УДК 681.5

ЗАКОВОРОТНЫЙ А. Ю.

РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗА СЧЕТ АВТОМАТИЗАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ПАКЕТЕ MATLAB

Расширены возможности геометрический теории управления за счет автоматизации аналитических преобразований. Разработаны функции для пакета Matlab, позволяющие преобразовывать нелинейные модели объектов высокого порядка к эквивалентным линейным моделям с помощью инволютивных распределений геометрический теории управления. Выполнен синтез линейной математической модели движения вагонов дизель-поезда в форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу двух эквивалентных тяговых асинхронных электроприводов обмоторенных вагонов. Сравнение процессов в исходной и линейной математических моделях в разных режимах работы подтвердило правильность линеаризации обратной связью исходной модели и работоспособность разработанных функций. Полученная модель может использоваться для поиска оптимальных управлений, а также для исследования процессов буксования и юза, а также параллельной работы двигателей.

New features of the geometric control theory by automating the analytical transformations. Designed functions for the package Matlab allow to convert the non-linear model object to the equivalent linear model using involutive distributions of geometric control theory. The synthesis of linear mathematical model of the motion wagons diesel train in the form of Brunovsky, which allows for parallel operation of two equivalent traction asynchronous electric motor carriages. Comparison of processes in the source and linear mathematical models in different modes of operation confirmed the correctness of the feedback linearization of the original model and the performance of the developed functions. The resulting model can be used to find the optimal controls, as well as for studying the processes of slipping and skidding as well as parallel operation of motors.

Ключевые слова: пакет Matlab, геометрическая теория управления, оптимальное управление.

1. Введение

Трудности анализа и синтеза нелинейных систем управления общеизвестны. Поэтому на протяжении многих лет ведется поиск более мощных теоретических средств для решения фундаментальных проблем теории управления. Одним их таких средств является современная геометрия, в частности, геометрический подход к теории управления на основе теории групп и дифференциальной геометрии. Успехи этого подхода привели к интенсивной разработке нового научного направления – единой геометрической теории управления [1, 2]. Преимущество нового научного направления состоит, с одной стороны, в создании математического аппарата, позволяющего описывать системы управления в пространствах состояний более общих, чем линейные пространства, что необходимо при решении целого ряда задач управления [1, 2], а с другой стороны, в реальной возможности преобразований нелинейных систем высокого порядка с несколькими управлениями к эквивалентным линейным, за счет разбиения исходных моделей на ряд подсистем меньшей размерности, в каждую из которых входит только одно управление. Такие преобразования открывают возможности для использования при решении задач разработки нелинейных систем управления методов и средств теории линейных систем [1, 3]. При этом линеаризация нелинейной системы выполняется не с помощью классического разложения в ряд Тейлора, а на основе использования линейной обратной связи в пространстве "вход – выход" или "вход – состояние". Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления [1 – 8]. Однако в этом случае необходимо выполнять трудоемкие аналитические преобразования, которые не автоматизированы ни в одном из известных пакетов моделирования и которые стали причиной разрыва между теоретическими результатами геометрической теории управления и решением практических задач синтеза систем управления для нелинейных объектов не выше 3 – 5 порядка [9, 10].

2. Постановка задачи

Расширить возможности геометрический теории управления за счет разработки функций для универсального пакета моделирования Matlab, позволяющих автоматизировать сложные аналитические преобразования геометрической теории управления при линеаризации моделей объектов высокого порядка. Продемонстрировать работоспособности разработанных функций при синтезе линейной математической модели движение вагонов дизель-поезда форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу двух эквивалентных тяговых асинхронных электроприводов обмоторенных вагонов.

3. Линеаризация нелинейных моделей

Для расширения возможностей применения геометрический теории управления при динамической линеаризации нелинейных систем высокого порядка по описанному в работе [10] алгоритму, были разработаны функции для универсального пакета моделирования Matlab, которые выполняют следующие действия: формируют векторные поля объектов по их моделям, проверяют выполнение условий инволютивности (условия возможности совместного интегрирования векторных полей), вычисляют производные Ли любого порядка, осуществляют преобразование всех переменных нелинейной модели объекта в переменные модели в форме Бруновского, а также выполняют интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Продемонстрируем эти функции в процессе синтеза линейной математической модели движения вагонов дизель-поезда в форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу двух эквивалентных тяговых асинхронных электроприводов.

Математическая модель, которая описывает процесс движения трех вагонов дизель-поезда по ровному участку железнодорожного пути и эквивалентные тяговые асинхронные электроприводы двух обмоторенных вагонов поезда, может быть представлена следующей системой из шестнадцати нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_6x_8 + a_{22}x_4x_7 + a_{23}x_3 + a_{242};$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_2 + a_{32}x_{11};$$

$$\frac{dx_4}{dt} = a_{41}x_4 + a_{42}x_6 + U_1;$$

$$\frac{dx_5}{dt} = a_{51}x_6x_8 + a_{52}x_4x_7 + a_{53}x_5 + a_{54}x_5^2 + a_{55};$$

$$\frac{dx_6}{dt} = a_{61}x_6 + a_{62}x_4 - x_5x_7;$$

$$\frac{dx_7}{dt} = a_{71}x_7 + a_{72}x_8 - x_5x_6;$$

$$\frac{dx_8}{dt} = a_{81}x_8 + a_{82}x_7 + U_2; \qquad (1)$$

$$\frac{dx_9}{dt} = a_{91}x_{14}x_{16} + a_{92}x_{12}x_{15} + a_{93}x_{10} + a_{94};$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = a_{101}x_{11} + a_{102}x_9;$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = a_{111}x_3 + a_{112}x_{10} + a_{113};$$

$$\frac{dx_{12}}{dt} = a_{121}x_{12} + a_{122}x_{14} + U_3;$$

$$\frac{dx_{13}}{dt} = a_{131}x_{14}x_{16} + a_{132}x_{12}x_{15} + a_{133}x_{13} + a_{134}x_{13}^2 + a_{135};$$

$$\frac{dx_{14}}{dt} = a_{141}x_{14} + a_{142}x_{12} - x_{13}x_{15};$$

$$\frac{dx_{15}}{dt} = a_{151}x_{15} + a_{152}x_{16} - x_{13}x_{14};$$

$$\frac{dx_{16}}{dt} = a_{161}x_{16} + a_{162}x_{15} + U_4,$$

где x_1 – расстояние, пройденное от начала перегона; t – время; $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, ..., a_{161}, a_{162}$ – постоянные коэффициенты; x_2, x_9, x_{11} – скорости движения, соответственно первого, третьего и второго вагонов дизель-поезда; x_6, x_{14} – проекции на ось α потокосцеплений ротора соответственно первого и второго эквивалентных двигателей; x_8, x_{16} – проекции на ось β потокосцеплений статора соответственно первого и второго эквивалентных двигателей; x_4, x_{12} – проекции на ось α потокосцеплений статора соответственно первого и второго эквивалентных двигателей; x_7, x_{15} – проекции на ось β потокосцеплений ротора соответственно первого и второго эквивалентных двигателей; x_3, x_{10} – силы, действующие между соответственно первым и вторым, и вторым и третьим вагонами дизель-поезда; U_1, U_2 – проекции соответственно на оси α и β напряжений

обмоток статора первого эквивалентного двигателя;

U_3, U_4 – проекции соответственно на оси α и β напряжений обмоток статора второго эквивалентного двигателя; x_5, x_{13} – угловые скорости вращения роторов соответственно первого и второго эквивалентных двигателей.

Обозначив $\frac{dx_i}{dt} = f_i,\ i = \overline{1,15},\ i \neq 4, 8, 12;$ $\frac{dx_j}{dt} = f_j + U_{j/4},\ j = 4, 8, 12, 16,$ получим, что с системой дифференциальных уравнений (1) связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = |\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6, \ldots,\ f_{16}\ |^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{Y}_1 = |0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{Y}_2 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^{\mathrm{T}}; (2)$$
$$\boldsymbol{Y}_3 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0|^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{Y}_4 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1|^{\mathrm{T}}.$$

Векторные поля (2) в пакете Matlab могут быть заданы следующим образом:

```
f1 = sym('a11 * x2');
f2 = sym('a21 * x6 * x8 + a22 * x4 * x7 + a23 *
x3 + a24');
f3 = sym('a31 * x2 + a32 * x11');
f4 = sym('a41 * x4 + a42 * x6');
……

f10 = sym('a101 * x11 + a102 * x9');
f11 = sym('a111 * x3 + a112 * x10 + a113');
f12 = sym('a121 * x12 + a122 * x14');
f13 = sym('a131 * x14 * x16 + a132 * x12 *
x15 + a133 * x13 + a134 * x13^2 + a135');
f14 = sym('a141 * x14 + a142 * x12 - x13
* x15');
f15 = sym('a151 * x15 + a152 * x16 - x13
* x14');
f16 = sym('a161 * x16 + a162 * x15');
X = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10; f11;
f12; f13; f14; f15; f16];

Y1 = [0;0;0;sym('1');0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
Y2 = [0;0;0;0;0;0;0;sym('1');0;0;0;0;0;0;0;0];
Y3 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;sym('1');0;0;0;0];
Y4 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;sym('1')];
x = [sym('x1') 'x2' 'x3' 'x4' 'x5' 'x6' 'x7' 'x8' 'x9'
'x10' 'x11' 'x12' 'x13' 'x14' 'x15' 'x16'];
```

Система уравнений (1) может быть преобразована к форме Бруновского только в случае, если инволютивны распределения $\boldsymbol{M}^0 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4\}$, $\boldsymbol{M}^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_4\}$ и $\boldsymbol{M}^2$ для этой системы [2], где $\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4\}$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_k$ $(k = \overline{1,4})$ – производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_k$ $(k = \overline{1,4})$.

Для проверки возможности преобразования широкого класса нелинейных систем управления к канонической форме Бруновского для пакета моделирования *Matlab* была разработана функция *involutivity*(*M, x*), проверяющая выполнение условий инволютивности последовательности распределений, которая возвращает значение "1", если для распределения *M* условия инволютивности выполняются и значение "0" если нет [12]. Функция проверки условий инволютивности представляет собой следующую последовательность команд:

```
function involutive = involutivity(S, x)
saved_rank = rank(S);
lenght = size(S, 2);
for i = 1 : (lenght - 1)
for j = (i + 1) : lenght
S = [S difflie(S(:,i), S(:,j), x)]; end end
involutive = saved_rank == rank(S); end
```

Проверка инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^0$ в пакете моделирования Matlab с использованием описанной выше функции осуществляется следующим образом:

```
M0 = [Y1, Y2, Y3, Y4];
involutive = involutivity(M0, x);
>> involutive = 1
```

Поскольку векторные поля $\boldsymbol{Y}_k$ $(k = \overline{1,4})$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^0$ – инволютивно и размерность распределения $\dim \boldsymbol{M}^0 = 4$.

Проанализируем распределение $\boldsymbol{M}^1$, для этого сначала осуществим вычисление производных Ли векторных полей $\boldsymbol{Y}_k$ $(k = \overline{1,4})$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$ с помощью разработанной для пакете моделирования Matlab функции *Dif_Li*(*X, Y, x, N*), которая возвращает *N*-ю производную Ли вдоль векторного поля *X* векторного поля *Y*, по элементам вектора *x* [13]. Функция вычисления производной Ли представляет собой следующую последовательность команд:

```
function U = Dif_Li(X, Y, variables, N)
U(:, 1) = sym(Y);
for i = 2 : N + 2
U(:, i) = difflie(X, U(:, i - 1 ), variables); end
end
```

Проверка инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^1$ в пакете моделирования Matlab с использованием разработанных функций *Dif_Li* и *involutivity* осуществляется следующим образом:

```
C1_1 = Dif_Li(X, Y1, x, 2);
M1_1 = C1_1(:, 1 : (size(C1_1, 2) - 1));
C1_2 = Dif_Li(X, Y2, x, 2);
M1_2 = C1_2(:, 1 : (size(C1_2, 2) - 1));
……

C1_4 = Dif_Li(X, Y4, x, 2);
M1_4 = C1_4(:, 1 : (size(C1_4, 2) - 1));
M1=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1),
M1_4(:,1), M1_1(:,2), M1_2(:,2), M1_3(:,2),
M1_4(:,2)];
involutive = involutivity(M1, x);
>> involutive = 0
```

Проверка условий инволютивности показывает, что распределение $\boldsymbol{M}^1$ не является инволютивным, однако проверка всех его подраспределений $\boldsymbol{M}_k^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \ \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_k\}$, $k = \overline{1,4}$, показывает, что они являются инволютивными:

```
M11=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1),
M1_4(:,1), M1_1(:,2)];
involutive = involutivity(M11, x);
>>involutive = 1
……

M14=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1),
M1_4(:,1), M1_4(:,2)];
involutive = involutivity(M14, x);
>>involutive = 1
```

Поэтому дополнительные переменные или интеграторы можно вводить в любой канал управления. Однако введение 1, 2, 3 или 4 интеграторов в любые каналы не позволяет решить проблему получения инволютивного распределения $\boldsymbol{M}^1$ для расширенной системы. Распределение $\boldsymbol{M}^1$ становится инволютивным только при введении одного интегратора в каждый канал объекта управления.

Для расширенной модели объекта управления введем следующие обозначения:

$$y_i = x_i, \ i = \overline{1,4}; \ \ y_{5*j} = U_j, \ \frac{dy_{5*j}}{dt} = U_j^*, \ j = \overline{1,4};$$

$$y_k = x_{k-1}, \ k = \overline{6,9}; \ \ y_g = x_{g-2}, \ g = \overline{11,14};$$

$$y_q = x_{q-3}, \ g = \overline{16,19}.$$

В этих обозначениях расширенная модель объекта записывается таким образом:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_2 = \varphi_1;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_7y_9 + a_{22}y_4y_8 + a_{23}y_3 + a_{24} = \varphi_2;$$

$$\frac{dy_3}{dt} = a_{31}y_2 + a_{32}y_{13} = \varphi_3;$$

$$\frac{dy_4}{dt} = a_{41}y_4 + a_{42}y_7 + y_5 = \varphi_4;$$

$$\frac{dy_5}{dt} = U_1^*; \ \varphi_5 = 0;$$

$$\frac{dy_6}{dt} = a_{51}y_7y_9 + a_{52}y_4y_8 + a_{53}y_6 + a_{54}y_6^2 + a_{55} = \varphi_6;$$

$$\frac{dy_7}{dt} = a_{61}y_7 + a_{62}y_4 - y_6y_8 = \varphi_7;$$

$$\frac{dy_8}{dt} = a_{71}y_8 + a_{72}y_9 - x_6x_7 = \varphi_8;$$

$$\frac{dy_9}{dt} = a_{81}y_9 + a_{82}y_8 + y_{10} = \varphi_9;$$

$$\frac{dy_{10}}{dt} = U_2^*; \ \varphi_{10} = 0;$$

$$\frac{dy_{11}}{dt} = a_{91}y_{17}y_{19} + a_{92}y_{14}y_{18} + a_{93}y_{12} + a_{94} = \varphi_{11};$$

$$\frac{dy_{12}}{dt} = a_{101}y_{13} + a_{102}y_{11} = \varphi_{12};$$

$$\frac{dy_{13}}{dt} = a_{111}y_3 + a_{112}y_{12} + a_{113} = \varphi_{13};$$

$$\frac{dy_{14}}{dt} = a_{121}y_{14} + a_{122}y_{17} + y_{15} = \varphi_{14};$$

$$\frac{dy_{15}}{dt} = U_3^*; \ \varphi_{15} = 0;$$

$$\frac{dy_{16}}{dt} = a_{131}y_{17}y_{19} + a_{132}y_{14}y_{18} + a_{133}y_{16} + a_{134}y_{16}^2 + a_{135} = \varphi_{16};$$

$$\frac{dy_{17}}{dt} = a_{141}y_{17} + a_{142}y_{14} - y_{16}y_{18} = \varphi_{17};$$

$$\frac{dy_{18}}{dt} = a_{151}y_{18} + a_{152}y_{19} - y_{16}y_{17} = \varphi_{18};$$

$$\frac{dy_{19}}{dt} = a_{161}y_{19} + a_{162}y_{18} + y_{20} = \varphi_{19};$$

$$\frac{dy_{20}}{dt} = U_4^*;\ \varphi_{20} = 0.$$

С этой моделью объекта управления связаны векторные поля:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}) = \left|\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{15}, \varphi_{16}, \varphi_{17}, \varphi_{18}, \varphi_{19}, \varphi_{20}\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_1^* = \begin{vmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{vmatrix};\quad \boldsymbol{Y}_2^* = \begin{vmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{vmatrix};\quad \boldsymbol{Y}_3^* = \begin{vmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{vmatrix};\quad \boldsymbol{Y}_4^* = \begin{vmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{vmatrix},$$

которые в пакете Matlab могут быть заданы следующим образом:

```
f1 = sym('a11 * y2');
f2 = sym('a21 * y7 * y9 + a22 * y4 * y8 + a23 *
y3 + a24');
f3 = sym('a31 * y2 + a32 * y13');
f4 = sym('a41 * y4 + a42 * y7 + y5');
f5 = sym('0');
f6 = sym('a51 * y7 * y9 + a52 * y4 * y8 + a53 *
y6 + a54 * y6^2 + a55');
f7 = sym('a61 * y7 + a62 * y4 - y6 * y8');
f8 = sym('a71 * y8 + a72 * y9 - y6 * y7');

f9 = sym('a81 * y9 + a82 * y8 + y10');
f10 = sym('0');
……

f16 = sym('a131 * y17 * y19 + a132 * y14 *
y18 + a133 * y16 + a134 * y16^2 + a135');
f17 = sym('a141 * y17 + a142 * y14 - y16
* y18');
f18 = sym('a151 * y18 + a152 * y19 - y16
* y17');
f19 = sym('a161 * y19 + a162 * y18 + y20');
f20 = sym('0');
Y_new = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10;
f11; f12; f13; f14; f15; f16; f17; f18; f19; f20];
Y1_new = [0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y2_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y3_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0];
Y4_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; sym('1')];
y_new = [sym('y1') 'y2' 'y3' 'y4' 'y5' 'y6' 'y7' 'y8'
'y9' 'y10' 'y11' 'y12' 'y13' 'y14' 'y15' 'y16' 'y17'
'y18' 'y19' 'y20'];
```

Поскольку вектора $\boldsymbol{Y}_k^*$ $(k = \overline{1,4})$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^{0*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*\}$ – инволютивно, что подтверждает и программное обеспечение:

```
M0_new=[Y1_new,Y2_new, Y3_new,
Y4_new];
involutive = involutivity(M0_new, y_new);
>> involutive = 1
```

Так как производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_k^*$ $(k = \overline{1,4})$ являются постоянными векторами, то распределение $\boldsymbol{M}^{1*}$ для расширенной системы является инволютивным:

```
C1_1_new =
Dif_Li(Y_new, Y1_new, y_new, 2);
M1_1_new =
C1_1_new(:, 1 : (size(C1_1_new, 2) - 1));
C1_2_new =
Dif_Li(Y_new, Y2_new, y_new, 2);
M1_2_new =
C1_2_new(:, 1 : (size(C1_2_new, 2) - 1));
C1_3_new =
Dif_Li(Y_new, Y3_new, y_new, 2);
M1_3_new =
C1_3_new(:, 1 : (size(C1_3_new, 2) - 1));

C1_4_new =
Dif_Li(Y_new, Y4_new, y_new, 2);
M1_4_new =
C1_4_new(:, 1 : (size(C1_4_new, 2) - 1));
M1_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1),
M1_3_new(:,1), M1_4_new(:,1),
M1_1_new(:,2), M1_2_new(:,2),
M1_3_new(:,2), M1_4_new(:,2)];
involutive = involutivity(M1_new, y_new);
>> involutive = 1
```

Проверка инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^{2*} = \text{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, ..., \boldsymbol{Y}_4^*, \quad \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_1^*, \ ..., \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_4^*, \quad \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_2^*, ..., \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_4^*\}$, где $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{k}}$ $(k = \overline{1,4})$ – производные Ли второго порядка, показывает, что оно не является инволютивным:

```
M2_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1),
M1_3_new(:,1), M1_4_new(:,1),
M1_1_new(:,2), M1_2_new(:,2),
M1_3_new(:,2), M1_4_new(:,2),
M1_1_new(:,3), M1_2_new(:,3),
M1_3_new(:,3), M1_4_new(:,3)];
involutive = involutivity(M2_new, y_new);
>> involutive = 0
```

Однако инволютивными являются всех подраспределения $\boldsymbol{M}_k^{2*} = \text{span}\{\boldsymbol{Y}_1, ..., \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_2^*, ..., \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2\boldsymbol{Y}_k^*\}$, $k = \overline{1,4}$, распределения $\boldsymbol{M}^{2*}$:

```
M21_new = [M1_1_new(:,1),
M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),
M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_1_new(:,3)];
involutive = involutivity(M21_new, y_new)
>> involutive = 1
……
M24_new = [M1_1_new(:,1),
M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
M1_4_new(:,1), M1_1_new(:,2),
M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2),
M1_4_new(:,2), M1_4_new(:,3)];
involutive = involutivity(M24_new, y_new)
>> involutive = 1
```

Этого оказывается достаточно для осуществления динамической линеаризации и получения системы линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского. На основании теоремы о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с m управлениями [2], получим, что каноническая форма Бруновского имеет 4-и клетки (индекс управляемости $k_{\max}$ для данного объекта равен 4), т.е. расширенная модель объекта управления разбивается на 4-и подсистемы уравнений пятого порядка, в каждую из которых входит только одно управление. Математическая модель объекта управления в форме Бруновского в пространстве "вход – состояние" имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1}, \ i = \overline{1,19}, \ i \neq 5, \ 10, \ 15; \\ &\frac{dz_5}{dt} = v_1; \ \frac{dz_{10}}{dt} = v_2; \ \frac{dz_{15}}{dt} = v_3; \ \frac{dz_{20}}{dt} = v_4, \end{aligned} \tag{3}$$

где v_j $(j = \overline{1,4})$ – управления.

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет 4-и клетки, то необходимо определить 4-и функции $T_j(\boldsymbol{y})$ $(j = \overline{1,4})$, преобразующих переменные расширенной модели объекта управления в переменные модели в форме Бруновского:

$$z_1 = T_1(\boldsymbol{y}); z_6 = T_2(\boldsymbol{y}); z_{11} = T_3(\boldsymbol{y}); z_{16} = T_4(\boldsymbol{y}).$$

Методика определения этих функций известна [2, 9 – 11]. В данном случае они являются однокомпонентными составляющими вектора $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_{20})$. Из этих функций путем последовательного дифференцирования вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y} + U_1\boldsymbol{Y}_1^* + U_2\boldsymbol{Y}_2^* + ... + U_4\boldsymbol{Y}_4^*$ можно получить выражения для определения соответственно z_2, z_3, z_4, z_5 (из функции $T_1(\boldsymbol{y})$), z_7, z_8, z_9, z_{10} (из функции $T_2(\boldsymbol{y})$), z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{15} (из функции $T_3(\boldsymbol{y})$), z_{17}, z_{18}, z_{19}, z_{20} (из функции $T_4(\boldsymbol{y})$).

В качестве примера рассмотрим получение зависимостей для определения z_2, z_3, z_4, z_5 с помощью функции $T_1(\boldsymbol{y})$.

Для вычисления функций перехода от переменных расширенной нелинейной модели объекта управления к переменным модели (3) в форме Бруновского применялась специально разработанная для универсального пакета моделирования Matlab функция *brunovsky*(*X*, *Y*, *T*, *x*, *N*), которая выполняет дифференцирование функции *T* вдоль векторных полей *X* и *Y*, по элементам вектора *x*, и возвращает для каждой клетки формы Бруновского массив из *N* выражений связывающих переменные в линейной и нелинейной моделях, а также новое управление для соответствующей клетки линейной математической модели в форме Бруновского [14]. Функция *brunovsky* представляет собой следующую последовательность команд:

```
function [Z, V] = brunovsky(X, Y, T, x, N)
Z(1, 1) = T;
for i = 2 : N
```

```
Z(i, 1) = diffvec(Z(i-1, 1), x, 1) * X; end
V = diffvec (Z(N, 1), x, 1) * X;
end
```

Для исследуемого объекта управления имеем: $T_1(\boldsymbol{y}) = y_1$, поэтому $z_1 = y_1$.

```
T1 = [sym('y1')];
[Z1_5, V1] = brunovsky(Y_new, [Y1_new], T1,
y_new, 5);
Z1_5 = simple(Z1_5)
```

Дифференцируя функцию $T_1(\boldsymbol{y})$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}^*$ и учитывая, что z_2, z_3, z_4 и их производные не зависят от управлений, получим функции перехода к канонической форме Бруновского:

$$z_2 = \frac{dz_1}{dt} = a_{11}y_2;$$

$$z_3 = \frac{dz_2}{dt} = a_{11}(a_{24} + a_{23}y_3 + a_{22}y_4y_8 + a_{21}y_7y_9);$$

$$z_4 = \frac{dz_3}{dt} = a_{11}a_{23}(a_{32}y_{13} + a_{31}y_2) + a_{11}a_{21}y_9(a_{62}y_4 + a_{61}y_7 - y_6y_8) + a_{11}a_{22}y_4(a_{71}y_8 + a_{72}y_9 - y_6y_7) + a_{11}a_{22}y_8(y_5 + a_{41}y_4 + a_{42}y_7) + a_{11}a_{21}y_7(y_{10} + a_{82}y_8 + a_{81}y_9);$$

$$z_5 = \frac{dz_4}{dt} = a_{11}(y_5 + a_{41}y_4 + a_{42}y_7)(a_{22}a_{41}y_8 + a_{21}a_{62}y_9 + a_{22}a_{71}y_8 + a_{22}a_{72}y_9 - a_{22}y_6y_7) - a_{11}(a_{22}y_4y_7 + a_{21}y_8y_9)(a_{54}y_6^2 + a_{53}y_6 + a_{55} + a_{52}y_4y_8 + a_{51}y_7y_9) + a_{11}(y_{10} + a_{82}y_8 + a_{81}y_9)\cdot(a_{21}a_{62}y_4 + a_{22}a_{72}y_4 + a_{21}a_{61}y_7 + a_{21}a_{81}y_7 - a_{21}y_6y_8) + a_{11}(a_{62}y_4 + a_{61}y_7 - y_6y_8)(a_{21}y_{10} + a_{22}a_{42}y_8 + a_{21}a_{61}y_9 + a_{21}a_{82}y_8 + a_{21}a_{81}y_9 - a_{22}y_4y_6) + a_{11}(a_{71}y_8 + a_{72}y_9 - y_6y_7)(a_{22}y_5 + a_{22}a_{41}y_4 + a_{22}a_{71}y_4 + a_{22}a_{42}y_7 + a_{21}a_{82}y_7 - a_{21}y_6y_9) + a_{11}a_{23}a_{32}(a_{113} + a_{112}y_{12} + a_{111}y_3) + a_{11}a_{23}a_{31}(a_{24} + a_{23}y_3 + a_{22}y_4y_8 + a_{21}y_7y_9).$$

Аналогичным образом, задавшись значениями функций $T_2(\boldsymbol{y}) = y_6 = z_6$, $T_3(\boldsymbol{y}) = y_{11} = z_{11}$, $T_4(\boldsymbol{y}) = y_{16} = z_{16}$, с помощью функции *brunovsky*(*X*, *Y*, *T*, *x*, *N*), могут быть получены соотношения для определения остальных переменных модели в форме Бруновского.

На рис. 1 и 2 приведены процессы, полученные с помощью математических моделей (1) и (3). На рис. 1 с помощью переменных x_1 (модель (1)) и z_1 (модель (3)) показано изменение во времени пройденного дизель-поездом расстояния при разгоне состава до 60 км/ч на ровном участке железнодорожного пути. Как следует из рисунка $x_1 \equiv z_1$.

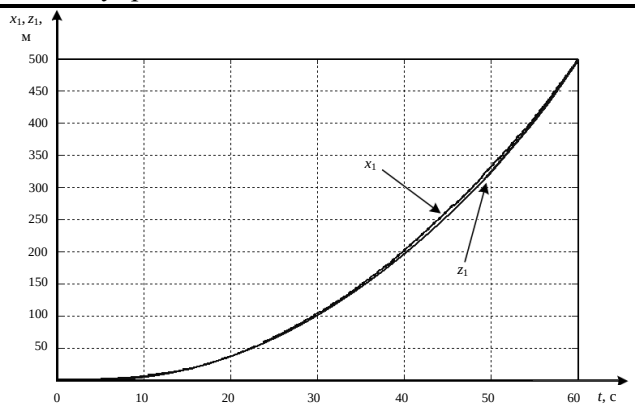

Рис. 1. Поведение переменных x_1 ***и*** z_1

На рис. 2 показаны изменения скорости первого вагона дизель-поезда, полученные с помощью модели (1), переменная x_2, и модели (3), переменная z_2. как видно из рисунка $x_2 \equiv z_2$. Таким образом, линейная математическая модель в форме Бруновского (3) эквивалентна исходной нелинейной модели объекта (1).

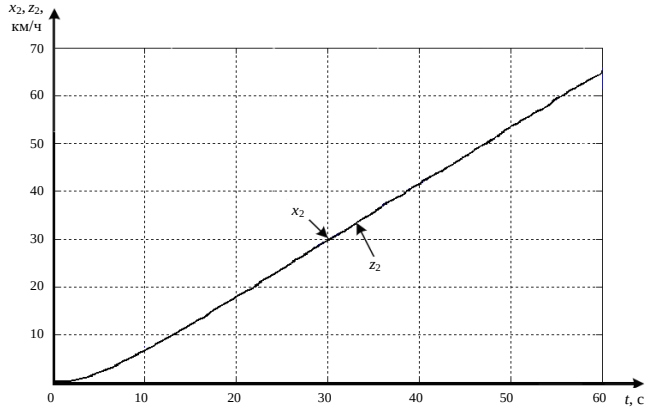

Рис. 2. Поведение переменных x_2 ***и*** z_2

4. Выводы

Таким образом, для универсального пакета моделирования Matlab разработаны функции, позволяющие расширить возможности применения геометрический теории управления. Если в известных работах [9 – 11] геометрическая теория управления применялась для синтеза управлений объектами, которые описываются 3 – 5 дифференциальными уравнениями, то автоматизация аналитических преобразований позволила применять геометрическую теорию управления к объектам существенно более высокого порядка (систем из 16-ти нелинейных дифференциальных уравнений с 4-мя управлениями, рассмотренные в статье). Программа тестировалась и показала свою работоспособность на объектах, описываемых системами из 30-ти нелинейных дифференциальных уравнений и содержащих 8-мь управлений. Таким

образом, за счет автоматизации аналитических преобразований при получении из нелинейных математических моделей объектов управления эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского, существенно расширена область применения геометрический теории управления. В частности, с помощью разработанных функций получена линейная математическая модель движения вагонов дизель-поезда в канонической форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу двух эквивалентных тяговых асинхронных двигателей. Полученная математическая модель может использоваться для поиска оптимальных управлений, исследования процессов буксования и юза, а также параллельной работы двигателей.

Список литературы

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.
2. Краснощёченко В.И. Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / В.И. Краснощёченко, А.П. Грищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. Изд. 2. / Д.П. Ким. – М.: Физматлит, 2007. – 312 с.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Изд. 2. / Д.П. Ким. – М.: Физматлит, 2007. – 440 с.
5. Kim D.P. Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / D.P. Kim. – Seol: Harnol, 2000. – 558 p.
6. Marino R. Nonlinear Control Design / R. Marino, P. Tomei. – Prentice Hall Europe, 1995. – 396 p.
7. Краснощёченко В.И. Синтез регуляторов для нелинейных систем, приводимых к канонической форме Бруновского / В.И. Краснощёченко // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1997. – № 569. – С. 28-33.
8. Краснощёченко В.И. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза / В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.
9. Дмитриенко В.Д. Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2007. – № 19. – С. 64-77.
10. Дмитриенко В.Д. Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный. – Х.: Изд. центр "НТМТ", 2013. – 248 с.
11. Дмитриенко В.Д. Синтез оптимальных законов управления движением дизель-поезда с помощью математической модели в форме Бруновского / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Н.В. Мезенцев // Науково-технічний журнал "Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті". – Харків. – 2010. – № 5-6 (84-85). – С. 7-13.
12. Zakovorotniy A. Involutivity of a vector fields set [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathworks.com/ matlabcentral/fileexchange/57786-involutivity-s--x-.
13. Zakovorotniy A. Calculation of derivatives Lee of vector fields [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57788-dif-li-x--y--variables--n-.
14. Zakovorotniy A. Brunovsky canonical form [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57787-brunovsky-x--y--t--x--n-.