

## ДИНАМІЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ СКЛЕСНИХ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

### Вступ

З'єднання елементів конструкцій (оболонок, пластин, балок) у більш складну механічну систему за допомогою клеїв широко застосовується в техніці (літакобудуванні, суднобудуванні, автомобілебудуванні тощо). Склеювання, як особливий технологічний процес, дозволяє порівняно швидко з'єднувати деталі, має переваги перед іншими методами (зварюванням, склепкою).

Досліджувана механічна система являє собою двошарову циліндричну оболонку з клеєвим прошарком (КП) між її поверхнями, яка деформується під дією гармонічного навантаження. Розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) склеєних елементів конструкцій виконано переважно у статичній постановці [1–4] із застосуванням наближених теоретичних методів, які пов'язані з використанням рівнянь рівноваги, граничних, кінематичних та силових умов спряження. Значно менше досліджень пов'язано з аналізом динамічного деформування, при цьому у більшості випадків вони стосувались особливих випадків склеювання (в „нахльст”, з'єднання окремих ділянок поверхонь) [1, 3, 4]. В даній роботі для розв'язування відповідних задач динаміки склеєних елементів типу оболонок, пластин, балок використовується інтегральний підхід, запропонований Я. Ф. Каюком, який базується на застосуванні принципу Даламбера–Лагранжа і дозволяє дослідити НДС системи у довільній її точці, зокрема й у КП. Зазначений метод дослідження балок викладено й обґрунтовано в роботах [5, 6]. Метою роботи є побудова математичної моделі динамічного деформування склеєних по всій поверхні контакту елементів конструкцій типу двошарових циліндричних оболонок, пластин, балок під дією гармонічних навантажень.

### Постановка задачі

Механічним об'єктом досліджень є двошарова кругова замкнена циліндрична оболонка довжини  $L$ , шари якої склеєні по усій поверхні контакту. Складові оболонки (зовнішня – 1, внутрішня – 2) розглядаються як просторові тіла, клеєвий прошарок вважається затверділим просторовим тілом. Товщини оболонок 1, 2 та КП –  $2h_1, 2h_2, 2h_3$  – сталі величини, причому  $h_1, h_2, \gg h_3$ ; матеріали складових систем – однорідні, ізотропні;

область склеювання монолітна;  $\pi_1, \pi_2, \pi_k$  – відповідні серединні поверхні з радіусами  $R^{(1)} = R + h_1 + h_3$ ,  $R^{(2)} = R - (h_1 + h_3)$ ,  $R$ ;  $E_\alpha, \nu_\alpha, \rho^{(\alpha)}, E_k, \nu_k, \rho^k$  – механічні характеристики. Надалі індекс „ $k$ ” відноситься до величин у КП, а індекс „ $\alpha$ ” – до оболонок ( $\alpha = 1, 2$ ) (рис. 1). Положення довільної точки склеєної оболонки визначаємо у циліндричній системі координат  $(x, \varphi, z)$  з початком у довільній точці на серединній поверхні  $\pi_k$  (вісь  $Oz$  направлена по товщині оболонки перпендикулярно до  $\pi_k$  у вибраній точці).

Окрім інерціальної системи координат  $Ox, \varphi, z$ , вводиться локальна система координат для кожної складової: оболонки 1 –  $O_1x, \varphi, z_1$  ( $-h_1 \leq z_1 \leq h_1$ ); оболонки 2 –  $O_2x, \varphi, z_2$  ( $-h_2 \leq z_2 \leq h_2$ ); КП –  $Ox\varphi z$  ( $-h_3 \leq z \leq h_3$ ); додатні напрямки осей  $O_1z_1, O_2z_2, O_3z$  збігаються з додатним напрямом осі  $Oz$ .

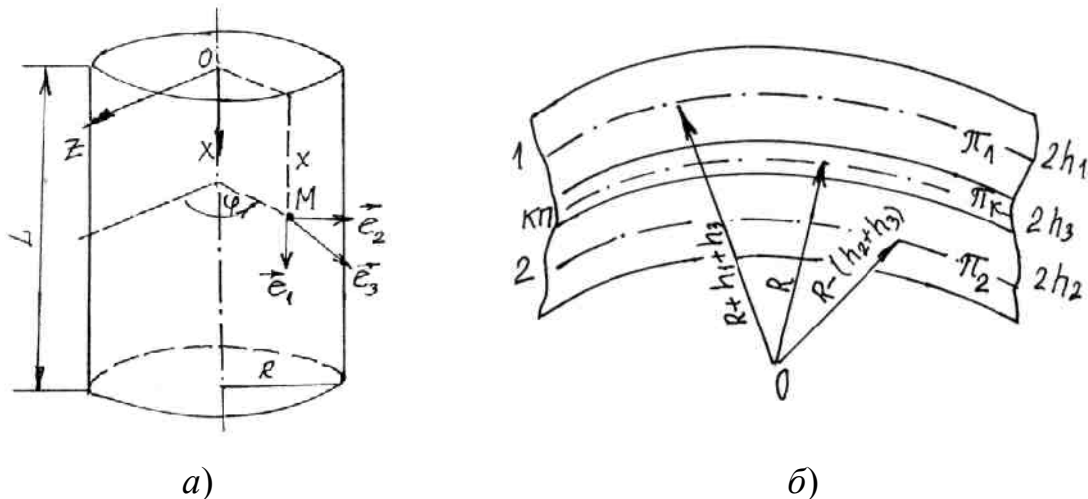


Рис. 1. Схема склеєної оболонки: а) вибір системи координат; б) складові склеєної оболонки

Склеєна оболонка деформується під дією гармонічних навантажень, прикладених до поверхонь  $z_1 = h_1$  та  $z_2 = -h_2$ , вектори інтенсивності яких позначаємо через  $\vec{q}_1$  і  $\vec{q}_2$  відповідно. Слід очікувати, що в процесі динамічного деформування зазначені вище просторові тіла здатні проявляти найбільшу жорсткість на стиск (розтяг) та поздовжній зсув. Отже формулюємо наступні припущення: а) для оболонок 1, 2 має місце гіпотеза Кірхгофа–Лява, б) у КП  $\gamma_{z1}^k = 2\varepsilon_{z1}^k, \gamma_{z2}^k = 2\varepsilon_{z2}^k$  не змінюються по товщині, в) напруження  $\sigma_{11}^k, \sigma_{22}^k$  істотно менші за інші напруження у КП, г) поперечні переміщення  $W^k$  точок КП змінюються по координаті  $z$  за законом квадратної параболи, д) для усіх тіл використовуємо формули лінійної просторової теорії пружності.

## Характеристики напружено-деформованого стану оболонок і клеєвого прошарку

Позначимо через  $\vec{U}^{(\alpha)}(x_\alpha, \varphi, z_\alpha, t)$ ,  $\vec{U}^k(x, \varphi, z, t)$  вектори переміщень точок оболонок 1, 2 та КП з компонентами  $U^{(\alpha)}(x_\alpha, \varphi, z_\alpha, t)$ ,  $V^{(\alpha)}(x_\alpha, \varphi, z_\alpha, t)$ ,  $W_\alpha(x_\alpha, \varphi, z_\alpha, t)$ ,  $U^k(x, \varphi, z, t)$ ,  $V^k(x, \varphi, z, t)$ ,  $W^k(x, \varphi, z, t)$  відповідно. Компоненти векторів переміщення  $\vec{U}^{(\alpha)}$  точок серединних поверхонь  $\pi_\alpha$  позначаємо через  $u^{(\alpha)}(x, \varphi, t)$ ,  $v^{(\alpha)}(x, \varphi, t)$ ,  $w_\alpha(x, \varphi, t)$ , ( $\alpha=1, 2$ ) і  $\vec{U}^k$  з компонентами  $u_k(x, \varphi, t)$ ,  $v_k(x, \varphi, t)$ ,  $w_{k0}(x, \varphi, t)$  на поверхні  $\pi_k$ . Зазначимо, що  $x_\alpha = x$ ,  $z_1 = z - h_1 - h_3$ ,  $z_2 = z + h_2 + h_3$ .

Мають місце наступні кінематичні умови спряження:

$$\begin{aligned} \vec{U}^{(1)}(x, \varphi, z_1, t) \Big|_{z_1=-h_1} &= \vec{U}^k(x, \varphi, z, t) \Big|_{z=h_3}, \\ \vec{U}^{(2)}(x, \varphi, z_2, t) \Big|_{z_2=h_2} &= \vec{U}^k(x, \varphi, z, t) \Big|_{z=-h_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Згідно з припущеннями а) та г) покладемо

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(x, \varphi, z_\alpha, t) &= u^{(\alpha)}(x, \varphi, t) + z_\alpha \mathfrak{G}_1^{(\alpha)}(x, \varphi, t), \\ V^{(\alpha)}(x, \varphi, z_\alpha, t) &= v^{(\alpha)}(x, \varphi, t) + z_\alpha \mathfrak{G}_2^{(\alpha)}(x, \varphi, t), \\ W_\alpha(x, \varphi, z_\alpha, t) &= w_\alpha(x, \varphi, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$W^k(x, \varphi, z, t) = w_{k0}(x, \varphi, t) + a_1(x, \varphi, t)z + a_2(x, \varphi, t)z^2, \quad (3)$$

$$\text{де } \mathfrak{G}_1^{(\alpha)} = -\frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \mathfrak{G}_2^{(\alpha)} = -\frac{1}{A^{(\alpha)}} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + k^{(\alpha)} v^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} = R^\alpha, \quad k^{(\alpha)} = \frac{1}{A^{(\alpha)}}.$$

Тут  $a_i(x, \varphi, t)$  ( $i=1, 2$ ) – довільні функції, які визначаємо, використовуючи кінематичні умови (1). Таким чином, закон розподілу по товщині поперечних переміщень точок КП має вигляд:

$$\begin{aligned} W^k(x, \varphi, z, t) &= w_{k0}(x, \varphi, t) + \frac{1}{2h_3} [w_1(x, \varphi, t)z - w_2(x, \varphi, t)]z + \\ &+ \frac{1}{2h_3^2} [w_1(x, \varphi, t)z + w_2(x, \varphi, t) - 2w_{k0}(x, \varphi, t)]z^2. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (2), (4)  $u^{(\alpha)}(x, \varphi, t)$ ,  $v^{(\alpha)}(x, \varphi, t)$ ,  $w_\alpha(x, \varphi, t)$ ,  $w_{k0}(x, \varphi, t)$  – невідомі функції. Надалі для скорочення запису не будемо зазначати від яких аргументів залежать ці функції. Для обчислення інших компонент вектора переміщень точок КП  $U^k(x, \varphi, z, t)$ ,  $V^k(x, \varphi, z, t)$ , компонентів

поперечного зсуву  $\gamma_{z1}^k, \gamma_{z2}^k$  використовуємо формули лінійної просторової теорії пружності, враховуємо припущення б), факт малості товщини КП та умови кінематичного спряження (1). Після громіздких обчислень одержуємо закон розподілу по товщині тангенціальних переміщень точок КП  $U^k(x, \varphi, z, t), V^k(x, \varphi, z, t)$ , а також формули для визначення поперечних зсувів  $\gamma_{z1}^k, \gamma_{z2}^k$ .

Маємо

$$U^k(x, \varphi, z, t) = \frac{1}{2} \left[ u^{(1)} + u^{(2)} + \left( h_1 + \frac{1}{2} h_3 \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} - \left( h_2 + \frac{1}{2} h_3 \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} \right] + \frac{1}{2h_3} \left[ u^{(1)} - u^{(2)} + \left( h_1 + \frac{1}{3} h_3 \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left( h_2 + \frac{1}{3} h_3 \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{4}{3} h_3 \frac{\partial w_{k0}}{\partial x} \right] z - \frac{1}{4h_3} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) z^2 - \frac{1}{6h_3^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} - 2 \frac{\partial w_{k0}}{\partial x} \right) z^3; \quad (5)$$

$$V^k(x, \varphi, z, t) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{h_1}{A^{(1)}} \right) v^{(1)} + \left( 1 + \frac{h_2}{A^{(2)}} \right) v^{(2)} + \left( \frac{h_1}{A^{(1)}} + \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} - \left( \frac{h_2}{A^{(2)}} + \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2h_3} \left[ \left( 1 - \frac{h_1}{A^{(1)}} \right) v^{(1)} - \left( 1 + \frac{h_2}{A^{(2)}} \right) v^{(2)} + \left( \frac{h_1}{A^{(1)}} + \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \left( \frac{h_2}{A^{(2)}} - \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + \frac{4}{3} \frac{h_3}{A} \frac{\partial w_{k0}}{\partial \varphi} \right] z - \frac{1}{4h_3 A} \left( \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} \right) z^2 + \frac{1}{6h_3^2 A} \left( \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} - 2 \frac{\partial w_{k0}}{\partial \varphi} \right) z^3; \quad (6)$$

$$\gamma_{z1}^k(x, \varphi, t) = \frac{1}{2h_3} \left[ u^{(1)} - u^{(2)} + \left( h_1 + \frac{1}{3} h_3 \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left( h_2 + \frac{1}{3} h_3 \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{4}{3} h_3 \frac{\partial w_{k0}}{\partial x} \right]; \quad (7)$$

$$\gamma_{z2}^k(x, \varphi, t) = \frac{1}{2h_3} \left[ \left( 1 - \frac{h_1}{A^{(1)}} \right) v^{(1)} - \left( 1 + \frac{h_2}{A^{(2)}} \right) v^{(2)} + \left( \frac{h_1}{A^{(1)}} + \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \left( \frac{h_2}{A^{(2)}} + \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + \frac{4}{3} \frac{h_3}{A} \frac{\partial w_{k0}}{\partial \varphi} \right]. \quad (8)$$

Напружений стан у КП визначаємо за формулами

$$\sigma_{zz}^k = E_k \frac{\partial W^k}{\partial z}, \quad \sigma_{\alpha z}^k = G_k \gamma_{\alpha z}^k, (\alpha = 1, 2), \quad \sigma_{12}^k = G_k \left( \frac{\partial U^k}{\partial \varphi} + \frac{\partial V^k}{\partial x} \right). \quad (9)$$

З урахуванням співвідношень(4)–(8) маємо

$$\sigma_{zz}^k = \frac{E_k}{2h_3} \left[ w_1 - w_2 + \frac{2z}{h_3} (w_1 + w_2 - 2w_{k0}) \right]; \quad (10)$$

$$\sigma_{1z}^k = \frac{G_k}{2h_3} \left[ u^{(1)} - u^{(2)} + \left( h_1 + \frac{1}{3} h_3 \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left( h_2 + \frac{1}{3} h_3 \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{4}{3} h_3 \frac{\partial w_{k0}}{\partial x} \right]; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2z}^k = & \frac{G_k}{2h_3} \left[ \left( 1 - \frac{h_1}{A^{(1)}} \right) v^{(1)} - \left( 1 + \frac{h_2}{A^{(2)}} \right) v^{(2)} + \left( \frac{h_1}{A^{(1)}} + \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{h_2}{A^{(2)}} - \frac{1}{3} \frac{h_3}{A} \right) \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + \frac{4}{3} \frac{h_3}{A} \frac{\partial w_{k0}}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Напруження в оболонках 1, 2 визначимо, якщо попередньо обчислимо напружено-деформований стан у точках серединних поверхонь  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , який описується інтегральними характеристиками, тобто зусиллями та моментами. Використовуємо формули з теорії оболонок:

$$T_{11}^{(\alpha)} = B^{(\alpha)} (\varepsilon_{11}^{(\alpha)} + \nu_\alpha \varepsilon_{22}^{(\alpha)}), \quad T_{22}^{(\alpha)} = B^{(\alpha)} (\varepsilon_{22}^{(\alpha)} + \nu_\alpha \varepsilon_{11}^{(\alpha)}), \quad T_{12}^{(\alpha)} = G^{(\alpha)} \varepsilon_{12}^{(\alpha)}, \quad (13)$$

$$M_{11}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)} (\chi_{11}^{(\alpha)} + \nu_\alpha \chi_{22}^{(\alpha)}), \quad M_{22}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)} (\chi_{22}^{(\alpha)} + \nu_\alpha \chi_{11}^{(\alpha)}), \quad (14)$$

$$M_{12}^{(\alpha)} = (1 - \nu_\alpha) D^{(\alpha)} \chi_{12}^{(\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2).$$

Тут величини  $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ ,  $\chi_{ij}^{(\alpha)}$  дорівнюють

$$\varepsilon_{11}^{(\alpha)} = \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^{(\alpha)} = \frac{1}{A^{(\alpha)}} \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{A^{(\alpha)}} w_\alpha, \quad \varepsilon_{12}^{(\alpha)} = \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x} + \frac{1}{A^{(\alpha)}} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \varphi}, \quad (15)$$

$$\chi_{11}^{(\alpha)} = \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial x^2}, \quad \chi_{22}^{(\alpha)} = \frac{1}{[A^{(2)}]^2} \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{[A^{(2)}]^2} \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial \varphi^2}, \quad (16)$$

$$\chi_{12}^{(\alpha)} = \frac{1}{A^{(\alpha)}} \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x} - \frac{1}{A^{(\alpha)}} \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial x \partial \varphi},$$

де  $B^{(\alpha)} = \frac{2E_\alpha h_\alpha}{1 - \nu_\alpha^2}$ ,  $G^{(\alpha)} = \frac{E_\alpha h_\alpha}{1 + \nu_\alpha}$ ,  $D^{(\alpha)} = \frac{2}{3} \frac{E_\alpha h_\alpha^3}{1 - \nu_\alpha^2}$  – відповідно жорсткість

на розтяг, зсув та згин поверхонь  $\pi_\alpha$ .

На основі аналізу отриманих формул для розрахунку НДС у довільній точці склеєної оболонки необхідно визначити 9 невідомих функцій  $u^{(\alpha)}(x, \varphi, t)$ ,  $v^{(\alpha)}(x, \varphi, t)$ ,  $w_\alpha(x, \varphi, t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) та  $u^k(x, \varphi, t)$ ,  $v^k(x, \varphi, t)$ ,  $w_{k0}(x, \varphi, t)$ . Вони будуть у подальшому визначені з урахуванням умови силового контакту КП з оболонками, які мають вигляд

$$\sigma_{3i}^{(1)} \Big|_{z_1=-h_1} = \sigma_{3i}^k \Big|_{z=h_3}, \quad \sigma_{3i}^{(2)} \Big|_{z_2=h_2} = \sigma_{3i}^k \Big|_{z=-h_3} \quad (i=1, 2, 3). \quad (17)$$

### Метод розв'язування

Використовуючи аксіому про звільнення від в'язей, розділимо уявно склеєну оболонку на три складові: оболонки 1, 2 та КП. Сили, які діятимуть на кожну з оболонок, замінюємо відповідними дотичними і нормальними напруженнями. Для кожної із складових можна записати рівняння руху з урахуванням умов силового контакту і розв'язувати відповідні задачі динамічного деформування.

Пропонується простіший наближений метод, який базується на застосуванні до кожної оболонки варіаційного принципу Даламбера–Лагранжа. При цьому не потрібно розв'язувати рівняння руху. На основі цього принципу маємо фундаментальну рівність:

$$\delta A^e = \delta A^i,$$

$\delta A^e$  – елементарна робота усіх зовнішніх сил на можливих допустимих переміщеннях у довільний момент часу,  $\delta A^i$  – елементарна робота внутрішніх сил на тих же переміщеннях. В результаті виконання громіздких обчислень сформульовано варіаційні співвідношення для кожної оболонки та КП. Для спрощення запису припускалось, що краї оболонок вільні від силових і моментних навантажень і масові сили дорівнюють нулеві.

Наприклад, для оболонки 1 варіаційне співвідношення у скалярній формі після переходу від кутової координати  $\varphi$  до дугової координати  $S$  одержимо

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^{2\pi R^{(1)}} \left[ T_{11}^{(1)} \delta \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) + T_{21}^{(1)} \delta \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial S} \right) + T_{12}^{(1)} \delta \left( \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) + T_{22}^{(1)} \delta \left( \frac{\partial v^{(1)}}{\partial S} \right) - \right. \\ & - k^{(1)} \left( \frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial S} - k^{(1)} m_2^{(1)} \right) \delta v^{(1)} + \left( \frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial S} - k^{(1)} m_1^{(1)} \right) \delta \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ & \left. + k^{(1)} T_{22}^{(1)} \delta w_1 + \left( \frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^{(1)}}{\partial S} - k^{(1)} m_2^{(1)} \right) \delta \left( \frac{\partial w_1}{\partial S} \right) \right] dx dS = \\ & = \int_0^L \int_0^{2\pi R^{(1)}} \left[ \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{11}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{31}^k \Big|_{z=h_3} - 2h_1 \rho^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \right] \delta u^{(1)} dx dS + \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^L \int_0^{2\pi R^{(1)}} \left[ \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{12}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{32}^k \Big|_{z=h_3} - 2h_1 \rho^{(1)} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} \right] \delta v^{(1)} dx dS + \\
& + \int_0^L \int_0^{2\pi R^{(1)}} \left[ -\zeta(h_1, k^{(1)}) q_{13}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{33}^k \Big|_{z=h_3} - 2h_1 \rho^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right] \delta w_1 dx dS.
\end{aligned}$$

Позначення:

$$\zeta(z, k^{(1)}) = 1 + zk^{(1)};$$

$\vec{T}_1^{(1)}, \vec{T}_2^{(1)}$  – вектори зусиль в оболонці,

$\vec{M}_1^{(1)}, \vec{M}_2^{(1)}$  – моменти,

$\vec{q}_1^+ = \vec{q}_1^+(q_{11}^+, q_{12}^+, q_{13}^+)$  – вектор інтенсивності навантаження на верхню оболонку,

$$\begin{aligned}
m_1^{(1)} &= - \left[ \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{11}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{31}^k \Big|_{z=h_3} \right] h_1, \\
m_2^{(1)} &= \left[ \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{12}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{32}^k \Big|_{z=h_3} \right] h_1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогічне співвідношення встановлюємо і для оболонки 2. Дещо іншої структури варіаційне співвідношення для КП. Враховуючи малість товщини КП, вважаємо його наближено двовимірним тілом, де за міру напруженого стану вибираються вже інтегральні силові характеристики – зусилля і моменти.

Якщо у варіаційних співвідношеннях для обох оболонок і КП усі величини записати через переміщення за уже виписаними формулами, то встановлюємо, що вони взаємопов'язані і містять 9 невідомих функцій – компонентів векторів переміщень. Для їх визначення кожному з них представляємо у вигляді рядів по координатним функціям з відповідними амплітудними коефіцієнтами, які підлягають визначенню.

Підібравши координатні функції, які задовольняють граничні умови, відомою процедурою з варіаційних співвідношень для обох оболонок і КП отримуємо систему із 9 звичайних диференціальних рівнянь для визначення 9 амплітудних коефіцієнтів розкладів. Таким чином, можна визначити усі деформаційні та силові характеристики досліджуваної склеєної циліндричної оболонки у будь-який момент часу з урахуванням геометричних, фізико-механічних параметрів складових системи та типу навантаження.

На прикладі співвідношення (18) для оболонки 1 покажемо як із нього можна одержати рівняння руху. Звернімось до підінтегрального

виразу у лівій частині формули (18) і до кожного доданку застосуємо перетворення

$$T_{11}^{(1)} \delta \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x} \delta u^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{11}^{(1)} \delta u^{(1)} \right). \quad (20)$$

Якщо згрупувати окремо усі перші і другі доданки формули (20), а потім до останніх застосувати формулу Гріна, то зі співвідношення (18) одержимо рівняння руху та природні граничні умови, а саме [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial S} + \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{11}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{31}^k \Big|_{z=h_3} - 2h_1 \rho^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial S} + k^{(1)} \left( \frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^{(1)}}{\partial S} - k^{(1)} m_2^{(1)} \right) + \\ + \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{12}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{32}^k \Big|_{z=h_3} - 2h_1 \rho^{(1)} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_{11}^{(1)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(1)}}{\partial x \partial S} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(1)}}{\partial S^2} - k^{(1)} \left( \frac{\partial m_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial m_2^{(1)}}{\partial S} + T_{22}^{(1)} \right) \\ - \zeta(h_1, k^{(1)}) q_{13}^+ - \zeta(-h_1, k^{(1)}) \sigma_{33}^k \Big|_{z=h_3} - 2h_1 \rho^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

За допомогою заміни  $x = x$ ,  $S \rightarrow y$ ,  $2\pi R^{(1)} \rightarrow b$ ,  $R \rightarrow \infty$ ,  $k^{(1)} = 0$ ,  $\zeta(z, k^{(1)}) \rightarrow 1$  отримуємо рівняння руху прямокутної пластини. Якщо із пластини (1) виділити балку–смужку і припустити, що геометричні, силові і моментні характеристики не залежать від координати  $y$ , то маємо випадок деформування балки з прямолінійною віссю, а саме згину у строго вертикальній площині і осьового розтягу.

Ефективність запропонованого підходу показано на прикладі розв'язання задачі про динамічне деформування склеєних балок.

### **Аналіз напружень і деформацій балок при гармонічному навантаженні**

Чисельний розв'язок проведено на прикладі двох склеєних металевих балок (алюміній–залізо) під дією гармонічного навантаження на верхню балку. Розв'язано задачі для склеєної балки, жорстко закріпленої з двох боків і з одним закріпленням, а другим вільним кінцем. Система координатних функцій знаходилась із розв'язку задачі про одну балку при заданих граничних умовах. Ця система повна, ортогональна, замкнена. Після підстановки апроксимацій компонент векторів переміщень рядами



по координатним функціям з амплітудними коефіцієнтами, що залежать від часу, в інтегральні співвідношення, які впливають з принципу Даламбера-Лагранжа, отримали три системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних коефіцієнтів. Задачу Коші для даної системи розв'язано методом Дормана-Прінса зі змінним кроком інтегрування. Визначено напруження і деформації у довільних точках балок і клейового прошарку. Показано, що амплітуди коливань напружень розтягу і стиску на поверхні клейового прошарку, що межує з балкою, на яку діє навантаження, суттєво більші від відповідних величин на іншій поверхні. Амплітуди коливань дотичних напружень суттєво нижчі за амплітуди коливань розтягу і стиску. У випадку склеєної балки, жорстко закріпленої з обох боків, і балки з одним вільним кінцем помітно суттєве зменшення амплітуд напружень в першому випадку. Біля закріплених кінців коливання напружень майже відсутнє.

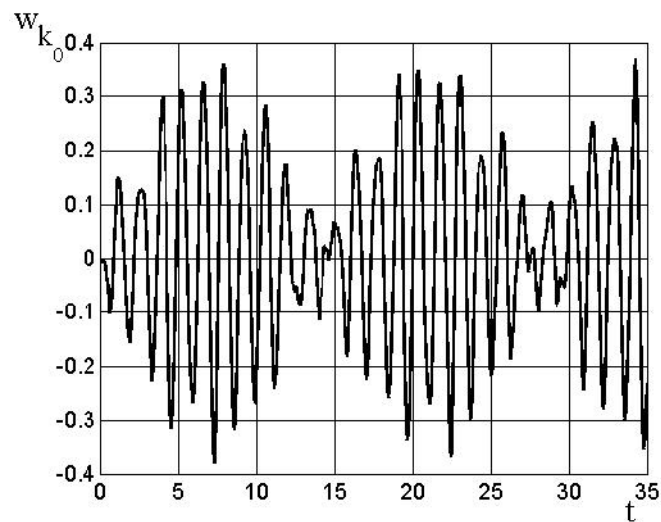


Рис. 2. Поперечні переміщення центра середньої поверхні клейового прошарку

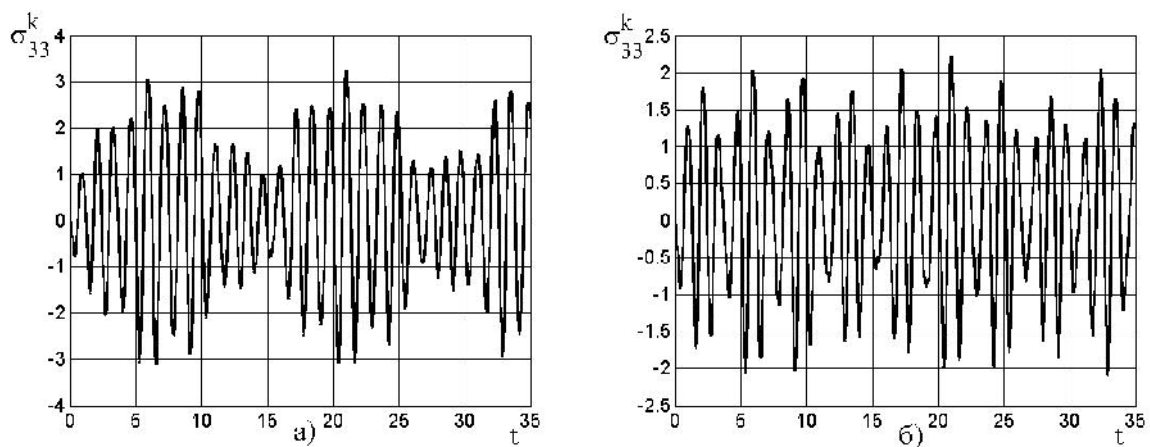


Рис. 3. Напруження стиску центра середньої поверхні клейового прошарку

На рис. 2 зображено поперечні переміщення центра серединної поверхні КП в часі для одного вільного і одного закріпленого кінців балки. На рис. 3 вказано залежність напружень від часу в центрі серединної поверхні КП: а) для одного вільного і одного закріпленого кінців; б) для обох закріплених кінців.

## Висновки

Побудовано математичну модель динамічного деформування склеєних елементів конструкцій типу двошарових циліндричних оболонок, пластин та балок на основі варіаційного принципу Даламбера-Лагранжа, який розповсюджено на механіку суцільного середовища. Запропонований підхід дає можливість враховувати малість товщини клеєвого прошарку і визначати характеристики напружено-деформованого стану в довільній точці і в довільний момент часу для конструктивних елементів під дією неперервних навантажень.

## Список використаної літератури

1. *Артюхин Ю. П.* Напряжения в клеевых соединениях // Ю. П. Артюхин / Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. научн. тр. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та., 1973. – С.3–27.
2. *Пискунов В. Г.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов / Прикл. механика. – 2002. – 38. №2. – С.22–57.
3. *Пейтон Р.* Динамические напряжения на склейке в составном стержне при внезапном приложении давления. // Р. Пейтон / Прикл. механика. Тр. амер. общества инж. механиков. – 1965. – 3 –С.190–198.
4. *Рябенков Н. Г.* К расчету клеевых соединений оболочек // Н. Г. Рябенков/ Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. научн. тр. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та., 1976. – С.104–111.
5. *Каюк Ya. F.* Refined Equations in dynamic Problem for Glued Beams // Ya. F. Каюк / Int. Appl. Mech. – 2010. – 46. №7 – P. 812–826.
6. *Каюк Я. Ф.* Деформирование склеенных балок при действии гармонического нагружения // Я. Ф. Каюк, Н. Е. Ткаченко, М. К. Шекера / Прикл. механика. – 2011. – 47. №5. –С.128–137.
7. *Эпштейн Г.* Склеивание металлов // Г. Эпштейн /– М.: Оборонгиз. – 1956. – 211 с.