

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**  
**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**КАФЕДРА ФІЗИКИ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ**

«На правах рукопису»

УДК

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Халатов А.А

(підпис) (ініціали, прізвище)

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2018 р.

## Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

зі спеціальності 6.040204 Прикладна фізика

на тему: **КЕРУВАННЯ СТРУКТУРОЮ ВИХРОВОГО  
ПОТОКУ В КАВЕРНІ**

Виконав: студент 4 курсу, групи ФФ-42

Савчук Юрій Валерійович \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Керівник д.ф.-м.н, проф. Воропаєв Г.О. \_\_\_\_\_

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант \_\_\_\_\_

(назва розділу)

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище, ініціали)

(підпис)

Рецензент \_\_\_\_\_

(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авторів  
без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

(підпис)

Київ – 2018 року

## **ЗАВДАННЯ**

**РЕФЕРАТ**

## SUMMARY

## ЗМІСТ

Вступ.....	7
Перелік позначень.....	8
Розділ 1. Літературний огляд та постановка задачі.....	9
1.1. Задача керування вихровим потоком та класифікація методів керування ним. ....	9
1.2. Загальна схема потоку в експериментах з каверною. ....	10
1.3. Стисливість повітря та води.....	12
1.4. Вплив в'язкості.....	13
1.5. Вплив числа Рейнольдса. ....	15
1.6. Вплив відношення сторін каверни. ....	17
1.7. Вплив форми каверни.....	18
1.8. Техніка керування мікродувом. ....	19
Висновки з розділу 1. Постановка задачі. ....	20
Розділ 2. Математичний опис турбулентної течії.....	22
2.1. Рівняння руху течії в'язкої рідини. ....	22
2.2. Існуючі методи моделювання турбулентних течій. ....	24
2.3. Моделі турбулентності. ....	26
2.3.1. Модель Бусіненка для примежового шару.....	27
2.3.2. Модель переносу напруг Рейнольдса. ....	28
2.3.3. Моделі $k - \varepsilon$ .....	30
2.3.4. Моделі $k - \omega$ .....	31
2.4. Порівняння моделей турбулентності. ....	31
Висновки з розділу 2.....	33
Розділ 3. Моделювання задачі керування структурою вихрового потоку за допомогою періодичного мікродуву.....	35

	6
3.1. Постановка задачі.....	35
3.2. Математична модель.....	38
3.3. Моделювання без вдуву. ....	39
3.4. Моделювання з вдувом.....	43
3.4.1. Загальна картина течії. ....	44
3.4.2. Завихреність на задній кромці каверни. ....	45
3.4.3. Картина вихрової течії в каверні з вдувом. ....	47
Висновки .....	50
Перелік використаної літератури .....	51

## ВСТУП

Каверни (англ. *cavern*) – порожнини на поверхні об'єктів – розповсюджені в усіх галузях машинобудування. Вони можуть бути функціональними (ніша шасі, бомбовий відсік та ін.), утвореними дефектами поверхні або з'являться внаслідок пошкоджень. При обтіканні рідинами (в т.ч. повітрям) каверни створюють гідродинамічний опір, змінюють підйомну силу та викликають порушення структури потоку. Зменшення негативного впливу каверн на рух швидкісних літаків та човнів є актуальною проблемою що вирішується на всіх стадіях виробництва.

Дослідження структури потоку в об'ємі каверни дозволить вдосконалити існуючий механізм активного впливу на процес вихороутворення (методика мікродуву), що є метою даної роботи.

Метод дослідження полягає в розв'язанні системи рівнянь, що описують потік рідини в області, обмеженій поверхнями. Система складається з рівняння руху та рівняння неперервності. На кожній поверхні задаються граничні умови які описують взаємодію рідини з нею. Розв'язком системи є значення швидкості в кожній точці простору в кожен момент часу.

Прикладом такої системи є рівняння Нав'є – Стокса, що описує рух в'язкої Ньютонівської рідини. Ці рівняння є основою теоретичної гідродинаміки, але на практиці пошук їх аналітичного розв'язку не є продуктивним. Більш ефективним є створення масштабної моделі і застосування аеродинамічної труби для її обдуву. Для візуалізації потоків використовують струйки диму або пари.

Чисельне моделювання поєднує в собі аналітичний та експериментальний підходи. Так, базисом для розрахунку параметрів течії слугують дискретизовані наближення похідних в рівняннях обчислювальної гідродинаміки (руху, нерозривності, збереження енергії та імпульсу, та ін.). Геометрія досліджуваної області простору поділяється на скінченно малі комірки, а час – на скінченно малі відрізки часу. Це дозволяє з наперед заданою точністю отримувати значення поля швидкостей на ЕОМ.

**ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ**

$\mathbf{U}$  – векторне поле швидкостей

$p$  – скалярне поле тиску

$b, d, w$  – довжина, глибина, ширина каверни

$\rho$  – густина рідини

$\eta$  – динамічна в'язкість

$\nu$  – кінематична в'язкість

$Re_b$  – число Рейнольдса, розраховане за характерного розміру  $b$

$M$  – число Маха

$f_b$  – частота вдуву

$f_s$  – власна частота коливань приміжевого шару

$l$  – масштаб перемішування

$\kappa$  – константа Кармана

$\Pi_{ik}$  – тензор напруг

$\delta_{ik}$  – дельта Кронекера

$e_{ijk}$  – символ Леві-Чивіті

$R_{ij}$  – тензор напруг Рейнольдса

$k$  – турбулентна кінетична енергія

$\varepsilon$  – дисипація енергії турбулентності

$w$  – вектор завихреності

$\delta$  – товщина зсувного шару

## РОЗДІЛ 1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1.1. Задача керування вихровим потоком та класифікація методів керування ним.

Станом на сьогоднішній день розробка методів керування структурою вихрового потоку належить до множини найбільш пріоритетних та перспективних напрямків досліджень. Методи керування зазвичай класифікують за змінами параметрів потоку під час їх застосування і необхідністю енергетичних затрат для їх роботи. Основних параметрів, на які впливають методи керування згідно задач, для виконання яких вони застосовуються чотири. Такими параметрами течії є: а) гідродинамічний опір, створений геометрею тіла; б) поведінка примежового шару на обтічній поверхні тіла; в) теплообмін тіла з поверхнею і г) структура течії поблизу тіла, що обтікається. Щодо енергетичних витрат на роботу методів керування, їх поділяють на активні (потребують додаткового внеску енергії) та пасивні (не потребують прямих енергетичних затрат але отримують енергію від набігаючого потоку, перерозподіляючи її в потрібному напрямку) [3].

Відсмоктування, видув або їх періодична комбінація є одним з найбільш поширених методів керування течіями. Серед проміментних пасивних методів є використання регулярних структур на поверхнях обтікання та оптимізація геометрії обтічної поверхні.

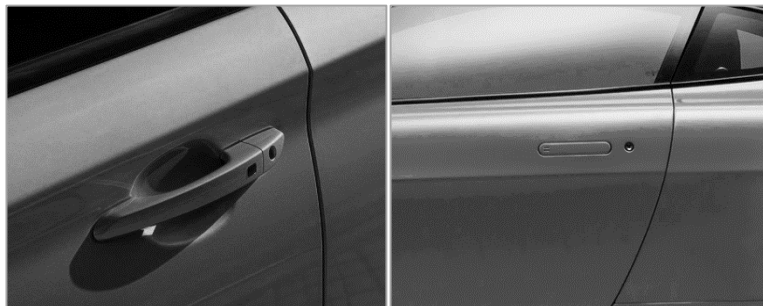


Рис. 1.1. Уникнення геометрії що призводить до збільшення гідродинамічного опору в машинобудівництві.

Одна з характеристик, за якою також можна поділяти методи керування течією є складова течії, на яку в першу чергу спрямовано їх вплив. Існує дві складові течії та, відповідні категорії методів: ті, що впливають на характеристики основної течії та ті, що впливають на пульсаційний турбулентний рух [3].

Широкого використання набув метод метод мікровдуву. Зазвичай, метод використовується для зменшення гідродинамічного опору за рахунок привнесення в область вдуву додаткової кінетичної енергії, що призводить до реструктуризації течії та переважання основної частини потоку над турбулентною. Періодичний мікровдув, в свою чергу, дозволяє гасити коливання, спричинені пульсаційною природою турбулентного потоку, цим самим зменшуючи наслідки цих коливань [13, 15].

## 1.2. Загальна схема потоку в експериментах з каверною.

Більшість дослідників [4, 6, 8, 11, 12, 18] розглядаючи задачу обтікання каверни потоком використовують загальноприйняті трактування при описі своєї роботи. Експериментальні дослідження зазвичай проводяться в аеродинамічній трубці, на одній зі стінок якої, перпендикулярно до напрямку течії, розміщується площина. Площина формує профіль швидкості, залежно від інших параметрів потоку. Заглиблення в площині називають каверною. За характерний розмір каверни приймається глибина  $d$ , або довжина  $b$ . Важливою характеристикою є  $b/d$  – відношення сторін каверни. Найчастіше каверна має форму паралелепіпеда (з плоскими передньою і задньою стінками), або еліпсоїда (з закругленими стінками). Передня стінка – та, яку потік проходить першою, задня – останньою. В нестисливому випадку потік, що обтікає каверну характеризується швидкістю  $U_\infty$ , профілем швидкості  $U(y)$  та в'язкістю  $\nu$ . В'язкість рідини, швидкість потоку та характерний розмір каверни дозволяють обчислити число Рейнольдса.

$$\text{Re}_b = \frac{\rho U b}{\eta} = \frac{U b}{\nu} \quad (1.1)$$

де:  $\rho$  – густина [кг/м<sup>3</sup>],  $U$  – швидкість потоку [м/с],

$b$  – характерний розмір [м],  $\eta = \nu\rho$  – динамічна в'язкість  $\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}\cdot\text{м}}\right]$ ,

$\nu$  – кінематична в'язкість [м<sup>2</sup>/с].

При роботі з нестисливими потоками густина є сталою, через це число Рейнольдса розраховується через кінематичну в'язкість. В нестисливому наближенні повітря і вода є Ньютонівськими рідинами. Для повітря дане наближення справедливе за числа Маха  $M < 0.3$ .

В нижній частині каверни можуть розміщуватись отвори для вдуву/відсмоктування рідини. Як правило, їх розміщують біля задньої стінки каверни, зазначаючи при цьому їх площу, і параметри роботи [10].

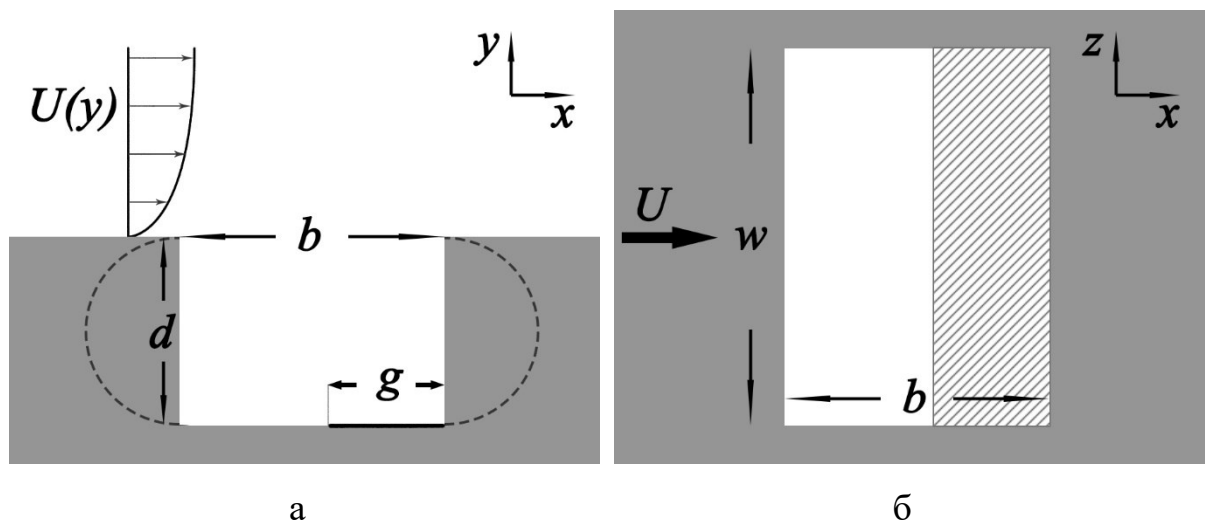


Рис. 1.1. Геометрія задачі: а) вид збоку, б) вид згори.

На рисунку:  $U(y)$  – профіль швидкості потоку,  $b$  – довжина каверни,  $d$  – глибина каверни,  $w$  – ширина каверни,  $g$  – довжина отвору додаткового вдуву, штрих – положення отвору додаткового вдуву, пунктир – можлива форма стінок каверни.

В кавернах, незалежно від форми стінок, утворюються вихори. За формою стінок каверни можна поділити на три основні види: прямокутна (рис. 1.1), еліптична та з закругленими стінками (рис. 1.2). [12]

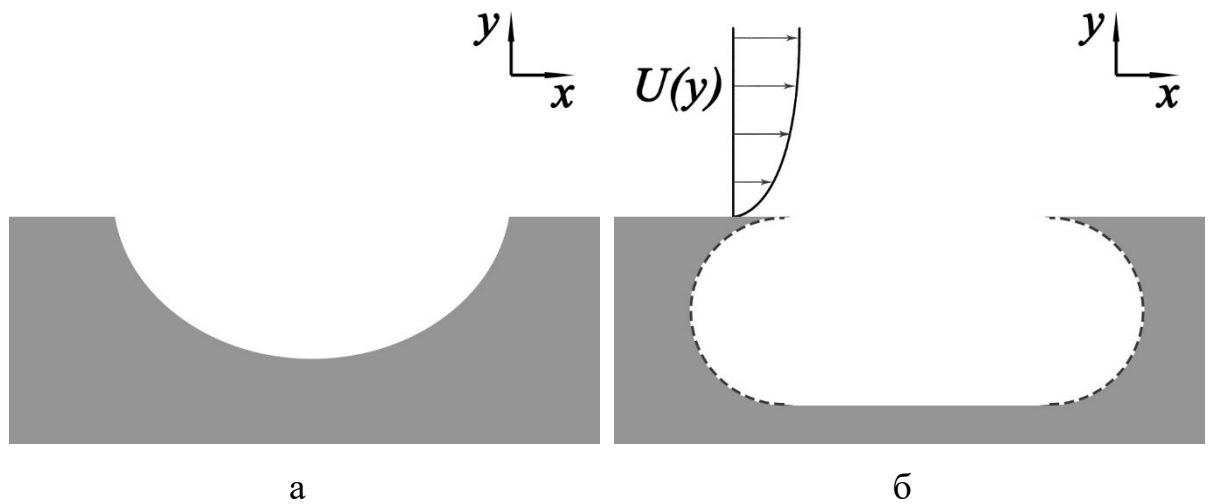


Рис. 1.2. Форми стінок каверни: а) еліптична, б) закруглені стінки.

Закруглення бічних стінок каверни хоча і можливе, втім, не є доцільним. Більшість досліджуваних каверн насправді можна вважати каналами (траншеями), або вважати, що вони мають плоскі бічні стінки.

### 1.3. Стисливість повітря та води.

Для використання рівнянь, що справеливі для нестисливих потоків, необхідне обґрунтування стисливості самих потоків. При використанні води як середовища для експериментів досліджуваний діапазон чисел Рейнольдса на кавернах з характерними розмірами  $0.3 \div 0.6$  м становить  $Re \in (6000 \div 18000)$ . За нормальних умов динамічна в'язкість води становить

$$\eta_{\text{в}} = 8.9 \cdot 10^{-4} \text{ [Па} \cdot \text{с]}$$

Кінематична в'язкість води, вважаючи густину води рівною

$$\rho_{\text{в}} = 1000 \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$$

становить

$$\nu_{\text{в}} = \left( \frac{\eta}{\rho} \right)_{\text{в}} = 8.9 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$$

тоді як для повітря з густиною  $\rho_{\text{п}} = 1.225 \text{ [кг/м}^3\text{]}$

$$\eta_{\text{п}} = 1.81 \cdot 10^{-5} \text{ [Па} \cdot \text{с]}$$

$$\nu_{\text{п}} = \left(\frac{\eta}{\rho}\right)_{\text{п}} = 1.48 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$$

Подібність потоків води і повітря виконується при рівності чисел Рейнольдса, отже справедливе відношення

$$\text{Re}^{\text{в}} = \text{Re}^{\text{п}} = \frac{U_{\text{в}} b}{\nu_{\text{в}}} = \frac{U_{\text{п}} b}{\nu_{\text{п}}} \Rightarrow U_{\text{п}} = U_{\text{в}} \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu_{\text{в}}}$$

Швидкість потоку води, що відповідає даному діапазону чисел Рейнольдса становить  $U_{\text{в}} \in (0.89 \div 2.67) \text{ [м/с]}$ , а для повітря  $U_{\text{п}} \in (0.15 \div 0.44) \text{ [м/с]}$ , що значно менше швидкості, за якої варто починати враховувати ефекти стисливості. Для повітря її значення оцінюють як  $M = 0.3$ , що за нормальних умов відповідає швидкості  $U = 102.9 \text{ [м/с]}$ , значно більшій, ніж в розв'язуваній задачі. Це дозволяє використовувати рівняння руху нестисливої рідини для повітря [20].

#### 1.4. Вплив в'язкості.

Потік вважається в'язким за малих чисел Рейнольдса, коли сили в'язкості, перепадів тиску і зовнішні об'ємні сили, а також рух “ідеальної” нев'язкої рідини, домінують в порівнянні з конвективними інерційними силами. В загальному випадку певна міра в'язкості властива всім потокам [13].

Поблизу кожної поверхні, що обтікається потоком в'язкої рідини утворюється примежевий шар – область течії, в якій швидкість потоку плавно зменшується, що спричинено силами міжмолекулярного тертя. На поверхні, біля якої утворився примежевий шар швидкість потоку нульова. Товщина примежевого шару  $\delta$  – умовна величина, зростає по довжині лінії контакту поверхні і потоку.

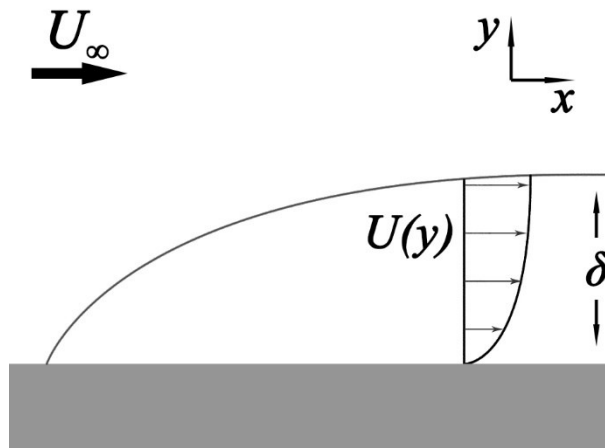


Рис. 1.3. Примежевий шар на пластині і профіль швидкості потоку.

Товщина примежевого шару в рідин з більшою в'язкістю відповідно більша. Якщо товщина примежевого шару відносно велика в порівнянні з товщиною каверни, взаємодія потоку з каверною майже не відбувається, тоді як тонкий примежевий шар швидко руйнується і дозволяє потоку заходити в каверну і взаємодіяти з нею.

Проходження передньої стінки каверни (залежно від її форми) аналогічне проходженню сходинок, що спричиняє відрив потоку, розширення і локальне падіння тиску. Проходження задньої стінки каверни призводить до зіткнення потоку зі стінкою, стиснення і локальне зростання тиску. Таким чином утворюється диполь тиску.

Опір тертя тим більший, чим більша в'язкість середовища. Динамічний опір, спричинений взаємодією вихорів з елементами конструкції навпаки, зростає зі зменшенням в'язкості. Це спричинено тим, що в'язкість запобігає відриву потоку та унеможливує існування стабільних в часі вихорів через дисипацію їх енергії.

Отже, в ситуаціях високої в'язкості каверна не впливає на потік, не створює додатковий опір та не створює "слід" вниз по течії. Поліпшення теплообміну та зменшення динамічного опору не є перспективним.

У випадку низької в'язкості ситуація зворотня: основним джерелом гідродинамічного опору є взаємодія потоку з каверною, вона залишає "слід" вниз по течії, генерує довгоживучі вихори, які розміщуються в каверні та можуть викидатись за її межі.

Найоптимальнішим випадком для керування структурою потоку є проміжні значення в'язкості. Це є компромісом між дисипацією енергії вихорів, “заспокоєнням” системи і опором тертя.

Втім, обирати середовище для експериментів доводиться лише в теорії, адже на практиці ми найчастіше маємо справу з двома рідинами: вода ( $1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) і повітря ( $15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ), отже, на число Рейнольдса впливають характерні розміри каверни та швидкість потоку (в'язкість стала).

### 1.5. Вплив числа Рейнольдса.

За виключенням в'язкості і сталих розмірів каверни, число Рейнольдса є характеристикою швидкості потоку. Діапазон швидкостей можна поділити на два основні режими: ламінарний ( $Re < 6000$ ) і турбулентний ( $Re > 12000$ ). Між ними розташована перехідна зона, тобто при рівномірному збільшенні швидкості перехід між режимами плавний з поступовим наростанням інтенсивності явищ, пов'язаних з великими швидкостями потоку. [8, 9]

За дуже малих чисел Рейнольдса зовнішня течія не утворює вихорів в каверні. Потік, при проходженні каверни плавно розширюється і стискається, повторюючи форми стінок і заповнюючи майже весь об'єм каверни. За малих чисел Рейнольдса (близько 1000) весь об'єм каверни починає обертатись в вихорі. Напрямок обертання вихора такий, що співпадає з напрямком потоку в верхній частині і протилежний йому в нижній. Течія в каверні та набігаючий потік розділені і не обмінюються речовиною [9].

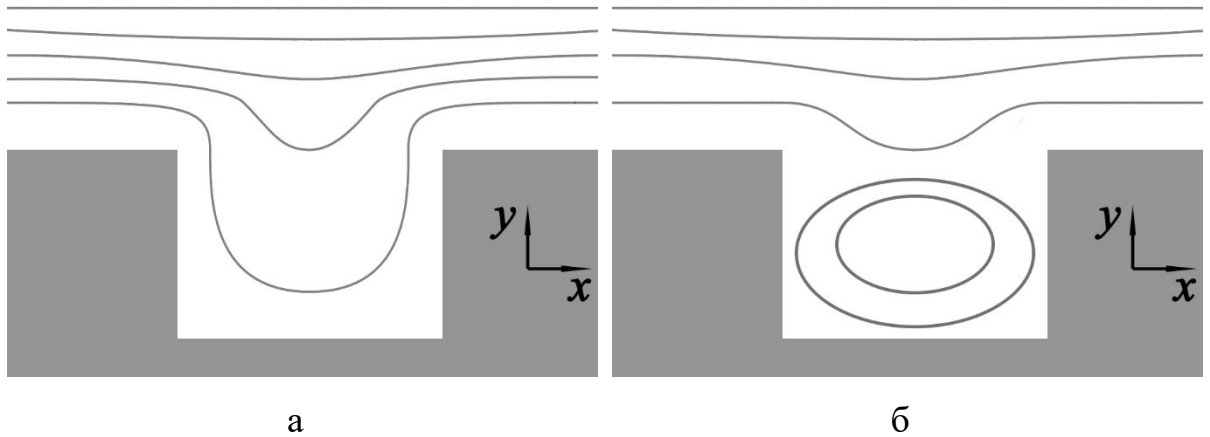


Рис. 1.4. Течія в каверні за малих чисел Рейнольдса:

а)  $Re < 1000$ , б)  $1000 < Re < 7000$ .

Подальше збільшення швидкості потоку зсуває вихор до задньої стінки каверни, і спричиняє зародження другого, маленького вихора в нижньому передньому кутку. Другий вихор обертається в протилежну сторону від першого.

Час від часу можливе утворення збурень в верхній частині каверни, тим частіше, чим більше число Рейнольдса. Це спричинено відривом вихорів з верхньої кромки передньої стінки каверни. Відриваючись, вони переміщуються до задньої стінки і розбиваються об неї. Частина розбитого вихора потрапляє в об'єм каверни. Це збурює перший вихор і призводить до викидів речовини.

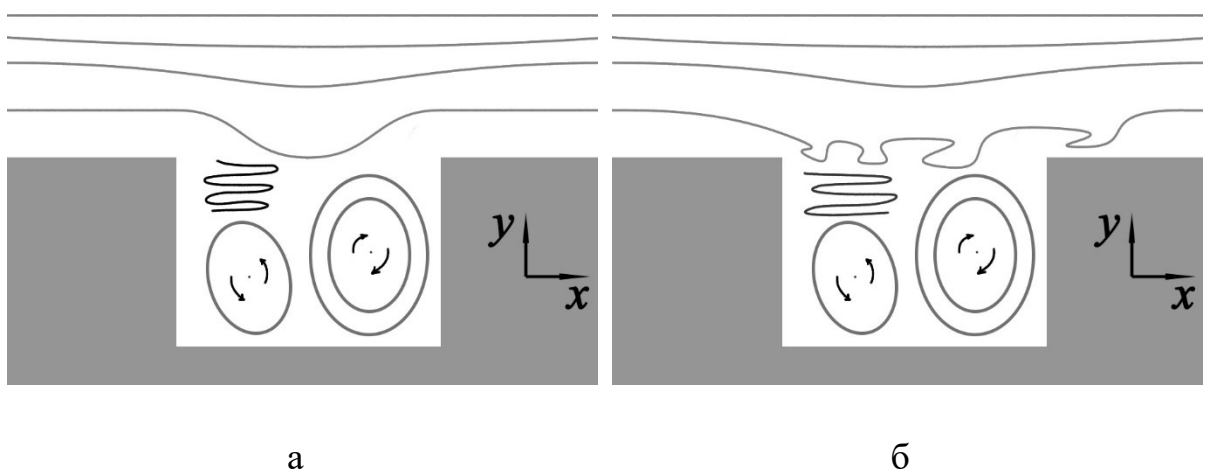


Рис. 1.5. Течія в каверні при збільшенні числа Рейнольдса до критичного значення.

Решта виноситься за межі каверни і формує “слід” вниз по течії. Частота утворення збурень залежить не тільки від довжини каверни (вони формуються подорожуючи вздовж неї після відриву від передньої стінки), а і від швидкості, з якою вона долається. Так, збільшення швидкості потоку пришвидшує частоту утворення збурень [29].

Високі числа Рейнольдса також збільшують інтенсивність як подорожуючих вихорів, так і вихорів в каверні. Це спричиняє більш інтенсивну взаємодію між каверною і потоком.

### 1.6. Вплив відношення сторін каверни.

Каверна має два параметри відношення сторін: відношення довжини до ширини  $b/w$  та відношення довжини до глибини  $b/d$ . З міркувань практичності ці значення мають бути близькими до одиниці (кубічна форма каверни). На практиці найчастіше маємо справу з широкими ( $b/w < 1$ ) та довгими ( $b/d > 1$ ) кавернами.

Вихори, що можуть утворитися в об'ємі каверни обмежені за розміром. Вони можуть бути видовженими, але така геометрія є неоптимальною. Більш ймовірним в порівнянні з одним “витягнутим” є утворення двох (або більше) вихорів.

Чим більша довжина каверни, тим більший проміжок часу, протягом якого зсувний шар взаємодіє з вихровими структурами в каверні. Утворені в зсувному шарі збурення розвиваються протягом проходження над каверною і можуть збільшуватись в розмірі та інтенсивності.

В кавернах зі значенням  $b/d \sim 1$  найефективніше розміщується один вихор, а довжина відрізка, на якому він взаємодіє з примежевим шаром достатньо коротка, щоб взаємодія лишалася слабкою. Вихори, що можуть відриватись від передньої стінки каверни не встигають досягти великих розмірів за такий короткий проміжок шляху, що позитивно впливає на стабільність системи.

Широкі каверни ( $b/w < 1$ ) дозволяють проводити моделювання плоскої задачі в центральному перерізі. Дослідження [14] показують, що збільшення ширини каверни не сильно впливає на внутрішню вихрову структуру. Це дозволяє суттєво скоротити час обчислень розв'язуючи двовимірну задачу. Слід зазначити, що двовимірні моделі дещо відрізняються в поведінці від тривимірних: вони є менш стабільними через обмеження ступенів волі. Окрім цього, в кавернах з помірно великою відносною шириною можливе утворення завихрень, тангенціальних до напрямку потоку, що призведе до відмінностей між картинами течії в перерізах на різних відстанях від центрального.

### 1.7. Вплив форми каверни.

Прямокутна форма каверни на практиці зустрічається найчастіше, але не є оптимальною для вихорів, що існують в її об'ємі та потоку, що її обтікає. На рис. 1.2.а зображено каверну з еліптичною формою стінок [12]. Така конфігурація дозволяє зменшити збурення примежевого шару при проходженні ним передньої і задньої стінок, що в свою чергу зменшує динамічний опір. Але з точки зору існування стабільних вихорів в каверні вона є гіршою за прямокутну форму.

З іншого боку, закруглення прямокутних стінок каверни як показано на рис. 1.2.б повторює форми вихорів та забезпечує відділення їх від основного потоку, що зменшує частоту викидів речовини з каверни та інтенсивність взаємодії з потоком і збуреннями в ньому. Однак ця конструкція не покращує ситуації зі збуреннями примежевого шару, адже проходячи стінки каверни він зазнає стрімкого розширення та контактує з підсиленими вихорами в об'ємі каверни.

Як наслідок, прямокутна форма каверни залишається оптимальною з точки зору простоти виготовлення, гідродинаміки та можливості керування структурою вихрового потоку.

### 1.8. Техніка керування мікродувом.

В багатьох роботах [9, 13, 15] пропонується використовувати техніку мікродуву для керування структурою вихрового потоку в каверні. Техніка полягає в розміщенні в каверні отворів, через які періодично подається незначна кількість рідини (зазвичай тої, що обтікає каверну). Вона має багато спільного з екрануванням (газовою завісою). Принцип дії полягає в тому, що періодичний вдув через отвір, розміщений біля задньої стінки каверни зруйнує вихор, що утворюється біля неї і одночасно запобігатиме руйнуванню збурень примежевого шару об задню стінку, ніби екрануючи її.

Періодичні коливання зсувного шару виникають через те, що на підході до задньої стінки в ньому вже виникли окремі вихори. Ці вихори періодично набігають на верхню частину задньої стінки. Таким чином зсувний шар, що утворюється при проходженні примежевим шаром передньої стінки коливається з власною частотою [8].

Верхня частина вихорів зрізається задньою стінкою каверни і виноситься вниз по течії, утворюючи коливання в примежевому шарі. Нижня частина вихора попадає в об'єм каверни і взаємодіє з елементами структури течії на відносно низьких частотах, призводячи до викидів речовини. Примежевий шар вниз по течії коливається на обох частотах, хоча його власна частота залишається домінуючою. Саме цю частоту використовують для мікродуву.

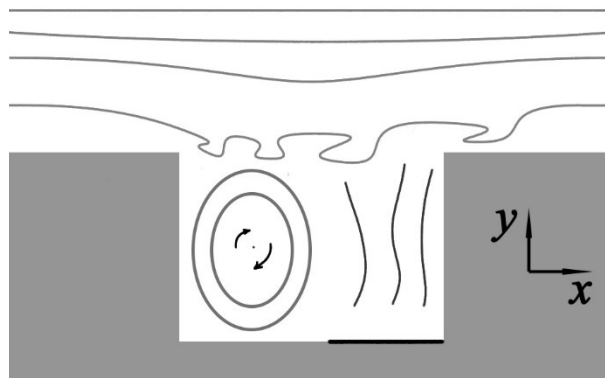


Рис. 1.6. Вплив мікродуву на вихори в каверні.

Залежно від частоти мікродуву, вихрова структура може змінюватись. Незалежно від частоти, вихор, що утворюється біля задньої стінки каверни переміщується в передню частину каверни (рис. 1.6). На його місці утворюється зона, в якій рідина, що вдувається, поступово переміщується до верхньої кромки каверни та «екранує» її від набігаючого потоку. Менший вихор що існував в передній частині каверни зникає, що позитивно впливає на стійкість примежевого шару.

### Висновки з розділу 1. Постановка задачі.

Представлений огляд інформації щодо можливості керування структурою вихрового потоку в каверні свідчить про переважне застосування експериментальних досліджень, адже задача може розглядатись з різних сторін. Математичні методи пошуку аналітичного розв'язку в цьому випадку недостатні, адже звести цю задачу до єдиного формулювання неможливо. Перед дослідниками постає потреба оптимізації конкретної гідродинамічної системи. Результатом проведеного аналізу є наступні висновки:

1. Можливість керування вихровим потоком в каверні обмежена з одного боку функціональними вимогами до каверни, та сукупністю фізичних явищ що впливають на потік з іншого.

2. Механізм періодичного мікродуву орієнтований на конкретну особливість структури течії і не є дослідженим остаточно, отже, потребує подальшого допрацювання і вивчення.

3. Чисельне моделювання є ефективним, а отже пріоритетним підходом для дослідження складних структур що спостерігаються в даній задачі.

4. Найбільше уваги в дослідженні слід приділити детальному вивченню впливу частоти мікродуву та структурі потоку, що виникає в тривимірній постановці задачі.

5. При розробці геометрії для чисельного моделювання слід віддати перевагу тривимірній сітці, адже це дозволить дослідити ефекти, що спостерігаються в перерізі, перепендикулярному напрямку течії.

Мета подальшої роботи має бути сформульована в наступному вигляді: Провести чисельне моделювання та перевірити спроможність методу періодичного мікровдуву керувати структурою вихрової течії в об'ємі каверни для розв'язання основної задачі оптимізації її гідродинамічних характеристик.

## РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТУРБУЛЕНТНОЇ ТЕЧІЇ.

### 2.1. Рівняння руху течії в'язкої рідини.

В математичному моделюванні задач гідродинаміки нестисливих ньютонівських рідин застосовують рівняння Нав'є – Стокса, що являють собою систему диференціальних рівнянь в часткових похідних [15-17]. Вона виводиться з рівняння руху суцільного середовища та рівняння неперервності. Загальний вигляд рівняння руху суцільного середовища має назву рівняння Ейлера:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} \quad (2.1)$$

де  $\Pi_{ik}$  – тензор напруг:

$$\Pi_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta_1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \eta_2 \delta_{ik} \dots \quad (2.2)$$

В тензорному вигляді рівняння Нав'є – Стокса (руху) стисливого середовища записується наступним чином:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta_1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \eta_2 \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

де:  $\rho$  – густина,

$\eta$  – в'язкість,

$p$  – поле тиску,

$\delta_{ik}$  – дельта Кронекера.

Для нестисливого середовища густина є сталою, замість динамічної в'язкості можна користуватись кінематичною, та переписати рівняння:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.4)$$

Характеристикою н'ютонівської рідини є стала динамічна в'язкість, а за додаткової умови нестисливості, сталою стає ще й кінематична в'язкість:

$$\eta = \rho\nu = \text{const}$$

Враховуючи це, рівняння Нав'є – Стокса набуває вигляду:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{U_k \partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \quad (2.5)$$

Для нестисливої рідини додаткова умова нестисливості (аналог рівняння неперервності):

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

Рівняння Нав'є – Стокса фактично постулюють закони збереження маси, імпульсу та енергії для в'язкої н'ютонівської рідини. Невідомими в цій системі є векторне поле швидкостей та скалярне поле тиску. Система дозволяє в повній мірі описати рух рідини за будь-якого режиму течії.

На практиці швидко стає зрозумілим, що точний розв'язок системи можливо віднайти лише за умови ламінарності течії та відносної простоти обтічних поверхонь. Необхідність моделювати різноманітні (не завжди відомі наперед) вихрові структури що варіюються за масштабами розмірів і швидкостей викликає чимало труднощів.

Аналітичний розв'язок задач, аналогічних до поставленої в даній роботі не видається можливим. Втім, і чисельний підхід потребує неабиякої уваги, адже відповідність результатів моделювання реальним явищам, що спостерігаються в експерименті можлива лише за використання дрібних сіток та малих кроків за часом. Як правило, більша швидкість потоку, потребує коротких кроків за часом, а дослідження дрібних структур (і відповідність дійсним структурам) потребує подрібнення сітки, що збільшують час обчислень. При моделюванні тривимірної задачі ці обмеження можуть призвести до повної неможливості розрахунку за адекватний проміжок часу або потребуватимуть розрахункової потужності суперкомп'ютерів.

## 2.2. Існуючі методи моделювання турбулентних течій.

На сьогоднішній день існує три основних методи чисельного моделювання турбулентних течій [13, 15-17]:

1. Пряме чисельне моделювання (Direct Numerical Simulation – DNS);
2. Моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES) [24-27];
3. Напівемпіричне / осереднення по Рейнольдсу (Reynolds-averaged Navier – Stokes equations – RANS).

Найпотужнішим з цих трьох методів є пряме чисельне моделювання. Згідно цього метода, рівняння Нав'є-стокса розв'язуються без застосування моделі турбулентності. Це призводить до того, що цей метод є найвибагливішим до розрахункових можливостей комп'ютера, адже потребує, щоб число елементів розрахункової сітки відповідало умові

$$N \geq \text{Re}^{\frac{3}{4}} \quad (2.7)$$

для достатньої роздільної здатності, щоб проявилися Колмогорівські масштаби часу, розміру та швидкості.

Приблизні оцінки складності прямого чисельного моделювання дають значення порядку  $\text{Re}^3$ , що робить його абсолютно непрактичним на великих числах Рейнольдса.

Втім, даний метод дозволяє розв'язувати систему рівнянь Нав'є – Стокса без використання будь-яких припущень щодо характеру турбулентної течії чи інших маніпуляцій. Він дозволяє отримувати складові тензору напружень Рейнольдса, за допомогою яких знаходяться дифузійні коефіцієнти. Він здатний давати результати високої точності навіть у випадках, коли наявність єдиного розв'язку системи рівнянь Нав'є – Стокса не доведена. Порівняння результатів з фізичними експериментами свідчать про високу точність метода, хоч розрахунки за цим методом потребують обчислювальних потужностей суперкомп'ютерів, навіть при числах Рейнольдса, що не перевищують десятки тисяч.

Інший підхід до моделювання турбулентних течій це метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES), що є спробою адаптувати DNS до можливостей сучасної обчислювальної техніки. Метод базується на DNS але має декілька переваг над ним. Основна ідея методу полягає в тому, щоб зменшити обчислювальне навантаження за допомогою відфільтрування найменших масштабів розмірів, що є найбільш вибагливими. Відфільтрування проводиться за допомогою усереднення в за часом і координатами і фактично прибирає всю дрібномасштабну інформацію з чисельного розв'язку. Ця інформація є важливою частиною розв'язку, а значить, її вплив на потік потрібно моделювати окремо, що є окремим напрямком досліджень в областях, де дрібні масштаби є особливо важливими (пристінні течії, хімічні реакції та багатофазні системи).

Універсального вирішення проблеми LES поки що не знайдено. Динаміка вихрових структур, що мають масштаби більші, за крок сітки моделюється явно, тобто відтворюється відповідними рівняннями, тоді як вплив підсіткових вихорів потрібно апроксимувати, хоча складність цієї підзадачі не залежить від числа Рейнольдса.

З огляду на всі недоліки зазначених методів та значні проблеми з безпосереднім інтегруванням рівнянь Нав'є – Стокса, популярності серед дослідників знайшов підхід, запропанований Рейнольдсом. Він полягає в розкладанні компонент швидкості, тиску та інших змінних (температури, густини, тощо) на осереднені за часом та пульсаційні складові:

$$v_i = U_i + u'_i, \quad p = P + p'$$

де  $U_i$  та  $P$  – усереднені значення, а  $u'_i$  та  $p'$  – пульсаційні.

Подальша підстановка цих розкладених величин в систему рівнянь Нав'є – Стокса і осередненням кожної з отриманих складових рівнянь. Проміжок часу  $T$ , протягом якого проводиться усереднення має бути більшим ніж період найдовших пульсацій турбулентного руху, але дещо меншим за період зміни параметрів течії у випадку нестационарного руху.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

При осередненні враховуємо, що  $\bar{u}' = 0$ , а також, що:

$$u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u'_i u'_k}{\partial x_k} - u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}$$

Виходячи з закону збереження маси:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0$$

У результаті виконаних перетворень система набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial u'_i u'_k}{\partial x_k} \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Дана система має назву – RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes equations) або рівняння Рейнольдса. В тривимірному випадку вона містить в собі десять невідомих і чотири рівняння, тому являється незамкненою. Для її роз'язку необхідно залучати додаткові гіпотези замикання, що називаються моделями турбулентності [10].

### 2.3. Моделі турбулентності.

Як вже зазначалося в попередньому розділі, ключовою проблемою моделювання турбулентної течії є знаходження зв'язків між відомими параметрами течії та невідомими компонентами тензора напруг Рейнольдса, що входить до складу тензора напруг:

$$\Pi_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_k} \quad (2.10)$$

як  $\overline{\rho u'_i u'_k}$ . В повному вигляді тензор напруг має вигляд:

$$\Pi_{ik} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \eta \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \eta \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \eta \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) & \eta \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' u'} \\ \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' u'} \\ \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' u'} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.3.1. Модель Бусіненка для примежового шару.

В моделі примежового шару розглядається задача усталеної плоскопаралельної турбулентної течії ньютонівської рідини за відсутності масових сил та постійного тиску:

$$U_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad P = const, \quad U_y \ll U_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Система вихідних рівнянь в наближенні турбулентного примежового шару приймає наступний вигляд:

$$U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'_x u'_y}}{\partial y} \quad (2.12)$$

Припущення моделі полягає в покладанні тензору напруг Рейнольдса:

$$-\overline{u'_i u'_j} \sim \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

що призводить до наступного вигляду тензору напруг:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \rho(\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

де  $\nu_t$  – уявна, вихрова або турбулентна в'язкість, введена за аналогією з кінематичним коефіцієнтом молекулярної в'язкості  $\nu$ . На відміну від молекулярної в'язкості, вона є функцією течії, а не речовини.

Для визначення коефіцієнту турбулентної в'язкості застосовують припущення Прандтля, що довжина шляху змішування (масштабу

турбулентності) – середня довжина шляху, яку проходить елемент потоку без перемішування, виражається як:

$$l = \kappa y \quad (2.15)$$

де  $\kappa$  – константа Кармана. Тоді коефіцієнт турбулентної в'язкості наближено становить:

$$\nu_t \sim l^2 \frac{\partial U_x}{\partial y} \quad (2.16)$$

Модель була розвинена далі введенням поняття динамічної швидкості та координати і отримала назву моделі Прандтля – Ван Дрифта. Формула (2.15) переписується у вигляді:

$$l = \kappa y \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right] \quad (2.16)$$

$$y^+ = \frac{u_* y}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{(\nu + \nu_t) \frac{\partial U_x}{\partial y}}$$

де  $A^+$  – константа Ван Дрифта.

### 2.3.2. Модель переносу напруг Рейнольдса.

Модель переносу напруг Рейнольдса вважається найбільш класичною моделю турбулентності. Вона повністю уникає введення поняття турбулентної в'язкості і полягає в прямому розрахунку компонентів тензору напруг. При виведенні моделі використовують рівняння руху тензора напруг Рейнольдса, завдяки чому враховуються складні взаємодії в турбулентних течіях. Не зважаючи на меншу вибагливість до обчислювальних потужностей ніж в прямого чисельного моделювання та моделювання великих вихорів, модель дає значно кращу точність.

Рівняння, що описує перенос напруг Рейнольдса  $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  складається з декількох частин:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (2.17)$$

В цьому рівнянні виконується рівність сумарної зміни  $R_{ij}$  з часом і конвекцією та суми змін  $R_{ij}$  через дифузію, виробництво, турбулентні взаємодії, обертання та дисипацію. Шість окремих диференціальних рівнянь відповідають шістьом незалежним напругам Рейнольдса. Лише член, що відповідає за виробництво ( $P_{ij}$ ) не потребує моделювання, всі інші рівняння є незамкненими та потребують моделі замикання.

Член, що відповідає за виробництво в рівнянні переносу напруг Рейнольдса має вигляд:

$$P_{ij} = - \left( R_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + R_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.18)$$

Його фізичний зміст полягає в вираженні протидії градієнту середньої швидкості градієнту напруг Рейнольдса. Він враховує переніс кінетичної енергії від основного потоку до флуктуаційного поля швидкостей, підтримує турбулентність через переніс енергії від крупномасштабних течій до дрібних флуктуацій.

$\Pi_{ij}$  – член, що відповідає за кореляцію напруг відповідає за ізотропність турбулентності. Його фізичний зміст полягає в відображенні взаємодії флуктуаційного поля швидкостей з собою.

$$\Pi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (2.19)$$

Дисипатичний член  $\varepsilon_{ij}$  розраховується з покладання ізотропії дисипативних вихорів та впливає лише на нормальні напруги Рейнольдса.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (2.20)$$

Дифузійний член  $D_{ij}$  моделюється виходячи з припущення, що швидкість переносу напруг Рейнольдса через дифузію пропорційна градієнту напруг Рейнольдса. Найчастіше використовують наступний вигляд дифузійного члена:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right) = \text{div} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla R_{ij} \right) \quad (2.21)$$

Обертовий член записується, як

$$\Omega_{ij} = -2\omega_k(R_{jl}e_{ijl} + R_{il}e_{jkl}) \quad (2.22)$$

де  $\omega_k$  – вектор обертання,  $e_{ijk}$  – символ Леві-Чивіті.

Перевагами моделі переносу напруг Рейнольдса є: розв’язок всіх компонентів турбулентного переносу; найбільша загальність з усіх моделей турбулентності; необхідність задавання лише початкових та граничних умов; здатність добре моделювати відрив потоку, обтікання кривих поверхонь та інші.

### 2.3.3. Моделі $k - \varepsilon$ .

Модель  $K - \varepsilon$  (к –  $\varepsilon$ ) використовується при чисельному моделюванні найчастіше. Вона описує турбулентний рух двома рівняннями переносу. Поштовхом для розробки цієї моделі стала необхідність вдосконалення моделі Бусіненка як альтернатива розрахункам характерних масштабів змішування в складних течіях. Наріжним каменем цької моделі є припущення про ізотропію турбулентної в’язкості.

Рівняння для турбулентної кінетичної енергії  $k$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} + 2\nu_t E_{ij}E_{ij} - \varepsilon \quad (2.23)$$

Рівняння для дисипації  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon}{k} 2\nu_t E_{ij}E_{ij} - \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.24)$$

де  $E_{ij}$  позначає швидкість деформації. В рівняннях можливе використання констант задля найкращої відповідності реальній течії. Недоліком моделі є її недостатня універсальність та необхідність попереднього пошуку параметрів за яких відбуватиметься розв’язок рівнянь моделі.

### 2.3.4. Моделі $k - \omega$ .

Модель  $K - \omega$  (к –  $\omega$ ) також складається з двох рівнянь переносу. Головним положенням цієї моделі є визначення вихрової в'язкості через кінетичну енергію  $k$  та швидкість дисипації кінетичної енергії  $\omega$ :

$$v_t = \frac{k}{\omega}, \quad \omega = \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.25)$$

Рівняння для вихрової кінетичної енергії:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.26)$$

Рівняння для швидкості дисипації:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\omega}{k} R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (2.27)$$

Моделі  $k - \varepsilon$  та  $k - \omega$  мають спільні недоліки. Вони виводяться з припущення про подібну природу впливу турбулентності на основний потік та впливу в'язкості на ламінарний потік. В загальному випадку таке припущення не є справедливим. Проблеми виникають в примежовому шарі, де швидкість потоку сильно гальмується, в той час як рівняння цих моделей підлаштовуються під певну швидкість потоку. Для подолання цієї проблеми застосовуються пристінні функції що модифікують поведінку моделей поблизу стінок.

## 2.4. Порівняння моделей турбулентності.

Одною з головних проблем моделювання турбулентної течії є коректне відтворення процесів, що в ній відбуваються. Рішенням цієї проблеми є встановлення відповідності між тензором напружень Рейнольдса параметрами течії. Використання наближення Бусіненка ця відповідність виражається лінійною залежністю. Суть задачі з використанням моделі турбулентності полягає у визначенні параметрів рівнянь, що відповідають модельованому руху та особливостям геометрії.

Алгебраїчні моделі, до яких відносяться наближення турбулентного примежового шару, є найпростішими. Головний принцип, що використовується при їх побудові полягає в можливості визначити характеристики турбулентності локальними характеристиками осередненого руху (справедливо лише в околі стінки). Головним недоліком алгебраїчних моделей є обмеження, що випливають з неможливості застосування пристінного наближення в решті модельованої області, де переважають великі вихрові структури. Таким чином, область їх застосування обмежується течіями, що мають домінуючий напрям розвитку (примежові шари, струмені). Поділ примежового шару на декілька підшарів також створює додаткові труднощі, пов'язані зі зшиванням моделей різних областей. Втім, завдяки своїй простоті та точності фізичних наближень, алгебраїчні моделі є перспективними в сфері моделювання процесів керування пристінними потоками.

Диференціальні моделі наявні в великій кількості, суттєво відрізняються між собою як за рівнем деталізації, так і за кількістю рівнянь, що використовуються. Багато з них застосовують в своїй основі коефіцієнт вихрової в'язкості, фізичний зміст якого відсутній. Завдяки швидкому зростанню обчислювальних потужностей цей клас моделей турбулентності інтенсивно розвивається. Деякі з моделей (зокрема модель  $K - \omega$  та  $K - \epsilon$ ) вже займають позиції стандартів в індустрії обчислювальної гідродинаміки. Вони відрізняються від алгебраїчних своєю адаптивністю під властиві зовнішній області великомасштабні турбулентні течії. В таких випадках алгебраїчні моделі не здатні до конкуренції з диференціальними. Однак диференціальні моделі мають один суттєвий недолік, він полягає в недостовірності моделювання властивостей турбулентного потоку в околі обтічної поверхні (адже там порушується закладений в основі принцип локальної рівноваги). Цей недолік долається при застосуванні моделі  $K - \omega$ , щоправда це призводить до проблеми з граничними умовами на

межах області моделювання, що призводить до поганого відтворення великих масштабів турбулентності.

Моделі переносу напруг Рейнольдса демонструють найкращі з точки зору фізичності та інформативності результати в порівнянні з алгебраїчними та іншими диференційними моделями але є більш вимогливими до потужності обчислювальної техніки. Модель містить у своїй структурі рівняння переносу ізотропної дисипації  $\epsilon$ , що обумовлює необхідність узгодження з особливостями пристінної течії. Надмірна складність моделі переносу напруг Рейнольдса, враховуючи, що вона має порівняно однакову достовірність з іншими, більш простими моделями, змушує шукати шляхи спрощення, насамперед пошуку алгебраїчних моделей напружень Рейнольдса.

Неуніверсальність моделей турбулентності по відношенню до діапазону масштабів турбулентного руху стимулює розробку нових підходів до вибору структури характеристик турбулентності, для яких будується певна кількість рівнянь переносу. Використання двох різних диференціальних моделей в різних зонах турбулентної течії, так звана «двоступенчата К – омега модель» за словами Ю.В. Лапіна [19] виявилася досить вдалою. Пояснюється це насамперед з використанням у пристінній області К – омега моделі, підлаштованої на дрібні вихрові структури, а в зовнішній – К – епсілон моделі, налаштованої на опис великомасштабних структур.

## Висновки з розділу 2.

1. Наведено вихідні рівняння руху нестисливої н'ютонівської в'язкої рідини та перелік основних підходів до розв'язку поставленої задачі, а саме: пряме чисельне моделювання (DNS), моделювання великих вихорів (LES), моделювання за допомогою рівнянь Рейнольдса (RANS). Проведена оцінка вибагливості цих методів до обчислювальних ресурсів, оцінка точності і

можливості застосування для моделювання задачі керування структурою вихрового потоку в каверні.

2. Проведено аналіз представників сучасних напівемпіричних моделей турбулентності. Визначено їх недоліки та переваги, області, що оптимально підходять для використання тих чи інших моделей.

3. На основі проведеного аналізу було прийняте рішення про подальше проведення моделювання беспосередньо розв'язуючи рівняння Нав'є – Стокса, а отже не застосовуючи моделей турбулентності. Щодо відповідності цього метода прямому чисельному моделюванню (зокрема масштабам часу та розмірів), вирішено не досягати роздільної здатності порядку масштабів Колмогорова а лише наблизитись до неї до моменту утворення нестационарної пульсуючої вихрової течії, що свідчитиме про відповідність фізичним екпериментам.

### РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ СТРУКТУРОЮ ВИХРОВОГО ПОТОКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРІОДИЧНОГО МІКРОВДУВУ

#### 3.1. Постановка задачі.

Для дослідження впливу керування мікровдувом на структуру вихрового потоку в каверні необхідно провести порівняльну характеристику потоку з вдувом та без нього. Виходячи з постановки задачі, сформульованої в висновках до розділу 1 та спираючись на інформацію про найбільш ефективні конфігурації для керування турбулентністю в каверні, було прийняте рішення провести ряд числових моделювань обтікання потоком каверни за різних параметрів течії та вдуву згідно схеми, зображеної на рис. 3.1.

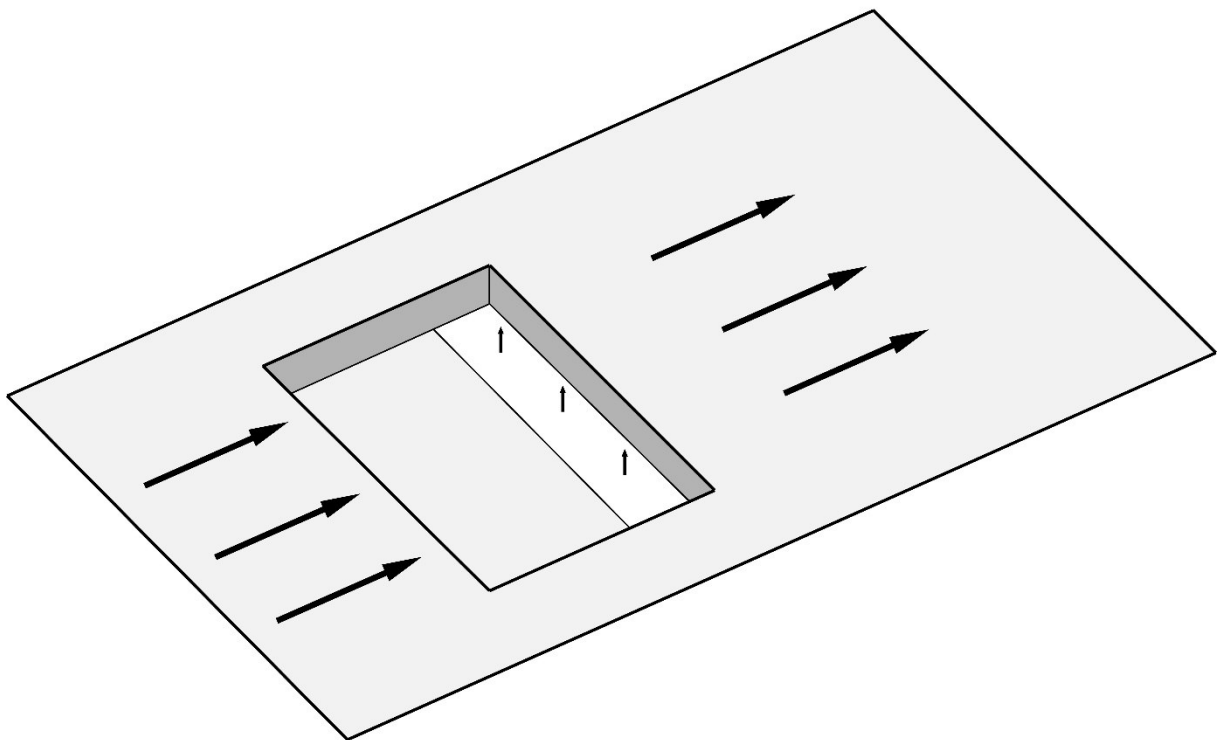


Рис. 3.1. Схема задачі обтікання каверни з періодичним вдувом в задній частині каверни.

Серед сучасного програмного забезпечення, придатного для вирішення поставленої задачі було обрано некомерційний пакет програм OpenFOAM. Геометрія задачі потребує побудови тривимірної сітки. Прямокутна каверна дозволяє будувати регулярну гексагедральну сітку, що добре впливає на точність результатів, швидкість обчислень та простоту побудови.

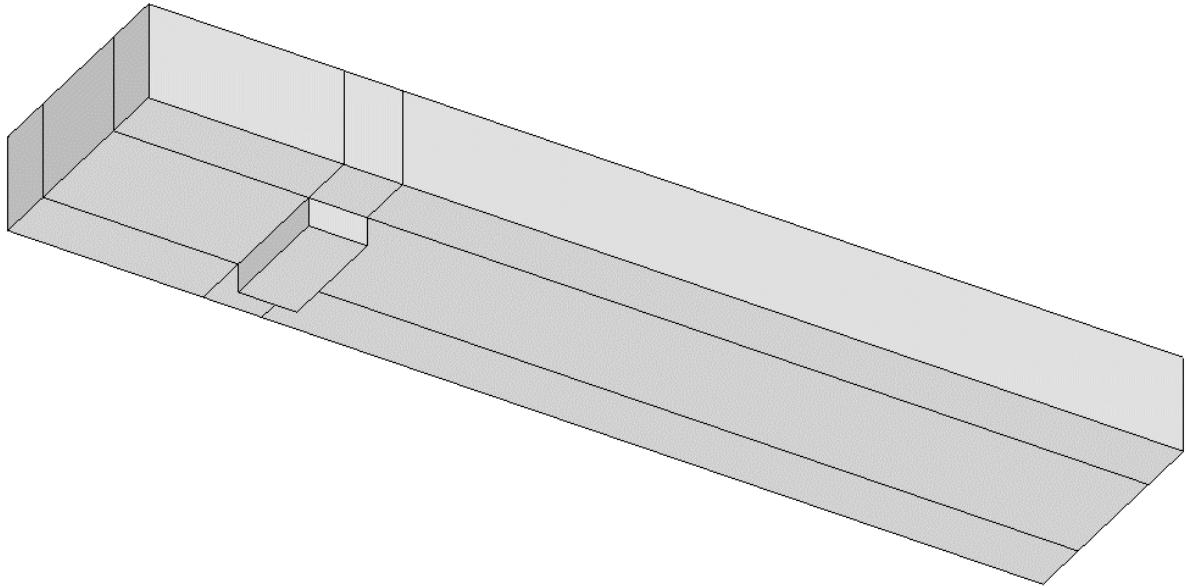


Рис. 3.2. Геометрія розрахункової області. Вид знизу, рух потоку зліва направо.

Пробні сітки з високим розміром комірок будувались для тестування роботи програми. Остаточні параметри сітки за яких турбулентність спостерігалась на числах Рейнольдса, отриманих в результаті досліджень в аеродинамічній трубі [10]. В об'ємі каверни комірки мають розміри 1 x 1 x 5 мм (довжина, глибина, ширина). Розміри каверни складають 60 x 30 x 120 мм (43200 комірок). Каверна знаходиться на нижній площині прямокутної труби, що має розміри 1060 x 100 x 180 мм та налічує лише 377600 комірок завдяки поступовому збільшенню розмірів комірок з віддаленням від каверни. Між стінками труби та бічними гранями каверни лишається відступ в 60 мм, протягом якого ширина комірок збільшується рівномірно з 5 до 10 мм. Каверна розташовується на відстані 200 мм від краю труби, через який подається вдув. На цьому відрізку розміри комірки зменшуються від 10 до 1 мм в напрямку каверни. На відрізку труби

довжиною 800 мм відбувається розрідження сітки від 1 до 20 мм на комірку. Вертикальна дискретизація розрахункової сітки труби відбувається з рівномірним згущенням в напрямку до площини, на якій розміщена каверна від 5 до 1 мм на комірку. Таким чином, загальна кількість об'ємних елементів сітки складає 420800. Об'єм каверни складає 0.6% від об'єму розрахункової області, але на нього припадає 10.3% об'ємних елементів сітки.

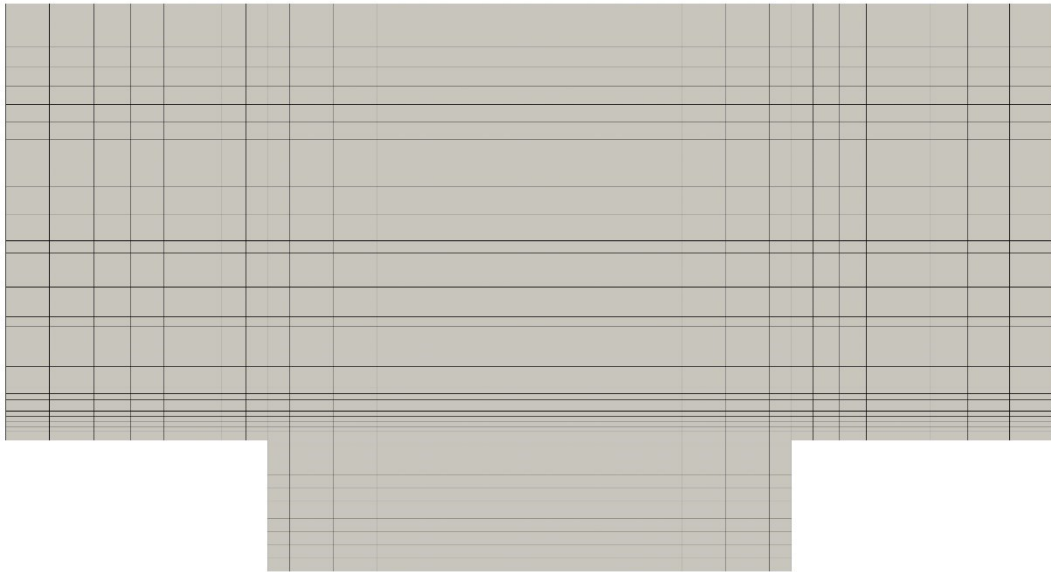


Рис. 3.3. Дискретизація сітки в центральному перерізі каверни, перпендикулярному до напрямку потоку.

Отвір для вдуву (зображений на рис. 3.1) має довжину 20 мм та ширину 60 мм і розташовується в задній частині нижньої стінки каверни.

В якості рідини, що моделюється використовується н'ютонівська модель води з кінематичною в'язкістю  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Для обрахунку числа Рейнольдса за характерний розмір каверни приймається довжина каверни (60 мм).

Згідно інформації, представленій в розділі 1, діапазон чисел, для якого метод мікровдуву здатний призводити до змін в структурі вихрової течії та діапазон переходу від ламінарного до турбулентного режиму течії лежить в межах приблизно від 6000 до 18000. Швидкість потоку, що відповідає даному числу Рейнольдса в даній ситуації лежить в діапазоні від 0.1 до 0.3 м/с.

### 3.2. Математична модель.

Для розв'язку системи рівнянь Нав'є – Стокса використовувався метод PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators), що є модифікацією алгоритму SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [21, 22]. Суть алгоритму полягає в знаходженні зв'язку між швидкістю потоку та тиском ітераційним методом що має один предиктор та два коректори для виконання умови збереження маси. Запишемо рівняння (2.5, 2.6) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla(\nu\nabla\mathbf{u}) &= -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

Нелінійність виду  $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$  може бути розв'язано ітеративно:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \approx \nabla \cdot (\mathbf{u}^0\mathbf{u}^n) \quad (3.1)$$

де  $\mathbf{u}^0$  – існуючий розв'язок на початку ітерацій а  $\mathbf{u}^n$  – новий розв'язок. Критерієм завершення ітерацій є рівність  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^n$ .

Система диференціальних рівнянь з двома змінними (швидкість – тиск) має нелінійний член конвекції та лінійний член, що пов'язує тиск зі швидкістю. За малих чисел Куранта, зв'язок тиску і швидкості переважає над нелінійним членом. Через це можливо здійснити певну кількість ітерацій коректора без повторної дискретизації рівняння руху. В такому випадку перший коректор тиску розраховує потік поля швидкостей, а другий – розподіл поля тиску. При дискретизації рівняння руху градієнт тиску лишається незмінним:

$$a_P^u \mathbf{u}_P + \sum_N a_N^u \mathbf{u}_N = \mathbf{r} - \nabla p \quad (3.2)$$

Вводимо оператор  $\mathbf{H}(\mathbf{u})$  такий, що:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{r} - \sum_N a_N^u \mathbf{u}_N \quad (3.3)$$

$$a_P^u \mathbf{u}_P = \mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p, \quad \mathbf{u}_P = (a_P^u)^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p)$$

Зробивши заміну в нестисливому варіанті рівняння неперервності отримуємо рівняння тиску нестисливої рідини:

$$\nabla \cdot [(a_p^u)^{-1} \nabla p] = \nabla [(a_p^u)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{u})] \quad (3.4)$$

Дискретизація рівняння неперервності має наступний вигляд:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_f \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{u} = \sum_f F \quad (3.5)$$

де  $F = \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{u}$  – потік через грані дискретної комірки. Виконуючи підстановку швидкості з (3.3), маємо:

$$F = (a_p^u)^{-1} \mathbf{s}_f \cdot \nabla p + (a_p^u)^{-1} \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{H}(\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

Така математична модель дозволяє не використовувати модель турбулентності, жодна з яких не здатна до точного відтворення зовнішньої і внутрішньої течії.

Для обробки результатів знадобиться користуватись ще одною фізичною величиною – завихреність поля швидкості. Вона визначається за формулою

$$\bar{w} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.7)$$

### 3.3. Моделювання без вдуву.

Для визначення частоти вдуву та порівняння впливу керування необхідно провести моделювання каверни без вдуву за різних швидкостей потоку (0.1, 0.2 та 0.3 м/с).

Профілі швидкості, що утворюються на передній кромці каверни зображені на рис. 3.3. Порівнюючи товщину зсувного шару з теоретичною, отриманою за формулою [30]

$$\delta \cong 5 \sqrt{\frac{v x}{U}} \quad (3.8)$$

Для швидкостей 0.1 ÷ 0.3 м/с товщина зсувного шару на відстані 200 мм лягає в діапазон 4 ÷ 7 мм, що відповідає результатам, отриманим при моделюванні.

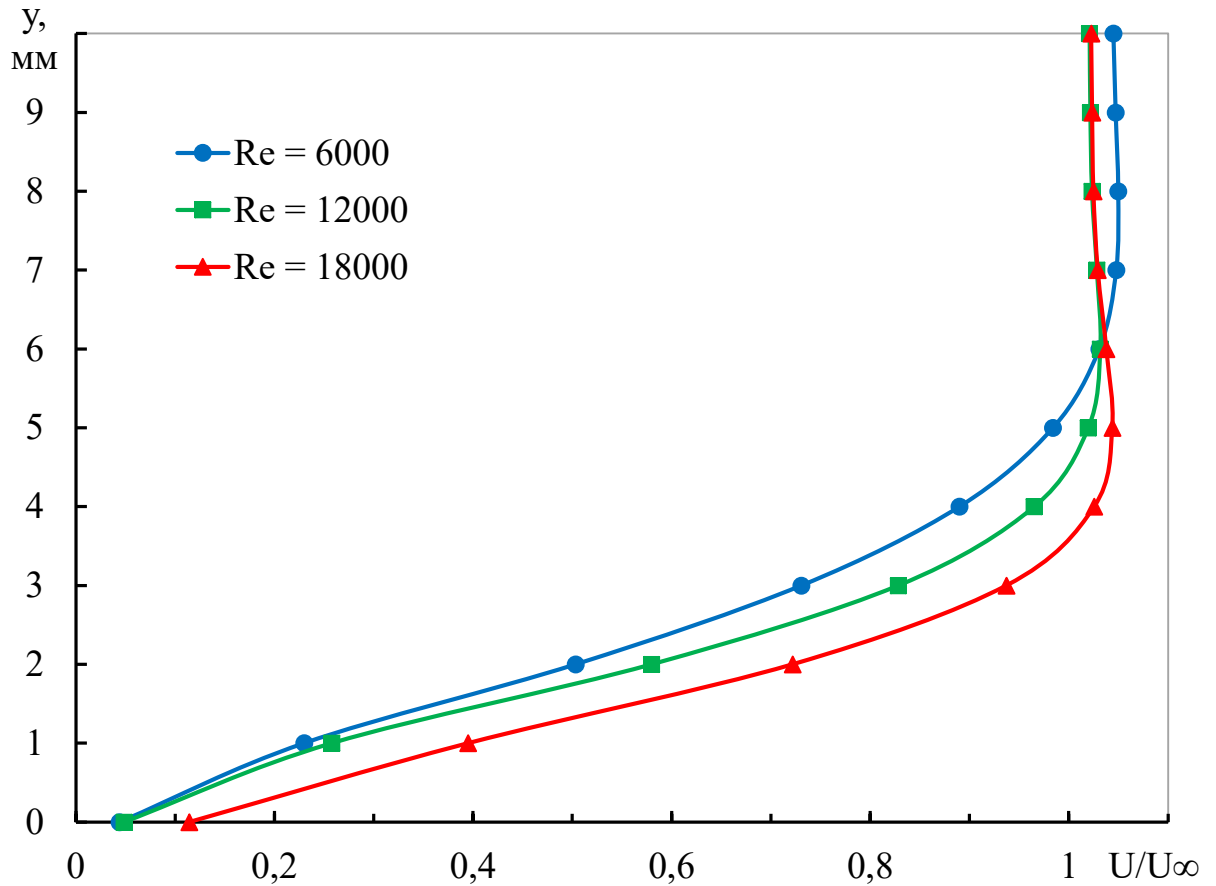


Рис. 3.3. Профілі швидкості відстані  $x = 200$  мм за різних чисел Рейнольдса без вдуву.

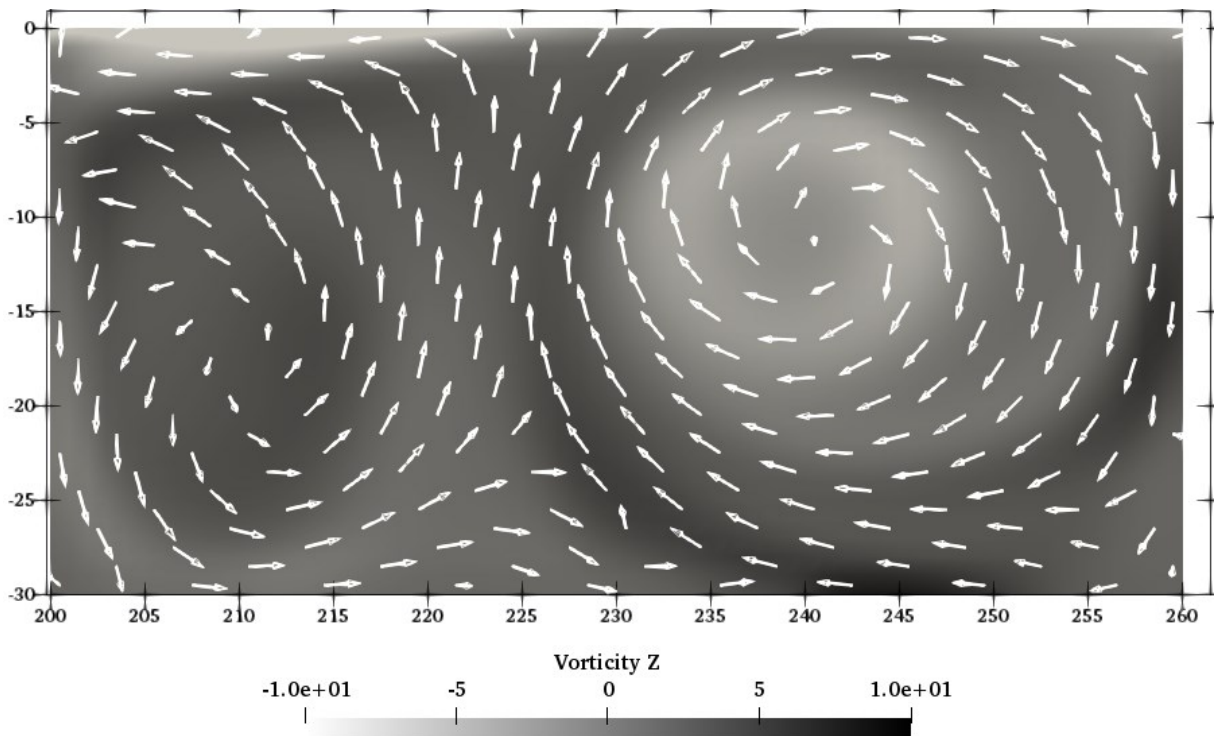


Рис 3.4. Поле завихреності що встановлюється в центральному повздовжньому перерізі каверни при ламінарному режимі ( $Re = 6000$ ).

На рис. 3.4 зображено область каверни та вихрову структуру, що утворюється в ній. За малих чисел Рейнольдса вона є стійкою. При збільшенні числа Рейнольдса стійкість втрачається, Вихор, що існує біля задньої стінки каверни починає руйнуватись взаємодіючи зі збуреннями зсувного шару (розвиток зображено на рис. 3.5).

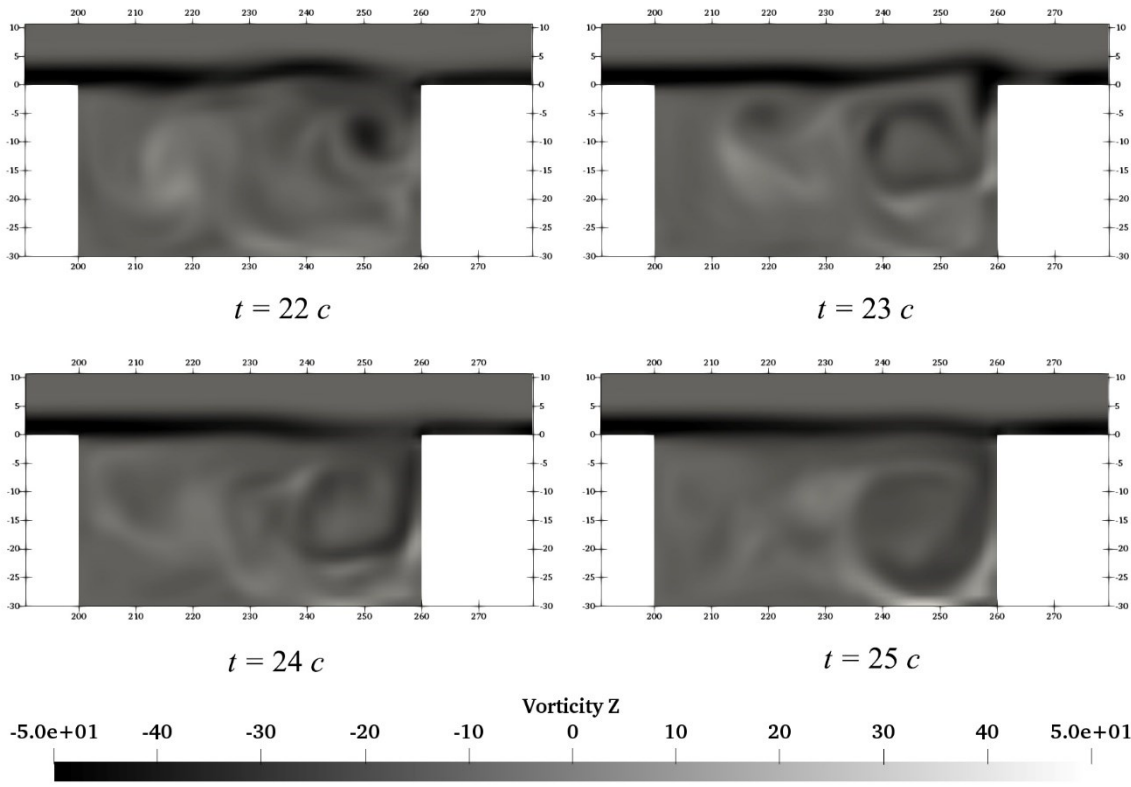


Рис. 3.5. Нестійкі вихрові структури в каверні без вдуву за  $Re = 12000$ .

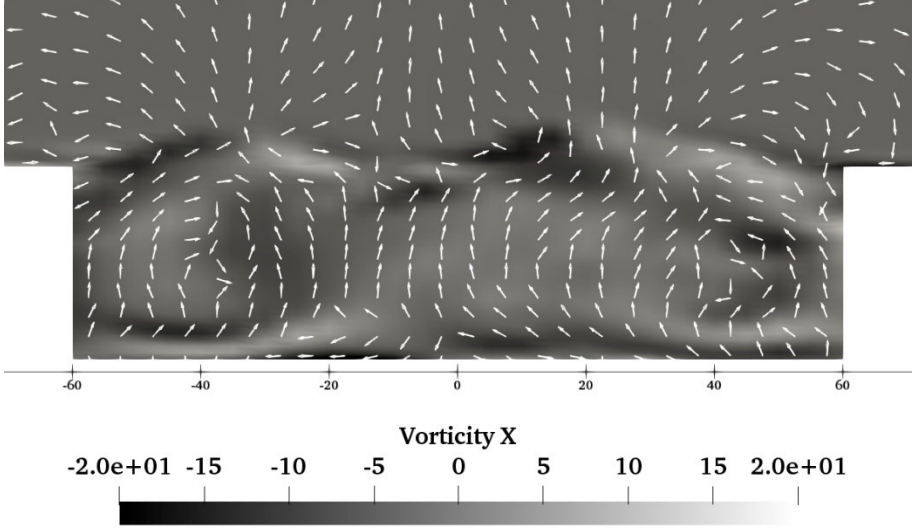


Рис 3.6. Асиметрична вихрова структура центрального перерізу каверни, нормаль паралельна напрямку обдуву.

З рис. 3.6 видно, що вихрова структура в каверні при  $Re = 12000$  дещо несиметрична, що ставить під сумнів можливість використовувати результати досліджень плоских каверн для каверн скінченної довжини.

Визначення частоти вдуву відбувається завдяки вимірам частоти осциляцій зсувного шару. Для цього використовуємо зміни значення завихреності на задній кромці каверни з часом (рис. 3.7), аналізуючи їх амплітудно-частотну характеристику методом Фур'є (рис. 3.8).

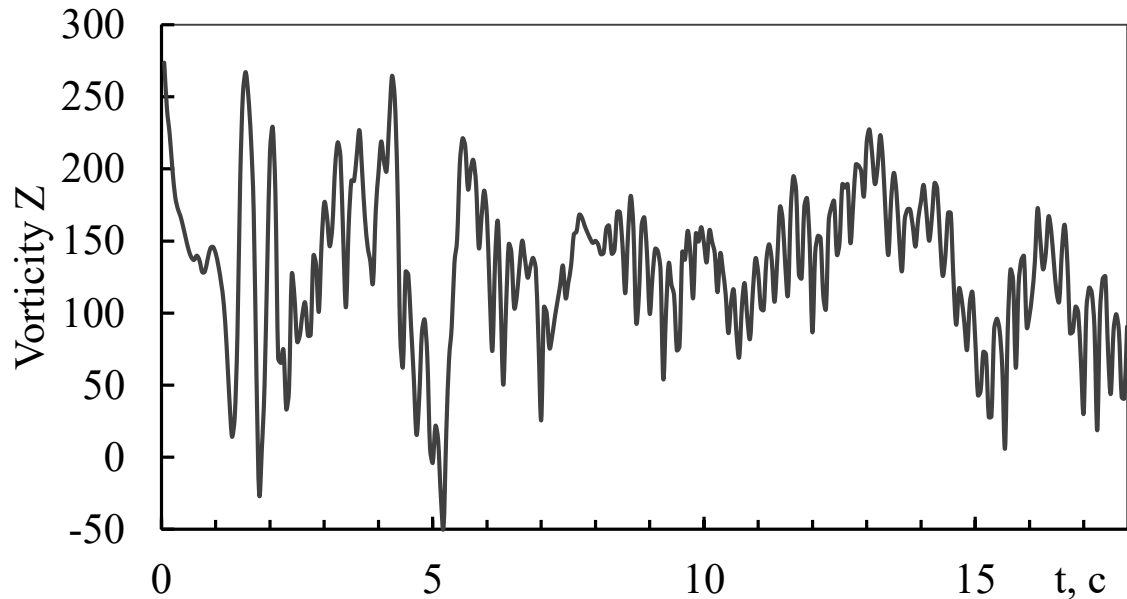


Рис. 3.7. Графік коливань завихреності на задній кромці каверни при  $Re = 15000$ .

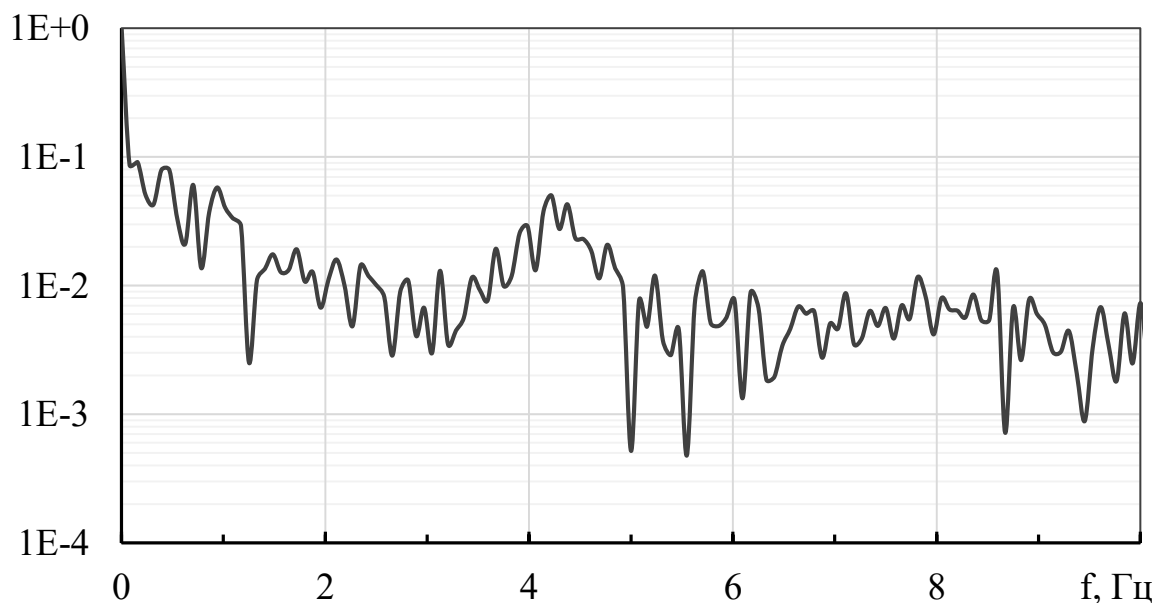


Рис. 3.8. Нормована АЧХ коливань завихреності при  $Re = 15000$ .

На рис. 3.8 видно пік на частоті  $f_s = 4$  Гц (зважаємо на логарифмічний масштаб). Саме від цієї частоти слід відштовхуватись при підборі  $f_b$  для керування вдувом при даній швидкості набігаючого потоку.

Амплітуда коливань на частоті  $f_s$  складає приблизно 5% від сталої компоненти сигналу (що може відрізнятись при інших режимах течії та геометріях каверни), тож амплітуда швидкості вдуву підбирається такою, що становить 5% від швидкості основного потоку.

### 3.4. Моделювання з вдувом.

Наведемо використані в моделюванні параметри течії (число Рейнольдса, відповідну частота коливань зсувного шару  $f_s$ ) а також параметри вдуву (частота вдуву  $f_b$ , швидкість вдуву  $U_b$ ) в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Параметри моделювання.

№	Re, $10^3$	$f_s$ , Гц	$f_b$ , Гц	$U_b$ , м/с
1	6	2.8	Без вдуву	
2	12	3.5		
3	15	4.2		
4	18	9.8		
5	15	4.2	4	0.025
6			8	0.025

Сигнал, що описує періодичну залежність швидкості вдуву від часу має форму трикутної хвилі з частотою  $f_b$ , максимальним значенням  $U_b$  та мінімальним значенням нуль. Осереднена за періодом швидкість вдуву дорівнює половині  $U_b$ .

Розрахунки № 1 – 4 використовувались для визначення залежності між числом Рейнольдса та частотою  $f_s$ , результати більш детально описані в роботі [29], № 3, 5 для виконання досліджень впливу періодичного вдуву та будуть більш детально описані далі.

### 3.4.1. Загальна картина течії.

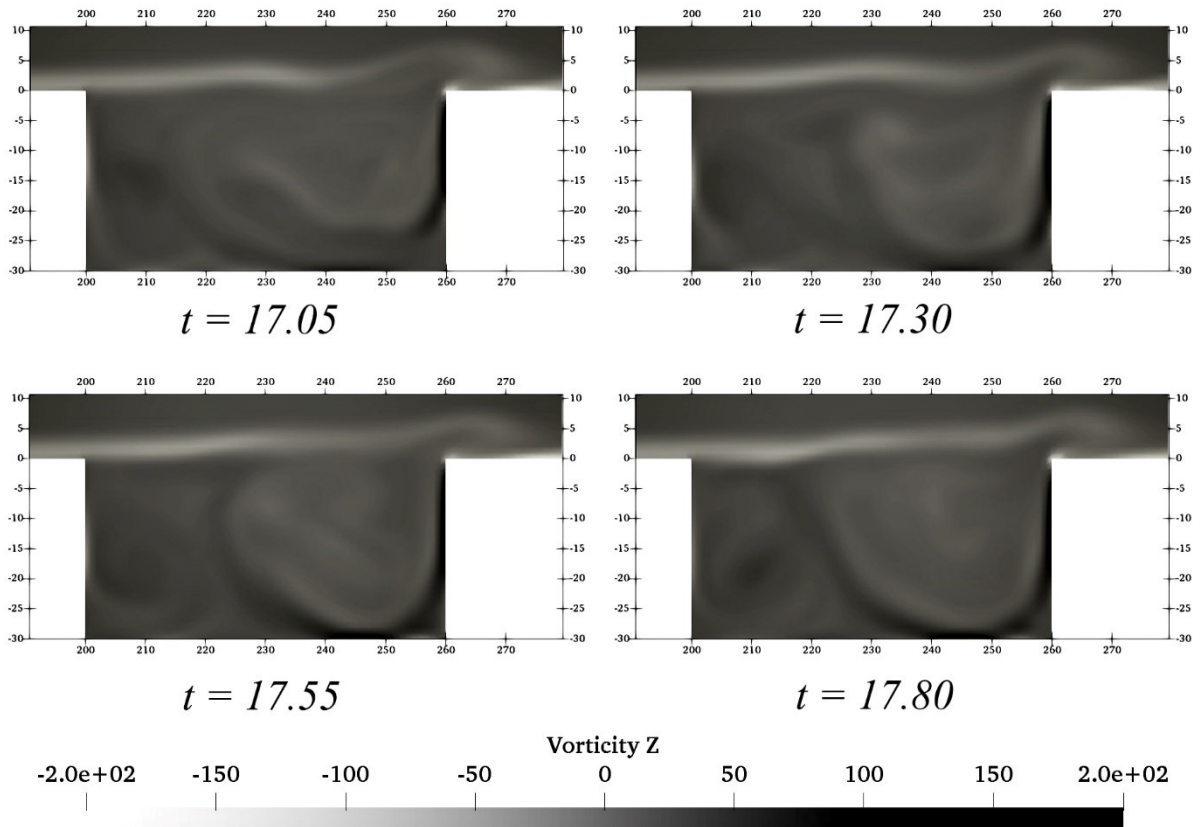


Рис. 3.9. Рух поля завихреності в камері в експерименті № 3 (таб. 3.1).

Порівняємо поля завихреності та коливання завихреності на задній кромці в камері з експериментів № 3 та № 6 (рис. 3.10, 3.11):

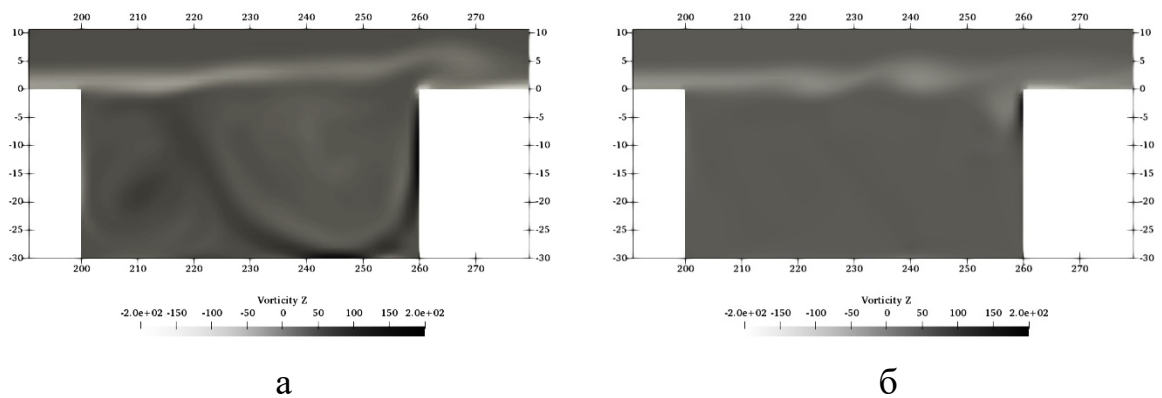


Рис. 3.10. Поле завихреності:

а) без вдуву, б) з вдувом на частоті  $f_s$  та амплітудою 0.025 м/с.

## 3.4.2. Завихреність на задній кромці каверни.

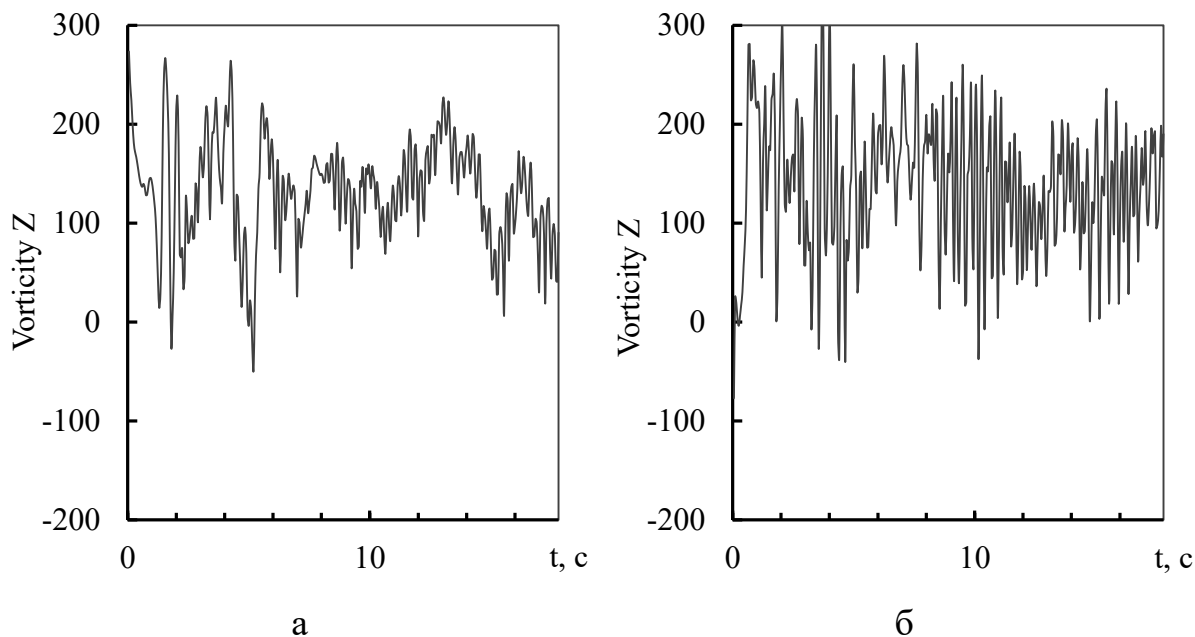


Рис. 3.11. Значення завихреності на задній кромці каверни:

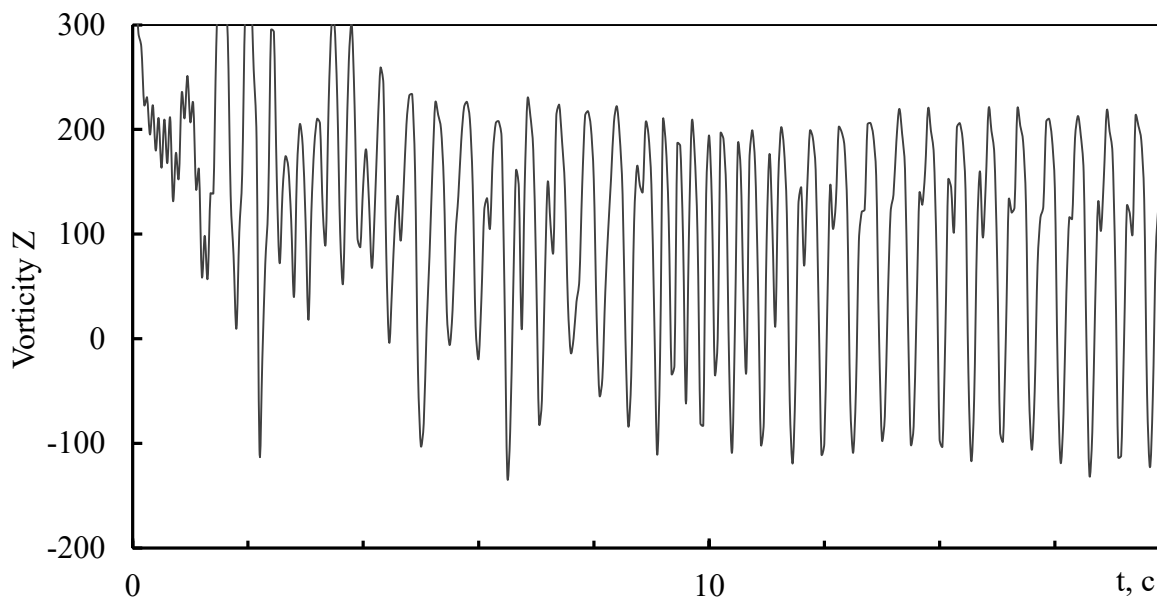
а) без вдучу, б) з вдучом на частоті  $f_s$  та амплітудою 0.025 м/с.

Рис. 3.12. Значення завихреності на задній кромці каверни

з вдучом на частоті  $2f_s$  та амплітудою 0.025 м/с.

Спостерігається значне підсилення завихреності на задній кромці каверни. Незважаючи на це, вихрова структура в об'ємі каверни практично зникає. Проаналізуємо спектр частот коливань завихреності з дослідів № 5, 6.

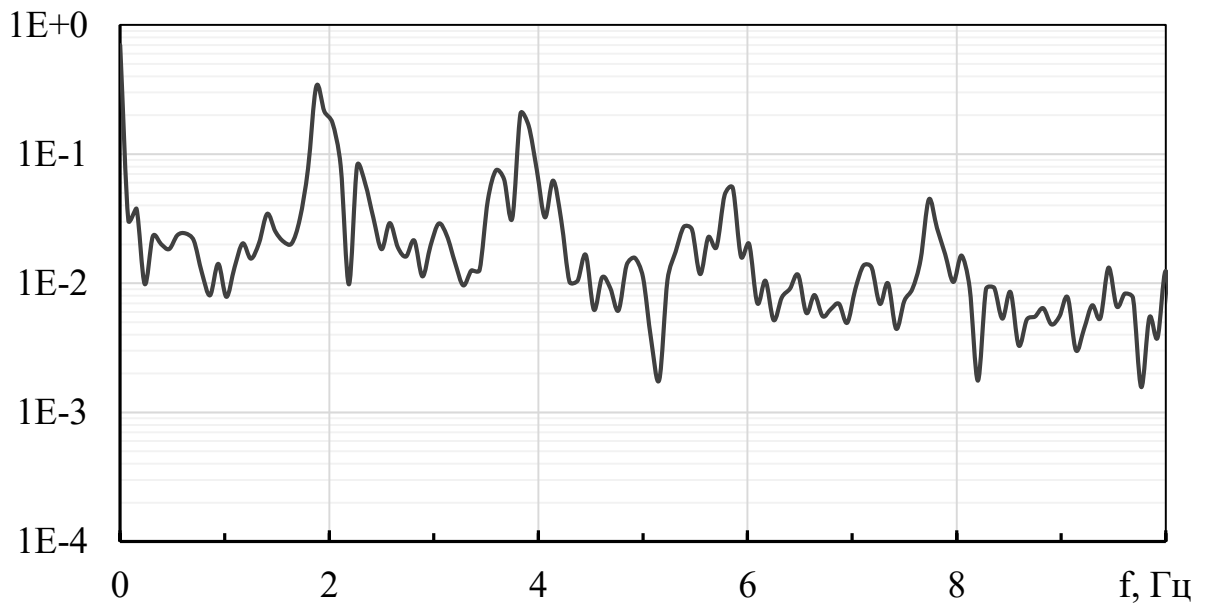


Рис. 3.13. АЧХ коливань завихреності при  $Re = 15000$ , вдуві з частотою  $2f_s$ , нормована на значення амплітуди на нульовій частоті з рис. 3.8.

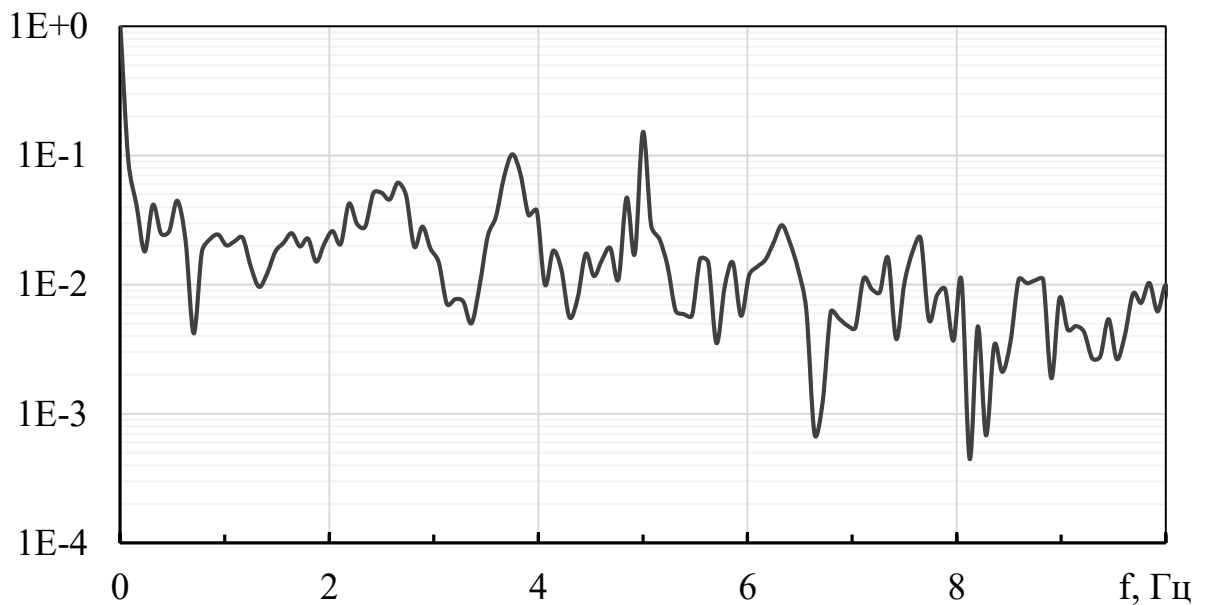


Рис. 3.14. АЧХ коливань завихреності при  $Re = 15000$ , вдуві з частотою  $f_s$ , нормована на значення амплітуди на нульовій частоті з рис. 3.8.

Зазначимо, що стала компонента коливань завихреності (константа нормування АЧХ) (за  $f = 0$  Гц) при вдуві з частотою  $2f_s$  на 30% менша ніж в експерименті без вдуву, що свідчить про зменшення завихреності. При вдуві з частотою  $f_s$  даний ефект не спостерігається. З'являються моди коливань зсувного шару з частотою, що дорівнює подвоєній частоті вдуву.

## 3.4.3. Картина вихрової течії з вдупом.

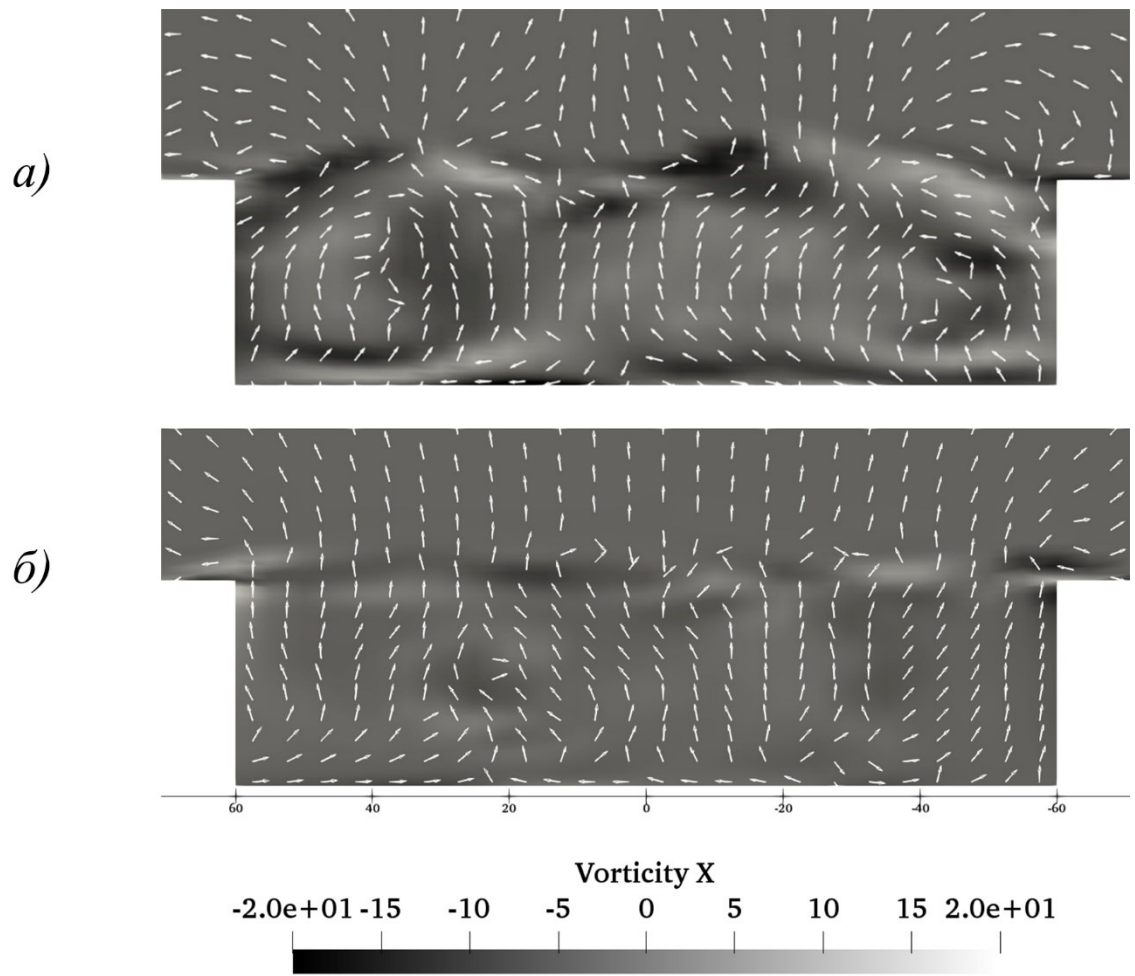


Рис. 3.15. Порівняння поля повздовжньої завихреності в каверні а) без вдупу, б) з вдупом

З рис. 3.15 чітко видно послаблення вихрової структури завдяки періодичному вдупі. Слід зазначити, що такий вплив на вихрову структуру періодичний вдуп чинить незалежно від частоти. В даному випадку вдуп відбувається на частоті  $f_s$ .

Також незалежною від частоти вдупу лишається асиметрія вихорів, зображена на рис. 3.15. Окрім просторової асиметрії спостерігаються періодичні зміни напрямку вихорів, що обертаються в площині  $YZ$ .

Найпотужнішими є вихори, що утворюються на бічних кромках каверни. Це означає, що моделювання каверни як нескінченної траншеї, що простягається в напрямку осі  $Z$  не дає достатньої точності. Розглянемо

більш детально структуру течії в площині  $XZ$  та на відстані 1 мм від площини, на якій розміщується каверна. Вплив вдуву на регулярність течій примежового шару, що утворюється вниз по течії, наглядно демонструється на рис. 3.16.

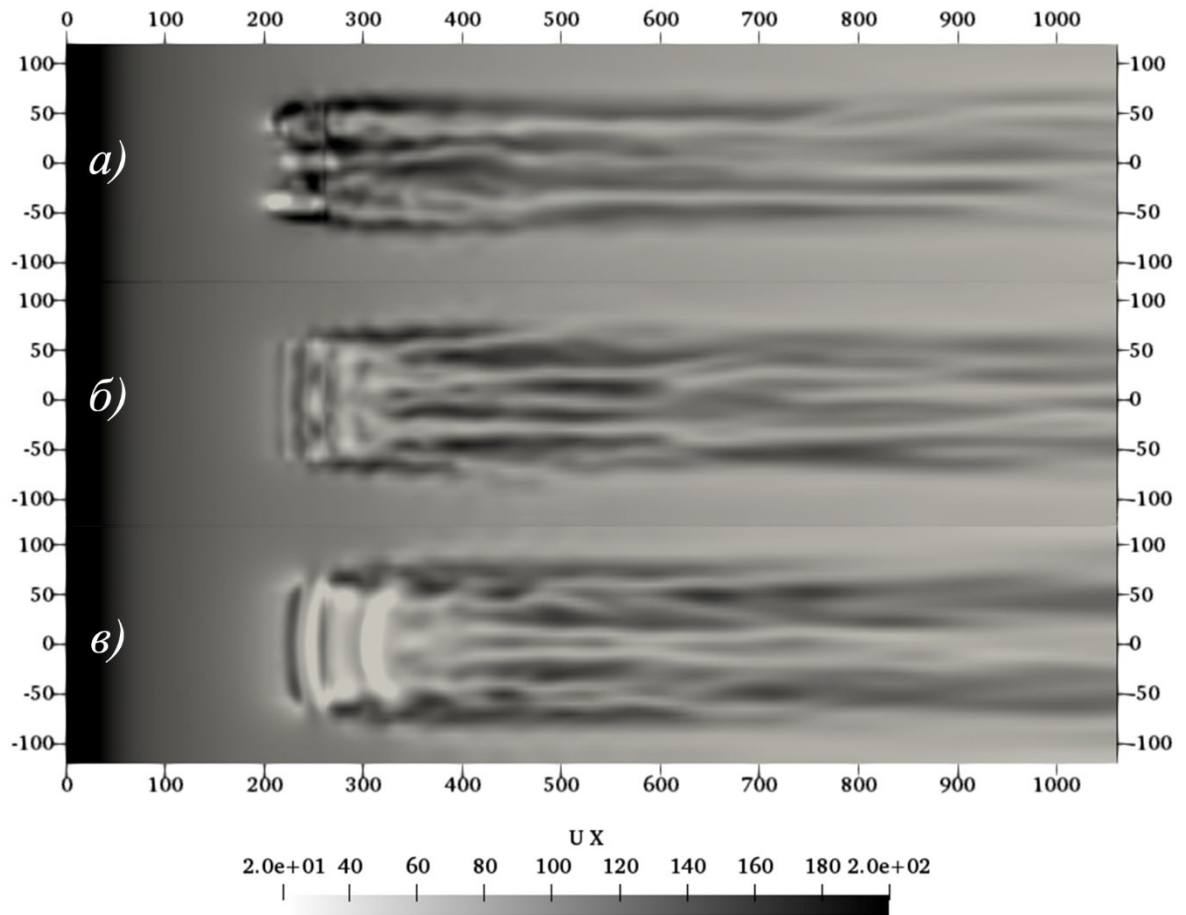


Рис. 3.16. Повздовжня компонента швидкості течії в примежовому шарі:  
а) без вдуву; б) з вдувом на частоті  $f_s$ ; в) з вдувом на частоті  $2f_s$ .

На рисунку видно формування профілю швидкості в примежовому шарі (поступове сповільнення). Вихори, що обертаються в площині  $XZ$  дуже протяжні та нестабільні в часі. Вдув дещо зменшує їх інтенсивність, при чому більша частота вдуву призводить до регуляризації вихрової структури вздовж осі  $Z$  та досягнення певної симетрії відносно площини  $Z = 0$ .

### Висновки з розділу 3.

В процесі дослідження структури вихрового потоку в каверні щодо можливості керування технікою мікровдуву було проведено ряд чисельних експериментів з обтікання об'ємної каверни течіями різних швидкостей при різних параметрах вдуву.

Результатами моделювання слугують поля основних розрахункових величин, що дають уявлення про структуру вихрової течії в каверні та за її межами та вплив керування вдувом на дану структуру, а також частотні характеристики коливань цих величин в деяких зонах течії.

Дослідження проводилось в контексті пошуку можливих способів регуляризації вихрової структури та, як наслідок, зменшення гідродинамічного опору каверни. Для різних значень параметрів вдуву фіксувалися поля швидкості та завихреності в основних перерізах каверни та в примежевому шарі. Було визначено, що техніка мікровдуву може впливати на регулярність вихрової структури як позитивно, так і негативно.

На основі аналізу результатів дослідження була підтверджена гіпотеза про зв'язок відношення частоти вдуву до власної частоти коливальних примежевого шару та вихрової структури течії.

## ВИСНОВКИ

В даній дипломній роботі було проведено дослідження ефективності управління структурою вихрового потоку в каверні шляхом періодичного вдуву в нижню задню частину її об'єму на чисельній математичній моделі. В результаті дослідження вдалось дійти до наступних висновків:

1. Підтверджуються гіпотези, щодо можливості якісної та кількісної зміни характеристичних параметрів течії (в каверні та її «сліді») за допомогою незначного за амплітудою періодичного вдуву, локалізованого біля задньої нижньої стінки каверни.

2. Вдув з частотами, що перевищують власну частоту коливань примежового шару впливають позитивно на регулярність течії, зменшують інтенсивність вихорів. В коливаннях завихреності на задній кромці каверни з'являються гармоніки до частоти вдуву, зменшується стала компонента завихреності.

3. При частоті вдуву, що дорівнює власній частоті коливань примежового шару вплив мікровдуву збільшує амплітуду коливань завихреності на задній кромці.

**ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Shmitt V. Réduction de la traînée de l'avion de transport subsonique. Tendances et perspectives actuelles // L'Aéronautique et l'Astronautique. 1988. Vol. 2, No. 129. P. 4–18.
2. Truong V.T. Drag Reduction Technologies // Aeronautical and maritime research lab report DSTO–GD– 0290, Australia. June 2001. 121 p.
3. Корнилов В.И. Проблемы снижения турбулентного трения активными и пассивными методами (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 2. С. 183–208.
4. Gharib M., Roshko A. The effect of flow oscillations on cavity drag // J. Fluid Mech. –1987. –177. –P. 501–530.
5. Sutura S.P. Laminar boundary layer control by combined blowing and suction in the presence of roughness: Proc. of AIAA 4th Propulsion Joint Specialist Conference (Cleveland, OHIO, June 10–14, 1968) / S.P. Sutura, G.F. Anderson // AIAA Paper №68–641.
6. Халатов А.А. Теплообмен и гидродинамика около поверхностных углублений (лунок). – Киев: ИТТФ НАНУ, 2005. – 76 с.
7. Халатов А., Ющенко К. Досягнення і перспективи промислового газотурбобудування // Вісник НАНУ.– 2011.– № 3. С. 45–57.
8. Белинский В., Воропаев Г., Воскобойник А., Парамонов Ю. Экспериментальное исследование сопротивления и картины обтекания прямоугольных каверн в турбулентном потоке // Прикладна гідромеханіка. – 2012.– № 4.– С. 3–26.
9. Воропаев Г., Розумнюк Н. Управление течением в каверне с помощью вдува // Прикладна гідромеханіка. – 2010.– № 3.– С. 3–12.
10. Воропаев Г.А. Моделирование турбулентных сложных течений / Г.А. Воропаев, Ю.А. Птуха. – К.: Наукова думка. – 1991. – 166 с.
11. Roshko A. Some measurements of flow in a rectangular cutout // NASA TN 3488.– 1979.– 3488.– P. 1–34.

12. Исаев С.А. Идентификация самоорганизующихся смерчеобразных структур при численном моделировании турбулентного обтекания лунки на плоскости потоком несжимаемой жидкости / С.А. Исаев, А.И. Леонтьев, П.А. Баранов // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26, Вып. 1. – С. 28–35.

13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.– 840 с.

14. Dismile P. J., Toy N., Savory E. Effect of planform aspect ratio on flow oscillations in rectangular cavities // J. of Fluids Engineering.– 2000. –122.– P.32–38.

15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том VI, Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

16. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение. 1976.

17. Хинце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Физматгиз. 1963.

19. Лапин Ю.В. Статистическая теория турбулентности (прошлое и настоящее – краткий очерк идей) / Ю.В. Лапин // Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидроаэродинамика»): научно-технические ведомости. – 2004. – № 2. – С. 1–34.

20. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1,2.– М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.

21. Chalmers H. N. A look inside icoFoam // PhD course CFD with OpenSource Software [электронный ресурс], 2013. P.235–251. Режим доступа:

[www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS\\_CFD\\_2013/aLookInsideIcoFoam.pdf](http://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2013/aLookInsideIcoFoam.pdf)

22. Mangani L., Bianchini, C. Heat transfer applications in turbomachinery // Proceedings of the OpenFOAM International Conference [электронный ресурс]. Режим доступа:

[flore.unifi.it/retrieve/handle/2158/418277/15222/OFIC-07.pdf](http://flore.unifi.it/retrieve/handle/2158/418277/15222/OFIC-07.pdf)

23. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Zeit. für Math. und Phys. 1908. V. 56. P. 1-37.
24. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. — 368 с.
25. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. – СПб: Изд-во БГТУ, 2001. – 108 с.
26. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.
27. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Спб.: Гидрометеиздат, 1992. Т. 1; М.: Наука, 1967. Т. 2.
29. Савчук Ю. Залежність вихрового спектру каверни від числа Рейнольдса // Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики. Матеріали конференції. К.: ВПІ ВПК «Політехніка». 2018. Т.1. с. 96 – 99.
30. Betchov R., Criminale W. Stability of Parallel Flows // Applied Mathematics and Mechanics, 1967. V.10. 330 pp.