

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ.  
ЧАСТИНА 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА  
РЯДИ: Конспект лекцій

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітніми програмами: «Економічна аналітика», «Міжнародна економіка»,  
«Економіка і бізнес»  
спеціальності 051 Економіка*

Укладачі: І.Д. Фартушний, І.С. Лазаренко, С.М. Кириєнко

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2024

Укладачі:	<i>Фартушний Іван Дмитрович</i> , канд. фіз.-матем. наук, доцент <i>Лазаренко Ірина Сергіївна</i> , канд. фіз.-матем. наук, доцент <i>Кириєнко Сергій Михайлович</i>
Рецензент	<i>Кулик А.Б.</i> , канд. фіз.-матем. наук, доцент, завідувач кафедрою вищої математики КНЕУ ім. Вадима Гетьмана
Відповідальний редактор	<i>Капустян В.О.</i> , докт. фіз.-матем. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 4 від 01.02.2024 р.)  
за поданням вченої ради факультету менеджменту та маркетингу  
(протокол № 6 від 29.01.2024 р.)*

**Математика для економістів. Частина 2. Інтегральне числення та ряди:** конспект лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами: «Економічна аналітика», «Міжнародна економіка», «Економіка і бізнес» спеціальності 051 Економіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І.Д. Фартушний, І.С. Лазаренко, С.М. Кириєнко – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 121 с.

У посібнику викладено основний матеріал по інтегральному численню, диференціальним рівнянням та рядам, що повністю відповідає силабусу. Конспект лекцій містить три розділи, які структурно поділені на підрозділи (теми), в яких приділено увагу основним поняттям визначеного та невизначеного інтегралу, застосування визначених інтегралів до економічних задач. Другий розділ присвячений диференціальним рівнянням, їх різновидам та методам їх розв'язання. У третьому розділі наводяться основні поняття що до класифікацій рядів, їхньої збіжності та розбіжності. Посібник містить велику кількість вирішених прикладів, а також завдань для самостійного їх вирішення.

Призначений для студентів економічних спеціальностей.

УДК 330.45, 510.2

Реєстр. № НП 23/24-302. Обсяг 5,2 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

## ЗМІСТ

### Розділ 1. Інтегральне числення

Лекція 1_1. Первісна функції. Невизначений інтеграл.	4
Лекція 1_2. Основні методи інтегрування	8
Лекція 1_3. Інтегрування раціональних функцій.	10
Лекція 1_4. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних виразів.	13
Лекція 1_5. Визначений інтеграл. Теорема Ньютона-Лейбніца.	16
Лекція 1_6. Деякі застосування обчисленого інтеграла. Обчислення плоских фігур.	21
Лекція 1_7. Невласні інтеграли. Поняття про подвійний інтеграл.	30

### Розділ 2. Диференціальні рівняння

Лекція 2_1. Теорія диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремленими змінними.	36
Лекція 2_2. Однорідне диференціальне рівняння.	52
Лекція 2_3. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.	58
Лекція 2_4. Рівняння у повних диференціалах. Диференціальні рівняння $n$ -го порядку.	67
Лекція 2_5. Лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку.	84
Лекція 2_6. Лінійні неоднорідні рівняння $n$ -го порядку. Метод невизначених коефіцієнтів.	93
Лекція 2_7. Лінійні неоднорідні рівняння $n$ -го порядку. Метод варіації довільних сталих.	98

### Розділ 3. Ряди

Лекція 3_1. Числові ряди. Ознаки збіжності.	102
Лекція 3_2. Функціональні та степеневі ряди.	109
Лекція 3_3. Ряд Тейлора. Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена.	113
Лекція 3_4. Ряди Фур'є.	117
Список використаних джерел	121

## ВСТУП

### РОЗДІЛ 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

#### Лекція №1\_1

#### Первісна функція. Невизначений інтеграл.

**Інтеграл** – одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами:

- 1) про відновлення функції по заданій її похідній;
- 2) про обчислення площі, обмеженої графіком функції  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , прямими  $x = a$ ,  $x = b$  і віссю  $OX$ .

Термін «інтеграл» ввів Якоб Бернуллі у 1690 році (*Якоб Бернуллі (1654-1705) – швейц. матем.*). В історії математики цей термін пов'язують з двома латинськими словами: *integrare* – відновляти та *integer* – цілий.

**Означення 1.1.1.** Функція  $F(x)$  називається первісною функції  $f(x)$  на проміжку  $(a, b)$ , якщо  $F(x)$  диференційована на  $(a, b)$  і  $F'(x) = f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ .

Приклад. Первісною функції  $f(x) = x$  є функція  $F(x) = \frac{x^2}{2}$ , оскільки

$F'(x) = f(x)$ ; очевидно, що первісними будуть також функції  $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ ,

де  $C$  – довільна стала, оскільки  $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.1.1** Якщо  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$  на проміжку  $(a, b)$ , то всяка інша первісна функції  $f(x)$  на цьому самому проміжку має вигляд  $F(x) + C$ , де  $C$  – довільна стала.

Якщо  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то вираз  $F(x) + C$  називається невизначеним інтегралом функції  $f(x)$  на цьому проміжку і позначається символом  $\int f(x) dx$ .

Знак  $\int$ , який ввів Лейбніц, називається інтегралом,  $f(x)dx$  – підінтегральним виразом,  $f(x)$  – підінтегральною функцією,  $x$  – змінною інтегрування (*Вільгельм Лейбніц (1646-1716) – німець. математик, філософ*).

Отже,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1.1.1)$$

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають *інтегруванням* цієї функції.

### Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

4. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Зауваження. Властивість 5 справедлива для довільного скінченного числа доданків.

6. Якщо  $\int f(x)dx = F(x) + C$  і  $u = \varphi(x)$  – довільна функція, що має неперервну похідну, то  $\int f(u)du = F(u) + C$ .

Цю властивість називають інваріантністю формули інтегрування. Вона є дуже важливою і означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Наприклад,  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ , оскільки  $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$ . Користуючись інваріантністю цієї формули, одержимо формулу  $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$ ,  $u = \varphi(x)$  – довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема:

$$\int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

тобто 
$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

$$\int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C,$$

тобто 
$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Природно виникає питання: чи для всякої функції  $\exists$  невизначений інтеграл? Відповідь на це дає наступна теорема.

**Теорема 1.1.2** Будь-яка неперервна функція має первісну.

### Таблиця основних інтегралів.

Нехай  $u = u(x)$  – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну  $u'(x)$ ; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

I. 
$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

II. 
$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

III. 
$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

IV. 
$$\int e^u du = e^u + C.$$

V. 
$$\int \sin u du = -\cos u + C.$$

- VI.  $\int \cos u du = \sin u + C.$
- VII.  $\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C.$
- VIII.  $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C.$
- IX.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C.$  X.
- X.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C.$
- XI.  $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\tan \frac{u}{2}\right| + C.$
- XII.  $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$
- XIII.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C.$
- XIV.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$
- XV.  $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{u}{a} + C.$
- XVI.  $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C.$
- XVII.  $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C.$
- XVIII.  $\int \sqrt{u^2 + A} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

**Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Знайти інтеграли за допомогою безпосереднього інтегрування:**

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ ; 2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ ; 3.  $\int \frac{dx}{x^2+9}$ ; 4.  $\int \left(4\sin x + 8x^3 - \frac{11}{\cos^2 x}\right) dx$ ; 5.  $\int \frac{2x^3-x^2-1}{x-1} dx.$

**Знайти інтеграли за допомогою безпосереднього інтегрування:**

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ ; 2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-11}}$ ; 3.  $\int \frac{7+\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{16-x^2}} dx$ ; 4.  $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2+6}\right) dx$ ;

5.  $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{4}{\sqrt[8]{x^9}} - \frac{16}{x^2+10}\right) dx.$

## Лекція 1\_2

### Основні методи інтегрування.

#### 1. Метод безпосереднього інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int (2x + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}) dx = \dots = x^2 + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + C;$$

$$\text{б) } \int (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2 dx = x - \cos x + C.$$

#### 2. Метод підстановки (заміни змінної).

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій теоремі.

**Теорема 1.2.1.** Нехай  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$  на проміжку  $(a;b)$ , тобто  $\int f(x)dx = F(x) + C$ ,  $x \in (a;b)$ ; і нехай функція  $x = \varphi(t)$  визначена і диференційована на проміжку  $(\alpha;\beta)$ , причому множиною значень цієї функції є проміжок  $(a;b)$ . Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in (\alpha;\beta).$$

**Наслідок 1.2.1.** Якщо  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Приклад. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int x\sqrt{x-5} dx = \dots = \frac{2}{3}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3 + C;$$

$$\text{б) } \int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx = |u = 2\ln x + 3| = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{5x+4} = \frac{1}{5} \ln|5x+4| + C.$$

#### 3. Метод інтегрування частинами.

Нехай  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді, згідно з властивостями диференціала,

$$d(uv) = u dv + v du \quad \Rightarrow \quad u dv = d(uv) - v du.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du ,$$

або 
$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.2.1)$$

Формула (1.2.1) називається формулою інтегрування частинами.

Зауважимо, що під час знаходження функції  $v$  вважають, що стала  $C=0$ , оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду  $\int P(x)e^{kx} dx$ ,  $\int P(x)\sin kx dx$ ,  $\int P(x)\cos kx dx$ , де  $P(x)$  – многочлен,  $k \in R$ . У цих інтегралах за  $u$  слід взяти множник  $P(x)$ , а за  $dv$  – вираз, що залишився ( $u = P(x)$ ,  $dv = \{e^{kx}, \sin kx, \cos kx\} dx$ )

2) інтеграли виду  $\int P(x)\ln x dx$ ,  $\int P(x)\arcsin x dx$ ,  $\int P(x)\arccos x dx$ ,  $\int P(x)\arctan x dx$ ,  $\int P(x)\operatorname{arccot} x dx$ , де  $P(x)$  – многочлен. У цих

$$\text{інтегралах слід взяти } u = \begin{cases} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \operatorname{arccot} x \end{cases}, \quad dv = P(x)dx;$$

3) інтеграли виду  $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$ ,  $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ , де  $\alpha, \beta$  – дійсні числа. Тут після двократного застосування формули (2.1) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Знайти інтеграли за допомогою методу підстановки або інтегруванням частинами:**

1.  $\int (2x + 1)\sin x dx$ ;
2.  $\int \arcsin x dx$ ;
3.  $\int x^3 \ln x dx$ ;
4.  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$ ;
5.  $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$ .

**Домашнє завдання:**

**Знайти інтеграли за допомогою методу підстановки або інтегруванням частинами:**

1.  $\int x^2 \cos x dx$ ; 2.  $\int e^{-x} \sin x dx$ ; 3.  $\int \ln(x^2 + 1) dx$ ;
4.  $\int \arctg x dx$ ; 5.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{5+4\sin x}} dx$ .

### Лекція 1\_3

#### Інтегрування раціональних функцій.

**Означення 1.3.1.** Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

де  $n$  – натуральне число, яке називається степенем многочлена,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – коефіцієнти многочлена.

**Означення 1.3.2.** Відношення двох многочленів  $P_m(x)$  та  $Q_n(x)$   $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  називається раціональною функцією або раціональним дробом ( $P_m(x) \neq 0, Q_n(x) \neq 0$ ).

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника  $m < n$ ; в іншому випадку ( $m \geq n$ ) раціональний дріб називається неправильним.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \quad (1.3.1)$$

де  $W_k(x)$  і  $R_p(x)$  – многочлени  $k$ -го  $p$ -го степеня, причому  $p < n$ , тобто дріб

$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$  – правильний. Наприклад,

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

*Елементарними раціональними дробами* називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$I. \frac{A}{x-a}; \quad II. \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$\text{III. } \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

де  $A, a, M, N, p, q$  – дійсні числа, а тричлен  $x^2 + px + q$  не має дійсних коренів, тобто  $p^2 - 4q < 0$ .

**Теорема 1.3.1.** Нехай знаменник правильного раціонального дробу розкладено на множники  $Q_n(x) = a_0(x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu$ , тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \\ & + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x - b)^\beta} + \\ & + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x - b)^\beta} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \\ & + \frac{L_1x + F_1}{x^2 + lx + s} + \frac{L_2x + F_2}{(x^2 + lx + s)^2} + \dots + \frac{L_\nu x + N_\nu}{(x^2 + px + q)^\nu}, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

де  $A_1, \dots, A_\alpha, B_1, \dots, B_\beta, M_1, N_1, \dots, M_\mu, N_\mu, L_1, F_1, \dots, L_\nu, F_\nu$  – дійсні числа.

Вираз (1.3.2) називається *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби*.

Для знаходження чисел  $A_1, A_2, \dots, L_\nu, F_\nu$  можна скористатися *методом порівнювання коефіцієнтів* або *методом окремих коефіцієнтів*. Суть методу окремих коефіцієнтів полягає в наступному. Помножимо обидві частини рівності (1.3.2) на  $Q_n(x)$ , внаслідок чого дістанемо два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен  $R_p(x)$  і многочлен з невідомими коефіцієнтами  $A_1, \dots, F_\nu$ . Надаючи змінній конкретних значень стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначимо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній  $x$  надавати значення дійсних коренів знаменника  $Q_n(x)$ .

Приклад. Виразити через елементарні дроби

$$\text{a) } \frac{x^2 + 25x - 47}{(x-2)^2(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+5} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{3}{x+5};$$

$$\text{b) } \frac{2x^2 - 23x - 17}{(x^2 + 4x + 13)(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2 + 4x + 13} + \frac{C}{x-3} = \frac{4x-3}{x^2 + 4x + 13} - \frac{2}{x-3}.$$

### Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

Нехай треба знайти  $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ .

Враховуючи формулу (1.3.1), цей інтеграл можна подати як суму інтеграла від многочлена і правильного раціонального дроби:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int W_k(x) dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)} dx.$$

Інтеграл від многочлена  $W_k(x)$  знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дроби зводиться за допомогою формули (1.3.2) до інтегралів від елементарних дробів.

Розглянемо ці інтеграли:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \frac{M}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + (N - \frac{Mb}{2a}) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$  знаходиться за допомогою табличних інтегралів.

$$\text{IV. } \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx \text{ обчислюється за допомогою рекурентної формули,}$$

вираз якої є громіздким і не застосовується в даному курсу лекцій.

Приклад. Обчислити інтеграли

$$1. \int \frac{x^2 + 25x - 47}{(x-2)^2(x+5)} dx = 4\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - 3\ln|x+5| + C.$$

$$2. \int \frac{2x^2 - 23x - 17}{(x^2 + 4x + 13)(x-3)} dx = 2\ln|x^2 + 4x + 13| - \frac{11}{3} \arctan \frac{x+2}{3} - 2\ln|x-3| + C.$$

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Знайти інтеграли від раціональних функцій:**

$$1. \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx; \quad 2. \int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx; \quad 3. \int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx; \quad 4. \int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx;$$

$$5. \int \frac{1}{(x^3+1)^2} dx.$$

*Домашнє завдання:*

**Знайти інтеграли від раціональних функцій:**

$$1. \int \frac{x}{x^2+3x+2} dx; \quad 2. \int \frac{x}{x^3+1} dx; \quad 3. \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx;$$

$$4. \int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} dx; \quad 5. \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

### **Лекція 1\_4**

#### **Інтегрування ірраціональних та тригонометричних виразів.**

Інтегралі від ірраціональних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

I) Інтегралі вигляду  $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$  раціоналізуються

підстановкою  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ , де  $k$  – спільний знаменник дробів  $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ .

Приклад.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

II) Інтегралі вигляду  $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{m}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Якщо  $a > 0$ , то інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  зводиться до табличного

інтегралу  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$ .

Якщо  $a < 0$ , то до інтегралу  $\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{d} + C$ .

Приклад:  $\int \frac{6x-1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$ .

III) Інтегралі вигляду  $\int \frac{dx}{(mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ .

За допомогою оберненої підстановки  $\frac{1}{mx + n} = t$  ці інтегралі зводяться до

інтегралів вигляду II).

Приклад:  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$ .

IV) Інтегралі вигляду  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ .

Шляхом виділення з квадратного тричлена повного квадрату даний інтеграл зводиться до одного з наступних двох інтегралів:

1)  $\int \sqrt{A^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{A^2 - x^2} + \frac{A^2}{2} \arcsin \frac{x}{A} + C$ ;

2)  $\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$ .

Приклад:  $\int \sqrt{5 - 4x - x^2} dx$ .

V) Інтегралі вигляду  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  раціоналізуються підстановкою

$t = \tan \frac{x}{2}$ , ( $-\pi < x < \pi$ ), яка називається *універсальною*.

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \arcsin t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Приклад:  $\int \frac{dx}{5 + 2 \cos x}.$

Зауважимо, що універсальна підстановка завжди раціоналізує  $\int R(\sin x, \cos x) dx.$

Проте на практиці вона часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками.

Наведемо деякі з них:

- a)  $\int R(\sin x) \cos x dx$  раціоналізується підстановкою  $\sin x = t$ ;
- b)  $\int R(\cos x) \sin x dx$  раціоналізується підстановкою  $\cos x = t$ ;
- c)  $\int R(\tan x) dx$  раціоналізується підстановкою  $\tan x = t$ ;
- d)  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  раціоналізується підстановкою  $\cos x = t$ , якщо функція  $R$  непарна відносно  $\sin x$ :  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ; або підстановкою  $\sin x = t$ , якщо функція  $R$  непарна відносно  $\cos x$ :  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ; або підстановкою  $\tan x = t$ , якщо функція  $R$  парна відносно  $\sin x$  і  $\cos x$  одночасно:  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$

Приклади:  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3}; \int \tan^3 x dx; \int \sqrt[4]{2 + 5 \sin 3x \cos 3x} dx.$

VI) Інтеграл виду  $\int \sin^m x \cos^n x dx. \tag{1.4.1}$

- 1) Якщо  $m = 2k + 1$  – непарне додатне число, то

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \\ &= \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x). \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо  $n$  – непарне додатне число.

Приклад:  $\int \sin^2 7x \cos^3 7x dx.$

- 2) Якщо  $m, n$  – парні додатні числа, то підінтегральний вираз (1.4.1) перетворюється за допомогою формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

VII) Інтегралы вигляду  $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ ,  $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ ,  $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$  обчислюються за допомогою відомих формул:

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x),$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x),$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x).$$

**Тригонометричні підстановки для раціоналізації ірраціональних виразів**

Інтегруючи вираз  $\sqrt{a^2 - x^2}$  користуються підстановкою  $x = a \sin z$ ;

Інтегруючи вираз  $\sqrt{x^2 + a^2}$  користуються підстановкою  $x = a \tan z$ ;

Інтегруючи вираз  $\sqrt{x^2 - a^2}$  користуються підстановкою  $x = \frac{a}{\cos z}$ .

Приклад: 
$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

**Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Знайти інтегралы від тригонометричних та ірраціональних функцій:**

1.  $\int \sin 3x \sin 5x dx$ ; 2.  $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$ ; 3.  $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ; 4.  $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ ;

5.  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$ .

*Домашнє завдання:*

**Знайти інтегралы від тригонометричних та ірраціональних функцій**

1.  $\int \sin 3x \cos x dx$ ; 2.  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ ; 3.  $\int \frac{1}{8-4 \sin x+7 \cos x} dx$ ;

4.  $\int \frac{1}{-2 \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}} dx$ ; 5.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ .

## Лекція 1\_5

**Визначений інтеграл. Теорема Ньютона-Лейбніца.**

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на відрізку  $[a; b]$ ,  $a < b$ . Розіб'ємо цей відрізок на  $n$  довільних частин:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Сукупність точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$  позначимо через  $\tau$  і назовемо  $\tau$ -розбиттям відрізка  $[a; b]$ .

На кожному частинному відрізку  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$  візьмемо  $\forall \tau. \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  і побудуємо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1.5.1)$$

де  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  – довжина відрізка  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Сума (1.5.1) називається *інтегральною сумою* функції  $f(x)$ , яка відповідає  $\tau$ -розбиттю відрізка  $[a; b]$  на частинні відрізки.

Позначимо через  $\lambda$  довжину найбільшого частинного відрізка  $\tau$ -розбиття і назовемо його діаметром цього розбиття:

$$\lambda = \lambda(\tau) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (2.1.1) при  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить від  $\tau$ -розбиття і вибору точок  $\xi_i$ , то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$  і позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Отже,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1.5.2)$$

Функція  $f(x)$  називається *інтегрованою* на відрізку  $[a; b]$ . Числа  $a$  і  $b$  називаються відповідно *нижньою і верхньою межею інтегрування*.

**Теорема 1.5.1** (необхідна умова інтегрованості). Якщо функція  $f(x)$  інтегрована на  $[a; b]$ , то вона обмежена на цьому відрізку.

**Теорема 1.5.2** (достатня умова інтегрованості). Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ , то вона інтегрована на цьому відрізку.

### Властивості визначеного інтеграла

1 Величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

2 Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3 Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt.$$

4 Якщо точка  $c \in [a; b]$  і  $f(x)$  інтегрована на відрізку  $[a; b]$ , то справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5 Сталий множник можна було винести за знак інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

6 Визначений інтеграл від суми інтегрованих функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

7 Якщо всюди на відрізку  $[a; b]$   $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

8 Якщо  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

9 Якщо функція  $f(x)$  інтегрована на  $[a; b]$ , то  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

10 Якщо для  $\forall x \in [a; b]: |f(x)| \leq c$ , то  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq c(b - a)$ .

11 Якщо  $m$  і  $M$  – відповідно найменше і найбільше значення функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

**12 Теорема 1.5.3** (Теорема про середнє значення функції) Якщо функція неперервна на  $[a;b]$ , то на цьому відрізку знайдеться така точка  $c$ , що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

► Якщо функція неперервна на відрізку, то вона досягає свого найбільшого  $M$  і найменшого значення  $m$ . З властивості 11 одержимо

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Оскільки функція  $f(x)$  неперервна на  $[a;b]$ , то вона набуває всі проміжні значення відрізка  $[m;M]$ . Отже.  $\exists t.c \in [a;b]$ :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \quad (1.5.3)$$

Рівність (1.5.3) називається формулою середнього значення, а величина  $f(c)$  – середнім значенням функції на відрізку  $[a;b]$ .

### Інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай функція  $f(x)$  неперервна на  $[a;b]$ , тоді вона інтегрована на будь-якому відрізку  $[a;x] \subset [a;b]$ , тобто для  $\forall x \in [a;b] \exists \int_a^x f(t)dt$ .

Позначимо

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (1.5.4)$$

Функція  $\Phi(x)$  називається *інтегралом із змінною верхньою межею*.

**Теорема 1.5.4** Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

**Наслідок 1.5.1:** Для всякої неперервної на  $[a;b]$  функції  $f(x) \exists$  первісна функція. При цьому однією з первісних функції є визначений інтеграл (1.5.4)

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a; b].$$

**Теорема 1.5.5** (Теорема Ньютона–Лейбніца): Якщо  $F(x)$  є будь-якою первісною від неперервної функції  $f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1.5.5)$$

Формула (1.5.5) називається формулою Ньютона–Лейбніца.

► Згідно наслідку теореми 1.5.4  $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ . Поклавши в цій рівності  $x = a$ , отримаємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a),$$

тому  $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ ; при  $x = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad \blacktriangleleft$$

Зауваження: Формула Ньютона–Лейбніца записується ще так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклади: а)  $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$ ,  $\int_0^\pi (2x - \sin x)dx = \pi^2 - 2$ .

### Методи обчислення визначених інтегралів

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методами заміни змінної та інтегрування частинами.

**Теорема 1.5.6** Нехай виконуються умови:

- 1) функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ ;
- 2) функція  $x = \varphi(t)$  і її похідна  $x' = \varphi'(t)$  неперервні на відрізку  $[\alpha; \beta]$ ;
- 3)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  і для  $\forall t \in [\alpha; \beta]$ ,  $a < \varphi(t) < b$ .

Тоді справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1.5.6)$$

Формула (1.5.6) називається *формулою заміни змінної у визначеному інтегралі*.

Приклади: 
$$\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} = 6 \ln \frac{3}{2}, \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

**Теорема 1.5.7** Якщо функції  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  мають на відрізку  $[a;b]$  неперервні похідні, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1.5.7)$$

Формула (1.5.7) називається *формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла*.

Приклади: 
$$\int_0^{\pi} x \cos^2 x dx, \int_1^e x \ln x dx.$$

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Обчислити визначені інтеграли:**

1.  $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$ ; 2.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ ; 3.  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$ ; 4.  $\int_0^R x^3 \sqrt{R^2-x^2} dx$ ;
5.  $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$ .

**Домашнє завдання:**

**Обчислити визначені інтеграли:**

1.  $\int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$ ; 2.  $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ ; 3.  $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$ ;
4.  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ ; 5.  $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$ .

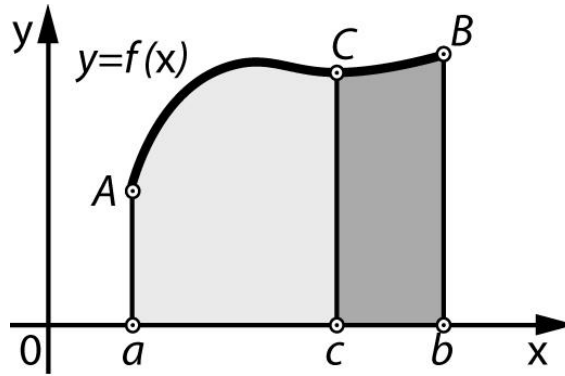
## **Лекція 1\_6**

### **Деякі застосування обчисленого інтеграла**

#### **Обчислення плоских фігур**

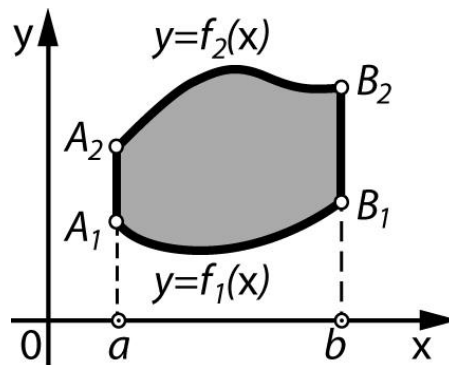
Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a,b]$  і  $f(x) \geq 0$ , то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою  $y = f(x)$  і прямими  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  (див. рис.) знаходять за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.6.1)$$



Якщо треба обчислити площу фігури  $A_1A_2B_2B_1$ , тоді

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx; \quad (1.6.2)$$



тобто площу фігури, що обмежена кривими  $y = f_1(x)$  та  $y = f_2(x)$  і прямими  $x = a$ ,  $x = b$  за умови, що  $f_2(x) \geq f_1(x)$ , знаходять за формулою (1.6.2).

Приклад: Знайти площу фігури, обмеженою прямою  $y = x$  і параболою

$$y = 2 - x^2. \quad S = \frac{9}{2}.$$

### Довжина дуги

Диференціал  $dl$  довжини дуги гладкої кривої, заданої функцією  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , знаходять за формулою

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Тому довжина дуги:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (1.6.3)$$

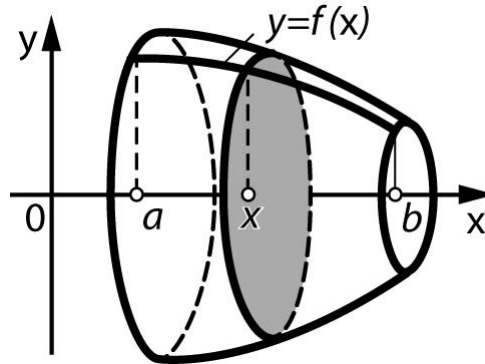
Приклад: Знайти довжину дуги параболи  $y = \frac{x^2}{2}$  від точки  $O(0;0)$  до точки

$$A(1; \frac{1}{2}).$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

### Об'єм тіла обертання

Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Якщо цю трапецію обернути навколо осі  $Ox$ , то утворюється просторова фігура, яка називається *тілом обертання*.



Ця фігура обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1.6.4)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції  $x = \varphi(y) \geq 0$  і прямими  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = 0$ , то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі  $Oy$ , знаходять за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (1.6.5)$$

**Приклад:** Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи  $y = x^2$  на проміжку  $1 \leq x \leq 2$  навколо осі а)  $Ox$ ; б)  $Oy$ .

$$V_x = \frac{31\pi}{5}, \quad V_y = \pi \int_0^1 y dy = \frac{15\pi}{2}.$$

**Задача 1.6.1: (Індивідуальна робота)** Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ x + 4y - 9 = 0. \end{cases} \quad (1.6.6)$$

Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, що обмежена лініями (1.6.5),  $y = 0$  при  $y > 0$ .

► Точки перетину параболи і прямої  $M_1(5;1)$ ,  $M_2(37;-7)$ .

Точки перетину з координатними осями:

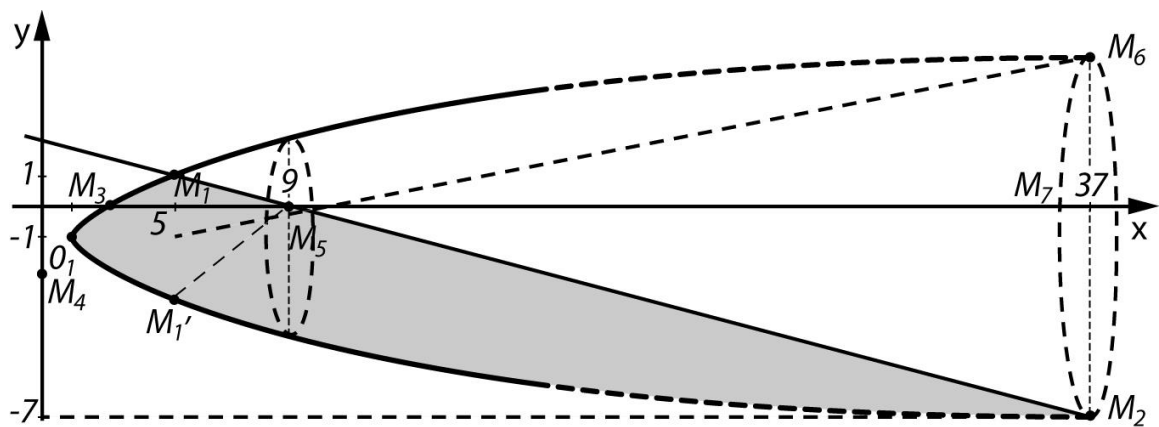
$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset,$$

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow M_3(2;0),$$

$$\begin{cases} x = 9 - 4y, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow M_4(0; \frac{9}{4}),$$

$$\begin{cases} x = 9 - 4y, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow M_5(9;0)$$

$x = y^2 + 2y + 2 \Rightarrow x - 1 = (y + 1)^2$   $O_1(1; -1)$  – вершина параболы.



Площа фігури:

$$\begin{aligned} S_{O_1M_1M_5M_2M_3} &= \int_{-7}^1 (\varphi_1(y) - \varphi_2(y)) dy = \int_{-7}^1 (9 - 4y - y^2 - 2y - 2) dy = \\ &= \int_{-7}^1 (-y^2 - 6y + 7) dy = \dots = \frac{256}{3} \approx 85,333. \end{aligned}$$

Об'єм тіла обертання:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ y > 0, \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{x-1} - 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} - 1.$$

$$V_{M_1M_1'M_3O_1} = \pi \int_2^5 f^2(x) dx = \pi \int_2^5 (\sqrt{x-1} - 1)^2 dy = \dots = \frac{7\pi}{6}.$$

$$V_{M_1M_5M_1'} = \frac{\pi}{3} (M_1M_5) \cdot (M_1M_1')^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

$$V = V_{M_1M_1'M_3O_1} + V_{M_1M_5M_1'} = \frac{7\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}. \blacktriangleleft$$

## Обчислення роботи

Робота  $Q$ , яка виконана за деякий час  $t \in [0; T]$ , обчислюється за формулою

$$Q = \int_0^T y(t) dt. \quad (1.6.7)$$

### Економічні застосування визначеного інтеграла

В курсі мікроекономіки часто розглядаються так звані граничні величини, тобто для деякої функції  $y = f(x)$  розглядають її похідну  $f'(x)$ . Наприклад, якщо дана функція витрат  $C$  в залежності від об'єму  $q$  випущеної продукції  $C = C(q)$ , то граничні витрати будуть задаватися похідною цієї ж функції  $MC = C'(q)$ . Її економічний зміст – це витрати на виробництво додаткової одиниці продукції товару, що випускається. Тому часто доводиться знаходити функцію витрат за заданою функцією граничних витрат.

Приклад: Дана функція граничних витрат  $MC = 3q^2 - 48q + 202$ ,  $1 \leq q \leq 20$ . Знайти функцію витрат  $C = C(q)$  і обчислити витрати у випадку виробництва 10 одиниць товару, якщо відомо, що витрати для виробництва першої одиниці товару склали 50 грн.

$$C(q) = \int_1^q MC(t) dt + C_0, \quad C_0: C(1) = 50 \Rightarrow C_0 = 50.$$

$$C(q) = \int_1^q (3t^2 - 48t + 202) dt + 50 = q^3 - 24q^2 + 202q - 129,$$

$$C(10) = 491.$$

Ще одним прикладом застосування визначеного інтеграла є знаходження дисконтної вартості грошового потоку.

Припустимо спочатку, що для дискретного моменту часу  $t = 1, 2, 3, \dots$  задана величина грошового потоку  $R(t)$ . Якщо ставку відсотка позначити через  $p$ , то дисконтну вартість кожної з величин  $R(1)$ ,  $R(2)$ ,  $R(3)$ , ... знаходять за відомими формулами:

$$\frac{R(1)}{1+p}, \frac{R(2)}{(1+p)^2}, \frac{R(3)}{(1+p)^3}, \dots$$

Тоді дисконтну вартість грошового потоку знайдемо, якщо просумувати ці величини:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{R(i)}{(1+p)^i}, \quad (1.6.8)$$

де  $n$  – загальна кількість періодів часу.

В неперервній моделі час змінюється неперервно, тобто для  $\forall t: 0 \leq t \leq T$ , де  $[0; T]$  – період часу, який розглядається, і задана величина  $I(t)$  – швидкість зміни грошового потоку. Тоді для отримання величини  $\Pi$  формула (1.6.8) (формула обчислення дисконтної вартості для дискретного випадку) змінюється на її неперервний аналог:

$$\Pi = \int_0^T I(t)e^{-pt} dt. \quad (1.6.9)$$

Приклад 1: Під будівництво ГЕС заданий неперервний грошовий потік зі швидкістю  $I(t) = -t^2 + 20t + 5$  (млн. грн./рік) протягом 20 років з річною відсотковою ставкою  $p = 5\%$ . Знайти дисконтну вартість цього потоку.

► За формулою (1.6.7) маємо  $\Pi = \int_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0,05t} dt \approx 892,319$ .

$\Pi = 892$  млн. грн. ◀

Приклад 2: Розглянемо ситуацію коли грошовий потік не припиняється ніколи, наприклад у випадку експлуатації земельної ділянки. Якщо  $r$  – неперервна відсоткова ставка, а  $R(t)$  – відповідна рента, то знаходження дисконтної вартості земельної ділянки призводить до формули, що містить невластний інтеграл

$$\Pi = \int_0^{\infty} R(t)e^{-rt} dt. \quad (1.6.10)$$

Нехай  $R(t) = 5e^{-0,7t}$  (тис. грн./рік) – рента, яку отримують від земельної ділянки,  $r = 10\%$  – відсоткова ставка. Визначимо дисконтну вартість земельної ділянки за формулою (2.2.8):

$$\Pi = \int_0^{\infty} 5e^{-0,7t} e^{-0,1t} dt = \dots = 6,25 \text{ (тис. грн.)}$$

Порівняємо отриману величину з вартістю ділянки в даний момент часу, яке дорівнює  $R(0) = 5$  (тис. грн.)

### Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай треба обчислити визначений інтеграл  $I = \int_a^b f(x)dx$ , де  $f(x)$  – неперервна на  $[a, b]$  функція. Якщо можна знайти первісну  $F(x)$  від функції  $f(x)$ , то цей інтеграл обчислюється за формулою Ньютона–Лейбніца:  $I = F(b) - F(a)$ . Якщо ж первісна не є елементарною функцією, або функція  $f(x)$  задана графіком чи таблицею, то формулою Ньютона–Лейбніца скористатися не можна. Тоді визначений інтеграл обчислюють наближено.

Наближені методи обчислення визначеного інтеграла здебільшого ґрунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла: якщо  $f(x) \geq 0$ , то інтеграл  $I =$  площі криволінійної трапеції, обмеженою кривою  $y = f(x)$  і прямими  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .

Для наближеного обчислення інтеграла  $\int_a^b f(x)dx$  від неперервної на відрізка  $[a, b]$  функції  $f(x)$  часто використовують наступні формули:

а) формула лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \quad (1.6.11)$$

б) формула правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (1.6.12)$$

в) формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (1.6.13)$$

д) формула Сімпсона (Сімпсон Томас (1710-1761) – англійський математик):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})), (1.6.14)$$

де  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$ ,  $x_i = \frac{b-a}{n}i$ ,  $i = 0;1;\dots;n$ ,  $n$  – кількість частинних відрізків, на які розбивають відрізок  $[a,b]$ .

Формули (1.6.11)-(1.6.14) називаються квадратурними.

Різницю між лівою і правою частиною квадратурної формули називають її залишковим членом і позначають через  $R_n(f)$ . Абсолютна похибка  $|R_n(f)|$  квадратурної формули залежить від числа  $n$  – кількості частинних відрізків, на які розбивається відрізок інтегрування  $[a,b]$ .

**Задача 1.6.1 (Індивідуальна робота)** На підставі даних про продуктивність праці робітника  $Y = (35;42;45;35;25)$  за певну годину  $X = (2;5;6;7;8)$  знайти залежність між змінними  $y$  та  $x$  за методом найменших квадратів. Визначити обсяг продукції, яка буде вироблена за 8 годин роботи безпосереднім інтегруванням функції  $y(x)$  та за допомогою наближеного обчислення цього визначеного інтеграла за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона.

► Знайдемо залежність між змінними  $x$  і  $y$  за методом найменших квадратів

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

де коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2$  визначаються з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases}$$

$$n=5; \sum_{i=1}^5 x_i = 2 + 5 + 6 + 7 + 8 = 28; \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 178;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^3 = \dots = 1204; \sum_{i=1}^5 x_i^4 = \dots = 8434.$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 35 + 42 + 45 + 35 + 25 = 182;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 2 \cdot 35 + 5 \cdot 42 + 6 \cdot 45 + 7 \cdot 35 + 8 \cdot 25 = 995;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 y_i = 2^2 \cdot 35 + 5^2 \cdot 42 + 6^2 \cdot 45 + 7^2 \cdot 35 + 8^2 \cdot 25 = 6125.$$

Отже, система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 5a_0 + 28a_1 + 178a_2 = 182, \\ 28a_0 + 178a_1 + 1204a_2 = 995, \\ 178a_0 + 1204a_1 + 8434a_2 = 6125. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю системи за допомогою засобів комп'ютерної алгебри (наприклад, Microsoft Excel) або методом Крамера (на папері), отримаємо

$$a_0 = 11,571 \quad a_1 = 14,808 \quad a_2 = -1,632.$$

Таким чином,  $y(x) = 11,571 + 14,808x - 1,632x^2$ .

Визначимо обсяг продукції, яка буде вироблена за 8 годи роботи безпосереднім інтегруванням функції  $y(x)$ :

$$\int_0^8 y(x) dx = \int_0^8 (11,571 + 14,808x - 1,632x^2) dx = \dots = 287,896.$$

Визначимо обсяг продукції, яка буде вироблена за 8 годи роботи за допомогою наближеного обчислення цього визначеного інтеграла за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона. Для цього розіб'ємо відрізок  $[0;8]$  на  $n = 8$  рівних частин:

$$y_0 = y(0) = 11,571 + 14,808 \cdot 0 - 1,632 \cdot 0^2 = 11,571,$$

$$y_1 = y(1) = 11,571 + 14,808 \cdot 1 - 1,632 \cdot 1^2 = 27,747,$$

$$y_2 = y(2) = \dots = 34,659, \quad y_3 = y(3) = \dots = 41,308,$$

$$y_4 = y(4) = \dots = 44,692, \quad y_5 = y(5) = \dots = 44,813,$$

$$y_6 = y(6) = \dots = 41,670, \quad y_7 = y(7) = \dots = 35,264,$$

$$y_8 = y(8) = \dots = 25,593.$$

А. За формулою лівих прямокутників:

$$\int_0^8 y(x) dx \approx y_0 + y_1 + \dots + y_7 = 278,725.$$

В. За формулою правих прямокутників:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx y_1 + y_2 + \dots + y_8 = 292,747.$$

С. За формулою трапецій:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx \frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + \dots + y_7 = 285,736.$$

Д. За формулою Сімпсона:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx \frac{8-0}{3 \cdot 8} (y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) = 287,912.$$

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Обчислити площу фігури, обмежену лініями:**

1.  $y = x^2; y = 2 - x^2; 2. y = 0; y = \sin x; y = \cos x;$

**Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:**

3.  $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$ , де  $x \geq 0$ , навколо: а) осі Ох; б) осі Оу.

4.  $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$  навколо: а) осі Ох; б) осі Оу.

**Обчислити довжину дуги кривої:**

5.  $y = \ln x$  від  $x_1 = \sqrt{3}$  до  $x_2 = \sqrt{8}$ .

*Домашнє завдання:*

**Обчислити площу фігури, обмежену лініями:**

1.  $y = 3x - x^2; y = x^2 - x; 2. y = e^x; y = e^{-x}; x = 1;$

**Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:**

3.  $y = x^3, y = 1, x = 0$  навколо: а) осі Ох; б) осі Оу.

4.  $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 1, x = 4$  навколо: а) осі Ох; б) осі Оу.

**Обчислити довжину дуги кривої:**

5.  $y^2 = (x + 1)^3$  від  $x_1 = 0$  до  $x_2 = 4$ .

## **Лекція 1\_7**

### **Невласні інтеграли. Поняття про подвійний інтеграл.**

На попередніх лекціях ми ввели означення визначеного інтеграла як границю інтегральних сум, передбачаючи при цьому, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція на цьому відрізку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то означення визначеного інтеграла стає

неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на  $n$  частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума на має скінченної границі. Узагальнюючи ці поняття, приходимо до *невласного інтеграла* – інтеграла від функцій на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

### Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли I-го роду)

Нехай функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $[a; +\infty)$  і інтегрована на  $\forall$  відріжку  $[a; b]$ :  $-\infty < a < b < +\infty$ . Тоді, якщо  $\exists$  скінчена границя

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.7.1)$$

то її називають невласним інтегралом I-го роду і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (1.7.2)$$

Отже,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1.7.3)$$

У цьому випадку інтеграл (1.7.2) називають збіжним, а підінтегральну функцію  $f(x)$  – інтегрованою на проміжку  $[a; +\infty)$ .

Якщо ж границя (1.7.1) не існує або нескінченна, то інтеграл (1.7.2) називають також невластним, але розбіжним.

Аналогічно інтегралу (1.7.3) визначається невластний інтеграл на  $(-\infty; b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Невластний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

де  $c$  –  $\forall$  дійсне число.

Приклади: а)  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln^5 x dx}{x}$

б)  $\int_0^{+\infty} (4x - 7) \cdot e^{-x} dx$

**Теорема 1.7.1:** Якщо на  $[a; +\infty)$  функції  $f(x)$ ,  $g(x)$  неперервні і задовольняють умову  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , то із збіжності інтеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (1.7.4)$$

впливає збіжність інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (1.7.5)$$

а із розбіжності інтеграла (1.7.5) впливає розбіжність інтеграла (1.7.4)

**Теорема 1.7.2** Якщо  $\exists$  границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty \quad (f(x) > 0, g(x) > 0),$$

то інтеграли (2.3.4) і (2.3.5) або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

**Теорема 1.7.3** Якщо інтеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  збігається, то збігається й інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

### Невласні інтеграли від необмежених функцій

#### (невласні інтеграли II-го роду)

Нехай функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $[a; b)$ . Точку  $x = b$  назвемо *особливою* точкою функції  $f(x)$ , якщо  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow b - 0$ . Нехай функція  $f(x)$  інтегрована на відрізку  $[a; b - \varepsilon]$  при  $\forall \varepsilon > 0: b - \varepsilon > a$ ; тоді якщо  $\exists$  скінчена границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad (1.7.6)$$

то її називають невластним інтегралом II-го роду і позначають так:

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1.7.7)$$

Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (1.7.7) існує або збігається.

Якщо границя (1.7.6) нескінченна або не існує, то інтеграл (1.7.7) називається також невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно, якщо  $x = a$  – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо  $f(x)$  необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки  $c_0 \in (a; b)$ , то за умови існування обох невласних інтегралів  $\int_a^{c_0} f(x)dx$  і  $\int_{c_0}^b f(x)dx$  за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_0} f(x)dx + \int_{c_0}^b f(x)dx.$$

Приклади: а)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \dots = \frac{\pi}{2}$ ;      б)  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$ .

**Теорема 1.7.4** Якщо функції  $f(x)$ ,  $g(x)$  неперервні на  $[a; b)$ , мають особливі точку  $x = b$  і задовольняють умову  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , то із збіжності інтеграла  $\int_a^b g(x)dx$  випливає збіжність інтеграла  $\int_a^b f(x)dx$ , а із розбіжності інтеграла  $\int_a^b f(x)dx$  випливає розбіжність інтеграла  $\int_a^b g(x)dx$ .

**Теорема 1.7.5:** Нехай функції  $f(x)$ ,  $g(x)$  на проміжку  $[a; b)$  неперервні, додатні, і мають особливість в точці  $x = b$ , тоді якщо  $\exists$  границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

то інтеграли  $\int_a^b f(x)dx$  і  $\int_a^b g(x)dx$  або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

**Теорема 1.7.6:** Якщо  $x = b$  – особлива точка функції  $f(x)$  і інтеграл  $\int_a^b |f(x)|dx$  збігається, то інтеграл  $\int_a^b f(x)dx$  також збігається.

## Поняття подвійного інтеграла

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена в замкненій обмеженій області  $D \subset R^2$ . Розіб'ємо область  $D$  на  $n$  частин  $D_i$ , які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють  $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$ . У кожній області візьмемо  $\forall$  точки  $P_i(\xi_i, \mu_i)$  і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \mu_i) \Delta S_i, \quad (1.7.8)$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції  $z = f(x, y)$  по області  $D$ . Нехай  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$  – найбільший з діаметрів областей  $D_i$ .

Якщо інтегральна сума (1.7.8) при  $\lambda \rightarrow 0$  має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття області  $D$  на частинні області  $D_i$ , ні від вибору точок  $P_i$  в них, то ця границя називається подвійним інтегралом і позначається:

$$\iint_D f(x, y) dS \text{ або } \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Таким чином, за означенням

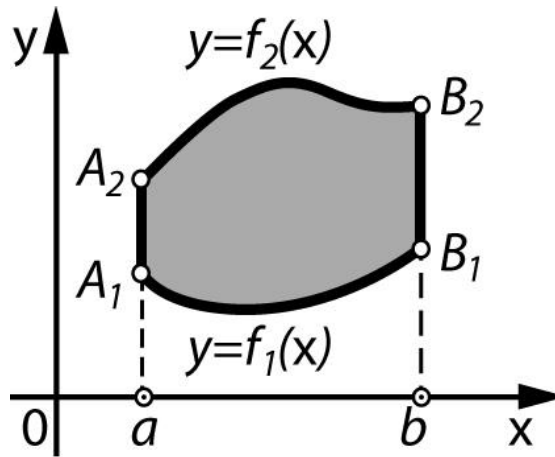
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.7.9)$$

У цьому випадку функція  $f(x, y)$  називається інтегрованою в області  $D$ ;  $D$  – областю інтегрування,  $x, y$  – змінними інтегрування;  $dS(dx dy)$  – елементом площі.

**Теорема 1.7.7** (достатня умова інтегрованості). Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна в замкненій обмеженій області  $D$ , то вона інтегрована в цій області.

Обчислення подвійного інтеграла за формулою (1.7.9) як границі інтегральної суми пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів.

Якщо область інтегрування  $D$  обмежена двома неперервними кривими  $y = \varphi_1(x)$  та  $y = \varphi_2(x)$  і двома прямими  $x = a$  та  $x = b$ ,



то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (1.7.10)$$

Формула (1.7.10) є формулою обчислення подвійного інтеграла. Праву частину формули (1.7.10) називають повторним інтегралом від функції  $f(x, y)$  по області  $D$ .

**Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

**Обчислити невласні інтеграли:**

1.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ ; 2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$ ; 3.  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ ;

**Обчислити подвійні інтеграли:**

4.  $\iint_D x \ln x dx dy$ , якщо область  $D$  – прямокутник  $0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e$ ;
5.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , якщо  $D$  обмежена лініями  $y = x, x = 0, y = 1, y = 2$ .

***Домашнє завдання:***

**Обчислити невласні інтеграли:**

1.  $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2+1}$ ; 2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ ; 3.  $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ;

**Обчислити подвійні інтеграли:**

4.  $\iint_D (2 + x^2 - y) dx dy$ , область  $D$  – прямокутник  $1 \leq x \leq 4; -1 \leq y \leq 2$ ;
5.  $\iint_D xy^2 dx dy$ , область  $D$  – чверть круга  $x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0$ .

## РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

### Лекція 2\_1

#### Теорія диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремленими змінними

#### Утворення і основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Основним об'єктом вивчення під час нашого курсу буде *звичайне диференціальне рівняння першого порядку розв'язане відносно похідної*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (2.1.1)$$

тут  $x$  – незалежна змінна,  $y = y(x)$  – невідома функція цієї незалежної змінної.

Стосовно рівняння (2.1.1) основна задача полягає у знаходженні невідомої функції  $y(x)$  або у з'ясуванні її властивостей без знаходження самої функції.

Мотивацією до вивчення диференціальних рівнянь є той факт, що диференціальні рівняння описують велику кількість реальних процесів у фізиці, хімії, біології, економіці, соціології тощо. Фактично, будь-який процес, який відбувається в часі, може бути описаний у вигляді рівняння вигляду (2.1.1), у якому незалежна змінна  $x$  грає роль часового параметру, невідома функція  $y = y(x)$  характеризує процес, а співвідношення (2.1.1) є математичним виразом залежності швидкості перебігу процесу від його стану.

Проілюструємо сказане на прикладах.

Приклад 2.1.1. *Знайти швидкість тіла маси  $m$ , що рухається по прямій під дією сили  $F$ , направленої вздовж цієї прямої, якщо сила опору середовища пропорційна швидкості.*

Нехай  $t$  – час,  $v(t)$  – швидкість у момент часу  $t$ . Тоді сила опору, що діє на тіло  $F_{\text{опору}} = -kv(t)$ , де  $k > 0$  – деякий коефіцієнт, і за другим законом Ньютона для прискорення  $a(t)$  отримуємо  $ma(t) = F - kv(t)$ . Але

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v'(t)$ , отже маємо диференціальне рівняння для невідомої функції  $v(t)$

$$mv'(t) = F - kv(t).$$

Приклад 2.1.2. Відносно нового товару була проведена рекламна компанія. Після цього інформація про товар поширюється серед потенційних покупців через їх спілкування між собою. Змоделювати ситуацію.

Нехай  $N$  – кількість потенційних покупців. Можна вважати, що швидкість зміни кількості покупців, що знають про товар, пропорційна як кількості тих, хто знає про товар, так і кількості тих, хто про нього ще не знає.

Якщо позначити  $t$  – час після рекламної компанії,  $x(t)$  – кількість потенційних покупців, що знають про товар в момент часу  $t$ , то приходимо до диференціального рівняння:

$$x'(t) = kx(t)(N - x(t)),$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності.

Приклад 2.1.3. З'ясуємо закон зміни капіталу в агрегованій замкненій економіці (тобто в такій економіці, в якій виробляється єдиний продукт і відсутні імпорт і експорт товарів).

Нехай  $t$  – час,  $Y(t)$  – обсяг випуску продукту,  $C(t)$  – обсяг споживання,  $I(t)$  – обсяг інвестиції,  $K(t)$  – обсяг капіталу,  $L(t)$  – наявні ресурси.

Тоді оскільки економіка замкнена, то весь випущений продукт витрачається на споживання та інвестиції  $Y(t) = C(t) + I(t)$ .

Обсяг випуску продукту задається виробничою функцією, що характеризує можливості виробництва  $Y(t) = F(K, L)$ .

Вважаємо, що капіталовкладення (інвестиції) визначаються швидкістю зміни наявного капіталу та його амортизацією (зносом), що пропорційна його кількості, тобто  $I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t)$ .

Отже, приходимо до основного рівняння неокласичної теорії економічного зростання

$$\dot{K}(t) = -\mu K(t) + F(K(t), L(t)) - C(t).$$

Приклад 2.1.4. Проаналізуємо процес розмноження одновидової популяції живих організмів.

Нехай  $t$  – час,  $x(t)$  – маса деякої одновидової популяції в момент часу  $t$ .

За умови, що ресурси обмежені,  $x(t)$  задовольняє логістичне рівняння

$$x'(t) = kx(t) - lx^2(t),$$

де доданок  $kx(t)$  – характеризує приріст (розмноження) особин популяції, що пропорційний їх чисельності, а доданок  $lx^2(t)$  враховує конкурентну боротьбу особин популяції за наявні ресурси (їжу), тут коефіцієнти  $k > 0$ ,  $l > 0$ .

Нехай  $x$  – незалежна змінна,  $y = y(x)$  – шукана функція, повернемося до розгляду рівняння (2.1.1)

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (2.1.2)$$

Рівняння (2.1.2) – це *звичайне* (оскільки невідома функція  $y(\cdot)$  залежить лише від однієї змінної) *диференціальне рівняння першого порядку* (оскільки до рівняння входить лише перша похідна), *розв'язане відносно похідної*.

Розглянемо кілька прикладів відшукування розв'язків диференціального рівняння вигляду (2.1.2).

Приклад 2.1.5. Знайти функцію  $y(x)$ , якщо відома похідна  $y'(x) = 1 + \sin 2x$ .

Для того щоб відновити функцію за її похідною, необхідно знайти первісну цієї похідної, тобто  $y(x) = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$ , де  $C \in \mathbb{R}$  – довільна стала.

Отже, рівняння  $y' = 1 + \sin 2x$  має безліч розв'язків.

Приклад 2.1.6. Знайти функцію  $y(x)$ , якщо  $y'(x) = ky(x)$ .

Формальне взяття інтегралу нічого не дасть (!!!) для цього рівняння.

Пізніше ми вивчимо метод, що дозволяє в цій ситуації знайти  $y(x)$ .

Поки що ми можемо безпосередньою підстановкою переконатися, що сім'я функцій  $y(x) = Ce^{kx}$ ,  $C \in R$  – є розв'язком даного рівняння.

Визначимо, що ми розуміємо під розв'язком диференціального рівняння (2.1.2).

**Означення 2.1.1.** Розв'язком диференціального рівняння (2.1.2) на інтервалі  $(a, b)$  називають диференційовну на цьому інтервалі функцію  $y = y(x)$ ,  $x \in (a, b)$  таку, що  $\forall x \in (a, b): y'(x) = f(x, y(x))$ .

**Означення 2.1.2.** Загальним розв'язком диференціального рівняння (2.1.2) називатимемо множину всіх розв'язків цього рівняння.

Загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння першого порядку, як правило, є однопараметрична сім'я розв'язків функцій.

**Означення 2.1.3.** Задача Коші для диференціального рівняння (2.1.2) полягає у знаходженні для заданих  $(x_0, y_0)$  розв'язку рівняння (1)  $y = y(x)$ , визначеного принаймні в деякому околі точки  $x_0$ , для якого виконується початкова умова  $y(x_0) = y_0$ .

Задача Коші записується у вигляді

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Розглянемо задачі Коші для диференціальних рівнянь з прикладів 2.1.5, 2.1.6.

Приклад 2.1.7. 
$$\begin{cases} y' = 1 + \sin 2x, \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Як ми вже з'ясували, загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Щоб знайти розв'язок задачі Коші, потрібно серед всіх розв'язків рівняння виділити ті, що задовольняють початкову умову. Підставляємо загальний розв'язок у початкову умову і визначаємо значення довільної сталої

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким чином,  $y(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\pi}{4}$  – шуканий розв'язок задачі Коші.

$$\text{Приклад 2.1.8.} \quad \begin{cases} y' = ky, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок  $y = Ce^{kx}$ , задовольняючи початкову умову, отримуємо

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = 0 \Rightarrow C = 0. \text{ Отже, } y(x) \equiv 0 \text{ – розв'язок задачі Коші.}$$

**Зауваження 2.1.1.** Задача Коші (2.1.3) може мати декілька розв'язків.

Проілюструємо це на прикладі.

$$\text{Приклад 2.1.9.} \quad \begin{cases} y' = 2\sqrt{y}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Безпосередньою підстановкою неважко переконатися, що розв'язком цієї задачі Коші є як функція  $y(x) \equiv 0$ , так і функція  $y(x) = (x-1)^2$ ,  $x \geq 1$ .

Нас здебільшого буде цікавити ситуація, коли розв'язок задачі Коші є єдиним, тобто коли в деякому околі точки  $x_0$  існує єдина функція – розв'язок (2.1.3).

**Означення 2.1.4.** *Графік розв'язку рівняння (2.1.2) називається інтегральною кривою цього рівняння.*

**Геометричний зміст диференціального рівняння (2.1.2):** Нехай  $\Gamma = \{(x, y(x)) : x \in (a, b)\}$  – інтегральна крива диференціального рівняння (1).

Тоді для кожної точки цієї кривої  $(x_0, y_0) \in \Gamma$   
 $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$ , тобто в кожній точці інтегральної кривої тангенс кута нахилу дотичної дорівнює значенню правої частини рівняння в цій точці.

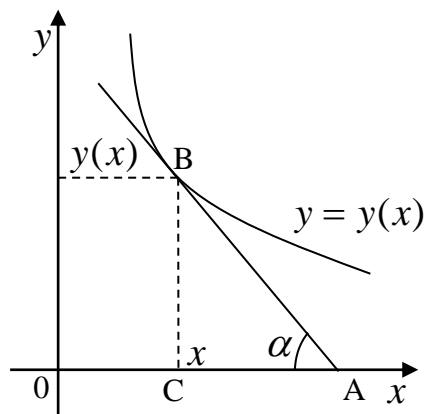
На цьому ґрунтується найпростіший спосіб уявити поведінку інтегральних кривих рівняння (2.1.3) (якщо ви не можете його розв'язати): через кожну точку  $(x, y)$  проводимо маленький відрізок з кутом нахилу  $\alpha$ , де  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ . Таким чином, нами одержано “поле напрямів”.

З геометричного змісту диференціального рівняння випливає наступне твердження.

**Твердження 2.1.1.** Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

Розглянемо ще кілька прикладів задач, що приводять до диференціальних рівнянь.

Приклад 2.1.10. Знайти рівняння кривих, у яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, дорівнює  $a^2$ .



Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо  $\operatorname{tg} \alpha = |y'(x)|$ . Тоді у прямокутному трикутнику  $\triangle ACB$ :  $BC = y(x)$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = |y'(x)|$ ,

а тому  $AC = \frac{y(x)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y(x)}{|y'(x)|}$ , і оскільки

$$S = a^2 = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \text{ то } a^2 = \frac{1}{2} \frac{y}{|y'|} \cdot y = \frac{y^2}{2|y'|}.$$

Отже,  $y' = \pm \frac{y^2}{2a^2}$  – шукане рівняння.

Приклад 2.1.11. В бак, що містить 10 л води, неперервно зі швидкістю 2 л/хв. поступає розчин, у кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Цей

розчин перемішується з водою і отримана суміш витікає з баку з тією ж швидкістю. Записати закон зміни солі в баці.

Нехай  $t$  – час (у хв.),  $m(t)$  – кількість солі в баці в момент часу  $t$ .

Знайдемо, на скільки зміниться кількість солі за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ . За цей проміжок часу у бак надійшло  $2\Delta t$  розчину, в якому  $2\Delta t \cdot 0,3$  кг солі. При цьому вилилось  $2\Delta t$  суміші. Оскільки у момент часу  $t$  у баці було  $m(t)$  кг солі, то в  $2\Delta t$  л суміші було б  $\frac{m(t)}{10} \cdot 2\Delta t = 0,2m(t)\Delta t$  кг солі, якби за час  $\Delta t$  вміст солі не замінювався б. Але він змінюється на величину  $\alpha$ , причому  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тому з  $2\Delta t$  л суміші вилилось  $0,2\Delta t(m(t) + \alpha)$  кг солі. Тоді остаточно отримуємо

$$m(t + \Delta t) - m(t) = 0,6\Delta t - 0,2\Delta t(m(t) + \alpha), \text{ поділивши на } \Delta t, \text{ маємо}$$

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = 0,6 - 0,2(m(t) + \alpha) \text{ і при } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} m'(t) = 0,6 - 0,2m(t), \\ m(0) = 0; \end{cases} \text{ – задача Коші для визначення } m(t).$$

Приклад 2.1.12. Довести, що функція  $y(x) = x \int_0^x \sin(t^2) dt$  є розв'язком

диференціального рівняння  $xy' - y = x^2 \sin x^2$

Використовуючи правило інтегрування добутку двох функцій та формулу для похідної від інтеграла зі змінною верхньою межею, знайдемо похідну

$$y'(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt + x \sin x^2. \text{ Тоді, підставляючи, переконуємося у}$$

справедливості тотожності  $xy' = x \int_0^x \sin(t^2) dt + x^2 \sin x^2 = y + x^2 \sin x^2$ .

Приклад 2.1.13. Довести, що для довільної  $C \in \mathbb{R}$  співвідношення  $y = \arctg(x + y) + C$  неявно визначає розв'язок диференціального рівняння  $(x + y)^2 y' = 1$  (тобто є інтегралом цього рівняння).

Знайдемо похідну від функції, що задана неявно. Для цього продиференціюємо це співвідношення, вважаючи, що  $y = y(x)$  є функцією від  $x$ :

$$y' = \frac{1}{1 + (x + y)^2} \cdot (1 + y')$$

і знайдемо  $y$  з отриманого співвідношення

$y' + y'(x + y)^2 = 1 + y' \Rightarrow y'(x + y)^2 = 1$ . Таким чином, ми отримали диференціальне рівняння, якому задовольняє функція  $y = y(x)$ .

Приклад 2.1.14. Довести, що параметрично задана функція  $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}; \end{cases}$  є

розв'язком диференціального рівняння  $(1 + xy)y' + y^2 = 0$ .

Насамперед зауважимо, що в рівнянні  $y' = \frac{dy}{dx}$  (!!!), а не  $\frac{dy}{dt}$ . Тому

знайдемо похідну від функції, що задана параметрично  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-e^{-t}}{te^t + e^t}$ .

Далі, підставляючи в рівняння, переконуємося у справедливості тотожності

$$(1 + t) \cdot \frac{-e^{-t}}{e^t(1 + t)} + e^{-2t} = -e^{-2t} + e^{-2t} = 0.$$

Приклад 2.1.15. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих  $x^2 + y^2 - Cx = 0$ .

При розв'язанні подібних задач потрібно продиференціювати рівняння сім'ї кіл по  $x$ , а потім вилучити з отриманих співвідношень константу  $C$ .

Реалізуючи цю програму, отримуємо

$$2x + 2yy' - C = 0 \Rightarrow C = 2x + 2yy' \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x(x + yy') = 0 \Rightarrow$$

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0 \text{ – шукане диференціальне рівняння.}$$

**Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

1. Довести, що функція  $y = x + C\sqrt{1+x^2}$  при будь-якому  $C \in R$  є розв'язком рівняння  $y' = \frac{xy+1}{x^2+1}$ .

2. Довести, що функція  $y = x \left( 1 + \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)$  є розв'язком рівняння  $xy' - y = xe^x$ .

3. Довести, що співвідношення  $y(x + \ln x) = 1 - y$  визначає розв'язок рівняння  $xy' = -y^2(x+1)$ .

4. Довести, що параметрично задана функція  $\begin{cases} x = C \cos t, \\ y = C \sin t; \end{cases}$  при довільному

$C \neq 0$  є розв'язком рівняння  $y' = -\frac{x}{y}$ .

5. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих:

а)  $y = \sin x + C \cos x$ ;      б)  $y = \sin(x + C)$ ;      в)  $x + y + C(1 - xy) = 0$ ;

*Домашнє завдання:*

1. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих:

а)  $y = e^{Cx}$ ;      б)  $y = Cx^3$ ;      в)  $y = (x - C)^3$ ;

г)  $y = \sin(x + C)$ ;      д)  $x^2 + Cy^2 = 2y$ ;      е)  $y^2 + Cx = x^3$ .

2. Скласти диференціальне рівняння кіл, що дотикаються одночасно до прямих  $y = 0$  і  $x = 0$  і розташовані в першій і третій координатних чвертях.

3. Скласти диференціальне рівняння всіх парабол, які проходять через початок координат  $(0,0)$  і для яких вісь  $Ox$  є віссю симетрії.

4. Знайти диференціальне рівняння кривих, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис є величиною сталою і дорівнює  $b$ .

5. Знайти диференціальне рівняння кривих, для яких відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною і нормалю, які проведені з довільної точки кривої, дорівнює  $2a$ .

## Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку

### 1. Найпростіше рівняння

Найпростіше диференціальне рівняння – це рівняння в якому похідна невідомої функції є відомою функцією, тобто рівняння вигляду

$$y' = f(x), \quad f \in C((a,b)). \quad (2.1.4)$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (2.1.4) достатньо скористатися оберненою операцією до операції диференціювання – операцією інтегрування. Тоді отримуємо загальний розв'язок рівняння (2.1.4)

$y(x) = \int f(s)ds + C$ . Використовуючи цей розв'язок бачимо, що для довільних початкових даних  $x_0 \in (a,b)$ ,  $y_0 \in R$  розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x), \\ y(x_0) = y_0; \end{cases} \quad (2.1.5)$$

існує, єдиний, задається формулою  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s)ds$  і визначений на всьому інтервалі  $(a,b)$ .

Таким чином, рівняння (2.1.2) завжди інтегрується в квадратурах і всі його розв'язки задаються формулою  $y(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds + C$ ,  $C \in R$  – довільна стала.

### 2. Автономне рівняння

Автономне рівняння – це рівняння, що явно не залежить від незалежної змінної, тобто це рівняння вигляду

$$y' = g(y). \quad (2.1.6)$$

**Теорема 2.1.1 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для автономного рівняння).** Нехай функція  $g(y)$  на деякому інтервалі  $(c,d)$  задовольняє умовам неперервності  $g \in C((c,d))$  та відмінності від нуля:  $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in (c,d)$ . Тоді для довільних початкових даних  $x_0 \in R$ ,  $y_0 \in (c,d)$  існує та єдиний розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = g(y), \\ y(x_0) = y_0; \end{cases} \quad (2.1.7)$$

що задається ( неявно ) формулою:

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = x - x_0 \quad (2.1.8)$$

і визначений у деякому околі точки  $x_0$ .

**Зауваження 2.1.1.** Якщо  $g(y^*) = 0$ , то  $y(x) \equiv y^*$  – розв’язок рівняння (2.1.6).

Таким чином, рівняння (2.1.6) завжди інтегрується в квадратурах і проінтегрувати (2.1.6), означає:

1) записати загальний розв’язок  $\int \frac{dy}{g(y)} = x + C, C \in R;$

2) записати розв’язки вигляду  $y(x) \equiv y^*$ , де  $g(y^*) = 0$  (якщо вони є).

Приклад 2.1.16. Проінтегрувати рівняння  $y' = ky$  та знайти розв’язок, що задовольняє умову  $y(x_0) = y_0$ .

За викладеним вище потрібно записати

$$\int \frac{dy}{ky} = x + C \Rightarrow \frac{1}{k} \ln|y| = x + C \Rightarrow \ln|y| = kx + kC$$

пропотенціюємо останнє співвідношення і згадаємо про сталий розв’язок

$$|y| = e^{kc} \cdot e^{kx} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Ce^{kx}, C \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = Ce^{kx}.$$

Отже, ми отримали загальний розв’язок  $y = Ce^{kx}, C \in R$ .

Знайдемо тепер розв’язок задачі Коші

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = Ce^{kx_0} \Rightarrow C = y_0 e^{-kx_0} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}.$$

Приклад 2.1.17. Проінтегрувати рівняння  $y' = y^2$  та знайти розв’язок задачі Коші  $y(2) = 0$ .

Знайдемо спочатку загальний розв’язок

$$\int \frac{dy}{y^2} = x + C \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x+C}, C \in R, \\ y = 0. \end{cases}$$

Задовольняючи початкову умову, отримуємо розв'язок задачі Коші  $y \equiv 0$ .

### 3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Узагальненням рівнянь (2.1.2) та (2.1.6) є рівняння з відокремлюваними змінними вигляду

$$y' = f(x)g(y). \quad (2.1.9)$$

**Теорема 2.1.2 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння з відокремлюваними змінними).** Нехай функції  $f(x)$  та  $g(y)$  задовольняють умовам  $f \in C(a,b)$ ,  $g \in C(c,d)$ ,  $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in (c,d)$ . Тоді для довільних початкових даних  $x_0 \in (a,b)$ ,  $y_0 \in (c,d)$  існує та єдиний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y), \\ y(x_0) = y_0; \end{cases} \quad (2.1.10)$$

що задається (неявно) формулою:

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (2.1.11)$$

і визначений у деякому околі точки  $x_0$ .

*Зауваження.* Якщо  $g(y^*) = 0$ , то  $y(x) \equiv y^*$  – розв'язок рівняння (2.1.9).

Таким чином, рівняння (2.1.9) завжди інтегрується в квадратурах і проінтегрувати (2.1.9) означає:

1) "відокремити" змінні, тобто формально записати рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx;$$

2) записати загальний розв'язок:  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, C \in R$ ;

3) записати розв'язки  $y(x) = y^*$ , де  $g(y^*) = 0$  (якщо вони є).

Приклад 2.1.18. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = 2x \cos^2 y$  та розв'язок, який задовольняє початкову умову  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ .

Відокремлюємо змінні

$$y' = 2x \overbrace{\cos^2 y}^{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = 2x dx.$$

Оскільки  $\cos^2 y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , то  $y \equiv \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in Z$  – це розв'язки нашого рівняння. Інші розв'язки знаходимо після інтегрування

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int 2x dx + C \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = x^2 + C, & C \in R; \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z. \end{cases} \quad \text{– загальний розв'язок.}$$

Задовольнимо тепер початкову умову

$y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 = 0 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} y = x^2 + 1$  – розв'язок задачі Коші (в неявній формі).

**Твердження 2.1.1. Рівняння**

$$y' = g(ax + by + c), \quad b \neq 0 \quad (2.1.12)$$

завжди інтегрується в квадратурах. А саме, заміна  $z = z(x) = ax + by + c$ , де  $z = z(x)$  – нова шукана функція зводить рівняння (9) до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно, якщо  $z = z(x) = ax + by + c$ , то  $z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$  і,

підставляючи в (2.1.12), отримуємо  $\frac{z' - a}{b} = g(z) \Rightarrow z' = bg(z) + a$  –

автономне рівняння.

При цьому, якщо  $g(z^*) = -\frac{a}{b}$ , то  $y = \frac{z^* - ax - c}{b}$  – теж розв'язок (2.1.12).

Приклад 2.1.19. Розв'язати рівняння  $y' = (x + y + 1)^2$ .

Запровадимо заміну  $z = x + y + 1 \Rightarrow z' = 1 + y' \Rightarrow y' = z' - 1$  після чого отримуємо рівняння  $z' - 1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1$  і, відокремлюючи змінні, знаходимо  $\frac{dz}{z^2 + 1} = dx \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + C \Rightarrow \operatorname{arctg}(x + y + 1) = x + C, C \in \mathbb{R}$  – загальний розв'язок.

#### 2.1.4. Якісний аналіз автономного рівняння

Поведінку розв'язків автономного рівняння (2.1.6) можна описати не вдаючись до відшукування точних розв'язків. А саме справедливе твердження.

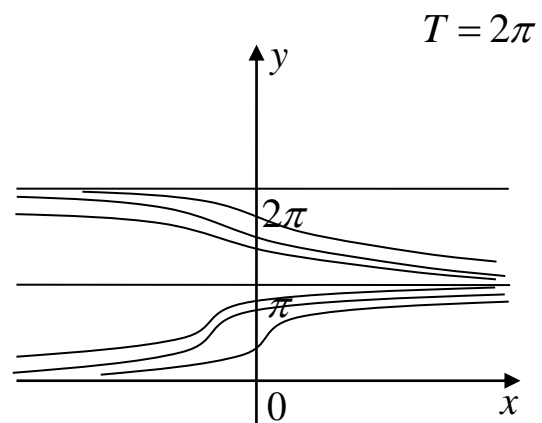
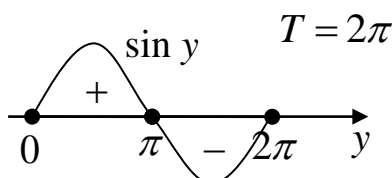
**Твердження 2.1.2.** Нехай в рівнянні (2.1.6)  $g \in C^{(1)}([c, d])$ ,  $g(c) = g(d) = 0$ ,  $g(y) > 0$  (або  $g(y) < 0$ )  $\forall y \in (c, d)$ . Тоді для будь-якого розв'язку рівняння (2.1.6)  $y = y(x)$  з початковою умовою  $y(0) = y_0 \in (c, d)$  справедливі граничні співвідношення  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = d$  (або  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = d$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c$ ).

Покажемо, як, використовуючи дане твердження, можна досліджувати схематичну поведінку розв'язків автономних рівнянь.

Приклад 2.1.20. Схематично зобразити поведінку розв'язків рівняння  $y' = \sin y$ .

$\sin y = 0 \Rightarrow y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$  – стаціонарні розв'язки рівняння.

Визначимо знак правої частини рівняння і скористаємося твердженням



Приклад 2.1.21. (аналіз моделі одновидової популяції)

Нехай маса популяції  $x(t)$  описується рівнянням:

$$\dot{x}(t) = kx(t) - lx^2(t) - \lambda \quad (2.1.13)$$

де  $x(t) \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$  – зовнішнє вилучення (керуючий параметр).

**1)** при  $\lambda = 0$   $g(x) = kx - lx^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_*^- = 0 \\ x_*^+ = \frac{k}{l} \end{cases}$  – положення рівноваги

$g(x) > 0$  при  $x \in (x_*^-, x_*^+)$  та  $g(x) < 0$  при  $x \in (x_*^+, +\infty)$ . Тому за твердженням для довільного початкового стану  $x(0) > 0$   $x(t) \rightarrow x_*^+$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .

Отже, величина популяції стабілізується до значення  $x_*^+$  незалежно від початкової кількості  $x(0) > 0$ .

Нехай тепер  $\lambda > 0$ :

$$g(x) = kx - lx^2 - \lambda = 0 \Rightarrow lx^2 - kx + \lambda = 0 \Rightarrow D = k^2 - 4\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{k^2}{4l}$$

маємо декілька випадків.

**2)** при  $\lambda \in (0, \lambda^*) \Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_*^- = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4\lambda l}}{2l}, \\ x_*^+ = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4\lambda l}}{2l}; \end{cases}$

$g(x) > 0$  при  $x \in (x_*^-, x_*^+)$  та  $g(x) < 0$  при  $x \in (0, x_*^-) \cup (x_*^+, +\infty)$ . Тому при  $x(0) > x_*^-$  величина популяції стабілізується до значення  $x_*^+$ ; при  $x(0) < x_*^-$  популяція зникає за скінченний час.

**3)** при  $\lambda = \lambda^* \Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x_*^+ = x_*^- = \frac{k}{2l}$

$g(x) < 0$  при  $x \in \left(0, \frac{k}{2l}\right) \cup \left(\frac{k}{2l}, +\infty\right)$ , тому при  $x(0) > \frac{k}{2l}$  величина популяції

стабілізується до значення  $\frac{k}{2l}$ ; при  $x(0) < \frac{k}{2l}$  – зникає за скінченний час.

**4)** при  $\lambda > \lambda^*$ :  $g(x) \neq 0$ ,  $g(x) < 0$ , тому для довільної початкової кількості  $x(0) > 0$  популяція зникне за скінчений час.

*Зауваження.* Якісну зміну поведінки при проходженні параметром  $\lambda$  значення  $\lambda^*$  називають **біфуркацією**.

**Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати наступні рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову:

1.  $x(1 + y^2) + y(1 + x^2)y' = 0$ ,  $y(1) = 2$ ;

2.  $\sqrt{y^2 + 1} = xy y'$ ;

3. 
$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \\ y(2) = 0; \end{cases}$$

4.  $y' = xy^2 + 2xy$ ;

5. 
$$\begin{cases} e^x - (1 + e^x)yy' = 0, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

***Домашнє завдання:***

Розв'язати наступні рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову:

1.  $xy + (1 + x)y' = 0$ ;

2. 
$$\begin{cases} xy' + y = y^2, \\ y(1) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

3.  $2x^2 yy' + y^2 = 2$ ;

4.  $y' = \cos(y - x)$ ;

5.  $y' = y + 2x - 3$ ;

## Лекція 2\_2

### Однорідне диференціальне рівняння

Однорідне рівняння – це рівняння вигляду

$$y' = f(x, y),$$

де  $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ .

**Твердження 2.2.1.** Однорідне рівняння завжди інтегрується в квадратурах. А саме заміна  $y = xz$ , де  $z = z(x)$  – нова невідома функція зводить однорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно, при заміні  $y = xz$ :  $y' = (xz)' = xz' + z$ ,  $y = \frac{z}{x}$ . Отже,

$xz' + z = \varphi(z) \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(\varphi(z) - z)$  – рівняння з відокремлюваними змінними.

**Зауваження 2.2.1.** Якщо існує  $z^*$ :  $\varphi(z^*) = z^*$ , то прямі  $y = z^* x$  – також є розв'язками однорідного рівняння.

**Приклад 2.2.1.** Розв'язати рівняння  $y' = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$ .

$f(x, y) = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$  однорідне рівняння.

Заміна  $y = xz \Rightarrow y' = (xz)' = xz' + z$ ,  $y = \frac{z}{x} \Rightarrow xz' + z = \frac{z}{x} + z^2 e^{-\frac{1}{z}}$ , або

$x \frac{dz}{dx} = z^2 e^{-\frac{1}{z}}$ , відокремлюємо змінні:  $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} dz = \frac{dx}{x}$  ( $z = 0$  не входить до області

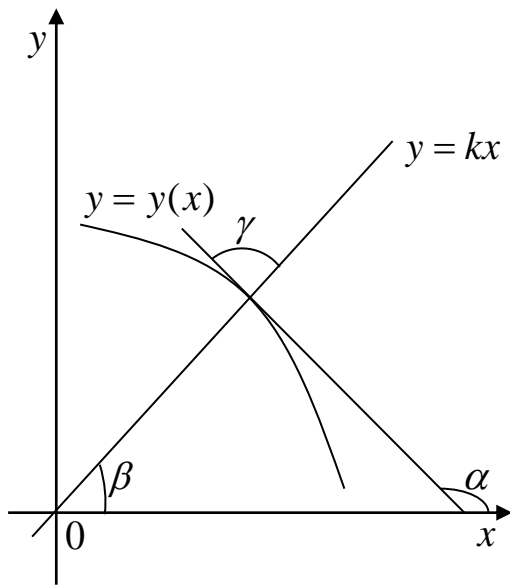
визначення рівняння) і після інтегрування отримуємо

$\int \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int e^{\frac{1}{z}} d\left(\frac{1}{z}\right) = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{\frac{1}{z}} = \ln|x| + C$ , повертаючись до

початкової функції, знаходимо остаточно відповідь  $\ln|x| + e^{\frac{x}{y}} = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Приклад 2.2.2. Знайти під яким кутом інтегральні криві однорідного

рівняння  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  перетинають пряму  $y = kx$ .



Нехай  $y = y(x)$  – інтегральна крива заданого однорідного диференціального рівняння. Тоді з малюнку знаходимо, що

шуканий кут  $\gamma = 180^\circ - (\beta + 180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$ . Тому  $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ , і оскільки з геометричного

змісту похідної  $\operatorname{tg} \alpha = y'(x) = \varphi\left(\frac{y(x)}{x}\right) =$

$= \varphi(k)$ ,  $\operatorname{tg} \beta = k$ , то отримуємо  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varphi(k) - k}{1 + k\varphi(k)}$ . Беручи до уваги той факт,

що кутом між двома кривими вважають гострий кут, остаточно маємо

$$\operatorname{tg} \gamma = \left| \frac{\varphi(k) - k}{1 + k\varphi(k)} \right|.$$

Приклад 2.2.3. Довести, що однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними переходом до полярних координат.

Розглянемо однорідне рівняння  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$  і перейдемо до полярних

координат, покладаючи  $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi; \end{cases}$  і вважаючи, що  $r = r(\varphi)$ . Тоді з одного

боку маємо  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$ , з іншого боку  $g\left(\frac{y}{x}\right) =$

$= g\left(\frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi}\right) = g(\operatorname{tg} \varphi)$ . Прирівнюючи ліву і праву частини маємо

$$\frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} = g(\operatorname{tg} \varphi),$$

$$r' \sin \varphi + r \cos \varphi = g(\operatorname{tg} \varphi)(r' \cos \varphi - r \sin \varphi),$$

$$r'(\sin \varphi - g(\operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi) = -r(\cos \varphi + g(\operatorname{tg} \varphi) \sin \varphi),$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{\cos \varphi + g(\operatorname{tg} \varphi) \sin \varphi}{g(\operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi} - \text{рівняння з відокремленими змінними.}$$

### 1. Узагальнене однорідне рівняння

**Твердження 2.2.2.** Узагальнено однорідне рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

для довільних  $a_i, b_i, c_i \in R, i = 1, 2$ ; інтегрується в квадратурах.

Опишемо метод інтегрування. Можливі два випадки:

**1)**  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ , що можливо тоді і лише тоді, коли  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ , але тоді

$$y' = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = g(a_2 x + b_2 y) \text{ і ми отримали рівняння, що заміною}$$

$z = z(x) = a_2 x + b_2 y$  зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

**2)**  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  у цьому випадку робимо заміну  $\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = z + \beta; \end{cases}$  де  $t$  – нова

незалежна змінна,  $z = z(t)$  – нова невідома функція, а числа  $\alpha, \beta$  вибираються

як розв'язки системи  $\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta = -c_1, \\ a_2 \alpha + b_2 \beta = -c_2; \end{cases}$  (такі  $\alpha, \beta$  існують і єдині, бо

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0). \text{ Тоді}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + \overbrace{a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1}^{=0}}{a_2 t + b_2 z + \overbrace{a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2}^{=0}}\right) = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{z}{t}}{a_2 + b_2 \frac{z}{t}}\right) = g\left(\frac{z}{t}\right),$$

тобто ми отримали однорідне рівняння.

Приклад 2.2.4. Розв'язати рівняння  $y' = 2\left(\frac{y+1}{x+y-2}\right)^2$ .

Оскільки  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , то впровадимо заміну  $\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = z + \beta; \end{cases}$  де  $\alpha, \beta$

знаходяться з системи  $\begin{cases} 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = -1, \\ 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = 2; \end{cases}$  тобто  $\begin{cases} \beta = -1, \\ \alpha = 2 - \beta = 3; \end{cases}$  і остаточно

заміна  $\begin{cases} x = t + 3, \\ y = z - 1. \end{cases}$  Тоді отримуємо однорідне рівняння  $\frac{dz}{dt} = 2\left(\frac{z}{t+z}\right)^2$ , що

розв'язується за допомогою заміни  $z = tu, u = u(t) = \frac{z}{t} \Rightarrow z' = tu' + u \Rightarrow$

$$tu' + u = 2\left(\frac{ut}{t+ut}\right)^2 = \frac{2u^2}{(1+u)^2},$$

$$tu' = \frac{2u^2}{(1+u)^2} - u = \frac{2u^2 - u(1+2u+u^2)}{(1+u)^2} = \frac{-u-u^3}{(1+u)^2},$$

$$\frac{(1+u)^2 du}{u+u^3} = -\frac{dt}{t}, \quad (u=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow y=-1 \text{ - розв'язок})$$

$$\int \frac{(1+2u+u^2)du}{u(1+u^2)} = -\int \frac{dt}{t},$$

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{1+u^2}\right) du = -\ln|t| + C,$$

$$\ln|u| + \ln|t| + 2\operatorname{arctg} u = C,$$

$ute^{\operatorname{arctg} u} = C$  і повертаючись до початкових функцій знаходимо  $ze^{\operatorname{arctg} \frac{z}{t}} = C$ , і

остаточно  $(y+1)e^{\operatorname{arctg} \frac{y+1}{x-3}} = C, C \in R$ .

## 2. Квазіоднорідне рівняння

Квазіоднорідне рівняння – це рівняння вигляду

$$y' = f(x, y),$$

де для довільного додатного  $t > 0$   $f(tx, t^\sigma y) = t^{\sigma-1} f(x, y)$  для деякого  $\sigma \in R$ .

**Твердження 2.2.3.** Квазіоднорідне рівняння завжди інтегрується в квадратурах. А саме заміна  $y = zx^\sigma$ , де  $z = z(x)$  – нова невідома функція, зводить квазіоднорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно, зробимо заміну  $y = zx^\sigma$  у квазіоднорідному рівнянні. Оскільки  $y = zx^\sigma$ , то  $y' = z'x^\sigma + \sigma zx^{\sigma-1}$ , і після підстановки, використовуючи умову квазіоднорідності, отримуємо

$$z'x^\sigma + \sigma zx^{\sigma-1} = f(x \cdot 1, x^\sigma z) = x^{\sigma-1} f(1, z),$$

$$z'x + \sigma z = f(1, z),$$

$$z' = \frac{1}{x} (f(1, z) - \sigma z) \text{ – рівняння з відокремлюваними змінними.}$$

*Зауваження.* Якщо існує  $z^*$ :  $f(1, z^*) = \sigma z^*$ , то функція  $y = z^* x^\sigma$  – також є розв'язком квазіоднорідного рівняння.

Приклад 2.2.5. З'ясувати, при яких значеннях  $p, q$  рівняння  $y' = ax^p + by^q$  буде квазіоднорідним.

Розглянемо функцію  $f(x, y) = ax^p + by^q$ . Тоді умова квазіоднорідності вірна, якщо  $f(tx, t^\sigma y) = at^p x^p + bt^{q\sigma} y^q \stackrel{?}{=} t^{\sigma-1} (ax^p + by^q) = at^{\sigma-1} x^p + bt^{\sigma-1} y^q$ , а

це можливо при 
$$\begin{cases} t^p = t^{\sigma-1}, \\ t^{q\sigma} = t^{\sigma-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = p+1, \\ p = (p+1)q. \end{cases}$$

Отже, якщо  $p = (p+1)q$ , то рівняння є квазіоднорідним з показником  $\sigma = p+1$  і інтегрується в квадратурах заміною  $y = zx^{p+1}$ . Зокрема, умова на  $p, q$  виконана при  $p = -2, q = 2$ , тобто рівняння  $y' = ax^{-2} + by^2$  завжди інтегрується в квадратурах.

Приклад 2.2.6. Розв'язати рівняння  $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ .

Згідно прикладу 5 це рівняння є квазіоднорідним з показником  $\sigma = -1$ .

Впровадимо заміну  $y = zx^\sigma = zx^{-1} = \frac{z}{x}$ . Тоді  $y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$  і, підставляючи

в рівняння, отримуємо

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow xz' - z = z^2 - 2 \Rightarrow xz' = z^2 + z - 2 \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = (z+2)(z-1).$$

Далі відокремлюємо змінні:  $\frac{3dz}{(z+2)(z-1)} = \frac{3dx}{x}$

(оскільки  $\begin{cases} z \equiv 1, \\ z \equiv -2; \end{cases}$  – розв'язки, то  $\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y = -\frac{2}{x}; \end{cases}$  розв'язки вихідного рівняння)

та інтегруємо  $\int \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right) dz = 3 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z-1| - \ln|z+2| = 3 \ln|x| + C.$

Після потенціювання  $\frac{z-1}{z+2} = Cx^3$  і повернення до вихідної функції  $z = xy$

знаходимо остаточну відповідь  $\begin{cases} \frac{xy-1}{xy+2} = Cx^3, C \in R; \\ xy = -2. \end{cases}$

*Зауваження.* При дробовому  $\sigma$  з парним знаменником зазначена вище заміна для квазіоднорідного рівняння  $y = zx^\sigma$  справедлива лише для  $x > 0$ , для  $x < 0$  потрібно застосовувати заміну  $y = z(-x)^\sigma$ .

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати наступні рівняння:

1.  $y' = \frac{y \cos \frac{y}{x} - x}{x \cos \frac{y}{x}}$ ;

2.  $y' = \frac{y-x}{y+x}$ ;

3.  $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ ;

$$4. y' = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3};$$

$$5. y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y + 2x}{x + 1}\right);$$

**Домашнє завдання:**

Розв'язати наступні рівняння:

$$1. (x + 2y)dx - xdy = 0;$$

$$2. 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2);$$

$$3. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

$$4. xy' = y - xe^{\frac{y}{x}};$$

$$5. (2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0;$$

### **Лекція 2\_3. Лінійні рівняння. Рівняння Бернулля**

Лінійне неоднорідне рівняння (ЛНР) першого порядку має вигляд

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (2.3.1)$$

де  $a(\cdot), b(\cdot) \in C((\alpha, \beta))$ .

Поряд з неоднорідним рівнянням (2.3.1) завжди розглядають відповідне лінійне однорідне рівняння (ЛОР) першого порядку.

$$y' = a(x)y. \quad (2.3.2)$$

Рівняння (2.3.2) є рівнянням з відокремлюваними змінними і його легко розв'язати.

**Твердження 2.3.1.** *Всі розв'язки лінійного однорідного рівняння (2.3.2) задаються функцією*

$$y(x) = Ce^{\int a(x)dx}, \quad C \in R. \quad (2.3.3)$$

Приклад 2.3.1. Розв'язати рівняння  $y' = ky$ .

За формулою (2.3.3) знаходимо  $y(k) = Ce^{kx}$ ,  $C \in R$  – всі розв'язки.

**Наслідок 2.3.1.** Для довільних початкових даних  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $y_0 \in R$  задача Коші

$$\begin{cases} y' = a(x)y, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

має єдиний розв'язок

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}, \quad (2.3.5)$$

визначений на всьому інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

**Твердження 2.3.2.** Лінійне рівняння (2.3.1) завжди інтегрується в квадратурах.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (2.3.1) застосуємо **метод варіації довільної сталої**.

Відповідно до цього методу будемо виходити з вигляду загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (2.3.2):

$$y_{з.о.}(x) = Ce^{\int a(x) dx}$$

і шукати розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1) у такому ж вигляді:

$$y(x) = Ce^{\int a(x) dx}, \quad (2.3.6)$$

де  $C = C(x)$  – поки що невідома функція. Для знаходження цієї функції підставимо (2.3.6) в (2.3.1):

$$y'(x) = C'(x)e^{\int a(x) dx} + C(x)a(x)e^{\int a(x) dx} = a(x)C(x)e^{\int a(x) dx} + b(x)$$

Таким чином, формула (2.3.6) визначає розв'язок (1) тоді і лише тоді, коли  $C'(x) = b(x)e^{-\int a(x) dx}$ , тобто  $C(x) = \int b(x)e^{-\int a(x) dx} + C$ .

Отже, ми отримали загальний розв'язок рівняння (1)

$$y(x) = e^{\int a(x) dx} \left( C + \int b(x)e^{-\int a(x) dx} dx \right), \quad C \in R. \quad (2.3.7)$$

**Приклад 2.3.2.** Розв'язати рівняння  $y' = 2xy + 3x^2 - 2x^4$ .

Це рівняння є лінійним неоднорідним, відповідне однорідне рівняння має вигляд  $y' = 2xy$ . Загальний розв'язок цього лінійного однорідного рівняння

згідно (2.3.3):  $y_{з.о.}(x) = Ce^{\int 2x dx} = Ce^{x^2}$ , а тому відповідно до методу варіації довільної сталої будемо шукати розв'язок вихідного рівняння у вигляді  $y(x) = C(x)e^{x^2}$ . Підставимо в рівняння

$$y'(x) = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} = 2xC(x)e^{x^2} + 3x^2 - 2x^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = e^{-x^2} (3x^2 - 2x^4) \Rightarrow C(x) = \int e^{-x^2} (3x^2 - 2x^4) dx + C = x^3 e^{-x^2} + C.$$

Отже,  $y(x) = e^{x^2} (x^3 e^{-x^2} + C) = Ce^{x^2} + x^3$ ,  $C \in R$  – загальний розв'язок.

З формули (2.3.7) випливає кілька наслідків.

**Наслідок 2.3.2.** Якщо  $a(\cdot), b(\cdot) \in C((\alpha, \beta))$ , то для будь-яких початкових даних  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $y_0 \in R$  задача Коші

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0; \end{cases} \quad (2.3.8)$$

має єдиний розв'язок

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} \left( y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t a(s) ds} dt \right), \quad (2.3.9)$$

визначений на всьому  $(\alpha, \beta)$ .

**Наслідок 2.3.3.** Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.3.1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2.3.2) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (2.3.1).

$$y_{з.н.}(x) = y_{з.о.}(x) + y_{ч.н.}(x), \quad (2.3.10)$$

причому частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння можна брати будь-який.

Використовуючи наслідок 2.3.3 іноді можна розв'язати лінійне неоднорідне рівняння не вдаючись до методу варіації довільних сталих.

Приклад 2.3.3. Розв'язати рівняння  $y' = y - 1$ .

За прикладом 2.3.1:  $y_{з.о.} = Ce^x$ , також не важко помітити, що  $y_{ч.н.} = 1$ , тому за наслідком 2.3.3 отримуємо загальний розв'язок  $y(x) = Ce^x + 1$ ,  $C \in R$ .

## 1. Лінійне періодичне рівняння

Розглянемо лінійне рівняння

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (2.3.11)$$

з періодичними коефіцієнтами  $a(\cdot), b(\cdot) \in C(\mathbb{R})$ ,  $a(x+T) \equiv a(x)$ ,  $b(x+T) \equiv b(x)$ .

Виникає питання про  $T$ -періодичні розв'язки (2.3.11).

У загальному випадку рівняння (2.3.11) з періодичними коефіцієнтами може мати один періодичний розв'язок, безліч періодичних розв'язків або не мати їх зовсім. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 2.3.4.  $y' = 1$

У цьому випадку загальний розв'язок  $y = x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  і рівняння не має жодного періодичного розв'язку.

Приклад 2.3.5.  $y' = y$

Оскільки загальний розв'язок має вигляд  $y = Ce^x$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; то  $y \equiv 0$  – єдиний періодичний розв'язок.

Приклад 2.3.6.  $y' = \cos x$

Знайшовши загальний розв'язок  $y = \sin x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ; бачимо, що всі розв'язки цього рівняння є періодичними.

Введемо до розгляду величину  $\lambda = e^{\int_0^T a(s) ds}$ , що називається **мультиплікатором**.

**Теорема 2.3.1 (про періодичність розв'язку лінійного рівняння).**

Якщо  $\lambda \neq 1$ , то рівняння (2.3.11) має єдиний  $T$ -періодичний розв'язок.

Якщо  $\lambda = 1$ , то за виконання умови  $\int_0^T e^{-\int_0^t a(s) ds} b(t) dt = 0$  будь-який

розв'язок рівняння (2.3.11) є  $T$ -періодичним, а при невиконанні цієї умови рівняння (2.3.11) не має  $T$ -періодичних розв'язків.

## 2. Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x)y^\lambda, \quad (2.3.11)$$

де  $a(\cdot), b(\cdot) \in C((\alpha, \beta))$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Твердження 2.3.2.** Для довільного значення параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$  рівняння Бернуллі завжди інтегрується в квадратурах.

Дійсно, при  $\lambda = 0$  рівняння (2.3.11) є лінійним, при  $\lambda = 1$  – це рівняння з відокремленими змінними.

Нехай  $\lambda \neq 0, 1$ . Тоді застосуємо **метод Бернуллі**. Відповідно до якого будемо шукати розв'язок рівняння (2.3.11) у вигляді:

$$y(x) = u(x)v(x),$$

де  $u(\cdot), v(\cdot)$  – невідомі функції. Це дозволить нам вибрати одну з функцій  $u(\cdot)$  чи  $v(\cdot)$  зручним чином. Підставимо представлення для  $y$  у рівняння (2.3.11):

$$uv' + uv' = auv + b(uv)^\lambda \Rightarrow u'v + \underbrace{u(v' - av)}_{=0} = b(uv)^\lambda,$$

і виберемо функцію  $v = v(x)$  так, аби перетворити на нуль вираз у дужках

$$v' - av = 0, \text{ з цього рівняння } v(x) = e^{\int a(x)dx} \neq 0. \text{ Тоді } u'e^{\int a(x)dx} = be^{\lambda \int a(x)dx} u^\lambda.$$

Отже, ми отримали  $u'(x) = b(x)e^{(\lambda-1)\int a(x)dx} u^\lambda(x)$  – рівняння з відокремленими змінними.

Знайшовши звідси  $u(x) = \varphi(x, c)$ , одержуємо  $y(x) = e^{\int a(x)dx} \varphi(x, c)$  – загальний розв'язок (2.3.11).

Крім того, якщо  $\lambda > 0$ , то рівняння (2.3.11) має ще розв'язок  $y(x) = 0$ .

Зауважимо, що описаний вище метод Бернуллі можна застосовувати також для розв'язання лінійних рівнянь.

Приклад 2.3.7. Розв'язати рівняння  $y' + \frac{1}{x}y = y^2 \frac{\ln x}{x}$ .

Це рівняння є рівнянням Бернуллі ( $\lambda = 2$ ).

$$\begin{aligned}
y = uv &\Rightarrow u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = u^2v^2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow u'v + u \underbrace{\left(v' + \frac{v}{x}\right)}_{=0} = u^2v^2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow v = \frac{C}{x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \\
&\Rightarrow u' \frac{1}{x} = u^2 \frac{1}{x^2} \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx + C \\
\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \ln x - \int \left(-\frac{1}{x} \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C \Rightarrow u(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}.
\end{aligned}$$

Отже, отримуємо загальний розв'язок

$$\begin{cases}
y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}, & C \in R; \\
y(x) = 0.
\end{cases}$$

*Зауваження.* Рівняння Бернуллі – це вже нелінійне рівняння, тому його розв'язки не обов'язково існують на всьому інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

### 3. Рівняння Ріккати

Це рівняння, що має вигляд

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (2.3.12)$$

де  $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot) \in C((\alpha, \beta))$ .

*Зауваження.* Рівняння Ріккати (2.3.12) не завжди інтегрується в квадратурах. Лінійне рівняння та рівняння Бернуллі при  $\lambda = 2$  – часткові випадки рівняння Ріккати.

**Твердження 2.3.3.** *Якщо відомий  $y = \tilde{y}(x)$  – частинний розв'язок рівняння (2.3.12), то рівняння Ріккати (2.3.12) інтегрується в квадратурах. А саме, заміна  $y = z + \tilde{y}$ , де  $z = z(x)$  – нова невідома функція зводить рівняння Ріккати до рівняння Бернуллі, яке вже інтегрується в квадратурах.*

$$\text{Дійсно, } y = z + \tilde{y} \Rightarrow y' = z' + \tilde{y}' = p(x)(z + \tilde{y})^2 + q(x)(z + \tilde{y}) + r(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow z + \tilde{y}' = p(x)z^2 + 2p(x)z\tilde{y} + p(x)\tilde{y}' + q(x)r + q(x)\tilde{y} + r(x)$  і, використовуючи той факт, що  $\tilde{y}$  – розв'язок (2.3.12), отримуємо  $z' = z(2p\tilde{y} + q) + pz^2$  – рівняння Бернуллі.

Нехай тепер  $\begin{cases} z = \varphi(x, c), \\ z = 0; \end{cases}$  – загальний розв'язок. Тоді  $\begin{cases} y = \varphi(x, c) + \tilde{y}, \\ y = \tilde{y}; \end{cases}$  –

загальний розв'язок рівняння Ріккати.

Приклад 2.3.8. Звести до рівняння Бернуллі  $y' = -y^2 + x^2 - 2x$ .

Будемо шукати частинний розв'язок рівняння у вигляді  $y(x) = ax + b$ .

Тоді, підставляючи, отримуємо

$$a = -a^2x^2 - b^2 - 2abx + x^2 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1, \\ 2ab = -2, \\ b^2 = -a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \tilde{y}(x) = -x + 1.$$

Далі впровадимо заміну  $y = z - x + 1 = z - (x - 1)$ . Маємо

$$z' - 1 = -(z - (x + 1))^2 + x^2 - 2x,$$

$$z' - 1 = -(z^2 + x^2 - 2x + 1 - 2z(x - 1)) + x^2 - 2x,$$

$$z' - 1 = -z^2 - x^2 + 2x - 1 + 2zx - 2z + x^2 - 2x,$$

$$z' = -z^2 + 2zx - 2z \Rightarrow z' = 2z(x - 1) - z^2 \text{ – рівняння Бернуллі.}$$

#### 4. Рівняння Ріккати спеціального вигляду

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, \quad a, b, \alpha \in R; \quad (2.3.13)$$

інтегрується в квадратурах тоді і тільки тоді, коли або  $\alpha = -2$  (у цьому випадку

маємо квазіоднорідне рівняння), або  $\alpha = -\frac{4n}{2n-1}$ ,  $n \in Z$ .

#### Канонічне рівняння Ріккати

$$y' = y^2 + Q(x). \quad (2.3.14)$$

**Твердження 2.3.4.** Рівняння Ріккати (2.3.12) завжди можна звести до канонічного вигляду (2.3.14).

Зведення здійснюється за допомогою послідовності заміни.

Спочатку робимо заміну  $y = \alpha(x)z$ , де  $z = z(x)$  – нова невідома функція, а функцію  $\alpha(x)$  вибираємо так, аби перетворити на 1 коефіцієнт при  $z^2$ :

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' = p(x)\alpha^2(x)z^2 + q(x)\alpha(x)z + r(x),$$

$$z' = p(x)\alpha(x)z^2 + \frac{q(x)\alpha(x) - \alpha'(x)}{\alpha(x)}z + \frac{r(x)}{\alpha(x)},$$

отже, при  $\alpha(x) = \frac{1}{p(x)}$  маємо:  $z' = z^2 + \tilde{q}(x)z + \tilde{r}(x)$ .

Далі проводимо заміну  $z = u + b(x)$ , де  $u = u(x)$  – нова невідома функція, а за допомогою вибору  $b(x)$  перетворюємо на 0 коефіцієнт при  $u$ :

$$u' + b'(x) = u^2 + 2ub(x) + b^2(x) + \tilde{q}(x)(u + b(x)) + \tilde{r}(x),$$

$$u' = u^2 + u(2b(x) + \tilde{q}(x)) + b^2(x) + \tilde{q}(x)b(x) + \tilde{r}(x) - b'(x),$$

тому при  $b(x) = -\frac{\tilde{q}(x)}{2}$  маємо  $u' = u^2 + Q(x)$ .

Зведення до канонічного вигляду іноді дозволяє проінтегрувати рівняння Ріккати.

Приклад 2.3.9. Розв'язати рівняння  $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$ .

Зведемо задане рівняння Ріккати до канонічного вигляду.

У нас  $p(x) = 4$ ,  $q(x) = -4x^2$ ,  $r(x) = x^4 + x + 4$ , тому ми маємо зробити заміни:

$$y = \frac{1}{p(x)}z = \frac{1}{4}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}z' = \frac{1}{4}z^2 - 4x^2 \frac{1}{4}z + x^4 + x + 4 \Rightarrow z' = z^2 - 4x^2z + 4x^4 + 4x + 16;$$

$$z = u + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' + b' = u^2 + 2ub + b^2 - 4x^2u - 4x^2b + 4x^4 + 4x + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = u^2 + u(2b - 4x^2) + b^2 - 4x^2b - b' + 4x^4 + 4x + 16 \Rightarrow b(x) = 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = u^2 + 4x^4 - 4x^2 \cdot 2x^2 - 4x + 4x^4 + 4x + 16.$$

Отже, ми одержали рівняння  $u' = u^2 + 16$ , де  $u = z - 2x^2 = 4y - 2x^2$ .

Отримане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними і може бути легко розв'язане:

$$\frac{du}{u^2 + 16} = dx \Rightarrow \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{u}{4} = x + C \Rightarrow \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( y - \frac{x^2}{2} \right) = x + C, C \in R \quad -$$

загальний розв'язок.

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати наступні рівняння, якщо потрібно, знайти розв'язок, що задовольняє початкові умови. Дати відповідь на питання:

1.  $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3;$

2. 
$$\begin{cases} (2x+1)y' = 4x+2y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Знайти проміжок існування розв'язку.

3.  $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$

Знайти розв'язок для якого  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1.$

4.  $y' = \frac{y}{3x - y^2};$

5.  $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y;$

### ***Домашнє завдання:***

Розв'язати рівняння:

1.  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$

2.  $y' = y + \frac{e^x}{x};$

3.  $(xy' - 1) \ln x = 2y;$

4.  $(x+1)(y' + y^2) = -y;$

5.  $xy^2 y' = x^2 + y^3;$

**Лекція 2.4. Рівняння у повних диференціалах. Диференціальні рівняння  
n-го порядку**

Розглядаємо рівняння в симетричній формі

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.4.2)$$

де  $M, N \in C(D)$ ,  $D \subseteq R$ ;

$$\forall (x, y) \in D: |M(x, y)| + |N(x, y)| \neq 0. \quad (2.4.2)$$

**Означення 2.4.1.** *Інтегральною кривою рівняння (1) називається крива*

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha, \beta); \end{cases} \quad \text{де } x(\cdot), y(\cdot) \in C^{(1)}((\alpha, \beta)), \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \quad |\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| \neq 0, \text{ для якої } \forall t \in (\alpha, \beta)$$

$$M(x(t), y(t))\dot{x}(t) + N(x(t), y(t))\dot{y}(t) \equiv 0, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (2.4.3)$$

З означення випливає, що в околі довільної точки  $(x_0, y_0) \in D$  інтегральна крива рівняння (1) є або інтегральною кривою рівняння:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (\text{якщо } N(x_0, y_0) \neq 0), \quad (2.4.4)$$

або інтегральною кривою рівняння:

$$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (\text{якщо } M(x_0, y_0) \neq 0), \quad (2.4.5)$$

і навпаки, будь-яка інтегральна крива рівняння (2.4.4) або (2.4.5) є інтегральною кривою рівняння (2.4.1).

**Означення 2.4.2.** *Рівняння (2.4.1) називається рівнянням в повних диференціалах, якщо знайдеться така функція двох змінних*

$$U = U(x, y) \in C^{(1)}(D), \quad \text{що} \quad \forall (x, y) \in D \quad M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x},$$

$$N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Якщо (2.4.1) – це рівняння в повних диференціалах, то (2.4.1) еквівалентне рівнянню  $\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$ , тобто  $dU(x, y) = 0$ . Тому в цьому випадку  $U(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  – загальний інтеграл рівняння (2.4.1).

Таким чином, проінтегрувати рівняння в повних диференціалах означає записати рівність  $U(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Основна проблема полягає у тому, як дізнатися, чи є рівняння (2.4.1) рівнянням у повних диференціалах, та, при позитивній відповіді, як знайти функцію  $U$  ?

Іноді це легко побачити з самого рівняння.

Приклад 2.4.1. Розв'язати рівняння  $x dx + y dy = 0$ .

Неважко помітити, що  $x dx + y dy = d \left( \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}_U \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C$ .

Отже,  $x^2 + y^2 = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  – загальний розв'язок рівняння в неявній формі.

У загальному випадку відповідь на питання: чи є рівняння (2.4.1) рівнянням у повних диференціалах дає наступна теорема.

**Теорема 2.4.1 (про характеристизацію рівняння в повних диференціалах).**

Нехай  $M, N \in C^{(1)}(D)$ . Тоді рівняння (2.4.1) є рівнянням у повних диференціалах тоді і тільки тоді, коли для довільних  $(x, y) \in D$  виконується умова

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad (2.4.6)$$

Припустимо, що умова (6) виконується і покажемо, як конструктивно побудувати функцію  $U = U(x, y)$ , для якої  $\frac{\partial U}{\partial x} = M$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = N$ .

Зафіксуємо точку  $(x_0, y_0) \in D$  і розглянемо функцію

$$U(x, y) := \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \varphi(y),$$

де функцію  $\varphi(y)$  виберемо пізніше. Тоді неважко переконатися, що

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \varphi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(s, y)}{\partial y} ds + \varphi'(y) = |(6)| = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N(s, y)}{\partial s} ds + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Тому друга умова  $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$  вірна тоді і лише тоді, коли

$$\varphi'(y) = N(x_0, y), \text{ тобто для } \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt.$$

Отже,  $U(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt$  – шукана функція.

Приклад 2.4.2. Розв'язати рівняння  $(x^2 + y) dx + (x + y^2) dy = 0$ .

У цьому рівнянні  $M(x, y) = x^2 + y$ ,  $N(x, y) = x + y^2$ , тому

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \text{ отже, умова (2.4.6) виконується і ми маємо рівняння в повних}$$

диференціалах.

Побудуємо функцію  $U$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y \Rightarrow U = \int (x^2 + y) dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} + xy + \varphi(y).$$

$$\text{Тоді } \frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + y^2 \Leftrightarrow \varphi'(y) = y^2 \Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3}.$$

Отже,  $U(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3}$  і загальний інтеграл рівняння

$$\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

### Рівняння, що допускають інтегрувальний множник

Нехай для рівняння в симетричній формі

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.4.7)$$

виконується рівність  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ , тобто рівняння (2.4.7) не є рівнянням у повних диференціалах.

**Означення 2.4.3.** Функція  $\mu = \mu(x, y) \in C(D)$ ,  $\mu(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D$ , називається інтегрувальним множником рівняння (2.4.7), якщо існує функція

$$U = U(x, y) \in C(D) \quad \text{така, що} \quad \forall (x, y) \in D \quad \mu(x, y)M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x},$$

$$\mu(x, y)N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}, \quad \text{тобто рівняння}$$

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (2.4.8)$$

є рівнянням у повних диференціалах.

Приклад 2.4.3. Розв'язати рівняння  $ydx - xdy = 0$ .

У цьому прикладі  $M(x, y) = y$ ,  $N(x, y) = -x$ , тому  $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}$  і рівняння не є рівнянням у повних диференціалах, але неважко помітити, що якщо ми розділимо ліву і праву частину рівняння на  $\frac{1}{y^2}$ , то отримаємо

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad \text{рівняння у повних диференціалах.}$$

Отже,  $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$  – інтегрувальний множник рівняння, а  $\frac{x}{y} = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$

– його загальний інтеграл.

**Зауваження 2.4.1.**  $y = 0$  – розв'язок рівняння з прикладу 3, який ми втратили, бо вздовж кривої  $y = 0$  функція  $\mu(x, y)$  невизначена. Отже, після інтегрування слід перевірити, чи немає серед кривих, вздовж яких функція  $\mu(x, y)$  невизначена, розв'язків вихідного рівняння.

*Зауваження 2.4.2.* Якщо (2.4.1) не є рівнянням у повних диференціалах, то, можливо, (2.4.4) або (2.4.5) – рівняння відомих типів і їх можна зінтегрувати.

### **Методи знаходження інтегрувального множника**

Нехай  $\mu = \mu(x, y)$  – інтегрувальний множник рівняння (7), тобто рівняння (2.4.8) є рівнянням у повних диференціалах.

Тоді в силу теореми про характеристизацію рівняння в повних диференціалах виконується рівність

$$\frac{\partial(\mu(x, y)M(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x, y)N(x, y))}{\partial x},$$

$$\mu'_y(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \mu'_x(x, y)N(x, y) + \mu(x, y)\frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

$$\mu'_x(x, y)N(x, y) + \mu'_y(x, y)M(x, y) = \mu(x, y)\left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right), \quad (2.4.9)$$

(2.4.9) – рівняння для знаходження інтегрувального множника. В загальному випадку розв'язати його важко. Розглянемо часткові випадки:

Якщо вважати, що  $\mu = \mu(x)$ , то в цьому випадку рівняння (9) набуває вигляду

$$\mu\left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right) = \mu' \cdot N(x, y)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}. \quad (2.4.10)$$

**Висновок 2.4.1** якщо  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  є функцією лише змінної  $x$ ,

то рівняння (2.4.7) має інтегрувальний множник вигляду  $\mu = \mu(x)$ , що знаходиться з рівняння (2.4.10).

Приклад 2.4.4. Розв'язати рівняння  $\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$ .

У цьому рівнянні  $M(x, y) = 1 - \frac{x}{y}$ ,  $N(x, y) = 2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$ , тому

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y^2} \text{ і}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2}}{2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{\frac{x}{y^2} + 2y + \frac{1}{y}}{x\left(\frac{x}{y^2} + 2y + \frac{1}{y}\right)} = -\frac{1}{x} \quad \text{— функція лише}$$

змінної  $x$ .

Отже, рівняння має інтегрувальний множник  $\mu = \mu(x)$ , що знаходиться з

$$\text{рівняння } \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Після домноження вихідного рівняння на  $\mu(x) = \frac{1}{x}$ , отримуємо рівняння

$$\text{в повних диференціалах } \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0, \quad \text{або після}$$

перегрупування

$$\frac{1}{x}dx + \left(2y + \frac{1}{y}\right)dy + \left(-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy\right) = 0 \Rightarrow d\left(\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right) = 0.$$

Таким чином, враховуючи, що при  $\mu(x) = \infty$  ми втрачаємо розв'язок  $x = 0$ , остаточно отримуємо загальний інтеграл у вигляді

$$\begin{cases} \ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}; \\ x = 0. \end{cases}$$

Якщо вважати, що  $\boxed{\mu = \mu(y)}$ , то в цьому випадку рівняння (9) набуває вигляду

$$\mu \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = -\mu' \cdot M(x, y)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{-M(x, y)}. \quad (2.4.11)$$

**Висновок 2.4.2** якщо  $\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{-M(x, y)}$  є функцією лише змінної  $y$ ,

то рівняння (2.4.7) має інтегрувальний множник вигляду  $\mu = \mu(y)$ , що знаходиться з рівняння (2.4.11).

Приклад 2.4.5. Розв'язати рівняння  $y \sin 2x dx + (y^2 - \sin^2 x) dy = 0$ .

У цьому прикладі  $M(x, y) = y \sin 2x$ ,  $N(x, y) = y^2 - \sin^2 x$ , тому

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x \quad \text{і} \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2 \sin 2x}{-y \sin 2x} = -\frac{2}{y}$$

функція лише змінної  $y$ . Отже, рівняння має інтегрувальний множник вигляду

$\mu = \mu(y)$ , що знаходиться з рівняння  $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{y}$ . Звідси  $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$  і після

домноження вихідного рівняння на інтегрувальний множник, отримуємо

$$\frac{\sin 2x}{y} dx + \left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0 \Rightarrow d\left(y + \frac{\sin^2 x}{y}\right) = 0.$$

Враховуючи розв'язок  $y = 0$ , отримуємо остаточну відповідь

$$\begin{cases} y + \frac{\sin^2 x}{y} = C, & C \in \mathbb{R}; \\ y = 0. \end{cases}$$

Якщо вважати, що  $\mu = \mu(\theta(x, y))$ , де  $\theta$  – деяка відома функція, то в цьому випадку рівняння (9) набуває вигляду

$$\mu \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = \mu' \theta'_x(x, y) N(x, y) - \mu' \theta'_y(x, y) M(x, y),$$

$$\mu \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = \mu' \left( \theta'_x(x, y) N(x, y) - \theta'_y(x, y) M(x, y) \right),$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{\theta'_x(x, y)N(x, y) - \theta'_y(x, y)M(x, y)}. \quad (2.4.12)$$

**Висновок 2.4.3** якщо функція  $\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{\theta'_x(x, y)N(x, y) - \theta'_y(x, y)M(x, y)}$  є

функцією лише  $\theta$ , то рівняння (2.4.7) має інтегрувальний множник вигляду  $\mu = \mu(\theta(x, y))$ , що знаходиться з рівняння (2.4.12).

Приклад 2.4.6. Розв'язати рівняння  $ydx - (x + x^2 + y^2)dy = 0$ .

У цьому рівнянні  $M(x, y) = y$ ,  $N(x, y) = x + x^2 + y^2$ , тому

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - (-1 - 2x) = 2 + 2x.$$

Розглянемо функцію  $\theta(x, y) = x^2 + y^2$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{\theta'_x(x, y)N(x, y) - \theta'_y(x, y)M(x, y)} = \\ & = \frac{2 + 2x}{-(x + x^2 + y^2) \cdot 2x - y \cdot 2y} = -\frac{1 + x}{x^2 + y^2 + x(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Отже, рівняння має інтегрувальний множник вигляду  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ , який знаходиться з рівняння  $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{\theta}$ . Звідси  $\mu = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{x^2 + y^2}$  і після домноження на знайдений інтегрувальний множник отримуємо рівняння в повних диференціалах

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + 1 \right) dy = 0 \Rightarrow d \left( \arctg \frac{x}{y} - y \right) = 0.$$

Таким чином, отримуємо загальний інтеграл  $\arctg \frac{x}{y} - y = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Ще один спосіб відшукати інтегрувального множника дає наступне твердження.

**Твердження 2.4.1** Якщо  $\mu$  – інтегровальний множник рівняння (2.4.7), тобто існує функція  $U = U(x, y)$ , для якої  $dU = \mu M dx + \mu N dy$ , то для будь-якої неперервної функції  $f$ , що не обертається в нуль, функція  $\mu f(U)$  також є інтегровальним множником рівняння (2.4.7).

Приклад 2.4.7 Розв'язати рівняння  $(x^3 - xy^2 - y)dx + (xy^2 - y^3 + x)dy = 0$ .

Оскільки для заданого рівняння  $M(x, y) = x^3 - xy^2 - y$ ,  $N(x, y) = xy^2 - y^3 + x$ , то  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy - 1 - 2xy - 1 = -4xy - 2$ ; то попередні

методи відшукування інтегровального множника застосувати не вдається. Однак, перегрупувавши доданки

$$\left( (x^3 - xy^2)dx + (x^2y - y^3)dy \right) + (-ydx + xdy) = 0,$$

$$(x^2 - y^2)(xdx + ydy) + (xdy - ydx) = 0,$$

неважко помітити, що функція  $\mu_1 = \frac{1}{x^2 - y^2}$  є інтегровальним множником

рівняння  $(x^2 - y^2)(xdx + ydy) = 0$ , при цьому інтегралом є функція

$U_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , а функція  $\mu_2 = \frac{1}{x^2}$  є інтегровальним множником рівняння

$xdy - ydx = 0$  з інтегралом  $U_2 = \frac{y}{x}$ .

Таким чином, якщо нам вдасться підібрати такі функції  $\varphi$  та  $\psi$ , що

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \varphi\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \equiv \frac{1}{x^2} \psi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.4.13)$$

то відповідно до щойно наведеного твердження – це спільне значення (2.4.13) і буде один з інтегровальних множників для вихідного рівняння, оскільки воно одночасно буде інтегровальним множником і для першої і для другої його

частин. Якщо покласти  $\varphi(p) \equiv 1$ ,  $\psi(p) = \frac{1}{1 - p^2}$ , то рівність (2.4.13) виконана,

і, отже, інтегровальний множник всього рівняння  $\mu = \frac{1}{x^2 - y^2}$ .

Після домноження рівняння на  $\mu = \frac{1}{x^2 - y^2}$  отримуємо рівняння в повних

диференціалах

$$(x dx + y dy) + \left( \frac{x dy}{x^2 - y^2} - \frac{y dx}{x^2 - y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} d \left( x^2 + y^2 + \ln \frac{x+y}{x-y} \right) = 0,$$

розв'язком якого є  $x^2 + y^2 + \ln \frac{x+y}{x-y} = C, C \in R$ .

Крім того, функція  $y = x$ , вздовж якої інтегрувальний множник невизначений, також є розв'язком рівняння.

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати рівняння:

1.  $2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0;$

2.  $(2 - 9xy^2) dx + (4y^2 - 6x^3) dy = 0;$

3.  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0;$

4.  $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0;$

5.  $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0;$

***Домашнє завдання:***

1.  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0;$

2.  $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0;$

3.  $(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0;$

4.  $3x^2(1 + \ln y) dx - \left( 2y - \frac{x^3}{y} \right) dy = 0;$

5.  $\left( \frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0.$

## Диференціальні рівняння $n$ -того порядку

Диференціальним рівнянням  $n$ -того порядку називається рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.4.14)$$

де  $f \in C(G)$ ,  $G$  – область в  $R^{n+1}$ .

**Розв'язком диференціального рівняння  $n$ -того порядку (2.4.14)** на інтервалі  $(a, b)$  будемо називати функцію  $y(\cdot) \in C^{(n)}((a, b))$  таку, що  $\forall x \in (a, b)$   $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in G$  і  $y(\cdot)$  перетворює (2.4.14) на тотожність.

Приклад 2.4.8. Знайти розв'язок рівняння  $y'' = 0$ .

Послідовно інтегруючи, маємо  $y'' = 0 \Leftrightarrow y' = C_1 \Leftrightarrow y = C_1x + C_2$ .

Отже, отримали  $y = C_1x + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in R$  – двопараметрична сім'я розв'язків.

**Загальним розв'язком рівняння  $n$ -того порядку (2.4.14)** будемо називати  $n$ -параметричну сім'ю розв'язків (1), тобто загальний розв'язок (2.4.14) має вигляд  $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$  або в неявній формі  $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ .

**Задача Коші для рівняння  $n$ -того порядку (2.4.14)** полягає у тому, щоб для заданого вектору початкових даних  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in R^{n+1}$  знайти розв'язок рівняння (2.4.14)  $y = y(x)$  такий, що

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Приклад 2.4.9. Розв'язати задачу Коші 
$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

При розв'язанні попереднього прикладу ми отримали загальний розв'язок  $y(x) = C_1x + C_2$ .

Задовольнимо тепер початкові умови:

$$y(0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$y'(x) = C_1 \Rightarrow y'(0) = C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Остаточно отримуємо  $y(x) = x$  – розв’язок задачі Коші.

**Теорема 2.4.2 (про існування та єдиність розв’язку задачі Коші для рівняння  $n$ -того порядку).** Нехай задано задачу Коші

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}); \\ y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Тоді якщо в деякому околі точки  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  функція  $f$  неперервна і має обмежені частинні похідні, тобто  $\forall k \in \overline{0, n-1} \quad |f'_{y^{(k)}}| \leq C$ , то задача Коші (2.4.15) має єдиний розв’язок  $y = y(x)$ , визначений в деякому околі точки  $x_0$ .

Оскільки навіть при  $n=1$  рівняння (2.4.14) не завжди інтегровне в квадратурах (наприклад, рівняння Ріккати), то це тим більше вірно для  $n > 1$ .

Виділимо **класи рівнянь** вигляду (2.4.14), що допускають інтегрування або, принаймні, зниження порядку.

**1.** Рівняння вигляду  $y^{(n)} = f(x)$ .

Розв’язок рівнянь такого вигляду знаходиться послідовним інтегруванням:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \iint f(x) dx dx + C_1 x + C_2, \text{ і так далі, врешті-решт знаходимо}$$

$$y(x) = \int \dots \int_n f(x) dx \dots dx + \sum_{i=1}^n \frac{C_i x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2.4.10. Розв’язати рівняння  $y'' = x$ .

Після першого інтегрування маємо  $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$ . Інтегруючи вдруге

отримуємо остаточно відповідь  $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**2.** Рівняння вигляду  $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$ .

Заміна  $z = y^{(n-1)}$ , де  $z = z(x)$  – нова невідома функція, зводить рівняння до автономного рівняння першого порядку, загальний розв’язок якого  $\Phi(x, z, C_1) = 0$  ми можемо знайти. Але тоді відносно вихідної невідомої функції ми отримуємо рівняння  $(n-1)$ -шого порядку  $\Phi(x, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ , тобто ми знизили порядок рівняння на одиницю.

Приклад 2.4.11. Розв’язати рівняння  $y''y' - \sqrt{1+y'^2} = 0$ .

Спочатку розв’яжемо дане рівняння відносно старшої похідної  $y'' = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}$ . Далі за допомогою заміни  $z = y'$  отримуємо автономне рівняння

першого порядку  $z' = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}$ . Відокремлюємо змінні  $\frac{z dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx$  та

інтегруємо  $\sqrt{1+z^2} = x + C_1$ . Звідси  $z = \pm\sqrt{(x+C_1)^2 - 1}$ , і повертаючись до

змінної  $y$  дістаємо рівняння  $y' = \pm\sqrt{(x+C_1)^2 - 1}$ , отже загальний розв’язок

$$y(x) = \pm \int \sqrt{(x+C_1)^2 - 1} dx + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2.4.12. Розв’язати рівняння  $y'' - y' = 0$ .

Після заміни  $z = y'$  маємо рівняння  $z' - z = 0$ , загальний розв’язок якого  $z = C_1 e^x$ . Тому  $y' = C_1 e^x$ , звідки  $y = C_1 e^x + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**3.** Рівняння вигляду  $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ .

Для розв’язання рівнянь цього типу спочатку впровадимо заміну

$z = y^{(n-2)}$ , а потім домножимо ліву і праву частину отриманого рівняння

другого порядку  $z'' = f(z)$  на  $2z'$ . У результаті будемо мати  $2z'z'' = 2f(z)z'$ ,

або, що те саме,  $d(z')^2 = 2f(z)dz$  і після інтегрування  $(z')^2 = 2\int f(z)dz + C_1$

приходимо до автономного рівняння першого порядку  $z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}$ .

Якщо  $\Phi(x, z, C_1, C_2) = 0$  загальний розв’язок цього рівняння, то, повертаючись

до змінної  $y$ , отримуємо  $\Phi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$  рівняння  $(n-2)$ -гого порядку. Отже, ми знизили порядок рівняння на два.

Приклад 2.4.13. Розв'язати рівняння  $y^{(4)} = y''$ , за умови, що  $y'''(0) > 0$ .

Заміна  $y'' = z$  приводить нас до рівняння  $z'' = z$ , яке після домноження на  $2z'$  перетворюється на  $d(z')^2 = 2z dz$ . Звідси  $z' = \sqrt{z^2 + C_1} > 0$ . Відокремимо змінні  $\frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1}} = dx$  і проінтегруємо:  $\ln\left(z + \sqrt{z^2 + C_1}\right) = x + \ln C_2$ . Тепер

виразимо з отриманої рівності невідому  $z$ :  $z + \sqrt{z^2 + C_1} = C_2 e^x \Rightarrow \Rightarrow z = \frac{C_2}{2} e^x - \frac{C_1}{2C_2} e^{-x}$ . Двічі інтегруючи останній вираз, знаходимо

остаточний розв'язок  $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + Cx + D$ ,  $A, B, C, D \in R$ .

*Зауваження 2.4.2.* Легко бачити, що функції  $y(x) \equiv 1$ ,  $y(x) = x$ ,  $y(x) = e^x$ ,  $y(x) = e^{-x}$  є розв'язками рівняння з прикладу 2.4.6, а загальний розв'язок – це лінійна комбінація цих функцій. Пізніше ми побачимо, що це типова ситуація для лінійних рівнянь.

**4.** Рівняння, що не містить послідовних перших похідних:  
 $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Заміна  $y^{(k)} = z$  дозволяє знизити порядок рівняння на  $k$  одиниць. У результаті отримуємо  $F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$  рівняння  $(n-k)$ -того порядку.

Приклад 2.4.14. Розв'язати рівняння  $y'' + xy' + (xy')^2 = 0$ .

Заміна  $y' = z$  знижує порядок рівняння на одиницю. В результаті отримуємо рівняння першого порядку  $z' + xz + (xz)^2 = 0$ , яке до того ж є рівнянням Бернуллі.

Після інтегрування

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) = -\frac{1}{C_1 e^{\frac{x^2}{2}} + 1}, \\ y'(x) = z(x) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = -\int \frac{dx}{C_1 e^{\frac{x^2}{2}} + 1} + C_2, \\ y(x) = C, \quad C_1, C_2, C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**5.** Рівняння, що не містить незалежної змінної  $x$ :  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Для розв'язання рівнянь цього класу спочатку з рівняння  $F(y, 0, \dots, 0) = 0$  знаходимо розв'язки вигляду  $y = \text{const}$  (якщо вони є).

Інші розв'язки можна знайти, зробивши заміну  $z = y'$ , де  $z = z(y)$ , тобто  $y$  – нова незалежна змінна, а  $z = z(y)$  – нова невідома функція.

$$\text{Тоді } y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'z, \dots, y^{(n)} = \varphi(z, \dots, z^{(n-1)}).$$

Після підстановки маємо  $\tilde{F}(y, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0$  рівняння  $n-1$  порядку.

Якщо  $\tilde{\Phi}(y, z, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$  – його загальний розв'язок, то приходимо до рівняння першого порядку  $\tilde{\Phi}(y, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ .

Приклад 2.4.15. Розв'язати рівняння  $2yy'' - y'^2 - 1 = 0$ .

Бачимо, що розв'язків вигляду  $y = C$  немає.

Впроваджуючи заміну  $z = z(y) = y' \Rightarrow y'' = z'z$ , отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними  $2yzz' - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2zdz}{z^2 + 1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow z^2 + 1 = C_1 y \Rightarrow z = \pm \sqrt{C_1 y - 1}.$$

Після зворотної заміни знову отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \pm \sqrt{C_1 y - 1} \Rightarrow \pm \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = x + C_2 \Rightarrow \pm \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**6. Однорідні рівняння**  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , де

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Заміна  $\boxed{y' = zy}$ , де  $z = z(x)$  – нова невідома функція знижує порядок однорідного рівняння на одиницю.

Дійсно, підраховуємо похідні

$$y' = zy;$$

$$y'' = (zy)' = z'y + zy' = z'y + z^2 y = (z' + z^2) y; \text{ і т.д.}$$

$$y^{(n)} = \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}) y.$$

Тоді  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = F(x, y, zy, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}) y)$ , а з умови однорідності

$$F(x, y, zy, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}) y) = y^k F(x, 1, z, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})).$$

Таким чином, отримали рівняння  $(n-1)$ -шого порядку

$$\tilde{F}(x, 1, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Приклад 2.4.16. Розв'язати рівняння  $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$ .

Очевидно, що це рівняння є однорідним з  $k = 2$ .

Після застосування заміни  $y' = zy \Rightarrow y'' = (z' + z^2) y$ , отримуємо рівняння  $xy^2(z' + z^2) + xz^2 y^2 - zy^2 = 0$ . Враховуючи, що  $y = 0$  – розв'язок вихідного рівняння, скоротимо останню рівність на  $y^2$ :  $x(z' + z^2) + xz^2 - z = 0$ .

Отримали рівняння першого порядку  $z' - \frac{1}{x} z = -2z^2$ , що є рівнянням

Бернуллі. Розв'язуючи це рівняння та виконуючи зворотню заміну, отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$\begin{cases} z = \frac{x}{x^2 + C_1}, \\ z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}, \\ y' = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_2 \sqrt{x^2 + C_1}, \\ y = C, \end{cases} \quad C_1, C_2, C \in \mathbb{R}.$$

**7. Рівняння у формі повної похідної**  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , де

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}.$$

Тоді  $f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = C_1$  – рівняння  $(n-1)$ -шого порядку.

Приклад 2.4.17. Розв'язати рівняння  $\frac{y''}{y'} + \frac{1}{x} + y' = 0$ .

Неважко помітити, що ліва частина даного рівняння є повною похідною і рівняння можна переписати у вигляді  $\frac{d}{dx} [\ln|y'| + \ln|x| + |y|] = 0$ . Це дозволяє

нам знизити порядок рівняння на одиницю  $\ln|y'| + \ln|x| + |y| = \ln C_1$ ,

пропотенціюємо останню рівність і виразимо похідну  $y' = \frac{C_1}{x} e^{-y}$ . Отримане

рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними

$$e^y dy = \frac{C_1}{x} dx \Rightarrow e^y = C_1 \ln|x| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкові умови:

1.  $y'' = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
2.  $y''' + y'' = 1;$
3.  $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$
4.  $x^2 y'' = y'^2;$
5.  $2xy'y'' = y'^2 - 1;$

### ***Домашнє завдання:***

1.  $y^3 y'' = 1;$
2.  $y''' = y''^2;$
3.  $yy'' = y'^2 - y'^3;$
4.  $y'' = e^y;$
5.  $2y'(y'' + 2) = xy''^2;$

## Лекція 2\_5. Лінійні диференціальні рівняння $n$ -того порядку

Розглянемо рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (2.5.1)$$

де  $y = y(x)$  – невідома функція незалежної змінної  $x$ .

Рівняння (2.5.1) – це лінійне неоднорідне рівняння  $n$ -того порядку.

На відміну від лінійних рівнянь першого порядку для  $n > 1$  рівняння (2.5.1) не завжди інтегрується в квадратурах, однак справедлива теорема.

**Теорема 2.5.1 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння  $n$ -того порядку (2.5.1)).** Нехай у рівнянні (2.5.1) коефіцієнти неперервні на деякому інтервалі  $p_i(\cdot), f(\cdot) \in C((a,b))$ ,  $i = \overline{1,n}$ .

Тоді для довільних початкових даних  $x_0 \in (a,b)$ ,  $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in R^n$ , існує єдиний розв'язок рівняння (2.5.1), що задовольняє початкові умови  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ , причому цей розв'язок визначений на всьому інтервалі  $(a,b)$  неперервності коефіцієнтів.

Поряд з лінійним неоднорідним рівнянням (2.5.1) розглянемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$L[y] := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (2.5.2)$$

Виявляється, що якщо ми зможемо знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (2.5.2), то для будь-якої неоднорідності  $f \in C((a,b))$  ми зможемо проінтегрувати лінійне неоднорідне рівняння (2.5.1). Тому спочатку вивчимо лінійне однорідне рівняння (2.5.2).

Очевидно, що якщо  $y_1(x), y_2(x)$  – розв'язки рівняння (2.5.2), то їх сума  $y_1(x) + y_2(x)$  також є розв'язком рівняння (2.5.2).

Якщо  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  – розв'язки рівняння (2.5.2), то для довільних сталих  $\{C_1, \dots, C_n\} \in R$  формула

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \quad (2.5.3)$$

задає розв'язок рівняння (2).

Виникає запитання: якими мають бути розв'язки  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  рівняння (2.5.2), щоб формула (2.5.3) задавала всі розв'язки цього рівняння, тобто щоб (2.5.3) була загальним розв'язком рівняння (2.5.2).

**Означення 2.5.1.** Функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  називаються **лінійно залежними** на інтервалі  $(a,b)$ , якщо знайдуться такі одночасно нерівні нулю сталі  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in R$ , що  $\forall x \in (a,b) \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) = 0$ . В іншому випадку функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  називаються **лінійно незалежними** на інтервалі  $(a,b)$ .

Наведемо **елементарні властивості** лінійно залежних та лінійно незалежних функцій:

1) функції  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  лінійно залежні на інтервалі  $(a,b)$  тоді і тільки тоді, коли  $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}$  на цьому інтервалі  $(a,b)$ ;

2) якщо для деякого  $k = \overline{1, n}$   $y_k(x) \equiv 0$  на інтервалі  $(a,b)$ , то функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  лінійно залежні на  $(a,b)$ ;

(дійсно, ми можемо покласти  $\alpha_k = 1, \alpha_i = 0$  для  $i = \overline{1, n}, i \neq k$  тоді

$$\forall x \in (a,b) \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) = 0)$$

3) якщо функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  лінійно залежні на деякому інтервалі  $(a,b)$ , то ці функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  також є лінійно залежними на довільному підінтервалі  $(a_1, b_1) \subset (a,b)$ ;

якщо функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  лінійно незалежні на деякому інтервалі  $(a,b)$ , то ці функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  також є лінійно незалежними на будь-якому ширшому інтервалі  $(A,B) \supset (a,b)$  (за умови, що вони визначені на цьому інтервалі  $(A,B)$ );

4) якщо функції  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  лінійно незалежні на деякому інтервалі  $(a, b)$ , то довільний піднабір функцій з  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  також складається з лінійно незалежних функцій.

Приклад 2.5.1. Дослідити на лінійну залежність (незалежність) систему функцій  $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ .

Оскільки  $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ , то  $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$  – лінійно залежні на  $(-\infty, +\infty)$ .

Приклад 2.5.2. Дослідити на лінійну залежність (незалежність) систему функцій  $\{\sin x, \cos x\}$ .

Функції  $\{\sin x, \cos x\}$  лінійно незалежні на довільному інтервалі  $(a, b)$ , бо рівняння  $\alpha \sin x + \beta \cos x = 0$  має на довільному інтервалі  $(a, b)$  не більше, як злічену кількість коренів.

**Приклади лінійно незалежних систем функцій:**

- 1)  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі  $(a, b)$ ;
- 2) якщо числа  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  різні, то функції  $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$  – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі  $(a, b)$ ;
- 3) якщо числа  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  різні, то функції  $\{\cos \beta_1 x, \sin \beta_1 x, \cos \beta_2 x, \sin \beta_2 x, \dots, \cos \beta_n x, \sin \beta_n x\}$  – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі  $(a, b)$ ;
- 4)  $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^n e^{\lambda x}\}$  – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі  $(a, b)$ ;
- 5)  $\{\cos \beta x, \sin \beta x, x \cos \beta x, x \sin \beta x, \dots, x^k \cos \beta x, x^k \sin \beta x\}$  – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі  $(a, b)$ .

**Означення 2.5.2.** Вронскіаном, побудованим на функціях  $\{y_1, \dots, y_n\} \subset C^{(n-1)}((a, b))$ , називається визначник

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.5.4)$$

**Теорема 2.5.2 (критерії лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного рівняння).** Нехай коефіцієнти рівняння (2.5.2) неперервні  $p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot) \in C((a,b))$  та  $\{y_1, \dots, y_n\}$  – розв'язки цього рівняння. Тоді функції  $\{y_1, \dots, y_n\}$  лінійно незалежні на  $(a,b)$  тоді і тільки тоді, коли  $\forall x \in (a,b) \quad W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0 \Leftrightarrow \exists \tilde{x} \in (a,b) \quad W[y_1, \dots, y_n](\tilde{x}) \neq 0$ .

**Наслідок 2.5.1.** Для довільних розв'язків  $\{y_1, \dots, y_n\}$  рівняння (2) їх вронскіан або тотожній нуль (і вони лінійно залежні), або скрізь не нуль (і вони лінійно незалежні).

**Наслідок 2.5.2.** Якщо розв'язки  $\{y_1, \dots, y_n\}$  рівняння (2.5.2) лінійно незалежні на інтервалі  $(a,b)$ , то вони також лінійно незалежні на будь-якому підінтервалі  $(a_1, b_1) \subset (a,b)$ .

**Означення 2.5.3** Система з  $n$  лінійно незалежних на інтервалі  $(a,b)$  розв'язків лінійного однорідного рівняння  $n$ -того порядку (2.5.2) називається **фундаментальною системою розв'язків** цього рівняння.

Приклад 2.5.3. Розглянемо рівняння  $y'' + y = 0$ . Неважко перевірити, що система функцій  $\begin{cases} y_1(x) = \sin x, \\ y_2(x) = \cos x; \end{cases}$  є лінійно незалежними розв'язками цього рівняння, отже,  $\{\sin x, \cos x\}$  – фундаментальна система розв'язків.

**Теорема 2.5.3 (про існування фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.5.2)).** Якщо коефіцієнти рівняння неперервні  $p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot) \in C((a,b))$ , то лінійне однорідне рівняння (2.5.2) має фундаментальну систему розв'язків.

**Теорема 2.5.4 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння).** Нехай  $p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot) \in C((a,b))$ ,  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  – фундаментальна

система розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.5.2). Тоді формула (2.5.3)

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \text{ містить всі розв'язки лінійного однорідного рівняння (2.5.2). А}$$

саме, для будь-якого розв'язку  $\tilde{y}(x)$  рівняння (2.5.2) існує набір сталих  $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n\}$

$$\text{такий, що } \forall x \in (a, b) \quad \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i y_i(x).$$

**Наслідок 2.5.3.** Лінійне однорідне рівняння (2.5.2) має рівно  $n$  лінійно незалежних розв'язків.

Таким чином, для розв'язання лінійного однорідного рівняння (2.5.2) потрібно знайти його фундаментальну систему розв'язків.

*Зауваження 2.5.1.* Нехай рівняння (2.5.2) з дійсно значними коефіцієнтами має комплексний розв'язок  $z(x) = u(x) + iv(x)$ , тобто  $L[z] = 0$ .

$$\text{Оскільки } L[z] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L[u] = 0 \\ L[v] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow u(x), v(x) \text{ – дійсні розв'язки рівняння}$$

(2.5.2), то якщо  $z(x)$  – комплексний розв'язок лінійного однорідного рівняння (2.5.2), то  $\operatorname{Re} z$  і  $\operatorname{Im} z$  – дійсні розв'язки цього рівняння.

Як уже зазначалося раніше, лінійне однорідне рівняння (2.5.2) зі змінними коефіцієнтами не завжди можна проінтегрувати в квадратурах, але для деяких окремих типів рівнянь таке інтегрування можливе.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння  $n$ -того порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$L[y] := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (2.5.5)$$

де  $a_i \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 2.5.5 (про інтегрування лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами).** Для лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (5) фундаментальна система розв'язків завжди може бути знайдена в елементарних функціях.

Доведення:

Будемо шукати розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (2.5.5) у вигляді  $y(x) = e^{\lambda x}$ , де  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тоді  $L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) = e^{\lambda x} p(\lambda)$ .

Отже,  $y = e^{\lambda x}$  – розв'язок рівняння (5) тоді і тільки тоді, коли  $\lambda$  – корінь рівняння

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.5.6)$$

яке називається *характеристичним рівнянням*.

З курсу лінійної алгебри відомо, що рівняння (2.5.6) має рівно  $n$  (з урахуванням кратності) коренів. Доведемо, що коренів характеристичного рівняння (2.5.6) досить для побудови фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (2.5.5).

Можливі наступні випадки:

**1 випадок:** характеристичне рівняння (2.5.6) має  $n$  дійсних, різних коренів  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,  $i \neq j$ .

Тоді  $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$  –  $n$  лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.5.5), тобто фундаментальна система розв'язків цього рівняння.

**2 випадок:** характеристичне рівняння (6) має  $n$  різних коренів, але серед них є комплексні. Нехай  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  – пара комплексно спряжених коренів рівняння (6) (оскільки коефіцієнти рівняння (6) дійсні, то разом з коренем  $\alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  коренем рівняння також буде комплексно спряжене  $\alpha - i\beta$ ).

Знайдемо два лінійно незалежних дійсних розв'язки рівняння (2.5.5), що відповідають парі коренів  $\lambda_{1,2}$ .

Оскільки  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  – корінь характеристичного рівняння (6), то  $z(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$  – комплексний розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (2.5.5). Але тоді  $\operatorname{Re} z = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $\operatorname{Im} z = e^{\alpha x} \sin \beta x$  – дійсні лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.5.5).

Корінь  $\alpha - i\beta$  не породжує нових лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.5.5), тому парі комплексно спряжених коренів  $\alpha \pm i\beta$  характеристичного рівняння (2.5.6) у фундаментальній системі розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (2.5.5) відповідає пара  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$ .

**3 випадок:** характеристичне рівняння (2.5.6) має кратні корені.

Нехай  $\lambda$  – кратний корінь характеристичного рівняння (2.5.6), тобто  $p^{(m)}(\lambda) = 0$ ,  $m = \overline{0, k-1}$ ,  $p^{(k)}(\lambda) \neq 0$ .

Маємо тотожність  $L[e^{\lambda x}] = p(\lambda)e^{\lambda x}$ . Тоді, для  $m \leq k-1$

$$\frac{\partial^m L[e^{\lambda x}]}{\partial \lambda^m} = L[x^m e^{\lambda x}] = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [e^{\lambda x} p(\lambda)] = \sum_{l=0}^m C_m^l \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} (e^{\lambda x}) \underbrace{\frac{\partial^{m-l}}{\partial \lambda^{m-l}} p(\lambda)}_{=0} = 0.$$

Таким чином,  $k$ -кратному кореню характеристичного рівняння (2.5.6) відповідає  $k$  розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (2.5.5)  $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$ .

Якщо  $\lambda \in R$ , то  $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$  –  $k$  дійсних лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.5.5).

Якщо  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , то  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x\}$  –  $2k$  лінійно незалежних розв'язків рівняння (5).

Таким чином, ми повністю описали процедуру побудови фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (2.5.5).

Приклад 2.5.4. Розв'язати рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .

Згідно описаної вище процедури виписуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Характеристичне рівняння має два різні дійсні корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ , які породжують фундаментальну систему розв'язків заданого лінійного однорідного рівняння  $\{e^{1x}, e^{2x}\}$  (випадок 1).

Отже, загальний розв'язок даного диференціального рівняння  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ ,  $C_1, C_2 \in R$ .

Приклад 2.5.5. Розв'язати рівняння  $y'' + y = 0$ .

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 1 = 0$  має пару комплексно спряжених коренів  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , яким відповідає система з двох лінійно незалежних розв'язків вихідного рівняння  $\{\cos x, \sin x\}$  – фундаментальна система розв'язків цього рівняння (випадок 2). Тому  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ,  $C_1, C_2 \in R$  – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2.5.6. Розв'язати рівняння  $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$ .

Випишемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0,$$

$$\lambda^3 + 1 - 3(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0,$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) - 3(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0,$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0,$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i.$$

Отже,  $\{e^{-x}, e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x\}$  – фундаментальна система розв'язків (випадок 2), а  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$ ,  $C_1, C_2, C_3 \in R$  – загальний розв'язок вихідного рівняння.

Приклад 2.5.7. Розв'язати рівняння  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

Характеристичне рівняння для рівняння з цього прикладу  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$  має корінь  $\lambda = 1$  кратності 3. Тому згідно випадку 3 фундаментальна система розв'язків має вигляд  $\{e^x, x e^x, x^2 e^x\}$ . Тоді  $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$ ,  $C_1, C_2, C_3 \in R$  – загальний розв'язок рівняння.

*Зауваження.* До рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною  $x = e^t$  (при  $x > 0$ ) зводиться **рівняння Ейлера**.

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

Приклад 2.5.8. Розв'язати рівняння  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ .

Після впровадження заміни  $x = e^t$  потрібно перерахувати похідні:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}(y') \cdot e^{-t} = \frac{d}{dt}(y'_t \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y''_t - y') \cdot e^{-2t}.$$

Тоді підставляючи в рівняння, дійсно отримуємо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$e^{2t}(y'' - y') \cdot e^{-2t} - 2e^t y' \cdot e^{-t} + 2y = 0 \Leftrightarrow y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Далі розв'язання проводиться за вище наведеною схемою: виписуємо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , знаходимо його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  і будуємо фундаментальну систему розв'язків  $\{e^t, e^{2t}\}$ . Повертаючись до незалежної змінної  $x$ , отримуємо фундаментальну систему розв'язків  $\{x, x^2\}$ , а отже, і загальний розв'язок заданого рівняння Ейлера

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Зауваження.* При відшуканні розв'язків характеристичного рівняння іноді зручно використовувати **формули Муавра**: для комплексного числа

$$z = x + iy = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

справедливі формули

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати рівняння:

1.  $y''' - 3y'' + 2y' = 0;$

2.  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0;$
3.  $y^{(4)} + 4y = 0;$
4.  $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0;$
5.  $x^2 y'' - xy' + y = 0;$

**Домашнє завдання:**

Розв'язати рівняння:

1.  $y'' + y' - 2y = 0;$
2.  $y'' + 4y' + 3y = 0;$
3.  $4y'' + 4y' + y = 0;$
4.  $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0;$
5.  $x^2 y'' - xy' - 3y = 0;$

## Лекція 2\_6. Лінійні неоднорідні рівняння $n$ -того порядку.

### Метод невизначених коефіцієнтів.

Розглядаємо лінійне неоднорідне рівняння

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (2.6.1)$$

де  $a_i \in R, i = \overline{1, n}; f(\cdot) \in C((a, b))$ .

Ми вже знаємо, що завжди можна знайти фундаментальну систему розв'язків (а отже, і загальний розв'язок) відповідного однорідного рівняння

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (2.6.2)$$

тобто ми можемо побудувати  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  – фундаментальна система розв'язків рівняння (2.6.2), а отже, і загальний розв'язок цього рівняння

$$y_{\text{одн}}(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x), \quad C_1, \dots, C_n \in R.$$

**Твердження 2.6.1.** Якщо  $y_q(x)$  – частинний розв'язок рівняння (2.6.1), то формула

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_q(x) \quad (2.6.3)$$

задає загальний розв'язок рівняння (2.6.1).

Таким чином, щоб проінтегрувати лінійне неоднорідне рівняння (2.6.1), потрібно знайти фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння (2.6.2) і частинний розв'язок вихідного рівняння (2.6.1).

Є два способи знаходження частинного розв'язку (2.6.1):

### Метод невизначених коефіцієнтів

Цей метод використовується у випадку правих частин  $f(x)$  спеціального вигляду.

1) Якщо  $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x} (p_0 x^m + \dots + p_m)$ ,  $p_i \in R$ ,  $i = \overline{0, m}$ ; то частинний розв'язок рівняння (1) завжди можна знайти у вигляді

$$y_{\text{ч}}(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x) = x^k e^{\alpha x} (q_0 x^m + \dots + q_m), \quad (2.6.4)$$

де  $k$  – кратність числа  $\alpha$  як кореня характеристичного рівняння ( $k = 0$ , якщо  $\alpha$  – не корінь характеристичного рівняння),  $Q_m(x)$  – многочлен  $n$ -того степеня з невідомими коефіцієнтами  $(q_0, \dots, q_m)$ , що визначаються підстановкою (2.6.4) в (2.6.1) і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових функціональних виразах.

Приклад 2.6.1. Розв'язати рівняння  $y'' - 5y' + 4y = 4xe^{2x}$ .

Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння  $y'' - 5y' + 4y = 0$ .

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ , тому фундаментальною системою розв'язків буде  $\{e^x, e^{4x}\}$  і загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ .

Для нашої неоднорідності  $f(x) = 4xe^{2x}$ :  $m = 1$ ,  $P_1(x) = 4x$ ,  $\alpha = 2$  – не корінь характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{ч}}(x) = e^{2x} (Ax + B);$$

$$y_{\text{ч}}'(x) = e^{2x} (A + 2Ax + 2B);$$

$$y_{\text{ч}}''(x) = e^{2x} (2A + 2A + 4Ax + 4B).$$

Підставляючи вирази для  $y_q$ ,  $y_q'$ ,  $y_q''$  у рівняння і скорочуючи на  $e^{2x}$ , маємо:  $4A + 4Ax + 4B - 5(A + 2B + 2Ax) + 4Ax + 4B = 4x$ . Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних функціях  $1$ ,  $x$ , отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ :

$$\begin{cases} -A - 2B = 0, \\ -2A = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2, \\ B = 1. \end{cases}$$

Отже,  $y_q = e^{2x}(-2x + 1)$  і остаточно записуємо загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння

$$y(x) = y_{одн}(x) + y_q(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + e^{2x}(1 - 2x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2.6.2. Розв'язати рівняння  $y'' + y' - 2y = 3e^x$ .

Відповідне однорідне рівняння  $y'' + y' - 2y = 0$ . Запишемо характеристичне рівняння  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , корені якого  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Отже, фундаментальна система розв'язків має вигляд  $\{e^x, e^{-2x}\}$ , і ми можемо записати загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

У нас  $f(x) = 3e^x$ , тому  $m = 0$  і  $\alpha = 1$  – корінь характеристичного рівняння, отже,  $k = 1$ . Таким чином, будемо шукати частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y_q(x) = A x e^x;$$

$$y_q'(x) = e^x(Ax + A);$$

$$y_q''(x) = e^x(Ax + 2A).$$

Підставляючи в рівняння і скорочуючи на  $e^x$ , а потім прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних функціях. Отримуємо співвідношення для визначення сталої  $A$ :

$$Ax + 2A + Ax + A - 2Ax = 3 \Leftrightarrow 3A = 3 \Leftrightarrow A = 1.$$

Звідси  $y_q(x) = x e^x$  і  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  – загальний розв'язок.

2) Якщо  $f(x) = e^{\alpha x} (P_{m_1}^{(1)}(x) \cos \beta x + P_{m_2}^{(2)}(x) \sin \beta x)$ , де

$P_{m_1}^{(1)}(x), P_{m_2}^{(2)}(x)$  – многочлени степенів  $m_1, m_2$  відповідно, то

частинний розв’язок рівняння (1) завжди можна знайти у вигляді

$$y_q(x) = x^k e^{\alpha x} (Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x), \quad (2.6.5)$$

де  $k$  – кратність числа  $\alpha + i\beta$  як кореня характеристичного рівняння ( $k=0$ , якщо  $\alpha + i\beta$  – не корінь характеристичного рівняння),

$m = \max\{m_1, m_2\}$ ,  $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$  – многочлени степеня  $m$  з невідомими коефіцієнтами, що визначаються підстановкою (2.6.5) в (2.6.1) і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових функціональних виразах.

Приклад 2.6.3. Розв’язати рівняння  $y'' + y = 2 \sin x$ .

Почнемо з розв’язання відповідного однорідного рівняння  $y'' + y = 0$ .

Оскільки характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 1 = 0$  має розв’язки  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , то фундаментальною системою розв’язків є  $\{\cos x, \sin x\}$ , отже, загальним розв’язком однорідного рівняння буде  $y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

Перейдемо до відшукування частинного розв’язку неоднорідного рівняння. Для правої частини  $f(x) = 2 \sin x$ :  $\alpha = 0, \beta = 1, m_1 = m_2 = 0$ , тому  $\alpha + i\beta = i$  – корінь характеристичного рівняння, звідси  $k = 1, m = 0$ , тому частинний розв’язок неоднорідного рівняння можна шукати у вигляді:

$$y_q(x) = x(A \cos x + B \sin x);$$

$$y_q' = x(-A \sin x + B \cos x) + A \cos x + B \sin x;$$

$$y_q'' = x(-A \cos x - B \sin x) - A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x.$$

Підставимо  $y_q$  у рівняння:

$$x(-A \cos x - B \sin x) - 2A \sin x + 2B \cos x + x(A \cos x + B \sin x) = 2 \sin x.$$

Як бачимо, доданки з  $x \cos x$ ,  $x \sin x$  взаємно знищились, а прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних функціях  $\cos x$ ,  $\sin x$ , отримуємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів  $A, B$ :

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ 2B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 0; \end{cases} \Rightarrow y_q(x) = -x \cos x.$$

Тепер можемо записати остаточну відповідь:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

*Зауваження.* Припустимо, що ми шукаємо розв'язок рівняння  $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$  і  $y_1(x)$  – частинний розв'язок рівняння  $L[y] = f_1$ , а  $y_2(x)$  – частинний розв'язок рівняння  $L[y] = f_2(x)$ . Тоді  $y_q(x) = y_1(x) + y_2(x)$  частинний розв'язок рівняння  $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ .

Приклад 2.6.4. Розв'язати рівняння  $y'' + y = e^x + x$ .

Як і у попередніх прикладах починаємо розв'язання з відповідного однорідного рівняння  $y'' + y = 0$ . Загальний розв'язок такого самого однорідного рівняння ми вже шукали в попередньому прикладі:

$$y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Розіб'ємо праву частину на два доданки  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , де  $f_1(x) = e^x$ ,  $f_2(x) = x$ .

Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння  $y'' + y = e^x$ . Оскільки  $\alpha = 1$  не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_q^{(1)}(x) = Ae^x \Rightarrow \left(y_q^{(1)}(x)\right)' = \left(y_q^{(1)}(x)\right)'' = Ae^x.$$

Підставляємо в рівняння і знаходимо невизначений коефіцієнт:

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_q^{(1)}(x) = \frac{1}{2}e^x.$$

Перейдемо до рівняння  $y'' + y = x$ . Оскільки  $\alpha = 0$  не є коренем характеристичного рівняння і права частина – це многочлен першого степеня, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді многочлена першого степеня:

$$y_q^{(2)}(x) = Ax + B \Rightarrow (y_q^{(2)}(x))' = A \Rightarrow (y_q^{(2)}(x))'' = 0.$$

Підставляючи в рівняння  $Ax + B = x$ , знаходимо  $A = 1, B = 0 \Rightarrow y_q^{(2)}(x) = x$ .

Отже,  $y_q(x) = y_q^{(1)}(x) + y_q^{(2)}(x) = \frac{1}{2}e^x + x$  і ми отримуємо

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x + x, \quad C_1, C_2 \in R \text{ – загальний розв'язок.}$$

## Лекція 2\_7. Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку.

### Метод варіації довільних сталих.

На відміну від методу невизначених коефіцієнтів метод варіації довільних сталих може бути використаний для довільної правої частини  $f(\cdot) \in C((a, b))$ . Справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.7.1 (про метод варіації довільних сталих).** Якщо відома фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.6.2), то для довільної правої частини  $f(\cdot) \in C((a, b))$  частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.6.1) завжди можна знайти в квадратурах.

Доведення. Доведення теореми є конструктивним і дає процедуру побудови шуканого частинного розв'язку.

Нехай  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  – фундаментальна система розв'язків рівняння (2.6.2). Тоді загальний розв'язок цього рівняння

$$y_{\text{одн}}(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x).$$

Будемо шукати частковий розв'язок неоднорідного рівняння (2.6.1) у вигляді:

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x), \quad (2.7.1)$$

де функції  $\{C_i(x)\}_{i=1}^n$  виберемо з наступних умов:

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i'(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i(x)}_{=0}; \\ \tilde{y}''(x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i''(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i'(x)}_{=0}; \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n-1)}(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)}_{=0}; \\ \tilde{y}^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n)}(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)}_{=f(x)}. \end{aligned}$$

Якщо такий вибір  $\{C_i(x)\}_{i=1}^n$  можливий, то підставляючи (2.7.1) в (2.6.1), маємо

$$\begin{aligned} L[\tilde{y}](x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n)}(x) + f(x) + a_1 \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n-1)}(x) + \dots \\ &\dots + a_n \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) L[y_i](x) + f(x) = f(x), \end{aligned}$$

Отже, формула (2.7.1) визначає частинний розв'язок (2.6.1) тоді і тільки тоді, коли  $\{C_i(x)\}_{i=1}^n$  – розв'язок системи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i'(x) = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Для довільного  $x \in (a, b)$  система (2.7.2) – це лінійна неоднорідна система відносно  $\{C_i'(x)\}_{i=1}^n$ , її визначник

$\Delta(x) = W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0, x \in (a, b)$ , тому існує єдиний розв'язок цієї

системи. Знайшовши  $\left\{C_i'(x)\right\}_{i=1}^n$ , можемо визначити шукані функції

$$C_i(x) = \int C_i'(x) dx.$$

Теорема доведена.

Приклад 2.7.1. Розв'язати рівняння  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ .

Відповідно до методу варіації довільної сталої спочатку побудуємо розв'язок відповідного однорідного рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$ . Оскільки характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  має корінь  $\lambda_{1,2} = 1$  кратності 2, то маємо фундаментальну систему розв'язків  $\{e^x, xe^x\}$  і загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 x e^x$ .

Тепер будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді  $\tilde{y}(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ . Тоді невідомі функції  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  знаходяться з системи

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(xe^x + e^x) = \frac{e^x}{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -1, \\ C_2'(x) = \frac{1}{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x, \\ C_2(x) = \ln|x|. \end{cases}$$

Таким чином, ми отримали  $\tilde{y}(x) = -xe^x + xe^x \ln|x|$ , а тому загальний розв'язок неоднорідного рівняння записується як

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Зауваження 2.7.1.* Вище наведеними методами невизначених коефіцієнтів і варіації довільних сталих можна розв'язувати також і неоднорідні рівняння Ейлера, попередньо здійснивши заміну  $x = e^t$ .

Приклад 2.7.2. Розв'язати рівняння  $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$ .

Впровадимо заміну  $x = e^t$ . Тоді, перерахувавши похідні

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}(y') \cdot e^{-t} = \frac{d}{dt}(y'_t \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y''_t - y') \cdot e^{-2t};$$

отримуємо рівняння  $e^{2t}(y'' - y')e^{-2t} + e^t y'_t e^{-t} + 4y = 10e^t \Rightarrow y'' + 4y = 10e^t$ .

Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння  $y'' + 4y = 0$ .

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 4 = 0$  має корені  $\lambda = \pm 2i$ , тому

$$y_{\text{одн}}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Права частина рівняння  $f(t) = 10e^t$  підпадає під метод невизначених коефіцієнтів, відповідно до якого розв'язок можна шукати у вигляді  $y_q(t) = Ae^t$ . Здійснивши обрахунки, маємо  $y_q(t) = 2e^t$ . Отже, можемо записати загальний розв'язок  $y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2e^t$ , або повертаючись до змінної  $x$ , остаточно отримуємо

$$y(x) = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x) + 2x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

### **Вправи та задачі для аудиторної роботи:**

Розв'язати рівняння, там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкові умови:

1.  $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$ ;
2.  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ ;
3.  $\begin{cases} y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = 3; \end{cases}$
4.  $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$ ;
5.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ ;

### ***Домашнє завдання:***

Розв'язати рівняння:

1.  $y'' + y = 4xe^x$ ;
2.  $y'' - y = 2e^x - x^2$ ;

3.  $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$ ;
4.  $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$ ;
5.  $x^2 y'' - xy' + y = \frac{x}{\ln x} + \frac{\ln x}{x}$ .

## РОЗДІЛ 3. РЯДИ

### Лекція 3\_1. Числові ряди. Ознаки збіжності.

Нехай  $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  – нескінченна числова послідовність. Вираз  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають **числовим рядом**, а числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – членами цього ряду. Відповідно, член  $a_n$  називають **загальним (n-им) членом** ряду. Суму перших  $n$  членів ряду:  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  називають **частинною** сумою ряду.

Якщо послідовність частинних сум ряду є збіжною, тобто існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то ряд називають **збіжним**, а число  $S$  називають **сумою** ряду. Якщо границя послідовності частинних сум  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  є нескінченною або не існує, то ряд називають **розбіжним**.

**Необхідна ознака збіжності ряду.** Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, то його  $n$ -й член прямує до нуля, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбігається.

*Приклад 3.1.1.*

Довести збіжність рядів і знайти їх суми:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$  ; б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$  .

**Розв'язання:**

Для ряду а) загальний член має вигляд  $a_n = bq^{n-1}$ . Сам ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом прогресії  $b$  і знаменником  $q$ . У

випадку, коли  $|q| \geq 1$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$  буде розбіжним, бо не виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} bq^{n-1} = \begin{cases} b, & |q| = 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}$$

У випадку, коли  $|q| < 1$ , ряд є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії і його суму обчислюють за формулою:  $S = \frac{b}{1-q}$ .

Для випадку б) загальний член ряду  $\frac{1}{n^2+3n+2}$  можна записати у вигляді

$$a_n = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Тоді частинна сума ряду  $S_n$  має вигляд:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 + \frac{1}{n+2}$$

Звідси границя послідовності частинних сум:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+2} \right) = 1 = S$$

Отже, за означенням ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$  збіжний і його сума дорівнює одиниці.

У випадку в) загальний член ряду подамо у вигляді

$$a_n = \frac{1+2^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Тоді частинна сума

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$\left( \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + \left( \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) + 2$$

Кожна з дужок є сумою  $n$  членів нескінченно спадної геометричної прогресії, яку можна обчислити за формулою:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^{n-1})}{1-q}$$

Тому

$$S_n = 2 + \frac{1/3(1-(1/3)^n)}{1-1/3} + \frac{2/3(1-(2/3)^n)}{1-2/3} = 2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 2 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right)$$

Звідси отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 2 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) \right) = \frac{9}{2}$$

Отже, ряд збіжний і його сума дорівнює:  $\frac{9}{2}$ .

*Приклад 3.1.2.*

Використовуючи необхідну ознаку збіжності ряду, встановити розбіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n$ .

**Розв'язання:**

За необхідною ознакою збіжності знайдемо границю  $n$ -го члена

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n+2} \right)^n = e^{-2} \neq 0$$

, а це означає, що ряд розбігається.

Якщо всі члени ряду – невід'ємні числа, то числовий ряд називають *знакододатним*. Для дослідження поведінки знакододатних рядів користуються ознаками порівняння та достатніми ознаками збіжності.

**Перша ознака порівняння.** Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  два знакододатних ряди, причому для всіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність  $a_n \leq b_n$ . Тоді:

- 1) якщо збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , то збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- 2) якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний, то і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – розбіжний.

**Друга ознака порівняння.** Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  два знакододатних ряди. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ , то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Для порівняння зручно використовувати такі ряди:

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$  – геометричний ряд, що збігається коли  $|q| < 1$  і розбігається коли  $|q| \geq 1$ ;
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  – узагальнений гармонічний ряд, що збігається коли  $\alpha > 1$  і розбігається коли  $\alpha \leq 1$ . Якщо  $\alpha = 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  називають гармонічним.

**Ознака Даламбера.** Якщо для знакододатного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  існує границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

- 1) при  $q < 1$  ряд збігається;

2) при  $q > 1$  ряд розбігається.

Коли  $q = 1$  поведінка ряду залишається нез'ясованою, можна поспробувати застосувати іншу ознаку збіжності.

**Ознака Коші.** Якщо для знакододатнього ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то

1) при  $q < 1$  ряд збігається;

2) при  $q > 1$  ряд розбігається.

Коли  $q = 1$  поведінка ряду залишається нез'ясованою, можна поспробувати застосувати іншу ознаку збіжності.

**Інтегральна ознака Коші.** Нехай члени знакододатнього ряду такі, що  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ ;  $f(x)$  – неперервна незростаюча функція, що  $f(1) = a_1$ ,  $f(2) = a_2$ ,  $f(n) = a_n$ , ... . Тоді зі збіжності невласного інтеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  випливає збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а з розбіжності інтеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  випливає розбіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

*Приклад 3.1.3.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1) \cdot 2^n}$ .

**Розв'язання:**

Порівняємо загальний член даного ряду із загальним членом збіжного геометричного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$ . Враховуючи, що  $\frac{n}{(3n+1) \cdot 2^n} < \frac{1}{3 \cdot 2^n}$  для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ , за першою ознакою порівняння досліджуваний ряд також збіжний.

*Приклад 3.1.4.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{9n^2+1+n}}$ .

**Розв'язання:**

Порівняємо загальний член даного ряду із загальним членом гармонічного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , що розбігається. Знаходимо границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{9n^2+1+n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+1+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\sqrt{9+\frac{1}{n^2}+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

За другою ознакою порівняння досліджуваний ряд розбіжний.

*Приклад 3.1.5.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)!}$ .

**Розв'язання:**

Застосуємо ознаку Даламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{3^n}{(2n-1)!} \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2n+1)!}$$

Тоді,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (2n-1)!}{(2n+1)! \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n(2n+1)} = 0 < 1$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд збігається.

*Приклад 3.1.6.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$ .

**Розв'язання:**

Застосуємо ознаку Коші. Тут

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)^n = e^{-3/2} < 1$$

Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$  є збіжним.

*Приклад 3.1.7.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ .

**Розв'язання:**

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$ . Для  $\forall x \geq 2$  вона незростаюча, неперервна і така, що  $f(n) = a_n$ . Дослідимо на збіжність невластний інтеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^A \right) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Із збіжності невластного інтеграла впливає збіжність досліджуваного ряду. Отже, за інтегральною ознакою Коші  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$  є збіжним.

## ЗНАКОЗМІННІ ЧИСЛОВІ РЯДИ

Числовий ряд, який містить члени з різними знаками (члени якого чергуються), називають *знакозмінним*.

Знакозмінний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  розбігається, а сам ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  є збіжним, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають **умовно збіжним**.

Для дослідження збіжності знакозмінних рядів застосовують **ознаку Лейбніца**. Якщо члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

взяті за абсолютною величиною, монотонно спадають, тобто

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  є збіжним.

Отже, досліджуючи на збіжність знакозмінні ряди, спочатку розглядають ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  із абсолютних величин членів самого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Для дослідження його поведінки можна застосовувати всі ознаки збіжності знакододатного ряду. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  збігається, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається абсолютно. У протилежному випадку для знакозмінних рядів застосовують ознаку Лейбніца. У випадку виконання умов цієї ознаки маємо умовну збіжність, а при їх порушенні – розбіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

*Приклад 3.1.8.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{3^n}$ .

**Розв'язання:**

Розглянемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{n+1}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Цей ряд є знакододатним. Застосуємо до нього ознаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

Отже, ряд збіжний. А це означає, що досліджуваний ряд абсолютно збіжний.

*Приклад 3.1.9.*

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Розв'язання:**

Розглянемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Це є гармонічний ряд, який розбігається.

Застосуємо ознаку Лейбніца:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Отже, умови ознаки Лейбніца виконуються, тому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  умовно збіжний.

Розмежування рядів на абсолютно та умовно збіжні є істотним. Абсолютно збіжні ряди мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди перестановної властивості не мають: від перестановки їх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитися розбіжний ряд.

Якщо в знакозмінному ряді його суму замінити  $n$ -ою частинною сумою, то тоді допущена похибка не перевищить за абсолютною величиною першого відкинутого члена.

**Задачі для самостійної роботи:**

1. Записати кілька перших членів ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^2; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n-1)(3n+1)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots; \\ & - \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots; \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{6^{n+1}}; \\ & - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \end{aligned}$$

3. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\sqrt{n}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{4n^2-1}.$$

4. Скориставшись ознаками порівняння, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}; \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3+2}; \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2}{n+3}.$$

5. Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити збіжність рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{5^n \cdot n!}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. Записати формулу  $n$ -го члена ряду та дослідити його збіжність за ознакою Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} + \frac{3!}{2 \cdot 4} + \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{7!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots; \\ & - 1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots; \\ & - 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots; \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \dots$$

7. Дослідити збіжність за інтегральною ознакою Коші:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n+5}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+4}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

8. Записати формулу  $n$ -го члена ряду та дослідити його збіжність за інтегральною ознакою Коші:

$$- 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots;$$

$$- \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots;$$

$$- \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$$

9. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи класичну (радикальну) ознаку Коші:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+3}\right)^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1}\right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}$$

10. Визначити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctg n; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln \frac{n}{n+1}\right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^n}$$

## Лекція 3\_2. Функціональні та степеневі ряди.

### Поняття функціонального ряду. Степеневий ряд. (18.05.2020)

Вираз вигляду:

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \dots + U_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

називають **функціональним рядом**.

Якщо у функціональному ряді надати  $x$  деяке значення  $x_0$  з області визначення функції  $U_n(x)$ , тоді отримуємо числовий ряд:

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + U_3(x_0) + \dots + U_n(x_0) + \dots$$

Цей ряд може збігатися та розбігатися. Якщо ряд збігається, тоді точку  $x_0$  називають **точкою збіжності** функціонального ряду, а якщо ряд розбігається, тоді точку  $x_0$  називають **точкою розбіжності** функціонального ряду.

Сукупність усіх точок збіжності функціонального ряду називають **областю збіжності**.

**Теорема (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду).** Функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на деякому проміжку, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

такий, що для всіх  $x$  деякого проміжку мають місце нерівності:  $|u_n(x)| < a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

В даному випадку відповідний числовий ряд називається **мажорантним**, а відповідний йому функціональний ряд – **мажорованим**.

Окремим випадком функціонального ряду є степеневий ряд.

**О.1. Степеневим рядом** називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

де числа  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – коефіцієнти степеневого ряду

*Приклад 3.2.1.*

Знайти область збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ .

**Розв'язання:**

Функції  $U_n(x) = \ln^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , визначені на множині  $X = (0; +\infty)$ . При фіксованому  $x$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$  є числовою геометричною прогресією з  $q = \ln x$ . Він збігається при  $|q| = |\ln x| < 1$ . Розв'яжемо цю нерівність.

$$|\ln x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e.$$

Таким чином, областю збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$  є множина  $D = (e^{-1}; e)$ .

**Теорема Абеля.** 1. Якщо степеневий ряд збігається для деякого значення  $x_0$ , яке не дорівнює 0, то він абсолютно збігається за будь-якого значення  $x$ , для якого  $|x| < |x_0|$ ;

2. Якщо ряд розбігається для деякого значення  $x'_0$ , то він розбігається за будь-якого  $x$ , для якого  $|x| > |x'_0|$ .

**Область збіжності степеневого ряду.**

З теореми Абеля слідує, що якщо ряд збігається при  $x = x_0$  ( $x_0 > 0$ ), то він збігається за будь-якого  $x$ , яке задовольняє нерівність  $|x| < x_0$ , або  $-x_0 < x < x_0$ , тобто ряд збігається на інтервалі  $(-x_0; x_0)$ .

Якщо при  $x = x'_0$  ( $x'_0 > 0$ ) ряд розбігається, тоді він розбігається за будь-якого  $x$ , для якого виконується нерівність  $|x| > x'_0$ , тобто ряд розбігається на інтервалі  $(-\infty; -x_0)$  та  $(x_0; +\infty)$ .

**О2. Областю збіжності** степеневого ряду є інтервал з центром на початку координат.

**Інтервалом збіжності** степеневого ряду називають такий інтервал  $(-R; R)$ , що для всякої точки  $x$ , яка розташована всередині цього інтервалу, ряд збігається абсолютно, а для точок, які лежать ззовні, ряд розбігається. Половину інтервалу збіжності називають **радіусом збіжності** степеневого ряду і позначають  $R$ . Якщо  $R = 0$ , то степеневий ряд збігається лише у точці  $x = x_0$ ; якщо  $R = \infty$ , то ряд збігається на всій числовій осі. Знайти радіус збіжності можна, наприклад, за однією з формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

*Приклад 3.2.2.* Знайти область збіжності ряду:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (x-2)^{2n}}{n}$ .

**Розв'язання:**

а) Для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$  коефіцієнти:  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .

Знаходимо радіус збіжності даного ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \right| = 1.$$

Отже, ряд збігається на проміжку  $(-1; 1)$ . Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При  $x = 1$  ряд має вигляд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  і до нього можна застосувати першу порівняльну ознаку.

Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність:  $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ . Оскільки, числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  збіжний, то і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  також збіжний.

При  $x = -1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$  є числовим знакозмінним рядом.

Ряд, складений з абсолютних величин його членів має вигляд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  і є збіжним, а отже, знакозмінний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$  абсолютно збіжний.

Тому інтервалом збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$  є множина  $D = [-1; 1]$ .

б) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (x-2)^{2n}}{n}$  заміною  $(x-2)^2 = y$ ,  $y \geq 0$  зводиться до степеневого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n y^n}{n}$  з коефіцієнтами  $a_n = \frac{9^n}{n}$  і радіусом збіжності:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{9^n}} = \frac{1}{9}.$$

Це означає, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n y^n}{n}$  збігається в інтервалі  $0 \leq y \leq \frac{1}{9}$ .

Дослідимо поведінку цього ряду у точці  $y = \frac{1}{9}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  є гармонічним рядом, який розбігається. Тому інтервалом збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n y^n}{n}$  є множина  $D = [0; \frac{1}{9}]$ . Повертаючись до змінної  $x$ , маємо:

$$0 \leq (x - 2)^2 < \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x - 2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}.$$

Звідки слідує, що інтервалом збіжності для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (x-2)^{2n}}{n}$  є множина  $D = (\frac{5}{3}; \frac{7}{3})$ .

Ряди, що отримано почленним диференціюванням чи інтегруванням степеневому ряду, мають той самий інтервал збіжності, що і сам ряд, і їх сума всередині інтервалу збіжності дорівнює відповідно похідній чи інтегралу від суми початкового ряду.

Таким чином, якщо  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , то:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad \int_{x_0}^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

де  $-R < x - x_0 < R$ .

*Приклад 3.2.3.*

Знайти інтервал збіжності та суму ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$ .

**Розв'язання:**

Для цього ряду  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ , а радіус збіжності:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right| = 1.$$

У точках  $x = \pm 1$  (кінцях інтервалу) не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому ряд розбігається. Отже, інтервалом збіжності даного ряду є  $(-1; 1)$ .

Позначимо через  $S(x)$  суму степеневому ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$ .

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Перший доданок – це сума нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Для знаходження суми другого ряду застосуємо почленне диференціювання в інтервалі збіжності:

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\text{Звідси, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x} + C = -\ln(1-x) + C.$$

Якщо  $x = 0$  маємо:  $0 = -\ln 1 + C \rightarrow C = 0$

Отже, сума ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$  дорівнює  $S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$  для  $|x| < 1$ .

*Приклад 3.2.4.* Знайти суму ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ .

**Розв'язання:**

Інтервалом збіжності цього ряду є множина  $D = (-1; 1)$ . Позначимо через  $S(x)$  суму ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ .

Тоді,  $\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ .

Всередині інтервалу збіжності для кожного  $x \in [-\rho; \rho]$ ,  $0 < \rho < 1$ , можна записати:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n \int_0^x t^{n-1} dt) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Тобто,  $\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \frac{x}{1-x}$ .

Продиференціюємо обидві частини рівності  $\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

Звідси сума ряду дорівнює:  $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ .

### **Лекція 3\_3. Ряд Тейлора. Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена.**

Розглянемо обернену задачу: задану функцію записати у вигляді степеневого ряду.

Будь-яку функцію нескінченне число разів диференційовану в інтервалі  $|x - x_0| < r$  можна розкласти в цьому інтервалі у збіжний **степеневий ряд Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

якщо в цьому інтервалі виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

де  $R_n(x)$  – залишковий член формули Тейлора (або **остача ряду**),  
 $a = x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Коли  $x_0 = 0$  маємо **ряд Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

**Розвинення деяких елементарних функцій, які найчастіше використовуються, у ряд Маклорена**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} + \dots$$

**Зауваження.** Функцію  $y = \ln x$  не можна розвинути в ряд Маклорена, оскільки в точці  $x = 0$  дана функція невизначена. Тому розвинемо дану функцію у ряд Тейлора за степенями  $x - 1$  (тобто у точці  $x_0 = 1$ )

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \dots$$

**Приклад 3.3.1.**

Розкласти функцію  $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$  у степеневий ряд Маклорена.

**Розв'язання:**

Розкладемо дріб  $\frac{1}{x^2-3x+2}$  на суму елементарних дробів, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x}.$$

Розглянемо кожен доданок окремо:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2\left(\frac{x}{2}-1\right)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2}$$

За умови  $|x| < 2$  множник  $\frac{1}{1-x/2}$  можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії з  $b_1 = 1$  і  $q = \frac{x}{2}$ . Тому

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Аналогічно дріб  $\frac{1}{1-x}$  є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії з  $b_1 = 1$  і  $q = x$  за умови  $|x| < 1$ .

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Отже,

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot 2^n - 1)x^n}{2^n}.$$

Вказана рівність виконується в інтервалі збіжності знайденого ряду, тобто на множині  $D = (-1; 1)$ .

Розклад функцій у степеневі ряди дозволяє обчислювати наближено значення функцій в заданій точці, вважаючи його приблизно рівним сумі  $n$  перших членів відповідного степеневого ряду. Для оцінки похибки знакопостійного ряду, ряд, складений з відкинутих членів порівнюють з рядом збіжної геометричної прогресії. Якщо ж ряд знакозмінний, то абсолютна величина похибки не перевищує модуля першого відкинутого члену ряду, тобто  $|c_{n+1}|$ .

*Приклад 3.3.2.* Обчислити  $\sqrt{e}$  з точністю  $\alpha = 0,00001$ .

**Розв'язання:**

Використовуючи розклад у ряд функції  $e^x$ .

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

маємо:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \dots + \frac{1}{n!2^n} + \dots$$

Похибку цього обчислення визначимо із суми:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} = \frac{x^n}{n!} \left[ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

або

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \left[ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+2)^2} + \frac{x^3}{(n+3)^3} + \dots \right].$$

Вираз у квадратних дужках є нескінченно спадною геометричною прогресією, сума якої дорівнює  $\frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}}$ .

Тому

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}}, \text{ тобто } R_n < \frac{x^n}{n!} \frac{x}{n+1-x}.$$

$$\text{Для цього випадку } R_n < \frac{(1/2)^n}{n!} \frac{1/2}{n+1-1/2} = \frac{1}{n!2^n} \frac{1}{2n+1}.$$

Підбираючи  $n$ , отримаємо необхідну точність. Наприклад, для  $n = 5$

$$R_5 < \frac{1}{120 \cdot 32} \frac{1}{10+1} = \frac{1}{42240}.$$

$$\text{Коли } n = 6, R_6 < \frac{1}{720 \cdot 64} \frac{1}{13} < \frac{1}{100000}.$$

Тобто достатньо взяти суму перших 6 членів, щоб отримати значення  $\sqrt{e}$  з точністю  $\alpha = 0,00001$ .

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \frac{1}{4! \cdot 2^4} + \frac{1}{5! \cdot 2^5} + \frac{1}{6! \cdot 2^6} \approx 1,648719$$

*Приклад 3.3.3.*

Обчислити  $e^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$  з точністю  $\alpha = 0,00001$ .

**Розв'язання:**

Використовуючи розклад у ряд функцію  $e^x$ , маємо:

$$e^{-1/5} = 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \dots \text{Скористаємося наближеною рівністю}$$

$$e^{-1/5} = 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \frac{1}{4!5^4} \approx 0,81873.$$

Беремо п'ять доданків, тому що знакомінний ряд задовольняє умови ознаки Лейбніца і абсолютна величина похибки не перевищує модуля першого відкинутого члену.

Перший з відкинутих членів  $\frac{1}{5!5^5}$ .

**Задачі для самостійної роботи:**

1. Розкласти у ряд Тейлора функцію  $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$  в околі точки  $x_0 = -2$ .
2. Знайти область збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ .
3. Обчислити  $\sqrt[4]{90}$  з точністю  $\alpha = 0,001$ .
4. Знайти радіус та інтервал збіжності ряду. Дослідити його збіжність на границях інтервалу:

A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ; Б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ ; В)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2^n}$ .

5. Записати формулу  $n$ -го члена та дослідити збіжність на кінцях інтервалу:

1)  $1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$ ;

2)  $1 + \frac{x}{\sqrt{5}\cdot 5} + \frac{4x^2}{\sqrt{9}\cdot 5^2} + \frac{8x^3}{\sqrt{13}\cdot 5^3} + \dots$ ;

3)  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ .

6. Розвинути в ряд Маклорена та знайти інтервал збіжності:

1)  $f(x) = x^2 e^{-2x}$ ; 2)  $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$ ; 3)  $f(x) = \sin^2(x)$ .

7. Розвинути в ряд Тейлора функції:

1)  $f(x) = \cos^2 x$  за степенями  $(x - \frac{\pi}{4})$ ;

2)  $f(x) = \ln(5x + 3)$  за степенями  $(x - 1)$ ;

3)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$  за степенями  $(x + 2)$ .

### Лекція 3\_4. Ряди Фур'є.

Ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}),$$

де  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ;  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$ ;  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$ ;  $n = 1, 2, \dots$

називають **тригонометричним рядом Фур'є** функції  $f(x)$  на проміжку  $[-l; l]$ , а числа  $a_n, b_n$  – **коефіцієнтами ряду Фур'є**.

Якщо функція  $f(x)$ , яку задано на проміжку  $[-l, l]$ , кусково-неперервна (або кусково-монотонна) і обмежена, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається у всіх точках проміжку  $[-l, l]$ . Якщо  $S(x)$  – сума ряду Фур'є, то в усіх точках неперервності функції  $f(x)$ .

$$S(x) = f(x),$$

а в усіх точках розриву:

$$S(x) = \frac{1}{2} (f(x - 0) + f(x + 0)).$$

Крім того,

$$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2} (f(l - 0) + f(l + 0)).$$

Сформульовані умови називають **умовами Діріхле**.

Якщо функцію  $f(x)$  задано на довільному проміжку  $[a, b]$  довжиною  $2l$ , то у формулі для коефіцієнтів ряду Фур'є замість  $f(x)$  підставляють значення  $2l -$

періодичного продовження її на всю числову вісь, тобто функцію  $f(x)$  таку, що  $f^*(x + 2l) = f^*(x)$ ,  $f^*(x) = f(x)$ , коли  $x \in [a, b]$ .

Якщо функція  $f(x)$  парна, то коефіцієнти Фур'є знаходять за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а відповідний ряд називають **рядом Фур'є за косинусами**.

Якщо функція  $f(x)$  непарна, то коефіцієнти Фур'є знаходять за формулами:

$$a_0 = a_n = 0; b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Відповідний ряд називають **рядом Фур'є за синусами**.

У випадку, коли функцію  $f(x)$  визначено на проміжку  $[-\pi; \pi]$  і вона задовольняє на ньому умови Діріхле, тригонометричний ряд Фур'є набуває вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x),$$

де  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ;  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx$ ;  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx$ ;  $n = 1, 2, \dots$ .

Якщо при цьому функція парна, то коефіцієнти знаходять за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos n x dx; b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

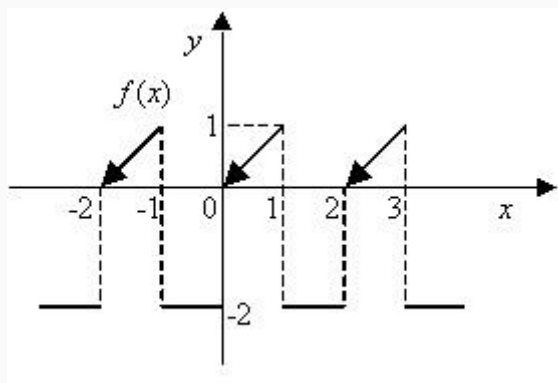
Якщо функція непарна, то коефіцієнти знаходять за формулами:

$$a_0 = a_n = 0; b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin n x dx.$$

**Приклад 3.4.1.** Розкласти в ряд Фур'є функцію  $f(x)$  з періодом  $T = 2$ , що задається умовою  $f(x) = \begin{cases} -2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

**Розв'язання:**

Графік даної функції має вигляд:



Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами:

$$a_0 = \int_{-1}^0 -2 dx + \int_0^1 x dx = -\frac{3}{2};$$

$$a_n = \int_{-1}^0 -2 \cos \pi n x dx + \int_0^1 x \cos \pi n x dx = -2 \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_{-1}^0 + x \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n} dx = \frac{\cos \pi n x}{(\pi n)^2} \Big|_0^1 = \frac{\cos \pi n - 1}{(\pi n)^2} = \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2}.$$

Для знаходження другого інтеграла використано формулу інтегрування частинами. Також враховано, що  $\sin \pi n = 0$ ,  $\cos \pi n = (-1)^n$ ,  $n \in Z$ .

Аналогічно знаходимо коефіцієнти  $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^0 -2 \sin \pi n x dx + \int_0^1 x \sin \pi n x dx = 2 \frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_{-1}^0 - \frac{x \cos \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^1 \frac{\cos \pi n x}{\pi n} = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) - \frac{1}{\pi n} \cos \pi n + \frac{\sin \pi n x}{(\pi n)^2} \Big|_0^1 = \frac{2 - 3 \cdot (-1)^n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Таким чином, розклад функції  $f(x)$  у ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = -\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\pi n)^2} \cos \pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 3 \cdot (-1)^n}{\pi n} \sin \pi n x, \text{ якщо } x \neq k, k \in Z.$$

Зазначимо, що у точках розриву вигляду  $x = 2k$ ,  $k \in Z$  сума ряду:

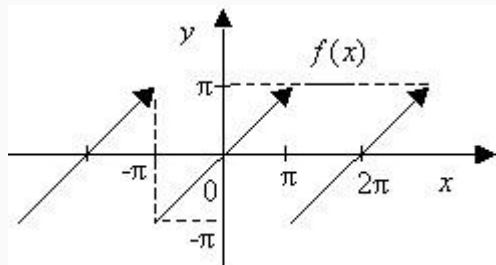
$$S(x) = \frac{0-2}{2} = -1. S(x) = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

В усіх інших точках  $S(x) = f(x)$ .

*Приклад 3.4.2.* Розкласти в ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію  $f(x) = x$ , задану на інтервалі  $(-\pi; \pi)$ .

**Розв'язання:**

Графік даної функції зображено на рисунку.



Задана функція непарна і  $2\pi$ -періодична, тому

$$a_0 = a_n = 0;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}. \end{aligned}$$

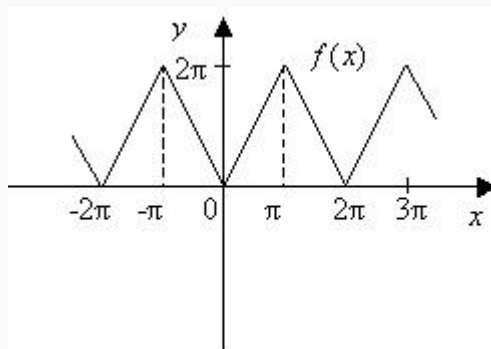
Отже,

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi \sin nx}{n}, & x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

*Приклад 3.4.3.* Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію  $f(x) = 2x$ , задану на відрізку  $[0; \pi]$ .

**Розв'язання:**

Ряд Фур'є за косинусами можна записати для парної функції, тому продовжимо нашу функцію парним чином на відрізок  $[-\pi; 0]$ . Тобто графік функції буде симетричним відносно осі  $Oy$ . У результаті отримаємо  $2\pi$ -періодичну функцію.



У цьому випадку коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$b_n = 0; a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x dx = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos nx dx = \frac{4}{\pi} \left( -\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right) = \frac{4 \cos nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

Отже,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx, \quad x \in R.$$

### Задачі для самостійної роботи:

1. Розвинути у ряд Фур'є  $2\pi$  – періодичну функцію, задану на інтервалі  $(-\pi; \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

2. Розвинути у ряд Фур'є по косинусах функцію  $f(x) = 4 - 3x$ , задану на відрізку  $[0; \pi]$ .

3. Розвинути у ряд Фур'є  $2l$  – періодичну функцію  $f(x) = 1 - |x|$ , задану на інтервалі  $l = 3$ .

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – 3-те вид., випр. і доп., К: Знання, 2007. – 454 с.
2. Горбань Н.В., Ловейкін Ю.В., Сукретна А.В. Фартушний І.Д. Диференціальні рівняння: теорія та застосування [Електронний ресурс]: Навчальний посібник / Н.В. Горбань – Київ: НТУУ «КПІ, 2014». – 218 с.  
Назва з екрану: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/8733>
3. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
4. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник / В.О. Макаренко – К.: Знання, 2008. – 517 с.