

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Т. І. Вдовенко,
В. І. Козак**

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
усіх технічних спеціальностей

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Дудкін М. Є.*, доктор фіз-мат. наук, професор кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»
Хиленко В. В., доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних наук, НУБіП

Відповідальний редактор *Горбачук В. М.*, доктор фіз-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 01.12.2022 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 8 від 09.11.2022 р.)*

Тематика методичних вказівок охоплює розділ дисципліни «Вища математика», в якому вивчаються диференціальні рівняння. Сформульовано основні теоретичні відомості, розв'язані відповідні приклади.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Т. І. Вдовенко, В. І. Козак
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ I ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	6
1.1 Загальні поняття	6
1.2 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	7
1.3 Однорідні диференціальні рівняння.....	11
1.4 Рівняння, що зводяться до однорідних	13
1.5 Лінійні диференціальні рівняння	14
1.6 Рівняння, звідні до лінійних. Рівняння Бернуллі та Ріккаті.....	18
1.7 Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник	26
1.8 Рівняння, не розв'язні відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.....	31
РОЗДІЛ II ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	39
2.1 Основні означення та поняття	39
2.2 Рівняння n – го порядку, які допускають зниження порядку.....	39
2.2.1 Рівняння вигляду $y(n) = f(x)$	40
2.2.2 Рівняння $Fx, y', y'', \dots, y(n) = 0$ (без y).....	41
2.2.3 Рівняння $Fy, y', \dots, y(n) = 0$ (без x).....	44
2.3 Однорідне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	51
2.4 Неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Спеціальний вигляд правої частини.....	54
2.5 Неоднорідне диференціальне рівняння. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)	67
2.6 Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	71
РОЗДІЛ III ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ	76
ВАРІАНТ №1	76
ВАРІАНТ №2	77
ВАРІАНТ №3	78
ВАРІАНТ №4	79
ВАРІАНТ №5	80
ВАРІАНТ №6	81

ВАРІАНТ №7	82
ВАРІАНТ №8	83
ВАРІАНТ №9	84
ВАРІАНТ №10	85
ВАРІАНТ №11	86
ВАРІАНТ №12	87
ВАРІАНТ №13	88
ВАРІАНТ №14	89
ВАРІАНТ №15	90
ВАРІАНТ №16	91
ВАРІАНТ №17	92
ВАРІАНТ №18	93
ВАРІАНТ №19	94
ВАРІАНТ №20	95
ВАРІАНТ №21	96
ВАРІАНТ №22	97
ВАРІАНТ №23	98
ВАРІАНТ №24	99
ВАРІАНТ №25	100
ВАРІАНТ №26	101
ВАРІАНТ №27	102
ВАРІАНТ №28	103
ВАРІАНТ №29	104
ВАРІАНТ №30	105
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	106

ВСТУП

Навчальний посібник «Диференціальні рівняння» пропонується студентам 1-го курсу технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання під час вивчення тем: “Диференціальні рівняння”. За вказаними темами, викладено основні теоретичні відомості та розв’язані типові задачі. Це дасть змогу студентам якісно засвоїти матеріал та успішно виконати і оформити завдання типового розрахунку з теми «Диференціальні рівняння», передбаченого навчальною програмою дисципліни «Вища математика».

В посібнику наведені основні визначення та методика розв’язування звичайних диференціальних рівнянь першого і вищих порядків. Детально розібрані типові приклади.

В кінці посібника рекомендовані завдання для типового розрахунку у кількості 30 варіантів.

1.1 Загальні поняття

При дослідженні різноманітних явищ природи часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називаються **диференціальними**.

Диференціальне рівняння називається **звичайним**, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і **диференціальним рівнянням у частинних похідних**, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Найвищий порядок похідної визначає **порядок диференціального рівняння**. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння першого порядку.

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція, а y' – похідна першого порядку цієї функції.

Диференціальне рівняння (1), не розв'язне відносно похідної y' , називається **неявним диференціальним рівнянням**. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y' , то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

і називають **рівнянням першого порядку, розв'язним відносно похідної**, або **рівнянням в нормальній формі**.

Розв'язком диференціального рівняння (1) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (1) перетворює його в тотожність по x на $(a; b)$. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою**.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком цього рівняння при будь-яких допустимих значеннях сталої C .

Частинним розв'язком рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Задачею Коші для диференціального рівняння називається задача відшукування розв'язку цього рівняння, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називається **загальним інтегралом диференціального рівняння** (1). Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називається **частинним інтегралом рівняння**.

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь є пошук усіх розв'язків заданого диференціального рівняння і вивчення властивостей цих розв'язків. Пошук розв'язків диференціального рівняння називають **інтегруванням цього рівняння**.

Успіх в розв'язанні диференціальних рівнянь у великій мірі залежить від уміння розпізнавати типи рівнянь.

1.2 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0, \quad (3)$$

де $f_1(x), \varphi_1(y), f_2(x), \varphi_2(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається **диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними**.

Для відокремлення змінних у рівнянні (3) досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)f_2(x) \neq 0$. При цьому можемо втратити розв'язки $\varphi_1(y) = 0, f_2(x) = 0$.

Якщо (3) розв'язне відносно похідної, то диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними набуває вигляду

$$y' = f(x)\varphi(y), \quad (4)$$

де $f(x), \varphi(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції.

Тоді дістанемо *рівняння з відокремленими змінними*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = 0,$$

або з рівняння (4)

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x) dx.$$

Загальні інтеграли рівнянь (3) та (4) відповідно мають вигляд:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = C,$$
$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx + C, \quad C - const.$$

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy' - y = 0.$$

Розв'язання: Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Застосуємо метод відокремлення змінних. Замінімо похідну відношенням диференціалів $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Перенесемо другий доданок в праву частину рівняння:

$$x \frac{dy}{dx} = y.$$

Поділивши обидві частини рівняння на $xy \neq 0$ (при цьому слід перевірити, чи входять особливі розв'язки $x = 0, y = 0$ до знайденого загального) та $\frac{1}{dx}$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|,$$
$$y = cx, c \in R.$$

Розв'язки $x = 0, y = 0$ можна дістати із загального розв'язку при $c = 0$, тому вони є частинними і не втрачені при відокремленні змінних.

Перевірка: Загальний розв'язок $y = Cx$, тоді $y' = C$. Підставляємо в початкову умову $xy' - y = 0$: $x C - Cx = 0, 0 = 0$. Дана тотожність свідчить про правильність отриманого розв'язку.

Відповідь: $y = Cx$, C - довільна стала.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(xy^2 + y^2)dx = (x^2y - x^2)dy.$$

Розв'язання: Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$y^2(x + 1)dx + x^2(1 - y)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними, записане в диференціалах.

Поділивши обидві частини рівняння на $x^2y^2 \neq 0$ (при цьому слід перевірити чи входять особливі розв'язки $x = 0, y = 0$ до знайденого загального), дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x + 1}{x^2}dx + \frac{1 - y}{y^2} = 0.$$

Інтегруємо його

$$\int \frac{x + 1}{x^2}dx + \int \frac{1 - y}{y^2} = C,$$
$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right) = C,$$
$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C,$$

$$\ln \left| \frac{x}{y} \right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Розв'язки $x = 0$ і $y = 0$ при підстановці у дане рівняння перетворюють його у тотожність. Ці розв'язки не утворюються із загального інтеграла ні при якому значенні C . Отже, розв'язки $x = 0$ і $y = 0$ є особливими і їх слід виписувати додатково до загального інтеграла.

Відповідь: $\ln \left| \frac{x}{y} \right| - \frac{x+y}{xy} = C, C \in \mathbb{R}, x = 0, y = 0.$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$(1 - e^{y^2})dy = \frac{dx}{2y}, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання: Таким чином сформульована умова означає, що потрібно знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову $y(0) = 0$. Тобто спершу знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Перенесемо всі множники з y вліво, а з x вправо:

$$2y(1 - e^{y^2})dy = dx.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Інтегруємо його

$$\begin{aligned} \int 2y(1 - e^{y^2}) dy &= \int dx, \\ \int (2y - 2ye^{y^2}) dy &= \int dx. \end{aligned}$$

Знаходимо загальний інтеграл рівняння:

$$y^2 - \frac{e^{y^2}}{2} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

За умовою $x = 0, y = 0$, підставляємо в загальний інтеграл, знаходимо C :

$$\begin{aligned} 0^2 - \frac{e^{0^2}}{2} &= 0 + C, \\ C &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок задається неявно

$$y^2 - \frac{e^{y^2}}{2} = x - \frac{1}{2}.$$

Також останній результат (частинний розв'язок) можна знайти, використовуючи визначені інтеграли:

$$\int_0^y 2y(1 - e^{y^2}) dy = \int_0^x dx.$$

Відповідь: $y^2 - \frac{e^{y^2}}{2} = x - \frac{1}{2}.$

1.3 Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5)$$

називається **однорідним**, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією виміру k відносно змінних x, y , якщо для будь-якого $t > 0$ виконується рівність

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Для однорідних функцій нульового виміру маємо $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Підстановкою

$$u = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

де u – нова шукана функція аргументу x , однорідне рівняння (5) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними: $xu' + u = f(u)$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u} + C, \quad f(u) - u \neq 0.$$

Однорідне диференціальне рівняння може мати вигляд (в диференціальній формі):

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

за умовою, що функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного виміру, тобто функції, для яких мають місце співвідношення: $P(tx, ty) = t^k P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$, де k – степінь (або вимір) однорідності, $t > 0$.

Приклад 4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{x - y}{x - 2y}.$$

Розв'язання: Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx) - (ty)}{(tx) - 2(ty)} = \frac{t(x - y)}{t(x - 2y)} = \frac{x - y}{x - 2y} = f(x, y).$$

Отже, дане рівняння є однорідним. Застосувавши підстановку $y = ux$, маємо

$$u'x + u = \frac{x - ux}{x - 2ux},$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1 - 2u + 2u^2}{1 - 2u}.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{1 - 2u}{1 - 2u + 2u^2} du = \frac{1}{x} dx.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - 2u}{1 - 2u + 2u^2} du &= \int \frac{1}{x} dx, \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - 2u + 2u^2)}{1 - 2u + 2u^2} &= \int \frac{dx}{x}, \\ -\frac{1}{2} \ln|1 - 2u + 2u^2| &= \ln|x| + \ln|c|, \end{aligned}$$

$$1 - 2u + 2u^2 = \frac{1}{Cx^2}.$$

Для остаточної відповіді треба змінити u на $\frac{y}{x}$. Загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = C, C \in \mathbb{R}.$$

Слід зауважити, що при відокремлюванні змінних ми ділили на x і $\frac{1-2u+2u^2}{1-2u}$, що, можливо при $x \neq 0$ та $1-2u+2u^2 \neq 0$. Розв'язок $x = 0$ міститься в загальному розв'язку, тому що його можна отримати із загального при $C = 0$. Рівняння $1-2u+2u^2 = 0$ не має розв'язків. Отже, при відокремленні змінних втрати розв'язків не відбулося.

Відповідь: $x^2 - 2xy + 2y^2 = C, C \in R$.

1.4 Рівняння, що зводяться до однорідних

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – задані сталі, зводиться до однорідного рівняння заміною $x = u + \alpha, y = v + \beta$, якщо $\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$. Числа α і β знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання: Перепишемо рівняння у вигляді $y' = \frac{-2x-y-1}{x+2y-1}$. Оскільки $\Delta = -2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = -3 \neq 0$, то дане рівняння зводиться до однорідного заміною $x = u + \alpha, y = v + \beta$. Сталі α і β підберемо так, щоб

$$\begin{cases} -2\alpha - \beta - 1 = 0, \\ \alpha + 2\beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $\alpha = -1$ і $\beta = 1$.

Використовуючи підстановку $x = u - 1, y = v + 1$ та $dx = du, dy = dv$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$, дістанемо однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dv}{du} = \frac{-2u - v}{u + 2v}.$$

За допомогою підстановки $v = tu$, де $t = t(u)$, $v' = t + t'u$, знаходимо загальний інтеграл цього рівняння

$$\begin{aligned} t + t'u &= \frac{-2u - tu}{u + 2tu}, & t'u &= \frac{-2 - 2t - 2t^2}{1 + 2t}, \\ \frac{1 + 2t}{-2(1 + t + t^2)} dt &= \frac{du}{u}, & \int \frac{d(1 + t + t^2)}{-2(1 + t + t^2)} dt &= \int \frac{du}{u}, \\ -\frac{1}{2} \ln|1 + t + t^2| &= \ln|u| + \ln|c|, & 1 + t + t^2 &= \frac{C}{u^2}, \end{aligned}$$

оскільки $t = \frac{v}{u}$, то $1 + \frac{v}{u} + \frac{v^2}{u^2} = \frac{C}{u^2}$, або $u^2 + uv + v^2 = C$.

Звідси, враховуючи, що $u = x + 1$, $v = y - 1$, дістанемо

$$(x + 1)^2 + (x + 1)(y - 1) + (y - 1)^2 = C.$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння

$$x^2 + x + xy + y^2 - y + 1 = C, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $x^2 + x + xy + y^2 - y + 1 = C, C \in \mathbb{R}$.

1.5 Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (6)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Для розв'язування цього рівняння розглянемо метод Бернуллі, в основі якого лежить ідея знаходження розв'язку у вигляді $y = uv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна (але не дорівнює тотожно нулю) та $y' = u'v + uv'$. Тоді рівняння (6) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} u'v + uv' + p(x)uv &= q(x), \\ uv' + v(u' + p(x)u) &= q(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Функцію $u(x)$ виберемо таким чином, що $u' + p(x)u = 0$ (це лінійне однорідне рівняння у якому відокремлюються змінні).

Отже,

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}. \quad (8)$$

Вважаємо, що стала інтегрування $C = 0$.

Для знаходження функції $v(x)$ знайдену функцію $u(x)$ з (8) підставляємо в (7), одержуємо також рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^{-\int p(x)dx} \frac{dv}{dx} = q(x),$$

$$dv = q(x)e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Звідки

$$v(x) = \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C,$$

де C - довільна стала.

Перемноживши $u(x)$ і $v(x)$, дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Також для знаходження розв'язку рівняння (6) можна використати метод варіацій довільних сталих, так званий, **метод Лагранжа**. Суть методу полягає у тому, що загальний розв'язок рівняння (6) треба шукати у формі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$ (це лінійне однорідне рівняння у якому відокремлюються змінні), але замінивши довільну сталу C невідомими функціями, залежними від x , тобто

$$y = e^{-\int p(x)dx} + C(x). \quad (9)$$

Для знаходження $C(x)$ вираз (9) та похідну від нього підставляємо в (6).

Приклад 6. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^6 + 1}.$$

Розв'язання. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Розглянемо два методи розв'язання.

1. **Метод Бернуллі.**

Розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$, $y' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u + \frac{2uv}{x} = \frac{1}{x^6+1},$$

$$u'v + u(v' + \frac{2v}{x}) = \frac{1}{x^6+1},$$

Функцію $v(x)$ виберемо так, щоб $v' + \frac{2v}{x} = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, отримаємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -2\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x^2}.$$

Тоді $u(x)$ знайдемо із рівняння $u'v = \frac{1}{x^6+1}$, при $v = \frac{1}{x^2}$, тобто

$$u' \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^6+1},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2}{x^6+1}.$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$du = \frac{x^2}{x^6+1} dx, \quad \int du = \int \frac{x^2}{x^6+1} dx,$$

$$\int du = \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}, \quad u = \frac{1}{3} \arctg(x^3) + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння $y = uv$ має вигляд

$$y = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} \arctg(x^3) + C \right), C \in R.$$

2. Метод Лагранжа (варіацій довільних сталих).

Розглянемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = 0.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln|c|,$$

або $y = \frac{c}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$, враховуючи втрачений розв'язок $y = 0$.

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = \frac{c(x)}{x^2}$, де $c(x)$ – невідома функція, яку знаходимо, підставивши цей розв'язок (та похідну від нього) в задане рівняння

$$\frac{c'(x)x^2 - 2xc(x)}{(x^2)^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{c(x)}{x^2} = \frac{1}{x^6 + 1},$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dc}{dx} - \frac{2c}{x^3} + \frac{2c}{x^3} = \frac{1}{x^6 + 1},$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{dc}{dx} = \frac{1}{x^6 + 1}.$$

Після відокремлення змінних та інтегрування отримуємо

$$dc = \frac{x^2}{x^6 + 1} dx,$$

$$\int dc = \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx,$$

$$\int dc = \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx,$$

$$\int dc = \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1},$$

$$c(x) = \frac{1}{3} \arctg(x^3) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} \arctg(x^3) + C \right), C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} \arctg(x^3) + C \right), C \in \mathbb{R}.$

1.6 Рівняння, звідні до лінійних. Рівняння Бернуллі та Ріккати

Розглянемо класи рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних.

Рівняння виду

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)}, \quad (10)$$

де $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ – задані функції $R(y) \neq 0$, можна звести до лінійного, якщо x вважати функцією, а y – аргументом, тобто $x = x(y)$. Тоді, використовуючи рівність $y'_x x'_y = 1$ (похідна двох взаємно обернених функцій), рівняння (10) запишемо у вигляді лінійного диференціального рівняння відносно x

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y),$$

$$\varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)},$$

$$f(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $x = u(y)v(y)$ у випадку застосування методу Бернуллі.

Приклад 7. Розв'язати диференціальне рівняння $(2xy + y^3)dy - dx = 0$.

Розв'язання: Рівняння можна переписати у вигляді

$$y' = \frac{1}{2xy + y^3}.$$

Будемо вважати x функцією від змінної y , тоді рівняння стає лінійним відносно x :

$$x' - 2xy = y^3.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $x = uv$, $x' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u - 2uvy = y^3,$$

$$u'v + u(v' - 2vy) = y^3.$$

Функцію $v(x)$ виберемо так, щоб $v' - 2vy = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, отримуємо

$$\frac{dv}{v} = 2ydy,$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2 \int ydy,$$

$$\ln|v| = y^2,$$

$$v = e^{y^2}.$$

Тоді $u(x)$ знайдемо із рівняння $u'v = y^3$, при $v = e^{y^2}$, тобто

$$u'e^{y^2} = y^3, \quad \frac{du}{dy}e^{y^2} = y^3.$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$du = y^3 e^{-y^2} dy,$$

$$\int du = \int y^3 e^{-y^2} dy,$$

$$\int du = \int y^2 e^{-y^2} dy^2,$$

$$u = -\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння $x = uv$ має вигляд

$$y = C e^{y^2} - \frac{1}{2} (1 + y^2), C \in R.$$

Відповідь: $y = C e^{y^2} - \frac{1}{2} (1 + y^2), C \in R$

Рівняння виду

$$f'_y(y)y' + p(x)f(y) = q(x), \quad (11)$$

де f, p, q – задані функції, заміною $z = f(y)$ зводиться до лінійного.

Справді, якщо $z = f(y)$, а $y = y(x)$ – невідома функція, то

$$\frac{dz}{dy} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'_y(y)y'$$

і рівняння (11) запишеться у вигляді лінійного диференціального рівняння відносно відносно змінної z .

$$z' + p(x)z = q(x).$$

Приклад 8. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\cos(y) y' + \frac{\sin(y)}{x} = x^2.$$

Розв'язання: Якщо покласти $z = \sin(y)$, то $z' = \cos(y) y'$ і тоді задане рівняння зводиться до лінійного

$$z' + \frac{z}{x} = x^2.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $z = uv$, $z' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = x^2,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2,$$

Функцію $v(x)$ виберемо так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, одержуємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Тоді $u(x)$ знайдемо із рівняння $u'v = x^2$, при $v = \frac{1}{x}$, тобто

$$u' \frac{1}{x} = x^2,$$

$$\frac{du}{dx} = x^3.$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$du = x^3 dx,$$

$$\int du = \int x^3 dx,$$

$$u = \frac{x^4}{4} + C.$$

Отже,

$$z = \frac{1}{x} \left(\frac{x^4}{4} + C \right) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}, C \in R.$$

Враховуючи, що $z = \sin(y)$, загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\sin(y) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}, C \in R.$$

Відповідь: $\sin(y) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}, C \in R.$

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1. \quad (12)$$

Якщо $\alpha = 0$, це рівняння є лінійним неоднорідним, при $n = 1$ одержуємо лінійне однорідне рівняння, у якому завжди відокремлюються змінні (ці випадки вже були розглянуті раніше).

Поділивши обидві частини рівняння Бернуллі на y^α і поклавши $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$, рівняння Бернуллі можна звести до лінійного відносно z і z' :

$$\frac{z'}{(1 - \alpha)} + p(x)z = q(x).$$

Тому можна застосувати два методи: або розв'язати останнє лінійне рівняння, а потім замінити у одержаному розв'язку z на $y^{1-\alpha}$, або застосувати підстановку $y = uv$ безпосередньо до рівняння Бернуллі.

Приклад 9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + \frac{3yx^2}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1)\sin(x),$$

яке задовольняє умову $y(0) = 1$.

Розв'язання: Це диференціальне рівняння, звідне до лінійного, а саме рівняння Бернуллі з $\alpha = 2$. Розглянемо два методи розв'язання.

1. Метод Бернуллі.

Розв'язок шукаємо у вигляді $y = u v$, $y' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u + \frac{3x^2}{x^3 + 1}uv = u^2v^2(x^3 + 1)\sin(x),$$

$$v(u' + \frac{3x^2}{x^3 + 1}u) + v'u = u^2v^2(x^3 + 1)\sin(x),$$

Функцію $u(x)$ виберемо так, щоб $u' + \frac{3x^2}{x^3+1}u = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, одержуємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{3x^2}{x^3 + 1}dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{3x^2}{x^3 + 1}dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{d(x^3 + 1)}{x^3 + 1},$$

$$\ln|u| = -\ln|x^3 + 1|,$$

$$u = \frac{1}{x^3 + 1}.$$

Тоді $v(x)$ знайдемо із рівняння $v'u = u^2v^2(x^3 + 1)\sin(x)$ при $u = \frac{1}{x^3+1}$, тобто

$$v' \frac{1}{x^3 + 1} = \left(\frac{1}{x^3 + 1}\right)^2 v^2 (x^3 + 1) \sin(x),$$

$$v' = v^2 \sin(x), \quad \frac{dv}{dx} = v^2 \sin(x),$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$\frac{dv}{v^2} = \sin(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \sin(x)dx,$$

$$v = \frac{1}{\cos(x)} + C, C \in R.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння $y = uv$ має вигляд

$$y = \frac{1}{x^3 + 1} \left(\frac{1}{\cos(x)} + C \right), C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{x^3 + 1} \left(\frac{1}{\cos(x)} + C \right), C \in \mathbb{R}.$

2. Зведення до лінійного.

Поділимо обидві частини рівняння на $y^2, y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{3x^2}{y(x^3 + 1)} = (x^3 + 1) \sin(x).$$

Зробимо заміну $z = \frac{1}{y}$, тоді

$$-\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

Отже, рівняння звелось до лінійного диференціального рівняння

$$z' - \frac{3x^2}{x^3 + 1} z = -(x^3 + 1) \sin(x),$$

яке розв'яжемо методом Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді $z = uv, z' = u'v + v'u$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u - \frac{3x^2}{x^3 + 1} uv = -(x^3 + 1) \sin(x),$$

$$v(u' - \frac{3x^2}{x^3 + 1} u) + v'u = -(x^3 + 1) \sin(x),$$

Функцію $u(x)$ виберемо так, щоб $u' - \frac{3x^2}{x^3 + 1} u = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, одержуємо

$$\frac{du}{u} = \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{d(x^3 + 1)}{x^3 + 1},$$

$$\ln|u| = \ln|x^3 + 1|,$$

$$u = x^3 + 1.$$

Тоді $v(x)$ знайдемо із рівняння $v'u = -(x^3 + 1) \sin(x)$ при $u = x^3 + 1$, тобто

$$v'(x^3 + 1) = -(x^3 + 1) \sin(x),$$

$$v' = -\sin(x), \quad \frac{dv}{dx} = -\sin(x).$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$dv = -\sin(x)dx, \quad \int dv = -\int \sin(x)dx,$$

$$v = \cos(x) + C, C \in R.$$

Тоді, загальний розв'язок рівняння $z = uv$ має вигляд

$$z = (x^3 + 1)(\cos(x) + C), C \in R.$$

Якщо повернутися до змінної y , де $z = \frac{1}{y}$, то дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = \frac{1}{x^3 + 1} \left(\frac{1}{\cos(x)} + C \right), C \in R.$$

За умовою $y(0)=1$, підставляючи в загальний інтеграл, знаходимо

$$1 = \frac{1}{0 + 1} \left(\frac{1}{\cos(0)} + C \right),$$

$$C = 0.$$

Отже шуканий частинний розв'язок

$$y = \frac{1}{x^3 + 1} \left(\frac{1}{\cos(x)} \right),$$

$$y = \frac{\sec(x)}{x^3 + 1}.$$

Відповідь:

$$y = \frac{\sec(x)}{x^3 + 1}.$$

Рівняння виду

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = r(x), \quad (13)$$

де $p(x), q(x), r(x)$ – задані функції, називається **рівнянням Ріккати**.

Коли $q(x) = 0$, рівняння (13) стає лінійним, а у разі $r(x) = 0$ – рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (13) не інтегрується у квадратурах, але якщо відомий частинний розв’язок $y_1 = y_1(x)$ рівняння (13), то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад 10. Розв’язати диференціальне рівняння $x^3 y' - y^2 - x^2 y = -x^2$.

Розв’язання: Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' - \frac{y^2}{x^3} - \frac{y}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Задане рівняння є рівнянням Ріккаті. Безпосередньою підстановкою переконуємося в тому, що $y = x$ є розв’язком даного рівняння. Тому заміна $y = x + z$ зводить його до рівняння Бернуллі:

$$1 + z' - \frac{1}{x^3}(x + z)^2 - \frac{1}{x}(x + z) = -\frac{1}{x},$$

$$z' - \frac{2 + x}{x^2}z - \frac{1}{x^3}z^2 = 0.$$

Розв’язок шукаємо у вигляді $z = uv, z' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u - \frac{2 + x}{x^2}uv - \frac{1}{x^3}u^2v^2 = 0,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2 + x}{x^2}v\right) = \frac{1}{x^3}u^2v^2.$$

Функцію $v(x)$ виберемо так, щоб $v' - \frac{2+x}{x^2}v = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, одержуємо

$$\frac{dv}{v} = \frac{2 + x}{x^2}dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2 + x}{x^2}dx,$$

$$\ln|v| = -\frac{2}{x} + \ln|x|,$$

$$v = xe^{-\frac{2}{x}}.$$

Тоді $u(x)$ знайдемо із рівняння

$$u'v = \frac{1}{x^3}u^2v^2,$$

при $v = xe^{-\frac{2}{x}}$, тобто

$$u'xe^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x^3}u^2(xe^{-\frac{2}{x}})^2,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3}u^2xe^{-\frac{2}{x}}.$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$\frac{du}{u^2} = \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}dx,$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int d(e^{-\frac{2}{x}}) dx,$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}} + C,$$

$$u = \frac{-2e^{\frac{2}{x}}}{1 + Ce^{\frac{2}{x}}}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння у має вигляд

$$y = x + xe^{-\frac{2}{x}} \left(\frac{-2e^{\frac{2}{x}}}{1 + Ce^{\frac{2}{x}}} \right),$$

або, після спрощення

$$y \left(Ce^{\frac{2}{x}} - 1 \right) = x \left(Ce^{\frac{2}{x}} + 1 \right), C \in R.$$

Відповідь: $y \left(Ce^{\frac{2}{x}} - 1 \right) = x \left(Ce^{\frac{2}{x}} + 1 \right), C \in R.$

1.7 Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{14}$$

називається **рівнянням у повних диференціалах**, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Для того щоб рівняння (14) рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Якщо ця умова виконується, то невідома функція $u(x, y)$ задовольняє рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Інтегруючи першу рівність по x , визначимо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної диференційованої функції $\varphi(y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx = F(x, y) + \varphi(y),$$

де $F(x, y)$ – первісна функції $P(x, y)$ по x . Диференціюючи отриману функцію $u(x, y)$ по y і враховуючи, що

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

отримаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

Звідси знаходимо $\varphi'(y)$, і після інтегрування визначаємо функцію φ .

Загальний інтеграл рівняння (14) має вигляд $u(x, y) = C$, де

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Приклад 11. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy - \sin(2y))dy = 0.$$

Розв'язання: Перевіримо, що це рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. У даному випадку

$$P(x, y) = 3x^2 + 2y^2, \quad Q(x, y) = 4xy - \sin(2y),$$

Маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4y,$$

тобто задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функцію u знайдемо із системи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4xy - \sin(2y). \end{cases}$$

Інтегруючи першу рівність за x , одержуємо

$$u(x, y) = x^3 + 2y^2x + \varphi(y),$$

де φ – довільна диференційовна функція від y . Для її визначення продиференціюємо отриманий вираз за y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4xy + \varphi'(y)$$

і результат прирівняємо до $Q(x, y) = 4xy - \sin(2y)$:

$$4xy + \varphi'(y) = 4xy - \sin(2y).$$

Звідси $\varphi'(y) = -\sin(2y)$, $\varphi(y) = \frac{1}{2}\cos(2y) + C, C \in \mathbb{R}$.

Отже, функція u має вигляд

$$u(x, y) = x^3 + 2y^2x + \frac{1}{2}\cos(2y) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$x^3 + 2y^2x + \frac{1}{2}\cos(2y) = C, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $x^3 + 2y^2x + \frac{1}{2}\cos(2y) = C, C \in \mathbb{R}$.

Якщо ліва частина рівняння (14) не є повним диференціалом і задовольняє умови теореми Коші, то існує така функція $\mu = \mu(x, y)$, що

$\mu(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = du = 0$. Функція $\mu(x,y)$ називається **інтегрувальним множником** і задовольняє умову

$$\frac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial x},$$

тобто

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Звідси випливає, що інтегрувальний множник є розв'язком рівняння

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

У загальному випадку задача знаходження інтегруючого множника значно складніша, ніж розв'язування самого диференціального рівняння.

Розглянемо два випадки, коли інтегрувальний множник можна доволі просто знайти, а саме, якщо він залежить лише від x , тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді інтегрувальний множник знаходимо з рівняння

$$\frac{d \ln(\mu)}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

у випадку, якщо $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ не залежить від y , а залежить від x .

Аналогічно, якщо $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ залежить лише від y і не залежить від x , то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d \ln(\mu)}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Про інші більш складні способи знаходження інтегрального множника можна дізнатися із [3].

Приклад 12. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2 dx + (xy - 1) dy = 0.$$

Розв'язання: Перевіримо, чи це диференціальне рівняння в повних диференціалах. У даному випадку

$$P(x,y) = y^2, \quad Q(x,y) = xy - 1.$$

Маємо $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = y$, тобто задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Проте $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{y^2} (y - 2y) = -\frac{1}{y}$, тому рівняння має інтегрувальний множник, який залежить лише від y . Звідси

$$\frac{d \ln(\mu)}{dy} = -\frac{1}{y},$$

$$\ln(\mu) = -\ln|y| + \ln|c|,$$

$$\mu = \frac{C}{y}, \quad C \neq 0.$$

Отже, за інтегрувальний множник можемо взяти функцію $\mu = \frac{1}{y}$. Помноживши обидві частини заданого рівняння на цей множник, дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$\frac{1}{y} (y^2 dx + (xy - 1) dy) = 0,$$

$$y dx + \left(x - \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функцію u знайдемо із системи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Інтегруючи першу рівність за x , одержуємо

$$u(x, y) = xy + \varphi(y),$$

де φ – довільна диференційовна функція від y . Для її визначення продиференціюємо отриманий вираз по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y)$$

і результат прирівняємо до $Q(x, y) = x - \frac{1}{y}$:

$$x + \varphi'(y) = x - \frac{1}{y}.$$

Звідси

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{y},$$

$$\varphi(y) = \ln \left| \frac{c}{y} \right|, c \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція u має вигляд

$$u(x, y) = xy + \ln \left| \frac{c}{y} \right|, c \in \mathbb{R}.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$C = \frac{y}{e^{xy}}, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $C = \frac{y}{e^{xy}}, C \in \mathbb{R}.$

1.8 Рівняння, не розв'язні відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

Нехай маємо рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (15)$$

яке складно або неможливо розв'язати відносно похідної y' .

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Нехай рівняння (15) залежить лише від y' , тобто $F(y') = 0$. Якщо алгебраїчне рівняння $F(k) = 0$ має хоча б один дійсний корінь $k = k_0$. Тоді інтегруючи $y' = k_0$, отримуємо $y = k_0 x + C$. Звідси

$$k_0 = \frac{y - C}{x}$$

і вираз

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння, тобто є загальним інтегралом для (15).

Приклад 13. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y')^3 + (y')^2 + y' - 3 = 0.$$

Розв'язання: Оскільки алгебраїчне рівняння $k^3 + k^2 + k - 3 = 0$ має дійсний корінь $k = 1$, то загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-C}{x}\right) - 3 = 0.$$

Відповідь: $\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-C}{x}\right) - 3 = 0.$

2) Рівняння (15) не залежить від x , тобто $F(y, y') = 0$. Якщо ввести заміну $y = \varphi(t), y' = \psi(t), t \in [t_1, t_2]$ таким чином, щоб виконувалася умова

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, t \in [t_1, t_2],$$

то

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}.$$

Після інтегрування отримаємо розв'язок рівняння (13) в параметричній формі:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t).$$

Приклад 14. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^{\frac{2}{3}} + (y')^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Розв'язання: Оскільки

$$(\cos^3(t))^{\frac{2}{3}} + (\sin^3(t))^{\frac{2}{3}} = 1,$$

то нехай $y = \cos^3(t), \quad y' = \sin^3(t)$.

Тоді маємо

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-3\cos^2(t)\sin(t)dt}{\sin^3(t)} = -3 \operatorname{ctg}^2(t) dt.$$

Звідси

$$x = -3 \int \operatorname{ctg}^2(t) dt = 3t + 3\operatorname{ctg}(t) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Отже, параметричні рівняння шуканих інтегральних кривих мають вигляд

$$x = 3t + 3\operatorname{ctg}(t) + C, y = \cos^3(t), C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $x = 3t + 3\operatorname{ctg}(t) + C, y = \cos^3(t), C \in \mathbb{R}.$

Зокрема, якщо рівняння (15) не залежить від x та його можна розв'язати відносно y , тобто $y = \varphi(y')$, то за параметр зручно взяти y' .

Якщо $y' = t, y = \varphi(t)$, то

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{t},$$

Звідки, параметричне рівняння

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + C, y = \varphi(t).$$

Приклад 15. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y\sqrt{y' - 1} = 2 - y'.$$

Розв'язання: Оскільки задане рівняння можна розв'язати відносно y , тобто

$$y = \frac{2 - y'}{\sqrt{y' - 1}},$$

то покладемо $y' = t$ і рівняння набуде вигляду:

$$y = \frac{2 - t}{\sqrt{t - 1}}.$$

Тоді

$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{dt}{2(t - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$x = -\int \frac{dt}{2(t - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{t - 1}} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Звідки, параметричні рівняння

$$x = \frac{1}{\sqrt{t - 1}} + C, y = \frac{2 - t}{\sqrt{t - 1}}, C \in \mathbb{R}.$$

В цьому випадку можливо виключити параметр, визначивши t з першого рівняння

$$t = 1 + \frac{1}{(x - C)^2},$$

підставимо цей вираз в друге і отримаємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $y = x - C - \frac{1}{x - C}, C \in \mathbb{R}.$

3) Якщо рівняння (15) не залежить від y , тобто $F(x, y') = 0$, тоді, зробивши заміну

$$x = \varphi(t), y' = \psi(t), t \in [t_1, t_2]$$

таким чином, щоб виконувалася умова

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, t \in [t_1, t_2],$$

то $dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$. Після інтегрування отримаємо розв'язок рівняння (15) в параметричній формі:

$$x = \varphi(t), y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Приклад 16. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x\sqrt{1 + (y')^2} = y'.$$

Розв'язання: Оскільки $\sin(t)\sqrt{1 + (tg(t))^2} = tg(t)$, то нехай $y' = tg(t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, тоді $x = \sin(t)$. Маємо

$$dy = y'dx = tg(t)\cos(t)dt = \sin(t)dt.$$

Звідси $y = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + C, C \in \mathbb{R}.$

Отже, параметричні рівняння шуканих інтегральних кривих мають вигляд

$$x = \sin(t), y = -\cos(t) + C, C \in \mathbb{R}.$$

В цьому випадку можливо виключити параметр t , отримаємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$x^2 + (y - C)^2 = 1, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $x^2 + (y - C)^2 = 1, C \in \mathbb{R}.$

Зокрема, якщо рівняння (15) не залежить від y та його можна розв'язати відносно x , тобто $x = \varphi(y')$, то за параметр зручно взяти $y' = t$.

Тоді $dy = t\varphi'(t)dt$, звідки

$$x = \varphi(t), \quad y = \int t\varphi'(t)dt + C.$$

Приклад 17. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y')^3 - y' + x = 1.$$

Розв'язання: Оскільки задане рівняння можна розв'язати відносно x , тобто

$$x = (y')^3 - y' - 1,$$

то покладемо $y' = t$ і рівняння набуде вигляду:

$$x = t^3 - t' - 1.$$

Тоді

$$dy = y'dx = t(3t^2 - 1)dt,$$

$$y = \int (3t^3 - t)dt = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Звідки, параметричні рівняння

$$x = t^3 - t' - 1, \quad y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $x = t^3 - t' - 1, \quad y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$

4) Рівняння виду $y = x\varphi(y') + \psi(y')$, де φ, ψ – відомі функції, називається **рівнянням Лагранжа**. Підстановкою

$$t = y', \quad y = x\varphi(t) + \psi(t)$$

це рівняння зводиться до лінійного

$$(t - \varphi(t)) \frac{dx}{dt} = x\varphi'(t) + \psi'(t)$$

Остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$x = \psi(t, C), \quad y = \varphi(t) \psi(t, C) + \psi(t).$$

Приклад 18. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + y = x(y')^2$$

Розв'язання: Перепишемо рівняння у вигляді $y = x(y')^2 - y'$ – це рівняння Лагранжа. Покладемо $y' = t$ і отримаємо

$$y = xt^2 - t.$$

Продиференціюємо цю рівність

$$dy = t^2 dx + 2tx dt - dt,$$

звідси, використаємо те, що $dy = t dx$, та поділивши на dt , отримаємо лінійне рівняння відносно x

$$x' + \frac{2}{t-1}x = \frac{1}{t(t-1)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$x = uv, \quad x' = u'v + v'u.$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'v + v'u + \frac{2uv}{t-1} = \frac{1}{t(t-1)},$$

$$u'v + u(v' + \frac{2v}{t-1}) = \frac{1}{t(t-1)}.$$

Функцію $v(x)$ виберемо так, щоб

$$v' + \frac{2v}{t-1} = 0.$$

Відокремивши у цьому рівнянні змінні, одержуємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{t-1},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{dx}{t-1},$$

$$\ln|v| = -2\ln|t-1|,$$

$$v = \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Тоді $u(x)$ знайдемо із рівняння

$$u'v = \frac{1}{t(t-1)},$$

при $v = \frac{1}{(t-1)^2}$, тобто

$$u' \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{1}{t(t-1)},$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{t-1}{t}.$$

Після відокремлення змінних отримуємо

$$du = \left(1 - \frac{1}{t}\right) dx,$$

$$\int du = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dx,$$

$$u = t - \ln|t| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Отже, враховуючи, що $x = uv$ та $y = xt^2 - t$, розв'язок в параметричному вигляді заданого рівняння має вигляд

$$x = \frac{t - \ln|t| + C}{(t-1)^2}, \quad y = t^2 \frac{t - \ln|t| + C}{(t-1)^2} - t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $x = \frac{t - \ln|t| + C}{(t-1)^2}, y = t^2 \frac{t - \ln|t| + C}{(t-1)^2} - t. C \in \mathbb{R}.$

5) Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є **рівняння Клеро:**

$$y = xy' + \psi(y').$$

Це рівняння рівнозначне рівнянню

$$(x + \psi'(t)) \frac{dx}{dt} = 0,$$

де $t = y', y = xt + \psi(t)$.

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде функція

$$y = Cx + \psi(C).$$

Цю сім'ю прямих огинає особлива крива

$$x = -\psi'(t), y = -t\psi'(t) + \psi(t).$$

Приклад 19. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0.$$

Розв'язання: Перепишемо рівняння у вигляді $y = \sqrt{(y')^2 + 1} + xy'$ – це рівняння Клеро. Покладемо $y' = t$ і отримаємо

$$y = xt + \sqrt{1 + t^2}.$$

Продиференціюємо цю рівність

$$dy = tdx + xdt + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} dt,$$

використаємо те, що $dy = tdx$, отримаємо

$$tdx = tdx + xdt + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} dt,$$

$$\left(x + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right) dt = 0.$$

Звідси

$$x = -\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad t = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, розв'язок в параметричному вигляді заданого рівняння має вигляд

$$x = -\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad y = -\frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} + \sqrt{1 + t^2}.$$

Виключивши з останніх двох рівностей параметр t , дістанемо

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = Cx + \sqrt{1 - C^2}, C \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $y = \sqrt{1 - x^2}, y = Cx + \sqrt{1 - C^2}, C \in \mathbb{R}.$

2.1 Основні означення та поняття

Диференціальним рівнянням n -го порядку (ДР n -го порядку) називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція від цієї змінної, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – похідні цієї функції.

Розв'язати таке рівняння означає знайти таку неперервну двічі диференційовану функцію $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ ($C_1, \dots, C_n$ – довільні константи), яка б при підстановці її зі своїми похідними в дане рівняння перетворила його у тотожність. В геометричному сенсі така функція задає сім'ю кривих, залежних від усіх $C_1, \dots, C_n$ із множини дійсних чисел.

Задача Коші для рівняння другого порядку полягає у пошуку такого розв'язку, який би задовольнив наступні умови (умови Коші):

$$y_0 = y(x_0), y_1 = y'(x_0), \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0),$$

де $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ – вказані числові значення.

Геометричний зміст початкових умов полягає у знаходженні такої інтегральної кривої рівняння, яка проходила б через задану точку (x_0, y_0) і мала б у цій точці дотичну, кутовий коефіцієнт якої y_1 .

Загальний розв'язок ДР n -го порядку – це функція $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, яка задовольняє це рівняння при всіх значеннях довільних сталих $C_1, \dots, C_n$ і з неї можна дістати будь-який частинний розв'язок цього рівняння. Співвідношення $\omega(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$, де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі, називається *загальним інтегралом рівняння другого порядку*.

Розглянемо деякі найбільш поширені типи диференціальних рівнянь n -го порядку, які зустрічаються в практиці.

2.2 Рівняння n – го порядку, які допускають зниження порядку

Типів рівнянь n -го порядку, які допускають зниження порядку, є досить багато. Але ми розглянемо лише три найпростіші випадки.

2.2.1 Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$

Таке рівняння розв'язують безпосереднім інтегруванням лівої і правої його частини по змінній x послідовно n разів. Наприклад, для рівняння $y'' = f(x)$ алгоритм розв'язку наступний. Проінтегрувавши один раз, маємо:

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \quad C_1 = \text{const.}$$

Проінтегрувавши вдруге, знайдемо загальний розв'язок:

$$y = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2, \quad C_2 = \text{const.}$$

Приклад 20. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' = \cos 2x \sin 5x.$$

Розв'язання: Дане рівняння дозволяє знизити порядок безпосереднім інтегруванням правої і лівої його частин по змінній x :

$$\begin{aligned} y' &= \int \cos 2x \sin 5x dx = \left| \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C_1, \\ y &= \int \left(-\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{98} \sin 7x - \frac{1}{18} \sin 3x + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

$$\text{Перевірка: } y' = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C_1;$$

$$y'' = \frac{1}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} (\sin 7x + \sin 3x) = \cos 2x \sin 5x.$$

$$\text{Відповідь: } y = -\frac{1}{98} \sin 7x - \frac{1}{18} \sin 3x + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Приклад 21. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} y''' &= 24x^2 + 8\sin 2x, \\ y(0) &= 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2. \end{aligned}$$

Розв'язання: Дане ДР 3-го порядку дозволяє знизити порядок безпосереднім інтегруванням правої і лівої його частин по змінній x тричі послідовно:

$$y'' = \int (24x^2 + 8\sin 2x) dx = 8x^3 - 4 \cos 2x + C_1.$$

Відразу використаємо умову Коші:

$$y''(0) = -2: \quad 0 - 4 + C_1 = -2, C_1 = 2,$$

$$y' = \int (8x^3 - 4 \cos 2x + C_1) dx = 2x^4 - 2 \sin 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y'(0) = 1: \quad 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + C_2 = 1, C_2 = 1.$$

$$y = \int (2x^4 - 2 \sin 2x + C_1 x + C_2) dx = \frac{2}{5} x^5 + \cos 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$y(0) = 0: \quad \frac{2}{5} \cdot 0 + 1 + 0 + 0 + C_3 = 0, C_3 = -1.$$

Отже, $y = \frac{2}{5} x^5 + \cos 2x + x^2 + x - 1$.

Відповідь: $y = \frac{2}{5} x^5 + \cos 2x + x^2 + x - 1$.

2.2.2 Рівняння $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (без y)

Особливістю цього рівняння є те, що воно не містить явно шукану функцію.

Введемо деяку функцію $y' = p$, де $p = p(x)$, тоді $y'' = p'$. Тоді отримаємо рівняння $(n-1)$ -го порядку відносно функції $p(x)$: $F(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$. Припустимо, що, розв'язавши його, знайшли загальний розв'язок цього рівняння $p(x) = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$. Замінивши $p(x)$ на y' , отримаємо $y' = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$. Звідки загальний розв'язок цього рівняння матиме вигляд: $y = \int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx + C_n$, де $C_1, \dots, C_n$ - довільні сталі.

Приклад 22. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy'' + y' = 0.$$

Розв'язання: Дане рівняння не містить y , що дозволяє нам ввести заміну $y' = p$; $y'' = p'$; $p = p(x)$, $p = \frac{dp}{dx}$ і, таким чином, понизити порядок ДР.

Отримали рівняння $xp' + p = 0$, яке є за своїм видом лінійним однорідним ДР 1 порядку. Відокремимо змінні та проінтегруємо обидві частини рівності по x :

$$x \frac{dp}{dx} = -p; \quad \int \frac{dp}{p} = \int -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|p| = -\ln x + \ln(C_1),$$

$$\ln|p| = \ln \left| \frac{C_1}{x} \right|, \quad p = \frac{C_1}{x}.$$

Враховавши заміну $y' = p$, отримали диференціальне рівняння вигляду

$$y' = \frac{C_1}{x}.$$

Проінтегруємо його по x . Отримаємо

$$y = \int \frac{C_1}{x} dx = C_1 \ln(x) + C_2.$$

Перевірка:

$$y' = \frac{C_1}{x}, y'' = -\frac{C_1}{x^2},$$

$$x \left(-\frac{C_1}{x^2} \right) + \frac{C_1}{x} = 0, \quad -\frac{C_1}{x} + \frac{C_1}{x} = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Відповідь: $y = C_1 \ln|x| + C_2$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 23. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''(\sin x + 3) = y' \cos x.$$

Розв'язання: Дане рівняння не містить y , що дозволяє нам ввести заміну $y' = p$; $y'' = p'$; $p = p(x)$, $p = \frac{dp}{dx}$ і таким чином понизити порядок ДР.

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p'(\sin x + 3) = p \cos x,$$

$$\frac{dp}{dx} (\sin x + 3) = p \cos x, \quad (*)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\cos x}{\sin x + 3}.$$

Інтегруємо його по x :

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + 3}; \quad \begin{cases} p \neq 0, \\ \sin x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

$$\ln|p| = \ln|\sin x + 3| + \ln|C_1|,$$

$$p = C_1(\sin x + 3). \quad (**)$$

Розглянемо випадки, коли $\begin{cases} p = 0, \\ \sin x + 3 = 0. \end{cases}$

1) $p = 0$ є розв'язком рівняння (*) (підстановка $p = 0$ та $p' = 0$ в це рівняння перетворює його в тотожність). Але частинний розв'язок (**) при $C_1 = 0$ співпадає з $p = 0$.

2) $\sin x + 3 = 0, \sin x = -3$ – рівняння розв'язків не має.

Отже, (**) є загальним розв'язком (*).

Повернемось до заміни $p = y'$ і розв'яжемо отримане рівняння:

$$y' = C_1(\sin x + 3),$$

$$y = \int C_1(\sin x + 3) dx = C_1(-\cos x + 3x) + C_2.$$

$y = 0$ при $C_1 = C_2 = 0$.

Перевірка: $y' = C_1(\sin x + 3), y'' = C_1 \cos x$

$C_1 \cos x(\sin x + 3) = C_1(\sin x + 3) \cos x$ – тотожність.

Відповідь: $y = -C_1(\cos x + 3x) + C_2, C_1, C_2$ - довільні сталі.

Приклад 24. Розв'язати задачу Коші

$$xy''' + y'' = \sqrt{x},$$

$$y(1) = \frac{8}{45}, \quad y'(1) = \frac{4}{9}, \quad y''(1) = \frac{2}{3}.$$

Розв'язання: Маємо ДР 3 порядку, яке допускає пониження порядку.

Використаємо заміну $y'' = p; \quad y''' = p'; \quad p = p(x), \quad p = \frac{dp}{dx}$:

$$xp' + p = \sqrt{x}.$$

Отримали лінійне ДР 1 порядку. Пригадаємо метод Бернуллі. Розв'язок шукатимемо у вигляді $p = uv, \quad u = u(x), \quad v = v(x), p' = u'v + uv'$.

$$x(u'v + uv') + uv = \sqrt{x},$$

$$xu'v + xuv' + uv = \sqrt{x},$$

$$xu'v + u(xv' + v) = \sqrt{x},$$

$$\begin{cases} xv' + v = 0, \\ xu'v = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку перше рівняння системи:

$$xv' + v = 0,$$

$$\frac{xdv}{dx} = -v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{-dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

З другого рівняння маємо:

$$xu' \frac{1}{x} = \sqrt{x}, \quad u' = \sqrt{x}, \quad \frac{du}{dx} = \sqrt{x}, \quad du = \sqrt{x}dx, \quad u = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1.$$

$$\text{Отже, } p = uv = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 \right) = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{x} = y''.$$

Зручно скористатись умовою Коші $y''(1) = \frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3}1^{\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{1} = \frac{2}{3}, \quad C_1 = 0.$$

$$\text{Отже, } y'' = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}.$$

$$y' = \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

З другої умови Коші $y'(1) = \frac{4}{9}$ знайдемо C_2 :

$$\frac{4}{9} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C_2 = \frac{4}{9}, \quad C_2 = 0.$$

$$\text{Тому } y' = \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}.$$

$$y = \int \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{8}{45}x^{\frac{5}{2}} + C_3.$$

З умови $y(1) = \frac{8}{45}$ знаходимо C_3 :

$$\frac{8}{45} \cdot 1^{\frac{5}{2}} + C_3 = \frac{8}{45}.$$

$$\text{Отже, } y = \frac{8}{45}x^{\frac{5}{2}}.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{8}{45}x^{\frac{5}{2}}.$$

2.2.3 Рівняння $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (без x)

Це рівняння особливе тим, що не містить незалежної змінної x . Зробимо заміну $y' = p$, $p = p(y)$. Тоді $y'' = p'y' = p'p$. Підставляючи останні вирази для похідних у дане диференціальне рівняння, отримаємо рівняння $(n-1)$ -го порядку відносно функції $p(y)$:

$$F(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Нехай функція $p(y) = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ є загальним розв'язком цього рівняння. Повернувшись до заміни $p = y'$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, де $C_1, \dots, C_{n-1}$ – довільні сталі. Відокремивши змінні і проінтегрувавши ліву та праву частини по x , отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння.

Приклад 25. Розв'язати диференціальне рівняння

$$2 + (y')^2 = 2yy''.$$

Розв'язання: Дане рівняння не містить x , що дозволяє нам ввести заміну

$$y' = p(y); \quad y'' = p'p; \quad p' = \frac{dp}{dy}; \quad y' = y(x);$$

Отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$2 + p^2 = 2yp'p, \quad (*)$$

$$2 + p^2 = 2y \frac{dp}{dy} p.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо обидві частини отриманого рівняння:

$$\int \frac{2pdp}{p^2 + 2} = \int \frac{dy}{y}, \quad \begin{cases} p^2 + 2 \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

$$\ln|p^2 + 2| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$p^2 + 2 = C_1 y,$$

$$p = \pm \sqrt{C_1 y - 2}.$$

(**)

Розглянемо випадки, коли $\begin{cases} p^2 + 2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

$p^2 + 2 = 0$ – розв'язків не має,

$y = 0$ не є розв'язком рівняння (*).

Отже, для рівняння (*) загальний розв'язок (**).

Повернемося до заміни $p = y'$, $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 2}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо його:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 2}} = \pm \int dx,$$

$$\frac{2\sqrt{C_1 y - 2}}{C_1} = \pm x + C_2.$$

Перевірка: Знайдемо похідну неявно заданої функції по x :

$$\frac{2C_1}{C_1 2\sqrt{C_1 y - 2}} y' = \pm 1, \quad y' = \pm \sqrt{C_1 y - 2};$$

$$y'' = \pm \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 y - 2}} y' = \pm \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 y - 2}} \cdot \pm \sqrt{C_1 y - 2} = \frac{C_1}{2};$$

$$2 + (\pm \sqrt{C_1 y - 2})^2 = 2y \frac{C_1}{2};$$

$$2 + C_1 y - 2 = 2y \frac{C_1}{2}.$$

$C_1 y = C_1 y$ – тотожність.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{C_1 y - 2}}{C_1} = \pm x + C_2.$

Приклад 26. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y + 3)y'' = (y')^2 + 2y'.$$

Розв'язання: Дане рівняння не містить x , що дозволяє нам зробити заміну

$$y' = p(y); \quad y'' = p'p; \quad p' = \frac{dp}{dy} \quad y' = y(x).$$

Отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(y + 3)pp' = p^2 + 2p, \quad (*)$$

$$(y + 3)p \frac{dp}{dy} = p^2 + 2p.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо обидві частини отриманого рівняння

$$\int \frac{dp}{(p + 2)} = \int \frac{dy}{y + 3}; \quad \begin{cases} p \neq 0, \\ y + 3 \neq 0, \\ p + 2 \neq 0. \end{cases}$$

$$\ln|p + 2| = \ln|y + 3| + \ln|C_1|,$$

$$p + 2 = C_1(y + 3),$$

$$p = C_1(y + 3) - 2. \quad (**)$$

Перевіримо, чи не були втрачені корені при відокремлюванні змінних, і які не увійшли до загального розв'язку (**) рівняння (*):

$$\begin{cases} p = 0, \\ y + 3 = 0, \\ p + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p = 0, \\ y = -3, \\ p = -2. \end{cases}$$

Перевіримо, чи не буде розв'язком:

$p = 0$: $0 = C_1(y + 3) - 2$ – не існує такого C_1 , при якому б отримали тотожність;

$$y = -3: y' = 0 = p, \quad 0 = C_1(-3 + 3) - 2; \quad 0 = C_1 \cdot 0 - 2, \quad C_1 \in \emptyset;$$

$p = -2$: $-2 + 2 = C_1(y + 3)$, $0 = C_1(y + 3)$ при $C_1 = 0$. Отже, $p = -2$ входить в розв'язок (**).

Повернемось до заміни $p = y'$, $y' = \frac{dy}{dx}$. Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними і розв'яжемо його:

$$y' = C_1(y + 3) - 2,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y + 3) - 2,$$

$$\frac{dy}{C_1(y+3)-2} = dx,$$

$$\frac{\ln |C_1(y+3)-2|}{C_1} = x + \ln |\widetilde{C}_2|,$$

$$\ln |C_1(y + 3) - 2| = C_1 x + \ln |C_2|,$$

$$\ln |C_1(y + 3) - 2| = \ln e^{C_1 x} + \ln C_2,$$

$$C_1(y + 3) - 2 = C_2 e^{C_1 x}.$$

Врахуємо частинні розв'язки рівняння (*):

$$p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C$$

$$y = -3$$

Але отримані частинні розв'язки співпадають при $C = -3$.

Перевірка:

$$y + 3 = \frac{C_2 e^{C_1 x + 2}}{C_1}.$$

Знайдемо похідну неявно заданої функції по x :

$$C_1 y' = C_1 \cdot C_2 e^{C_1 x};$$

$$C_1 y'' = C_1 \cdot C_1 \cdot C_2 e^{C_1 x};$$

$$\frac{C_2 e^{C_1 x + 2}}{C_1} C_1 \cdot C_2 e^{C_1 x} = (C_2 e^{C_1 x})^2 + 2 C_2 e^{C_1 x}.$$

$$(C_2 e^{C_1 x})^2 + 2C_2 e^{C_1 x} = (C_2 e^{C_1 x})^2 + 2C_2 e^{C_1 x} - \text{тотожність.}$$

Відповідь: $C_1(y + 3) - 2 = C_2 e^{C_1 x}$; $y = C$, де C, C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 27. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язання: Дане диференціальне рівняння 2 порядку не містить x , що дозволяє нам зробити заміну:

$$y' = p(y); \quad y'' = p'p; \quad p' = \frac{dp}{dy}; \quad y' = y(x).$$

Отримаємо:

$$pp' - p^2 + p(y - 1) = 0.$$

Винесемо спільний множник p за дужки:

$$p(p' - p + y - 1) = 0.$$

Звідси

$$p = 0, \text{ або } p' - p + y - 1 = 0.$$

$$y' = 0, \quad p' - p = 1 - y \quad \text{лінійне ДР I порядку.} \quad (*)$$

$$y = C_1$$

Розв'яжемо (*) методом Бернуллі. Шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій $p = uv$; $u = u(y)$; $v = v(y)$, $p' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' - uv = 1 - y;$$

$$u'v + u(v' - v) = 1 - y;$$

$$\begin{cases} v' - v = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'v = 1 - y, & (2) \end{cases}$$

$$(1): v' = v; \quad \frac{dv}{dy} = v; \quad \int \frac{dv}{v} = \int dy;$$

$$\ln |v| = y;$$

$$v = e^y;$$

$$(2): u'e^y = 1 - y;$$

$$\frac{du}{dy} = e^{-y}(1 - y);$$

$$u = \int du = \int e^{-y}(1 - y)dy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{метод інтегрування частинами} \\ \int \varphi d\omega = \varphi\omega - \int \omega d\varphi \\ \varphi = 1 - y, \quad d\varphi = -dy, \quad d\omega = e^{-y}dy, \quad \omega = -e^{-y} \end{array} \right| =$$

$$= -(1 - y)e^{-y} + e^{-y} + C_1;$$

$$p = uv = ((-1 + y)e^{-y} + e^{-y} + C_1)e^y.$$

Після алгебраїчного перетворення отримаємо:

$$p = C_1 e^y + y.$$

Повернемось до заміни $p = y', y' = \frac{dy}{dx}$:

$$y' = C_1 e^y + y.$$

На цьому етапі зручно використати умови Коші та знайти C_1 :

$$\left. \begin{array}{l} y'(0)=2 \Rightarrow y'=2 \\ y(0)=2 \Rightarrow y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = C_1 e^2 + 2; C_1 = 0.$$

Отже,

$$y' = 0 \cdot e^y + y, \quad y' = y; \quad \frac{dy}{dx} = y - \text{ДР з відокремлюваними змінними.}$$

$$\frac{dy}{y} = dx; \quad y \neq 0, \ln y = x + \widetilde{C}_2,$$

$$y = e^{x+\widetilde{C}_2} = C_2 e^x.$$

Розв'язок $y = 0$ входить в загальний розв'язок при $C_2 = 0$.

Для визначення C_2 використаємо другу умову Коші:

$$y(0) = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = C_2 e^0; C_2 = 2.$$

Отже, $y = 2e^x$.

Перевірка: $y' = 2e^x, y'' = 2e^x$

$$2e^x - (2e^x)^2 + 2e^x(2e^x - 1) = 0$$

$$2e^x - 4e^{2x} + 4e^{2x} - 2e^x = 0$$

$$0 \equiv 0.$$

Відповідь: $y = 2e^x$.

Приклад 28. Розв'язати задачу Коші

$$y^3 y'' = 4(y^4 - 1),$$

$$y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$$

Розв'язання. Дане диференціальне рівняння 2 порядку не містить x , що дозволяє нам зробити заміну

$$y' = p(y); \quad y'' = p'p; \quad p' = \frac{dp}{dy}; \quad y' = y(x).$$

Отримаємо ДР 1 порядку з відокремлюваними змінними:

$$y^3 p' p = 4(y^4 - 1),$$

$$y^3 \frac{dp}{dy} p = 4(y^4 - 1),$$

$$p dp = 4 \frac{y^4 - 1}{y^3} dy,$$

$$\int p dp = 4 \int (y - \frac{1}{y^3}) dy,$$

$$\frac{p^2}{2} = 4(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + C_1).$$

Використаємо умови $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$ ($p = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$):

$$\frac{\sqrt{2}^2}{2} = 4(\frac{\sqrt{2}^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}^2} + C_1),$$

$$1 = 4 + 1 + 4C_1, \quad C_1 = -1.$$

Отже,

$$\frac{p^2}{2} = 4(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} - 1),$$

$$p^2 = 4(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2),$$

$$p^2 = 4 \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{y^2},$$

$$p^2 = 4 \frac{(y^2 - 1)^2}{y^2},$$

$$p = \pm 2 \frac{y^2 - 1}{y}.$$

Оскільки, $p(y) = y'$, то отримаємо ДР 1 порядку з відокремлюваними змінними:

$$y' = \pm 2 \frac{y^2 - 1}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2 \frac{y^2 - 1}{y},$$

$$\frac{ydy}{y^2-1} = \pm 2dx,$$

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| = \pm 2x + C_2.$$

Знайдемо C_2 з умови $y(0) = \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{2} \ln|\sqrt{2}^2 - 1| = \pm 2 \cdot 0 + C_2, C_2 = 0.$$

Отже, $\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| = \pm 2x$, $\ln|y^2 - 1| = \pm 4x$.

Відповідь: $\ln|y^2 - 1| = \pm 4x$.

2.3 Однорідне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків найчастіше зустрічаються лінійні диференціальні рівняння. Диференціальне рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), a_n(x) \neq 0$$

лінійне відносно невідомої функції y та її похідних $y^{(n)}, \dots, y'', y'$ називається **лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку**.

Якщо усі $a_i(x), i = \overline{1, \dots, n}$ деякі сталі, то таке рівняння називається **лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) зі сталими коефіцієнтами**, а якщо $f(x) \neq 0$ – **лінійним неоднорідним ДР (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами**.

Розв'язок ЛОДР запропонував ще у 1743 р. Леонард Ейлер.

Теорема (про розв'язок ЛОДР):

Загальний розв'язок $y(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку є лінійна комбінація n його лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), \dots, y_n(x)$, тобто функція виду

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \text{ де } C_1, C_2, \dots, C_n - \text{довільні сталі.}$$

Визначення системи n лінійно незалежних функцій у загальному вигляді досить складне. Тому, щоб легко перевірити лінійну незалежність двох функцій, потрібно скласти їх відношення, і, у випадку, якщо воно не дорівнює сталій, робимо висновок, що ці дві функції лінійно незалежні.

Вигляд лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ ЛОДР 2 порядку згідно методу розв'язання залежить від типу коренів відповідного характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (*)$$

Таблиця 1

№	Тип коренів рівняння $k^2 + pk + q = 0$	Лінійно незалежні розв'язки	Загальний розв'язок
1	$k_1 \neq k_2$ дійсні	$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	$k_1 = k_2 = k$ дійсні	$y_1 = e^{kx}, y_2 = x e^{kx}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$
3	k_1, k_2 комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Приклад 29. Розв'язати ЛОДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$2y'' + y' + y = 0.$$

Розв'язання: Складемо відповідне характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$2k^2 + k - 1 = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{2}; \quad k_2 = -1 \text{ дійсні.}$$

Згідно випадку 1 Таблиці 1 можемо написати загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 30. Розв'язати ЛОДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

Розв'язання: Складемо відповідне характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$(2k)^2 + 4k + 1 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2} - \text{дійсні і однакові.}$$

Згідно випадку 2 Таблиці 1 можемо написати загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Відповідь: $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{1}{2}x}$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 31. Розв'язати ЛОДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання: Складемо відповідне характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

$$D = 16; \quad k_{1,2} = -1 \pm 2i \text{ комплексно спряжені.}$$

Згідно випадку 3 Таблиці 1 можемо написати загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Відповідь: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 32. Розв'язати ЛОДР 4 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Розв'язання: Складемо відповідне характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = 0,$$

$$k(k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 0,$$

$$k(k - 1)^3 = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = k_3 = k_4 = 1.$$

Згідно випадків 1 та 2 Таблиці 1 можемо написати загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y = C_1 + (C_2 + C_3x + C_4x^2)e^{1x}.$$

Відповідь: $y = C_1 + (C_2 + C_3x + C_4x^2)e^x.$

Приклад 33. Розв'язати ЛОДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV} - 2y''' + 4y'' - 8y' = 0.$$

Розв'язання: Складемо відповідне характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$k^4 - 2k^3 + 4k^2 - 8k = 0,$$

$$k(k^3 - 2k^2 + 4k - 8) = 0,$$

$$k(k^2(k - 2) + 4(k - 2)) = 0,$$

$$k(k - 2)(k^2 + 4) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i.$$

Згідно випадків 1 та 3 Таблиці 1 можемо написати загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y = C_1e^{0x} + C_2e^{2x} + e^{0x}(C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x)$$

Відповідь: $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x$

2.4 Неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Спеціальний вигляд правої частини

Розглянемо ЛНДР 2 порядку

$$y'' + py' + q = f(x), \quad (*)$$

Спочатку розглянемо випадки, коли функція $y = f(x)$ має, так званий, спеціальний вигляд. Структуру загального розв'язку рівняння (*) визначає теорема:

Теорема (про розв'язок ЛНДР):

Загальний розв'язок рівняння () дорівнює сумі загального розв'язку відповідного ЛОДР і деякого частинного розв'язку рівняння (*)*

$$y(x) = y_o + y_{\text{ч}}$$

Розглянемо основні три типи функції $f(x)$ і вигляд $y_{\text{ч}}$ в таблиці.

Таблиця 2

№	Вигляд $f(x)$	Аналіз коренів характеристичного рівняння	Вигляд $y_{\text{ч}}$
1.	$P_n(x)$	1.1 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ дійсні	$Q_n(x)$
		1.2 $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ дійсні	$xQ_n(x)$
2.	$P_n(x)e^{\alpha x}$	2.1 $k_1 \neq \alpha, k_2 \neq \alpha$ дійсні	$e^{\alpha x}Q_n(x)$
		2.2 $k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$ дійсні	$xe^{\alpha x}Q_n(x)$
		2.3 $k_1 = k_2 = \alpha$ дійсні	$x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$
3.	$P_n(x) \cos \beta x +$ $T_m(x) \sin \beta x$	3 k_1, k_2 дійсні	$Q_s(x) \cos \beta x$ $+ R_s(x) \sin \beta x$

			$s = \max(n, m)$
4.	$e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$	4 k_1, k_2 дійсні	$e^{\alpha x}(Q_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x)$ $s = \max(n, m)$
5.	$e^{\delta x}(P_n(x) \cos \gamma x + T_m(x) \sin \gamma x)$	5 $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$,	$e^{\delta x}(Q_s(x) \cos \gamma x + R_s(x) \sin \gamma x)$ $s = \max(n, m)$
6.	$e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$	6 $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$,	$e^{\alpha x}x(Q_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x)$ $s = \max(n, m)$

де $P_n(x)$ – відомий поліном степеня n , $Q_s(x)$ та $R_s(x)$ – невідомі поліноми.

Приклад 34. Розв'язати ЛНДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - y' = 4x.$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}}.$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y'' - y' = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 - k = 0,$$

$$k(k - 1) = 0,$$

$$k_1 = 0, k_2 = 1.$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 отримаємо $y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1x} = C_1 + C_2 e^x$.

Шукатимемо тепер $y_{\text{ч}}$.

$f(x) = 4x = P_1(x)$ - це поліном першої степені. Тоді $Q_1(x) = Ax + B$ Згідно таблиці 2 пункту 1.2, враховуючи, що серед коренів характеристичного рівняння є нульовий, можемо визначити

$$y_{\text{ч}} = x(Ax + B).$$

Для визначення A та B скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

$$y_{\text{ч}} = Ax^2 + Bx.$$

Підставимо $y'_{\text{ч}} = 2Ax + B$, $y''_{\text{ч}} = 2A$ в початкове рівняння:

$$2A - 2Ax - B = 4x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x та вільні коефіцієнти:

$$x: -2A = 4, A = -2,$$

$$x^0: 2A - B = 0, B = 2A = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Отже,

$$y_{\text{ч}} = -2x^2 - 4x.$$

Маємо

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1 + C_2 e^x - 2x^2 - 4x.$$

Відповідь: $y(x) = C_1 + C_2 e^x - 2x^2 - 4x$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 35. Розв'язати ЛНДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 5y' + 6y = (12x - 2)e^x.$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}}.$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 - 5k + 6 = 0,$$

$$k_1 = 2, k_2 = 3.$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 отримаємо $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Шукатимемо тепер $y_{\text{ч}}$.

$f(x) = (12x - 2)e^x = P_1(x)e^{\alpha x}$, де $P_1(x)$ - поліном першої степені, $\alpha = 1$.
Тоді $Q_1(x) = Ax + B$. Згідно таблиці 2 пункту 2.1, враховуючи, що серед коренів характеристичного рівняння жоден не співпав з α , можемо визначити

$$y_{\text{ч}} = e^x(Ax + B).$$

Для визначення A та B скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Знайдемо $y'_{\text{ч}} = e^x(Ax + B) + Ae^x$, $y''_{\text{ч}} = e^x(Ax + B) + Ae^x + Ae^x$ та підставимо їх в початкове рівняння:

$$e^x(Ax + B) + Ae^x + Ae^x - 5(e^x(Ax + B) + Ae^x) + 6e^x(Ax + B) = (12x - 2)e^x \quad | : e^x$$

$$Ax + B + A + A - 5(Ax + B + A) + 6(Ax + B) = 12x - 2.$$

$$2Ax - 3A + 2B = 12x - 2.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при x та вільні коефіцієнти

$$x: 2A = 12, A = 6,$$

$$x^0: -3A + 2B = -2, 2B = -2 + 3A, 2B = -2 + 3 \cdot 6, 2B = 16, B = 8.$$

$$\text{Отже, } y_{\text{ч}} = e^x(6x + 8).$$

Маємо

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^x(6x + 8).$$

Відповідь: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^x(6x + 8)$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 36. Розв'язати ЛНДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + y' - 2y = 18xe^{-2x}.$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}}.$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

$$k_1 = -2, k_2 = 1.$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 отримаємо $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Шукатимемо тепер $y_{\text{ч}}$.

$f(x) = 18xe^{-2x} = P_1(x)e^{\alpha x}$, де $P_1(x)$ - поліном першої степені, $\alpha = -2$. Тоді $Q_1(x) = Ax + B$ Згідно таблиці 2 пункту 2.2 $k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$, враховуючи, що серед коренів характеристичного рівняння один корінь співпав з $\alpha = -2$, можемо визначити

$$y_{\text{ч}} = e^{-2x}x(Ax + B) = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}.$$

Для визначення A та B скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Знайдемо

$$y'_{\text{ч}} = e^{-2x}(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx)e^{-2x},$$

$$y''_{\text{ч}} = e^{-2x}(2A) - 2e^{-2x}(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx)e^{-2x} - 2(2Ax + B)e^{-2x},$$

та підставимо їх в початкове рівняння:

$$e^{-2x}(2A) - 2e^{-2x}(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx)e^{-2x} - 2(2Ax + B)e^{-2x} + e^{-2x}(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx)e^{-2x} - 2(Ax^2 + Bx)e^{-2x} = 18xe^{-2x}.$$

Поділимо отримане рівняння на e^{-2x} :

$$2A - 2(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx) - 2(2Ax + B) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx) - 2(Ax^2 + Bx) = 18x.$$

Спростимо ліву частину, розкривши дужки та звівши подібні доданки:

$$2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + 4Bx - 4Ax - 2B + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2Ax^2 - 2Bx = 18x,$$

$$(-4A + 4B - 4A + 2A - 2B - 2B)x + (2A - 2B - 2B + B) = 18x,$$

$$-6Ax + (2A - 3B) = 18x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x та вільні коефіцієнти:

$$x: -6A = 18, A = -3,$$

$$x^0: 2A - 3B = 0, -3B = -2A, -3B = 6, B = -2.$$

Отже,

$$y_{\text{ч}} = e^{-2x}x(-3x - 2) = (-3x^2 - 2x)e^{-2x}.$$

Маємо

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1e^{-2x} + C_2e^x + (-3x^2 - 2x)e^{-2x}.$$

Відповідь: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x + (-3x^2 - 2x)e^{-2x}$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 37. Розв'язати ЛНДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x.$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}}.$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

$$D = 4 - 20 = -16, \sqrt{D} = 4i, k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Згідно таблиці 1 пункту 3 отримаємо $y_0 = e^{-1x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Шукатимемо тепер $y_{\text{ч}}$.

$f(x) = 10 \cos x = P_0(x) \cos \beta x$, де $P_0(x)$ - поліном нульової степені (константа), $\beta = 1$. Тоді $Q_0(x) = A$ Згідно таблиці 2 пункту 5 можемо визначити

$$y_{\text{ч}} = A \cos x + B \sin x.$$

Для визначення A та B скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Знайдемо

$$y'_{\text{ч}} = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y''_{\text{ч}} = -A \cos x - B \sin x,$$

та підставимо їх в початкове рівняння:

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 10 \cos x.$$

Спростимо ліву частину, розкривши дужки і звівши подібні доданки:

$$-A \cos x - B \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x + 5A \cos x + 5B \sin x = 10 \cos x,$$

$$4A \cos x + 2B \cos x - 2A \sin x + 4B \sin x = 10 \cos x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$ та розв'язуємо отриману систему

$$\cos x : 4A + 2B = 10, \quad A = 2, B = 1.$$

$$\sin x : -2A + 4B = 0.$$

Отже,

$$y_{\text{ч}} = 2 \cos x + \sin x.$$

Маємо

$$y(x) = y_o + y_{\text{ч}} = e^{-1x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2 \cos x + \sin x.$$

Відповідь: $y(x) = e^{-1x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2 \cos x + \sin x,$

C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 38. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cos x, y'(0) = 0, y(0) = 1.$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

$$y(x) = y_o + y_{\text{ч}}.$$

Знайдемо спочатку y_o , розв'язавши рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = -2.$$

Згідно таблиці 1 пункту 2 отримаємо $y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$.

Шукатимемо тепер $y_{\text{ч}}$.

$f(x) = e^{-2x} \cos x = e^{\alpha x}(P_0(x) \cos \beta x + T_0(x) \sin \beta x)$, де $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Тоді $Q_0(x) = A$, $R_0(x) = B$. Згідно таблиці 2 пункту 4 можемо визначити

$$y_{\text{ч}} = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x).$$

Для визначення A та B скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Знайдемо

$$y'_{\text{ч}} = -2e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) + e^{-2x}(-A \sin x + B \cos x),$$

$$y''_{\text{ч}} = 4e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) - 2e^{-2x}(-A \sin x + B \cos x) - 2e^{-2x}(-A \sin x + B \cos x) + e^{-2x}(-A \cos x - B \sin x),$$

та підставимо їх в початкове рівняння:

$$4e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) - 2e^{-2x}(-A \sin x + B \cos x) - 2e^{-2x}(-A \sin x + B \cos x) + e^{-2x}(-A \cos x - B \sin x) + 4(-2e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) + e^{-2x}(-A \sin x + B \cos x)) + 4(e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)) = e^{-2x} \cos x.$$

Поділимо отримане рівняння на e^{-2x} , розкриємо дужки та спростимо ліву частину рівняння:

$$4A \cos x + 4B \sin x + 2A \sin x - 2B \cos x + 2A \sin x - 2B \cos x - A \cos x - B \sin x - 8A \cos x - 8B \sin x - 4A \sin x + 4B \cos x + 4A \cos x + 4B \sin x = \cos x, \\ -A \cos x - B \sin x = \cos x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin x$ та $\cos x$:

$$\sin x: -B = 0,$$

$$\cos x: -A = 1, A = -1, B = 0.$$

Отже,

$$y_{\text{ч}} = -e^{-2x} \cos x.$$

Маємо

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \cos x.$$

Знайдемо C_1, C_2 , використавши початкові умови $y'(0) = 0, y(0) = 1$.

Спочатку знайдемо

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} + 2e^{-2x} \cos x + e^{-2x} \sin x.$$

Підставивши $x = 0, y = 1, y' = 0$ в $y(x)$ та $y'(x)$, отримуємо два рівняння, з яких знаходимо невідомі константи:

$$1 = C_1 - 1, C_1 = 2,$$

$$0 = -2C_1 + C_2 + 2, C_2 = 2.$$

$$\text{Отже, } y(x) = 2e^{-2x} + 2xe^{-2x} - e^{-2x} \cos x.$$

$$\underline{\text{Відповідь:}} y(x) = 2e^{-2x} + 2xe^{-2x} - e^{-2x} \cos x.$$

Приклад 39. Розв'язати ЛНДР 3 порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}}.$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y''' - y' = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^3 - k = 0,$$

$$k(k^2 - 1) = 0,$$

$$k(k - 1)(k + 1) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 отримаємо

$$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-1x} + C_3 e^{1x} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x$$

Шукатимемо тепер $y_{\text{ч}} = y_{\text{ч1}} + y_{\text{ч2}}$.

$f_1(x) = 10 \sin x + 6 \cos x = T_0(x) \sin \beta x + P_0(x) \cos \beta x$, де - $T_0(x)$ та $P_0(x)$ - поліноми нульової степені (константи), $\gamma = 1$. Тоді $R_0(x) = A$, $Q_0(x) = B$. Згідно таблиці 2 пункту 5 можемо визначити

$$y_{\text{ч1}} = A \sin x + B \cos x,$$

$f_2(x) = 4e^x = P_0(x)e^{\alpha x}$, де - $P_0(x)$ - поліном нульової степені (константа), $\alpha = 1$. Тоді $Q_0(x) = C$. Згідно таблиці 2 пункту 2.2 можемо визначити

$$y_{\text{ч2}} = Cxe^x.$$

Отже, $y_{\text{ч}} = A \sin x + B \cos x + Cxe^x$.

Для визначення A , B та C скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Знайдемо

$$y'_{\text{ч}} = A \cos x - B \sin x + Ce^x + Cxe^x,$$

$$y''_{\text{ч}} = -A \sin x - B \cos x + Ce^x + Ce^x + Cxe^x,$$

$$y'''_{\text{ч}} = -A \cos x + B \sin x + 2Ce^x + Ce^x + Cxe^x,$$

та підставимо їх в початкове рівняння:

$$-A \cos x + B \sin x + 2Ce^x + Ce^x + Cxe^x - (A \cos x - B \sin x + Ce^x + Cxe^x) = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

Спростимо ліву частину, розкривши дужки і звівши подібні доданки:

$$-A \cos x + B \sin x + 2Ce^x + Ce^x + Cxe^x - A \cos x + B \sin x - Ce^x - Cxe^x = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x,$$

$$-2A \cos x + 2B \sin x + 2Ce^x = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x$, $\sin x$ та e^x та розв'язуємо отриману систему

$$\cos x : -2A = 6, \quad A = -3, B = 5, C = 2.$$

$$\sin x: 2B = 10,$$

$$e^x: 2C = 4,$$

Отже,

$$y_{\text{ч}} = -3 \sin x + 5 \cos x + 2xe^x$$

Маємо

$$y(x) = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x - 3 \sin x + 5 \cos x + 2xe^x.$$

Відповідь: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x - 3 \sin x + 5 \cos x + 2xe^x,$

C_1, C_2, C_3 - довільні сталі.

Розглянемо всі можливі випадки по підбору частинного розв'язку ЛНДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною в такій таблиці 3.

Таблиця 3

1. Характеристичне рівняння має два різних дійсних корені, відмінних від нуля $y'' + y' - 2y = f(x)$ - ЛНДР 2 порядку Характеристичне рівняння: $k^2 + k - 2 = 0$, $k_1 = 1, k_2 = -2$		
$f(x)$	Пункт таблиці	Загальний вигляд $y_{\text{ч}}$
4	1.1	A
$5x + 2$	1.1	$Ax + B$
$x^2 - 2x$	1.1	$Ax^2 + Bx + C$
$3e^{2x}$	2.1	Ae^{2x}
$(2x - 1)e^{2x}$	2.1	$(Ax + B)e^{2x}$
$3xe^{1x}$	2.2	$x(Ax + B)e^{1x}$
e^{-2x}	2.2	Axe^{-2x}
$2 \sin x$	3.1	$A \cos x + B \sin x$
$5 \cos 2x$	3.1	$A \cos 2x + B \sin 2x$

$\cos 3x - 4 \sin 3x$	3.1	$A \cos 3x + B \sin 3x$
$x \cos 3x - 4 \sin 3x$	3.1	$(Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$
$2e^{-2x} \cos 3x$	3.1	$e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$
2. Характеристичне рівняння має два різних дійсних корені, один з яких нуль $y'' + 3y' = f(x)$ - ЛНДР 2 порядку Характеристичне рівняння: $k^2 + 3k = 0$, $k_1 = -3, k_2 = 0$		
4	1.2	$x A$
$5x + 2$	1.2	$x(Ax + B)$
$x^2 - 2x$	1.2	$x(Ax^2 + Bx + C)$
$3e^{2x}$	2.1	Ae^{2x}
$(2x - 1)e^{2x}$	2.1	$(Ax + B)e^{2x}$
$3xe^{-3x}$	2.2	$x(Ax + B)e^{-3x}$
e^{-3x}	2.2	Axe^{-3x}
3. Характеристичне рівняння має два кратних дійсних корені $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ - ЛНДР 2 порядку $k^2 - 6k + 9 = 0$ $k_{1,2} = 3$		
4	1.1	A
$5x + 2$	1.1	$Ax + B$
$x^2 - 2x$	1.1	$Ax^2 + Bx + C$
$3e^{2x}$	2.1	Ae^{2x}
$3e^{3x}$	2.3	$Ax^2 e^{3x}$
$(3x + 1)e^{3x}$	2.3	$(Ax + B)x^2 e^{3x}$
$2 \sin x$	3.1	$A \cos x + B \sin x$
$5 \cos 2x$	3.1	$A \cos 2x + B \sin 2x$
$\cos 3x - 4 \sin 3x$	3.1	$A \cos 3x + B \sin 3x$
$f(x) = x \cos 3x$ $- 4 \sin 3x$	3.1	$(Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$

$f(x) = 2e^{-2x} \cos 3x$	4.1	$e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$
4. Характеристичне рівняння має два спряжених комплексних корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $y'' + 6y' + 10y = f(x)$ - ЛНДР 2 порядку $k^2 + 6k + 10 = 0$ $D = 36 - 40 = -4, k_{1,2} = -3 \pm i$		
$-e^{-2x} \sin x$	5.1	$-2 \pm i \neq -3 \pm i$ $e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$
$-e^{-3x} \cos x$	6.1	$-3 \pm i \equiv -3 \pm i$ $xe^{-3x}(A \cos x + B \sin x)$
$e^{2x}(\cos 3x - 4 \sin 3x)$	5.1	$2 \pm 3i \neq -3 \pm i$ $e^x(A \cos x + B \sin x)$
$e^{-3x}(\cos x - 4 \sin x)$	6.1	$-3 \pm i \equiv -3 \pm i$ $xe^x(A \cos x + B \sin x)$

Висновки:

1. В першому випадку в таблиці, якщо корінь характеристичного рівняння співпав з коефіцієнтом в степені експоненти, «штатний» частинний розв'язок потрібно домножити на x .
2. В другому випадку в таблиці, якщо один корінь характеристичного рівняння нульовий, а інший співпав з коефіцієнтом в степені експоненти, «штатний» частинний розв'язок потрібно домножити на x .
3. В третьому випадку в таблиці, якщо два корені характеристичного рівняння кратні та співпали з коефіцієнтом в степені експоненти, «штатний» частинний розв'язок потрібно домножити на x двічі (домножити на x^2).
4. В четвертому випадку в таблиці, якщо два корені характеристичного рівняння комплексно спряжені, а їх дійсна та модуль уявної частини співпали з коефіцієнтом в степені експоненти та коефіцієнтом в аргументі відповідно, «штатний» частинний розв'язок потрібно домножити на x .

2.5 Неоднорідне диференціальне рівняння. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + q = f(x),$$

де права частина є довільною функцією. Тоді для розв'язання рівняння використовують, так званий, метод варіації довільних сталих, або метод Лагранжа. Суть методу Лагранжа полягає у тому, що загальний розв'язок рівняння треба шукати у формі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + q = 0$:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі,}$$

але замінивши константи невідомими функціями, залежними від x . Робимо заміну $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$. Тобто, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \quad (*)$$

Алгоритм знаходження функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ полягає в підстановці функції (*) та її першої і другої похідних в початкове рівняння та порівняння його лівої та правої частин, враховуючи лінійну незалежність функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$. В результаті отримуємо систему двох рівнянь, лінійних відносно $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Отримана система завжди має єдиний розв'язок, оскільки її визначник не дорівнює нулю, тому що є визначником Вронського двох лінійно незалежних функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$. Для розв'язання таких систем зручно користуватися методом Крамера. Загальні формули розв'язків матимуть вигляд:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}},$$

Тоді

$$C_1(x) = \int C_1'(x) dx,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x) dx.$$

Приклад 40. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

Розв'язання. Дане рівняння є ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок будемо шукати методом варіації довільних сталих

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad \text{де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y'' + 4y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 4 = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm 2i.$$

Згідно таблиці 1 пункту 3 отримаємо $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Шукатимемо тепер y .

Робимо заміну $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$. Тобто загальний розв'язок неоднорідного рівняння матиме в нашому випадку вигляд:

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Складаємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \frac{4}{\sin 2x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера.

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{0}{\sin 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{0 - \frac{4 \sin 2x}{\sin 2x}}{2(\cos 2x)^2 + 2(\sin 2x)^2} = -2,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \frac{0}{\sin 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4 \cos 2x}{\sin 2x} - 0}{2(\cos 2x)^2 + 2(\sin 2x)^2} = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x},$$

$$C_1(x) = \int -2 dx = -2x + \widetilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} dx = \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \ln \sin 2x + \widetilde{C}_2,$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = (-2x + \widetilde{C}_1) \cos 2x + (\ln \sin 2x + \widetilde{C}_2) \sin 2x.$$

Знайдемо похідну $y(x)$.

$$y'(x) = -2 \cos 2x - 2(-2x + \widetilde{C}_1) \sin 2x + \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} \sin 2x + 2(\ln \sin 2x + \widetilde{C}_2) \cos 2x.$$

Використаємо початкові умови для пошуку $\widetilde{C}_1$ та $\widetilde{C}_2$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{-2\pi}{4} + \widetilde{C}_1\right) \cos \frac{2\pi}{4} + (\ln(\sin \frac{2\pi}{4}) + \widetilde{C}_2) \sin \frac{2\pi}{4} = 2, \\ -2 \cos \frac{2\pi}{4} - 2\left(\frac{-2\pi}{4} + \widetilde{C}_1\right) \sin \frac{2\pi}{4} + 2 \cos \frac{2\pi}{4} + 2(\ln \sin \frac{2\pi}{4} + \widetilde{C}_2) \cos \frac{2\pi}{4} = \pi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{C}_2 = 2, \\ \pi + \widetilde{C}_1 = \pi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{C}_2 = 2, \\ \widetilde{C}_1 = 0. \end{cases}$$

Отже, $y(x) = -2x \cos 2x + (\ln \sin 2x + 2) \sin 2x$.

Відповідь: $y(x) = -2x \cos 2x + (\ln \sin 2x + 2) \sin 2x$.

Приклад 41. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 5 \ln 3.$$

Розв'язання. Дане рівняння є ЛНДР зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок будемо шукати методом варіації довільних сталих.

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Знайдемо спочатку y_0 , розв'язавши рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 3k + 2 = 0,$$

$$k_1 = 1, k_2 = 2.$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 отримаємо $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Шукатимемо тепер y . Робимо заміну $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$. Тобто, загальний розв'язок неоднорідного рівняння матиме в нашому випадку вигляд:

$$y_0 = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}.$$

Складаємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) e^x + 2C_2'(x) e^{2x} = \frac{1}{2 + e^{-x}}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера.

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \frac{1}{2+e^{-x}} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{0 - \frac{e^{2x}}{2+e^{-x}}}{2e^{3x} - e^{3x}} = \frac{-e^{-x}}{2+e^{-x}},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{1}{2+e^{-x}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{e^x}{2+e^{-x}} - 0}{2e^{3x} - e^{3x}} = \frac{e^{-2x}}{2+e^{-x}},$$

$$C_1(x) = \int \frac{-e^{-x}}{2+e^{-x}} dx = \int \frac{d(2+e^{-x})}{2+e^{-x}} + \widetilde{C}_1 = \ln|2 + e^{-x}| + \widetilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^{-2x}}{2+e^{-x}} dx = \int (1 - \frac{2}{2+e^{-x}}) d(e^{-x}) = -e^{-x} + 2\ln|2 + e^{-x}| + \widetilde{C}_2.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = (\ln|2 + e^{-x}| + \widetilde{C}_1) e^x + (-e^{-x} + 2\ln|2 + e^{-x}| + \widetilde{C}_2) e^{2x}.$$

Знайдемо похідну $y(x)$.

$$y'(x) = \left(\frac{-e^{-x}}{2+e^{-x}} \right) e^x + (\ln|2 + e^{-x}| + \widetilde{C}_1) e^x + \left(e^{-x} + 2 \frac{-e^{-x}}{2+e^{-x}} \right) e^{2x} + 2(-e^{-x} + 2\ln|2 + e^{-x}| + \widetilde{C}_2) e^{2x}.$$

Використаємо початкові умови для пошуку $\overline{C_1}$ та $\overline{C_2}$:

$$y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 5 \ln 3.$$

$$\begin{cases} (\ln|2 + e^0| + \widetilde{C_1})e^0 + (-e^0 + 2\ln|2 + e^0| + \widetilde{C_2})e^0 = 1 + 3 \ln 3, \\ \left(\frac{-e^0}{2 + e^0}\right)e^0 + (\ln|2 + e^0| + \widetilde{C_1})e^0 + \left(e^0 + \frac{-2e^0}{2 + e^0}\right)e^0 + 2(-e^0 + 2\ln|2 + e^0| + \widetilde{C_2})e^0 = 5 \ln 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln|3| + \widetilde{C_1} + -1 + 2\ln|3| + \widetilde{C_2} = 1 + 3 \ln 3, \\ \frac{-1}{3} + \ln|3| + \widetilde{C_1} + 1 + \frac{-2}{3} + 2(-1 + 2\ln|3| + \widetilde{C_2}) = 5 \ln 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \ln|3| + \widetilde{C_1} - 1 + \widetilde{C_2} = 1 + 3 \ln 3, \\ \widetilde{C_1} - 2 + 5\ln|3| + 2\widetilde{C_2} = 5 \ln 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{C_1} + \widetilde{C_2} = 2, \\ \widetilde{C_1} + 2\widetilde{C_2} = 2; \end{cases}$$

$$\widetilde{C_1} = 2, \quad \widetilde{C_2} = 0.$$

Отже,

$$y(x) = (\ln|2 + e^{-x}| + 2)e^x + (-e^{-x} + 2\ln|2 + e^{-x}|)e^{2x}.$$

Відповідь: $y(x) = (\ln|2 + e^{-x}| + 2)e^x + (-e^{-x} + 2\ln|2 + e^{-x}|)e^{2x}$

2.6 Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Система лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

має вигляд:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t), \\ y' = cx + dy + g(t), \end{cases}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ - невідомі функції, a, b, c, d - сталі коефіцієнти, $f(t), g(t)$ - деякі відомі диференційовані функції.

Якщо $f(t) = 0, g(t) = 0$, систему називають **однорідною**, а якщо хоча б одна з цих функцій ненульова, - **неоднорідною**.

Розв'язати систему таких рівнянь означає знайти такі функції $x = x(t, C_1, C_2)$ та $y = y(t, C_1, C_2)$, які б при підстановці в обидва рівняння системи

перетворили б їх на тотожності. Найпростіший метод розв'язування полягає у зведенні системи до одного лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку, використовуючи метод виключення однієї із невідомих функцій. Зручніше навести такий алгоритм на прикладі.

Приклад 42. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння системи по t

$$x'' = 2x' + 3y'.$$

Підставимо сюди $y' = x + 4y$:

$$x'' = 2x' + 3(x + 4y),$$

$$x'' = 2x' + 3x + 12y.$$

Виразимо з першого рівняння системи y та підставимо його в отримане рівняння

$$y = \frac{1}{3}(x' - 2x), \quad (*)$$

$$x'' = 2x' + 3x + 12 \cdot \frac{1}{3}(x' - 2x),$$

$$x'' = 2x' + 3x + 4x' - 8x,$$

$$x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Отримали ЛОДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 5 = 0, k_1 = 1, k_2 = 5.$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 загальний розв'язок запишеться

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Знайдемо $x'(t) = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}$.

Підставимо $x(t)$ та $x'(t)$ в (*).

$$y(t) = \frac{1}{3}(C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t})),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t}),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(-C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}),$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}C_1e^t + C_2e^{5t}.$$

Відповідь: $x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$.

$$y(t) = -\frac{1}{3}C_1e^t + C_2e^{5t}, C_1, C_2 - \text{деякі сталі.}$$

Приклад 43. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^2 - 1 \\ y' = -x + 3y - 4 \end{cases}, x(0) = \frac{37}{4}, y(0) = \frac{5}{4}$$

Розв'язання. Маємо систему неоднорідних лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння системи по t

$$x'' = -2x' + 4y' + 2t.$$

Підставимо сюди $y' = -x + 3y - 4$:

$$x'' = -2x' + 4(-x + 3y - 4) + 2t,$$

$$x'' = -2x' - 4x + 12y - 16 + 2t.$$

Виразимо з першого рівняння системи y та підставимо його в отримане рівняння

$$y = \frac{1}{4}(x' + 2x - t^2 + 1), \quad (*)$$

$$x'' = -2x' - 4x + 12 \cdot \frac{1}{4}(x' + 2x - t^2 + 1) - 16 + 2t,$$

$$x'' = -2x' - 4x + 3x' + 6x - 3t^2 + 3 - 16 + 2t,$$

$$x'' - x' - 2x = -3t^2 + 2t - 13. \quad (*)$$

Отримали ЛНДР 2 порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок будемо шукати у вигляді суми розв'язків відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$x(t) = x_o + x_{\text{ч}}.$$

Розв'яжемо спочатку відповідне ЛОДР

$$x'' - x' - 2x = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 - k - 2 = 0, k_1 = -1, k_2 = 2.$$

Згідно таблиці 1 пункту 1 загальний розв'язок запишеться

$$x_o(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Шукатимемо тепер y_q .

$f(x) = -3t^2 + 2t - 13 = P_2(x)$. Тоді $Q_2(x) = At^2 + Bt + C$. Згідно таблиці 2 пункту 1.1

$$x_q = At^2 + Bt + C.$$

Для визначення A , B та C скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Підставимо $x'_q = 2At + B$, $x''_q = 2A$ в (*)

$$2A - 2At - B - 2At^2 - 2Bt - 2C = -3t^2 + 2t - 13.$$

Прирівняємо коефіцієнти при t^2 , t та вільні коефіцієнти

$$t^2: -2A = -3, A = \frac{3}{2},$$

$$t: -2A - 2B = 2, B = \frac{-5}{2},$$

$$t^0: 2A - B - 2C = -13, C = \frac{37}{4},$$

$$\text{Отже, } x_q = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{37}{4}.$$

Маємо,

$$x(t) = x_o + x_q = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{37}{4}.$$

$$\text{Знайдемо } x'(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + 3t - \frac{5}{2}.$$

Підставимо $x(t)$ та $x'(t)$ в (*) та спростимо отриманий вираз

$$y = \frac{1}{4}(-C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + 3t - \frac{5}{2} + 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{37}{4}) - t^2 + 1),$$

$$y = -\frac{1}{4}C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}C_2 e^{2t} + \frac{3}{4}t - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}C_2 e^{2t} + \frac{3}{4}t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{37}{8} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4},$$

$$y = \frac{1}{4}C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + 4\frac{1}{4}.$$

Отже, система має загальний розв'язок

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{37}{4} \\ y(t) = \frac{1}{4}C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{17}{4} \end{cases}$$

Використаємо тепер умови $x(0) = \frac{37}{4}$, $y(0) = \frac{5}{4}$:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 - \frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{37}{4} = \frac{37}{4} \\ \frac{1}{4}C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{17}{4} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{37}{4} = \frac{37}{4} \\ \frac{1}{4}C_1 + C_2 + \frac{17}{4} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$C_1 = 4, C_2 = -4.$$

Остаточно,

$$\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} - 4e^{2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{37}{4} \\ y(t) = e^{-t} - 4e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{17}{4} \end{cases}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} - 4e^{2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{37}{4}, \\ y(t) = e^{-t} - 4e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{17}{4}. \end{cases}$

РОЗДІЛ III ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
ВАРІАНТ №1

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = e^{x+y};$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(x^2 + y^2)dx - yxdy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' + 2y' = x^3 \qquad \text{б) } y'' = \frac{y'}{\sqrt{y+1}}$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''' + 3y'' + 2y' = x^2 - x \qquad \text{б) } y'' - 3y' + 2y = 5 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x, \quad y(0) = -2, y'(0) = 0$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 1 - t^2 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №2

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{y} \cos\left(\frac{x}{2}\right);$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y y' = 2y - x;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + y \cos(x) = e^{-\sin(x)};$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos\left(\frac{2x}{y}\right)\right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos\left(\frac{2x}{y}\right) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (1 + x^2)y'' + (y')^2 - 1 = 0$$

$$\text{б) } y^4 - y^3 y'' = 1$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$$

$$\text{б) } y'' - y = 4 \cos x - \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 6y' + 25y = -24 \cos 4x + 9 \sin 4x, y(0) = 2, y'(0) = -2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №3

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xe^{-2y}dx - \sqrt{x^4 - 1}dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' \cos\left(\frac{y}{x}\right) = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + y \operatorname{tg}(x) = \sec(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = y^2 \ln(x), y(1) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' = y' \ln x \quad \text{б) } y'' + 2y(y')^3 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''' - y'' = 4 - x^2 \quad \text{б) } y'' + y = 6 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x, \quad y(0) = -2, y'(0) = 4$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t^2 - 1 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №4

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$ye^y dx = (y^3 + 2xe^y) dy;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' = (1 + 2x^2)y' \quad \text{б) } (y-1)^2 y'' - 2(y')^2 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } 3y''' - y'' = 5x \quad \text{б) } y'' + 9y = 3 \cos x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 4y + 4t \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + t^2 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №5

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(y^2 - 1)(x + 2)dx - x^2 y dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' - y \operatorname{ctg}(x) = 2x \sin(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2y' + 3y \cos(x) = e^{2x}(2 + 3 \cos(x))y^{-1}, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(y^2 + y \sec^2(x))dx + (2xy + \operatorname{tg}(x))dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' = -\frac{x}{y'} \qquad \text{б) } y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'''' - y'' = 6x + 5 \qquad \text{б) } y'' - 4y' + 8y = 2 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 3y' + 2y = -7 \cos x - \sin x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 7$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y + t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №6

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(y^2 \cos^3(x) - y^2) dy = -(1 + y^3) \sin(x) \cos^2(x) dx;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = y \ln \left(\frac{y}{x} \right);$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$\cos(y) dx + (x + 2 \cos(y)) \sin(y) dy = 0;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = 2x \quad \text{б) } y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 4y' + 5y = 2xe^x \quad \text{б) } y'' + 2y' + 8y = 8 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x, \quad y(0) = -2, y'(0) = -2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y + e^{3t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №7

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$e^{\sqrt{y}}y' - \sqrt{xy} = \sqrt{y};$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(y^2 - 3x^2)dy - 2xydx = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$(x^2 + 1)y' + 4xy = 3;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2y' + 3y \cos(x) = (8 + 12 \cos(x))e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''x \ln x = 2y' \quad \text{б) } (y'')^2 + (y')^2 = 1$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x \quad \text{б) } y'' - y = 2 \sin x - 3 \cos x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 2y' = 2e^x, y(0) = -1, y'(0) = 0$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №8

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(x + y)y - \sqrt{x^2 + 1}(y^3 - 1)y' = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(x + 2y)dx - xdy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' - y \operatorname{ctg}(x) = \sin(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + 2y \operatorname{cth}(x) = y^2 \operatorname{ch}(x), y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh}(1)};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' - y' = x^2 e^x \qquad \text{б) } y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x \qquad y'' + 2y' + 10y = 5 \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$2y'' - y' = 2x - 4, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,5$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4 \cos 2t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 5 \sin 2t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №9

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\operatorname{ctg}(y)dx - x\ln(x)dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(x - y)dx - (x + y)dy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$ydx - (3x + 1 + \ln(y))dy = 0;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(\sin(2x) - 2\cos(x + y))dx - 2\cos(x + y)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' = y' + x \qquad \text{б) } 2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } 2y'' - y' = x - 4 \qquad \text{б) } y'' + 2y' + y = 4\cos x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 3y' - 4y = 17\sin x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 10x - 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №10

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\sqrt{y}dx - \sqrt{x}tg(\sqrt{x})dy = -ydx;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' - \frac{3y}{x} = x;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 2 \operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x \quad \text{б) } yy'' - (y')^2 = y'$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y'' - 2y' = (x - 2)e^x \quad y'' + 4y' + 8y = 3 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}, y(1) = e^{-1}, y'(1) = 0$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 5y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №11

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$2x\sqrt{1+y^2}dx + e^{-x^2}dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$xy' + y = \ln(x) + 1;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 2;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dx - \left(\frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + 2y\right) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''x \ln x = y' \quad \text{б) } yy'' + (y')^2 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + y' = 3e^{-x} \quad \text{б) } y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$2y'' - y' - y = 1 - x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1,5$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -x + \sin t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №12

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\sin(x) dy - y \ln(y) dx = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' - y = xt g\left(\frac{y}{x}\right);$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x};$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (x - 3)y'' + y' = 0 \qquad \text{б) } yy'' = (y')^2$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - y' = 2(1 - x) \qquad \text{б) } y'' - 6y' + 25y = -24 \cos 4x + 9 \sin 4x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 3y' = \cos x + \sin x, \quad y(0) = 0,6, y'(0) = 0,2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №13

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$2x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}};$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + 2xy = xe^{-x^2};$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + y = xy^2, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{1 + xy}{x^2y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (1 - x^2)y'' - xy' = 2 \qquad \text{б) } y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^3 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - y' = 3xe^x \qquad \text{б) } y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - y = e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 1,5$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + 3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y - 1 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №14

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = y \cos \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) \right);$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2} dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } x^2 y'' + xy' = 1 \qquad \text{б) } yy'' - (y')^2 = y^2 y'$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - y = (2-x)e^x \qquad \text{б) } y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 4y' = 8, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №15

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$4^{x+4y} dy = x dx;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(y + \sqrt{xy}) dx = x dy;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + y = \cos(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' - y \tan(x) = -\left(\frac{2}{3}\right) y^4 \sin(x), y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' = y' \quad \text{б) } 1 + (y')^2 = 2yy''$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 2y' + 5y = xe^{2x} \quad \text{б) } y'' - 3y' + 2y = -7 \cos x - \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x \sin x, y(0) = 0, y'(0) = -1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №16

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\sqrt{\frac{1-y^3}{x}} dx + 3y^2 \cos^2(\sqrt{x}) dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + y = e^x;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' + y' = 0 \qquad \text{б) } yy'' + (y')^2 = 1$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''' + y'' = 6x^2 - 2x + 3 \qquad \text{б) } y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 4y' + 5y = 2xe^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y - 2e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 4y - 4e^{-t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №17

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$e^y(y' + 1) = 1;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y' = \frac{y}{x} - 1;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + y \cos(x) = \sin(2x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(10xy - \frac{1}{\sin(y)}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos(y)}{\sin^2(y)} - y^2 \sin(y^3)\right)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (x - 3)y'' + y' = 0 \qquad \text{б) } 2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'''' - 9y'' = 3x^2 - 1 \qquad \text{б) } y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, y(0) = 3, y'(0) = 9$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 5y + \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №18

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y'x + x + y = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + tg(x) = \cos^2(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2(xy' + y) = y^2 \ln(x), y(1) = 2;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' = 1 + \frac{x(y'-x)}{1-x^2} \qquad \text{б) } y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''' - 13y'' + 12y' = 2x - 1 \qquad \text{б) } y'' + 3y' = \cos x + \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x, y(0) = 2, y'(0) = 1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №19

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' \cos^2(e^x) + e^x y^3 = y e^x;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + \operatorname{tg}(x) = x \cos^2(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$e^y dx + (\cos(y) + x e^y) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''(e^x - 1) + y' = 0 \quad \text{б) } y y'' - y y' \ln y = 2e^{-y}$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y''' - 4y' = 16e^{2x} \quad y'' - 3y' + 2y = 2e^x \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 6y' + 9y = (1 - x)e^{-3x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - 5t + 1 \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + t + 1 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №20

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = 2\sqrt{y-1} \sin(x) + y' \sin^2(x);$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + 2y + e^x = x;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(y^3 + \cos(x))dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (1-x^2)y'' + 2xy' = 12x^3 \quad \text{б) } yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y''' - 3y'' + 2y' = xe^x \quad \text{б) } y'' + 4y = -8 \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 5y' + y = -5x^2 + 2x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 3y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y + 40e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + 9e^{-t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №21

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(1 + x^2)y^3 dx - (1 + y^2)x^3 dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$dy = (x^2 + 2x - 2y)dx;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$3(xy' + y) = y^2 \ln(x), y(1) = 3;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2(y)) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy'' + y' = \ln x \qquad \text{б) } y'y'' - \sqrt{1 + (y')^2} = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 4y' + 3y = e^{5x} \qquad \text{б) } y'' + y' = \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$2y'' - y' = x - 4, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 1 - t^2 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №22

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(4y + x^2y)y' = \sec(y^2) \arctg\left(\frac{x}{2}\right);$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' = \frac{1}{2x - y^2};$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

$$\text{б) } y + (y')^2 = y^2 \ln y$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + 6y' + 9y = (1 - x)e^{-3x}$$

$$\text{б) } y'' + 9y = -4 \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 5y' + 4y = 4xe^{2x}, \quad y(0) = -2, y'(0) = -1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №23

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' \sin(x) = y \ln(y);$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' + y \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) - 1 \right) = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = 2y^2 \ln(x), y(1) = \frac{1}{2};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(\cos(x + y^2) + \sin(x))dx + 2y \cos(x + y^2) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' = \frac{y'}{x} + x \qquad \text{б) } 2yy'' = (y')^2$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + 3y' + 2y = (12x^2 + 2x)e^{2x} \qquad \text{б) } y'' + 25y = \sin 5x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 4y + 4t \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + t^2 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №24

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\sec^2(x) \operatorname{tg}(y) dx + \sec^2(y) \operatorname{tg}(x) dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y'(1 + x^2) - xy = \sqrt{1 + x^2};$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2y' + y \cos(x) = y^{-1} \cos(x) (1 + \sin(x)), y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + \frac{y'}{x} = x^2 \quad \text{б) } y'(1 + (y')^2) = y''$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 5y' + 4y = 4xe^{2x} \quad \text{б) } y'' - 2y' + 5y = 6 \cos x + 18 \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + y = 3e^{-x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t^2 - 1 \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №25

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy^3 dx + (x^2 - 1)(y^2 + 1)dy = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' - y \sin(x) = \sin(x) \cos(x);$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$xy' - y = -y^2(\ln(x) + 2) \ln(x), y(1) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(\sin(y) + y \sin(y) + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos(y) - \cos(x) + \frac{1}{y}\right) dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 2y' \operatorname{tg} x = \sin x \quad \text{б) } 2yy'' = y^2 + (y')^2$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \quad \text{б) } y'' - 2y' - 3y = 20e^{-x} \cos 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x}, y(0) = 2, y'(0) = 3$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y + e^{3t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №26

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(y + e^x y)y' + \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2};$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(x + 2y)dx + xdy = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$ydx - (x - y^2 \sin(y))dy = 0;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\left(1 + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'} \quad \text{б) } y^3 y'' = -1$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x} \quad \text{б) } y'' + 2y' + 2y = 8e^x \cos x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x}, y(0) = 2, y'(0) = 1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №27

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy - (x^2 + 1)y' = 0;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + 2xy = x^2 e^{-x^2};$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' \operatorname{tg} x = y' + 1 \qquad \text{б) } 2yy'' - (y')^2 = 1$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + 2y' + y = 2e^{-2x} \qquad \text{б) } y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \cos 2x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = -2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4 \cos 2t \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 5 \sin 2t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №28

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + \frac{y}{x} = x^2;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$2y' + 3y \cos(x) = -e^{-2x}(2 + 3 \cos(x))y^{-1}, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1) \quad \text{б) } (y' + 2y)y'' = (y')^2$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + y = 5e^x \quad \text{б) } y'' - 2y' + 2y = 8e^x(\cos x - \sin x)$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + y = 5e^x, \quad y(0) = 3, y'(0) = -2$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 10x - 4y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №29

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(y + 4x^2y)y' = y^2 - 4;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$y' + \frac{1}{x + y^2} = 0;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2};$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + y' = \operatorname{ch} x \quad \text{б) } (2y + 3)y'' - 2(y')^2 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + 4y = 8e^{-2x} \quad \text{б) } y'' + 4y' + 5y = -40e^{2x} \sin x$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' - y = (2 - x)e^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 5y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВАРІАНТ №30

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx;$$

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$xy' + x \cos\left(\frac{y}{x}\right) - y + x = 0;$$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння двома способами:

- а) методом Бернуллі; б) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

$$dy = (x^2 + 2x - 2y)dx;$$

4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' - y = xy^2, y(0) = 1;$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

$$xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0;$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x \quad \text{б) } yy'' - (y')^2 = y'$$

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 6y' + 9y = (16x - 7)e^{-x} \quad \text{б) } y'' + 6y' + 9y = 5e^{-3x}(\sin x + \cos x)$$

8. Розв'язати задачу Коші двома способами:

- а) методом невизначених коефіцієнтів; б) методом варіації довільних сталих

$$y'' + 4y = 8e^{-2x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$$

9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -x + \sin t \end{cases}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Збірник задач -К.: А.С.К.: 2001.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Навчальний посібник-К.: А.С.К., 2005.
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994.
4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.
5. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN: 966-575-055-0.
6. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2003. — 792 с. — ISBN: 966-575-153-0.