2}} = 1,069.$$

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2) для двобічної критичної області точку при заданому рівні значущості  $\alpha = 0,01$  і кількості ступенів свободи  $k = n - 2 = 8 - 2 = 6$  знайдемо критичну:

$$t_{\text{кр двоб}}(0,01;6) = 3,707.$$

Оскільки  $T_{\text{емп}} = 1,069 < t_{\text{кр}} = 3,707$ , то немає підстав для відхилення нульової гіпотези; отже, лінійний кореляційний зв'язок між ознаками незначущий, тобто значення  $r_{B,xy} = 0,40$  знайдено випадково.

Також для перевірки нульової гіпотези можна порівняти значення вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона  $r_{B,xy}$  з критичним значенням, яке при заданому рівні значущості  $\alpha = 0,01$  і кількості ступенів свободи  $k = n - 2 = 8 - 2 = 6$  знайдемо за таблицею критичних значень коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона (див. Додаток А, таблиця 7):

$$r_{\text{кр}}(0,01; 6) = 0,834.$$

Оскільки  $|r_{B,xy}| = 0,40 < r_{\text{кр}} = 0,834$ , то немає підстав для відхилення нульової гіпотези.

*Відповідь:* точка перетину прямих ліній регресії має координати (2,81; 115,38); вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона  $r_{B,xy} = 0,40$  вказує на прямий помірний зв'язок; перевірка при рівні значущості  $\alpha = 0,01$  показала, що лінійний кореляційний зв'язок між ознаками незначущий.

Виконання студентами завдань модульної контрольної роботи оцінюється згідно з положенням про рейтингову систему оцінювання (п. 7).

### **Залікова контрольна робота**

Згідно з навчальною програмою дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” передбачено семестрову атестацію у формі заліку. Залі-

кову контрольну роботу студент виконує з метою покращення сумарного залікового балу.

Залік проводиться у письмовому вигляді. Залікова контрольна робота містить 5 завдань (2 теоретичні, 3 практичні), які забезпечують перевірку результатів навчання. Завдання передбачають інтегроване застосування знань матеріалу навчальної дисципліни.

Перелік теоретичних питань, які виносяться на залікову роботу.

1. Приклади шкал вимірювання (найменувань, порядку, інтервалів, відношень), пов'язаних з програмним забезпеченням.
2. Повторна і неповторна вибірки. Способи формування вибірок.
3. Групування емпіричних даних. Дискретний розподіл вибірки.
4. Інтервальний розподіл вибірки. Формула Стерджерса.
5. Міри центральної тенденції кількісних шкал (інтервальних і відношень).
6. Розрахунок середніх значень (арифметичного, квадратичного, геометричного, гармонійного).
7. Міри розсіювання кількісних шкал.
8. Розрахунок показників розсіювання (варіаційного розмаху, середнього лінійного відхилення, виправленої дисперсії, стандартного відхилення, коефіцієнта варіації).
9. Показники асиметрії (коефіцієнт асиметрії, спрощений коефіцієнт асиметрії) і крутизни (куртозис, ексцес) кривої розподілу.
10. Групові і загальні середні значення.
11. Внутрішньогрупова, міжгрупова і загальна дисперсії.
12. Інтервальні оцінки для середнього значення і середнього квадратичного відхилення.
13. Визначення обсягів вибірок — розрахунок обсягів повторної і неповторної вибірок за різних умов.
14. Показники зв'язку кількісних шкал.
15. Розрахунок коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона.

16. Побудова довірчого інтервалу для коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона.
17. Розрахунок сукупного коефіцієнта кореляції.
18. Розрахунок кореляційного відношення.
19. Розрахунок точкового бісеріального коефіцієнта кореляції Пірсона.
20. Регресійне прогнозування. Кореляційне поле. Вибіркове рівняння регресії.
21. Знаходження параметрів вибіркового рівняння лінійної регресії (метод найменших квадратів).
22. Довірча смуга для вибіркового рівняння лінійної регресії. Довірча смуга для окремих значень залежної змінної.
23. Знаходження параметрів вибіркового рівняння нелінійної регресії (метод найменших квадратів).
24. Формулювання статистичних гіпотез. Загальна схема перевірки гіпотез.
25. Помилки першого і другого роду при перевірці гіпотез.
26. Прийняття рішень на основі перевірки статистичних гіпотез.
27. Непараметричні й параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез.
28. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань.
29. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій.
30. Критерій узгодженості  $\chi^2$  Пірсона.
31. Критерій узгодженості Колмогорова.
32. Критерії однорідності ( $\chi^2$ , Колмогорова-Смирнова, Вілкоксона).
33. Перевірка критеріїв значущості коефіцієнтів рангової кореляції.
34. Перевірка критерію значущості вибіркового коефіцієнта лінійної парної кореляції Пірсона.
35. Критерії відмінностей Розенбаума, Манна-Уїтні, Краскала-Уолліса, тенденцій Джонкіра.
36. Статистичні гіпотези в програмному забезпеченні.
37. Перевірка нормальності розподілу.

38. Порівняння емпіричних значень асиметрії й ексцесу з критичними значеннями.
39. Графічний метод перевірки гіпотези про нормальність розподілу.
40. Числові характеристики шкали найменувань.
41. Розрахунок значення моди, показників розсіювання (індекс якісної варіації, якісна дисперсія, ентропія).
42. Показники зв'язку шкали найменувань.
43. Розрахунок коефіцієнтів зв'язку в таблицях  $2 \times 2$  (асоціації Юла, контингенції Пірсона).
44. Розрахунок коефіцієнтів зв'язку в таблицях  $m \times n$  (Чупрова, Крамера, спряженості Пірсона).
45. Числові характеристики шкали порядку.
46. Розрахунок значення медіани, квантилів, міжквартильного розмаху, коефіцієнта диференціації.
47. Показники зв'язку шкали порядку.
48. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Спірмена для звичайних рангів.
49. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Спірмена для об'єднаних рангів. Спрощена формула.
50. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Кендалла для звичайних рангів(4 варіанти).
51. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Кендалла для об'єднаних рангів.
52. Розрахунок коефіцієнта множинної рангової кореляції.
53. Розрахунок бісеріального рангового коефіцієнта кореляції.
54. Авторегресія, порядок авторегресії, сезонність.
55. Експоненційне згладжування, підбір коефіцієнта згладжування.
56. Однофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп.
57. Однофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп.
58. Двофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп.

59. Двофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп.
60. Поняття фактора. Розвідувальний і перевірочний факторний аналіз.
61. Статистичні показники визначення мінімальної кількості факторів у факторному аналізі.
62. Кластерний аналіз. Міри подібності в кластерному аналізі.
63. Алгоритми класифікації у кластерному аналізі.

Практичні завдання охоплюють усі теми курсу (ці завдання аналогічні задачам для самоконтролю — п. 5). При розв'язуванні практичних завдань розрахунки можна виконувати з використанням засобів електронних таблиць Excel і пакету “Аналіз даних”.

Виконання студентами завдань залікової контрольної роботи оцінюється згідно з положенням про рейтингову систему оцінювання (п. 7).

## **7. Рейтингова система оцінювання результатів навчання**

1. Оцінка з дисципліни виставляється за багатобальною системою з подальшим перерахуванням у 4-бальну.
2. Максимальна кількість балів з дисципліни дорівнює 100.
3. При нарахуванні балів за окремими видами робіт рейтинг студента складається з балів, які він отримав за:
  - 1) роботу на практичних заняттях;
  - 2) домашню роботу;
  - 3) модульну контрольну роботу (МКР);
  - 4) залікову (виконується з метою покращення сумарного залікового балу) контрольну роботу (ЗКР);

### **Система рейтингових (вагових) балів та критерії оцінювання**

#### **1). Робота на практичних заняттях**

Оцінюється робота студента на 0,5 (1 год.) практичному занятті, передбаченому робочою програмою (на 0,5 — 1 год. практичному занятті проводиться

МКР, на останньому — залік). Максимальний ваговий бал за виконання завдання в Excel — 10 балів.

Максимальна кількість балів дорівнює  $r_{лз} = 10$  балів.

Критерії оцінювання

*виконання завдання в Excel:*

- студент повністю розв'язав задачу — 10 балів;
- студент правильно розв'язав задачу, але при її розв'язанні було допущено деякі неточності — 8-9 балів;
- студент неповністю розв'язав задачу, допустив окремі помилки — 6-7 балів;
- студент не розв'язав задачу — 0 балів.

## 2). Виконання домашньої роботи

Оцінюється домашня робота студента, яка містить 8 завдань, за кожне з яких нараховується по 5 балів. Максимальний ваговий бал —  $5 \text{ балів} \times 8 = 40$  балів. Отже,  $r_{др} = 40$  балів.

Критерії оцінювання

*Якість виконання кожного завдання оцінюється так:*

- завдання виконане повністю і правильно — 5 балів;
- завдання виконане повністю, але має несуттєві неточності — 4 бали;
- завдання виконане наполовину — 3 бали;
- завдання виконане менше, ніж наполовину, або має суттєві неточності, або не виконане — 0 балів.

## 3). Написання модульної контрольної роботи (МКР)

Контрольна робота складається з 5 завдань, за кожне з яких нараховується максимальний бал 10. Максимальний ваговий бал —  $10 \text{ балів} \times 5 = 50$  балів. Отже,  $r_{мкр} = 50$  балів.

Критерії оцінювання.

*Якість виконання кожного завдання оцінюється так:*

— завдання виконане повністю і правильно протягом відведеного часу — 10 балів;

— завдання виконане повністю протягом відведеного часу, але має несуттєві неточності — 8–9 балів;

— завдання виконане більше, ніж наполовину протягом відведеного часу — 6–7 балів;

— завдання виконане наполовину протягом відведеного часу — 5 балів;

— завдання виконане менше, ніж наполовину, або має суттєві неточності, або невиконане протягом відведеного часу — 0–4 бали.

#### 4). Написання залікової контрольної роботи (ЗКР)

Залікова контрольна робота складається з 5 завдань, за кожне з яких нараховується максимальний бал 5. Максимальний ваговий бал —  $6 \text{ балів} \times 5 = 30$  балів. Отже,  $r_{зкр} = 30$  балів.

Критерії оцінювання.

*Якість виконання кожного завдання оцінюється так:*

— завдання виконане повністю і вірно протягом відведеного часу — 6 балів;

— завдання виконане повністю протягом відведеного часу, але має несуттєві неточності — 5 бали;

— завдання виконане більше, ніж наполовину протягом відведеного часу — 4 бали;

— завдання виконане наполовину протягом відведеного часу — 3 бала;

— завдання виконане менше, ніж наполовину, або має суттєві неточності, або невиконане протягом відведеного часу — 0 балів.

#### ***Розрахунок шкали (R) рейтингу:***

Сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру становить:

$$R = r_{лз} + r_{др} + r_{мкр} = 10 + 40 + 50 = 100 \text{ балів.}$$

Таким чином, рейтингова шкала з дисципліни становить 100 балів.

Необхідною умовою допуску до заліку є виконання домашньої роботи і модульної контрольної роботи, а також стартовий рейтинг ( $R$ ) не менше  $0,4 \times 100 = 40$  балів.

Студенти, які набрали протягом семестру рейтинг з кредитного модуля  $0,4R \leq r < 0,6R$ , зобов'язані виконувати залікову контрольну роботу. Студенти, які набрали протягом семестру рейтинг  $r \geq 0,6R$  можуть підвищити свій бал на заліку.

Якщо студент виконував залікову контрольну роботу з метою покращення залікового бала, то до балу його рейтингу додається бал за залікову контрольну роботу  $r_{зкр}$ .

Для отримання студентом відповідних оцінок (ECTS та традиційних) його рейтингова оцінка  $RD$  переводиться згідно з таблицею (шкалою оцінювання):

<b><math>RD = r_c + r_{зкр}</math></b>	<b>Традиційна оцінка</b>
95...100	відмінно
85...94	дуже добре
75...84	добре
65...74	задовільно
60...64	достатньо
30...59	незадовільно
$r_c < 30$	не допущений

## 8. Методичні рекомендації

Методика вивчення дисципліни полягає в наданні студентам теоретичного матеріалу, роботі на практичних заняттях, самостійній роботі студентів над теоретичним матеріалом і остаточним виконанням домашньої роботи, контролі за результатами самостійної роботи студентів у вигляді проведення модульної контрольної роботи, а також залікової контрольної роботи.

## 9. Рекомендована література

### 9.1. Базова

1. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. — Москва: Мир, 1980. — 510 с.
2. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента. — Москва: Мир, 1981. — 520 с.
3. Длин А.М. Математическая статистика в технике. — Москва: Советская наука, 1958. — 466 с.
4. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. — Москва: Физматлит, 2006. — 816 с.
5. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. — СПб: Речь, 2003. — 350 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — Москва: Высшая школа, 2003. — 479 с.
7. Ким Дж.-О., Мьюллер Ч. и др. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. — Москва: Финансы и статистика, 1989. — 218 с.
8. Паниотто В.И., Максименко В.С. Количественные методы в социологических исследованиях. — К.: Наукова думка, 1982. — 272 с.
9. Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимошук О.Л. Аналіз часових рядів: Навч. посібник. — К.: Політехніка, 2010. — 317 с.

### 9.2. Допоміжна

10. Гланц С. Медико-биологическая статистика. — Москва: Практика, 1999. — 459 с.
11. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. — Москва: Прогресс, 1976. — 496 с.
12. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник: У 2-х ч. — Ч. II. Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.
13. Ирбела К. Факторный анализ. — Москва: Статистика, 1980. — 398 с.

14. Максименко В.С., Романенко С.В., Подшивалкина В.И., Олесевич Л.П. Математико-статистические методы в социологическом исследовании. — Одесса: Астропринт, 1998. — 183 с.

15. Мармоза А.Т. Практикум з математичної статистики: Навч. посібник. — К.: Кондор, 2004. — 264 с.

16. Столяров Г.С., Ємшанов Д.Г., Ковтун Н.В. АРМ статистика. Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 1999. — 266 с.

### **9.3. Інформаційні ресурси**

17. Кампус НТУУ “КПІ” — <http://login.kpi.ua/>

18. Науково-технічна бібліотека НТУУ “КПІ” — <http://library.kpi.ua/>

19. <http://masters.donntu.org/2017/fknt/vudvud/library/article6.pdf>

Контактний e-mail: [kublii\\_1\\_i@ukr.net](mailto:kublii_1_i@ukr.net)

Контактний телефон: (063)-71-91-231

## Додаток А

### Статистичні таблиці

Таблиця 1

Значення функції Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2704	1,11	0,3665	1,48	0,4306	1,85	0,4678	2,44	0,4927
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319	1,86	0,4686	2,46	0,4931
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332	1,87	0,4693	2,48	0,4934
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345	1,88	0,4699	2,50	0,4938
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357	1,89	0,4706	2,52	0,4941
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370	1,90	0,4713	2,54	0,4945
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382	1,91	0,4719	2,56	0,4948
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810	1,55	0,4394	1,92	0,4726	2,58	0,4951
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406	1,93	0,4732	2,60	0,4953
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418	1,94	0,4738	2,62	0,4956
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429	1,95	0,4744	2,64	0,4959
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3888	1,59	0,4441	1,96	0,4750	2,66	0,4961
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452	1,97	0,4756	2,68	0,4963
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463	1,98	0,4761	2,70	0,4965
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474	1,99	0,4767	2,72	0,4967
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484	2,00	0,4772	2,74	0,4969
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495	2,02	0,4783	2,76	0,4971
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505	2,04	0,4793	2,78	0,4973
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515	2,06	0,4803	2,80	0,4974
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525	2,08	0,4812	2,82	0,4976
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535	2,10	0,4821	2,84	0,4977
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545	2,12	0,4830	2,86	0,4979
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554	2,14	0,4838	2,88	0,4980
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564	2,16	0,4846	2,90	0,4981
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,92	0,4982
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,20	0,4861	2,94	0,4984
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,22	0,4868	2,96	0,4985
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,24	0,4875	2,98	0,4986
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,26	0,4881	3,00	0,49865
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,28	0,4887	3,20	0,49931
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,30	0,4893	3,40	0,49966
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633	2,32	0,4898	3,60	0,499841
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641	2,34	0,4904	3,80	0,499928
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649	2,36	0,4909	4,00	0,499968
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656	2,38	0,4913	4,20	0,499987
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664	2,40	0,4918	4,50	0,499997
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671	2,42	0,4922	5,00	0,500000

## Критичні точки розподілу Стьюдента

 $k$  — кількість ступенів свободи.

Кількість ступенів свободи $k$	Рівень значущості $\alpha$ (двобічна критична область)					
	0,001	0,002	0,01	0,02	0,05	0,10
1	636,578	318,289	63,656	31,821	12,706	6,314
2	31,600	22,328	9,925	6,965	4,303	2,920
3	12,924	10,214	5,841	4,541	3,182	2,353
4	8,610	7,173	4,604	3,747	2,776	2,132
5	6,869	5,894	4,032	3,365	2,571	2,015
6	5,959	5,208	3,707	3,143	2,447	1,943
7	5,408	4,785	3,499	2,998	2,365	1,895
8	5,041	4,501	3,355	2,896	2,306	1,860
9	4,781	4,297	3,250	2,821	2,262	1,833
10	4,587	4,144	3,169	2,764	2,228	1,812
11	4,437	4,025	3,106	2,718	2,201	1,796
12	4,318	3,930	3,055	2,681	2,179	1,782
13	4,221	3,852	3,012	2,650	2,160	1,771
14	4,140	3,787	2,977	2,624	2,145	1,761
15	4,073	3,733	2,947	2,602	2,131	1,753
16	4,015	3,686	2,921	2,583	2,120	1,746
17	3,965	3,646	2,898	2,567	2,110	1,740
18	3,922	3,610	2,878	2,552	2,101	1,734
19	3,883	3,579	2,861	2,539	2,093	1,729
20	3,850	3,552	2,845	2,528	2,086	1,725
21	3,819	3,527	2,831	2,518	2,080	1,721
22	3,792	3,505	2,819	2,508	2,074	1,717
23	3,768	3,485	2,807	2,500	2,069	1,714
24	3,745	3,467	2,797	2,492	2,064	1,711
25	3,725	3,450	2,787	2,485	2,060	1,708
26	3,707	3,435	2,779	2,479	2,056	1,706
27	3,689	3,421	2,771	2,473	2,052	1,703
28	3,674	3,408	2,763	2,467	2,048	1,701
29	3,660	3,396	2,756	2,462	2,045	1,699
30	3,646	3,385	2,750	2,457	2,042	1,697
35	3,591	3,340	2,724	2,438	2,030	1,690
40	3,551	3,307	2,704	2,423	2,021	1,684
45	3,520	3,281	2,690	2,412	2,014	1,679
50	3,496	3,261	2,678	2,403	2,009	1,676
60	3,460	3,232	2,660	2,390	2,000	1,671
70	3,435	3,211	2,648	2,381	1,994	1,667
80	3,416	3,195	2,639	2,374	1,990	1,664
90	3,402	3,183	2,632	2,368	1,987	1,662
100	3,390	3,174	2,626	2,364	1,984	1,660
120	3,373	3,160	2,617	2,358	1,980	1,658
$+\infty$	3,291	3,090	2,576	2,326	1,960	1,645
Кількість ступенів свободи $k$	Рівень значущості $\alpha$ (однобічна критична область)					
	0,0005	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05

Таблиця 3

Значення величини  $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n)$ 

(величину  $t_\gamma$  використовують при побудові довірчого інтервалу для генерального середнього значення нормально розподіленої ознаки у випадку, коли генеральна дисперсія невідома; виконується рівність

$$t_\gamma(\gamma, n) = t_{\text{двоб}}(1 - \gamma; n - 1)$$

$\gamma$  — довірна ймовірність;  
 $n$  — обсяг вибірки.

Обсяг вибірки $n$	Довірна ймовірність $\gamma$			Обсяг вибірки $n$	Довірна ймовірність $\gamma$		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,776	4,604	8,610	26	2,060	2,787	3,725
6	2,571	4,032	6,869	27	2,056	2,779	3,707
7	2,447	3,707	5,959	28	2,052	2,771	3,689
8	2,365	3,499	5,408	29	2,048	2,763	3,674
9	2,306	3,355	5,041	30	2,045	2,756	3,660
10	2,262	3,250	4,781	35	2,032	2,728	3,601
11	2,228	3,169	4,587	40	2,023	2,708	3,558
12	2,201	3,106	4,437	45	2,015	2,692	3,526
13	2,179	3,055	4,318	50	2,010	2,680	3,500
14	2,160	3,012	4,221	55	2,005	2,670	3,480
15	2,145	2,977	4,140	60	2,001	2,662	3,463
16	2,131	2,947	4,073	65	1,998	2,655	3,449
17	2,120	2,921	4,015	70	1,995	2,649	3,437
18	2,110	2,898	3,965	75	1,993	2,644	3,427
19	2,101	2,878	3,922	80	1,990	2,639	3,418
20	2,093	2,861	3,883	85	1,989	2,636	3,410
21	2,086	2,845	3,850	90	1,987	2,632	3,403
22	2,080	2,831	3,819	95	1,986	2,629	3,397
23	2,074	2,819	3,792	100	1,984	2,626	3,391
24	2,069	2,807	3,768	120	1,980	2,618	3,374
25	2,064	2,797	3,745	$+\infty$	1,960	2,576	3,291

Таблиця 4

Значення величини  $q(\gamma; n)$ 

(величину  $q(\gamma, n)$  використовують при побудові довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилення  $\sigma$  нормально розподіленої ознаки)

$\gamma$  — довірна ймовірність;  
 $n$  — обсяг вибірки.

Обсяг вибірки $n$	Довірна ймовірність $\gamma$			Обсяг вибірки $n$	Довірна ймовірність $\gamma$		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки  $F$ -розподілу Фішера-Снедекора

$k_1$  — кількість ступенів свободи чисельника (більшої дисперсії; факторної дисперсії);  
 $k_2$  — кількість ступенів свободи знаменника (меншої дисперсії; залишкової дисперсії).

Рівень значущості $\alpha = 0,01$															
$k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	24	50	$+\infty$
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107	6234	6302	6366
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,60	26,35	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,47	9,24	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,07	5,86	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,28	5,07	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,73	4,52	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,02	3,81	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	3,78	3,57	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,59	3,38	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,43	3,22	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,29	3,08	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,18	2,97	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,08	2,87	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,00	2,78	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	2,92	2,71	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	2,86	2,64	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	2,80	2,58	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,52	2,30	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,47	2,25	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74	2,36	2,14	1,89
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,29	2,06	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61	2,23	2,00	1,74
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56	2,18	1,95	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,12	1,88	1,60
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,03	1,79	1,49
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	1,98	1,74	1,43
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	1,95	1,70	1,38
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	1,89	1,63	1,28
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22	1,83	1,57	1,16
$+\infty$	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	1,79	1,52	1,00

Таблиця 1 (продовження)

Рівень значущості $\alpha = 0,05$															
$k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	24	50	$+\infty$
$k_2$															
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	249	252	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,45	19,48	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,53	4,44	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,12	3,02	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,61	2,51	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,51	2,40	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,42	2,31	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,24	2,12	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,08	1,97	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,05	1,94	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,01	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	1,96	1,84	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	1,93	1,81	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	1,91	1,79	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	1,83	1,70	1,56
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,76	1,63	1,47
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,70	1,56	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,65	1,51	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,63	1,48	1,28
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,61	1,46	1,25
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,57	1,41	1,19
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77	1,54	1,38	1,11
$+\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,52	1,35	1,00

Таблиця 1 (закінчення)

Рівень значущості $\alpha = 0,001$															
$k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	24	50	$+\infty$
1	405312	499725	540257	562668	576496	586033	593185	597954	602245	605583	608444	610352	623703	630379	636578
2	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3	167	148	141	137	135	133	132	131	130	129	129	128	126	125	123
4	74,13	61,25	56,17	53,43	51,72	50,52	49,65	49,00	48,47	48,05	47,70	47,41	45,77	44,88	44,05
5	47,18	37,12	33,20	31,08	29,75	28,83	28,17	27,65	27,24	26,91	26,64	26,42	25,13	24,44	23,79
6	35,51	27,00	23,71	21,92	20,80	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	18,18	17,99	16,90	16,31	15,75
7	29,25	21,69	18,77	17,20	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,88	13,71	12,73	12,20	11,70
8	25,41	18,49	15,83	14,39	13,48	12,86	12,40	12,05	11,77	11,54	11,35	11,19	10,30	9,80	9,33
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,72	9,57	8,72	8,26	7,81
10	21,04	14,90	12,55	11,28	10,48	9,93	9,52	9,20	8,96	8,75	8,59	8,45	7,64	7,19	6,76
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,65	8,35	8,12	7,92	7,76	7,63	6,85	6,42	6,00
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,14	7,00	6,25	5,83	5,42
13	17,82	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,65	6,52	5,78	5,37	4,97
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,44	7,08	6,80	6,58	6,40	6,26	6,13	5,41	5,00	4,60
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	5,94	5,81	5,10	4,70	4,31
16	16,12	10,97	9,01	7,94	7,27	6,80	6,46	6,20	5,98	5,81	5,67	5,55	4,85	4,45	4,06
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	5,44	5,32	4,63	4,24	3,85
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39	5,25	5,13	4,45	4,06	3,67
19	15,08	10,16	8,28	7,27	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	5,08	4,97	4,29	3,90	3,51
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,94	4,82	4,15	3,77	3,38
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95	4,81	4,70	4,03	3,64	3,26
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,70	4,58	3,92	3,54	3,15
23	14,20	9,47	7,67	6,70	6,08	5,65	5,33	5,09	4,89	4,73	4,60	4,48	3,82	3,44	3,05
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,24	4,99	4,80	4,64	4,51	4,39	3,74	3,36	2,97
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,89	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	4,42	4,31	3,66	3,28	2,89
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,35	4,24	3,59	3,21	2,82
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,28	4,17	3,52	3,14	2,75
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,22	4,11	3,46	3,09	2,69
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,16	4,05	3,41	3,03	2,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,11	4,00	3,36	2,98	2,59
35	12,90	8,47	6,79	5,88	5,30	4,89	4,59	4,36	4,18	4,03	3,90	3,79	3,16	2,78	2,38
40	12,61	8,25	6,59	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,75	3,64	3,01	2,64	2,23
45	12,39	8,09	6,45	5,56	5,00	4,61	4,32	4,09	3,91	3,76	3,64	3,53	2,90	2,53	2,12
50	12,22	7,96	6,34	5,46	4,90	4,51	4,22	4,00	3,82	3,67	3,55	3,44	2,82	2,44	2,03
60	11,97	7,77	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,86	3,69	3,54	3,42	3,32	2,69	2,32	1,89
80	11,67	7,54	5,97	5,12	4,58	4,20	3,92	3,70	3,53	3,39	3,27	3,16	2,54	2,16	1,72
100	11,50	7,41	5,86	5,02	4,48	4,11	3,83	3,61	3,44	3,30	3,18	3,07	2,46	2,08	1,62
120	11,38	7,32	5,78	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,12	3,02	2,40	2,02	1,54
200	11,15	7,15	5,63	4,81	4,29	3,92	3,65	3,43	3,26	3,12	3,00	2,90	2,29	1,90	1,39
500	10,96	7,00	5,51	4,69	4,18	3,81	3,54	3,33	3,16	3,02	2,91	2,81	2,20	1,80	1,23
$+\infty$	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96	2,84	2,74	2,13	1,73	1,00

Таблиця 6

**Критичні значення  
вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Спірмена**

$n$  — обсяг вибірки.

Обсяг вибірки $n$	Рівень значущості $\alpha$		Обсяг вибірки $n$	Рівень значущості $\alpha$	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	—	23	0,42	0,53
6	0,85	—	24	0,41	0,52
7	0,78	0,94	25	0,40	0,51
8	0,72	0,88	26	0,39	0,50
9	0,68	0,83	27	0,38	0,49
10	0,64	0,79	28	0,38	0,48
11	0,61	0,76	29	0,37	0,48
12	0,58	0,73	30	0,36	0,47
13	0,56	0,70	31	0,36	0,46
14	0,54	0,68	32	0,36	0,45
15	0,52	0,66	33	0,34	0,45
16	0,50	0,64	34	0,34	0,44
17	0,48	0,62	35	0,33	0,43
18	0,47	0,60	36	0,33	0,43
19	0,46	0,58	37	0,33	0,42
20	0,45	0,57	38	0,32	0,41
21	0,44	0,56	39	0,32	0,41
22	0,43	0,54	40	0,31	0,40

Таблиця 7

**Критичні значення  
вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона  $r_{xy}$   
(для перевірки за двобічним критерієм)**

$k = n - 2$  — кількість ступенів свободи (де  $n$  — обсяг вибірки).

Кількість ступенів свободи $k$	Рівень значущості $\alpha$			Кількість ступенів свободи $k$	Рівень значущості $\alpha$		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	0,988	0,997	0,9999	17	0,389	0,456	0,575
2	0,900	0,950	0,990	18	0,378	0,444	0,561
3	0,805	0,878	0,959	19	0,369	0,433	0,549
4	0,729	0,811	0,917	20	0,360	0,423	0,537
5	0,669	0,754	0,874	25	0,323	0,381	0,487
6	0,622	0,707	0,834	30	0,296	0,349	0,449
7	0,582	0,666	0,798	35	0,275	0,325	0,418
8	0,549	0,632	0,765	40	0,257	0,304	0,393
9	0,521	0,602	0,735	45	0,243	0,288	0,372
10	0,497	0,576	0,708	50	0,231	0,273	0,354
11	0,476	0,553	0,684	60	0,211	0,250	0,325
12	0,458	0,532	0,661	70	0,195	0,232	0,303
13	0,441	0,514	0,641	80	0,183	0,217	0,283
14	0,426	0,497	0,623	90	0,173	0,205	0,267
15	0,412	0,482	0,606	100	0,164	0,195	0,254
16	0,400	0,468	0,590				