



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
НН Фізико-технічний інститут

$$d\mathcal{E} = TdS - \delta\mathcal{A} + \mu\mathcal{N}$$

О. В. Гомонай, Д. В. Філін, О. В. Кравцов

Сто задач з термодинаміки та статистичної фізики

$$(\Delta X)^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

КИЇВ 2022

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Сто задач з термодинаміки та статистичної фізики

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньо-професійною програмою: «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Укладачі: О. В. Гомонай, Д. В. Філін, О. В. Кравцов

Електронне мережне навчальне видання

**Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022**

Рецензент: **О. І. Кельник**, к.ф.-м.н., доц. каф. радіотехніки та радіоелектронних систем КНУ імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор: **С. А. Смирнов**, к.ф.-м.н., голова методичної комісії НН ФТІ

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №6 від 24.06.22) за поданням Вченої ради НН Фізико-технічного інституту (протокол №7 від 20.06.2022)

В посібнику зібрані задачі різного рівня складності з термодинаміки та статистичної фізики. Посібник призначено для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»..

Верстка тексту проведена в видавничій системі $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ (компілятор \XeLaTeX).

Реєстр. №НП XX/XX-XXX. Обсяг 1,3 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (НН ФТІ), 2022 р.

Зміст

| | |
|---|-----------|
| Вступ | 4 |
| Тема 1. Основи макроскопічної термодинаміки | 8 |
| 1.1 Теоретичні відомості | 8 |
| 1.2 Задачі | 9 |
| Тема 2. Загальні положення статистичної фізики | 13 |
| 2.1 Теоретичні відомості | 13 |
| 2.2 Задачі | 15 |
| Тема 3. Квантова статистика | 19 |
| 3.1 Теоретичні відомості | 19 |
| 3.2 Задачі | 21 |
| Тема 4. Реальні гази. Фазові перетворення | 28 |
| 4.1 Теоретичні відомості | 28 |
| 4.2 Задачі | 30 |
| Тема 5. Флуктуації | 33 |
| 5.1 Теоретичні відомості | 33 |
| 5.2 Задачі | 33 |
| Відповіді та вказівки | 36 |
| Література | 40 |

Вступ

Даний посібник зв'явився в результаті багаторічної практики викладання відповідного розділу теоретичної фізики на фізико-технічному факультеті Національного технічного університету України “КПІ”.

Підбір задач для практичних занять з теоретичної фізики для студентів прикладних спеціальностей – завжди непросте завдання. При підготовці цього посібника автори намагалися відібрати або придумати такі задачі, які:

- ілюструють основні принципи та положення термодинаміки та статистичної фізики;
- ілюструють математичні прийоми, які застосовуються в теоретичній фізиці;
- мають відносно простий аналітичний розв'язок, який студент може самостійно проаналізувати з фізичної точки зору;
- прості, але нетривіальні – кожна задача ілюструє одну ідею.

Особливістю цієї збірки є логічний зв'язок між різними задачами: розв'язання кожної наступної задачі спирається на попередні, що повинно стимулювати систематичну, а не епізодичну роботу студента. Крім того, збірка містить достатню кількість оригінальних задач, зокрема, задачі, які ілюструють поняття від'ємних температур.

Всі задачі впорядковані за темами, які відповідають пунктам програми з курсу теоретичної фізики, розділ ”Термодинаміка. Статистична фізика” для студентів фізичних та інженерно-фізичних інженерно-технічних спеціальностей. В межах розділу задачі впорядковані за зростанням складності. Для зручності на початку кожного розділу наведені розширені, в порівнянні з типовими посібниками, теоретичні відомості, в які включені основні поняття та необхідні формули.

При роботі з посібником рекомендуємо користуватися не тільки теоретичним довідником, але й конспектом лекцій або підручником. Доцільно спочатку визначити, який саме принцип або явище ілюструє та чи інша задача, прочитати відповідний розділ конспекту, і після цього приступити до розв'язання задачі.

При розв'язанні задач корисно проаналізувати отримані вирази, відповідаючи на запитання:

- чи відповідає характер отриманих залежностей загальним фізичним принципам і яким саме?
- як веде себе отримана залежність в граничних випадках (певні параметри прямують до нуля або нескінченості)? Які саме граничні випадки коректні для розглянутою в задачі моделі?
- наскільки загальним є отриманий вираз, які існують обмеження на модель та на область застосування виразу?
- для опису яких явищ можна використати отримані формули? Чи існують відомі Вам приклади застосування отриманих формул з інших курсів (наприклад, з фізики твердого тіла, гідродинаміки, тощо)?

Програма курсу “Теоретична фізика. Статистична фізика” для студентів спеціальності “Прикладна фізика”

1. Динамічний та статистичний методи опису. Рівняння Гамільтона. Фазовий простір. Теорема Ліувілля.
2. Елементи термодинаміки. Термодинамічна рівновага. Принципи термодинаміки. Термодинамічні потенціали і їх використання в конкретних задачах.
3. Предмет статистичної фізики. Основні поняття: фазовий простір, функція розподілу, обчислення термодинамічних середніх.
4. Ергодичність, ергодична гіпотеза. Мікροканонічний та канонічний ансамблі. Теорема Гіббса. Великий канонічний ансамбль.
5. Статсума. Обчислення термодинамічних потенціалів за допомогою статсуми.
6. Класичний ідеальний газ. Розподіли Максвелла, Больцмана, Максвелла-Больцмана.
7. Теорема про розподіл енергії за степенями вільності. Приклади застосування (класична теорія теплоємностей).
8. Слабо неідеальні гази. Формула Ван-дер-Ваальса.
9. Принципи квантової теорії багатьох часток (принцип тотожності часток). Матриця густини. Числа заповнення.
10. Елементи квантової статистики. Розподіл Гіббса для квантових систем. Від’ємні температури.
11. Розподіли Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна. Температура виродження.
12. Приклади застосування статистики Фермі-Дірака: ідеальний фермі-газ електронів в металах та напівпровідниках.
13. Приклади застосування статистики Бозе-Ейнштейна: ідеальний газ фотонів, фононів (модель Дебая). Розподіл енергії випромінювання абсолютно чорного тіла. Теплоємність твердих тіл.
14. Бозе-конденсація. Приклади: явище надпровідності.
15. Ентропія та розподіли ймовірності. Принцип Больцмана. Флуктуації основних термодинамічних величин.

16. Фазові переходи: теорія універсальності і подібності. Критичні індекси, масштабова інваріантність подібності (знайомство). Феноменологічні підходи (Ландау, Бреґґа-Вільямса). Розсіяння світла. Критична опалесценція. Умови фазового переходу над викривленою поверхнею. Формула Лапласа.
17. Термодинаміка двовимірних систем (плівки), поверхневі явища: знайомство.

Тема №1 | Основи макроскопічної термодинаміки

1.1 Теоретичні відомості

Внутрішня енергія \mathcal{E} – сума кінетичних енергій всіх часток плюс сума енергії взаємодії часток між собою та зовнішніми полями, включаючи стінки посудини.

Вільна енергія $F = \mathcal{E} - TS$ – “потенціальна” енергія (тобто, максимальна робота, яку може виконати система) в ізотермічному процесі. Тут T – температура, S – ентропія.

Ентальпія $H = \mathcal{E} + PV$ – кількість теплоти, яку система може передати в ізобарному процесі. Тут P – тиск, V – об’єм системи.

Термодинамічний потенціал Гіббса $G = F + PV = \mu\mathcal{N}$ – зміна внутрішньої енергії за рахунок зміни кількості часток в системі \mathcal{N} , без теплообміну та без виконання роботи.

Великий термодинамічний потенціал $\Omega = F - \mu\mathcal{N} = -pV$ – вільна енергія в системі зі змінним числом часток.

Хімічний потенціал μ – зміна внутрішньої енергії, пов’язана з додаванням в систему однієї частки без теплообміну та без виконання роботи.

Критерій квазістатичності термодинамічних процесів: зміни параметрів термодинамічної системи, які спостерігаються в квазістатичному процесі, повинні відбуватися на протязі часу Δt , який значно перевищує час релаксації τ системи відносно зміни цих параметрів, $\Delta t \gg \tau$.

Перший принцип термодинаміки для квазістатичних процесів:

$$d\mathcal{E} = TdS - \delta\mathcal{A} + \mu\mathcal{N} \quad (1.1)$$

де $TdS \equiv \delta Q$ – кількість теплоти, підведеної до системи, $d\mathcal{A}$ – елементарна робота системи проти зовнішніх сил.

В загальному випадку $\delta\mathcal{A} = \sum_j X_j dx_j$, де X_j – внутрішні, x_j – зовнішні

параметри. В окремому випадку (об'єм системи V – зовнішній параметр, тиск P – внутрішній параметр) $\delta\mathcal{A} = PdV$.

Теплоємність C системи (залежить від процесу):

$$CdT = TdS \quad (1.2)$$

Ізохорична теплоємність (при сталому об'ємі):

$$C_V = T (\partial S / \partial T) |_V .$$

Ізобарична теплоємність (при сталому тиску):

$$C_P = T (\partial S / \partial T) |_P .$$

Рівняння стану: $f(P, V, T) = 0$ – зв'язок між внутрішніми, зовнішніми параметрами і температурою в стані термодинамічної рівноваги.

Приклади рівнянь стану: для 1 моля ідеального газу

$$PV = RT, \quad (1.3)$$

для 1 моля газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT, \quad (1.4)$$

де a, b – сталі, $R = 8,31$ Дж/моль·К – універсальна газова стала.

1.2 Задачі

1. Суміш газів (типу повітря, O_2 , N_2 , CO_2) знаходиться в посудині з лінійними розмірами $L = 0,1$ м при нормальних умовах ($T = 300$ К, $P = 10^5$ Па). Оцінити час τ релаксації тиску, температури та концентрації компонент, якщо коефіцієнт дифузії $D = 0,14 \div 0,2$ см²/с, коефіцієнт температуропровідності $\kappa = 0,2$ см²/с.
2. Акустична хвиля (частота $\nu = 10 \div 10^4$ Гц, швидкість $v = 300$ м/с) розповсюджується в повітрі за нормальних умов. Оцінити можливість застосування формул квазістатичної термодинаміки при обчисленні швид-

кості розповсюдження акустичної хвилі в такому середовищі. Вважати, що час утворення локальних термодинамічних характеристик за порядком співпадає з часом вільного пробігу молекул газу $\tau_{free} = 10^{-10}$ с. Скористатися результатами задачі 1.

3. Виходячи з першого принципу термодинаміки (1.1) та визначення відповідних величин довести такі співвідношення:

(а) $dF = -SdT - PdV + \mu dN$;

(б) $dG = -SdT + VdP + \mu dN$;

(в) $dH = TdS + VdP + \mu dN$;

(г) $d\Omega = -SdT - PdV - N d\mu$.

Вказати набір змінних, в яких вільна енергія, ентальпія, термодинамічний потенціал Гіббса та великий термодинамічний потенціал є повними диференціалами.

4. Довести співвідношення Гіббса-Гельмгольца:

$$\mathcal{E} = -T^2 \left. \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \right|_V. \quad (1.5)$$

5. Користуючись результатами задачі 4 та законом Стефана-Больцмана $\mathcal{E}/V \propto AT^4$ для густини енергії теплового випромінювання отримати вираз для вільної енергії та знайти рівняння стану для теплового випромінювання. Обчислити температурну залежність питомої теплоємності при сталому об'ємі та ентропії.

6. Для системи з фіксованою кількістю часток довести, що

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P.$$

7. Користуючись результатами задачі 6 вивести закон Шарля (залежність $P(T)$ в ізохорному процесі) для ідеального газу (внутрішня енергія не залежить від об'єму).

8. Користуючись результатами задачі 6 та рівнянням стану $P = u/3$ для теплового випромінювання, отримати закон Стефана-Больцмана для густини внутрішньої енергії $u = \mathcal{E}/V$.

9. Користуючись результатами задачі 6, довести співвідношення:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

10. Для системи з фіксованою кількістю часток довести загальне співвідношення:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right)_T = T \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_x - X,$$

де X – внутрішній, x – зовнішній параметри. Виходити з загальної формули (1.1).

11. Користуючись властивостями повного диференціала ентропії енергії, знайти $C_P - C_V$. Для 1 моля ідеального газу отримати співвідношення Р. Майера $C_P - C_V = R$.

12. Довести в загальному випадку

$$C_x - C_X = T \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_x^2 \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)_T,$$

де X – внутрішній, x – зовнішній параметри.

13. Користуючись результатами задачі 10 довести співвідношення:

$$\left(\frac{\partial C_x}{\partial x}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 X}{\partial T^2}\right)_x.$$

14. Виходячи з рівняння стану та калоричного рівняння $C_V = const$ для питомої теплоємності знайти внутрішню енергію, ентропію та вільну енергію як функцію T, V для одного молю а) ідеального газу; б) газу Ван-дер-Ваальса.

15. Користуючись результатами задачі 9 довести, що теплоємність C_V газу Ван-дер-Ваальса може залежати тільки від температури. Вважати рівняння стану відомим.

16. Для газу з відомим значеннями питомих теплоємностей C_V та C_P вивести диференціальне рівняння політропічного процесу (тобто, процесу зі сталою теплоємністю C). Проінтегрувати це рівняння для ідеального газу.

17. Довести, що для великого термодинамічного потенціалу справедливе рівняння $\Omega = -PV$, де P – тиск в системі, а V – її об’єм.
18. Отримати вирази для елементарної роботи $\delta\mathcal{A}$ одиниці об’єму однорідного ізотропного діелектрика. Зовнішній параметр: а) вектор індукції \vec{D} ; б) вектор поляризації \vec{P} ; в) вектор напруженості електричного поля \vec{E} .
19. Користуючись результатами задачі 18, записати вираз для повного диференціала вільної енергії однорідного ізотропного діелектрика, якщо а) зовнішній параметр E , внутрішній параметр P ; б) зовнішній параметр D , внутрішній параметр E . Отримати вирази для ентропії та теплоємності C_E (в змінних T, E), C_D (в змінних T, D) за умови, що $P = \alpha(T)E$, залежності коефіцієнта поляризації $\alpha(T)$ та теплоємності $C_V(T)$ за відсутності поля вважати відомими. Розглянути частковий випадок $1/\alpha(T) = (T - T_0)/b$ (закон Кюрі-Вейса).
20. Знайти різницю $C_D - C_E$, де C_E – теплоємність діелектрика при сталому значенні напруженості електричного поля, C_D – теплоємність при сталому значенні індукції електричного поля. Залежність діелектричної проникності від температури $\varepsilon(T)$ вважати відомою.
21. *Процес Джоуля-Томсона* – незворотне адіабатичне розширення газу при дроселюванні (повільному стаціонарному проходженні через корок), різниця тисків ΔP по обидві сторони від корока підтримується сталою. *Ефект Джоуля-Томсона* полягає в зміні температури газу при такому розширенні. Приймаючи до уваги, що процес Джоуля-Томсона квазістатичний ізоентальпійний, вивести формулу для коефіцієнту Джоуля-Томсона:
- $$\mu_{JT} \equiv \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_H = \frac{1}{C_P} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right]. \quad (1.6)$$
22. Користуючись результатами задачі 21, обчислити значення коефіцієнту Джоуля-Томсона для ідеального газу.
23. При нагріванні води від 0°C її густина зростає і досягає максимуму $\rho_{\max} = 0,999973 \text{ г/см}^3$ при $t_{\max} = 3,98^\circ\text{C}$. При подальшому нагріванні густина води зменшується. Визначити і порівняти знак теплового ефекту при ізоермічному розширенні води при $t_1 < t_{\max}$ і $t_2 > t_{\max}$, а також проаналізувати поведінку різниці теплоємностей $C_P - C_V$ та показника адіабати $\gamma = C_P/C_V$ в інтервалі температур $t_1 < t < t_2$.

Тема №2 | Загальні положення статистичної фізики

2.1 Теоретичні відомості

Ансамбль – сукупність однакових динамічних систем з різними початковими умовами.

Мікроканонічний ансамбль – системи замкнені (фіксована кількість часток N) і ізольовані (відсутній теплообмін, фіксована повна енергія E).

Функція розподілу:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N) = \frac{1}{\Gamma} \delta(\mathcal{H} - E), \quad (2.1)$$

де \vec{r}_k, \vec{p}_k ($k = 1 \dots N$) – координати та імпульси k -тої частки, Γ – об'єм фазового простору, який займає система, \mathcal{H} – функція Гамільтона.

Канонічний ансамбль (ансамбль Гіббса): системи замкнені (фіксована кількість часток N) і знаходяться в термостаті (є теплообмін, фіксована внутрішня енергія $\mathcal{E} = \langle E \rangle$). Функція розподілу:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{T}\right), \quad (2.2)$$

де T – температура термостата (в енергетичних одиницях), а статистична сума

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{T}\right) d\Gamma. \quad (2.3)$$

Великий канонічний ансамбль: системи незамкнені (фіксована середня кількість часток $\mathcal{N} = \langle N \rangle$) і знаходяться в термостаті (є теплообмін, фіксована внутрішня енергія $\mathcal{E} = \langle E \rangle$). Функція розподілу:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N; N) = \frac{1}{\Xi} \exp\left(\frac{\mu N - \mathcal{H}}{T}\right), \quad (2.4)$$

де μ – хімічний потенціал системи, а велика статистична сума

$$\Xi = \sum_N \int \exp\left(\frac{\mu N - \mathcal{H}}{T}\right) d\Gamma. \quad (2.5)$$

Для системи однакових часток маси m , що знаходиться при температурі T користуються *розподілом Максвелла* за вектором імпульсу:

$$f(\vec{p}) dp_x dp_y dp_z = (2\pi m T)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2mT}\right) dp_x dp_y dp_z \quad (2.6)$$

та розподілом Максвелла за модулем імпульсу:

$$F(\vec{p}) dp = 4\pi (2\pi m T)^{-3/2} p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right). \quad (2.7)$$

Розподіл *Максвелла-Больцмана* (для ідеального газу в зовнішньому полі з потенціалом $U(\vec{r})$):

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{(2\pi m T)^{-3/2}}{\int \exp(-U(\vec{r})/T) d\vec{r}} \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2mT} - \frac{U(\vec{r})}{T}\right). \quad (2.8)$$

Розподіл *Больцмана* для концентрації часток ідеального газу в зовнішньому полі з потенціалом $U(\vec{r})$:

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{T}\right), \quad (2.9)$$

де n_0 – концентрація часток в точці \vec{r}_0 .

Формула Больцмана для *ентронії*:

$$S = - \int f(x) \ln f(x) dx,$$

де змінні x розрізняють динамічні стани системи (наприклад, це координати в фазовому просторі), $f(x)$ – ймовірність знайти систему в стані x (функція розподілу).

Статистична сума для *неідеального розрідженого газу* ($n \equiv N/V \ll r_0^{-3}$,

r_0 – радіус взаємодії між частками):

$$Z = Z_{\text{id}} \left(1 - \frac{N^2 \omega}{V} \right), \quad (2.10)$$

де

$$\omega = \int \left[1 - \exp \left(-\frac{U(|\vec{r}|)}{T} \right) \right] d^3 \vec{r},$$

$U(|\vec{r}|)$ – потенціал парної взаємодії між частками, Z_{id} – статсума ідеального газу.

2.2 Задачі

24. Система може перебувати в кожному з станів $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ з ймовірністю $P_k \equiv P(x_k)$. Довести, що функція $S = -\sum_k P_k \ln P_k$ досягає найбільшого значення у тому разі, коли всі стани мають однакову ймовірність. Знайти максимальне значення S .
25. Розглянути розподіл імовірностей $f(x)$ у випадку, коли змінна x є неперервною і може набувати значень $-\infty < x < \infty$. Знайти вигляд функції $f(x)$, якщо відомо, що вона відповідає максимуму ентропії за умови $\langle x^2 \rangle \equiv \sigma^2 = \text{const}$. Середнє значення $\langle x \rangle = x_0$.
26. Допустимі значення енергії статистичної системи E_n ($n = 1, 2, \dots, K$). Знайти функцію розподілу $P(E_n)$, яка відповідає максимальній ентропії за умови, що середня енергія системи дорівнює сталій \mathcal{E} .
27. Розглянути систему, яка може обмінюватися фізичними частинками (атомами, молекулами, електронами) з термостатом. Знайти функцію розподілу цієї системи, яка відповідає максимуму ентропії за умов, коли середня кількість частинок $\mathcal{N} = \langle N \rangle$ фіксована (N – кількість частинок у системі).
28. Розглянути систему з фіксованою кількістю частинок, яка перебуває у рівновазі з термостатом. Довести, що для такої системи

$$S = \frac{\mathcal{E}}{T} + \ln Z, \quad \mathcal{E} \equiv \langle E \rangle, \quad (2.11)$$

29. Довести, що для системи, яка обмінюється з термостатом частинками,

замість (2.11) треба користуватися співвідношенням

$$S = \frac{\mathcal{E} - \mu\mathcal{N}}{T} + \ln Z. \quad (2.12)$$

30. Виходячи з розподілу Гіббса для канонічного ансамблю довести такі співвідношення:

$$\mathcal{E} = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \beta \equiv \frac{1}{T}; \quad (2.13)$$

$$\langle (E - \mathcal{E})^2 \rangle = T^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}. \quad (2.14)$$

Тут $\mathcal{E} \equiv \langle E \rangle$ – внутрішня енергія.

31. Виходячи з розподілу Гіббса для великого канонічного ансамблю, довести, що внутрішню енергію $\mathcal{E} \equiv \langle E \rangle$ можна визначити за допомогою такого співвідношення:

$$\mathcal{E} = \left(\mu T \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \ln \Xi, \quad (2.15)$$

32. Виходячи з розподілу Гіббса для канонічного ансамблю та статистичного визначення ентропії, знайти вираз для ентропії через статсуму Z .

33. Виходячи з розподілу Гіббса для канонічного ансамблю та статистичного визначення вільної енергії $F = -T \ln Z$, перевірити співвідношення Гіббса-Гельмгольца:

$$\mathcal{E} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right). \quad (2.16)$$

34. Система з N магнітних частинок, знаходиться в зовнішньому магнітному полі з індукцією $\vec{B} \parallel Z$. Частинки нерухомі, між собою не взаємодіють, магнітний стан кожної з частинок описуються класичним вектором фіксованої довжини M_0 і довільного напрямку.

- Визначити макроскопічні параметри, які описують систему.
- Скласти функцію Гамільтона.
- Обчислити статистичну суму та вільну енергію, виходячи з розподілу Гіббса для канонічного ансамблю.

- Користуючись термодинамічними співвідношеннями, обчислити внутрішню енергію, ентропію та рівняння стану.
 - Знайти магнітну сприйнятливість $\chi(T) \equiv dM_Z/dB$.
35. В закритому вертикальному циліндрі висоти h знаходиться один моль ідеального газу з молярною масою M , температура газу T . Знайти теплоємність газу за умови, що $MgH \ll RT$, де g – прискорення вільного падіння, R – універсальна газова стала.
36. Ідеальний газ з концентрацією молекул n знаходиться в замкненій посудині при температурі T . Виходячи з розподілу Максвелла, розрахувати: а) середню кількість зіткнень за одиницю часу на одиницю площі стінки посудини; б) тиск.
37. Ідеальний газ з концентрацією молекул n знаходиться в посудині, в стінці якої є малий отвір площею S . Температура газу T , тиск значно перевищує атмосферний. Виходячи з розподілу Максвелла, знайти потік енергії (кількість енергії за одиницю часу), обумовлений виходом часток з посудини. За який час температура газу в посудині зменшиться двічі? Процесами теплообміну з навколишнім середовищем знехтувати.
38. Вивести рівняння стану неідеального газу зі слабкою парною взаємодією, виходячи з формули (2.10) для статистичної суми. Прийняти, що концентрація часток $n \ll r_0^{-3}$, потенціал притягання $U_0 \ll T$.
39. Обчислити поправки до рівняння стану неідеального газу за умови, що енергія взаємодії між двома частками має вигляд $U_{12} = \alpha/r^{12} - \beta/r^6$ (потенціал Ленарда-Джонса), де α і β – додатні стали, r -відстань між частками. Відповідь представити у вигляді ряду по гамма-функціям.
40. Обчислити поправки до рівняння стану неідеального газу в моделі “твердих куль”: частки вважати твердими кулями радіуса r_0 . Якщо відстань між частками $r > r_0$, то взаємодія між частками обумовлена диполь-дипольними силами з потенціалом $U_{12} = -U_0 r_0^6/r^6$, де $U_0 > 0$ – стала.
41. За який час тиск повітря в тонкостінній відкачаній посудині, в стінці якої є отвір площею $S = 10^{-6}$ см², збільшиться від $P_1 = 10^{-4}$ мм рт. ст. до $P_2 = 10^{-2}$ мм рт. ст., якщо тиск навколишнього повітря $P_0 = 760$ мм рт. ст., а температура 20° С? Об’єм посудини $V = 1$ л. За який час тиск в посудині буде дорівнювати половині атмосферного тиску? Скористатися результатами задачі 36.
42. Знайти зміну ентропії при змішуванні однакової кількості двох однако-

вих ідеальних газів, які на початку експерименту знаходились в двох замкнених посудинах об'ємами V_1 та V_2 , відповідно. Температура газів T стала, сумарна кількість часток $2N$. Розрахунки провести методами статфізики.

Тема №3 | Квантова статистика

3.1 Теоретичні відомості

Принцип тотожності часток: не існує фізичної можливості розрізнити дві частки однакової природи.

Симетрія хвильової функції відносно перестановок двох часток:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2) = \pm \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \chi_2, \chi_1). \quad (3.1)$$

Для ферміонів $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2) = -\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \chi_2, \chi_1)$, для бозонів $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \chi_2, \chi_1)$.

Статистичний опис квантової системи: *матриця густини* $\hat{\rho}$ містить всю інформацію про квантову систему і описує ймовірність p_k знайти систему в певних (не обов'язково ортогональних) квантових станах $|\psi_k\rangle$:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (3.2)$$

Обчислення середнього значення спостережувальної \hat{A} : $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$.

Властивості матриці густини:

- Матриця густини є спостережувальною: $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$.
- Матриця густини нормована: $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$.
- Матриця густини невід'ємна (виконується рівність Коші-Буняковського $\rho_{jj} \rho_{kk} \geq \rho_{jk} \rho_{kj}$ або всі власні числа невід'ємні).
- Матриця густини чистого стану $|\psi\rangle$ є проектором на вектор цього стану: $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$, $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.
- Неоднозначність ансамблю: не існує фізичного способу визначити, яким чином було приготовлено квантовий ансамбль.

Розподіл Гіббса для квантових систем:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{T}\right), \quad (3.3)$$

де $\hat{\mathcal{H}}$ – оператор Гамільтона, статсума $Z = \text{Tr} \exp(-\hat{\mathcal{H}}/T)$.

Розподіл для великого канонічного ансамблю:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Sigma} \exp\left(\frac{\mu\hat{N} - \hat{\mathcal{H}}}{T}\right), \quad (3.4)$$

де велика статсума $\Sigma = \text{Tr} \exp(\mu\hat{N} - \hat{\mathcal{H}}/T)$.

Від’ємна абсолютна температура спостерігається в квантових системах зі скінченною кількістю степенів вільності (наприклад, в підсистемі ядерних спінів). Необхідна умова: час τ_1 встановлення рівноваги в підсистемі повинен бути значно меншим за характерний час τ_2 обміну енергією між підсистемою та навколишнім середовищем.

Середня кількість часток в стані з енергією ε для ідеального газу бозонів (розподіл *Бозе-Ейнштейна*):

$$n(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon)}{\exp[(\varepsilon - \mu)/T] - 1}. \quad (3.5)$$

Середня кількість часток в стані з енергією ε для ідеального газу ферміонів (розподіл *Фермі-Дірака*):

$$n(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon)}{\exp[(\varepsilon - \mu)/T] + 1}. \quad (3.6)$$

Тут $g(\varepsilon)$ – кратність виродження стану (або густина станів у випадку неперервного спектру), μ – хімпотенціал.

Температура виродження: температура, за якої середня кількість часток в стані з заданою енергією порядку 1.

Перехід від суми до інтегралу (для імпульсів \vec{p} та квазіімпульсів \vec{k}):

$$\sum_{\vec{k}_j} = \sum_{\vec{k}_j} \frac{\Delta k_x}{\pi/L_x} \cdot \frac{\Delta k_y}{\pi/L_y} \cdot \frac{\Delta k_z}{\pi/L_z} \rightarrow \frac{V}{\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} = \frac{V}{\hbar^3 \pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p}.$$

Для випадку просторової ізотропії:

$$\sum_{\vec{k}_j} \rightarrow \frac{4V}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} k^2 dk = \frac{4V}{\hbar^3 \pi^2} \int_{\mathbb{R}} p^2 dp.$$

3.2 Задачі

43. Показати, що при еволюції замкненої системи двох часток симетрія хвильової функції системи відносно перестановок не змінюється.
44. Система складається з двох однакових часток зі спіном 0. Хвильові функції часток $\psi_1(\vec{r}) = \psi_1(-\vec{r})$, $\psi_2(\vec{r}) = -\psi_2(-\vec{r})$, мають різну симетрію відносно інверсії координат. Обчислити ймовірність того, що обидві частки можна знайти в напівпросторі $z \geq 0$. Хвильові функції вважати відомими.
45. Система складається з двох однакових часток зі спіном 1/2. Хвильові функції часток $\psi_1(\vec{r}) = \psi_1(-\vec{r})$, $\psi_2(\vec{r}) = -\psi_2(-\vec{r})$, мають різну симетрію відносно інверсії координат. Обчислити ймовірність того, що обидві частки можна знайти в напівпросторі $z \geq 0$. Хвильові функції вважати відомими, повний спін системи дорівнює 1.
46. Знайти виразу для густини станів $g(\varepsilon)$ а) ідеального газу вільних електронів, закон дисперсії $\varepsilon = p^2/2m$; б) газу фотонів, закон дисперсії $\varepsilon = p/c$; густини станів $g(\omega)$ в) газу фононів, закон дисперсії $\omega = v_t l k$, де v_t , v_l – швидкості поперечних та поздовжньої мод, відповідно.
47. Знайти статсуму та внутрішню енергію ідеального газу однакових квантових осциляторів, що знаходяться у термостаті при температурі T . Власна частота осциляторів ω , кількість осциляторів не фіксована і є внутрішнім термодинамічним параметром.
48. Система з N магнітних частинок зі спіном 1/2 знаходиться в зовнішньому магнітному полі $\vec{B} \parallel Z$. Частинки нерухомі, між собою не взаємодіють, магнітний стан кожної з частинок визначається проекцією спіну на вісь Z , яка приймає два значення $\pm \hbar/2$ (\hbar – стала Планка).
 - Визначити макроскопічні параметри, які описують систему.
 - Скласти функцію Гамільтона.

Таблиця 3.1. Залежність інтенсивності реліктового випромінювання I від частоти ω (цикл/см). За даними COBE.

| ω | I | ω | I | ω | I | ω | I |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| 0,14 | 0,217 | 5,02 | 1,147 | 10,21 | 0,500 | 15,63 | 0,118 |
| 0,40 | 0,305 | 5,31 | 1,128 | 10,50 | 0,463 | 15,98 | 0,112 |
| 0,68 | 0,401 | 5,56 | 1,107 | 10,81 | 0,430 | 16,29 | 0,102 |
| 0,91 | 0,497 | 5,88 | 1,083 | 11,13 | 0,404 | 16,52 | 0,091 |
| 1,23 | 0,596 | 6,16 | 1,051 | 11,41 | 0,380 | 16,80 | 0,086 |
| 1,51 | 0,684 | 6,48 | 1,013 | 11,78 | 0,348 | 17,09 | 0,078 |
| 1,77 | 0,773 | 6,73 | 0,971 | 12,07 | 0,326 | 17,38 | 0,070 |
| 2,11 | 0,858 | 7,02 | 0,930 | 12,38 | 0,302 | 17,55 | 0,064 |
| 2,45 | 0,936 | 7,30 | 0,896 | 12,67 | 0,278 | 17,77 | 0,061 |
| 2,71 | 0,989 | 7,59 | 0,853 | 12,98 | 0,259 | 18,12 | 0,056 |
| 3,02 | 1,045 | 7,85 | 0,807 | 13,24 | 0,241 | 18,43 | 0,053 |
| 3,28 | 1,086 | 8,13 | 0,765 | 13,55 | 0,222 | 18,66 | 0,045 |
| 3,59 | 1,118 | 8,42 | 0,725 | 13,87 | 0,201 | 18,94 | 0,045 |
| 3,85 | 1,139 | 8,70 | 0,687 | 14,12 | 0,184 | 19,20 | 0,045 |
| 4,05 | 1,152 | 8,99 | 0,650 | 14,47 | 0,174 | 19,51 | 0,043 |
| 4,31 | 1,160 | 9,30 | 0,602 | 14,75 | 0,152 | 19,74 | 0,043 |
| 4,51 | 1,158 | 9,59 | 0,572 | 15,04 | 0,142 | | |
| 4,74 | 1,155 | 9,90 | 0,535 | 15,41 | 0,131 | | |

- Обчислити статистичну суму та вільну енергію, виходячи з розподілу Гіббса для канонічного ансамблю.
- Користуючись термодинамічними співвідношеннями, обчислити внутрішню енергію, ентропію та рівняння стану.
- Знайти магнітну сприйнятливність $\chi(T) \equiv dM/dB$.

Порівняти відповідь з результатами задачі 34.

49. В Таблиці 3.1 наведено залежність інтенсивності реліктового випромінювання від частоти. Знайти за цими даними температуру випромінювання та енергетичну світимість.
50. Знайти велику статсуму та середню кількість частинок в i -тому стані системи: а) бозонів; б) ферміонів. Енергетичний спектр окремої частки $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots\}$ вважати дискретним і відомим, всі стани невинроджені.
51. Отримати формулу для флуктуацій чисел заповнення ідеального бозе- та фермі- газів (енергетичні стани невинроджені). Показати, що в си-

- стемах бозонів флуктуації можуть відігравати помітнішу роль, ніж у системах ферміонів.
52. Знайти вираз для статсуми, вільної енергії та тиску газу фотонів при температурі T . Оцінити тиск, який створюють фотони в зірках (для оцінки взяти $T = 6000$ К).
 53. Для газу вільних електронів з концентрацією n , що знаходиться при температурі T , отримати рівняння для визначення хімічного потенціалу μ . Ефективна маса електрона m .
 54. Користуючись результатами задачі 53, знайти енергію Фермі (хімпотенціал при $T = 0$) та рівняння стану (в змінних тиск P , і концентрація n , температура $T = 0$) для ідеального газу вільних електронів. Ефективна маса електрона m .
 55. Оцінити температуру виродження ідеального газу вільних електронів з концентрацією n . Ефективна маса електрона m .
 56. Користуючись інтегральними представленнями, виразити великий термодинамічний потенціал Ω через внутрішню енергію ідеального газу вільних електронів. За допомогою співвідношення $\Omega = -PV$ отримати співвідношення $PV = 2\mathcal{E}/3$.
 57. Користуючись результатами задачі 56 показати, що для ідеального газу вільних електронів питомий термодинамічний потенціал Ω/V є однорідною функцією μ і T порядку $5/2$, питома ентропія S/V та концентрація часток – однорідною функцією μ і T порядку $3/2$, а ентропія на одну частку, S/N однорідною функцією нульового порядку.
 58. Користуючись результатами задачі 56, знайти систему рівнянь, що неявно визначають рівняння стану (в змінних тиск P , температура T і концентрація n) ідеального газу вільних електронів. Ефективна маса електрона m .
 59. Користуючись результатами задач 57 і 58, вивести рівняння адіабати ідеального газу вільних електронів.
 60. Користуючись результатами задачі 58, знайти рівняння стану розрідженого газу Фермі. В розрідженому газі $e^{\mu/T} \ll 1$.
 61. Знайти рівняння стану розрідженого ($e^{\mu/T} \ll 1$) ідеального газу бозонів. Маса часток m , закон дисперсії $\varepsilon = p^2/2m$. Скористатись результатами задач 46, 58, 60.

62. В наближенні $\mu \gg T$ вивести формулу:

$$I(\mu/T) = \int_0^\mu f(\varepsilon)\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}T^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{366}T^4 f'''(\mu) + \dots$$

для функції

$$I(\mu/T) = \int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}.$$

Тут $f(\varepsilon)$ – довільна гладка функція, $f(0) = 0$. Розглянути окремий випадок $f(\varepsilon) = \varepsilon^{n/2}$, де n – натуральне число.

63. Користуючись результатами задач 53, 62, знайти температурну залежність хімпотенціалу $\mu(T)$, внутрішньої енергії $\mathcal{E}(T)$, та вивести рівняння стану виродженого газу вільних електронів ($T \ll T_{\text{вир}}$).
64. Отримати вираз для теплоємності C_V газу фононів у наближенні Дебая. Окремо розглянути випадки високої та низької температур порівняно з температурою Дебая.
65. Ширина забороненої зони властного (без домішок) напівпровідника E_g , ефективні маси електронів та дірок дорівнюють m_e та m_h , відповідно. Знайти хімпотенціал та концентрації власних носіїв при температурі $T \ll E_g$. Скористатися тим, що у власному напівпровіднику кількість електронів та дірок однакова.
66. Напівпровідник з шириною забороненої зони E_g леговано домішками донорного типу. Концентрація домішки N_d , енергія іонізації (відрахована від дна зони провідності) E_d . Знайти концентрацію n_n носіїв n -типу (електронів), вважаючи концентрацію носіїв p -типу (дірок) нехтовно малою. Дослідити залежність n_n та хімпотенціалу від температури. Визначити верхню температурну границю роботи приладу на основі такого напівпровідника.
67. Знайти температуру виродження $T_{\text{вир}}$ ідеального газу бозонів. Маса часток m , закон дисперсії $\varepsilon = p^2/2m$.
68. Виходячи з властивостей функції розподілу показати, що в системі з нескінченною кількістю степенів вільності параметр розподілу Гіббса, який відповідає абсолютній температурі, завжди додатний (тобто, стани з від'ємною температурою неможливі).
69. Показати, що перехід від стану з від'ємною температурою до ста-

ну з додатною температурою відбувається через “нескінченість” ($T \rightarrow \mp\infty$). *Вказівка:* скористатися термодинамічним співвідношенням $1/T = (\partial S/\partial \mathcal{E})_V$.

70. Від’ємні температури отримують на системі ядерних спінів деяких металів (наприклад, срібла та родію), в яких час релаксації спінової підсистеми (за рахунок спін-спінової взаємодії) $\tau_1 = 10$ мс значно менший за час релаксації $\tau_2 = 14$ год. між спінової підсистемою та кристалічної ґраткою. На Рис. 1 зображено схему охолодження в магнітному полі:

- 1 \rightarrow 2 Починаючи з додатної температури $T_i = 15$ мК система ядерних спінів охолоджується (впорядковується) за рахунок повільного збільшення магнітного поля до $B_i = 8$ Тл.
- 2 \rightarrow 3 Охолодження в сталому полі B_i до температури $T_f = 200$ μ К.
- 3 \rightarrow 4 Адіабатичне розмагнічування¹ зразка до поля $B_f = 400$ μ Тл.
- 4 \rightarrow 5 Для створення від’ємної температури $T_f = -200$ μ К в системі спінів напрямок зовнішнього магнітного поля \mathbf{B} змінюють за час² $\Delta t = 1$ мс.
- 5 \rightarrow 7 Навіть в сталому полі B_f система спінів повільно деполяризується (за рахунок обміну енергією з кристалічної ґраткою), відповідно температура системи змінюється від $T_f = -200$ μ К, через нескінченість, до додатної температури $T_f = 200$ μ К, при якій знаходиться ґратка та електронна підсистема.

Завдання:

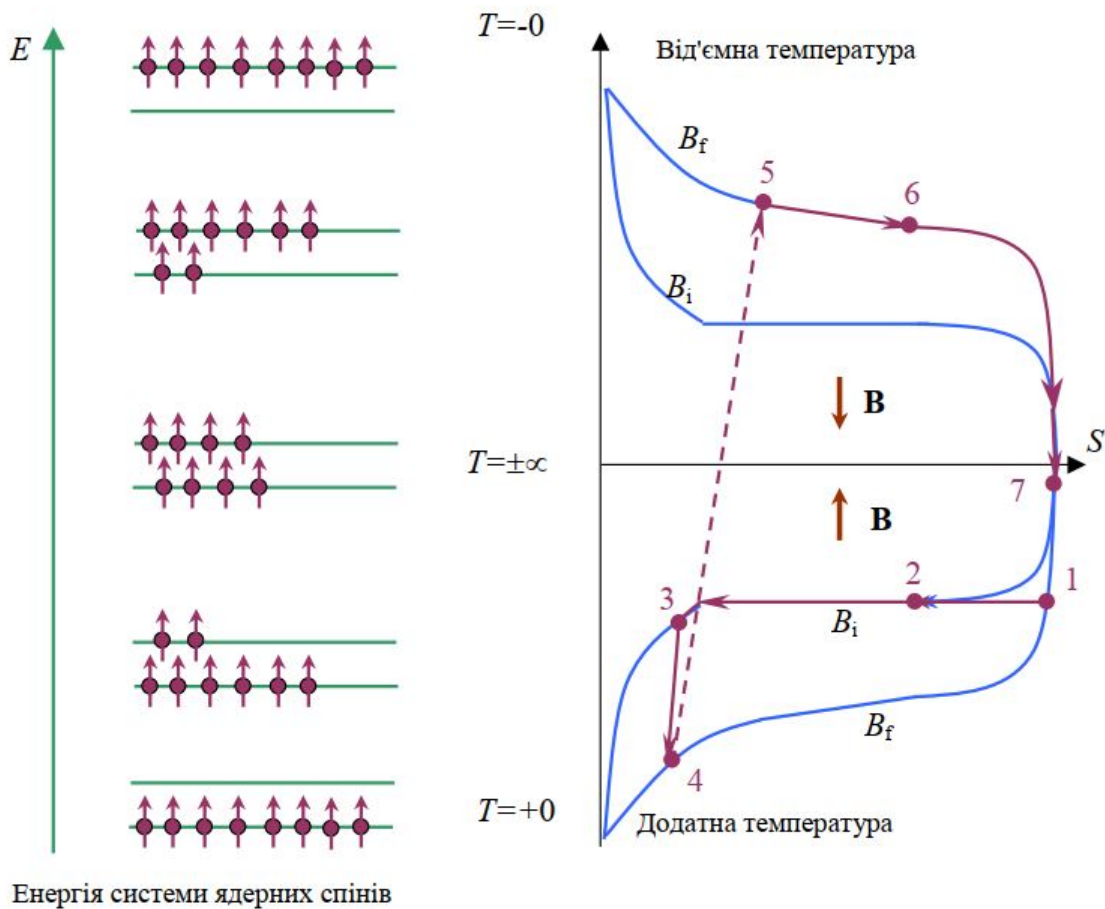
- (а) Оцінити характерний час адіабатичного розмагнічування в даній системі.
- (б) Знайти відношення населеностей n_1/n_2 енергетичних рівнів в кожному зі станів 1-7.
- (в) Знайти і порівняти ентропію та вільну енергію (в розрахунку на 1 спін) системи спінів в кожному зі станів 1-7.

Прийняти, що стани 3, 4, 5; 2 і 6; а також 1 і 7 мають однакову ентропію, ядерний спін $1/2$, ядерний магнетон $\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл. Систему спінів вважати ідеальним газом.

71. Пояснити, чому стан з інверсною населеністю енергетичних рівнів в ла-

¹ Можливе додаткове охолодження до температури 280 пК при зменшенні поля до нуля.

² Якщо після цього зменшити повільно величину поля до нуля, то система додатково охолодиться (рекордна температура, отримана в такий спосіб, становить -750 пК).



Енергія системи ядерних спінів

Рис. 1. Схема охолодження атомів срібла та родію до від'ємних температур (нанокельвіни). Ліворуч – енергетичні рівні і відповідний розподіл ядерних спінів при різних температурах. Праворуч – діаграма в змінних ентропія-температура. $B_f = 400 \mu\text{T}$ (слабке поле), $B_i = 8 \text{ T}$ (сильне поле), пунктирна лінія 4-5 відповідає швидкій зміні напрямку зовнішнього поля.

зері *не можна* вважати станом з від'ємною температурою. *Вказівка:* проаналізувати механізми релаксації та перевірити можливість застосування нульового принципу термодинаміки до системи.

Тема №4 | Реальні гази. Фазові перетворення

4.1 Теоретичні відомості

Умови фазової рівноваги для однорідної двохфазної системи:

- (а) механічна рівновага (мінімум потенціала Гіббса по механічним змінним, об'єму): $P_1 = P_2$;
- (б) термодинамічна рівновага: $T_1 = T_2$;
- (в) мінімум потенціала Гіббса по кількості часток: $\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P)$, де $\mu(T, P)$ – хімічний потенціал.

Рівняння *Клаіперона-Клаузіуса* для фазових переходів 1-го роду:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} = \frac{\Lambda_{12}}{T(V_1 - V_2)}, \quad (4.1)$$

де Λ_{12} – прихована теплота переходу.

Правило Максвелла (перехід пара-рідина):

$$P_{\text{sat}}(v_{\text{п}} - v_{\text{р}}) = \int_{v_{\text{р}}}^{v_{\text{п}}} P(T, v) dv, \quad (4.2)$$

де $P_{\text{sat}}(T)$ – тиск насиченої пари при заданій температурі, $v_{\text{п}}$, $v_{\text{р}}$ – питомий об'єм пари та рідини, відповідно.

Критична температура – температура, при якій зникає різниця між двома фазами (наприклад, рідина та пара мають однакову густину).

Критичні індекси – показники степеню в температурній або польовій залежності термодинамічних параметрів поблизу точки переходу (T_C).

Розрізняють такі індекси:

- (а) β – залежність параметра порядку від температури, $\eta \propto |T - T_C|^\beta$ (для феромагнетика $\eta = M$ – намагніченість і для переходу рідина-пара = $\rho - \rho_{\text{кр}}$ – питома густина);
- (б) γ – залежність сприйнятливості χ параметру порядку до зовнішнього

поля від температури, $\chi \propto |T - T_C|^{-\gamma}$ ($\chi = dM/dH$ для феромагнетика і $= -(1/v^2) (\partial v/\partial P)_T$ для переходу рідина-пара).

- (в) δ – залежність параметру порядку від поля при критичній температурі, для феромагнетика $M \propto H^{1/\delta}$, для переходу рідина-пара $\rho - \rho_{кр} \propto (P - P_{кр})^{1/\delta}$.

Рід фазового переходу (за Еренфестом) визначається найменшою похідною хімічного потенціала, яка змінюється стрибком в точці фазового переходу. Фазові переходи *першого* роду – стрибком змінюється питомий об'єм (або параметр порядку) та ентропія: $v = (\partial\mu/\partial P)_T$, $s = (\partial\mu/\partial T)_P$, ϵ прихована теплота переходу. Фазові переходи *другого* роду – стрибком змінюється теплоємність C_P , коефіцієнт теплового розширення $(\partial v/\partial T)_P$, коефіцієнт пружності $-(1/v)(\partial P/\partial v)_T$.

Рівняння Еренфеста для фазових переходів 2-го роду:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta C_P}{T \Delta(\partial v/\partial T)_P}, \quad (4.3)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \Delta C_P + T \left[\Delta \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \right]^2 = 0.$$

Теорія Ландау для фазових переходів 2-го роду:

- (а) ввести параметр порядку η ;
 (б) представити термодинамічний потенціал як функцію параметру порядку (модель) $F(\eta, T)$;
 (в) рівняння стану визначається з умови мінімуму термодинамічного потенціалу.

Застосування теорії Ландау для *феромагнетика*: параметр порядку $\eta = M$ – намагніченість одиниці об'єму; термодинамічний потенціал – вільна енергія

$$F(M, T, H) = \frac{1}{2}a(T)M^2 + \frac{1}{4}M^4 - MH,$$

де H – напруженість магнітного поля (зовнішній параметр), параметр $a(T)$ змінює знак в точці переходу. Рівняння стану в змінних M, H, T – з рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial M^2} > 0.$$

4.2 Задачі

72. Показати, що для двохфазної системи з фіксованою кількістю часток з умови мінімуму потенціала Гіббса випливає рівність $\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P)$.
73. Вивести рівняння Клайперона-Клаузіуса (4.1) з умови фазової рівноваги двох фаз.
74. Вивести правило Максвелла (4.2) з умови фазової рівноваги. *Вказівка:* використати співвідношення $\mu = f + Pv$ між питомою вільною енергією f та питомим потенціалом Гіббса (хімічним потенціалом).
75. Вивести рівняння Еренфеста (4.3) з умов фазової рівноваги при переходах 2-го роду (рівність питомих об'ємів та ентропії). *Вказівка:* скористатись визначенням $v(T, P)$, $S(T, P)$ через похідні від хімічного потенціалу, а також математичними умовами існування нетривіального розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь.
76. Користуючись результатами задачі 21, обчислити значення коефіцієнту Джоуля-Томсона μ_{JT} для газу Ван-дер-Ваальса. Показати, що μ_{JT} має різний знак в залежності від температури і знайти температуру інверсії, при якій коефіцієнт змінює знак.
77. Виходячи з рівняння стану реального газу (1.4), виразити критичні температуру, $T_{кр}$, тиск, $P_{кр}$ та об'єм, $V_{кр}$ через сталі a , b .
78. Користуючись результатами задачі 77, записати закон відповідних станів, тобто, записати рівняння (1.4) в безрозмірних змінних $\tau = T/T_{кр}$, $\pi = P/P_{кр}$, $\omega = V/V_{кр}$.
79. Користуючись правилом Максвелла знайти тиск насиченої пари P_{sat} при заданій температурі T , питомі об'єми пари, $v_{п}$, та рідини, $v_{р}$, вважати заданими.
80. Обчислити теплоємність пари вздовж кривої рівноваги рідина-пара. Пару вважати ідеальним газом.
81. Знайти температурну залежність питомого об'єму рідини, $v_{р}(T)$, та пари, $v_{п}(T)$, в околі критичної температури, а також коефіцієнту пружності $K_T \equiv -(1/v)(\partial P/\partial v)_T$, обчислити критичні індекси β , γ .
82. Знайти температурну залежність теплоємності C_V системи рідина-пара поблизу критичної точки та обчислити стрибок теплоємності $C_V(T_{кр} + 0) - C_V(T_{кр} - 0)$. Скористатися результатами задачі 82.

83. Довести, що на ізотермі двофазної системи рідина-пара виконується співвідношення $m_p/m_{\text{п}} = (v_{\text{п}} - v)/(v - v_p)$, де m_p , v_p і $m_{\text{п}}$, $v_{\text{п}}$ – маса та питомий об'єм рідини та пари, відповідно, v – питомий об'єм системи.
84. Розглянемо систему, що складається з краплі сферичної форми радіуса r в оточенні пари при фіксованій температурі T і тиску P_0 . Система знаходиться в стані рівноваги. Тиск насиченої пари над плоскою границею рідини при температурі T дорівнює P_{sat} . Виходячи з умови мінімуму потенціала Гіббса знайти: а) рівноважний тиск в краплі; б) критичний радіус $r_{\text{кр}}$ краплі, при якому можлива фазова рівновага; в) тиск пари, при якому крапля радіуса r знаходиться в рівновазі з парою. Коефіцієнт поверхневого натягу рідини σ , вважати зсув тиску, обумовлений звикривленням поверхні. набагато меншим за P_{sat} .
85. Вивести рівняння стану $f(M, H, T) = 0$ для феромагнетика в зовнішньому магнітному полі вище та нижче точки Кюрі T_C (температури феромагнітного впорядкування). Скористатись підходом Ландау. Визначити температурну залежність намагніченості та магнітної сприйнятливості за відсутності зовнішнього магнітного поля. Прийняти $a(T) = \alpha_0(T - T_C)$. Чому дорівнюють критичні індекси β , γ , δ ?
86. Вивести рівняння стану $f(M, H, T) = 0$ для феромагнетика за допомогою методу Брега-Вільямса. Вважати, що у вузлах кристалічної ґратки з координаційним числом n знаходяться атоми зі спіном $s = 1/2$.
87. *Гіпотеза подібності* Припустимо, що згідно гіпотези подібності (В. Widom, 1965) рівняння стану феромагнетика має вигляд:

$$H = M\Phi[(T - T_C), M^{1/\beta}], \quad (4.4)$$

де функція

$$\Phi[\lambda(T - T_C), \lambda M^{1/\beta}] = \lambda^\gamma \Phi[(T - T_C), M^{1/\beta}] \quad (4.5)$$

є однорідною функцією своїх аргументів степені γ . Згідно гіпотези, в цьому випадку поведінка всіх систем даного класу в околі критичної точки визначається тільки двома індексами та видом функції Φ . Показати, що а) β співпадає з критичним індексом, тобто, $M \propto |T - T_C|^\beta$; б) γ співпадає з критичним індексом для сприйнятливості при $H = 0$:

$\chi \propto |T - T_C|^{-\gamma}$; в) критичний індекс $\delta = 1 + \gamma/\beta$; г) температурна залежність теплоємностей $C_H - C_M \propto |T - T_C|^{\gamma+2(\beta-1)}$.

Тема №5 | Флуктуації

5.1 Теоретичні відомості

Середньо-квадратична флуктуація або дисперсія величини X визначається як

$$(\Delta X)^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \quad (5.1)$$

де дужки $\langle \dots \rangle$ означають осереднення.

Відносна флуктуація величини X :

$$\frac{(\Delta X)^2}{\langle X \rangle^2} = \frac{\langle X^2 \rangle}{\langle X \rangle^2} - 1.$$

Принцип Больцмана: для замкненої системи відношення ймовірностей w_1, w_2 станів 1 і 2 визначається різницею ентропій цих станів:

$$\frac{w_1}{w_2} = \exp(S_1 - S_2). \quad (5.2)$$

Ймовірність флуктуацій в однорідній макроскопічній системі:

$$w \propto \exp\left(\frac{\Delta P \Delta V - \Delta T \Delta S}{2T}\right). \quad (5.3)$$

5.2 Задачі

88. Ідеальний газ знаходиться в об'ємі V , кількість часток N . Обчислити ймовірність знайти n часток в об'ємі $v < V$. Знайти флуктуацію n . Розглянути окремі випадки Пуассона ($v \ll V, N \gg \langle n \rangle, n$) і Лапласа ($N \propto \langle n \rangle, p \equiv v/V$ довільне).
89. Користуючись результатами задачі 88, знайти відносну флуктуацію густини ідеального газу в об'ємі $v < V$, концентрація часток n_0 задана.
90. Система з N магнітних частинок, знаходиться в зовнішньому магнітному полі з індукцією $\vec{B} \parallel Z$. Частинки нерухомі, між собою не взаємодіють,

магнітний стан кожної з частинок описуються класичним вектором фіксованої довжини M_0 і довільного напрямку. Користуючись результатами задачі 34, знайти абсолютну та відносну флуктуацію намагніченості M .

91. Система з N магнітних частинок зі спіном $1/2$ знаходиться в зовнішньому магнітному полі $\vec{B} \parallel Z$. Частинки нерухомі, між собою не взаємодіють, магнітний стан кожної з частинок визначається проекцією спіну на вісь Z , яка приймає два значення $\pm \hbar/2$ (\hbar – стала Планка). Користуючись результатами задачі 48, знайти абсолютну та відносну флуктуацію намагніченості M .
92. Електромагнітна хвиля з частотою ω розповсюджується через середовище (газ) з діелектричною проникністю ϵ і концентрацією часток n_0 . Відомо, що $\epsilon - 1$ лінійно залежить від густини газу. Знайти а) флуктуацію поляризації малого об'єма v ; б) відносну долю інтенсивності електромагнітної хвилі, що розсіюється на флуктуаціях густини газу.
93. Знайти флуктуації об'єму $(\Delta V)^2$, температури $(\Delta T)^2$ та кореляцію $\langle \Delta T \Delta V \rangle$ в системі з фіксованою кількістю частинок.
94. Користуючись формулою (5.3), знайти абсолютну та відносну флуктуацію густини газу. Користуючись результатами задачі 81, дослідити температурну залежність абсолютної та відносної флуктуації густини поблизу критичної температури фазового переходу рідина-пара. Пояснити механізм критичної опалесценції (сильного розсіяння світла рідиною в околі критичної точки).
95. *Парадокс.* При проходженні електромагнітної хвилі з частотою ω і інтенсивністю I_0 через газ, який знаходиться при температурі T , інтенсивність світла розсіяного під кутом θ відносно вектора \vec{E} , визначається формулою (в системі СГС):

$$I_{\text{роз}} = I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2 \frac{T}{-v(\partial P / \partial v)_T} V,$$

де V – об'єм, що розсіює, r – відстань від об'єму, що розсіює, до точки спостереження, ϵ – діелектрична проникність газу, ρ – густина газу, c – швидкість світла в вакуумі. Відомо, (див. задачу 94), що в околі критичної температури $(\partial P / \partial v)_T \rightarrow 0$ і тоді $I_{\text{роз}} / I_0 \rightarrow \infty$, тобто, інтенсивність

розсіяного світла значно більша за інтенсивність хвилі, що падає. Чи виконується при цьому закон збереження енергії? Звідки береться розсіяна енергія?

96. Знайти флуктуації ентропії $(\Delta S)^2$ та кореляцію $\langle \Delta T \Delta S \rangle$.
97. Показати, що з умови стійкості системи відносно флуктуацій випливає додатність теплоємності $C_V > 0$ та ізотермічного коефіцієнту пружності $K_T = -V(\partial P / \partial V)_T$.
98. Для теплового випромінювання з урахуванням виродженості фотонів по напрямкам імпульсу обчислити: а) флуктуацію числа часток $dN(\omega)$ в спектральному інтервалі $(\omega, \omega + d\omega)$; б) абсолютну та відносну флуктуацію енергії теплового випромінювання dE в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Порівняти відносну флуктуацію з 1 в граничних випадках $\hbar\omega \gg T$ і $\hbar\omega \ll T$.
99. Знайти флуктуаційну границю чутливості крутильних вагів при температурі T . Основною частиною вагів є дзеркало, підвішене на нитці, фіксується кут кручення φ , потенціальна енергія крученої нитки $U = \kappa\varphi^2/2$, де κ – стала.
100. Знайти середній квадрат заряду конденсатора з ємністю C , який замкнено на опір R без ЕРС. Температура середовища T .

Відповіді

Відповіді наведені не до всіх задач.

- 1 Для механічних величин скористатись хвильовим рівнянням (τ – період хвилі), для термодинамічних – рівнянням дифузії.
- 6 Розглянути вирази для повних диференціалів ентропії та внутрішньої енергії в змінних V, T .
- 7 Скористатися поняттям інтенсивних та екстенсивних термодинамічних параметрів.

11

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 / \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T.$$

- 12 Використати властивості повного диференціала ентропії та енергії та рівняння стану $f(T, x, X) = 0$.

- 14 а) $\mathcal{E} = C_V T, S = C_V \ln T + R \ln V, F = C_V T \ln(T/e) - RT \ln V$; б) $\mathcal{E} = C_V T - a/V, S = C_V \ln T + R \ln(V - b), F = C_V T \ln(T/e) - a/V - RT \ln(V - b)$.

16

$$\frac{dP}{dV} = \frac{C_P - C}{C_V - C} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T.$$

- 18 а) Розглянути роботу по зміні \vec{D} для пластини діелектрика товщини d , яка заповнює конденсатор (з площею пластин S), підключений до джерела напруги, $\delta \mathcal{A}_D = -\vec{E} d\vec{D}$; б) врахувати зміну середньої потенціальної енергії діелектрика в зовнішньому електричному полі, $\delta \mathcal{A}_P = -\vec{E} d\vec{P}$; в) врахувати зміну енергії електричного поля, $\delta \mathcal{A}_E = \vec{P} d\vec{E}$.

- 19 Скористатися результатами задачі 13.

$$C_E = C_V(T) + \frac{1}{2} T E^2 \frac{d^2 \alpha(T)}{dT^2}, \quad C_D = C_V(T) - \frac{1}{2} T D^2 \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{1}{\alpha(T)} \right).$$

20 Скористатися результатами задачі 18.

$$C_D - C_E = -T \left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_E^2 / \left(\frac{\partial D}{\partial E} \right)_T = -T \varepsilon_0 E^2 \frac{[\epsilon'(T)]^2}{\epsilon(T)}.$$

22 $\mu_{JT} = 0$.

23 Скористатись тим, що коефіцієнт ізотермічного розширення завжди від'ємний, $(\partial P / \partial V)_T < 0$ (з умови термодинамічної стійкості системи).

$$\delta Q|_T = -T \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dV,$$

$\delta Q|_T / dV > 0$ при $t > t_{\max}$ і $\delta Q|_T / dV < 0$ при $t < t_{\max}$. При $t \rightarrow t_{\max}$ $C_p \rightarrow C_V$, $\gamma \rightarrow 1$.

25 Знайти екстремум ентропії з обмеженнями на $f(x)$ (використати метод множників Лагранжа):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

32

$$S = \ln Z + \frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T}.$$

51 для бозонів $\langle (\Delta N)^2 \rangle = \mathcal{N}(1 + \mathcal{N})$, для ферміонів $\langle (\Delta N)^2 \rangle = \mathcal{N}(1 - \mathcal{N})$. Абсолютна величина флуктуації $\langle (\Delta N)^2 \rangle$ для ферміонів обмежена і досягає максимуму $=1/4$ при середній кількості часток $\mathcal{N} = 1/2$. Абсолютна величина флуктуації для бозонів необмежена.

58

$$n = \frac{\sqrt{2}(mT)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} dz}{e^{z-\mu/T} + 1}, \quad P = \frac{(2m)^{3/2} T^{5/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{z^{3/2} dz}{e^{z-\mu/T} + 1}.$$

65

$$n_n = n_p = \frac{T^3 (m_e m_h)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} \exp\left(-\frac{E_g}{T}\right), \quad \mu = \frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} T \ln \frac{m_h}{m_e}.$$

66 Якщо ввести позначення $\Delta E \equiv E_g - E_d$, $N_c \equiv 2(m_e T / 2\pi\hbar^2)^{3/2}$, то

$$n_n = \frac{2N_d N_c}{N_c - N_d e^{\Delta E/T} + \sqrt{(N_c + N_d e^{\Delta E/T})^2 + 4N_d^2 e^{\Delta E/T}}},$$

$$\mu = E_g - T \ln \frac{1}{2} \left[\frac{N_c}{N_d} - e^{\Delta E/T} + \sqrt{\left(\frac{N_c}{N_d} + e^{\Delta E/T}\right)^2 + 4e^{\Delta E/T}} \right].$$

При низьких температурах $\Delta E \gg T$ та за умови $N_c \gg N_d$ $n_n \approx N_d$ і не залежить від температури, прилад працює стабільно. При високих температурах $\Delta E \ll T$ $n_n \approx N_c e^{-\Delta E/T}$ сильно залежить від температури. роота приладу нестабільна.

76

$$\mu_{JT} = \frac{2a - bRT}{C_P RT}, \quad T_{\text{inv}} \equiv \frac{2a}{Rb}.$$

77 Використати математичне визначення критичної температури як такої, при якій змінюється характер кривої ізотерми (мінімум та максимум співпадають). $T_{\text{кр}} = 8a/(27Rb)$, $P_{\text{кр}} = a/(27b^2)$, $V_{\text{кр}} = 3b$.

78

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau.$$

79

$$P_{\text{sat}} = \frac{RT}{v_{\text{п}} - v_{\text{р}}} \ln \frac{v_{\text{п}} - b}{v_{\text{р}} - b} - \frac{a}{v_{\text{п}} v_{\text{р}}}.$$

81 Скористатися результатами 78,79, розвинути рівняння стану в ряд за малим відхиленням параметрів від критичних: $\delta\tau \equiv \tau - 1$, $\delta\pi \equiv \pi - 1$, $\delta\omega \equiv \omega - 1$. $v_{\text{р}}(T) = v_{\text{кр}} \left(1 - \sqrt{1 - T/T_{\text{кр}}}\right)$, $v_{\text{п}}(T) = v_{\text{кр}} \left(1 + \sqrt{1 - T/T_{\text{кр}}}\right)$.

84 З урахуванням поверхневого натягу потенціал Гіббса системи має вигляд: $G = F + P_0 V + \sigma A$, де A – площа поверхні краплі. Доцільно ввести такі змінні: кількість пари $N_{\text{п}}$, (тоді кількість рідини $N - N_{\text{п}}$, загальна кількість речовини N фіксована), питомий об'єм пари $v_{\text{п}}$, радіус краплі r . Тоді питомий об'єм рідини $v_{\text{р}} = 4\pi r^3/[3(N - N_{\text{п}})]$, потенціал Гіббса системи

$$G(N_{\text{п}}, v_{\text{п}}, r) = N_{\text{п}} F_{\text{п}}(T, v_{\text{п}}) + (N - N_{\text{п}}) F_{\text{р}}(T, v_{\text{р}})$$

$$+P_0 [N_{\text{п}}v_{\text{п}} + (N - N_{\text{п}})v_{\text{р}}] + 4\pi r^2\sigma,$$

де $F_{\text{п}}$ та $F_{\text{р}}$ – питомі вільні енергії пари та рідини, відповідно.

З умов екстремума $\partial\Phi/\partial v_{\text{п}} = 0$, $\partial\Phi/\partial r = 0$ знаходимо рівноважне значення тиску пари, $P_{\text{п}} = P_0$ та рідини, $P_{\text{р}} = P_0 + 2\sigma/r$ (формула Лапласа). Тут слід скористатися визначенням тиску як $P = -(\partial F/\partial V)_T$. З умови екстремума $\partial\Phi/\partial N_{\text{п}} = 0$ отримуємо рівність хімпотенціалів пари та рідини, звідки

$$r_{\text{кр}} = \frac{2\sigma v_{\text{р}}}{(v_{\text{п}} - v_{\text{р}})}(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad P_{\text{кр}} = P_{\text{sat}} + \frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{р}}}(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

85 $M \propto \alpha(T)^{1/2}$, $\chi \propto 1/|\alpha(T)| \propto |T - T_{\text{C}}|$ (закон Кюри-Вейса), $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$.

87 Позначимо $\tau \equiv (T - T_{\text{C}})/T_{\text{C}}$. а) при $H = 0$ з рівняння (4.4) маємо $\Phi[\tau, M^{1/\beta}] = 0$, отже, $M^{1/\beta} = \phi(\tau)$. Аналогічно, з рівняння (4.5) випливає $\lambda M^{1/\beta} = \phi(\lambda\tau)$, звідки бачимо, що $\lambda\phi(\tau) = \phi(\lambda\tau)$ є однорідною функцією степені 1. Отже, $M^{1/\beta} \propto |\tau|$ і $M \propto |T - T_{\text{C}}|^\beta$.

б) магнітну сприйнятливості обчислимо з рівняння (4.4):

$$\frac{1}{\chi(\tau)} = \frac{1}{\beta} M^{1/\beta} \left(\frac{\partial\Phi(\tau, M^{1/\beta})}{\partial M^{1/\beta}} \right) + \Phi(\tau, M^{1/\beta}).$$

При $T > T_{\text{C}}$ ($\tau > 0$) $M = 0$ (впорядкування відсутнє) і

$$\frac{1}{\chi(\tau)} = \Phi(\tau, 0) = \lambda^{-\gamma} \Phi(\lambda\tau, 0),$$

звідки $\chi \propto (T - T_{\text{C}})^{-\gamma}$. При $T < T_{\text{C}}$ ($\tau < 0$) $M \neq 0$ і співвідношення $H = 0$ задовольняється при $\Phi = 0$, отже

$$\frac{1}{\chi(\tau)} = \frac{1}{\beta} M^{1/\beta} \left(\frac{\partial\Phi(\tau, M^{1/\beta})}{\partial M^{1/\beta}} \right) = \frac{\lambda^{1-\gamma}}{\beta} M^{1/\beta} \left(\frac{\partial\Phi(\lambda\tau, u)}{\partial u} \right)_{u=\lambda\tau}.$$

Підставимо $M^{1/\beta} = c\tau$ і виберемо $\lambda = -1/\tau = 1/|\tau|$. Тоді

$$\frac{1}{\chi(\tau)} = \frac{|c||\tau|^\gamma}{\beta} \cdot \frac{\partial\Phi(-1, |c|)}{\partial|c|},$$

звідки $\chi \propto |T - T_C|^{-\gamma}$.

в) При критичній температурі $\tau = 0$, отже,

$$H = M\Phi\left(0, M^{1/\beta}\right) = \lambda^{-\gamma} M\Phi\left(0, \lambda M^{1/\beta}\right).$$

Візьмемо $\lambda M^{1/\beta} = 1$, тоді $H = M^{1+\gamma/\beta}\Phi(0, 1)$, отже, $\delta = 1 + \gamma/\beta$.

г) Скористаємося результатами задачі 12, де $X = M$ і $x = H$:

$$C_H - C_M = T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H^2 \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T \propto T|\tau|^{2(\beta-1)}\chi^{-1} \propto |\tau|^{2(\beta-1)+\gamma}.$$

Література

1. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. — М. : Едиториал УРСС, 2002.
2. *Леонтович М. А.* Введение в термодинамику. Статистическая физика. — М. : Наука, 1983.
3. *Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М. : Наука, 1977.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика, ч.1. — М. : Наука, 1976.
5. *Шиллинг Г.* Статистическая физика в примерах. — М. : Мир, 1976.
6. *Ландсберг П.* Задачи по термодинамике и статистической физике. — М. : Мир, 1974.
7. *Гомонай О. В., Львов В. А.* Збірка задач із статистичної фізики. — К. : НТУУ «КПІ», 1999.
8. *Исихара А.* Статистическая физика. — М. : Мир, 1973.
9. *Куні Ф. М.* Статистическая физика и термодинамика. — М. : Наука, 1981.
10. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. — М. : Мир, 1978.