Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

# ФІЗИКА

## Електромагнетизм. Електричне поле в речовині

### Курс лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Літаки і вертольоти», «Інженерія авіаційних та ракетно-космічних систем», «Інженерія безпілотних та автономних систем», «Систем керування літальними апаратами та комплексами»
спеціальності 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка, 173 Авіоніка

Укладачі: М. В. Чурсанова, О. В. Дрозденко, М. О. Стретович

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 537.22
Ф 50

Укладачі: *Чурсанова Марина Валеріївна*, канд. фіз.-мат. наук.
*Дрозденко Олександра Володимирівна*
*Стретович Микола Олександрович*

Рецензент *Решетняк С. О.*, д.фіз.-мат.наук, проф.,
завідувач кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор *Савченко Д. В.*, доктор фіз.-мат. наук

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*(протокол №протокол № 7 від 09.05.2024 р..)*
*за поданням вченої ради фізико-математичного факультету*
*(протокол № 4 від 03.04.2024 р.)*

Ф 50 **Фізика.** Електромагнетизм. Електричне поле в речовині [Електронний ресурс] : курс лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Літаки і вертольоти», «Інженерія авіаційних та ракетно-космічних систем», «Інженерія безпілотних та автономних систем», «Систем керування літальними апаратами та комплексами» спец. 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка, 173 Авіоніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: М. В. Чурсанова, О. В. Дрозденко, М. О. Стретович. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 41 с.

Даний навчальний посібник є частиною курсу лекцій з дисципліни «Фізика. Частина 2» і містить такі теми як «Діелектрики та провідники в зовнішньому електростатичному полі», «Електрична ємність», «Енергія електричного поля». Матеріал, викладений в даному посібнику, слід вивчати після знайомства з розділом «Електростатичне поле у вакуумі». Даний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» та «Авіоніка», також буде корисним для інших спеціальностей що вивчають фізику.

УДК 537.22

Реєстр. № НП 23/24-446. Обсяг 1,9 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕДМОВА

Даний навчальний посібник «Фізика. Електромагнетизм. Електричне поле в речовині» є частиною курсу лекцій з дисципліни «Фізика. Частина 2» і містить такі теми силабусу як «Діелектрики та провідники в зовнішньому електростатичному полі», «Електрична ємність», «Енергія електричного поля». Матеріал, викладений в даному посібнику, слід вивчати після знайомства з розділом «Електростатичне поле у вакуумі».

Зокрема, тут розглянуті різні типи речовин з огляду на їх електричні властивості – діелектрики та провідники. Описані особливості структури цих речовин що впливають на їх поведінку у прикладеному зовнішньому електричному полі: існування електричних диполів у діелектриках, які спричинюють поляризацію матеріалу, та існування вільних електричних зарядів у провідниках, які призводять до встановлення електростатичної рівноваги у зовнішньому полі. Також розглянуті поєднання провідників та діелектриків в електричних приладах, а саме конденсатори різних видів. Визначено поняття електричної ємності, а також енергії, накопиченої в електростатичному полі.

# 1. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ДИПОЛЬ

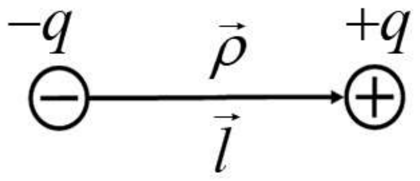
## 1.1. Поняття електричного диполя

**Електричний диполь** – це система з двох рівних за модулем, але протилежних за знаком точкових зарядів $q$ (полюсів), розміщених на невеликій фіксованій відстані $l$ один від одного (див. рисунок 1.1, *а*).

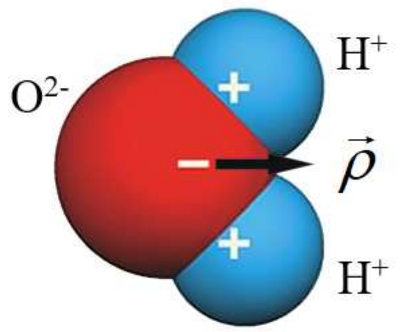
**Плечем диполя** називається вектор $\vec{l}$, напрямлений від від’ємного до додатного заряду. Характеристикою електричного диполя також є вектор **дипольного моменту**, що визначається добутком модуля заряду на плече диполя

$$\vec{\rho} = q\vec{l}\ . \qquad (1.1)$$

Електричні диполі широко поширені в природі. Деякі молекули є полярними (рисунок 1.1, *б*) – мають власний електричний дипольний момент через просторове розділення центрів густини додатного та від’ємного зарядів. Нейтральні атоми та молекули речовини також можуть набувати електричний дипольний момент при їх розміщенні у зовнішньому електричному полі.




*а*




*б*

Рис. 1.1. Електричний диполь:
*а* – схематичне зображення диполя;
*б* – молекула води як приклад полярної молекули з власним дипольним моментом

Розглянемо електричне поле, створене диполем в деякій точці $P$ на відстані $r$ від нього, $r >> l$ (рисунок 1.2, *а*). Потенціал, створений електричним диполем в точці $P$, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених в цій точці кожним із полюсів

$$\varphi = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = kq\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}.$$

Оскільки $r >> l$, то можна вважати $r_- - r_+ \approx l\cos\theta$; $r_- r_+ \approx r^2$ (див. рисунок 1.2, *а*). Тоді,

$$\varphi = k\rho\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{1.2}$$

де $\rho = ql$ – електричний дипольний момент.

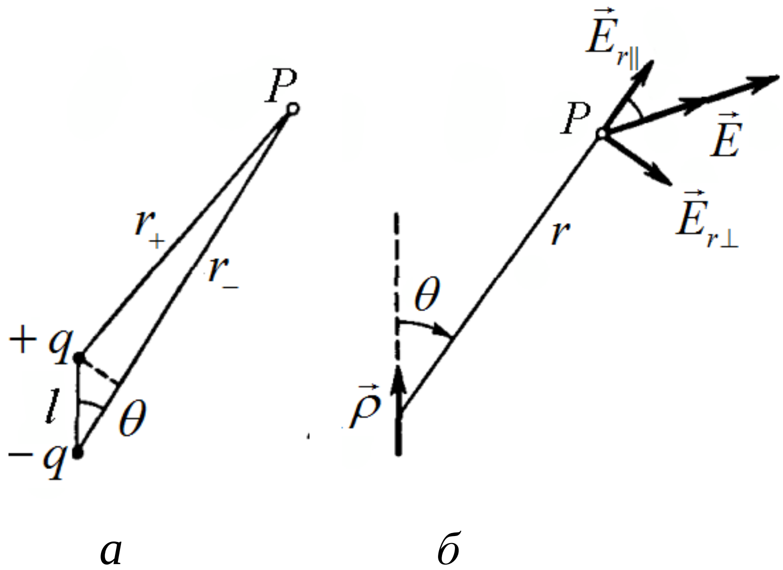



Рис. 1.2. Поле електричного диполя: *а* – знаходження потенціалу; *б* – знаходження напруженості

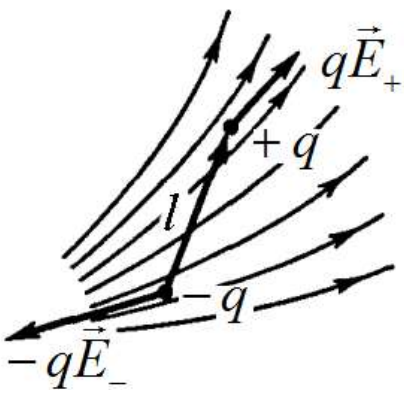



Рис. 1.3. Диполь у зовнішньому електричному полі

Тепер знайдемо напруженість електричного поля, створеного диполем (рисунок 1.2, *б*). Для цього використаємо зв'язок між напруженістю та потенціалом в системі координат, пов’язаній з напрямком радіус-вектора, проведеного в т. $P$, та перпендикулярним до нього напрямком дотичної до дуги кола, побудованого на ньому. Зміна потенціалу в напрямку радіус-вектора дасть компоненту вектора напруженості паралельну напрямку $r$: $E_{r\parallel} = -\dfrac{d\varphi}{dr} = k\dfrac{2\rho\cos\theta}{r^3}$.

Тоді компоненту вектора напруженості, перпендикулярну до напрямку радіус-вектора, можна розглядати як зміну потенціалу вздовж нескінченно малої дуги кола радіусом $r$: $E_{r\perp} = -\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{d\varphi}{rd\theta} = k\frac{\rho\sin\theta}{r^3}$. Величина повної напруженості електричного поля буде

$$E = \sqrt{E_{r\parallel}^2 + E_{r\perp}^2} = k\frac{\rho}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}\,. \tag{1.3}$$

В окремих випадках, коли $\theta = 0$ або $\theta = \pi/2$, отримуємо вирази для електричного поля на осі диполя ($E_{\parallel}$) та перпендикулярно до осі диполя ($E_{\perp}$):

$$E_{\parallel} = k\frac{2\rho}{r^3}\,;\; E_{\perp} = k\frac{\rho}{r^3}\,. \tag{1.4}$$

## 1.2. Електричний диполь у зовнішньому електричному полі

Розглянемо електричний диполь розміщений у зовнішньому електричному полі. В загальному випадку поле може бути неоднорідним (рисунок 1.3). Позначимо вектор напруженості електричного поля в точках знаходження додатного і від'ємного полюсів диполя $\vec{E}_{+}$ і $\vec{E}_{-}$. Тоді сумарна електрична сила що діє на диполь дорівнює $\vec{F} = q(\vec{E}_{+} - \vec{E}_{-})$. Величина $\Delta\vec{E} = \vec{E}_{+} - \vec{E}_{-}$ – це зміна електричного поля на нескінченно малій відстані $l$, тому можна записати $\Delta\vec{E} = \frac{d\vec{E}}{dl}l$ . Таким чином отримуємо силу що діє на електричний дипольний момент ρ:

$$\vec{F} = \rho\frac{d\vec{E}}{dl}\,. \tag{1.5}$$

Сила, що діє на електричний диполь, буде відмінна від нуля тільки в неоднорідному електричному полі.

Тепер визначимо момент сили що буде діяти на електричний диполь у зовнішньому електричному полі. Результуючий момент сили на два полюси

$\vec{M} = \left[\vec{r}_+, q\vec{E}_+\right] - \left[\vec{r}_-, q\vec{E}_-\right] \approx \left[\vec{r}_+ - \vec{r}_-, q\vec{E}\right] = \left[\vec{l}, q\vec{E}\right]$, де $\vec{E}_+ \approx \vec{E}_- \approx \vec{E}$ оскільки відстань $l$ між додатним і від'ємним полюсами мала. Отже,

$$\vec{M} = \left[\vec{\rho}, \vec{E}\right]. \tag{1.6}$$

Цей момент сили буде намагатись повернути диполь таким чином щоб його електричний момент $\vec{\rho}$ орієнтувався за напрямком вектора напруженості $\vec{E}$ зовнішнього поля. Таке положення диполя буде стійким.

Можна підсумувати, що в неоднорідному електричному полі електричний диполь одночасно під дією моменту сили буде намагатись повернутись за полем $\vec{\rho} \uparrow\uparrow \vec{E}$, а під дією результуючої сили – переміститись у напрямку де напруженість $\vec{E}$ по модулю більша.

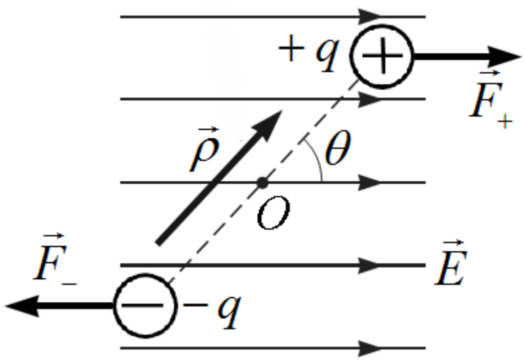



Рис. 1.4. Диполь в однорідному електричному полі

В однорідному електричному полі результуюча сила, що діє на диполь, дорівнює нулю, оскільки сили на два полюси диполя однакові за величиною $F_+ = F_- = qE$ і протилежні за напрямком (рисунок 1.4). Але вони будуть утворювати пару сил, момент якої буде обертати диполь, орієнтуючи вектор дипольного моменту у напрямку силових ліній поля.

Момент пари сил

$$M = qEl\sin\theta = \rho E\sin\theta, \tag{1.7}$$

де θ – кут, який диполь утворює з напрямком силових ліній поля.

## 1.3. Енергія диполя в електричному полі

Як відомо, потенціальна енергія точкового заряду $q$ у зовнішньому електричному полі дорівнює $W = q\varphi$, де $\varphi$ – електричний потенціал у точці, де знаходиться заряд $q$. Оскільки електричний диполь є системою двох точкових зарядів протилежних знаків, то його енергія в зовнішньому електричному полі буде $W = q_+\varphi_+ - q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$, де $\varphi_+$ і $\varphi_-$ – потенціали зовнішнього електричного поля в точках розташування зарядів $+q$ і $-q$; зважаючи на малість відстані $l$, $\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dl}l$. Тоді відповідно до співвідношення між вектором напруженості електричного поля та потенціалом, $-\frac{d\varphi}{dl} = E_l$, де $E_l$ – проекція вектора $\vec{E}$ на вектор $\vec{l}$, який показує напрям електричного дипольного моменту $\vec{\rho} = q\vec{l}$. Тоді, $\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dl}l = -E_l l = -\vec{E}\vec{l}$, і потенціальна енергія диполя дорівнює

$$W = -q\vec{E}\vec{l} = -\vec{\rho}\vec{E}. \tag{1.8}$$

Видно, що електричний диполь буде мати мінімальну потенціальну енергію ($W_{\min} = -\rho E\cos 0 = -\rho E$), коли він орієнтований паралельно зовнішньому електричному полю $\vec{\rho}\uparrow\uparrow\vec{E}$, і це буде рівноважною орієнтацією диполя. Саме тому електричні диполі мають тенденцію вирівнюватись за полем: диполь, орієнтований в одному напрямку з вектором напруженості електричного поля має нижчу потенціальну енергію, ніж диполь, який утворює з ним певний кут. Робота, виконана зовнішніми силами для повороту диполя, зберігається як потенціальна енергія в системі диполя та зовнішнього електричного поля.

# 2. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

## 2.1. Діелектрики

Діелектриками називають речовини, у яких всі заряди є **зв'язаними**, тобто такими що входять до складу атомів або молекул діелектрика і не відриваються від них. Таким чином у діелектриках відсутні вільні заряджені частинки, які б могли під дією поля вільно переміщатись на великі відстані, і тому діелектрики практично не проводять електричний струм. Коли діелектрик поміщається в зовнішнє електричне поле, електричні заряди в ньому лише злегка зміщуються від своїх усереднених положень рівноваги, що призводить до **поляризації** діелектрика: додатні заряди зміщуються за полем, а від’ємні — в протилежному напрямку.

До діелектриків належить багато твердих тіл (пластмаси, кераміка, янтар, скло, гума тощо), деякі рідини (наприклад, дистильована вода) та всі гази. За характером просторового розміщення заряджених частинок у молекулах діелектрики поділяють на

1) **Неполярні** (наприклад, гази $N_2$, $H_2$, $O_2$, $CO_2$) – це діелектрики, які мають симетричну будову, тобто у них центри додатних і від’ємних зарядів за відсутності електричного поля співпадають.

2) **Полярні** (наприклад, гази $CO$, $H_2O$, $NH_3$, $SO_2$) – це діелектрики, центри додатних і від’ємних зарядів у яких за відсутності електричного поля не співпадають (молекули є електричними диполями).

3) **Іонні** (наприклад, $NaCl$, $KCl$) – це тверді діелектрики, іонні кристали яких є просторовими гратками з правильним чергуванням іонів різних знаків.

У зовнішньому електричному полі всі діелектрики поляризуються.

## 2.2. Поляризація діелектриків

Поляризація – це процес орієнтації диполів чи поява під дією електричного поля зорієнтованих за полем диполів. Ступінь поляризації речовини характеризують її поляризованістю.

**Поляризованість** – це векторна величина, яка визначається повним дипольним моментом одиниці об'єму діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum \vec{\rho}_i \,, \tag{2.1}$$

де $\vec{\rho}_i$ – дипольний момент однієї *і*-ї молекули. Або, вважаючи що дипольні моменти всіх молекул діелектрика ідентичні,

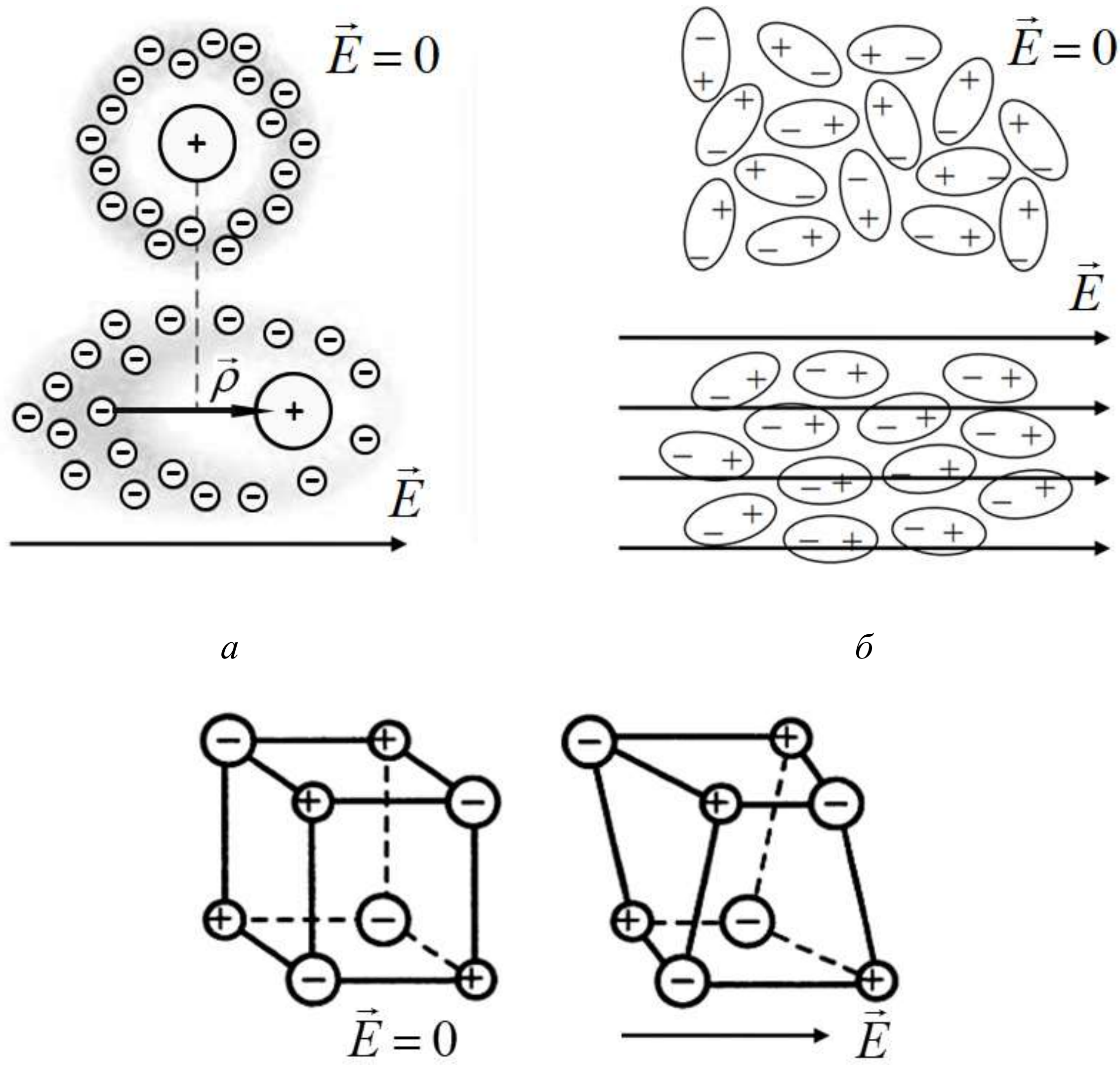
$$\vec{P} = n_0\vec{\rho} \,, \tag{2.2}$$

де концентрація $n_0$ – це кількість електричних диполів в одиниці об'єму.

Відповідно до трьох типів діелектриків (неполярних, полярних та іонних) розрізняють також три види поляризації – електронну, орієнтаційну та іонну.

1) **електронна (деформаційна) поляризація** характерна для неполярних діелектриків і полягає у виникненні у атомів індукованого дипольного моменту за рахунок деформації електронних орбіт під впливом прикладеного зовнішнього електричного поля: хоча заряди і залишаються прив'язаними до своїх молекул, але центр густини від'ємного заряду зміщається у напрямку проти поля, а центр густини додатного заряду – за полем (рисунок 2.1, *а*). Ці індуковані дипольні моменти вирівнюються за зовнішнім полем, і діелектрик стає поляризованим. Час, необхідний для виникнення електронної поляризації, складає порядку $10^{-15}$ с.

2) **орієнтаційна (дипольна) поляризація** характерна для полярних діелектриків і полягає в орієнтації наявних диполів за напрямком прикладеного електричного поля (рисунок 2.1, *б*). За відсутності електричного поля молекули полярного діелектрика, а отже і дипольні моменти, орієнтовані хаотично, тому




*а* *б*

*в*

Рис. 2.1. Види поляризації діелектриків: *а* – електронна; *б* – орієнтаційна; *в* – іонна

результуюча поляризованість дорівнює нулю. Якщо ж полярний діелектрик помістити у зовнішнє електричне поле, то під його впливом відбудеться переорієнтація диполів – момент пари сил намагатиметься повернути їх за полем, і виникне пропорційна величині напруженості поля поляризованість.

3) **іонна поляризація** полягає у зміщенні підгратки додатних іонів вздовж поля, а від'ємних – проти поля, що і призводить до виникнення дипольних моментів (рисунок 2.1, *в*). При цьому кристалічна гратка зазнає пружної деформації. Іонна поляризація спостерігається в кристалічних та аморфних тілах іонної будови (кварц, слюда, азбест, скло тощо). З підвищенням температури

іонна поляризація посилюється внаслідок ослаблення пружних сил, що діють між іонами через збільшення відстані між ними при тепловому розширенні речовини. Час встановлення іонної поляризації близько $10^{-13}$ с.

Експериментально встановлено, що для великого класу ізотропних діелектриків (крім сегнетоелектриків) поляризованість діелектрика лінійно залежить від напруженості електричного поля в ньому:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \tag{2.3}$$

де $\chi$ – коефіцієнт пропорційності, який називається діелектричною сприйнятливістю середовища.

**Діелектрична сприйнятливість $\chi$** середовища є мірою того, наскільки легко воно поляризується у відповідь на прикладене електричне поле. У випадку ізотропного діелектрика, діелектрична сприйнятливість є скалярною величиною завжди більшою нуля. У більш загальному випадку це тензор, що зв'язує індуковану поляризованість діелектрика з електричним полем у ньому.

**Діелектрична проникність $\varepsilon$** середовища є мірою спротиву, який виникає при формуванні електричного поля в цьому середовищі. Сприйнятливість середовища зв'язана з його діелектричною проникністю

$$\chi = \varepsilon - 1. \tag{2.4}$$

Діелектрична проникність – це коефіцієнт, який показує, у скільки разів ослабилось електричне поле $E$ у діелектрику відносно поля у вакуумі $E_0$:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \tag{2.5}$$

Значення діелектричних проникностей деяких речовин наведені в таблиці 2.1.

*Таблиця 2.1.*

**Діелектричні проникності деяких речовин**

| **Тверді тіла** | **ε** | **Рідини** | **ε** |
|---|---|---|---|
| Парафін | 1,9 – 2,2 | Бензин | 1,9 – 2,0 |
| Поліетилен | 2,25 | Масло трансф. | 2,2 |
| Папір | 2,0 – 3,5 | Спирт | 26 |
| Оргскло | 3,5 | Гліцерин | 43 |
| Дерево сухе | 2,3 – 3,7 | Вода | 81 |
| Гума | 3,0 – 6,0 | **Гази** | **ε** |
| Порцеляна | 4,4 – 6,8 | Гелій | 1,000068 |
| Скло | 6 - 10 | Водень | 1,000252 |
| Лід | 70 | Азот | 1,000528 |
| Титанат барію | 1200 | Повітря | 1,00057 |

## 2.3. Поле зв’язаних зарядів

Покажемо електричне поле, яке формується в діелектрику. Для цього розглянемо пластину діелектрика, поміщену в зовнішнє однорідне електричне поле напруженістю $\vec{E}_0$. Внаслідок поляризації діелектрика, тобто орієнтації дипольних моментів у ньому в однаковому напрямку, всередині матеріалу заряди протилежних знаків взаємокомпенсуються, в той час як краях пластини накопичуються нескомпенсовані зв’язані заряди протилежних знаків – додатного на краю пластини у напрямку за полем і від’ємного на протилежному краю пластини (рисунок 2.2). Загальний нескомпенсований заряд, який виникає в результаті поляризації середовища, називається **зв'язаним зарядом**, тому що він не може переміщатися крізь речовину, а може лише трохи зміщуватися від положення рівноваги.

В результаті нескомпенсовані зв’язані заряди, що з’явились на протилежних краях діелектрика, створюють власне електричне поле $\vec{E}_{зв}$, яке напрямлене протилежно по відношенню до зовнішнього поля $\vec{E}_0$. Результатом суперпозиції двох електричних полів – зовнішнього електричного поля і власного поля індукованих зв’язаних зарядів діелектрика – буде електричне поле, співнапрямлене з зовнішнім, однак дещо слабше за величиною:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{зв}, \tag{2.6}$$

або у скалярному вигляді

$$E = E_0 - E_{зв}. \tag{2.7}$$

При цьому нескомпенсовані зв’язані заряди залишаються лише на поверхні країв пластини діелектрика, отже вони є розподіленими по поверхні з деякою поверхневою густиною $\sigma_{зв}$, додатною на одній грані та рівною за модулем і від’ємною на протилежній грані, як показано на рисунку 2.2, *б*.

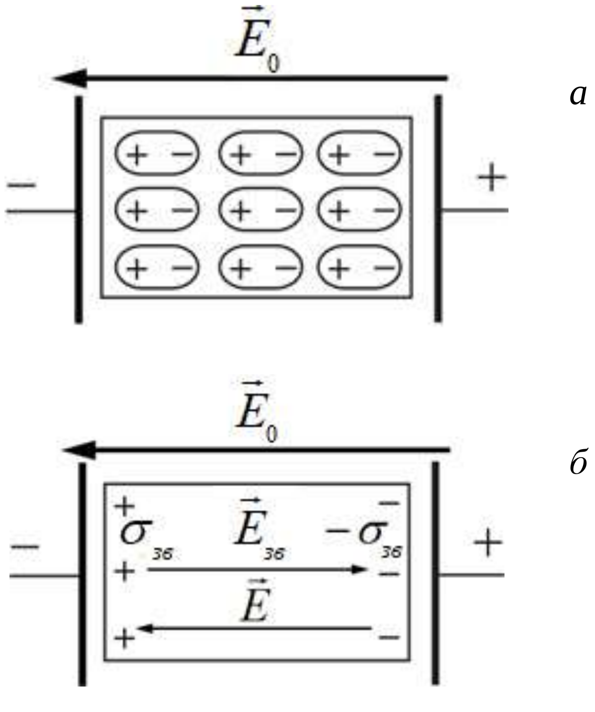


Рис. 2.2. Пляризація діелектрика у зовнішньому електричному полі (*а*) та виникнення поля зв’язаних зарядів (*б*)

Оскільки однорідне електричне поле плоскосиметричне, то його величина визначається через поверхневу густину заряду як

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ та } E_{зв} = \frac{\sigma_{зв}}{\varepsilon_0},$$

де σ – поверхнева густина розподілу зовнішніх зарядів, що створюють зовнішнє поле, $\sigma_{зв}$ – поверхнева густина індукованих зв’язаних зарядів в діелектрику.

Тоді, використовуючи формулу (2.7) та співвідношення (2.5), ми отримуємо $\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{зв}}{\varepsilon_0}$, і поверхнева густина індукованих зв’язаних зарядів дорівнює

$$\sigma_{зв} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\sigma. \tag{2.8}$$

Густина зв'язаних зарядів $\sigma_{зв}$, індукованих в діелектрику, завжди менша за густина розподілу зовнішніх зарядів σ.

З іншого боку, поверхневу густину зв'язаного заряду можна обчислити як відношення повного заряду в приповерхневому шарі діелектрика до площі поверхні $\sigma_{зв} = \frac{Nq_0}{S}$, де $N$ – загальна кількість диполів, $q_0$ – заряд одного диполя, $S$ – площа поверхні грані діелектрика. Помноживши чисельник і знаменник на відстань $l$, що відповідає плечу диполя, одержимо $\sigma_{зв} = n_0 q_0 l$, де $n_0 = N/V$ – концентрація диполів у приповерхневому шарі. Але $\rho = q_0 l$ – це електричний дипольний момент, а його добуток на концентрацію диполів за формулою (2.2) дорівнює поляризованості діелектрика. Отже,

$$\sigma_{зв} = \mathrm{P}_n, \tag{2.9}$$

де $\mathrm{P}_n$ –проекція вектора поляризованості на нормаль до поверхні грані діелектрика.

Тоді, електричне поле в діелектрику можна розписати як $E = E_0 - E_{зв} = \frac{\sigma - \sigma_{зв}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \mathrm{P}_n}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0}$. Звідси $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{1+\chi}$, що означає, що електричне поле в діелектрику зменшується в 1 + χ рази порівняно з полем у вакуумі, і що відносна діелектрична проникність ε = 1 + χ.

## 2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризованості

Для даного об’єму $V$, обмеженого поверхнею $S$, потік вектора поляризованості $\vec{\mathrm{P}}$ через замкнену поверхню $S$ буде дорівнювати повному зв’язаному заряду $q_{зв}$ всередині поверхні $S$, взятому з від’ємним знаком

$$\oint \mathrm{P}_n dS = \oint \vec{\mathrm{P}} d\vec{S} = -q_{зв}. \tag{2.10}$$

Закон Гаусса для вектора поляризованості можна записати в диференціальній формі

$$div\vec{\mathrm{P}} = -\rho_{зв}, \tag{2.11}$$

де $\rho_{зв}$ – об’ємна густина зв’язаного заряду, що міститься всередині замкненої поверхні $S$.

Теорема Гаусса для вектора поляризованості є наслідком із визначення цієї величини. Щоб довести її, розглянемо діелектрик із неполярних молекул, об'ємна концентрація яких дорівнює $n$. Нехай під дією електричного поля позитивні заряди змістилися з положення рівноваги на величину $\vec{r}_+$, а негативні – на величину $\vec{r}_-$. Тоді кожна молекула діелектрика набуде електричного дипольного моменту $\vec{\rho} = q_0\vec{l} = q_0(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$, а загальний дипольний момент в одиничному об’ємі буде $nq_0\vec{l}$. Розглянемо довільну замкнуту поверхню $S$ в описуваному діелектрику. Припустимо, що поверхня $S$ проведена так, що за відсутності електричного поля вона не перетинає окремі диполі, тобто додатні і від’ємні заряди, пов'язані з молекулярною структурою речовини, компенсують один одного всередині поверхні. Тоді сумарний заряд всередині поверхні дорівнює нулю.

При прикладанні електричного поля відбудеться зміщення зв’язаних зарядів, і елемент площі поверхні $dS$ перетнуть додатні заряди з об'єму $\vec{r}_+ d\vec{S}$ в кількості $nq_0\vec{r}_+ d\vec{S}$ ($d\vec{S}$ тут – векторна площа, що має величину $dS$ та напрямок зовнішньої нормалі до охопленого поверхнею об’єму). Для від’ємних зарядів маємо відповідно величини $\vec{r}_{-}d\vec{S}$ та $nq_0\vec{r}_{-}d\vec{S}$. Загальний заряд, що перейде назовні із елемента площі поверхні *dS*, дорівнює

$$dq = nq_0(\vec{r}_{+} - \vec{r}_{-})d\vec{S} = nq_0\vec{l}d\vec{S} = n\vec{p}d\vec{S} = \vec{P}d\vec{S}.$$

Проінтегрувавши отриманий вираз по замкнутій поверхні *S*, отримаємо величину сумарного електричного заряду *q*, який покине охоплений поверхнею об’єм. А це означає що тепер всередині залишиться нескомпенсований зв’язаний заряд $-q_{зв}$, рівний по модулю тому заряду, що вийшов. В результаті маємо:

$$-q_{зв} = \oint \vec{P}d\vec{S},$$

що і треба було довести.

Розглянемо тепер граничні умови для вектора поляризованості на межі розділу двох різних однорідних ізотропних діелектриків. Поляризованість в різних матеріалах, що знаходяться в одному електричному полі, буде різна, а зв'язані заряди в результаті поляризації будуть накопичуватися на межі розділу діелектриків.

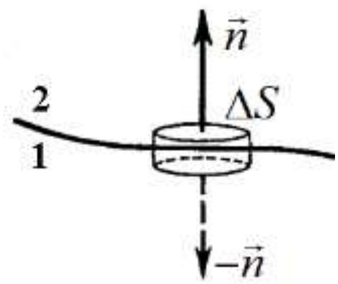


Рис. 2.3. Гауссова поверхня на межі розділу двох діелектриків

Розглянемо гауссову поверхню у вигляді дуже малого циліндру, вісь якого перпендикулярна межі розділу діелектриків, а кожна з основ має площу $\Delta S$ і рівновіддалена від поверхні розділу (рисунок 2.3). Оскільки циліндр дуже малий, ми можемо вважати, що вектор поляризованості $\vec{P}$ постійний в межах кожної з плоских основ циліндра. Тоді за теоремою Гаусса для вектора $\vec{P}$ одержуємо

$$P_{2n}\Delta S - P_{1n}\Delta S = -\sigma_{зв}\Delta S,$$

де $\sigma_{зв}$ – поверхнева густина зв’язаних зарядів на межі розділу, $P_{1n}$ та $P_{2n}$ – проекції вектора поляризованості на нормаль у першому та другому діелектриках. Тоді,

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{зв}. \tag{2.12}$$

Якщо другим матеріалом є вакуум, $P_{2n} = 0$, і нормальна складова поляризованості на границі діелектрика

$$P_n = \sigma_{зв}. \tag{2.13}$$

## 2.5. Вектор електричного зміщення

Розглянемо основне рівняння електростатики $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ для поля у діелектрику. Його можна переписати як $div\vec{E} = \dfrac{\rho_{пов}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho + \rho_{зв}}{\varepsilon_0}$, де $\rho_{пов} = \rho + \rho_{зв}$ – повна об’ємна густина заряду, рівна сумі густини вільних і зв’язаних зарядів. Густину зв’язаних зарядів можна переписати як функцію поляризованості $\rho_{зв} = -div\vec{P}$, отже $div\vec{E} = \dfrac{\rho - div\vec{P}}{\varepsilon_0}$; перетворимо цей вираз як $div\left(\vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, або $div\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho$. Величина в дужках $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ визначається як **вектор електричного зміщення** (або **вектор електростатичної індукції**) $\vec{D}$. З урахуванням формули (2.3) одержуємо так зване матеріальне рівняння для електростатичного поля, що зв’язує вектор електричного зміщення та напруженості електричного поля у діелектрику:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}. \tag{2.14}$$

Теорема Гаусса для поля електричного зміщення в діелектрику буде:

$div\vec{D} = \rho$ (диференціальна форма), або (2.15а)

$\oint \vec{D}d\vec{S} = \oint D_n dS = q$ (інтегральна форма), (2.15б) де $q$ – повний вільний заряд всередині замкненої поверхні $S$.

Розглянемо граничні умови для вектора електричного зміщення на межі розділу двох різних однорідних ізотропних діелектриків. Знову візьмемо гауссову поверхню у вигляді дуже малого циліндру, вісь якого перпендикулярна границі розділу діелектриків, а кожна з основ має площу $\Delta S$ і рівновіддалена від поверхні розділу (рисунок 2.3). Оскільки циліндр дуже малий, можна вважати, що поле електричного зміщення постійне в межах кожної з плоских основ циліндра.

Тоді за теоремою Гаусса для вектора $\vec{D}$,

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma\Delta S,$$

де σ – поверхнева густина вільних зарядів на межі розділу, $D_{1n}$ та $D_{2n}$ – проекції вектора електричного зміщення на нормаль у першому та другому діелектриках. Тоді,

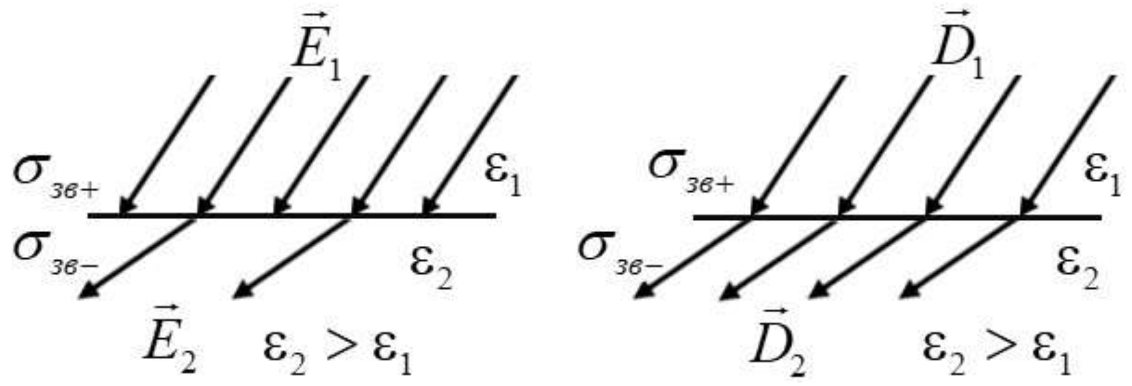
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \tag{2.16}$$

Якщо на межі розділу немає вільних зарядів, $\sigma = 0$, нормальна складова $D_n$ буде неперервна на границі розділу:

$$D_{2n} = D_{1n}. \tag{2.17}$$

Тобто, значення вектора електричного зміщення $\vec{D}$ не залежить від властивостей середовища на відміну від вектора напруженості $\vec{E}$. Вектор напруженості $\vec{E}$ при переході через границю розділу діелектриків стрибкоподібно змінюється, силові лінії напруженості розриваються – виникають незручності під час розрахунків електростатичних полів. Саме тому ввели поняття електричного зміщення, для якого таких незручностей немає (рисунок 2.4).

Лінії електричного зміщення – це лінії, дотичні до яких в кожній точці співпадають з напрямком вектора $\vec{D}$. Напрям і густина цих ліній визначають так само, як і для силових ліній вектора $\vec{E}$. Лінії напруженості можуть починатись і закінчуватись на будь-яких зарядах – вільних і зв'язаних; в той же час лінії вектора електричного зміщення – лише на вільних зарядах. Тому через області поля, де знаходяться зв'язані заряди, лінії вектора $\vec{D}$ проходять не перериваючись.




*а* *б*

Рис. 2.4. Електричне поле на межі розділу двох діелектриків: силові лінії напруженості (*а*) та зміщення (*б*)

## 2.6. Нелінійні діелектрики

У більшості діелектричних матеріалів індукована поляризованість прямо пропорційна прикладеному електричному полю $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, тобто поляризованість є лінійною функцією. Такі діелектрики поляризуються тільки під час накладання зовнішнього електричного поля, а після припинення його дії знову повертаються в неполяризований стан.

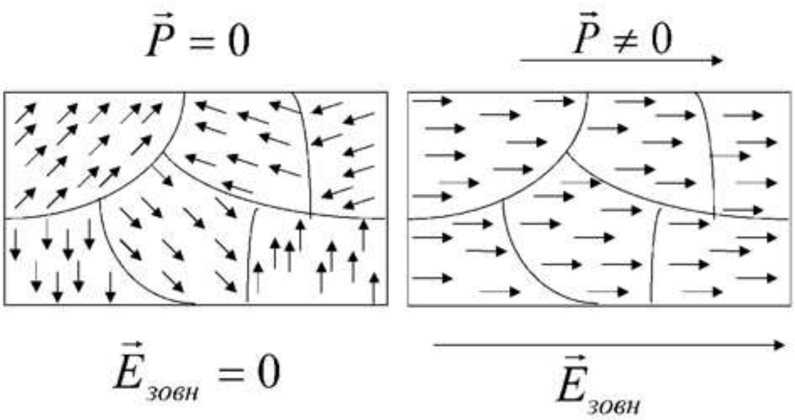
Однак існують так звані нелінійні діелектрики, в яких діелектрична сприйнятливість (та проникність) не постійна, і поляризованість є нелінійною функцією. Це діелектрики з іонною поляризацією, у яких виникнення електричних диполів в речовині пов’язане з кристалічною граткою, тому все, що змінює ґратку, змінить і поляризованість. В свою чергу, зміна поляризованості призводить до зміни густини поверхневого заряду, а це може спричинити виникнення електричного струму навіть за відсутності зовнішнього електричного поля. Двома факторами, які можуть чинити вплив на кристалічну гратку речовини, є механічна сила і температура.

Генерація поверхневого заряду у відповідь на застосування до матеріалу зовнішньої механічної деформації називається **п'єзоелектричним ефектом** (**п'єзоефектом**), а діелектрики в яких він спостерігається – **п'єзоелектриками**. П'єзоелектрикам властивий і зворотній п'єзоефект – деформація розтягу або стиску під впливом зовнішнього електричного поля.

Серед п'єзоелектричних речовин є такі, які виявляють **спонтанну поляризованість** – макроскопічну поляризованість навіть за відсутності зовнішнього електричного поля завдяки особливостям своєї внутрішньої будови, а саме зміщення центрів додатних і від'ємних зарядів кристалічної гратки речовини. До спонтанно поляризованих діелектриків належать піроелектрики та сегнетоелектрики.

Зміна спонтанної поляризації матеріалу та виникнення на його поверхні електричних зарядів у відповідь на зміну температури називається **піроелектричним ефектом**, а діелектрики в яких він спостерігається – **піроелектриками**. У кристалах піроелектриків внаслідок дії внутрішніх сил підгратка додатних іонів зміщена відносно підгратки від'ємних іонів. При швидкій зміні температури змінюється зміщення іонних підграток, завдяки чому на гранях виникають додаткові зв'язані заряди протилежних знаків. Густина зарядів при цьому пропорційна зміні температури $\sigma = p\Delta T$, де $p$ – піроелектрична константа.

**Сегнетоелектрики** – це кристалічні діелектрики яким властива доменна структура – наявність у матеріалі окремих областей (доменів), в межах яких існує спонтанна поляризованість. При цьому орієнтація електричних дипольних моментів у різних доменах різна. Накладення зовнішнього поля сприяє переважній орієнтації електричних моментів доменів у бік поля, що дає ефект дуже сильної поляризації (рисунок 2.5).




*а* *б*

Рис. 2.5. Схематичне зображення доменної структури сегнетоелектрика за відсутності зовнішнього електричного поля (*а*) та при його прикладанні (*б*)

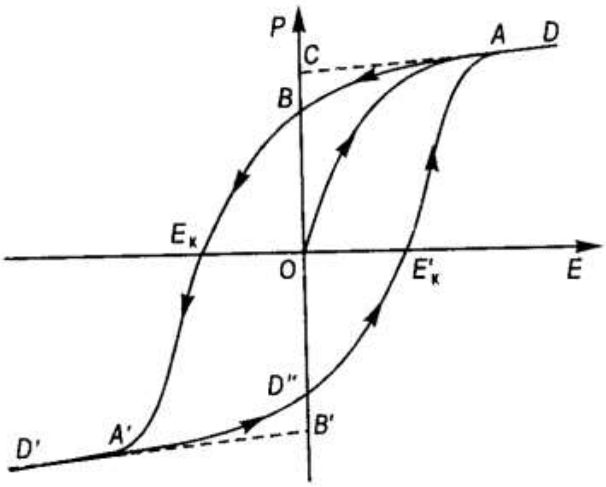



Рис. 2.6. Діелектричний гістерезис

Сегнетоелектрики мають нелінійну залежність діелектричної проникності ε від величини напруженості електричного поля, а отже і залежність вектора поляризованості від вектора напруженості $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$ є нелінійною (рисунок 2.6). Поляризованість сегнетоелектрика швидко зростає навіть у слабкому електричному полі, доки при певному значенні напруженості цього поля не досягне насичення, і подальше посилення поля вже не викликає зростання поляризованості (ділянка *AD* на рисунку 2.6). Після зняття зовнішнього поля поляризованість сегнетоелектрика не падає до нуля, а зберігає деяке залишкове значення (точка *B* на рисунку 2.6), яке може залишатись протягом досить тривалого часу. Для того щоб усунути залишкову поляризованість необхідно прикласти зовнішнє електричне поле зворотного напрямку, і напруженість $E_к$ при якій Р стає рівною нулю називається коерцитивною силою.

Таким чином, залежність поляризованості сегнетоелектрика від напруженості прикладеного електричного поля утворює петлю і в кожному наступному стані визначається попередньою історією поляризації – це явище називається **діелектричним гістерезисом.**

Сегнетоелектричні властивості матеріалу спостерігаються лише при температурах нижче певного критичного значення яке називається температурою Кюрі. Зі зростанням температури вище цього значення відбувається фазовий перехід, спонтанна поляризація руйнується і кристал переходить у звичайний неполярний діелектрик. Такий стан називається параелектричним.

# 3. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНИКАХ

## 3.1. Провідники в стані електростатичної рівноваги

**Провідники** – це речовини, які проводять електричний струм через наявність у них вільних носіїв заряду (електронів), які не зв’язані з жодним атомом і тому можуть вільно рухатися всередині матеріалу.

- Провідники першого роду – метали, в них перенесення зарядів (вільних електронів) не супроводжується хімічними перетвореннями.
- Провідники другого роду – розплавлені солі, розчини кислот, в них перенесення зарядів (додатних і від’ємних іонів) веде до хімічних змін.

Тут ми будемо розглядати лише провідники першого роду. В металах валентні електрони є слабко зв’язаними зі своїми атомами, тому відриваються від них, залишаючи у вузлах кристалічної гратки додатні іони. За відсутності електричного поля вільні електрони хаотично рухаються в усьому об’ємі матеріалу, утворюючи так званий «електронний газ». Сумарний рух при цьому дорівнює нулю, струму немає. При прикладанні зовнішнього електричного поля вільні електрони прискорюються у напрямку проти силових ліній і виникає сумарний рух заряду доти, доки не досягнеться електростатична рівновага. **Електростатична рівновага** – це стан провідника у зовнішньому електростатичному полі коли у провіднику немає сумарного руху заряду. При цьому спостерігаються наступні властивості:

1. Електричне поле дорівнює нулю всюди всередині провідника у стані електростатичної рівноваги, незалежно від того, суцільний він чи порожнистий.

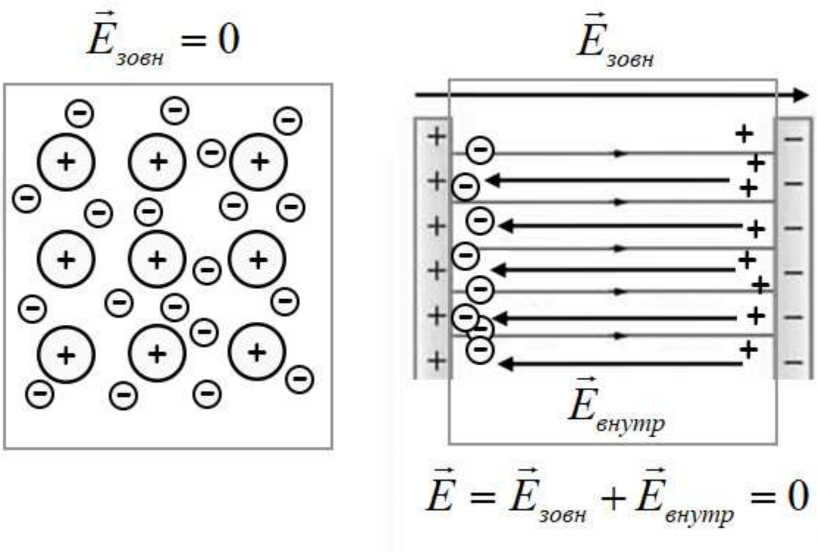
2. В ізольованому зарядженому провіднику у стані електростатичної рівноваги заряд розподілений лише на його поверхні.

3. Вектор напруженості електричного поля в точках безпосередньо поза зарядженим провідником перпендикулярний до поверхні провідника і має величину $\sigma/\varepsilon_0$, де $\sigma$ — поверхнева густина заряду в цій точці.

4. На провіднику неправильної форми поверхнева густина заряду найбільша в місцях, де радіус кривизни поверхні найменший.

Щодо першої властивості, то існування електростатичної рівноваги узгоджується лише з нульовим полем усередині провідника, оскільки відмінне від нуля поле викликало б рух електронів під дією електричної сили.

Розглянемо провідну пластину, розміщену у зовнішньому електричному полі. Перед прикладанням зовнішнього поля вільні електрони були рівномірно розподілені по всьому провіднику. Після прикладання зовнішнього електричного поля вільні електрони прискорюються силами поля і рухаються крізь об’єм провідника поки не досягнуть його поверхні (рисунок 3.1).




*а* *б*

Рис. 3.1. Схематичне зображення провідника за відсутності електричного поля (*а*) та при досягненні стану електростатичної рівноваги у прикладеному полі (*б*)

В результаті відбувається накопичення від’ємного заряду на поверхні у напрямку проти поля та додатного заряду на поверхні у напрямку за полем (див. рисунок 3.1). Ці, накопичені на протилежних поверхнях провідника, заряди створюють власне внутрішнє електричне поле всередині провідника, яке направлене протилежно зовнішньому полю.

Переміщення зарядів всередині провідника відбуватиметься доти, доки напруженість внутрішнього поля, створеного зміщеними зарядами, не зрівняється з напруженістю зовнішнього поля $E_{зов} = E_{внутр}$. Тоді результуюче поле у провіднику $E_{зов} - E_{внутр} = 0$ і настає рівновага. Час, необхідний для досягнення електростатичної рівноваги, становить порядку $10^{-16}$ с, що для більшості випадків можна вважати миттєвим.

Щодо другої властивості, то зміщені заряди у провіднику, який досяг стану рівноваги в електростатичному полі, завжди знаходяться у дуже тонкому приповерхневому шарі товщиною порядку міжатомної відстані.


Рис. 3.2. Заряди у провіднику в стані електростатичної рівноваги

Це легко довести застосовуючи теорему Гаусса. Розглянемо провідник довільної форми. Гауссову поверхню для області простору всередині провідника можна обрати як завгодно близькою до поверхні самого провідника (рисунок 3.2). Оскільки напруженість електричного поля всюди всередині провідника дорівнює нулю в стані електростатичної рівноваги, то вона має дорівнювати нулю в кожній точці гауссової поверхні, отже електричний потік крізь неї дорівнює нулю. Тоді з теореми Гаусса випливає що сумарний заряд всередині гауссової поверхні дорівнює нулю. А значить будь-який загальний заряд провідника повинен знаходитися зовні гауссової поверхні, тобто лише на поверхні провідника.

Розглянемо третю властивість і визначимо напрямок вектора напруженості електричного поля на поверхні провідника. Якби вектор напруженості мав тангенціальну компоненту паралельну поверхні провідника, то вільні електрони на поверхні зазнавали б дії електричної сили від цієї компоненти і почали б переміщуватись по поверхні провідника, що протирічить рівноважному розподілу зарядів. Тому вектор напруженості повинен мати лише нормальну компоненту, тобто бути перпендикулярним до поверхні у будь-якій точці.

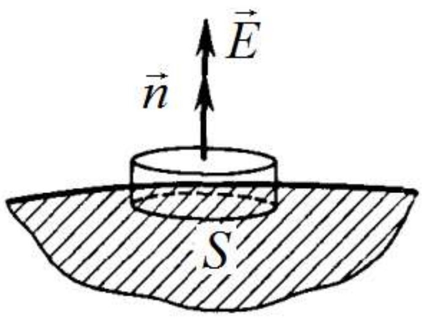



Рис. 3.3. Гауссова поверхня біля поверхні провідника

Визначимо величину напруженості електричного поля на поверхні провідника. Для цього скористаємося теоремою Гаусса і розглянемо гауссову поверхню у формі невеликого циліндра, основи якого паралельні поверхні провідника (рисунок 3.3). При цьому частина циліндра знаходиться ззовні провідника, а частина всередині.

Вектор напруженості електричного поля направлений перпендикулярно до поверхні провідника з умови електростатичної рівноваги. Отже,

- через бічну поверхню гауссового циліндра потоку електричного поля немає бо тут вектор $\vec{E}$ буде паралельний цій поверхні;
- через основу циліндра всередині провідника потоку електричного поля немає, оскільки тут $\vec{E} = 0$;
- таким чином, сумарний потік електричного поля через гауссову поверхню дорівнює потоку лише через основу циліндра зовні провідника, де вектор напруженості поля перпендикулярний до гауссової поверхні.

За законом Гаусса, $\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = ES = \dfrac{\sigma\, S}{\varepsilon_0}$, де $E$ — напруженість електричного поля зовні провідника, а $S$ — площа основи циліндра. Звідси

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

безпосередньо за межами зарядженого провідника.

## 3.2. Еквіпотенціальність поверхні провідника

Оскільки всередині провідника $\vec{E} = 0$, то значить градієнт потенціалу дорівнює нулю, а отже потенціал у всіх точках всередині провідника постійний ($\varphi = const$). Тобто, провідник в електростатичному полі являє собою еквіпотенціальну поверхню.

Тепер розглянемо дві довільні точки на поверхні зарядженого провідника. Вздовж будь-якої траєкторії на поверхні яка з'єднує ці точки вектор $\vec{E}$ завжди буде перпендикулярний до вектора переміщення $d\vec{l}$. Отже, скалярний добуток $\vec{E}d\vec{l} = 0$, і різниця потенціалів між будь-якими точками на поверхні $\Delta\varphi = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = 0$. Можна зробити такі підсумки:

– Поверхня будь-якого зарядженого провідника в стані електростатичної рівноваги є еквіпотенціальною поверхнею: кожна точка на поверхні зарядженого провідника в стані рівноваги має однаковий електричний потенціал;

– Електричний потенціал всюди всередині провідника є однаковим і дорівнює його значенню на поверхні.

Наприклад, розглянемо суцільну металеву провідну кулю радіуса $R$ що несе загальний додатній заряд $q$, як показано на рисунку 3.4. Електричне поле поза кулею буде радіально спрямованим назовні. Оскільки поле зовні від сферично симетричного розподілу заряду ідентичне полю точкового заряду, то і електричний потенціал буде таким як у точкового заряду, $\varphi = k\dfrac{q}{r}$, (для області поза кулею, $r > R$).

На поверхні провідної кулі потенціал буде $\varphi = k\dfrac{q}{R}$. Оскільки вся куля повинна мати однаковий потенціал, то у будь-якій точці всередині кулі потенціал також має дорівнювати $\varphi = k\dfrac{q}{R}$ (для області всередині кулі, $r \le R$).

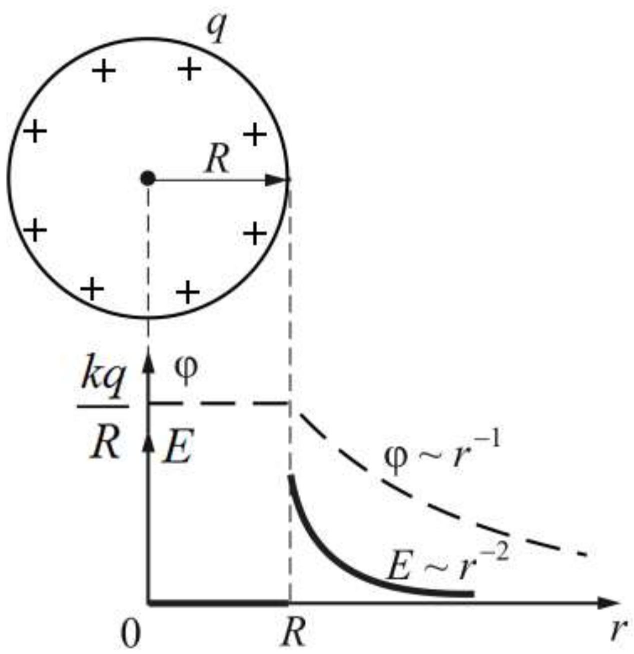



Рис. 3.4. Напруженість електричного поля $E$ та потенціал φ провідної кулі в електростатичній рівновазі

### 3.3. Порожнина всередині провідника

Нехай провідник довільної форми містить порожнину (рисунок 3.5), і всередині порожнини немає зарядів. Оскільки електричне поле скрізь усередині провідника дорівнює нулю, воно має дорівнювати нулю і всередині порожнини. В цей час всі заряди розподілені по поверхні провідника і не створюють електричного поля всередині порожнини.

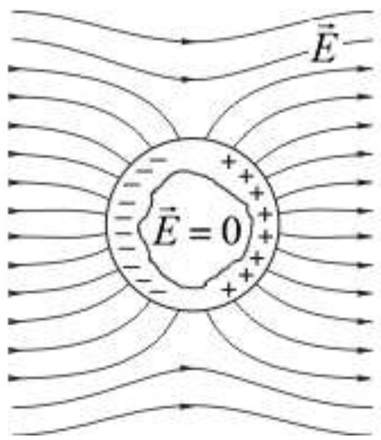



Рис. 3.5. Порожнина всередині провідника

Крім того, поле в порожнині дорівнює нулю, навіть якщо електричне поле існує поза провідником. Щоб підтвердити цю тезу, пригадаємо, що кожна точка провідника має однаковий електричний потенціал. Тому для будь-яких двох точок на поверхні порожнини різниця потенціалів $\Delta\varphi = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$ повинна дорівнювати нулю при будь-якій траєкторії між цими точками. Це можливо лише якщо електричне поле в усій порожнині дорівнює нулю $\vec{E} = 0$.

Отже, порожнина, оточена провідними стінками, є вільною від поля областю, доки всередині порожнини немає зарядів. Застосування цього ефекту відоме як «клітка Фарадея» (або «екран Фарадея») і використовується для електростатичного захисту – екранування тіл від впливу зовнішніх електростатичних полів.

Клітка Фарадея може бути утворена суцільною оболонкою або сіткою з провідного матеріалу. При цьому зовнішнє електричне поле змушує електричні заряди в провідному матеріалі екрану розподілятися таким чином, щоб їх поле повністю компенсувало поле всередині клітки. Якщо ж провідник з порожниною заземлити, то потенціал у всіх точках порожнини буде рівним нулю, тобто порожнина буде повністю ізольована від впливу зовнішніх електростатичних полів. Наприклад, приміщення в яких знаходяться чутливі електроприлади (щитові, лабораторії тощо) на стадії будівництва додатково армують добре провідними заземленими сітками.

# 4. ЕЛЕКТРИЧНА ЄМНІСТЬ. КОНДЕНСАТОРИ

## 4.1. Електрична ємність

Розглянемо спершу відокремлений провідник.

**Відокремлений провідник** – це провідник, який віддалений від інших провідників, тіл та зарядів. Якщо йому надати заряд $q_1$, то заряд розподілиться по поверхні провідника і створить на його поверхні електричне поле з потенціалом $\varphi_1$. При зміні заряду провідника до $q_2$ потенціал зміниться до $\varphi_2$, але для даного провідника відношення його заряду до потенціалу залишиться величиною сталою:

$$\frac{q_1}{\varphi_1} = \frac{q_2}{\varphi_2} = const\,.$$

Цю константу назвали електричною ємністю.

**Ємність відокремленого провідника** – це скалярна фізична величина, що характеризує здатність провідника накопичувати на своїй поверхні заряди і чисельно дорівнює заряду, надання якого провіднику змінює його потенціал на одиницю:

$$C = \frac{q}{\varphi}\,. \tag{4.1}$$

Одиницею вимірювання ємності в системі СІ є Фарад ($[C]$ = 1 Ф).

Ємність провідника залежить від його розмірів і форми і не залежить від наявності порожнин всередині провідника; вона не залежить також від заряду провідника і від його потенціалу. Відокремлені провідники мають дуже малу ємність, наприклад ємність Землі приблизно становить 0,7 мФ. На практиці ж виникає потреба в пристроях, які могли б, маючи невеликі розміри та при невеликому відносно оточуючих тіл потенціалі накопичувати на собі (так би мовити «конденсувати») значні за величиною заряди, тобто мати велику ємність. Такі пристрої називають конденсаторами.

**Конденсатором** називають систему з двох металевих електродів (обкладинок) з однаковими за модулем, але протилежними за знаком зарядами, розміщених на близькій відстані один від одного і розділених шаром діелектрика.

Принцип дії конденсаторів ґрунтується на тому факті, що ємність провідника зростає у випадку наближення до нього інших тіл – внаслідок виникнення на провіднику зарядів, індукованих іншими тілами.

**Ємність конденсатора** (або **взаємна електроємність провідників**) чисельно дорівнює заряду, який необхідно перенести з одного провідника на інший, щоб змінити різницю потенціалів між провідниками на одиницю

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{U}\,. \tag{4.2}$$

Щоб електричне поле в конденсаторах не змінювалось (або точніше майже не змінювалось) під дією зовнішніх полів, це поле намагаються зосередити у просторі між обкладинками. Такій вимозі задовольняють дві пластини, розміщені близько одна до одної, два коаксіальних циліндри або дві концентричні сфери – за формою обкладинок конденсатори можуть бути плоскі, циліндричні та сферичні.

## 4.2. Плоский конденсатор

**Плоским конденсатором** називають систему, що складається з двох паралельних металевих пластин площею $S$ кожна, які розташовані на відстані $d$ одна від одної і мають однакові за модулем заряди $+q$ і $-q$ (рисунок 4.1).

Поверхнева густина заряду на кожній пластині однакова за величиною і рівна $\sigma = q/S$. Якщо пластини розташовані дуже близько одна до одної (порівняно з їхньою довжиною та шириною), ми можемо вважати, що електричне поле між пластинами є однорідним, а поза ними дорівнює нулю. Тоді величина напруженості електричного поля між пластинами дорівнює

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$. Величина різниці потенціалів між пластинами в однорідному полі буде $Ed$; отже, $U = Ed = \dfrac{qd}{\varepsilon_0 S}$. Тепер ми можемо знайти ємність:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{E \cdot d} = \frac{\sigma\, S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Отже, для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (4.3)$$

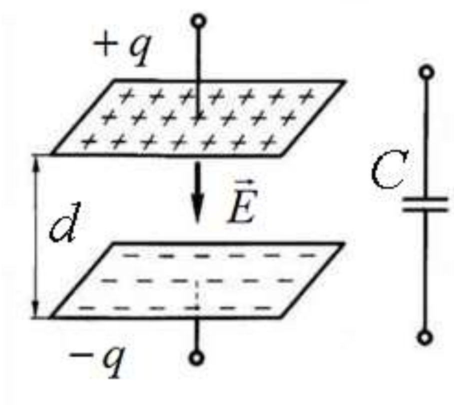



Рис. 4.1. Плоский конденсатор. На вставці – схематичне позначення конденсатора у електричних схемах

Якщо між обкладками конденсатора вставити діелектричну пластину (рисунок 4.2), то електричне поле, а отже, і напруга між обкладками зменшується в ε раз $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta\varphi_0}{\varepsilon}$, де ε – діелектрична проникність матеріалу. Оскільки заряд конденсатора має лишитись незмінним, то ємність має збільшитись в ε раз:

$$C = \varepsilon C_0. \qquad (4.4)$$

Ємність плоского конденсатора з діелектриком

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \qquad (4.5)$$

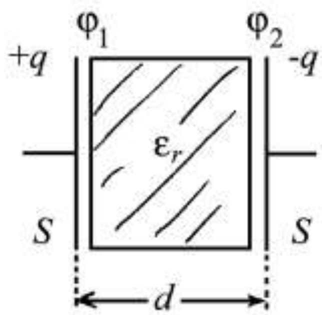



Рис. 4.2. Плоский конденсатор з діелектриком

## 4.3. Циліндричний конденсатор

**Циліндричним конденсатором** називають систему, що складається з двох коаксіальних циліндричних провідників, вставлених один в другий, – суцільного провідника радіуса *a* і заряду *q* і тонкої оболонки радіуса *b*, *b* > *a*, і заряду –*q* (рисунок 4.3).

Припускаючи, що довжина провідників набагато більша за *a* і *b*, можна знехтувати крайовими ефектами. У такому випадку електричне поле буде направлене перпендикулярно до осі циліндрів і обмежене областю між ними і буде визначатися формулою для циліндрично симетричного розподілу заряду $E = 2k\dfrac{\lambda}{r}$.

Тоді різниця потенціалів між циліндрами буде

$$\Delta\varphi = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l} = -\int_a^b E_r dr = -\int_a^b 2k\frac{\lambda}{r}dr = -2k\lambda\ln\frac{b}{a},$$

де $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

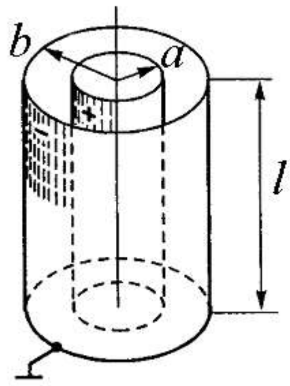


Рис. 4.3. Циліндричний конденсатор

Підставляємо абсолютне значення $\Delta\varphi$ у вираз для ємності і, враховуючи що $\lambda = q/l$, отримуємо

$$C = \frac{l}{2k\ln(b/a)}. \qquad (4.6)$$

## 4.4. Сферичний конденсатор

**Сферичним конденсатором** називають систему, що складається з двох концентричних сферичних провідників, розділених сферичним шаром діелектрика – провідної кулі радіусом $a$ і зарядом $q$ і концентричної з нею провідної оболонки радіуса $b$, $b > a$, і заряду $-q$ (рисунок 4.4).

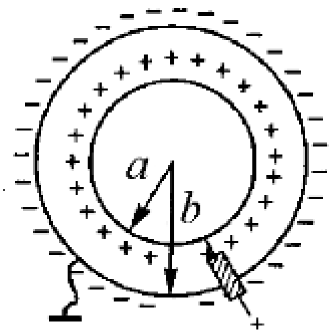


Рис. 4.4. Сферичний конденсатор

Як відомо, напрямок електричного поля зовні сферично симетричного розподілу заряду є радіальним, а його величина визначається виразом $E = k\dfrac{q}{r^2}$ для області ($a < r < b$).

Тоді різниця потенціалів між двома провідниками буде

$$\Delta\varphi = -\int_a^b E_r dr = -\int_a^b k\frac{q}{r^2}dr = kq\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = kq\frac{a-b}{ab}.$$

Підставляючи абсолютне значення $\Delta\varphi$ у вираз для ємності, отримуємо

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}. \qquad (4.7)$$

Знайдемо ємність ізольованої зарядженої кулі. Лінії електричного поля навколо провідної зарядженої кулі будуть точно такі ж, як якби існувала провідна сферична оболонка нескінченного радіуса, концентрична до кулі, яка несе заряд такої ж величини, але протилежного знаку. Тому ми можемо вважати цю уявну оболонку другим провідником сферичного конденсатора. Радіус нескінченно великої уявної оболонки $b \to \infty$. Тоді,

$$C = \frac{1}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{k\left(\frac{1}{a}-0\right)} = \frac{a}{k} = 4\pi\varepsilon_0 a. \qquad (4.8)$$

## 4.5. З’єднання конденсаторів

В електричних колах часто з’єднують між собою два або більше конденсаторів, і тоді необхідно розрахувати еквівалентну ємність певних комбінацій.

**Паралельне з’єднання конденсаторів** показана на рисунку 4.5. Ліві пластини всіх конденсаторів з’єднані з плюсовою клемою батареї за допомогою провідного дроту, тому всі вони мають однаковий електричний потенціал рівний потенціалу додатного полюсу батареї. Так само, праві пластини всіх конденсаторів з’єднані з мінусовою клемою, тому всі мають однаковий потенціал рівний потенціалу від’ємного полюсу батареї. Отже, між пластинами всіх конденсаторів, підключених паралельно, буде однакова різниця потенціалів рівна різниці потенціалів полюсів батареї.

Тобто, $U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n$, де $U$ – напруга на клемах батареї.

При цьому загальний заряд, накопичений усією комбінацією конденсаторів, дорівнюватиме сумі зарядів, що містяться у кожному з конденсаторів: $q_{заг} = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

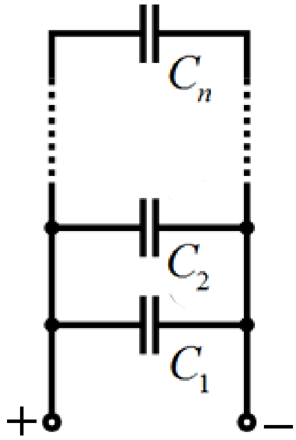


Рис.4.5. Паралельне з’єднання конденсаторів

Всю систему паралельно з'єднаних конденсаторів можна розглядати як один еквівалентний конденсатор, який матиме точно такий вплив на електричну схему, як і дана система. Тобто еквівалентний конденсатор ємністю $C$ повинен зберігати заряд $q_{заг} = CU$ при підключенні до батареї. Але,

$$q_{заг} = q_1 + q_2 + ... + q_n = C_1U_1 + C_2U_2 + ... + C_nU_n =$$
$$= U(C_1 + C_2 + ... + C_n),$$

і еквівалентна ємність для конденсаторів з’єднаних паралельно дорівнює

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n. \quad (4.9)$$

Таким чином, еквівалентна ємність паралельної комбінації конденсаторів є
(1) алгебраїчною сумою окремих ємностей;
(2) більшою, ніж будь-яка з окремих ємностей.

Твердження (2) має сенс, оскільки ми по суті об’єднуємо площі всіх пластин конденсаторів коли вони з’єднуються провідним дротом, а ємність плоского конденсатора пропорційна площі його пластин.

**Послідовне з’єднання конденсаторів** показано на рисунку 4.6.

Розглянемо спочатку два послідовно з'єднаних конденсатора. Ліва пластина конденсатора 1 і права пластина конденсатора 2 підключені до клем батареї. Дві інші пластини з'єднані одна з одною і ні з чим іншим; отже, вони утворюють ізольовану систему, яка початково не заряджена і повинна продовжувати мати нульовий сумарний заряд.

При підключенні даної комбінації конденсаторів до батареї електрони переносяться з лівої пластини конденсатора 1 на праву пластину конденсатора 2. Коли від’ємний заряд накопичується на правій пластині конденсатора $C_2$, рівна кількість від’ємного заряду витісняється з його лівої пластини, і вона набуває рівний за величиною додатний заряд. А той від’ємний заряд, який покинув ліву пластину $C_2$, накопичується на правій пластині $C_1$. В результаті праві пластини обох конденсаторів отримують заряд $+q$, а обидві ліві пластини заряд $-q$. Таким чином, заряди послідовно з’єднаних конденсаторів будуть однакові.

В загальному випадку, $q = q_1 = q_2 = ... = q_n$.

В той же час, загальна напруга в послідовній комбінації конденсаторів розподіляється між ними, $U_{заг} = U_1 + U_2 + ... + U_n$.

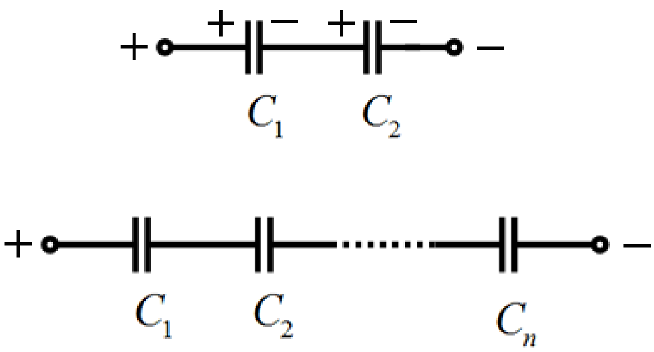



Рис. 4.6. Послідовне з’єднання конденсаторів

Тоді для еквівалентного конденсатора ємністю $C$

$$U_{заг} = \frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + ... + \frac{q}{C_n} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}\right).$$

Отже, еквівалентна ємність для послідовно з'єднаних конденсаторів

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}. \qquad (4.10)$$

Цей вираз показує, що (1) обернена еквівалентна ємність є алгебраїчною сумою обернених окремих ємностей і (2) еквівалентна ємність послідовної комбінації конденсаторів  завжди менша за будь-яку окрему ємність у комбінації.

## 4.6. Енергія електростатичного поля

Оскільки у конденсаторі додатні та від’ємні заряди розділені певною відстанню в системі двох провідників, то в такій системі накопичується електрична потенціальна енергія.

Щоб обчислити енергію, збережену в конденсаторі, розглянемо процес перенесення заряду між пластинами. Процес зарядки конденсатора можна представити у вигляді процесу послідовного перенесення нескінченно малих порцій заряду $dq$ з однієї пластини на іншу, в результаті чого одна пластина буде заряджатись додатно, а друга – від'ємно. При цьому між пластинами буде виникати різниця потенціалів $\Delta\varphi = \dfrac{q}{C}$, і щоб перемістити наступну порцію заряду $dq$ крізь неї треба буде виконати роботу проти сил поля $dA = dq \cdot \Delta\varphi = \dfrac{qdq}{C}$. Оскільки все більше заряду переноситься від однієї пластини до другої, різниця потенціалів пропорційно збільшується, і потрібно виконувати все більше роботи. Повна робота, необхідна для зарядження конденсатора від 0 до кінцевого заряду $q$, дорівнює $A = \int_0^q \dfrac{qdq}{C} = \dfrac{q^2}{2C}$.

Робота, яка виконується при зарядці конденсатора, буде дорівнювати потенціальній електростатичній енергії $W$, що зберігається в ньому:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \qquad (4.11)$$

Розглянемо тепер однорідне електричне поле. Можна вважати що таке поле утворюється всередині плоского конденсатора. Тоді, вважаючи, що енергія конденсатора зосереджена в просторі між обкладинками та застосувавши формулу ємності плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ та співвідношення між напругою та напруженістю однорідного поля $U = Ed$, отримаємо:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon Sd \cdot E^2.$$

Оскільки об'єм, який займає електричне поле, буде $V = Sd$, можна розглянути енергію що припадає на одиницю об'єму – густину енергії $w = W/V$.

**Густина енергії**, що зберігається в електростатичному полі

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}, \qquad (4.12)$$

де поле електричного зміщення $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$.

Хоча цей вираз було отримано для плоского конденсатора, густину енергії можна застосовувати для будь-якого електростатичного поля незалежно від джерела, оскільки в межах нескінченно малого об’єму будь-яке поле можна вважати однорідним. Густина енергії в будь-якому електростатичному полі пропорційна квадрату величини напруженості поля в даній точці.

Повну енергію електростатичного поля, яке існує в деякій області простору, знаходять інтегруванням густини енергії по об’єму, який займає поле:

$$W = \int w dV = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV . \qquad (4.13)$$

# ЛІТЕРАТУРА

1. Кучерук Іван Митрофанович. Загальний курс фізики: У 3 т. Т. 2. Електрика і магнетизм: навч. посіб. для студ. вищ. техн. і пед. закл. освіти / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик; за ред. І. М. Кучерука. – К.: Техніка, 2001. – 452 с.
2. Serway, Raymond A. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics / R. A. Serway, J. W. Jewett, Jr. – 8th ed. – USA: Brooks/Cole, Cengage Learning Inc., 2010. – 1558 p.
3. Іродов Ігор Євгенович. Основні закони електромагнетизму: навч. пос. для студентів вузів / І. Є. Іродов. – 2-е вид. – М.: Вищ. шк., 1991. – 289 с.