



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

Електродинаміка

Навчальний посібник

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою
програмою «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів»
спеціальності 104 «Фізика та астрономія»*

Укладач:

С.О. Решетняк

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Савченко Д.В.*, д-р. фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Відповідальний редактор *Лінчевський І.В.*, доктор фізико-математичних наук, професор.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 27.01.2022 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 01 від 18.01.2022 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Укладач:

Решетняк Сергій Олександрович, д-р. фіз.-мат. наук

ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА Електродинаміка

Решетняк С. О. Теоретична фізика. Електродинаміка [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» / С. О. Решетняк. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,7 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 196 с.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал з дисципліни «Теоретична фізика. Електродинаміка». Метою посібника є ознайомлення студентів з загальними принципами і методами електродинаміки. Викладання матеріалу базується на класичному курсі теоретичної фізики Л.Д. Ландау і Є.М. Ліфшиця і відповідає вимогам силабусу відповідного кредитного модуля спеціальності 104 «Фізика та астрономія». Наведено детальні пояснення та виведення основних формул та законів.

Навчальний посібник буде корисним також для студентів фізичних та технічних спеціальностей під час вивчення курсу теоретичної фізики.

Реєстр. № НП 21/22-300. Обсяг 10,9 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ	7
1.1 Принцип відносності Ейнштейна	7
1.2 Інтервал	11
1.3 Класифікація інтервалів	14
1.4 Власний час	18
1.5 Перетворення Лоренца для радіус-вектора	22
1.6 Релятивістські ефекти	25
1.7 Перетворення Лоренца для швидкості	27
1.8 Аберация світла	29
1.9 Чотири-вектори	30
1.10 Чотири-тензори	33
1.11 Перетворення компонент 4-векторів та 4-тензорів при зміні системи координат	34
1.12 Одиничний та метричний тензори	35
1.13 Абсолютно антисиметричні тензори третього та четвертого рангів	36
1.14. Перетворення Лоренца для компонент антисиметричного 4-тензора другого рангу	38
1.15 Полярні та аксіальні вектори	39
1.16 Чотиривимірні диференціальні операції	40
1.17 Елементи інтегрування у 4-вимірному просторі	41
1.18 Чотиривимірні інтегральні теореми	42
1.19 Чотири-вектор швидкості. Чотири-вектор прискорення	44
2. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА	46
2.1 Принцип найменшої дії. Релятивістські дія та функція Лагранжа для вільної частинки	46
2.2 Релятивістський імпульс	48
2.3 Релятивістська енергія	49
2.4 Чотири-вектор енергії-імпульсу	52
2.5 Чотири-вектор сили	54
2.6 Рівняння Гамільтона-Якобі	55
2.7 Чотири-тензор моменту імпульсу	57
2.8 Компоненти 4-тензора моменту імпульсу	58
2.9 Релятивістський центр інерції	59
3. ЗАРЯД В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ	61
3.1 Дія для частинки в електромагнітному полі. Чотири-потенціал	61
3.2 Рівняння руху заряду в електромагнітному полі	64

3.3	Зміна кінетичної енергії заряду з часом	67
3.4	Інваріантність рівняння руху заряду щодо обертання часу	67
3.5	Калібровочна інваріантність	68
3.6	Постійне електромагнітне поле	70
3.7	Рух заряду в постійному однорідному електричному полі	72
3.8	Рух заряду в постійному однорідному магнітному полі.....	74
3.9	Рух заряду в схрещених постійних однорідних електричному та магнітному полях в нерелятивістському випадку	77
3.10	Тензор електромагнітного поля. 4-вимірне рівняння руху заряду в електромагнітному полі.....	80
3.11	Компоненти тензора електромагнітного поля	82
3.12	Перехід від чотиривимірного рівняння руху заряду до тривимірних	83
3.13	Чотири-вектор узагальненого імпульсу	84
3.14	Перетворення Лоренца для електромагнітного поля.....	85
3.15	Інваріанти електромагнітного поля	88
3.16	Слідства інваріантності	89
4.	ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ	90
4.1	Перша пара рівнянь Максвелла	90
4.2	Перша пара рівнянь Максвелла в 4-вимірному вигляді	92
4.3	Властивості δ - функції Дірака	94
4.4	Чотири-вектор густини струму.....	95
4.5	Дія для електромагнітного поля	96
4.6	Друга пара рівнянь Максвелла	99
4.7	Рівняння неперервності	103
4.8	Густина та потік енергії електромагнітного поля.....	106
5.	ПОСТІЙНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ	109
5.1	Закон Кулона	109
5.2	Електростатична енергія зарядів.....	111
5.3	Поле заряду, що рівномірно рухається	113
5.4	Дипольний момент. Дипольний потенціал	118
5.5	Квадрупольний момент. Квадрупольний потенціал	122
5.6	Квадрупольний момент однорідно зарядженого еліпсоїда	125
5.7	Система зарядів в зовнішньому електричному полі	127
6.	ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ	131
6.1	Закон Біо-Савара	131
6.2	Магнітний момент системи зарядів, що рухаються	134
6.3	Момент сил для системи зарядів у зовнішньому магнітному полі	136
6.4	Теорема Лармора.....	137
7.	ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ	140

7.1 Хвильове рівняння для електромагнітного поля	140
7.2 Плоскі електромагнітні хвилі	143
7.3 Монохроматичні плоскі хвилі	147
7.4 Напрямок поля монохроматичної плоскої хвилі	148
7.5 Чотиривимірний хвильовий вектор	150
7.6 Ефект Доплера.....	151
7.7 Запізнілі потенціали.....	152
7.8 Поле системи зарядів на далеких відстанях.....	157
8. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ. ЕЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВІДНИКІВ.....	161
8.1 Електростатичне поле провідників	161
8.2 Енергія електростатичного поля провідників	165
8.3 Коефіцієнти ємності та індукції	167
9. ЕЛЕКТРОСТАТИКА ДІЕЛЕКТРИКІВ	171
9.1 Електростатичне поле в діелектриках. Вектор діелектричної поляризації	171
9.2 Діелектрична проникність. Діелектрична сприйнятливість.....	174
10. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ	178
10.1 Густина струму. Електропровідність	178
10.2 Закон Джоуля-Ленца.....	179
11. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ.....	181
11.1 Постійне магнітне поле. Намагніченість. Вектор магнітної індукції.....	181
11.2 Магнітна проникність. Магнітна сприйнятливість	183
11.3 Магнітні поля постійних струмів	184
11.4 Закон Біо-Савара для лінійних струмів	186
12. КВАЗІСТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ.....	188
12.1 Рівняння квазістаціонарного електромагнітного поля	188
12.2 Згасання магнітного поля при вимиканні джерела	191
12.3 Глибина проникнення електромагнітного поля в провідник	192
ЛІТЕРАТУРА	196

ВСТУП

Дисципліна «Теоретична фізика. Електродинаміка» присвячена вивченню властивостей систем, поведінка яких обумовлена проявом процесів електромагнітного походження за наявності відповідних полів. Електродинаміка традиційно є другим розділом курсу теоретичної фізики і опановується студентами після засвоєння класичної механіки. Цей розділ є невід'ємною складовою підготовки майбутніх спеціалістів в області фізики.

Зміст даного посібника містить матеріал лекцій, які читаються студентам спеціальності 104 «Фізика та астрономія» на фізико-математичному факультеті КПІ ім. Ігоря Сікорського. Матеріал, представлений у посібнику, заснований на фундаментальних підручниках [1-3], зокрема на матеріалі класичного курсу Л.Д. Ландау та Є.М. Ліфшиця [1,2], але адаптований до відповідної навчальної програми і містить детальні пояснення складних моментів та проміжні викладки перетворень при виведенні формул. Перша частина курсу присвячена основам спеціальної теорії відносності та релятивістської механіки, а також вивченню електромагнітних процесів, що відбуваються в вакуумі. Друга частина дає огляд основних відмінностей, які супроводжують перехід з вакууму до суцільного середовища, і готують студентів до більш ґрунтовного вивчення процесів електромагнітного походження вже в рамках курсу електродинаміки суцільних середовищ [2]

Навчальний посібник може бути корисним студентам і аспірантам як фізичних, так і технічних спеціальностей, які вивчають електродинаміку.

1. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

1.1 Принцип відносності Ейнштейна

Для опису процесів, що відбуваються в природі, необхідно мати систему відліку. Під системою відліку розуміють систему координат, що служить для визначення положення частинок в просторі разом з пов'язаним з цією системою годинником, який потрібний для визначення часу.

Існують системи відліку, в яких вільний рух тіл, тобто рух тіл, які не знаходяться під дією зовнішніх сил, відбувається з постійною швидкістю. Такі системи відліку називаються *інерціальними*.

Якщо дві системи відліку рухаються одна відносно іншої рівномірно й прямолінійно і якщо одна з них інерціальна, то очевидно, що й інша теж є інерціальною (будь-який вільний рух і в цій системі буде прямолінійним і рівномірним). Таким чином, є скільки завгодно інерційних систем відліку, що рухаються одна відносно одної рівномірно й поступально.

Досвід свідчить, що має місце так званий *принцип відносності*. Згідно з цим принципом всі закони природи однакові в усіх інерційних системах відліку. Іншими словами, рівняння, що виражають закони природи, інваріантні по відношенню до перетворень координат і часу при переході від одної інерціальної системи до іншої. Це означає, що рівняння, яке описує деякий закон природи, будучи виражене через координати і час в різних інерціальних системах відліку, має один і той самий вигляд.

Взаємодія матеріальних часток описується у звичайній механіці за допомогою потенціальної енергії взаємодії, яка є функцією координат взаємодіючих частинок. Легко бачити, що цей спосіб опису взаємодій включає в себе припущення про миттєвість поширення взаємодій. Дійсно, сили, що діють на кожен з частинок з боку інших частинок, у кожний момент залежать, при такому описі, тільки від положення частинок в цей же момент часу. Зміна положення будь-якої з взаємодіючих частинок відображається на решті частинок в той самий момент.

Проте, досвід свідчить про те, що миттєвих взаємодій в природі не існує. Тому і механіка, яка виходить з уявлення про миттєвість поширення взаємодій, містить в собі деяку неточність. Насправді, якщо з одним із взаємодіючих тіл відбувається яке-небудь зміна, то на іншому тілі це відіб'ється лише через деякий проміжок часу. Тільки після цього проміжку часу з другим тілом почнуть відбуватися процеси, викликані даною зміною. Розділивши відстань між обома тілами на цей проміжок часу, можна знайти «швидкість поширення взаємодії».

Про взаємодію, що поширюється від одної частинки до іншої, часто говорять як про «сигнал», який вирушає від першої частки і «дає знати» другій про зміну, яку відчула перша. Про швидкість поширення взаємодій говорять в такому разі як про «швидкість сигналу».

З принципу відносності випливає, що швидкість поширення взаємодій однакова у всіх інерціальних системах відліку. Таким чином, швидкість поширення взаємодій є універсальною сталою.

Ця постійна швидкість є водночас швидкістю поширення світла в вакуумі, тому її називають *швидкістю світла*. Вона позначається зазвичай літерою c , а її чисельне значення, згідно з останніми вимірюваннями, рівне

$$c = 2,99792 \cdot 10^{10} \text{ см / сек} \quad (1.1.1)$$

Великою величиною цієї швидкості пояснюється той факт, що на практиці в більшості випадків достатньо точною виявляється класична механіка. Більшість швидкостей, з якими нам доводиться мати справу, настільки малі в порівнянні зі швидкістю світла, що припущення про нескінченність останньої практично не впливає на точність результатів.

Поєднання принципу відносності з обмеженням швидкості поширення сигналу називається *принципом відносності Ейнштейна*, на відміну від принципу відносності Галілея, що виходить з нескінченної швидкості поширення взаємодій.

Механіка, заснована на принципі відносності Ейнштейна (ми будемо зазвичай називати його просто *принципом відносності*), називається *релятивістською*. У граничному випадку, коли швидкості рухомих тіл малі в

порівнянні зі швидкістю світла, можна знехтувати впливом скінченності швидкості поширення взаємодій на рух тіл. Тоді релятивістська механіка переходить в звичайну механіку, засновану на припущенні про миттєве поширення взаємодій; цю механіку називають *ньютонівською* або *класичною*. Граничний перехід від релятивістської механіки до класичної формально відбувається за умови $c \rightarrow \infty$.

Вже в класичній механіці простір вважається відносним, тобто просторові співвідношення між різними подіями залежать від того, в якій системі відліку вони описуються. Твердження, що дві різночасові події відбуваються в одному і тому ж місці простору або, взагалі, на певній відстані одна від одної, набуває сенсу тільки тоді, коли вказано, до якої системи відліку це твердження відноситься.

Навпаки, час є в класичній механіці абсолютним; іншими словами, властивості часу вважаються незалежними від системи відліку – час спливає однаково для всіх систем відліку. Це означає, що якщо які-небудь два явища відбуваються одночасно для якого-небудь спостерігача, то вони є одночасними і для будь-якого іншого. Взагалі, проміжок часу між двома даними подіями має бути однаковим у всіх системах відліку.

Проте, легко переконатися в тому, що поняття абсолютного часу перебуває в глибокій суперечності з ейнштейнівським принципом відносності. Для цього достатньо вже згадати, що в класичній механіці, заснованої на понятті про абсолютний час, має місце загальновідомий закон додавання швидкостей, згідно з яким швидкість складного руху дорівнює просто векторній сумі швидкостей складових цього руху. Цей закон, будучи універсальним, мав би бути застосовним і до поширення взаємодій. Звідси випливало б, що швидкість цього поширення повинна бути різною в різних інерційних системах відліку, а це суперечить принципу відносності Ейнштейна. Досвід, проте, цілком підтверджує в цьому відношенні принцип відносності. А саме, вимірювання, зроблені вперше Майкельсоном в 1881 р., виявили повну незалежність швидкості світла від напрямку його поширення по відношенню до напрямку руху Землі; між тим,

згідно класичній механіці, швидкість світла в напрямку руху Землі мала б бути відмінною від швидкості світла в протилежному напрямку.

Таким чином, принцип відносності призводить до висновку, що *час не є абсолютним*. Час спливає по-різному в різних системах відліку. Отже, твердження, що між двома даними подіями пройшов певний проміжок часу, набуває сенс тільки тоді, коли вказано, до якої системи відліку це твердження відноситься. Зокрема, події, одночасні в деякій системі відліку, будуть неодноразовими в іншій системі.

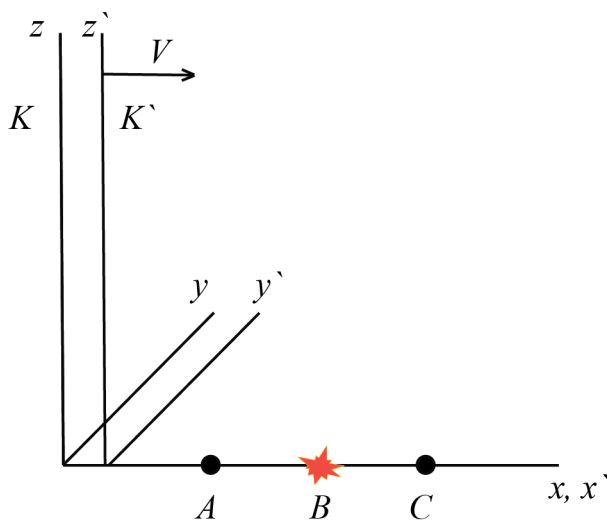


Рис.1.1.

Приклад-пояснення.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K' , причому система K' рухається відносно системи K вправо вздовж осей x та x' , напрямки яких співпадають (рис.1.1).

Нехай з деякої точки B на осі x' відправляється сигнал в двох взаємно протилежних напрямках. Оскільки швидкість розповсюдження сигналу в системі K' , як і у будь-якій інерціальній системі, буде рівна c (в обох напрямках), то сигнали досягнуть рівновіддалених від B точок A і C в один і той самий момент часу (в системі K' !).

Легко побачити, що ті самі дві події (прибуття сигналу в точки A і C) будуть неодноразовими для спостерігача системи K . Дійсно, швидкість сигналів відносно системи K згідно з принципом відносності рівна також c , але оскільки точка A рухається (відносно системи K) назустріч відісланому до неї сигналу, а точка C – в напрямку від сигналу, то в системі K сигнал прийде в точку A раніше, ніж в точку C .

Висновок: події, одночасні в одній з систем відліку, не є одночасними в інших інерціальних системах.

Таким чином, принцип відносності Ейнштейна вносить фундаментальні зміни в основні фізичні поняття. Запозичені нами з повсякденного досвіду уявлення про простір і час виявляються лише приблизними; це пов'язано з тим, що в повсякденному житті нам доводиться мати справу тільки зі швидкостями, дуже малими в порівнянні зі швидкістю світла.

1.2 Інтервал

Надалі ми будемо часто використовувати поняття *події*. Подія визначається місцем, де вона відбулася, і часом, коли вона відбулася. Таким чином, подія, яка відбулася з деякою матеріальною частинкою, визначається трьома координатами цієї частинки і моментом часу, коли відбувається подія.

Для наочності зручно користуватися уявним чотиривимірним простором, на осях якого відкладаються три просторові координати і час. В цьому просторі подія позначається точкою. Ці точки називаються *світловими точками* з координатами (t, x, y, z) або (ct, x, y, z) . Будь-якій частинці відповідає деяка лінія (*світова лінія*) в чотиривимірному просторі. Точки цієї лінії визначають координати частинки в будь-який момент часу. Рівномірний прямолінійний рух, наприклад, описується прямою світовою лінією.

Скористаємось тепер принципом інваріантності швидкості світла для дослідження властивостей інтервалу. Для цього розглянемо дві системи відліку K і K' , які рухаються одна відносно одної з постійною швидкістю. Координатні осі знов оберемо таким чином, щоб осі x і x' співпадали, а осі y і z були паралельні осям y' та z' відповідно; час в системах K і K' позначимо через t і t' відповідно.

Нехай перша подія полягає в тому, що відправляє сигнал, який поширюється зі швидкістю світла, із точки, яка має координати (x_1, y_1, z_1) в системі K в момент часу t_1 в цій же системі. Будемо спостерігати з системи K розповсюдження цього сигналу. Нехай друга подія полягає в тому, що сигнал

приходить в точку (x_2, y_2, z_2) в момент часу t_2 . Таким чином, можемо записати наступне співвідношення між координатами обох подій в системі K :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (1.2.1)$$

Ті ж дві події можна спостерігати і в системі K' . Нехай координатами першої події в системі K' є (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) , а другої – (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) . Оскільки швидкість світла в системах K і K' однакова, то, по аналогії з (1.2.1), маємо:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2. \quad (1.2.2)$$

Взагалі, якщо (t_1, x_1, y_1, z_1) і (t_2, x_2, y_2, z_2) – координати будь-яких двох подій, то величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (1.2.3)$$

називається *інтервалом* між цими двома подіями.

Таким чином, з інваріантності швидкості світла маємо, що якщо інтервал між двома подіями рівний нулю в одній системі відліку ($s_{12} = 0$), то він рівний нулю і в іншій системі ($s'_{12} = 0$).

Якщо дві події нескінченно близькі одна до одної, то для інтервалу між ними маємо:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.2.4)$$

Форма виразу (1.2.3) або (1.2.4) дозволяє розглядати інтервал, з математичної точки зору, як відстань між двома точками в уявному чотиривимірному просторі.

Простір, в якому в такий спосіб розглядаються інтервали, називається *простором Мінковського*, а геометрія, яка базується на такій формі визначення інтервалу, називається *псевдоевклідовою* або *геометрією Лобачевського*, – на відміну від звичайної тривимірної евклідової геометрії, в якій усі квадрати різниць координат беруться з однаковими знаками.

Як було показано вище, якщо $ds = 0$ в деякій інерціальній системі координат, то $ds' = 0$ і в будь-якій іншій системі. З іншого боку ds і ds' –

нескінченно малі одного порядку. З цих двох фактів випливає, що ds^2 і ds'^2 повинні бути пропорційними:

$$ds^2 = a ds'^2,$$

причому параметр a може гіпотетично залежати тільки від абсолютної величини відносної швидкості обох інерційних систем. Дійсно, він не може залежити від координат та часу, оскільки тоді різні точки простору і моменти часу були б нерівноцінними, що знаходиться в протиріччі властивостям однорідності простору та часу. Він не може залежати також від напрямку відносної швидкості, оскільки це протирічить факту ізотропії простору.

Розглянемо три системи відліку K , K_1 , K_2 , і нехай V_1 і V_2 – швидкості руху систем K_1 і K_2 відносно системи K . Тоді можемо записати:

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2,$$

$$ds^2 = a(V_2) ds_2^2.$$

На підставі тих же міркувань,

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2,$$

де V_{12} – абсолютна величина швидкості руху системи K_2 відносно системи K_1 .

Таким чином, з останніх трьох співвідношень отримуємо:

$$ds_1^2 = \frac{a(V_2)}{a(V_1)} ds_2^2,$$

$$a(V_{12}) = \frac{a(V_2)}{a(V_1)}. \quad (1.2.5)$$

Але V_{12} залежить не тільки від абсолютних величин векторів V_1 і V_2 , а й від кута між ними. Проте, останній взагалі не входить в ліву частину співвідношення (1.2.5). Отже, це співвідношення може бути справедливе тільки, якщо функція $a(V)$ зводиться до постійної величини, рівної, як це слідує з цього ж відношення, одиниці. Таким чином,

$$ds = ds'. \quad (1.2.6)$$

Проінтегрувавши вздовж світових ліній отримаємо, що і для скінченних інтервалів

$$\boxed{s = s'}.$$

Ми отримали дуже важливий результат: *інтервал між подіями залишається незмінним в усіх інерціальних системах відліку*, тобто є *інваріантом* по відношенню до переходу від однієї інерціальної системи відліку до будь-якої іншої. Ця інваріантність і є математичним наслідком сталості швидкості світла.

1.3 Класифікація інтервалів

Нехай (t_1, x_1, y_1, z_1) і (t_2, x_2, y_2, z_2) – координати будь-яких двох подій в системі відліку K . Спробуємо знайти таку систему відліку K' , в якій ці дві події відбуватимуться в одній точці простору.

Введемо позначення

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Аналогічно, в системі K' :

$$t'_2 - t'_1 = t'_{12}, \quad (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = l'^2_{12} = 0.$$

Тоді квадрати інтервалів між подіями в системах K та K' :

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2, \quad s'^2_{12} = c^2 t'^2_{12}.$$

З умови інваріантності інтервалу ($s_{12}^2 = s'^2_{12}$) отримуємо:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} > 0.$$

Тобто інтервал між двома подіями дійсний. Таким чином умовою існування шуканої системи є дійсність інтервалів. Дійсні інтервали називаються **часоподібними**.

Отже, якщо інтервал між двома подіями часоподібний, то існує така система відліку K' , в якій обидві події можуть відбутися в одному і тому ж місці. В такому разі час між подіями в системі K' дорівнює

$$t'_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}.$$

Зауваження. Якщо під подіями розуміється зміна положення будь-якого тіла в результаті руху, то відповідний інтервал завжди дійсний, оскільки швидкість руху не перевищує швидкість світла

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 > 0 \Rightarrow s_{12}^2 > 0.$$

Теж саме можна сказати про *будь-які причинно пов'язані події*, – всі вони характеризуються *часоподібними інтервалами*.

Тепер спробуємо знайти таку систему K' , в якій тіж самі дві події відбуваються одночасно ($t'_{12} = 0$).

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0.$$

Отже, шукану систему відліку можна знайти тільки в тому випадку, коли інтервал між двома подіями уявний. Уявні інтервали називаються **просторовоподібними**.

Отже, якщо інтервал між двома подіями просторовоподібний, то існує така система відліку K' , в якій ці дві події можуть відбутися одночасно. Відстань між точками, де відбулися ці події в такій системі відліку, дорівнює

$$l'_{12} = i s_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}.$$

Зауваження: Оскільки інтервал є інваріантом, *поділ інтервалів на часоподібні та просторовоподібні є також інваріантом*. Тобто якщо в одній з інерціальних систем інтервал часоподібний (просторовоподібний), таким він залишиться і в будь-якій іншій системі відліку.

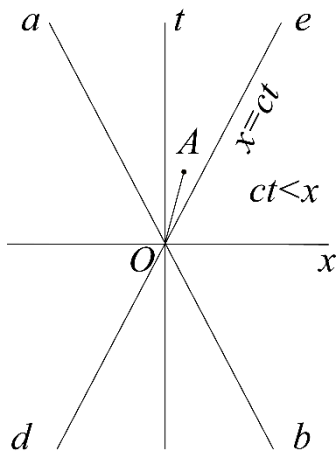


Рис.1.2.

Світловий конус

Позначимо якусь початкову подію точкою O і помістимо її в початку чотиривимірної системи координат. Розглянемо тепер, в якому відношенні до даної події O знаходяться всі інші події. Для наочності ми будемо спочатку розглядати тільки одну просторову координату і час, відкладаючи їх на двох осях (рис. 1.2).

Прямолінійний рівномірний рух частинки зобразиться прямою лінією, яка проходить через точку O і нахилена до осі t під кутом, тангенс якого дорівнює швидкості частинки. Оскільки найбільша можлива швидкість дорівнює c , то існує найбільший кут, який може утворити ця пряма з віссю t . На рис. 1.2 показано дві прямі, які зображають два сигнали (які поширюються зі швидкістю світла) в протилежних напрямках, що проходять через подію O . Всі лінії, які зображають рух частинки, можуть лежати тільки всередині областей aOe і dOb , оскільки саме в цих областях відстань, яку долає частинка за час t , не перевищує максимально можливого значення, тобто ct . На прямих ab і de , очевидно, $x = \pm ct$. Розглянемо спочатку події, світові точки яких лежать всередині області aOe . Легко побачити, що в усіх точках цієї області $c^2t^2 - x^2 > 0$. Іншими словами, інтервал між будь-якою подією цієї області і подією O є часоподібним, причому, в будь-якій інерціальній системі координат (завдяки інваріантності інтервалу). В цій області $t > 0$, тобто всі події цієї області відбуваються *після* події O . Але дві події, розділені часоподібним інтервалом, в жодній системі відліку не можуть відбуватися одночасно. Отже, і неможливо знайти таку системи відліку, де яка-небудь з подій області aOe відбувалася б до події O , тобто щоб було $t < 0$. Таким чином, всі події області aOe є майбутніми по відношенню до O , причому, як відзначено вище, в усіх інерціальних системах відліку. Тому цю область можна назвати **областю абсолютно майбутніх подій** по відношенню до події O .

Абсолютно аналогічно всі події області bOd є **областю абсолютно минулих подій** по відношенню до події O , тобто події цієї області в усіх системах відліку відбуваються до події O .

Розглянемо ще області dOa і bOe . Інтервал між будь-якою подією цієї області і подією O є просторовоподібним. В будь-якій системі відліку ці події відбуваються в різних точках простору. Тому ці області можна назвати **областями абсолютно віддалених подій** по відношенню до події O . Поняття «одночасно», «раніше» і «пізніше» для цих подій відносні. Для будь-якої події цієї області є такі системи відліку, де вона відбувається пізніше події O , системи,

де вона відбувається раніше події O , і одна система відліку, де вона відбувається одночасно з подією O .

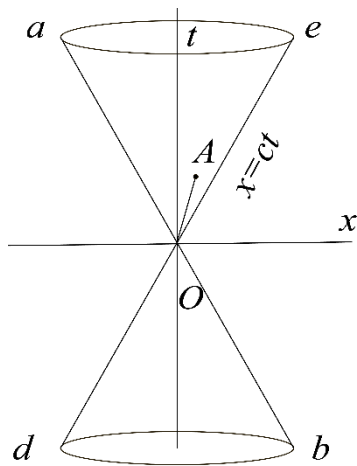
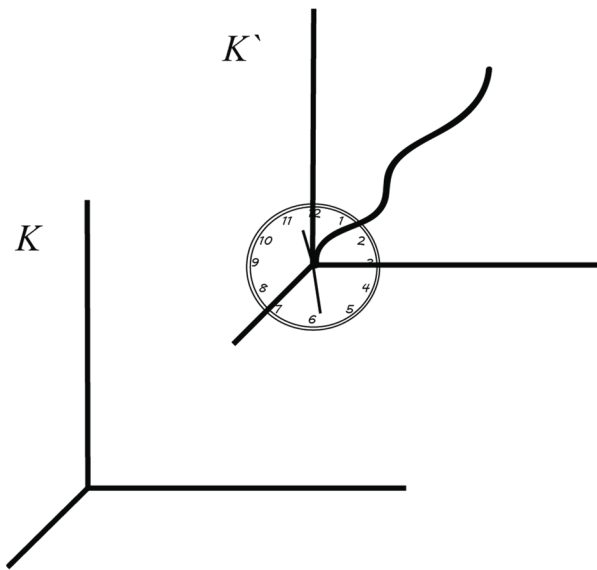


Рис.1.3.

Зазначимо, що, якщо розглядати всі три просторові координати замість однієї, то замість двох прямих, що перетинаються на рис. 1.2. ми отримали б конус $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ в чотиривимірній системі координат, вісь якого співпадає з віссю t (рис. 1.3). Цей конус називається **світловим конусом**. Області абсолютно майбутніх і абсолютно минулих подій зображуються тоді відповідно внутрішніми і зовнішніми порожнинами цього конуса.

Ще раз відзначимо, що дві події можуть бути причино пов'язані одна з одною тільки в тому випадку, якщо інтервал між ними часоподібний, що безпосередньо випливає з того, що жодний сигнал не може розповсюджуватися зі швидкістю, більшою за швидкість світла. Як ми бачимо, для таких подій мають абсолютний сенс поняття «раніше» та «пізніше», що є необхідною умовою для того, щоб мали сенс поняття причини і наслідку.

1.4 Власний час



Розглянемо рух якоїсь точки за довільною траєкторією і знайдемо співвідношення між часовими інтервалами в лабораторній системі відліку K та системі K' , початок якої рухається разом з частинкою і з годинником, за яким відлічується час в цій системі відліку (рис.1.4). Всю траєкторію руху частинки можна розбити на нескінченно малі відрізки і розглядати рух на протязі відповідних інтервалів часу

Рис.1.4. dt , вважаючи систему K' на цих елементах траєкторії інерціальною (оскільки швидкість частинки на таких малих ділянках залишається практично незмінною як за абсолютним значенням, так і за напрямком). Оскільки годинник покоїться в системі K' , то

$$dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0.$$

В силу інваріантності інтервалу маємо:

$$ds^2 = ds'^2,$$

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

$$dt'^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} = dt^2 \left(1 - \frac{dl^2}{c^2 dt^2} \right) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

де $v = dl/dt$ – миттєве значення швидкості годинника з точки зору спостерігача лабораторної системи K . З останнього рівняння знаходимо:

$$\boxed{dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.4.1)$$

Інтегруючи цей вираз, можна знайти проміжок часу, який мине за годинником що рухається, якщо показники лабораторного годинника зміняться під час руху з t_1 на t_2 :

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.4.2)$$

Час, який відлічується за годинником в тій системі координат, де він покоїться, називається **власним часом**. Формули (1.4.1) або (1.4.2) виражають співвідношення між власним часом та проміжками часу в системі відліку, відносно якої розглядається рух.

Як видно з (1.4.1) та (1.4.2), власний час об'єкта що рухається завжди менший, ніж відповідний проміжок часу в нерухомій (лабораторній) системі. Іншими словами, *годинник що рухається йде повільніше, ніж нерухомий*.

Бачимо, що чим швидше рухається годинник, тим менший час він показує (з точки зору спостерігача, який знаходиться в лабораторній системі). Максимальний же час показує годинник, який покоїться.

Приклад пояснення.

Розглянемо космічний корабель, який рухається прямолінійно зі сталою швидкістю V відносно лабораторної системи (рис.1.5). В.т. A в якийсь момент відбувається спалах світла, яке відбивається від дзеркала (точка F) і повертається в те ж саме місце, де відбувся спалах.

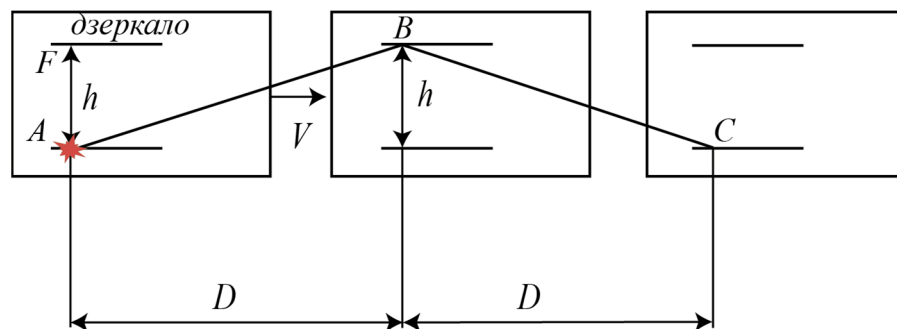


Рис.1.5.

З точки зору спостерігача, який знаходиться в кораблі, час, за який промінь повернеться в початкову точку, дорівнює

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}.$$

З точки зору ж спостерігача лабораторної системи цей час буде іншим, оскільки, поки світло досягне дзеркала, корабль вже буде знаходитися в іншому місці простору, тобто сигнал має здолати більшу відстань (але з тою ж швидкістю c !). З рис. 1.5 знаходимо:

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{D^2 + h^2}}{c},$$

звідки

$$\Delta t^2 = \left(\frac{2D}{c}\right)^2 + \left(\frac{2h}{c}\right)^2.$$

Але

$$2D = V\Delta t, \quad \frac{2h}{c} = \Delta t',$$

тому

$$\Delta t^2 = \left(\frac{V}{c}\right)^2 \Delta t^2 + \Delta t'^2,$$

$$\Delta t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \Delta t'^2,$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

що збігається з формулою (1.4.1).

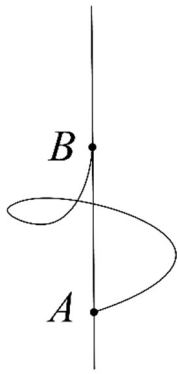


Рис. 1.6.

Зауваження 1. Часовий інтервал можна розрахувати як $\frac{1}{c} \int ds$,

де інтеграл береться вздовж світової лінії тіла. На рис. 1.6 зображені дві траєкторії в чотиривимірному проторі: якщо годинник покоїться, то з т. *A* до т. *B* він потрапить по прямій світовій лінії; якщо ж він рухається по замкненій траєкторії в тривимірному просторі, то – по альтернативній. А оскільки максимальний час показує годинник,

який покоїться, то саме для нерухомого годинника $\int ds$ буде мати максимальне значення. Але ж такому годиннику відповідає пряма світова лінія, паралельна до часової осі, тому $\int ds$ матиме *максимальне значення вздовж прямої* на відміну від звичайного евклідового простору, в якому $\int dl$ має мінімальне значення вздовж прямої.

Зауваження 2. Розглянемо рух годинника (разом з системою K') паралельно осі абсцис лабораторної системи. З точки зору лабораторного спостерігача, годинник K' відстає. Якщо ж помістити лабораторного спостерігача в систему K' , то рухатися відносно нього буде вже система K , а тому відставати нібито має вже годинник системи K . Але ж як можуть одні й ті самі годинники давати протилежні показники в залежності від того, в якій системі знаходиться «лабораторний» спостерігач? Розв'язання цього парадоксу полягає в тому, що звіряти між собою можна лише показники тих годинників, які знаходяться в одній точці простору. Але ж рухається відносно лабораторного спостерігача тільки один годинник. Фактично, його показники звіряються з показниками декількох годинників іншої системи (а саме – лабораторної), які розташовані в тих точках простору, де відбувається звірка показників. Якщо ж поміняти місцями спостерігачів, то тепер в іншій системі буде знаходитися один годинник, а в другій системі прийдеться розташовувати декілька годинників. Тобто, ситуація не є симетричною, – відставати завжди буде той *один* годинник, показники якого звіряються з показниками *декількох* годинників.

Тоді виникає бажання позбутися цієї несиметричності процесу, тобто звіряти показники годинників в одній і тій самій точці лабораторної системи, в

якій зустрічатимуться ті самі два годинники. Досягти цього можна в єдиний спосіб: забезпечити рух нелабораторного годинника по замкненій траєкторії. Але в такому разі система K' вже не буде інерційною і висновки, зроблені спостерігачем з системи K' , будуть невірними. Тобто відставати буде саме годинник системи K' .

1.5 Перетворення Лоренца для радіус-вектора

Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K' , причому система K' рухається зі швидкістю V відносно системи K в напрямку додатних значень вздовж осей x та x' , напрямки яких співпадають; осі ординат та абсцис обох систем паралельні. Спробуємо знайти, як перетворюються координати та час при переході від одної інерціальної системи координат до іншої. Відзначимо, що перетворення Галілея, які діють в класичній механіці:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad - \quad (1.5.1)$$

очевидно, не задовольняють умову інваріантності інтервалу між подіями. Оскільки при обраній орієнтації осей систем координат ординати й абсциси точок залишаються незмінними, то для забезпечення незмінності інтервалу в обох системах слід знайти таке перетворення чотиривимірної системи координат, яке відповідає співвідношенню (для простоти вважаємо, що перша подія відповідає початку координат в обох системах відліку)

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 .$$

Відзначимо, що до перетворень, які не змінюють інтервал, відносяться, як і в звичайному евклідовому просторі, лише повороти та паралельні перенесення системи координат. Останні виключаємо, оскільки вони змінюють лише початок відліку, тож залишається шукати поворот в площині tx .

В псевдоевклідовому просторі загальний вигляд виразів, які характеризують поворот системи координат, відрізняється від подібних виразів в евклідовому просторі лише заміною тригонометричних функцій на гіперболічні:

$$\begin{cases} x = x'ch\psi + ct'sh\psi \\ ct = x'sh\psi + ct'ch\psi \end{cases}, \quad (1.5.2)$$

де ψ – кут повороту.

Для знаходження необхідного кута повороту відстежимо рух в системі K якоїсь точки, – наприклад (для простоти розрахунків), початку координат системи відліку K' . Тоді $x' = 0$ і формули (1.5.2) отримають вигляд:

$$\begin{cases} x = ct'sh\psi \\ ct = ct'ch\psi \end{cases},$$

або розділивши одне на друге

$$\frac{x}{ct} = th\psi,$$

тобто

$$\frac{V}{c} = th\psi.$$

Взявши до уваги, що

$$\begin{aligned} ch^2\psi - sh^2\psi &= 1, \\ 1 - th^2\psi &= \frac{1}{ch^2\psi}, \end{aligned}$$

маємо

$$\begin{aligned} ch\psi &= \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ sh\psi &= th\psi \cdot ch\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Підставимо ці рівняння в (1.5.2) і знайдемо:

$$x = \frac{x' + ct' \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x' + t'V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$ct = \frac{x' \frac{V}{c} + ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$t = \frac{t' + x' \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$y = y', \quad z = z'.$$

Отже,

$$\boxed{x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \boxed{y = y'}, \quad \boxed{z = z'}}. \quad (1.5.3)$$

Це і є шукані формули перетворення. Вони носять назву формул **перетворення Лоренца** і мають фундаментальне значення в релятивістській механіці.

Зворотне перетворення можна отримати замінивши V на $-V$ (оскільки система K рухається відносно K' зі швидкістю $-V$) та переставити штрихи:

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \boxed{y' = y}, \quad \boxed{z' = z}}. \quad (1.5.3')$$

Можна побачити, що при $V \geq c$ в формулах (1.5.3) координати x , t стають уявними, – це відповідає тому факту, що рух зі швидкістю, більшою за швидкість світла, неможливий. Неможливе навіть використання системи відліку, яка рухається зі швидкістю світла, бо при цьому знаменники в формулах (1.5.3) перетворилися б в нуль.

Для швидкостей, малих відносно швидкості світла $\left(\frac{V}{c} \ll 1\right)$, замість (1.5.3) можна користуватися наближеними формулами. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{1-\delta}} \approx 1 + \frac{\delta}{2}, \quad \delta = \frac{V^2}{c^2},$$

то маємо:

$$x \approx x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t \approx t' + \frac{Vx'}{c^2}. \quad (1.5.4)$$

При $c \rightarrow \infty$ можемо записати

$$x \approx x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t \approx t'.$$

Як бачимо, це – звичні для класичної механіки перетворення Галілея. Отже, вони є граничним випадком перетворень Лоренца при малих швидкостях.

1.6 Релятивістські ефекти

1. Ефект скорочення довжини

Спробуємо дізнатися, чи змінюються лінійні розміри тіла при переході з одної інерціальної системи координат до іншої. Розглянемо стержень, який покоїться в системі координат K' , причому координати його кінців x'_1 та x'_2 .

Власною довжиною тіла називається його довжина в тій системі відліку, де він покоїться.

Тобто власною довжиною стержня є

$$l_0 = x'_2 - x'_1.$$

Виміряємо довжину того ж стержня в лабораторній системі K , знаходячи координати його кінців x_1 та x_2 в цій системі в один і той самий час $t_1 = t_2 = t$, і скористаємося для цього зворотними перетвореннями Лоренца:

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

тоді

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Бачимо, що в лабораторній системі довжина стержня є меншою, ніж в тій системі, де він покоїться, причому ця різниця в довжинах збільшується при збільшенні швидкості руху стержня відносно лабораторної системи відліку, а найбільшу довжину стержень має в тій системі відліку, де він покоїться. Цей ефект називається *лоренцевим ефектом скорочення довжини*.

Якщо ж замість стержня розглянути рух об'ємного тіла, то, враховуючи, що його поперечні розміри не змінюються при русі ($y = y'$, $z = z'$), то для зміни об'єму тіла v можемо записати аналогічну формулу:

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

2. Ефект уповільнення часу

Розглянемо дві події, які відбуваються в одні точці простору ($x'_1 = x'_2 = x'$) в системі K' в моменти часу t'_1 та t'_2 . Знайдемо час Δt , який минув між цими ж двома подіями в системі відліку K . З (1.5.3) маємо

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Віднімаючи перший вираз від другого, отримуємо:

$$\Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Як бачимо, ми отримали формулу, аналогічну тій, що була виведена з властивості інваріантності інтервалу. Така зміна часових проміжків при

переході з одної інерціальної системи координат до іншої називається *лоренцевим ефектом уповільнення часу*.

Зауваження. Якщо створити два послідовних перетворення Лоренца при відносному русі систем координат уздовж різних координатних осей, то результат буде залежати від порядку здійснення перетворення, оскільки результат обертання навколо двох різних осей завжди залежить від порядку, а перетворення Лоренца були отримані саме в результаті обертання чотиривимірної системи координат. Тобто в цьому сенсі перетворення Лоренца не володіють властивістю комутативності.

1.7 Перетворення Лоренца для швидкості

Знайдемо тепер, що відбувається зі швидкістю частинки при зміні системи відліку. Нехай інерціальна система K' , як і раніше, рухається

відносно системи K зі швидкістю V уздовж осі x . Позначимо $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$,

$v'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $v'_z = \frac{dz'}{dt'}$ – компоненти швидкості частинки в системі K' , $v_x = \frac{dx}{dt}$,

$v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ – компоненти швидкості частинки в системі K . Візьмемо

диференціали від формул перетворень Лоренца:

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Розділивши перші три рівності на четверту, знаходимо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dy'}{dt'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dz'}{dt'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.$$

Отже, маємо такі формули:

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.}$$

Ці формули і є *перетвореннями Лоренца для компонент швидкості*.

Зауваження. Якщо частинка рухається паралельно осі x , маємо $v_x = v, v'_x = v'$, тоді

$$\boxed{v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}.}$$

Фактично це – *закон додавання швидкостей в релятивістській механіці*.

Тепер постає питання: а чи не порушує ця формула постулат про те, що максимально можливою швидкістю є швидкість світла? Щоб це перевірити, покладемо всі швидкості, які присутні в останній отриманій формулі, рівними швидкості світла: $v' = V = c$. Тоді маємо:

$$v = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c.$$

Бачимо, що, дійсно, сумарна швидкість складного руху ніколи не перевищить c .

Знайдемо тепер наближені формули з точністю до $\frac{V}{c}$.

$$v_x \approx (v'_x + V) \left(1 - \frac{v'_x V}{c^2} \right) = v'_x + V - v'_x \frac{v'_x V}{c^2} - \frac{v'_x V^2}{c^2} \approx v'_x + V - v'_x \frac{v'_x V}{c^2},$$

$$v_y \approx v'_y \left(1 - \frac{v'_x V}{c^2} \right) = v'_y - v'_y \frac{v'_x V}{c^2},$$

$$v_z \approx v'_z \left(1 - \frac{v'_x V}{c^2} \right) = v'_z - v'_z \frac{v'_x V}{c^2}.$$

Враховуючи, що взаємний рух систем відліку відбувається уздовж осі абсцис, можемо об'єднати всі ці три формули в одну векторну:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} - \vec{v}' \frac{(\vec{v}' \cdot \vec{V})}{c^2}}.$$

1.8 Аберация світла

Зміна напрямку поширення світла при переході від одної системи відліку до іншої називається *аберацією світла*.

Скористаємося перетвореннями Лоренца для швидкості і розглянемо рух в площині xOy . Позначимо $v_x = v \cos \theta$; $v_y = v \sin \theta$, $v'_x = v' \cos \theta'$; $v'_y = v' \sin \theta'$. Тоді:

$$v \cos \theta = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + v' \cos \theta' V / c^2}, \quad v \sin \theta = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 + v' \cos \theta' V / c^2}. \quad (1.8.1)$$

Поділивши друге рівняння на перше, маємо:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{v' \cos \theta' + V}$$

Якщо спостерігати за зміною напрямку поширення світла то слід покласти $v = v' = c$. Поділивши після цього чисельник та знаменник на швидкість світла, отримуємо:

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{\cos \theta' + V / c}}.$$

Це і є формула, яка описує *аберацію світла в релятивістському випадку*.

Зауважимо, що з виразів (1.8.1) у випадку спостереження за розповсюдженням світла матимемо такі формули:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}.$$

Зокрема, у випадку малої відносної швидкості систем відліку $V/c \ll 1$ з останньої формули можна отримати наближений вираз:

$$\sin \theta \approx \sin \theta' \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta' \right),$$

$$\sin \theta \approx \sin \theta' - \frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta',$$

$$\sin \theta' - \sin \theta \approx \frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta',$$

$$2 \sin \frac{\theta' - \theta}{2} \cos \frac{\theta' + \theta}{2} \approx \frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta'.$$

Враховуючи, що при малих швидкостях V зміна кута також буде малою, і позначивши $\Delta \theta = \theta' - \theta$ (це – так званий *кут аберації*), а також беручи до уваги, що в такому разі $\frac{\theta' + \theta}{2} \approx \theta'$, остаточно отримуємо:

$$2 \sin \frac{\Delta \theta}{2} \approx \frac{V}{c} \sin \theta',$$

$$\boxed{\Delta \theta \approx \frac{V}{c} \sin \theta'}.$$

Це *класична* формула для кута аберації.

1.9 Чотири-вектори

Сукупність компонент (ct, x, y, z) можна розглядати як компоненти чотиривимірного радіус-вектора (або, як ми будемо говорити надалі, **4-радіус-вектора**) в чотиривимірному просторі. Його компоненти будемо позначати так:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

Квадрат довжини 4-радіус-вектора дається виразом

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Взагалі, **4-вектором** A^i називається сукупність чотирьох компонент A^0, A^1, A^2, A^3 , які перетворюються при зміні системи координат аналогічно компонентам 4-радіус-вектора. Наприклад, перетворення Лоренца для компонент 4-вектора мають вигляд:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3.$$

Для зручності вводяться два типи компонент: **коваріантні** A_i та **контрваріантні** A^i , так що

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3.$$

Відзначимо, що в такому разі можна спростити запис для квадрата довжини 4-вектора:

$$\begin{aligned} (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 &= A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = \\ &= \sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^i A_i = A_i A^i. \end{aligned}$$

Зокрема, квадрат довжини 4-радіус-вектора тепер можна записати як $x_i x^i$.

При такому записі знак суми не ставиться, а наявність пари однакових індексів свідчить саме про те, що слід взяти суму по всіх значеннях індексу що повторюється (такі індекси називаються **німими**). Зазначимо, що в парі німих індексів обов'язково має бути один верхній та один нижній. Крім того, в парі німих індексів можна *одночасно* міняти місцям верхні на нижні та навпаки.

Нульова компонента 4-вектора називається **часовою**, а перша, друга та третя – **просторовими**.

Скалярний добуток $A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A_i B^i$ є 4-скаляром, тобто не змінюється при перетвореннях чотиривимірної системи координат.

Зауваження 1. По аналогії з інтервалами, 4-вектори поділяються на часоподібні ($A^i A_i > 0$), просторовоподібні ($A^i A_i < 0$) та нульові або ізотронні ($A^i A_i = 0$).

Зауваження 2. По відношенню до чисто просторових перетворень системи координат нульова компонента 4-вектора не змінюється, тобто є тривимірним скаляром, а просторові компоненти змінюються аналогічно компонентам звичайного вектора. Тому для 4-векторів будемо користуватися умовним записом:

$$A^i = (A^0, \vec{A}),$$

$$A_i = (A^0, -\vec{A}) = (A_0, -\vec{A}),$$

$$A^i A_i = (A^0)^2 - \vec{A}^2.$$

Зокрема, для 4-радіус-вектора маємо:

$$x^i = (ct, \vec{r}), \quad x_i = (ct, -\vec{r}),$$

$$x^i x_i = c^2 t^2 - r^2.$$

Зауваження 3. Очевидно, в звичайному евклідовому тривимірному просторі немає сенсу вводити коваріантні та контраваріантні компоненти, тому будемо використовувати лише нижні індекси з грецькими літерами (на відміну від чотиривимірних компонент, які будемо позначати латинськими літерами). Наприклад, скалярний добуток двох тривимірних векторів матиме вигляд $(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_\alpha B_\alpha$.

1.10 Чотири-тензори

Чотири-тензором другого рангу називається сукупність 16 величин $A^{00}, A^{01}, \dots, A^{33}$, які при перетворенні системи координат перетворюються як добуток двох 4-векторів.

Наприклад, якщо два 4-вектори перетворюються за допомогою якогось тензора α_i^k , так що

$$A^k = \alpha_i^k A^i, \quad B^n = \alpha_m^n B^m,$$

то перетворення для добутку компонент цих векторів, очевидно, має вигляд:

$$A^k B^n = \alpha_i^k \alpha_m^n A^i B^m.$$

Так ось, саме так перетворюватимуться і відповідні компоненти 4-тензора T^{kn} :

$$T^{kn} = \alpha_i^k \alpha_m^n T^{im}.$$

Розрізняють коваріантні (A_{ik}), контраваріантні (A^{ik}) та мішані (A^i_k, A_i^k) компоненти 4-тензорів. Зауважимо, що в загальному випадку є різниця, який індекс писати першим – нижній чи верхній. Взаємні перетворення між коваріантними та контраваріантними компонентами відбувається за тим же правилом, що і для 4-векторів. Наприклад,

$$A^{00} = A_{00} = A^0_0 = A_0^0,$$

$$A^{01} = A_0^1 = -A_{01} = -A^0_1,$$

$$A^{12} = -A_1^2 = A_{12}.$$

Отже, 4-тензор другого рангу має загальну форму:

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. При чисто просторових перетвореннях системи координат компонента A^{00} поводить себе як тривимірний скаляр, компоненти $A^{01}, A^{02},$

$A^{03}, A^{10}, A^{20}, A^{30}$ – як компоненти тривимірного вектора, компоненти ж $A^{11}, A^{12}, \dots, A^{33}$ – як компоненти тривимірного тензора.

4-тензор A^{ik} називається **симетричним**, якщо $A^{ik} = A^{ki}$,

Для симетричних тензорів $A_i^k = A^k_i$, тому для них можна писати просто A_i^k . Дійсно, наприклад,

$$A_1^0 = -A^{10} = -A^{01} = A^0_1,$$

4-тензор називається **антисиметричним** якщо $A^{ik} = -A^{ki}$. Елементи головної діагоналі антисиметричного тензора, очевидно, дорівнюють нулю. Дійсно: наприклад, має виконуватися рівність $A^{11} = -A^{11}$, що можливо тільки, якщо $A^{11} = 0$.

Вираз

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

називається **слідом тензора**, а операція по його знаходженню називається **згортанням** або **спрощенням тензора** по відповідній парі індексів.

Операцію згортання можна проводити і по відношенню до тензорів більш високого рангу. Так, кожне згортання по одній парі індексів знижує ранг тензора на два.

Наприклад, згортання по німому індексу в комбінації $A^i B_{ijc}$, яка є тензором четвертого рангу, призводить до тензора другого рангу:

$$A^i B_{ijk} = C_{jk}.$$

В кожному тензорному рівнянні в лівій і правій частинах має бути однакова кількість однаково розташованих (верхніх або нижніх) **вільних** (тобто не німих) індексів.

1.11 Перетворення компонент 4-векторів та 4-тензорів при зміні системи координат

Наведемо загальні правила перетворення компонент 4-вектора та 4-тензора при довільному перетворенні системи координат:

- 1) $A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k;$
- 2) $A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$
- 3) $A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} A'^{mn};$
- 4) $A_{ik} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} A'_{mn};$
- 5) $A^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} A'^m{}_n;$
- 6) $A_i{}^k = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} A'_m{}^n.$

Зауваження. Зазначимо, що в виразі $\frac{\partial}{\partial x^k}$ індекс k вважається *коваріантним*, а якщо треба побудувати відповідну *контраваріантну* компоненту частинної похідної, вона матиме вигляд $\frac{\partial}{\partial x_k}$.

1.12 Одиничний та метричний тензори

Одиничний тензор має всі нульові компоненти, крім діагональних:

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases},$$

$$(\delta_i^k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, дія одиничного тензора на 4-вектор не змінює компонент цього 4-вектора:

$$\delta_i^k A_k = A_i.$$

Піднявши або опустивши в одиничному тезорі один з індексів, отримуємо *метричний тензор*:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Дія метричного тензора на 4-вектор змінює компоненту цього 4-вектора з коваріантної на контраваріантну або навпаки:

$$g^{ik} A_k = A^i.$$

За допомогою метричного тензора можна, наприклад, підняти чи опустити один з індексів в скалярному добутку 4-векторів:

$$A^i B_i = g^{ik} A_k B_i = g_{ik} A^i B^k.$$

1.13 Абсолютно антисиметричні тензори третього та четвертого рангів

Абсолютно антисиметричний тензор третього рангу – це тензор, визначений в тривимірному просторі так, що його компоненти $e_{\alpha\beta\gamma} = 1$, якщо комбінація $\alpha\beta\gamma$ є наслідком парної кількості перестановок в трійці індексів xuz , $e_{\alpha\beta\gamma} = -1$, якщо комбінація $\alpha\beta\gamma$ отримана з послідовності індексів xuz непарною кількістю перестановок, та $e_{\alpha\beta\gamma} = 0$, якщо в трійці $\alpha\beta\gamma$ якийсь індекс повторюється, тобто або $\alpha = \beta$, або $\alpha = \gamma$, або $\beta = \gamma$. Відзначимо, що згортання цього тензора по всіх трьох парах індексів дає

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

Аналогічно вводиться *абсолютно антисиметричний тензор четвертого рангу* – це тензор, визначений в чотиривимірному просторі так, що його компоненти $e^{iklm} = 1$, якщо комбінація $iklm$ отримана з послідовності 0123 парною кількістю перестановок, $e^{iklm} = -1$, якщо комбінація $iklm$ отримана з послідовності індексів 0123 непарною кількістю перестановок,

$e^{iklm} = 0$, якщо якась пара індексів в четвірці $iklm$ дублюється. Прийнято, що $e^{0123} = 1$, відповідно, $e_{0123} = -1$

Згортання цього тензора по всіх чотирьох парах індексів дає

$$e^{iklm} e_{iklm} = -24.$$

Зауваження 1. Тензори δ_i^k , g^{ik} , $e_{\alpha\beta\gamma}$, e^{iklm} визначенні незмінними в усіх системах координат.

Зауваження 2. Серед цих чотирьох тензорів лише тензори δ_i^k , g^{ik} є істинними тензорами, а $e_{\alpha\beta\gamma}$ та e^{iklm} - це псевдотензори, оскільки істинні тензори мали б змінювати знак своєї компоненти при перетвореннях системи координат, які зводяться до дзеркального відбиття однієї чи трьох осей (згадайте загальні правила перетворення компонентів тензорів (п. 1.11), в яких фігурують похідні нових координат по старим та навпаки), але ж ці тензори визначенні як незмінні. При поворотах же системи координат тензори та псевдотензори поведуть себе однаково.

Зауваження 3. Незмінність компонент тензорів $e_{\alpha\beta\gamma}$ та e^{iklm} є наслідком більш загального правила: якщо ранг абсолютно антисиметричного тензора дорівнює розмірності простору, в якому він визначений, то цей тензор не змінює своїх компонент при будь-яких поворотах «своєї» системи координат.

Антисиметричний тензор A^{ik} та псевдотензор $A^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} A_{lm}$

називаються *дуальними* один до одного.

Також дуальними є 4-вектор A^i та антисиметричний псевдотензор третього рангу $A^{ikl} = e^{iklm} A_m$. Добуток $A^{ik} A_{ik}^*$ дуальних векторів є псевдоскаляром.

1.14. Перетворення Лоренца для компонент антисиметричного 4-тензора другого рангу

Пам'ятаючи, що діагональні компоненти антисиметричного тензора дорівнюють нулю, можемо записати:

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & 0 & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & 0 & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненти $A^{00}, A^{01}, A^{10}, A^{11}$ складають антисиметричний тензор другого рангу, тому залишаються незмінними при поворотах системи координат в площині tx , зокрема при перетворенні Лоренца. Отже, $A^{01} = A'^{01}$

Компонента A^{02} перетворюється як добуток двох відповідних компонент 4-векторів. Згадуючи, що

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2,$$

маємо перетворення для їх добутку:

$$A^0 A^2 = \frac{A'^0 A'^2 + \frac{V}{c} A'^1 A'^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отже

$$A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Аналогічно,

$$A^{03} = \frac{A'^{03} + \frac{V}{c} A'^{13}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^{13} = \frac{A'^{13} + \frac{V}{c} A'^{03}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$A^{23} = A'^{23}.$$

1.15 Полярні та аксіальні вектори

Звичайні вектори змінюють знаки своїх компонент при дзеркальному відбитті всіх осей координат відносно початку системи координат, такі вектори називається **полярними**. Але векторний добуток двох полярних векторів не змінює свій знак при такій операції. Такі вектори називаються **аксіальними**. Це – *псевдовектори*. Скалярний добуток полярного й аксіального векторів дасть зміну знаку при дзеркальному відбитті осей, тому він буде не скаляром, а *псевдоскаляром*.

Аксіальний вектор є дуальним до антисиметричного тензора другого рангу. Так, якщо $\vec{C} = [\vec{A} \times \vec{B}]$, то компоненти векторного добутку двох векторів виражаються через компоненти тензора другого рангу:

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

В декартовій системі координат ця формула еквівалентна такій:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Для наочності запишемо співвідношення між окремим компонентами цих вектора і тензора:

α	C_α	$C_{\beta\gamma}$
x	$C_x = A_y B_z - A_z B_y$	$C_{yz} = A_y B_z - A_z B_y = C_x$
y	$C_y = A_z B_x - A_x B_z$	$C_{zx} = A_z B_x - A_x B_z = C_y$
z	$C_z = A_x B_y - A_y B_x$	$C_{xy} = A_x B_y - A_y B_x = C_z$

Пам'ятаючи, що по відношенню до чисто просторових перетворень системи координат компоненти A^{01}, A^{02}, A^{03} поведуть себе як компоненти звичайного полярного вектора (позначимо його \vec{p}), а компоненти A^{12}, A^{13}, A^{23} – як компоненти тривимірного тензора другого рангу, які, як ми з'ясували, виражаються через компоненти аксіального вектора (позначимо цей вектор як $\vec{a} = -\vec{C}$), а також враховуючи, що розглядається антисиметричний тензор, можемо записати:

$$\left(A^{ik} \right) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15.1)$$

Таким чином, компоненти антисиметричного тензора другого рангу можуть бути виражені через компоненти полярного та аксіального векторів. Умовно ми будемо позначати це як

$$A^{ik} = (\vec{p}, \vec{a}), \quad A_{ik} = (-\vec{p}, \vec{a}). \quad (1.15.2)$$

1.16 Чотиривимірні диференціальні операції

Аналогами тривимірних диференціальних операцій в чотиривимірному просторі є такі:

1) **4-градієнт:**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right).$$

2) **4-диференціал:**

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + (\nabla \varphi \cdot d\vec{r});$$

3) **4-дивергенція:**

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \text{div} \vec{A}.$$

1.17 Елементи інтегрування у 4-вимірному просторі

1. Елементом інтегрування уздовж чотиривимірної лінії є dx^i .
2. Інтегрування по двовимірній поверхні.

В тривимірному просторі інтегрування по поверхні зводиться до інтегрування по проєкціям даної ділянки на координатні площини. Якщо ділянка поверхні побудована на векторах \vec{dr} і \vec{dr}' , то тензором її проєкцій є

$$df_{\alpha\beta} = dx_{\alpha} dx'_{\beta} - dx'_{\alpha} dx_{\beta}.$$

Але замість цього тензора часто використовують дуальний йому вектор

$$\vec{df} = [\vec{dr} \times \vec{dr}'],$$

компонентами якого є

$$df_{\alpha} = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} dx_{\beta} dx'_{\gamma}.$$

Аналогічно, в 4-просторі замість тензора елементів проєкцій на координатні площини

$$df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$$

часто використовують дуальний до нього тензор

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}.$$

Геометрично елементи df^{ik} і df^{*ik} відповідають взаємно перпендикулярним елементарним ділянкам рівної площі, для яких

$$df^{*ik} df_{ik} = 0.$$

3. Інтегрування по тривимірній гіперповерхні.

Аналогічно тому, як в тривимірному просторі елементами об'єму є паралелепіпеди, побудовані на векторах $\vec{dr}, \vec{dr}', \vec{dr}''$, об'єми яких визначаються відповідними мішаними добутками цих векторів, елементами проєкцій тривимірної гіперповерхні на координатні гіперплощини в чотиривимірному просторі є

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix}.$$

Частіше замість цього тензора використовується дуальний йому 4-вектор

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm},$$

причому зворотне перетворення має вигляд:

$$dS_{klm} = e_{iklm} dS^i.$$

Наприклад,

$$dS^0 = dS^{123} = dx dy dz = dV, \quad dS^1 = dS^{023} = c dt dy dz, \dots$$

Тут dS^0 – проєкція елемента 4-вектора, дуального до компоненти dS^{123} , на часову вісь, тобто на вісь, перпендикулярну до координатної гіперплощини $x_0 = const$.

4. Елементом чотиривимірного об'єму є

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV.$$

1.18 Чотиривимірні інтегральні теореми

1) Аналог *теорема Остроградського-Гаусса*:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega$$

Це співвідношення пов'язує між собою інтеграл по чотиривимірному об'єму та інтеграл по замкнутій тривимірній гіперповерхні, яка охоплює цей чотиривимірний об'єм.

2) Перехід від інтегралу по тривимірній гіперповерхні до інтегралу по двовимірній поверхні, яка охоплює цю тривимірну гіперповерхню:

$$\oint A^{ik} df^*_{ik} = \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right).$$

Якщо тензор A^{ik} *антисиметричний*, то цей вираз можна записати по-іншому. Врахувавши, що

$$dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} = dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + dS_k \frac{\partial A^{ki}}{\partial x^i}$$

і перепозначивши німі індекси суми в другому доданку $i \leftrightarrow k$, маємо:

$$\oint A^{ik} df^*_{ik} = 2 \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}$$

або

$$\frac{1}{2} \oint A^{ik} df^*_{ik} = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}$$

3) Нарешті, перехід від інтегралу по двовимірній поверхні зводиться до інтегралу по замкнутій лінії, яка охоплює цю поверхню в чотиривимірному просторі, за допомогою співвідношення:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Враховуючи, що $df^{ki} = -df^{ik}$, можемо записати:

$$\begin{aligned} df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} &= \frac{1}{2} \left(df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - df^{ik} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \left(df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} df^{ki} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\oint A_i dx^i = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right).$$

Це – аналог формули Стокса.

1.19 Чотири-вектор швидкості. Чотири-вектор прискорення.

Чотири-вектором швидкості називається сукупність чотирьох компонент

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (1.19.1)$$

Враховуючи співвідношення між інтервалом і часовим проміжками

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

звідки

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

можемо записати для компонент 4-вектора швидкості:

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{c dt}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$u^2 = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dy}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{ds} = \frac{dz}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Об'єднавши ці вирази, можемо записати:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.19.2)$$

Зазначимо, що скалярний квадрат 4-вектора швидкості дорівнює одиниці:

$$u^i u_i = \frac{dx^i dx_i}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1. \quad (1.19.3)$$

Геометрично 4-вектор швидкості є одиничним вектором, спрямованим вздовж дотичної до світової лінії частинки.

Чотири-вектором прискорення називається величина

$$\boxed{w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}}. \quad (1.19.4)$$

Зазначимо, що, продиференціювавши (1.19.3) і врахувавши

$$\frac{d}{ds}(u^i u_i) = \frac{du^i}{ds} u_i + u^i \frac{du_i}{ds} = 2u^i \frac{du_i}{ds} = 2u^i w_i,$$

отримуємо

$$u^i w_i = 0, \quad (1.19.5)$$

тобто 4-вектори швидкості та прискорення є взаємно перпендикулярними.

2. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

2.1 Принцип найменшої дії. Релятивістські дія та функція Лагранжа для вільної частинки

При дослідженні руху матеріальних частинок ми будемо виходити з принципу найменшої дії. Цей принцип полягає в тому, що для будь-якої механічної системи існує інтеграл дії S , який має мінімальне значення уздовж істинної траєкторії руху частинки. Відповідно, варіація дії

$$\delta S = 0.$$

Визначимо інтеграл дії для вільної матеріальної частинки, тобто частинки, яка не знаходиться під дією зовнішніх сил.

Для цього зауважимо, що цей інтеграл не повинен залежати від вибору тої чи іншої інерціальної системи відліку, тобто він має бути інваріантом, зокрема, відносно перетворень Лоренца. Звідси випливає, що він має бути взятий від скаляру. Далі, очевидно, що під інтегралом повинні стояти диференціали першого порядку малості. Однак єдиний такий скаляр, який можна побудувати для вільної матеріальної частинки, є інтервал ds або αds , де α – деяка стала.

Отже, дія для вільної частинки інтеграл дії має бути наступного вигляду:

$$S = -\alpha \int_a^b ds, \quad (2.1.1)$$

де інтеграл береться вздовж світової лінії між двома заданими подіями a і b , які відповідають початковому t_1 і кінцевому t_2 моментам часу, на протязі якого здійснювався рух. Легко побачити, що для всіх частинок константа α має бути додатною величиною. Дійсно, інтеграл $\int_a^b ds$ має максимальне значення вздовж прямої світової лінії, а щоб отримати умову мінімуму, його слід взяти з протилежним знаком.

Враховуючи, що між інтервалом і часовим проміжками є співвідношення

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

звідки

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

тоді дію можна представити у вигляді інтегралу за часом:

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Проте,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

де функція L при dt , як відомо, називається *функцією Лагранжа*. Таким чином, маємо вираз для функції Лагранжа релятивістської частинки:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.1.2)$$

Величина α характеризує фізичні властивості частинки. В класичній механіці характеристикою будь-якої частинки є її маса m . Визначимо зв'язок між величин α і m . Він знаходиться з умови, що при граничному переході до малих швидкостей руху вираз для L має набути класичного вигляду. Розклавши (1.19.2) в ряд з точністю до лінійних по V/c членів, отримуємо:

$$L \approx -\alpha c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Враховуючи, що лагранжіан не змінюється при додавання константи, опускаємо сталу αc . Порівнюючи тепер функцію Лагранжа з класичним виразом для вільної частинки $L = mv^2/2$, знаходимо, що $\alpha = mc$. Таким чином, дія (1.19.1) для вільної релятивістської частинки має вигляд

$$\boxed{S = -mc \int_a^b ds}, \quad (2.1.3)$$

а функція Лагранжа (1.19.2)

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.1.4)$$

2.2 Релятивістський імпульс

Як відомо, імпульс частинки визначається за допомогою функції Лагранжа:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}.$$

Диференціюючи вираз (2.1.4), маємо

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{-mc^2}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{-2\vec{v}}{c^2} \right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отже, *релятивістським імпульсом* частинки є величина

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.2.1)$$

При переході до випадку малих швидкостей з точністю до лінійних по v/c членів розкладання в ряд, як і при $c \rightarrow \infty$, цей вираз переходить в класичний вираз $\vec{p} = m\vec{v}$.

Похідна від імпульсу по часу є силою, яка діє на частинку:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Розглянемо два частинні випадки:

1. Припустимо спочатку, що швидкість частинки змінюється тільки за напрямом, тобто сила напрямлена перпендикулярно до напрямку швидкості

$$\vec{f}_\perp = \frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.2.2)$$

2. Тепер припустимо, що сила діє уздовж напрямку руху:

$$\vec{f}_{\parallel} = \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

Оскільки в такому випадку

$$\vec{v} \parallel \frac{d\vec{v}}{dt},$$

то

$$\vec{v} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = v\vec{n} v \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v^2 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt},$$

де \vec{n} – одиничний вектор уздовж напрямку руху. Тоді

$$\vec{f}_{\parallel} = \frac{m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + m \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.2.3)$$

Порівнюючи (2.2.2) та (2.2.3), бачимо, що відношення сили до прискорення залежить від напрямку руху, чого не спостерігалось в класичній механіці, де відношення сили до прискорення завжди дорівнювало масі частинки.

2.3 Релятивістська енергія

Згадаємо тепер, що енергія розраховується за формулою

$$\varepsilon = (\vec{p} \cdot \vec{v}) - L.$$

Скориставшись виразом для функції Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

знаходимо енергію:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отже, *релятивістська енергія* визначається формулою:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}. \quad (2.3.1)$$

Аналізуючи цей вираз, можна помітити, що в релятивістській механіці енергія вільної частинки не перетворюється в нуль навіть при нульовій швидкості, за якої лишається скінченною величиною, рівною

$$\boxed{\varepsilon_0 = mc^2}. \quad (2.3.2)$$

Цю величину називають *енергією спокою*.

При малих швидкостях отримуємо з (2.3.1) лінійне по v/c розкладання:

$$\varepsilon \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Бачимо, що цей вираз відрізняється від з класичного на величину енергії спокою. Цей факт завжди треба мати на увазі, здійснюючи граничні переходи до малих швидкостей.

Зазначимо, що при виведенні виразів для лагранжіана, імпульсу та енергії не було обмежень на умову елементарності частинки, тому отримані результати вірні і для будь якого тіла, що складається з багатьох частинок. Так, в релятивістській механіці енергія спокою тіла завжди додатна (на відміну від класичної, в рамках якої енергія визначена з точністю до адитивної сталої і може бути як додатною, так і від'ємною).

Розглянемо якесь складне тіло маси M , яке покоїться. Його енергія складається з енергій спокою його складових, що мають маси m_α (індекс α нумерує складові частини тіла), потенціальної енергії U взаємодії цих складових, а також їх кінетичних енергій T_α :

$$Mc^2 = \sum m_\alpha c^2 + U + \sum T_\alpha.$$

Тобто, очевидно, що

$$M \neq \sum m_\alpha$$

Іншими словами, *релятивістська маса не зберігається*, проте діє закон збереження енергії (з урахуванням енергії спокою).

Використовуючи вирази для імпульсу та енергії:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

можна знайти між ними два співвідношення. Перше очевидне:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\varepsilon\vec{v}}{c^2}}. \quad (2.3.3)$$

А для знаходження другого розрахуємо допоміжну комбінацію:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = \frac{m^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2.$$

Отже,

$$\boxed{\frac{\varepsilon^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2}. \quad (2.3.4)$$

Енергія, виражена через імпульс, називається *функцією Гамільтона*:

$$\boxed{H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}}. \quad (2.3.5)$$

При малих значеннях імпульсів ($p/mc \ll 1$) маємо:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

Зазначимо, що вираз

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

свідчить про те, що частинки з ненульовою масою не можуть рухатися зі швидкістю світла, оскільки в цьому випадку $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Для частинок з нульовою масою співвідношення між ε і p (**закон дисперсії**) стає таким

$$\boxed{p = \frac{\varepsilon}{c}}. \quad (2.3.6)$$

Ця формула наближено діє і для частинок з масою, відмінною від нуля, в так званому *ультрарелятивістському випадку*, коли енергія частинки велика в порівнянні з її енергією спокою.

2.4 Чотири-вектор енергії-імпульсу

Запишемо варіацію дії:

$$\delta S = -mc \int_a^b ds.$$

Але

$$ds = \sqrt{dx_i dx^i},$$

тому

$$\delta ds = \frac{1}{2\sqrt{dx_i dx^i}} \cdot (d\delta x_i dx^i + dx_i d\delta x^i) = \frac{2dx_i d\delta x^i}{2ds} = u_i d\delta x^i.$$

Підставляючи цей вираз в інтеграл дії і інтегруючи частинами, зробивши при цьому заміну $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$, отримуємо:

$$\delta S = -mc \int_a^b u_i d\delta x^i = -mc u_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \quad (2.4.1)$$

Як відомо, для знаходження рівняння руху порівнюються різні траєкторії, які проходять через два *задані* положення на границях інтервалу, тобто за умови $\delta x^i(a) = \delta x^i(b) = 0$. Істинна траєкторія визначається з принципу найменшої дії, згідно з яким варіація дії має дорівнювати нулю. В такому разі, враховуючи довільність варіацій δx^i уздовж траєкторій руху, отримуємо рівняння істинної траєкторії:

$$\boxed{\frac{du^i}{ds} = 0}, \quad (2.4.2)$$

тобто незмінність 4-швидкості вільної частинки уздовж світової лінії.

Якщо ж треба знайти залежність δS як функцію δx^i для істинних траєкторій, то в інтегралі дії покладають

$$\delta x^i(a) = 0, \delta x^i(b) = \delta x^i.$$

В нашому випадку це дає:

$$\boxed{\delta S = -m c u_i \delta x^i}. \quad (2.4.3)$$

Чотири-вектор

$$\boxed{p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}}. \quad (2.4.4)$$

Називається **чотири-вектором енергії-імпульсу**, або просто **4-імпульсом**.

Згадаємо, що

$$\varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial t}, \vec{p} = \nabla S, \quad (2.4.5)$$

Тоді з (2.4.4) маємо:

$$p_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}, p_1 = -\frac{\partial S}{\partial x} = -p_x, p_2 = -p_y, p_3 = -p_z.$$

Отже,

$$p_i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, -\vec{p} \right),$$

$$\boxed{p^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p} \right)}. \quad (2.4.6)$$

Крім того, з (2.4.3) випливає, що

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = -m c u_i,$$

тому

$$\boxed{p^i = m c u^i}, \quad (2.4.7)$$

Зазначимо, що з цього виразу також можна прийти до формул (2.4.6).

Дійсно,

$$p^0 = m c u^0 = \frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon}{c},$$

$$p^1 = m c u^1 = \frac{m c v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_x,$$

аналогічно знаходяться й дві останні компоненти.

Ще одне корисне співвідношення можна отримати з (2.4.7), враховуючи (1.19.3):

$$\boxed{p^i p_i = m^2 c^2} \quad (2.4.8)$$

З нього, зокрема, з урахуванням (2.4.6), випливає і вже знайоме співвідношення (2.3.4):

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2,$$

Енергія та імпульс, як ми тепер з'ясували, є компонентами одного 4-вектора, тому для них можемо застосувати перетворення Лоренца:

$$\frac{\varepsilon}{c} = \frac{\frac{\varepsilon'}{c} + \frac{V}{c} p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c} \frac{\varepsilon'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

звідки

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\varepsilon' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}, \quad \boxed{p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} \varepsilon'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}, \quad \boxed{p_y = p'_y}, \quad \boxed{p_z = p'_z} \quad (2.4.9)$$

2.5 Чотири-вектор сили

По аналогії зі звичайним визначенням сили, **4-вектор сили** можемо визначити як похідну

$$\boxed{g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds}}. \quad (2.5.1)$$

По-перше, відзначимо, що, відповідно (1.19.5),

$$g_i u^i = 0.$$

Знайдемо компоненти 4-вектора сили:

$$\begin{aligned} g^0 &= \frac{dp^0}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\varepsilon}{c} \right) = \frac{d}{cdt \sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \\ &= \frac{m}{2\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{2\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ &= \frac{\vec{v}}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{f}_{\parallel})}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \\ &= \frac{vf \cos(\vec{v}, \vec{f})}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{(\vec{f} \cdot \vec{v})}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ g^1 &= \frac{dp^1}{ds} = \frac{dp_x}{ds} = \frac{dp_x}{cdt \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{f_x}{c \sqrt{1-v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

аналогічно знаходяться і дві інші компоненти. Отже,

$$\boxed{g^i = \left(\frac{(\vec{f} \cdot \vec{v})}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{f}}{c \sqrt{1-v^2/c^2}} \right)}. \quad (2.5.2)$$

2.6 Рівняння Гамільтона-Якобі

Користуючись означенням та властивостями 4-імпульсу, маємо:

$$p^i p_i = m^2 c^2,$$

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i},$$

звідки

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x^i} = m^2 c^2}. \quad (2.6.1)$$

Це – *чотиривимірне релятивістське рівняння Гамільтона-Якобі*.

Розписавши його в компонентах, отримуємо:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2.$$

Три останні доданки в правій частині є квадратом градієнта, тому остаточно маємо:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 = m^2 c^2} \quad (2.6.2)$$

Це – *релятивістське рівняння Гамільтона-Якобі в 3-вимірному вигляді*.

Для переходу до класичного випадку позначимо S , ε релятивістські дію та енергію відповідно, а S' , ε' – класичні. Слід згадати, що при переході до малих швидкостей

$$\varepsilon = \varepsilon' + mc^2,$$

а оскільки

$$\varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

то

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S'}{\partial t} + mc^2,$$

$$S = S' - mc^2 t.$$

Підставимо це співвідношення в 3-вимірне рівняння (2.6.2):

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} - mc^2 \right)^2 - (\nabla S')^2 = m^2 c^2,$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 - 2m \frac{\partial S'}{\partial t} - (\nabla S')^2 = 0,$$

При $c \rightarrow \infty$ отримаємо класичне рівняння Гамільтона-Якобі:

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S')^2 = 0.$$

2.7 Чотири-тензор моменту імпульсу

Як відомо з класичної механіки, в замкненій системі, крім енергії та імпульсу, зберігається ще й момент імпульсу, тобто величина

$$\vec{M} = \Sigma[\vec{r}, \vec{p}].$$

Збереження моменту імпульсу є наслідком того, що функція Лагранжа для замкненої системи в силу ізотропії простору не змінюється при повороті системи як цілого.

Виконуючи аналогічні перетворення в чотиривимірному вигляді, отримаємо релятивістський вираз для моменту. Нехай x^i – координати однієї з частинок системи. Здійснимо нескінченно малий поворот системи відліку в чотиривимірному просторі. Це є перетворення, при якому координати x^i приймають нові значення x'^i , так що різниця $x'^i - x^i$ є лінійною функцією координат:

$$\delta x^i = x'^i - x^i = x_k \delta \Omega^{ik},$$

з нескінченно малими коефіцієнтами $\delta \Omega^{ik}$. Компоненти 4-тензора $\delta \Omega^{ik}$ пов'язані при цьому співвідношеннями, які виникають в результаті вимоги щодо незмінності довжини 4-радіус-вектора при повороті, тобто $x'^i x'_i = x^i x_i$.

Записавши вирази для контраваріантних та коваріантних компонент:

$$x'^i = x^i - x_k \delta \Omega^{ik},$$

$$x'_i = x_i - x^m \delta \Omega_{im},$$

отримуємо:

$$\cancel{x'^i x'_i} = \cancel{x^i x_i} - x_i x_k \delta \Omega^{ik} - x^i x^m \delta \Omega_{im} + \cancel{x_k x^m \delta \Omega^{ik} \delta \Omega_{im}}.$$

Тут відкинутий доданок другого ступеня малості. Отже,

$$x_i x_k \delta \Omega^{ik} = 0.$$

Оскільки $x^i x^k$ – симетричний тензор, а добуток симетричного та антисиметричного тензорів завжди дорівнює нулю, то тензор $\delta \Omega^{ik}$ – антисиметричний.

Варіація дії при нескінченно малому повороті (сума береться по всіх частинках системи):

$$\delta S = -\sum m c u_i \delta x^i \Big|_a^b = -\sum p_i \delta x^i \Big|_a^b = -\sum p_i x_k \delta \Omega^{ik} \Big|_a^b.$$

Нагадаємо, що будь-який тензор можна представити у вигляді суми симетричного та антисиметричного тензорів. Так, наприклад,

$$p^i x^k = \frac{1}{2} (p^i x^k + x^i p^k) + \frac{1}{2} (p^i x^k - x^i p^k).$$

В такому разі для варіації дії маємо

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2} \sum (p^i x^k + x^i p^k) \delta \Omega_{ik} \Big|_a^b - \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - x^i p^k) \delta \Omega_{ik} \Big|_a^b = \\ &= -\frac{1}{2} \sum (p^i x^k - x^i p^k) \delta \Omega_{ik} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Для замкненої системи дія, будучи інваріантом, не змінюється при повороті в 4-просторі, тому отримаємо:

$$\sum (p^i x^k - x^i p^k) \Big|_a = \sum (p^i x^k - x^i p^k) \Big|_b.$$

Бачимо, що для замкненої системи залишається незмінним тензор

$$M^{ik} = \sum (x^i p^k - p^i x^k).$$

Цей антисиметричний тензор називається **4-тензором моменту імпульсу**.

2.8 Компоненти 4-тензора моменту імпульсу

Розрахуємо компоненти 4-тензора моменту:

$$M^{01} = \sum (x^0 p^1 - x^1 p^0) = \sum \left(c t p_x - x \frac{\varepsilon}{c} \right),$$

$$M^{02} = \sum \left(c t p_y - y \frac{\varepsilon}{c} \right),$$

$$M^{03} = \sum \left(c t p_z - z \frac{\varepsilon}{c} \right).$$

Зауважимо, що всі ці три компоненти можна об'єднати в одну векторну

$$c \sum \left(t\vec{p} - \frac{\varepsilon \vec{r}}{c^2} \right).$$

Далі,

$$M^{12} = \sum (x^1 p^2 - x^2 p^1) = \sum (x p_y - y p_x) = M_z,$$

$$M^{13} = \sum (x p_z - z p_x) = -M_y,$$

$$M^{23} = \sum (y p_z - z p_y) = M_x.$$

Тобто, останні три компоненти тензора моменту виражаються через компоненти тривимірного вектора моменту. Таким чином, маємо:

$$\left(M^{ik} \right) = \begin{pmatrix} 0 & c \sum \left(t p_x - x \frac{\varepsilon}{c^2} \right) & c \sum \left(t p_y - y \frac{\varepsilon}{c^2} \right) & c \sum \left(t p_z - z \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \\ -c \sum \left(t p_x - x \frac{\varepsilon}{c^2} \right) & 0 & M_z & -M_y \\ -c \sum \left(t p_y - y \frac{\varepsilon}{c^2} \right) & -M_z & 0 & M_x \\ -c \sum \left(t p_z - z \frac{\varepsilon}{c^2} \right) & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}$$

Порівнюючи цей тензор з загальним виглядом антисиметричного тензора (1.15.1), (1.15.2), можемо записати:

$$M^{ik} = \left(c \sum \left(t\vec{p} - \vec{r} \frac{\varepsilon}{c^2} \right), -\vec{M} \right),$$

$$M_{ik} = \left(-c \sum \left(t\vec{p} - \vec{r} \frac{\varepsilon}{c^2} \right), -\vec{M} \right).$$

2.9 Релятивістський центр інерції

В силу збереження моменту імпульсу для замкненої системи маємо:

$$\sum \left(t\vec{p} - \frac{\varepsilon \vec{r}}{c^2} \right) = \overrightarrow{const}.$$

Розділимо цей вираз на повну енергію системи, оскільки вона також зберігається, та домножимо на квадрат швидкості світла:

$$\frac{\sum \varepsilon \vec{r}}{\sum \varepsilon} - \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum \varepsilon} t = \overrightarrow{const}.$$

Звідси ми отримаємо, що точка з радіус-вектором

$$\vec{R} = \frac{\sum \varepsilon \vec{r}}{\sum \varepsilon},$$

рухається рівномірно й прямолінійно зі швидкістю (порівняйте з (2.3.3))

$$\vec{V} = \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum \varepsilon},$$

яку, очевидно, можна розглядати в якості швидкості руху системи як цілого.

Тобто, в таких позначеннях

$$\vec{R} = \overrightarrow{const} + \vec{V}t.$$

Величина

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\sum \varepsilon \vec{r}}{\sum \varepsilon}}$$

називається *релятивістським центром інерції*.

Зауважимо, що за малих швидкостей переважну частину енергії окремої частинки складає енергія спокою, тобто, $\varepsilon \approx mc^2$. В такому разі отримуємо знайомий вираз для класичного центру інерції:

$$\vec{R} = \frac{\sum m \vec{r}}{\sum m}.$$

Зауваження. При переході до іншої системи відліку центр інерції, взагалі кажучи, змінює своє положення. Слід врахувати, що \vec{R} не є компонентою якогось 4-вектора, а отже, і застосовувати до нього перетворення Лоренца не можна.

3. ЗАРЯД В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

В класичній теорії елементарною частинкою вважається будь-яке тіло положення якого в просторі можна було описати за допомогою трьох компонент радіус-вектора та трьох компонент швидкості. Взаємодія ж між тілами здійснюється, як відомо, завдяки наявності поля. В релятивістській теорії швидкість поширення сигналу є скінченною, тому при взаємодії двох тіл зміна стану одного з них відчуватиметься в різних точках другого тіла в різні моменти часу. Тобто, тіло будь-якого розміру буде деформуватися. Тому *елементарною частинкою в релятивістській механіці можна вважати тільки точкову частинку.*

3.1 Дія для частинки в електромагнітному полі. Чотири-потенціал

Дія для частинки, яка рухається в заданому електромагнітному полі, складається з двох частин: із дії вільної частинки

$$S_m = -mc \int_a^b ds,$$

а також з частини дії, яка описує взаємодію частинки з полем. Ця частина дії має містити як величину, що характеризує частинку, так і величину, що характеризує поле. Отже, дія для частинки в електромагнітному полі має вигляд:

$$S_e = -\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i,$$

де e - заряд частинки.

Три просторові компоненти **4-вектора потенціалу** A^i складають тривимірний вектор \vec{A} , який називається **векторним потенціалом** поля. Часову ж компоненту називають **скалярним потенціалом** і позначають φ . Таким чином маємо:

$$\boxed{A^i = (\varphi, \vec{A})}. \quad (3.1.1)$$

Отже, повна дія для частинки в електромагнітному полі:

$$S = -mc \int_a^b ds - \frac{e^b}{c_a} \int A_i dx^i. \quad (3.1.2)$$

Розпишемо складові інтегралу дії в тривимірному вигляді:

$$\begin{aligned} S &= -mc \int_a^b c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e^b}{c_a} \int dt \left(c\varphi - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \\ &= \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e\varphi \right) dt \end{aligned}$$

Підінтегральний вираз є **функцією Лагранжа для заряду в електромагнітному полі**:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e\varphi. \quad (3.1.3)$$

Похідна $\partial L / \partial \vec{v}$ є **узагальненим імпульсом частинки**. Виконуючи диференціювання, знаходимо:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (3.1.4)$$

де \vec{p} – звичайний імпульс.

З функції Лагранжа можемо знайти **функцію Гамільтона частинки в полі** за відомою загальною формулою:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right) + \\ &+ mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e\varphi = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \end{aligned}$$

Отже,

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (3.1.5)$$

Під величиною

$$\varepsilon_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.1.6)$$

будемо розуміти кінетичну енергію частинки разом з її енергією спокою.

Тоді можемо переписати функцію Гамільтона у вигляді:

$$\mathcal{H} = \varepsilon_k + e\varphi.$$

Але ж функція Гамільтона має бути виражена через узагальнений імпульс, а не через швидкість. Згадуючи співвідношення (2.3.4)

$$\frac{\varepsilon_k^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$$

і виражаючи кінетичну енергію через функцію Гамільтона (3.1.5), а імпульс – через узагальнений імпульс (3.1.4):

$$\varepsilon_k = \mathcal{H} - e\varphi, \quad \vec{p} = \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A},$$

отримуємо **функцію Гамільтона для заряду в електромагнітному полі:**

$$\boxed{\mathcal{H} = c \sqrt{\left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2c^2} + e\varphi.} \quad (3.1.7)$$

Для малих швидкостей ($v/c \ll 1$) функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi.$$

В цьому наближенні $\vec{p} \approx m\vec{v}$, і можемо отримати наступний вираз для функції Гамільтона:

$$\mathcal{H} = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = mv^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - \frac{mv^2}{2} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e\varphi = \frac{mv^2}{2} + e\varphi = \frac{p^2}{2m} + e\varphi.$$

Враховуючи (3.1.4), маємо:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi.$$

Запишемо тепер рівняння Гамільтона-Якобі. Для цього достатньо зробити заміну $\mathcal{H} = -\partial S/\partial t$; $\vec{P} = \nabla S$ в функції Гамільтона (3.1.7). Таким чином, отримаємо:

$$\boxed{\left(\nabla S - \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0} \quad (3.1.8)$$

Це – *рівняння Гамільтона-Якобі для частинки в електромагнітному полі.*

3.2 Рівняння руху заряду в електромагнітному полі

Заряд, який знаходиться в зовнішньому полі, не тільки піддається впливу зі сторони поля, але, в свою чергу, і сам впливає на поле, змінюючи його. Але якщо заряд невеликий, то його дією на поле можна знехтувати. В такому випадку, розглядаючи рух в заданому полі, можна вважати, що саме поле не залежить ані від місця знаходження заряду, ані від його швидкості.

Отже, ми маємо знайти рівняння руху заряду в даному електромагнітному полі. Отримаємо ці рівняння за допомогою рівняння Лагранжа. Лагранжیان (3.1.3)

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e\varphi$$

підставимо в рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \nabla L.$$

Тут ми об'єднали всі просторові компоненти швидкості та градієнта в відповідні вектори. Тепер знаходимо відповідні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Нагадаємо, що в лагранжевому формалізмі диференціювання по \vec{r} виконується при сталому \vec{v} , і навпаки. Отже,

$$\nabla L = \frac{e}{c} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \nabla \varphi,$$

причому, відповідно до формули

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + [\vec{a} \times \text{rot}\vec{b}] + [\vec{b} \times \text{rot}\vec{a}],$$

маємо

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + [\vec{v} \times \text{rot}\vec{A}].$$

Далі,

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A},$$

тому рівняння набуває вигляду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \text{rot}\vec{A}] - e\nabla\varphi.$$

Врахуємо, що векторний потенціал має як явну залежність від часу, так і опосередковану – через зміну поля при переміщенні частинки в просторі між точками, які відрізняються значенням векторного потенціалу, тому

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}.$$

Отже, маємо:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} = \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \text{rot}\vec{A}] - e\nabla\varphi$$

або

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \text{rot}\vec{A}]} \quad (3.2.1)$$

Це і є **рівняння руху частинки в електромагнітному полі**. В лівій частині стоїть похідна від імпульсу частинки за часом. А вираз в правій частині є, відповідно, силою, яка діє на заряд в електромагнітному полі. Бачимо, що ця сила складається з двох частин: перша не залежить від швидкості частинки, друга ж є пропорційною до величини швидкості і перпендикулярна до її напрямку.

Силу першого роду, віднесену до одиничного заряду, називають **напруженістю електричного поля**:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (3.2.2)$$

В силі ж другого роду величину

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (3.2.3)$$

називають *напруженістю магнітного поля*.

Якщо в електромагнітному полі $\vec{E} \neq 0$, а $\vec{H} = 0$, то говорять про *електричне поле*; якщо ж $\vec{E} = 0$, а $\vec{H} \neq 0$, то поле називають *магнітним*. В загальному випадку електромагнітне поле є накладанням електричного і магнітного полів.

Відзначимо, що напруженість електричного поля є *полярним* вектором, а напруженість магнітного поля – *аксіальним*.

Тепер рівняння руху заряду в електромагнітному полі можна записати у вигляді:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]. \quad (3.2.4)$$

Сила, що стоїть в правій частині, називається *силою Лоренца*:

$$\vec{f}_L = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]. \quad (3.2.5)$$

Перший доданок – сила, з якою діє електричне поле на заряд, – не залежить від швидкості заряду, і ця сила є паралельною до напрямку поля \vec{E} . Друга частина – сила, з якою діє магнітне поле на заряд, – пропорційна швидкості заряду і напрямлена перпендикулярно до цієї швидкості і до напрямку магнітного поля \vec{H} .

Для малих швидкостей ($v/c \ll 1$) з урахуванням значення імпульсу $\vec{p} \approx m\vec{v}$ рівняння руху заряду матиме вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]. \quad (3.2.6)$$

3.3 Зміна кінетичної енергії заряду з часом

Визначимо, як змінюється з часом кінетична енергія зарядженої частинки
(3.1.6)

$$\varepsilon_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = \frac{m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} = v \frac{dp_{\parallel}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot [\vec{v} \times \vec{H}] = e\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Отже,

$$\boxed{\frac{d\varepsilon_k}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}}. \quad (3.3.1)$$

Записавши швидкість як часову похідну від радіус-вектора, отримаємо:

$$d\varepsilon_k = e\vec{E} \cdot d\vec{r} = \delta A.$$

Тобто, зміна кінетичної енергії заряду дорівнює роботі поля по переміщенню заряду на вектор $d\vec{r}$ за час dt .

Зауваження. Роботу над зарядом здійснює тільки електричне поле, оскільки магнітне поле завжди перпендикулярне до швидкості частинки.

3.4 Інваріантність рівняння руху заряду щодо обертання часу

В класичній механіці рівняння руху інваріантні щодо заміни $t \rightarrow -t$. Тобто, якщо можливий рух в прямому напрямку, він є можливим також і в зворотному. Дослідимо релятивістське рівняння руху заряду (3.2.4):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}].$$

Якщо зробити заміну $t \rightarrow -t$, то швидкість і імпульс змінять свій знак на протилежний, оскільки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

А отже, в лівій частині рівняння зміни знаку не відбудеться:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Бачимо, що рівняння руху не зміняться тільки за виконання умов, що при обертанні напрямку часу $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$.

Тобто зворотній рух заряду по тій самій траєкторії можливий в тому ж самому електричному полі, але в протилежно напрямленому магнітному. Оскільки

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A},$$

То для потенціалів ця умова означає, що

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A}, \quad \varphi \rightarrow \varphi.$$

3.5 Калібровочна інваріантність

Визначимо, чи є якась свобода вибору потенціалів, чи вони визначені однозначно. Питання постає, виходячи з того, що сила, яка діє на заряд, визначається напруженістю електромагнітного поля, а не самими потенціалами. Напруженість же виражається лише через похідні від потенціалів.

Якщо задані потенціали \vec{A} і φ , то цим, відповідно, повністю визначенні напруженості \vec{E} і \vec{H} . Проте, одному і тому ж полю можуть відповідати різні потенціали. Щоб переконатися в цьому, додамо до кожної компоненти 4-потенціалу A_i величину $-\frac{\partial f}{\partial x^i}$, де $f(\vec{r}, t)$ – будь-яка функція координат та часу. Тоді потенціал A_i переходить в

$$\boxed{A'_i = A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}} \quad (3.5.1)$$

При такій заміні в інтегралі дії замість доданку S_e з'явиться доданок

$$\begin{aligned} S'_e &= -\frac{e}{c} \int A'_i dx^i = -\frac{e}{c} \int \left(A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i = -\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \\ &= -\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i + \int_a^b df = S_e + f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Очевидно, під час знаходження рівнянь руху заряду варіація цих двох величин

$$\delta S_e = \delta S'_e.$$

З (3.5.1) отримуємо для тривимірних потенціалів:

$$-\vec{A}' = -\vec{A} - \frac{\partial f}{\partial \vec{r}},$$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f}, \quad \boxed{\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (3.5.2)$$

Зазначимо, що $f(\vec{r}, t)$ – довільна функція, але однакова для визначення потенціалів \vec{A} і φ . При такій заміні потенціалів, очевидно, напруженості полів залишаються незмінними:

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \varphi' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla f}{\partial t} - \nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla f}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = \vec{E},$$

$$\vec{H}' = \text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \nabla f = \text{rot} \vec{A} = \vec{H}.$$

Зокрема, до скалярного потенціалу можна додати будь-яку константу, а до векторного потенціалу – будь-який сталий вектор.

Підкреслимо, що фізичний зміст мають лише ті величини, які інваріантні по відношенню до вищезгаданих перетворень потенціалів (3.5.1), (3.5.2). Цю інваріантність називають **калібровочною** або **градієнтною**. Калібровочна інваріантність дає можливість накласти одну додаткову умову на потенціали. Наприклад, вибрати $f(\vec{r}, t)$ так, щоб скалярний потенціал $\varphi = 0$ (проте, в загальному випадку неможливо накласти умову $\vec{A} = 0$, оскільки ця умова еквівалентна накладанню одразу трьох умов – на всі три компоненти вектора \vec{A} , а довільна функція $f(\vec{r}, t)$ лише одна).

3.6 Постійне електромагнітне поле

Постійним електромагнітним полем називається поле, напруженість якого не залежить від часу. Очевидно, що потенціали постійного поля також можуть бути вибрані незалежними від часу. В такому разі

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \vec{H} = \text{rot}\vec{A}}. \quad (3.6.1)$$

Тобто електричне поле \vec{E} залежить лише від скалярного потенціалу φ , а магнітне \vec{H} – тільки від векторного потенціалу \vec{A} .

Таким чином, до φ можемо додати, не змінюючи поле, лише довільну константу, а до \vec{A} – градієнт будь-якої функції лише координат $\nabla f(\vec{r})$.

Для постійного поля гамільтоніан заряду також не залежить від часу і дорівнює енергії:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi}. \quad (3.6.2)$$

Якщо напруженість поля в усіх точках простору однакова, то поле називається **однорідним**. Скалярний потенціал *постійного однорідного електричного поля* можна вибрати у вигляді

$$\boxed{\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{r}}. \quad (3.6.3)$$

Дійсно, при $\vec{E} = \overrightarrow{\text{const}}$ маємо:

$$-\nabla\varphi = \nabla(\vec{E} \cdot \vec{r}) = \underbrace{(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{r}}_{\vec{E}} + \cancel{(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{E}} + [\vec{E} \times \cancel{\text{rot}\vec{r}}] + [\vec{r} \times \cancel{\text{rot}\vec{E}}] = \vec{E}.$$

Векторний потенціал *постійного однорідного магнітного поля* можна вибрати у вигляді

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{H} \times \vec{r}]}. \quad (3.6.4)$$

Дійсно, при $\vec{H} = \overrightarrow{\text{const}}$ маємо:

$$\text{rot}\vec{A} = \frac{1}{2}\text{rot}[\vec{H} \times \vec{r}] = \frac{1}{2}\left(\vec{H} \underbrace{\text{div}\vec{r}}_3 - \vec{r} \text{div}\vec{H} + \cancel{(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{H}} - \underbrace{(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{r}}_{\vec{H}}\right) = \vec{H}.$$

Спрямуємо вектор напруженості постійного однорідного магнітного поля \vec{H} уздовж осі z , тоді векторний потенціал можна вибрати й у іншому вигляді:

$$A_x = -Hy, A_y = A_z = 0. \quad (3.6.5)$$

Дійсно,

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -Hy & 0 & 0 \end{vmatrix} = H\vec{k} = \vec{H}.$$

Різні варіанти вибору потенціалу називають *калібровками*. Оскільки вибір векторного потенціалу здійснюється з точністю до $\nabla f(\vec{r})$, знайдемо таку функцію $f(\vec{r})$, яка пов'язує (3.6.4) та (3.6.5) у випадку магнітного поля, спрямованого уздовж осі z . Позначимо ці векторні потенціали \vec{A}_1 та \vec{A}_2 відповідно.

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{2}[\vec{H} \times \vec{r}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & H \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{Hy}{2}\vec{i} + \frac{Hx}{2}\vec{j}$$

$$\vec{A}_2 = -Hy\vec{i}.$$

Враховуючи, що має виконуватися умова калибровочної інваріантності

$$\vec{A}_1 + \nabla f = \vec{A}_2,$$

бачимо, що ця умова задовольняється при

$$f = -\frac{xyH}{2}.$$

Дійсно,

$$\vec{A}_1 + \nabla f = -\frac{Hy}{2}\vec{i} + \frac{Hx}{2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{xyH}{2}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{xyH}{2}\right)\vec{j} = -Hy\vec{i} = \vec{A}_2$$

3.7 Рух заряду в постійному однорідному електричному полі

Розглянемо рух заряду в постійному однорідному електричному полі \vec{E} . Напрямок поля приймемо за вісь x . Рух буде відбуватися в площині, яку виберемо за площину xy . Вважатимемо, що заряд має початковий імпульс p_0 уздовж напрямку, перпендикулярного напрямку поля, тобто, уздовж осі y . Тоді рівняння руху матимуть вигляд:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}.$$

Розпишемо в компонентах:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = eE, \\ \frac{dp_y}{dt} = 0. \end{cases}$$

Звідси, з урахуванням початкових умов, отримаємо

$$\begin{cases} p_x = eEt, \\ p_y = p_0. \end{cases} \quad (3.7.1)$$

Наша задача – знайти рівняння руху, тож треба перейти спочатку до рівнянь, з яких можна визначити часові залежності координат, а це можна зробити інтегруванням часових залежностей швидкості. Отже, нам треба спочатку виразити імпульс через швидкість (див. (2.3.3)):

$$\vec{p} = \frac{\epsilon\vec{v}}{c^2}.$$

Тоді з (3.7.1) маємо:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon v_x}{c^2} = eEt, \\ \frac{\epsilon v_y}{c^2} = p_0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} v_x = \frac{c^2 eEt}{\varepsilon}, \\ v_y = \frac{c^2 p_0}{\varepsilon}. \end{cases} \quad (3.7.2)$$

Але треба пам'ятати, що енергія заряду в зовнішньому електричному полі не є константою, тож слід також знайти явну залежність енергії від часу. Для цього скористаємося виразом (2.3.4):

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2,$$

звідки, з урахуванням (3.7.1),

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{(ceEt)^2 + p_0^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2},$$

де ε_0 – енергія при $t = 0$. Підставляємо цей вираз в (3.7.2):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}. \end{cases}$$

Розділяємо змінні:

$$\begin{cases} dx = \frac{c^2 eEtdt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}, \\ dy = \frac{c^2 p_0 dt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}. \end{cases}$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$x = \int \frac{c^2 eEtdt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2} = z \\ dz = \frac{(ceE)^2 t dt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}} \end{array} \right| = \frac{1}{eE} \int dz = \frac{1}{eE} \sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Сталу інтегрування тут обрали рівною нулю.

$$y = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\varepsilon_0}.$$

Отже, часові залежності координат отримані. Для знаходження ж рівняння траєкторії зауважимо, що з останнього рівняння

$$\frac{ceEt}{\varepsilon_0} = sh \frac{eEy}{cp_0},$$

тобто

$$ceEt = \varepsilon_0 sh \frac{eEy}{cp_0}.$$

Підставимо це значення в x :

$$x = \frac{\varepsilon_0}{eE} \sqrt{1 + sh^2 \frac{eEy}{cp_0}} = \frac{\varepsilon_0}{eE} ch \frac{eEy}{cp_0}.$$

Отже, рівняння траєкторії має вигляд:

$$\boxed{x = \frac{\varepsilon_0}{eE} ch \frac{eEy}{cp_0}}.$$

Це – рівняння ланцюжкової лінії.

Якщо $v \ll c$, то $\varepsilon_0 \approx mc^2$, $p_0 \approx mv_0$, $ch \delta \approx 1 + \frac{\delta^2}{2}$, тому

$$x \approx \frac{mc^2}{eE} \left(1 + \frac{e^2 E^2 y^2}{2c^2 m^2 v_0^2} \right) = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \frac{mc^2}{eE}.$$

Це – добре відоме рівняння параболи, яке описує рух заряду в класичному випадку.

3.8 Рух заряду в постійному однорідному магнітному полі

Розглянемо тепер рух заряду в постійному однорідному магнітному полі. Виберемо напрямок поля уздовж осі z . Рівняння руху в такому разі:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}].$$

Або в проекціях на осі координат:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \frac{eH}{c} v_y, \\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{eH}{c} v_x, \\ \frac{dp_z}{dt} = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо:

$$p_z = p_{0z}.$$

Враховуючи (2.3.3), запишемо:

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2},$$

ТОЖ

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{dv_x}{dt} = \frac{eH}{c} v_y, \\ \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{dv_y}{dt} = -\frac{eH}{c} v_x, \\ v_z = v_{0z}. \end{cases}$$

Тут пам'ятаємо, що магнітна частина сили Лоренца не змінює енергію частинки в зовнішньому магнітному полі, тому $\varepsilon = const$. Отже, перші два рівняння дають:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{ceH}{\varepsilon} v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{ceH}{\varepsilon} v_x. \end{cases}$$

Третє ж рівняння дає:

$$\boxed{z = z_0 + v_{0z}t}. \quad (3.8.1)$$

Введемо позначення $\omega = \frac{ceH}{\varepsilon}$. Помножимо друге рівняння останньої системи на комплексну одиницю i та додамо до першого:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = \omega(v_y - iv_x),$$

або

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y).$$

Це – рівняння з роздільними змінними відносно функції $(v_x + iv_y)$, розв'язок якого:

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

де a – комплексна стала, яку можна записати у вигляді $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, де v_{0t} і α дійсні. Тобто

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

або, за формулою Ейлера,

$$v_x + iv_y = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha) - iv_{0t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Розділяючи дійсну та уявну частини, знаходимо

$$\begin{cases} v_x = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha), \\ v_y = -v_{0t} \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (3.8.2)$$

Бачимо, що

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{0t}^2,$$

тобто проекція швидкості частинки на площину xu є константою за абсолютним значенням. Інтегруючи (3.8.2), отримуємо:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{0t}}{\omega} \sin(\omega t + \alpha), \\ y = y_0 + \frac{v_{0t}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

При цьому

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_{0t}^2}{\omega^2}.$$

Тобто, проекцією траєкторії руху частинки на координатну площину xu є коло радіусу

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{\varepsilon v_{0t}}{ceH} = \frac{cp_{0t}}{eH}.$$

З урахуванням (3.8.1) сама траєкторія є *гвинтовою лінією* з віссю, паралельною до напрямку магнітного поля, а $\omega = ceH/\varepsilon$ має значення циклічної частоти обертання.

Зазначимо, що при переході до малих швидкостей, з урахуванням $\varepsilon \approx mc^2$,

$$\omega \approx \frac{eH}{mc}.$$

3.9 Рух заряду в схрещених постійних однорідних електричному та магнітному полях в нерелятивістському випадку

Направимо постійне однорідне магнітне поле уздовж осі z , а вектор постійного однорідного електричного поля нехай лежить в площині yz . Класичне рівняння руху заряду має вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}].$$

В проєкціях маємо:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = \frac{eH}{c} v_y, \\ m \frac{dv_y}{dt} = eE_y - \frac{eH}{c} v_x, \\ m \frac{dv_z}{dt} = eE_z. \end{cases}$$

З останнього рівняння отримуємо:

$$v_z = v_{0z} + \frac{eE_z}{m} t,$$

$$z = z_0 + v_{0z} t + \frac{eE_z}{2m} t^2,$$

тобто маємо рівноприскорений рух уздовж осі z . Інші два рівняння дають:

$$\frac{d}{dt} (v_x + iv_y) = i \frac{eE_y}{m} - i \frac{eH}{mc} (v_x + iv_y).$$

Позначивши

$$\omega = \frac{eH}{mc},$$

перепишемо:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) + i\omega(v_x + iv_y) = i\frac{eE_y}{m},$$

Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі, представивши

$$v_x + iv_y = UV:$$

$$U \frac{dV}{dt} + V \frac{dU}{dt} + i\omega UV = i\frac{eE_y}{m}.$$

Обираємо функцію U так, щоб

$$\frac{dU}{dt} + i\omega U = 0,$$

тобто

$$U = e^{-i\omega t}.$$

Тоді

$$U \frac{dV}{dt} = i\frac{eE_y}{m},$$

$$dV = i\frac{eE_y}{m} e^{i\omega t} dt,$$

$$V = \frac{eE_y}{m\omega} e^{i\omega t} + a.$$

Оберемо початок відліку часу так, щоб константа a була дійсною. Отже,

$$v_x + iv_y = UV = \frac{eE_y}{m\omega} + ae^{-i\omega t}.$$

Розділивши дійсну та уявну частини, запишемо:

$$\begin{cases} v_x = \frac{eE_y}{m\omega} + a \cos \omega t, \\ v_y = -a \sin \omega t, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} v_x = \frac{cE_y}{H} + a \cos \omega t, \\ v_y = -a \sin \omega t. \end{cases} \quad (3.9.1.)$$

Зазначимо, що середні значення компонент швидкості звідси:

$$\begin{cases} \bar{v}_x = \frac{cE_y}{H}, \\ \bar{v}_y = 0. \end{cases}$$

Цю середню швидкість руху заряду в перехресних електричному й магнітному полях називають **швидкістю електричного дрейфу**. Її напрям перпендикулярний до напрямків обох полів і залежить від знаку заряду. У векторному вигляді її можна записати як

$$\bar{v} = c \frac{[\vec{E} \times \vec{H}]}{H^2}.$$

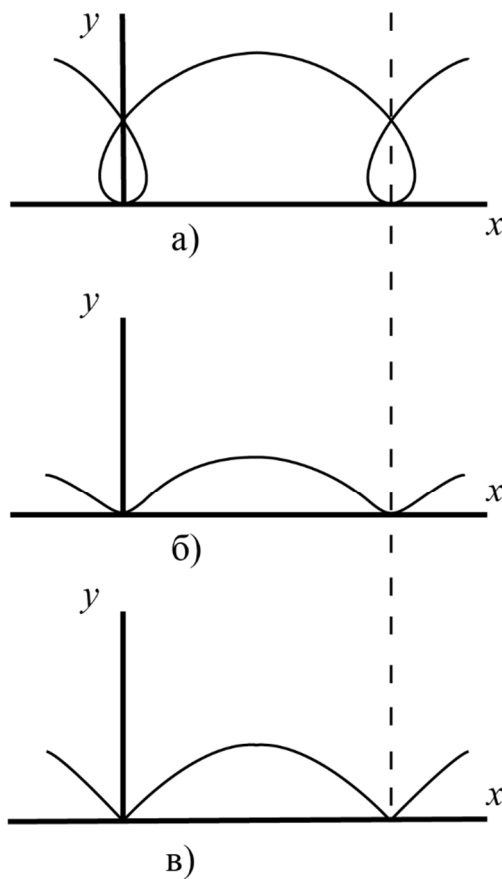
Оскільки в нерелятивістському випадку, який ми розглядаємо, $v/c \ll 1$, то для виконання цієї умови потрібно, щоб

$$\frac{E_y}{H} \ll 1.$$

Причому, самі значення E_y і H можуть бути довільними в рамках останньої умови. Проінтегрувавши рівняння (3.9.1) і обираючи сталі інтегрування за умови $x(0) = y(0) = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H} t, \\ y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \end{cases}$$

Ця пара параметрично заданих рівнянь відповідає *трохоїді*. В залежності від того, більше чи менше абсолютне значення a , ніж абсолютне значення $\frac{cE_y}{H}$, проекція траєкторії частинки на площину xu має, відповідно, вигляд, наведений на рис. 3.1 (а) та рис. 3.1 (б).



Якщо ж $a = -\frac{cE_y}{H}$, то проекція траєкторії на площину $xу$ є *циклоїдою* (рис. 3.1(в)):

$$\begin{cases} x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin \omega t), \\ y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t). \end{cases}$$

Рис. 3.1.

3.10 Тензор електромагнітного поля. 4-вимірне рівняння руху заряду в електромагнітному полі.

Запишемо інтеграл дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$S = -mc \int_a^b ds - \frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i.$$

Проваріюємо дію і спробуємо отримати рівняння руху заряду в чотиривимірному вигляді.

$$\delta S = \int_a^b \left(-mc \delta ds - \frac{e}{c} \delta (A_i dx^i) \right).$$

Зазначимо, що

$$\delta ds = \delta \sqrt{dx_i dx^i} = \frac{2 dx_i d\delta x^i}{2\sqrt{dx_i dx^i}} = \frac{dx_i}{ds} d\delta x^i = u_i d\delta x^i,$$

$$\delta(A_i dx^i) = \delta A_i dx^i + A_i d\delta x^i,$$

Тоді

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_a^b \left(-m c u_i d\delta x^i - \frac{e}{c} A_i d\delta x^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \\ & + \int_a^b \left(m c d u_i \delta x^i + \frac{e}{c} d A_i \delta x^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right). \end{aligned}$$

Тут перші два доданки під інтегралом проінтегровані частинами. Далі робимо заміни:

$$\begin{aligned} d u_i &= \frac{d u^i}{d s} d s, \\ d A_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{d x^k}{d s} d s = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k d s, \\ \delta A_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k, \\ d x^i &= \frac{d x^i}{d s} d s = u^i d s. \end{aligned}$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left(m c \frac{d u_i}{d s} d s \delta x^i - \frac{e}{c} \left(\underbrace{\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k u^i d s}_{i \leftrightarrow k} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k d s \delta x^i \right) \right) = \\ &= - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left(m c \frac{d u_i}{d s} d s \delta x^i - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \delta x^i u^k d s - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k d s \delta x^i \right) \right) = \\ &= - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left(m c \frac{d u_i}{d s} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right) d s \delta x^i. \end{aligned}$$

Рівняння істинної траєкторії знаходиться за умови $\delta S = 0$,
 $\delta x^i(a) = \delta x^i(b) = 0$.

Введемо позначення

$$\boxed{F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}}. \quad (3.10.1)$$

Цей антисиметричний тензор називається **тензором електромагнітного поля**. Тоді отримане рівняння запишемо у вигляді:

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k,$$

або для контраваріантних компонент:

$$\boxed{mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k}. \quad (3.10.2)$$

Це – *рівняння руху заряду в чотиривимірному вигляді*.

Для істинних же траєкторій за умови $\delta x^i(a) = 0, \delta x^i(b) = \delta x^i$ маємо залежність варіації дії від варіації координат:

$$\boxed{\delta S = - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i}. \quad (3.10.3)$$

3.11 Компоненти тензора електромагнітного поля

По-перше, тензор електромагнітного поля – антисиметричний.

Визначимо його компоненти з урахуванням того, що $A_i = (\varphi, -\vec{A})$:

$$\begin{aligned} F_{01} &= \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x, \\ F_{02} &= \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y, \\ F_{03} &= \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_z, \\ F_{12} &= \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -[\text{rot} \vec{A}]_z = -H_z, \\ F_{13} &= \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = [\text{rot} \vec{A}]_y = H_y, \\ F_{23} &= \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -[\text{rot} \vec{A}]_x = -H_x. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо загальний вигляд тензора електромагнітного поля в коваріантних та контраваріантних компонентах:

$$\left(F_{ik} \right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad \left(F^{ik} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11.1)$$

У відповідності до (1.15.2), можемо записати умовне вираження тензора електромагнітного поля через компоненти полярного вектора напруженості електричного поля та аксіального вектора напруженості магнітного поля:

$$F_{ik} = (\vec{E}, \vec{H}), \quad F^{ik} = (-\vec{E}, \vec{H}).$$

Таким чином, компоненти напруженостей електричного і магнітного полів є компонентами одного 4-тензора електромагнітного поля.

3.12 Перехід від чотиривимірного рівняння руху заряду до тривимірних

Розпишемо покомпонентно рівняння (3.10.2) з урахуванням (3.11.1), (1.19.2), (2.4.6) та (2.4.7), а також співвідношення

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.12.1)$$

Отже,

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k.$$

Для компоненти $i = 1$:

$$mc \frac{du^1}{ds} = \frac{e}{c} (F^{10} u_0 + F^{12} u_2 + F^{13} u_3),$$

$$\frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} \left(\frac{E_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{-H_z (-v_y)}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{H_y (-v_z)}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

$$\frac{dp_x}{dt} = e \left(E_x + \frac{1}{c} (H_z v_y - H_y v_z) \right).$$

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]_x,$$

Аналогічно отримуємо дві інші просторові компоненти рівняння

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}].$$

Для компоненти $i = 0$ маємо:

$$mc \frac{du^0}{ds} = \frac{e}{c} (F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3),$$

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_k}{c} \right) = \frac{e}{c} \left(\frac{-E_x(-v_x)}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{-E_y(-v_y)}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{-E_z(-v_z)}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Тобто нульова компонента рівняння (3.10.2) описує зміну кінетичної енергії заряду в зовнішньому полі (3.3.1), а три просторові – аналогічні тривимірному рівнянню руху заряду (3.2.4).

3.13 Чотири-вектор узагальненого імпульсу

Якщо розглядати в варіації тільки істинні траєкторії, то, відповідно до (3.10.3):

$$\delta S = - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i = - \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i.$$

Чотири-вектор $P_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$ є **4-вектором узагальненого імпульсу**

частинки. Таким чином,

$$P_i = p_i + \frac{e}{c} A_i,$$

$$\boxed{P^i = p^i + \frac{e}{c} A^i}. \quad (3.13.1)$$

Згадавши компоненти 4-вектора енергії-імпульсу (2.4.6) та 4-потенціалу (3.1.1), маємо:

$$P^i = \left(\frac{\varepsilon_k + e\varphi}{c}, \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right). \quad (3.13.2)$$

Як і очікувалося, просторові компоненти 4-вектора P^i створюють тривимірний вектор узагальненого імпульсу, а часова компонента дорівнює $\frac{\varepsilon}{c}$, де ε – повна енергія заряду в полі.

3.14 Перетворення Лоренца для електромагнітного поля

Знайдемо формули перетворення для поля, тобто формули, за якими можна визначити поле в якійсь інерціальній системі відліку, знаючи поле в іншій системі.

Формули перетворення для потенціалів знаходяться безпосередньо з загальних формул перетворення 4-вектора. Пам'ятаємо, що $A^i = (\varphi, \vec{A})$, тож

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

звідки

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Аналогічно для інших компонент. Отже,

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для визначення напруженостей полів скористаємося правилом перетворення Лоренца для компонент антисиметричного 4-тензора другого

рангу, яким є тензор електромагнітного поля. Так, для електричного поля отримаємо:

$$F^{01} = F'^{01} \Rightarrow \boxed{E_x = E'_x},$$

$$F^{02} = \frac{F'^{02} + \frac{V}{c} F'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow -E_y = \frac{-E'_y - \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \boxed{E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$F^{03} = \frac{F'^{03} + \frac{V}{c} F'^{13}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow -E_z = \frac{-E'_z + \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \boxed{E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

А для магнітного поля:

$$F^{23} = F'^{23} \Rightarrow \boxed{H_x = H'_x},$$

$$F^{12} = \frac{F'^{12} + \frac{V}{c} F'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow -H_z = \frac{-H'_z - \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \boxed{H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$F^{13} = \frac{F'^{13} + \frac{V}{c} F'^{03}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Таким чином, електричне і магнітне поля, як і більшість фізичних величин, відносні, тобто їх властивості різні в різних системах відліку. Зокрема, електричне або магнітне поле може бути рівним нулю в одній системі відліку і в той же час бути присутніми в інших системах.

Формули перетворення для електричного і магнітного полів спрощуються для випадку, коли $V/c \ll 1$. Запишемо їх з точністю до лінійних по V/c членів розкладання в ряд:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= E'_x \\ E_y &= E'_y + \frac{V}{c} H'_z \\ E_z &= E'_z - \frac{V}{c} H'_y \end{aligned}}, \quad \boxed{\begin{aligned} H_x &= H'_x \\ H_y &= H'_y - \frac{V}{c} E'_z \\ H_z &= H'_z + \frac{V}{c} E'_y \end{aligned}}.$$

Об'єднаємо ці формули в векторні, враховуючи, що відносна швидкість руху систем відліку паралельна осі x :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}' - \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{H}'] \\ \vec{H} &= \vec{H}' + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{E}'] \end{aligned}}$$

Формули оберненого перетворення від K' до K можна отримати, переставивши штрихи і змінивши знак V .

Якщо в якійсь системі K' магнітне поле $\vec{H}' = 0$, то між електричним і магнітним полями в системі K існує співвідношення

$$\vec{H} = \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{E}].$$

Якщо ж в K' поле $\vec{E}' = 0$, то в системі K маємо

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{H}].$$

В обох випадках в системі K магнітні та електричні поля взаємно перпендикулярні.

Ці формули мають, зрозуміло, і зворотний сенс: якщо в деякій системі відліку K поля \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні (але не рівні за величиною), то існує така система K' , в якій поле чисто електричне або чисто магнітне. Швидкість V цієї системи (по відношенню до K) може бути вибрана перпендикулярною до \vec{E} і \vec{H} , тоді за величиною вона дорівнює в першому випадку $\frac{cH}{E}$ (причому має бути $H < E$), а в другому випадку $\frac{cE}{H}$ (причому $E < H$).

3.15 Інваріанти електромагнітного поля

З векторів напруженостей електричного і магнітного полів можна скласти інваріантні величини, що залишаються незмінними при перетвореннях від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Вигляд цих інваріантів легко знайти, виходячи з чотиривимірного представлення поля за допомогою антисиметричного 4-тензора електромагнітного поля F^{ik} . Очевидно, що з компонент цього тензора можна скласти наступні два інваріанти:

$$\boxed{F^{ik} F_{ik} = \text{inv},}$$
$$\boxed{e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \text{inv},}$$

де e^{iklm} – абсолютно антисиметричний тензор четвертого рангу. Перша з цих величин – істинний скаляр, а друга – псевдоскаляром (добуток тензора F^{ik} на дуальний йому псевдотензор).

Виражаючи компоненти F^{ik} через компоненти \vec{E} і \vec{H} , легко переконатися (**зробіть це самостійно!**) в тому, що в тривимірній формі ці інваріанти мають вигляд

$$F^{ik} F_{ik} = 2(H^2 - E^2),$$

$$e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = 2(\vec{H} \cdot \vec{E}),$$

тобто

$$\boxed{H^2 - E^2 = \text{inv},}$$
$$\boxed{\vec{H} \cdot \vec{E} = \text{inv}.}$$

Другий вираз – псевдоскаляр, це очевидно з того, що він являє собою добуток полярного вектора \vec{E} на аксіальний вектор \vec{H} (квадрат же $(\vec{H} \cdot \vec{E})^2$ буде істинним скаляром).

3.16 Слідства інваріантності

1. Якщо в деякій системі координат $H > E$, $H < E$, $H = E$, ті ж самі нерівності між абсолютними значеннями векторів електричного та магнітного полів буде зберігатися і в інших системах координат.
2. Якщо в деякій системі координат кут між векторами \vec{H} , \vec{E} гострий або тупий, то таким він буде і в усіх інших системах координат.
3. Якщо в деякій системі координат $\vec{H} \perp \vec{E}$ то в інших системах буде або $\vec{H} \perp \vec{E}$, або $\vec{H} = 0$, або $\vec{E} = 0$.
4. Можна досягти будь-якого співвідношення між \vec{H} та \vec{E} , але тільки за умови збереження інваріантів.

Наприклад, можна знайти таку систему координат K , в якій $\vec{H} \parallel \vec{E}$

$$\begin{cases} H^2 - E^2 = H'^2 - E'^2 \\ HE = (\vec{H}' \cdot \vec{E}') \end{cases}$$

Це вже система з двох рівнянь з двома невідомими, які легко знаходяться.

5. Якщо обидва інваріанти рівні нулю, то в усіх системах координат $H = E$, $\vec{H} \perp \vec{E}$.

4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

4.1 Перша пара рівнянь Максвелла

З виразів

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi,$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

легко отримати рівняння, яке містить тільки напруженості полів \vec{E} і \vec{H} . Для цього визначимо спочатку $\text{rot} \vec{E}$:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{A}) - \cancel{\text{rot}(\nabla \varphi)},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{A}).$$

Взявши ж дивергенцію від обох частин рівняння $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ і пам'ятаючи, що дивергенція будь-якого ротора дорівнює нулю, знаходимо

$$\text{div} \vec{H} = \cancel{\text{div}(\text{rot} \vec{A})},$$

$$\text{div} \vec{H} = 0.$$

Отже, маємо:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned}} \quad (4.1.1)$$

Ці рівняння складають *першу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі*. Зауважимо, що ці два рівняння ще не визначають повністю властивості

поля. Це видно вже з того, що вони визначають зміну магнітного поля з часом (похідну $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$), але не визначають похідну $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Рівняння (4.1.1) можна записати і в інтегральній формі. Згідно з теоремою Гаусса,

$$\int \operatorname{div} \vec{H} dV = \oint \vec{H} \cdot d\vec{f},$$

де інтеграл справа береться по всій замкнутій поверхні, що охоплює об'єм, за яким взято інтеграл зліва. З урахуванням (4.1.1) маємо:

$$\boxed{\oint \vec{H} \cdot d\vec{f} = 0} \quad (4.1.2)$$

Інтеграл від вектора по деякій поверхні називається **поток вектора** через цю поверхню. Таким чином, *потік вектора магнітного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю*. Це свідчить про відсутність магнітних зарядів, які б могли бути джерелом магнітного поля.

Згідно з теоремою Стокса,

$$\int \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

де інтеграл справа береться по замкнутому контуру, який огинає поверхню, по якій інтегрується ліва частина рівняння. З урахуванням (4.1.1) знаходимо:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot d\vec{f}}. \quad (4.1.3)$$

Рівняння (4.1.2) та (4.1.3) складають **першу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі**.

Інтеграл від вектора по замкнутому контуру називається **циркуляцією** цього вектора по відповідному контуру. Циркуляцію електричного поля називають також **електрорушійною силою (ЕРС)** в даному контурі. Таким

чином, електрорушійна сила в деякому контурі дорівнює взятій з протилежним знаком похідній за часом від потоку магнітного поля через поверхню, що обмежується цим контуром. Це – закон Фарадея.

4.2 Перша пара рівнянь Максвелла в 4-вимірному вигляді

Рівняння Максвелла можна записати і в 4-вимірних позначеннях, виходячи з визначення тензора електромагнітного поля:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Зазначимо, що

$$\boxed{\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0}. \quad (4.2.1)$$

Дійсно, перевіримо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \right) = \\ & = \frac{\cancel{\partial^2 A_k}}{\cancel{\partial x^l \partial x^i}} - \frac{\cancel{\partial^2 A_i}}{\cancel{\partial x^l \partial x^k}} + \frac{\cancel{\partial^2 A_l}}{\cancel{\partial x^i \partial x^k}} - \frac{\cancel{\partial^2 A_k}}{\cancel{\partial x^i \partial x^l}} + \frac{\cancel{\partial^2 A_i}}{\cancel{\partial x^k \partial x^l}} - \frac{\cancel{\partial^2 A_l}}{\cancel{\partial x^k \partial x^i}} = 0. \end{aligned}$$

Вираз, що стоїть в лівій стороні рівняння (4.2.1), являє собою тензор третього рангу, антисиметричний по всіх трьох індексах. Його компоненти не рівні тотожно нулю лише при $i \neq k \neq l$. Всього, таким чином, це рівняння містить чотири різних тривимірних рівняння.

Відзначимо, що антисиметричному 4-тензору третього рангу можна привести у відповідність дуальний йому 4-вектор, який є результатом множення цього тензора на абсолютно антисиметричний тензор e^{iklm} і згортання по трьох парах індексів. Таким чином, (4.2.1) можна написати й у такому вигляді:

$$\boxed{e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0}, \quad (4.2.2)$$

підкреслюючи явно той факт, що тут є всього чотири незалежних рівняння.

Отримаємо компоненти чотиривимірного рівняння (4.2.1), перебираючи всі можливі комбінації індексів, які призводять до ненульових компонент.

$ikl = 123$:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = 0,$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

$ikl = 012$:

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} = 0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t},$$

$$[\operatorname{rot} E]_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Аналогічно, для $ikl = 013$, $ikl = 023$ отримаємо дві інші компоненти рівняння

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Отже, отримані рівняння збігаються з рівняннями (4.1.1).

4.3 Властивості δ - функції Дірака

Дельта-функцією Дірака називається функція, яка володіє такими ознаками:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

причому

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a, \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Властивості дельта-функції Дірака:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1;$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0);$$

$$3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a).$$

4) Значення інтеграла від δ -функції не змінюється, якщо зробити

такі заміни:

$$а) \quad \delta(-x) = \delta(x);$$

$$б) \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x);$$

$$в) \quad \delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{\varphi'(a_i)} \delta(x - a_i),$$

де a_i – корені рівняння $\varphi(x) = 0$.

5) Дельта-функцію трьох координат можна представити у вигляді

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

тоді маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) dV = 1.$$

4.4 Чотири-вектор густини струму

Замість того, щоб розглядати заряди як точкові, з метою математичної зручності часто розглядають заряд як розподілений у просторі неперервним чином. Тоді можна ввести *густину заряду* ρ , так що ρdV є заряд, який знаходиться в об'ємі dV , причому ρ є, взагалі кажучи, функцією координат і часу. Інтеграл від ρ по деякому об'єму є зарядом, що знаходиться в цьому об'ємі.

При цьому треба пам'ятати, що у випадку точкових зарядів густина ρ дорівнює нулю всюди, крім тих точок, де знаходяться точкові заряди, а інтеграл $\int \rho dV$ має дорівнювати сумі тих зарядів, які знаходяться в даному об'ємі. Тому ρ можна написати за допомогою δ -функції в наступному вигляді:

$$\rho(r) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}),$$

де сума береться по всіх наявних зарядах, а \vec{r}_{α} – радіус-вектори цих точкових зарядів. Дійсно, повний заряд дорівнює

$$\int \rho dV = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) dV = \sum_{\alpha} e_{\alpha}.$$

Відзначимо, що заряд частки e , за самим своїм визначенням, величиною інваріантною, тобто заряд не залежить від вибору системи відліку. Навпаки, густина ρ не є інваріантом, – інваріантом є лише добуток ρdV .

Чотири-вектором густини струму називається величина

$$\boxed{j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}}.$$

Три просторові компоненти цього 4-вектора утворюють, очевидно, тривимірний вектор густини струму $\vec{j} = \rho \vec{V}$:

$$j^1 = \rho \frac{dx}{dt} = \rho v_x = j_x,$$

$$j^2 = \rho \frac{dy}{dt} = \rho v_y = j_y,$$

$$j^3 = \rho \frac{dz}{dt} = \rho v_z = j_z,$$

де \vec{v} – швидкість заряду в даній точці. Часова же складова 4-вектора дорівнює $c\rho$:

$$j^0 = \rho c \frac{dt}{dt} = \rho c.$$

Отже, маємо такі компоненти 4-вектора густини струму:

$$\boxed{j^i = (c\rho, \rho\vec{v}) = (c\rho, \vec{j})}.$$

Повний заряд, що знаходиться в якомусь об'ємі, дорівнює інтегралу $\int \rho dV$ по всьому об'єму. Можна написати цей інтеграл і в чотиривимірному вигляді:

$$\begin{aligned} \int_V \rho dV &= \frac{1}{c} \int_V c\rho dV = \frac{1}{c} \int_{x^0=\text{const}} j^0 dS_0 = \\ &= \left\{ x^0 = \text{const} \Rightarrow dS_1 = dS_2 = dS_3 = 0, \text{ оскільки } dt = 0 \right\} = \int_{x^0=\text{const}} j^i dS_i. \end{aligned}$$

Тут інтегрування проводиться по всій чотиривимірній гіперплощині, перпендикулярній до осі x^0 (очевидно, що це і означає інтегрування по всьому тривимірному простору). Взагалі, інтеграл $\frac{1}{c} \int j^i dS_i$, взятий по будь-якій гіперповерхні, є сумою зарядів, світові лінії яких перетинають цю гіперповерхню.

4.5 Дія для електромагнітного поля

Дія S для всієї системи, що складається з електромагнітного поля разом з розташованими в ньому частинками, повинна складатися з трьох частин:

$$S = S_m + S_e + S_f.$$

Тут S_m – це та частина дії, яка залежить тільки від властивостей частинок, тобто дія для вільних частинок. Якщо є декілька частинок, то їх загальна дія дорівнює сумі дій для кожної частки окремо. Таким чином,

$$S_m = -\sum mc \int dS.$$

Доданок S_e – це та частина дії, яка обумовлена взаємодією між частинками і полем. Отже, маємо для системи частинок:

$$S_e = -\sum \frac{e}{c} A_i dx^i.$$

У кожному з доданків в цій сумі A_i є потенціал поля в тій точці простору і часу, в якій знаходиться відповідна частинка. Сума $S_m + S_e$ – вже відома нам дія для зарядів у полі.

Нарешті, S_f – це та частина дії, яка залежить тільки від властивостей самого поля, тобто S_f – дія для поля при відсутності зарядів. До тих пір, поки ми цікавилися тільки рухом зарядів у заданому електромагнітному полі, S_f як дія, яка не залежить від частинок, нас не цікавила, оскільки цей член не міг вплинути на рівняння руху частинки. Він стає необхідним, коли ми хочемо знайти рівняння, яке визначає саме поле. Цьому відповідає обставина, що з частини $S_m + S_e$ дії ми знайшли тільки два рівняння (4.1.1), які ще недостатні для повного визначення поля.

Для встановлення вигляду дії поля S_f ми будемо виходити з такої дуже важливої властивості електромагнітних полів. Як показує досвід, електромагнітне поле підкоряється так званому **принципу суперпозиції**: поле, що створюється системою зарядів, являє собою результат додавання полів, які створюються кожним із зарядів окремо. Це означає, що напруженості результуючого поля в кожній точці дорівнюють векторній сумі напруженостей кожного з полів окремо у цій точці.

Згідно з принципом суперпозиції, сума будь-яких таких полів теж повинна бути полем, яке може бути реалізоване в природі, тобто має задовольняти рівнянням поля.

Як відомо, лінійні диференціальні рівняння якраз відрізняються тією властивістю, що сума будь-яких його розв'язків теж є розв'язком. Отже, рівняння для поля повинні бути лінійними диференціальними рівняннями.

Зі сказаного випливає, що під знаком інтеграла в дії S_f повинен стояти вираз, піднесений до квадрату по полю. Тільки в цьому випадку рівняння поля будуть лінійними, оскільки рівняння поля отримуємо варіюванням дії, а при варіюванні ступінь підінтегрального виразу знижується на одиницю.

У вираз для дії S_f не можуть входити потенціали поля, оскільки вони не визначені однозначно (в S_e ця неоднозначність була несуттєвою). Тому S_f має бути інтегралом деякої функції від тензора електромагнітного поля F_{ik} . Але дія, крім того, повинна бути скаляром і тому має бути інтегралом від деякого скаляра. Таким є лише добуток $F^{ik}F_{ik}$.

Таким чином, з урахуванням відповідного коефіцієнту, S_f має вигляд

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega, \quad d\Omega = c dt dV.$$

Інтеграл береться за координатами по всьому простору, а за часом – між двома заданими моментами. Під інтегралом стоїть добуток $F^{ik}F_{ik} = 2(H^2 - E^2)$. Таким чином, дія для поля у тривимірному вигляді:

$$S_f = \frac{1}{8\pi c} \int (E^2 - H^2) c dt dV = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV dt.$$

Іншими словами, **функція Лагранжа для електромагнітного поля**

$$L = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV.$$

Отже, повна дія для поля разом з розташованими в ньому зарядами має вигляд

$$S = -\sum mc \int ds - \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i - \frac{1}{16\pi c} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega.$$

Підкреслимо, що тепер вже заряди аж ніяк не вважаються малими; як було при виведенні рівнянь руху заряду в заданому полі. Тому A_i і F_{ik} відносяться до істинного поля, тобто до зовнішнього поля разом з полем, створеним самими зарядами. Величини A_i і F_{ik} , залежать тепер від положення і швидкості зарядів.

Введемо 4-вектор струму в вираз для дії і перетворимо другий член в цьому виразі. Ввівши замість точкових зарядів e безперервний розподіл з густиною ρ , напишемо цей член у вигляді

$$S_e = -\sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i = \left\{ \sum e = \int \rho dV \right\} = -\frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV,$$

замінивши суму по зарядах інтегралом по всьому об'єму. Перепишемо його як

$$S_e = -\frac{1}{c} \int \rho A_i \frac{dx^i}{dt} dt dV = -\frac{1}{c^2} \int j^i A_i d\Omega,$$

Таким чином, дія S приймає вигляд

$$S = -\sum mc \int ds - \frac{1}{c^2} \int j^i A_i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega.$$

4.6 Друга пара рівнянь Максвелла

Скористаємося знайденим виразом для інтегралу дії

$$S = -\sum mc \int ds - \frac{1}{c^2} \int j^i A_i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega..$$

При знаходженні рівнянь поля з принципу найменшої дії ми повинні вважати заданим рух зарядів і варіювати тільки потенціали поля (що грають тут роль «координат» системи); при знаходженні рівнянь руху ми, навпаки, вважали поле заданим і варіювали траєкторію частинки. Тому варіація першого члена дорівнює тепер нулю, а в другому не повинен варіюватися струм j^i . Таким чином,

$$\delta S = -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{8\pi c} \int F^{ik} \delta F_{ik} d\Omega,$$

оскільки

$$\delta(F^{ik} F_{ik}) = \delta F^{ik} F_{ik} + F^{ik} \delta F_{ik} = 2F^{ik} \delta F_{ik}.$$

Далі,

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k},$$

$$\begin{aligned} F^{ik} \delta F_{ik} &= F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} = F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - F^{ki} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} = \left\{ F^{ki} = -F^{ik} \right\} = \\ &= 2F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} (F^{ik} \delta A_k) = F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} + \delta A_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \right\} = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (F^{ik} \delta A_k) - 2 \delta A_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

маємо:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial x^i} (F^{ik} \delta A_k) d\Omega + \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \delta A_k d\Omega = \\ &= -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \oint F^{ik} \delta A_k dS_i + \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \delta A_k d\Omega. \end{aligned}$$

Відзначимо, що

$$\oint F^{ik} \delta A_k dS_i = 0,$$

оскільки інтегрування по замкненій поверхні по просторових координатах дає нуль в силу природніх граничних умов, відповідно до яких поле на нескінченості відсутнє, а по часовій координаті відповідно до принципу найменшої дії $\delta A_k(t_1) = \delta A_k(t_2) = 0$. Отже,

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega + \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega = \\ &= -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що за змістом принципу найменшої дії варіації δA_i – довільні, нулю повинен дорівнювати коефіцієнт при δA_i , тобто

$$\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

$$\boxed{\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i} \quad (4.6.1)$$

Це – друга пара рівнянь Максвелла в чотиривимірному вигляді.

Перепишемо ці чотири ($i = 0, 1, 2, 3$) рівняння в тривимірній формі.

При $i = 0$ маємо

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^0,$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -4\pi\rho,$$

$$\boxed{div\vec{E} = 4\pi\rho}. \quad (4.6.2)$$

При $i = 1$:

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^1,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x,$$

$$\left[rot\vec{H} \right]_x = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x,$$

Аналогічно для $i = 2$ і для $i = 3$ отримаємо дві інші компоненти рівняння

$$\boxed{rot\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}}, \quad (4.6.3)$$

або

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right).$$

Рівняння (4.6.2) і (4.6.3) складають шукану *другу пару рівнянь Максвелла*. Разом з першою парою, вони цілком визначають електромагнітне поле і є основними рівняннями теорії цих полів – *електродинаміки*.

Величину

$$\vec{j}_{zm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

називають *струмом зміщення*. В такому разі можемо записати:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{zm}).$$

Запишемо (4.6.2) та (4.6.3) в інтегральній формі. Інтегруючи по певному об'єму і застосовуючи теорему Гаусса:

$$\int \text{div} \vec{E} dV = 4\pi \int \rho dV,$$

отримуємо:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int \rho dV. \quad (4.6.4)$$

Таким чином, *потік електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює повному заряду, що знаходиться в об'ємі, обмеженому цією поверхнею, помноженому на 4π* .

Інтегруючи (4.6.2) за деякою незамкненою поверхнею і застосовуючи теорему Стокса, отримуємо:

$$\int \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} \right) d\vec{f},$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) d\vec{f} \quad (4.6.5)$$

або

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int (\vec{j} + \vec{j}_{zm}) d\vec{f}, \quad (4.6.6)$$

Тобто, циркуляція магнітного поля уздовж замкненого контуру пропорційна повному струму (разом зі струмом зміщення) що протікає через поверхню, обмежену цим контуром. Рівняння (4.6.4) та (4.6.5), (4.6.6) складають **другу пару рівнянь Максвелла в інтегральному вигляді**.

Отже, об'єднуючи першу і другу пари рівнянь Максвелла, маємо **повну систему рівнянь Максвелла для електромагнітного поля**.

В диференціальному вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0; & \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned}$$

В інтегральному вигляді:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot d\vec{f}, & \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) d\vec{f}, \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{f} &= 0; & \oint \vec{E} \cdot d\vec{f} &= 4\pi \int \rho dV. \end{aligned}$$

В чотиривимірному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} &= 0; \\ \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= -\frac{4\pi}{c} j^i. \end{aligned}$$

4.7 Рівняння неперервності

Зміна з часом заряду, що знаходиться в деякому об'ємі, дається похідною

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

З іншого боку, зміна заряду в об'ємі за одиницю часу визначається кількістю заряду, що виходить за цей час з даного об'єму назовні, або, навпаки, що входить всередину його. Кількість заряду, що проходить за одиницю часу через елемент $d\vec{f}$ поверхні, що обмежує визначений об'єм, дорівнює $\rho \vec{v} d\vec{f}$,

де \vec{v} – швидкість заряду в тій точці простору, де знаходиться елемент $d\vec{f}$. Вектор $d\vec{f}$ спрямований, як це прийнято, по зовнішній нормалі до поверхні. Тому значення $\rho\vec{v}d\vec{f}$ позитивне, якщо заряд виходить з області, обмеженої цією поверхнею, і від’ємне, якщо заряд входить в неї. Повна кількість заряду, який виходить за одиницю часу з даного об’єму, дорівнює $\oint \rho\vec{v}d\vec{f}$, де інтеграл береться по всій замкненій поверхні, що обмежує цей об’єм. Навпаки, значення $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$ позитивне, якщо кількість заряду всередині об’єму збільшується, тому з порівняння обох отриманих виразів знаходимо:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \rho\vec{v}d\vec{f}}. \quad (4.7.1)$$

Це рівняння, що виражає собою закон збереження заряду, називається *рівнянням неперервності*, записаним в інтегральному вигляді. Зауважуючи, що $\rho\vec{v}$ є густиною струму, можна переписати останнє рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \vec{j}d\vec{f}.$$

Застосувавши до правої частини теорему Гаусса

$$\oint \vec{j}d\vec{f} = \int \text{div} \vec{j}dV,$$

знаходимо:

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right) dV = 0.$$

Оскільки це рівняння повинне мати місце при інтегруванні по будь-якому об’єму, то підінтегральний вираз має дорівнювати нулю:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0}. \quad (4.7.2)$$

Це і є *рівняння неперервності в диференціальному вигляді*.

Згадавши, що 4-вектор густини струму має компоненти $j^i = (c\rho, \vec{j})$, бачимо, що у чотиривимірній формі рівняння неперервності (4.7.2) виражається рівністю нулю 4-дивергенції 4-вектора густини струму:

$$\boxed{\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0}. \quad (4.7.3)$$

Це – рівняння неперервності в чотиривимірному вигляді.

Відзначимо, що рівняння неперервності можна також отримати, взявши дивергенцію від одного з рівнянь другої пари рівнянь Максвелла і підставивши в результат друге рівняння цієї пари:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \cancel{\text{div rot } \vec{H}} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j}, \\ \frac{1}{c} 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} &= 0. \end{aligned}$$

Ще один спосіб отримати рівняння неперервності в чотиривимірному вигляді – застосувати операцію $\partial/\partial x^i$ до другої пари рівнянь Максвелла в чотиривимірному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= -\frac{4\pi}{c} j^i, \\ \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$ – симетричний тензор, а F^{ik} – антисиметричний,

тому

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = 0,$$

а отже

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.$$

4.8 Густина та потік енергії електромагнітного поля

Запишемо рівняння Максвелла, які містять часові похідні від поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Віднявши від другого рівняння, помноженого на \vec{E} , перше, помножене на \vec{H} , отримуємо:

$$\begin{aligned} \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} [\vec{H} \times \vec{E}] &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E}, \\ \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) &= \operatorname{div} [\vec{H} \times \vec{E}] - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) + \vec{j} \vec{E} &= -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}]. \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

Вектор

$$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]}$$
(4.8.2)

називається **вектором Пойнтінга**.

Проінтегрувавши (4.8.1) по деякому об'єму і застосувавши теорему Гаусса, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV + \int \vec{j} \vec{E} dV &= -\int \operatorname{div} \vec{S} dV, \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV + \int \vec{j} \vec{E} dV} &= -\oint \vec{S} d\vec{f}. \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Якщо інтегрувати по всьому простору, то інтеграл по поверхні в правій частині зникає, оскільки в силу природних граничних умов поле на нескінченості відсутнє. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV + \int \rho \vec{v} \vec{E} dV = 0.$$

Якщо розглядати струм як рух точкових зарядів, тобто представити

$$\rho = \sum e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha),$$

то отримуємо:

$$\int \rho \vec{v} \vec{E} dV = \sum e_\alpha \int \vec{v} \vec{E} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) dV = \sum e_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{E}(\vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha \frac{\partial \varepsilon_k^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum \varepsilon_k.$$

Отже, маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV + \sum \varepsilon_k \right) = 0.$$

Таким чином, для замкнутої системи, що складається з електромагнітного поля разом з розташованими в ньому частинками, зберігається величина, що стоїть в написаному рівнянні в дужках. Другий член в цьому виразі є кінетична енергія (разом з енергією спокою всіх частинок); перший же член – це енергія самого електромагнітного поля. Величину

$$\boxed{W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}}, \quad (4.8.4)$$

ми можемо тому назвати *густиною енергії електромагнітного поля*; це є енергія поля, що приходить на одиницю об'єму простору.

Якщо ж рівняння (4.8.3) проінтегрувати по обмеженій області то ліва частина є зміною енергії означеної системи з часом, тому вектор Пойнтінга \vec{S} має значення *густини потоку енергії електромагнітного поля*, тобто енергії, що протікає через одиницю площі поверхні, яка обмежує об'єм, за одиницю часу (зрозуміло, вважається, що на самій цій поверхні в даний момент часу не

знаходиться жодного заряду, який також міг би переносити енергію через поверхню).

5. ПОСТІЙНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

5.1 Закон Кулона

Для постійного електричного (електростатичного) поля рівняння Максвелла мають вигляд

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (5.1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (5.1.2)$$

Електричне поле \vec{E} виражається лише через скалярний потенціал співвідношенням

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (5.1.3)$$

Підставляючи (5.1.3) в (5.1.1), знаходимо рівняння, якому задовольняє потенціал постійного електричного поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (5.1.4)$$

Це рівняння носить назву *рівняння Пуассона*. За відсутності зарядів, тобто при $\rho = 0$, потенціал задовольняє *рівнянню Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \quad (5.1.5)$$

З останнього рівняння випливає, зокрема, що потенціал електричного поля ніде не може мати ані максимуму, ані мінімуму в тій частині простору, де немає зарядів. Дійсно, для того, щоб φ мав екстремальні значення, необхідно, щоб всі перші похідні від φ по координатах були рівними нулю, а другі похідні $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ мали однаковий знак. Останнє, проте, неможливо, оскільки при цьому не може бути задовільнено рівняння (5.1.5).

Визначимо тепер поле, яке створюється точковим зарядом (рис.5.1.1). З міркувань симетрії ясно, що воно буде спрямоване в кожній точці уздовж радіус-вектора, проведеного з точки, в якій знаходиться заряд e . З тих же міркувань зрозуміло, що абсолютна величина E поля буде залежати тільки від відстані R до заряду. Для знаходження цієї абсолютної величини застосуємо рівняння (5.1.1) в інтегральній формі:

$$\oint \vec{E} d\vec{f} = 4\pi \int \rho dV. \quad (5.1.6)$$

Потік електричного поля через поверхню кулі радіусу R , побудовану навколо заряду e , дорівнює $4\pi R^2 E$:

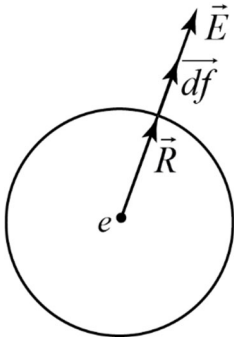


Рис. 5.1.1. Поле точкового заряду.

$$\vec{E} d\vec{f} = \{ \vec{E} \parallel d\vec{f} \} = E df,$$

$$E|_{\text{на поверхні}} = \text{const},$$

тому

$$\oint \vec{E} d\vec{f} = E \int df = E S_{\text{нов}} = 4\pi R^2 E.$$

З правої ж частини рівняння (5.1.6) випливає, що цей потік повинен дорівнювати $4\pi e$.

Отже,

$$4\pi R^2 E = 4\pi e,$$

$$\boxed{E = \frac{e}{R^2}}.$$

Це – напруженість електричного поля на відстані R від точкового заряду.

У векторному вигляді:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3}}. \quad (5.1.7)$$

Таким чином, поле, створюване точковим зарядом, обернено пропорційне квадрату відстані від цього заряду. Це — так званий **закон Кулона**.

Зауваження. Форма поверхні інтегрування обирається за можливістю так, щоб в кожній точці поверхні поле було однаковим за абсолютним значенням, тобто, форма поверхні інтегрування має відповідати симетрії системи. Саме такий вибір поверхні дав нам можливість винести за знак інтегралу поле і тим самим суттєво спростити розрахунки.

Знайдемо потенціал поля точкового заряду:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

$$\varphi = -\int \vec{E} d\vec{R} = -\int E dR = -e \int \frac{dR}{R^2} = \frac{e}{R},$$

$$\boxed{\varphi = \frac{e}{R}}. \quad (5.1.8)$$

Якщо ми маємо систему зарядів, то створюване нею поле, згідно з *принципом суперпозиції*, дорівнює сумі полів, які створюється кожним із зарядів окремо. Зокрема, потенціал такого поля дорівнює

$$\boxed{\varphi = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{R_{\alpha}}}, \quad (5.1.9)$$

де R_{α} – відстань від заряду e_{α} до точки, в якій ми шукаємо потенціал. Якщо ввести густину заряду ρ , то з урахуванням заміни

$$\sum e_{\alpha} \rightarrow \int \rho dV$$

ця формула набуває вигляду

$$\boxed{\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV}. \quad (5.1.10)$$

де R – відстань від елемента об'єму dV до даної точки поля («точки спостереження»).

Відзначимо тут математичне співвідношення, що виходить при підстановці в (5.1.4) значень ρ і φ для точкового заряду, тобто $\rho = e\delta(\vec{R})$ і $\varphi = e/R$:

$$\Delta \frac{e}{R} = -4\pi e\delta(\vec{R}),$$

$$\boxed{\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R})}. \quad (5.1.11)$$

5.2 Електростатична енергія зарядів

Розрахуємо повну енергію електростатичного поля, що створюється всіма зарядами системи, проінтегрувавши по всьому простору густину енергії електромагнітного поля (з урахуванням відсутності магнітного поля):

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \left\{ \vec{E} = -\nabla \varphi \right\} = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \nabla \varphi dV = \left\{ \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) = \varphi \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \nabla \varphi \right\} = \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \vec{E} dV = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \varphi \vec{E} df + \frac{1}{8\pi} 4\pi \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV} \quad (5.2.1)$$

є **електростатичною енергією** системи.

Якщо система складається з точкових зарядів:

$$\rho = \sum e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha),$$

то маємо

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum e_\alpha \varphi_\alpha}, \quad (5.2.2)$$

де φ_α – потенціал в точці, де знаходиться заряд e_α .

Якщо ж розглядати один заряд і поле, яке ним створюється, то $\varphi = \frac{e}{R}$.

Тому при $R \rightarrow 0$ маємо $U \rightarrow \infty$. Це означає, що електродинаміка стає незастосовною на дуже малих відстанях. Границі застосування електродинаміки визначають, дорівнюючи (за порядком) електростатичну енергію до енергії спокою частинки:

$$\frac{e^2}{R_0} \sim mc^2,$$

$$\boxed{R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}}$$

Цю величину називають **радіусом електрона**.

Повертаючись до визначення електростатичної енергії, слід відзначити, що енергія системи зарядів містить, як ми з'ясували, два типи доданків: нефізичні доданки, що відповідають нескінченній енергії, та доданки, в які входять потенціали φ_α , створювані всіма іншими частинками в точці, де знаходиться заряд e_α . Так ось, саме такі доданки, що мають фізичне значення,

і враховуються в виразі для енергії. Умовно це позначається штрихом над знаком суми:

$$U = \frac{1}{2} \sum' e_{\alpha} \varphi_{\alpha}.$$

Тут вже, зрозуміло, потенціали

$$\varphi_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_{\beta}}{R_{\alpha\beta}},$$

де $R_{\alpha\beta}$ – відстань між зарядами α та β . Таким чином, електростатична енергія системи зарядів набуває вигляду:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{R_{\alpha\beta}}} \quad (5.2.2)$$

Приклад. Енергія взаємодії двох зарядів.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^2 \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{R_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1 e_2}{R_{12}} + \frac{e_2 e_1}{R_{21}} \right) = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}.$$

5.3 Поле заряду, що рівномірно рухається

Визначимо поле, створюване зарядом e , який рухається рівномірно та прямолінійно зі швидкістю V . Нерухому (лабораторну) систему відліку будемо називати системою K , а систему відліку, що рухається разом із зарядом, – системою K' . Нехай заряд знаходиться в початку координат системи K' ; система K' рухається відносно K паралельно осі x ; осі y та z паралельні y' і z' . В момент часу $t = 0$ початки обох систем збігаються. Отже, координати заряду в системі K : $x = Vt$, $y = z = 0$. В системі K' ми маємо, очевидно, постійне електричне поле з векторним потенціалом $A' = 0$, і скалярним $\varphi' = e/R'$, де $R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ – відстань в системі K' від точки, де знаходиться заряд, до точки спостереження. Знаючи тепер потенціали в системі K' , можемо за допомогою перетворень Лоренца для потенціалів визначити потенціали в системі K . Почнемо зі скалярного потенціалу:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} \cancel{A'_x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (5.3.1)$$

Але не забуваємо, що нам треба виразити R' через координати x, y, z в системі K . Згідно з формулами перетворень Лоренца,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z',$$

і звідси

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv \frac{R^{*2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

де введено позначення

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2).$$

Отже,

$$R' = \frac{R^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Підставляючи це в (5.3.1), знаходимо:

$$\boxed{\varphi = \frac{e}{R^*}}.$$

Векторний же потенціал в системі K має такі компоненти:

$$A_x = \frac{\cancel{A'_x} + \frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c} \varphi = \frac{Ve}{cR^*}, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Оскільки $\vec{V} \parallel Ox$, то можемо записати векторний потенціал у векторному вигляді:

$$\vec{A} = \frac{e\vec{V}}{cR^*}$$

В системі K' магнітне поле \vec{H}' відсутнє, оскільки заряд в цій системі покоїться, а електричне поле

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{R}'}{R'^3}$$

В компонентах:

$$E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E'_y = \frac{ey'}{R'^3}, \quad E'_z = \frac{ez'}{R'^3}$$

Перетворення Лоренца для напруженості поля дають такі компоненти в системі K :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Таким чином, маємо:

$$E_x = \frac{ex'}{R'^3} = \left\{ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, R' = \frac{R^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right\} = \frac{e(x - Vt) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{R^{*3} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e(x - Vt) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{R^{*3}}$$

$$E'_y = \frac{ey'}{R'^3} = \frac{ey}{R^{*3}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey}{R^{*3}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ez}{R^{*3}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right).$$

Якщо ввести радіус-вектор від заряду до точки спостереження в системі K

$$\vec{R} = (x - Vt, y, z),$$

то можна записати вираз для поля в векторному вигляді:

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^{*3}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right).$$

Цей вираз для \vec{E} можна написати і в інший спосіб, ввівши кут θ між напрямком руху і радіус-вектором \vec{R} . Очевидно, що абсолютне значення проекції вектора \vec{R} на площину yz може бути записане двома рівноцінними виразами:

$$R \sin \theta = \sqrt{y^2 + z^2},$$

звідки

$$y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta,$$

$$\begin{aligned} R^{*2} &= (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2) = (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - \frac{V^2}{c^2} (y^2 + z^2) = \\ &= R^2 - \frac{V^2}{c^2} R^2 \sin^2 \theta = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Тоді маємо:

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.3.2)$$

При заданій відстані R від заряду величина поля \vec{E} зростає із збільшенням θ від нуля до $\frac{\pi}{2}$ (або при зменшенні від π до $\frac{\pi}{2}$). Найменше

значення поле має в напрямку, паралельному напрямку руху ($\theta = 0, \pi$); воно дорівнює

$$E_{\min} = E_{\parallel} = \frac{eR}{R^3} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right).$$

Найбільшим же є поле, перпендикулярне до швидкості ($\theta = \pi/2$), рівне

$$E_{\max} = E_{\perp} = \frac{e}{R^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Відзначимо, що при збільшенні швидкості поле E_{\parallel} зменшується, а E_{\perp} зростає. Можна сказати наочно, що електричне поле рухомого заряду ніби «сплющується» у напрямку руху.

Магнітне поле в системі K дорівнює (згадаємо, що поле в системі K' чисто електричне):

$$\vec{H} = \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{E}].$$

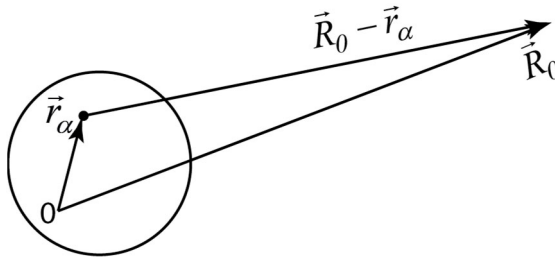
Зокрема, при $V \ll c$ електричне поле, як видно з (5.3.2), наближено дається звичайним законом Кулона $\vec{E} \approx \frac{e\vec{R}}{R^3}$, і тоді магнітне поле

$$\vec{H} = \frac{e}{c} \frac{[\vec{V} \times \vec{R}]}{R^3}.$$

Таким чином, завдяки використанню перетворень Лоренца, нам вдалося визначити як потенціали, так і напруженості електричного та магнітного полів, що створюються зарядом, який рухається рівномірно та прямолінійно. Зверніть увагу, що ми спростили задачу знаходження поля, помістивши заряд в систему відліку, в який він не рухається і створює, очевидно, тільки електростатичне поле. А перетворення Лоренца дозволили отримати поле вже в лабораторній системі.

5.4 Дипольний момент. Дипольний потенціал

Розглянемо поле, створюване системою зарядів на відстанях, великих у порівнянні з розмірами системи (рис. 5.4.1). Введемо систему координат з початком в якійсь точці всередині системи зарядів.



Радіус-вектори окремих зарядів позначимо \vec{r}_α . Потенціал поля, створюваного всіма зарядами в точці з радіус-вектором \vec{R}_0 , дорівнює

Рис. 5.4.1.

$$\varphi = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{R_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_{\alpha}|}$$

(підсумовування проводиться по всіх зарядах системи). Тут $(\vec{R}_0 - \vec{r}_{\alpha})$ – вектори, напрямлені від зарядів e_{α} до точки, в якій ми шукаємо потенціал.

Ми маємо дослідити цей вираз для великих значень R_0 ($R_0 \gg r_{\alpha}$). Для цього розкладемо його в ряд за ступенями \vec{r}_{α} з точністю до членів першого порядку, скориставшись формулою

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}) \approx f(\vec{R}_0) - \vec{r} \cdot \nabla f(\vec{R}_0).$$

В нашому випадку

$$f(\vec{R}_0) = \frac{1}{R_0},$$

тому

$$\varphi \approx \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{R_0} - \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \cdot \nabla \frac{1}{R_0}.$$

Умовно представимо цей вираз у вигляді суми доданків нульового та першого порядку малості:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)},$$

де

$$\varphi^{(0)} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{R_0}, \quad \varphi^{(1)} = -\sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \cdot \nabla \frac{1}{R_0}.$$

Сума в останньому виразі носить назву **дипольного моменту** системи зарядів:

$$\boxed{\vec{d} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}. \quad (5.4.1)$$

Властивості дипольного моменту

Важливо, що якщо сума $\sum_{\alpha} e_{\alpha}$ всіх зарядів дорівнює нулю, то дипольний момент не залежить від вибору початку координат. Дійсно, радіус-вектори \vec{r}_{α} і \vec{r}'_{α} одного і того ж заряду в двох різних системах координат пов'язані один з одним співвідношенням

$$\vec{r}'_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} + \vec{a},$$

де \vec{a} – деякий сталий вектор. Оскільки $\sum_{\alpha} e_{\alpha} = 0$, то дипольний момент в обох системах однаковий:

$$\vec{d}' = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} + \vec{a} \cancel{\sum_{\alpha} e_{\alpha}} = \vec{d}.$$

Якщо позначити позитивні і негативні заряди системи відповідно як e_{α}^{+} та $-e_{\alpha}^{-}$, то можна записати дипольний момент у вигляді

$$\vec{d} = \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{+} \vec{r}_{\alpha}^{+} - \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{-} \vec{r}_{\alpha}^{-} = \frac{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{+} \vec{r}_{\alpha}^{+}}{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{+}} \cdot \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{+} - \frac{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{-} \vec{r}_{\alpha}^{-}}{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{-}} \cdot \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{-} = \vec{R}^{+} \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{+} - \vec{R}^{-} \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{-},$$

де символами

$$\boxed{\vec{R}^{\pm} = \frac{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{\pm} \vec{r}_{\alpha}^{\pm}}{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{\pm}}}$$

позначені радіус-вектори «центрів зарядів» – позитивних і негативних. Якщо

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha}^{+} = \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{-} = e, \text{ то}$$

$$\vec{d} = e(\vec{R}^+ - \vec{R}^-) = e\vec{R}^{+-},$$

де $\vec{R}^{+-} = \vec{R}^+ - \vec{R}^-$ – вектор, напрямлений від центру негативних до центру позитивних зарядів (рис.5.4.2).

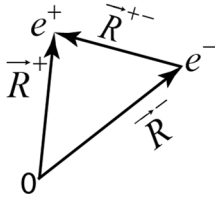


Рис.5.4.2.

Якщо, зокрема, є тільки два однакових заряди різного знаку то \vec{R}^{+-} – вектор, напрямлений від негативного заряду до позитивного. Такий самий напрямок має і вектор дипольного моменту.

Повернемося до розрахунку потенціалу:

$$\varphi^{(1)} = -\vec{d} \cdot \nabla \frac{1}{R_0},$$

$$\nabla \frac{1}{R_0} = -\frac{1}{R_0^2} \nabla R_0 = \left\{ \nabla R_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right\} = -\frac{\vec{R}_0}{R_0^3}.$$

Таким чином, **дипольний потенціал** має вигляд:

$$\boxed{\varphi^{(1)} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}}. \quad (5.4.2)$$

Розрахуємо напруженість поля:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

$$\vec{E}^{(0)} = -\sum_{\alpha} e_{\alpha} \nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\sum e_{\alpha} \vec{R}_0}{R_0^3}.$$

Отже, в нульовому наближенні поле системи зарядів таке, ніби створюється всіма зарядами системи, якби вони були розташовані в початку координат:

$$\boxed{\vec{E}^{(0)} = \frac{\sum e_{\alpha} \vec{R}_0}{R_0^3}}. \quad (5.4.3)$$

Розрахуємо поправку першого порядку:

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{(1)} &= -\nabla \varphi^{(1)} = -\nabla \frac{\vec{d} \vec{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \nabla (\vec{d} \vec{R}_0) - (\vec{d} \vec{R}_0) \nabla \frac{1}{R_0^3} = \\
&= \left\{ \nabla (\vec{d} \vec{R}_0) = \vec{d} \times \cancel{\text{rot} \vec{R}_0} + \vec{R}_0 \times \cancel{\text{rot} \vec{d}} + (\vec{d} \nabla) \vec{R}_0 + (\vec{R}_0 \nabla) \vec{d} = \vec{d} \right\} = \\
&= -\frac{\vec{d}}{R_0^3} + (\vec{d} \vec{R}_0) \frac{3}{R_0^4} \nabla R_0 = \left\{ \nabla R_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right\} = \frac{3(\vec{d} \vec{R}_0) \vec{R}_0}{R_0^5} - \frac{\vec{d}}{R_0^3} = \frac{3(\vec{d} \vec{R}_0) \vec{R}_0 - \vec{d} R_0^2}{R_0^5}.
\end{aligned}$$

Таким чином, **напруженість поля диполя** має вигляд:

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = \frac{3(\vec{d} \vec{R}_0) \vec{R}_0 - \vec{d} R_0^2}{R_0^5}}. \quad (5.4.4)$$

Якщо ввести одиничний вектор, напрямлений уздовж вектора \vec{R}_0 :

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{\vec{R}_0}{R_0}, \\
\vec{R}_0 &= \vec{n} R_0,
\end{aligned}$$

то напруженість поля диполя можна переписати у вигляді:

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = \frac{3(\vec{n} \vec{d}) \vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}}. \quad (5.4.5)$$

Таким чином, потенціал поля, створюваного системою з рівним нулю повним зарядом, на великих відстанях обернено пропорційний квадрату, а напруженість поля – кубу відстані. Це поле володіє аксіальною симетрією навколо напрямку \vec{d} . В площині, що проходить через цей напрямок і напрямок від заряду до точки спостереження, маємо такі компоненти вектора \vec{E} (рис. 5.4.3):

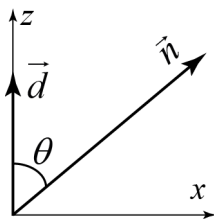


Рис. 5.4.3.

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{3d \cos \theta \sin \theta}{R_0^3}, \\
E_z &= \frac{3d \cos \theta \cos \theta - d}{R_0^3} = d \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{R_0^3}.
\end{aligned}$$

Аналогічно, компоненти E_n та E_τ цього вектора ($\vec{\tau} \perp \vec{n}$), напрямлені відповідно вздовж та перпендикулярно напрямку вектора \vec{R}_0 , мають вигляд:

$$E_n = \frac{3d \cos \theta - d \cos \theta}{R_0^3} = d \frac{2 \cos \theta}{R_0^3}, \quad E_\tau = -d \frac{\sin \theta}{R_0^3}.$$

Отже, поправки для потенціалу та напруженості поля будуть мати щодо відстані такі порядки:

$$\begin{aligned} |\varphi^{(0)}| &\sim \frac{1}{R_0}, & |\varphi^{(1)}| &\sim \frac{1}{R_0^2}, \\ |E^{(0)}| &\sim \frac{1}{R_0^2}, & |E^{(1)}| &\sim \frac{1}{R_0^3}. \end{aligned}$$

Тобто наступна поправка набагато менша ніж попередня. Тим не менш, хоча на далеких відстанях $|\varphi^{(0)}| \gg |\varphi^{(1)}|$, $|E^{(0)}| \gg |E^{(1)}|$, вклад перших поправок буде вирішальним, якщо $\sum_\alpha e_\alpha = 0$.

5.5 Квадрупольний момент. Квадрупольний потенціал

Запишемо вираз для потенціалу (див. рис. 5.4.1)

$$\varphi = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{R_\alpha} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_\alpha|},$$

розклавши його в ряд Тейлора з точністю до малих другого порядку за допомогою формули:

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}) \approx f(\vec{R}_0) - \vec{r} \cdot \nabla f(\vec{R}_0) + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 f(\vec{R}_0)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta},$$

де x_α, x_β – координати зарядів, X_α, X_β – координати точки спостереження.

Потенціал

$$\varphi \approx \sum \frac{e}{R_0} - \sum e \vec{r} \nabla \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0},$$

де суми беруться по всіх зарядах (індекс, що вказує номер заряду, опущено), тепер містить три доданки, кожен наступний з яких набагато менший за попередній:

$$\varphi \approx \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}, \quad (5.5.1)$$

Перші два доданки були розраховані раніше, а член другого порядку малості дорівнює

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \quad (5.5.2)$$

Ще раз відзначимо, що x_α є компонентами вектора \vec{r} , а X_α – компонентами вектора \vec{R}_0 (рис. 5.4.1). Ця частина потенціалу називається **квадрупольним потенціалом**. Якщо сума зарядів і дипольний момент системи дорівнюють нулю, то розкладання для потенціалу починається саме з $\varphi^{(2)}$.

У вираз (5.5.2) входять шість величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко, проте, побачити, що насправді поле залежить не від шести незалежних величин, а тільки від п'яти. Це впливає з того, що функція $\frac{1}{R_0}$ задовольняє рівняння Лапласа (див. (5.1.11)):

$$\Delta \frac{1}{R_0} = 0.$$

Але ж лапласіан можна записати у вигляді:

$$\Delta = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta},$$

тож можемо переписати $\varphi^{(2)}$ у такій спосіб:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \\ &= \frac{1}{6} \sum e \left(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \end{aligned}$$

Тут ми фактично додали нуль до правої частини виразу (5.5.2).

Тензор

$$D_{\alpha\beta} = \sum e \left(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right)$$

називається **квадрупольним моментом** системи зарядів. З означення $D_{\alpha\beta}$ випливає, що сума його діагональних компонент дорівнює нулю:

$$D_{\alpha\alpha} = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = \sum e \left(3x^2 - r^2 + 3y^2 - r^2 + 3z^2 - r^2 \right) = \sum e \left(3r^2 - 3r^2 \right) = 0.$$

Симетричний тензор $D_{\alpha\beta}$ має тому всього п'ять незалежних компонент.

З його допомогою можна записати:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}.$$

Розрахуємо цю похідну:

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha} \frac{1}{R_0} = -\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial R_0}{\partial X_\alpha} = \left\{ R_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \right\} = -\frac{1}{R_0^2} \frac{X_\alpha}{R_0} = -\frac{X_\alpha}{R_0^3}.$$

Якщо $\alpha \neq \beta$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{\partial}{\partial X_\beta} \left(-\frac{X_\alpha}{R_0^3} \right) = \frac{3X_\alpha}{R_0^4} \frac{\partial R_0}{\partial X_\beta} = \frac{3X_\alpha}{R_0^4} \frac{X_\beta}{R_0} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5}.$$

Якщо ж $\alpha = \beta$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\alpha} \frac{1}{R_0} = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left(-\frac{X_\alpha}{R_0^3} \right) = -\frac{1}{R_0^3} + \frac{3X_\alpha}{R_0^4} \frac{\partial R_0}{\partial X_\alpha} = \frac{3X_\alpha X_\alpha}{R_0^5} - \frac{1}{R_0^3}.$$

Узагальнюючи, можемо записати:

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3},$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}.$$

Але

$$D_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0,$$

тому

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{2} \frac{X_\alpha X_\beta}{R_0^5}.$$

Це і є *квадрупольним потенціалом* системи зарядів. Запишемо тепер оцінки до всіх знайдених складових потенціалу:

$$\left| \varphi^{(0)} \right| \sim \frac{1}{R_0}, \quad \left| \varphi^{(1)} \right| \sim \frac{1}{R_0^2}, \quad \left| \varphi^{(2)} \right| \sim \frac{1}{R_0^3}.$$

Хоча на великих відстанях $\varphi^{(2)} \ll \varphi^{(1)} \ll \varphi^{(0)}$, за умови, якщо $\sum_\alpha e_\alpha = 0$ та $\vec{d} = 0$, значення потенціалу визначається саме квадрупольним потенціалом. Аналогічно вводяться *мультипольні потенціали* більш високого порядку.

5.6 Квадрупольний момент однорідно зарядженого еліпсоїда

Розрахуємо в якості прикладу квадрупольний момент однорідно зарядженого еліпсоїда. При неперервному розподілі заряду в виразі

$$D_{\alpha\beta} = \sum e \left(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right)$$

слід суму замінити на інтеграл:

$$\sum e \rightarrow \int \rho dV.$$

Тоді отримаємо таку формулу:

$$\boxed{D_{\alpha\beta} = \int \rho \left(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) dV}.$$

Відзначимо, що цей тензор, очевидно, симетричний, тому достатньо розрахувати тільки шість його компонент. Отже,

$$D_{xx} = \rho \int \left(3x^2 - r^2 \right) dV = \rho \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} \left(2x^2 - y^2 - z^2 \right) dV.$$

Для розрахунку інтегралів зручно, зробивши відповідні заміни змінних, перейти від інтегрування по еліпсоїду до інтегрування по кулі одиничного радіусу, яке провести в сферичній системі координат:

$$\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} x^2 dV = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = x', \frac{y}{b} = y', \frac{z}{c} = z' \\ dV = dx dy dz = abc dx' dy' dz' \end{array} \right\} = \int_{x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1} a^2 x'^2 abc dx' dy' dz' =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x' = r \sin \theta \cos \varphi \\ y' = r \sin \theta \sin \varphi \\ z' = r \cos \theta \\ dV' = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{array} \right\} = a^2 abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= a^2 abc \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \cdot \int_0^\pi \sin^2 \theta d(-\cos \theta) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{5} abc \int_\pi^0 (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \cdot \frac{1}{2} (2\pi + 0) =$$

$$= \pi \frac{a^2}{5} abc \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_\pi^0 = \frac{a^2}{5} \frac{4}{3} \pi abc,$$

Аналогічно,

$$\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} y^2 dV = \frac{b^2}{5} \frac{4}{3} \pi abc,$$

$$\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} z^2 dV = \frac{c^2}{5} \frac{4}{3} \pi abc,$$

тому, згадуючи, що об'єм еліпсоїду дорівнює $\frac{4}{3} \pi abc$, а добуток зарядової

густини на об'єм є повним зарядом еліпсоїду, маємо:

$$D_{xx} = \frac{1}{5} \frac{4}{3} \pi abc \rho (2a^2 - b^2 - c^2) = \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2),$$

$$D_{yy} = \rho \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} (2y^2 - x^2 - z^2) dV = \frac{e}{5} (2b^2 - a^2 - c^2),$$

$$D_{zz} = \rho \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} (2z^2 - x^2 - y^2) dV = \frac{e}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

$$D_{xy} = \rho \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} 3xydV = 0 = D_{xz} = D_{yz}.$$

В останньому рядку отримали нуль, оскільки інтегруються непарні функції в симетричних границях.

Отже, всі компоненти тензора квадрупольного моменту знайдені.

5.7 Система зарядів в зовнішньому електричному полі

Розглянемо систему зарядів, що знаходиться в зовнішньому електричному полі. Виберемо знову систему координат з початком де-небудь всередині системи зарядів. Позначимо \vec{r}_α радіус-вектор заряду e_α в цій системі координат.

За допомогою $\varphi(\vec{r})$ будемо тепер позначати потенціал зовнішнього поля.

Потенціальна енергія кожного з зарядів є $e_\alpha \varphi(\vec{r}_\alpha)$, а повна потенціальна енергія системи дорівнює

$$U = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \varphi(\vec{r}_{\alpha}).$$

Припустимо, що зовнішнє поле слабо змінюється на протязі системи зарядів, тобто по відношенню до цієї системи поле є квазіоднорідним. Тоді ми можемо розкласти енергію U в ряд по ступеням \vec{r}_α

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots,$$

тобто

$$\varphi(\vec{r}) \approx \varphi(0) + \vec{r} \nabla \varphi(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} x_\alpha x_\beta.$$

У цьому розкладанні перший член є (далі будемо позначати $\varphi(0) = \varphi_0$,

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_0)$$

$$\boxed{U^{(0)} = \varphi_0 \sum_{\alpha} e_{\alpha}}$$

Сила, що діє на систему зарядів з боку зовнішнього поля, визначається як

$$\vec{F} = -\nabla U,$$

а момент сил дорівнює

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{F}],$$

тому

$$\vec{F}^{(0)} = -\nabla \varphi_0 \sum_{\alpha} e_{\alpha},$$

$$\boxed{\vec{F}^{(0)} = \vec{E}_0 \sum_{\alpha} e_{\alpha}},$$

Оскільки φ_0 та \vec{E}_0 – значення відповідно потенціалу та поля в початку координат, у нульовому наближенні енергія системи така, ніби всі заряди знаходяться в одній точці, а саме – в початку координат.

Другий член розкладу

$$U^{(1)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \cdot \nabla \varphi_0.$$

Ввівши знов напруженість поля в початку координат і дипольний момент системи, маємо:

$$\boxed{U^{(1)} = -\vec{d} \cdot \vec{E}_0}.$$

Повна сила, що діє на систему в зовнішньому квазіоднорідному полі, ϵ , в першому порядку малості,

$$\vec{F}^{(1)} = \nabla(\vec{d} \cdot \vec{E}_0) = \cancel{\vec{d} \times \text{rot} \vec{E}_0} + \cancel{\vec{E}_0 \times \text{rot} \vec{d}} + (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}_0 + (\vec{E}_0 \cdot \nabla) \vec{d} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}_0,$$

тобто сила визначається похідними напруженості поля (взятими на початку координат). Повний же момент діючих на систему сил ϵ

$$\vec{K}^{(1)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{E}_0] = [\vec{d} \times \vec{E}_0],$$

тобто визначається самою напруженістю поля. Відзначимо, що момент сил містить в якості одного з множників дипольний момент, який сам визначає

малу першого порядку в розкладанні в ряд потенціалу, тому і момент сил є малою першого порядку. Отже,

$$\boxed{\vec{F}^{(1)} = (\vec{d}\nabla)\vec{E}_0}, \quad \boxed{\vec{K}^{(1)} = [\vec{d} \times \vec{E}_0]}.$$

Поправка другого порядку для потенціальної енергії:

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \left\{ \Delta \varphi_0 = 0 = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \end{aligned}$$

тож

$$\boxed{U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}}.$$

Аналогічно знаходяться й поправки вищого порядку.

Приклад 1. Розглянемо енергію взаємодії двох систем зарядів, якщо сумарний заряд кожної із систем дорівнює нулю, і, відповідно, поля визначаються дипольною складовою:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \textcircled{\vec{d}_1} \\ \sum_\alpha e_\alpha = 0 \end{array} & \begin{array}{c} \textcircled{\vec{d}_2} \\ \sum_\alpha e_\alpha = 0 \end{array} \end{array}$$

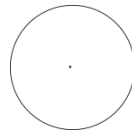
Енергію взаємодії можна розглядати як енергію одної системи зарядів в полі іншої. Наприклад, енергія першої системи в полі другої

$$U = -\vec{d}_1 \vec{E}_2 = \left\{ \vec{E}_2 = \frac{3(\vec{n}_{21} \vec{d}_2) \vec{n}_{21} - \vec{d}_2}{R_{21}^3} \right\} = \frac{\vec{d}_1 \vec{d}_2 - 3(\vec{n}_{21} \vec{d}_1)(\vec{n}_{21} \vec{d}_2)}{R_{21}^3}.$$

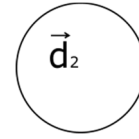
Відзначимо, що той самий результат можна отримати, якщо розрахувати енергію другої системи в полі першої:

$$U = -\vec{d}_2 \vec{E}_1 = \left\{ \vec{E}_1 = \frac{3(\vec{n}_{12} \vec{d}_1) \vec{n}_{12} - \vec{d}_1}{R_{12}^3} \right\} = \frac{\vec{d}_1 \vec{d}_2 - 3(\vec{n}_{12} \vec{d}_1)(\vec{n}_{12} \vec{d}_2)}{R_{12}^3}.$$

Приклад 2. Одна з систем має ненульовий повний заряд, а поле другої задається дипольним моментом:



$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} = e$$



$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} = 0$$

Тут також можливі два варіанти розрахунку:

$$\text{а) } U = -\vec{d}_2 \vec{E}_1 = -\frac{e \vec{R}_{12} \vec{d}_2}{R_{12}^3} = \frac{e \vec{R}_{21} \vec{d}_2}{R_{21}^3};$$

$$\text{б) } U = e\varphi_2 = \left\{ \varphi_2 = \frac{\vec{d}_2 \vec{R}_{21}}{R_{21}^3} \right\} = \frac{e \vec{R}_{21} \vec{d}_2}{R_{21}^3}.$$

В першому випадку ми використали вираз для енергії диполя в полі ненульового заряду (член першого порядку в розкладанні для енергії, але член нульового порядку в розкладанні для напруженості поля), а в другому – для енергії системи зарядів у полі, створюваному диполем (член нульового порядку в розкладанні для енергії, але член першого порядку в розкладанні для потенціалу поля).

6. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

6.1 Закон Біо-Савара

Розглянемо магнітне поле, створюване зарядами, які здійснюють фінітний рух, при якому частинки залишаються весь час в обмеженій області простору, причому імпульси залишаються завжди скінченими. Такий рух має стаціонарний характер, і становить інтерес розглянути середнє (за часом) магнітне поле \overline{H} , створюване зарядами; це поле буде тепер функцією тільки координат, але не часу, тобто буде постійним.

Для того, щоб знайти рівняння, що визначають середнє магнітне поле, усереднимо за часом відповідні рівняння Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \overline{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \overline{j}. \end{aligned}$$

Зауваження. Для будь-якої функції $f(t)$ середнє значення $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Дійсно,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T df = \frac{f(T) - f(0)}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0,$$

тому

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \frac{4\pi}{c} \overline{j}. \quad (6.1.1)$$

Введемо векторний потенціал \vec{A} згідно виразу

$$\overline{H} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Підставивши це в рівняння (6.1.1), отримаємо:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Але

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \left[\nabla \times \left[\nabla \times \vec{A} \right] \right] = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} = \nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

тож маємо:

$$\nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Згадуючи, що векторний потенціал поля визначений неоднозначно, і тому на нього можна накласти будь-яку додаткову умову, виберемо потенціал \vec{A} так, щоб

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (6.1.2)$$

Тоді рівняння, що визначає середній векторний потенціал постійного магнітного нуля, набуває вигляду

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (6.1.3)$$

Розв'язок цього рівняння легко знайти, зауваживши, що (6.1.3) цілком аналогічно рівнянню Пуассона для скалярного потенціалу постійного електричного поля, причому замість густини заряду ρ стоїть густина струму $\frac{\vec{j}}{c}$. Отже, за аналогією з розв'язком рівняння Пуассона можемо написати

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV, \quad (6.1.4)$$

де R – відстань від точки спостереження до елемента об'єму dV .

У формулі (6.1.4) можна перейти від інтеграла до суми по зарядах, підставляючи замість \vec{j} добуток $\rho \vec{v}$ і пам'ятаючи, що всі заряди точкові. При цьому необхідно мати на увазі, що в інтегралі (6.1.4) R є простою змінною інтегрування і тому, звичайно, не піддається усередненню. Якщо ж написати

замість інтеграла $\int \frac{\vec{j}}{R} dV$ суму $\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} v_{\alpha}}{R_{\alpha}}$ то R_{α} будуть модулями радіус-векторів окремих частинок, які змінюються при русі зарядів. Тому треба писати

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} v_{\alpha}}{R_{\alpha}}}, \quad (6.1.5)$$

де усереднюється весь вираз, що стоїть під рискою.

Знаючи \vec{A} , можна знайти напруженість поля.

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \int \text{rot } \frac{\vec{j}}{R} dV.$$

Диференціювання в операції *rot* здійснюється по координатах точки спостереження, а не по координатах зарядів (струмів). Тому *rot* можна внести під знак інтегралу і при диференціюванні вважати \vec{j} сталою.

Користуючись загальною формулою

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{rot } \vec{A} - [\vec{A} \times \nabla \varphi],$$

в якій слід покласти

$$\vec{A} = \vec{j}, \quad \varphi = \frac{1}{R},$$

маємо в такому разі:

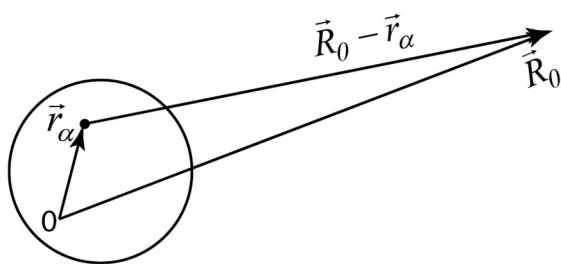
$$\text{rot } \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \cancel{\text{rot } \vec{j}} - \left[\vec{j} \times \nabla \frac{1}{R} \right] = \frac{[\vec{j} \times \vec{R}]}{R^3}.$$

Отже, отримуємо шуканий вираз для середнього поля:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j} \times \vec{R}]}{R^3} dV}, \quad (6.1.6)$$

(радіус-вектор R направлений від елемента об'єму dV до точки спостереження поля). Це – так званий **закон Біо-Савара**.

6.2 Магнітний момент системи зарядів, що рухаються



Розглянемо середнє магнітне поле, створюване системою зарядів, які стаціонарно рухаються, на великих відстанях від цієї системи.

Рис. 6.2.1.

Введемо систему координат з початком де-небудь всередині системи зарядів. Позначимо знову радіус-вектори окремих зарядів за допомогою \vec{r}_α , а радіус-вектор точки, в якій ми шукаємо поле, за допомогою \vec{R}_0 (рис. 6.2.1). Тоді $\vec{R}_\alpha = \vec{R}_0 - \vec{r}_\alpha$ є радіус-вектором від заряду e_α до точки спостереження. Маємо для векторного потенціалу (6.1.5):

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_\alpha \frac{e_\alpha v_\alpha}{R_\alpha} = \frac{1}{c} \sum \frac{\vec{e}v}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|}, \quad (6.2.1)$$

Розкладемо цей вираз за ступенями \vec{r}_α з точністю до членів першого порядку (індекс α для стислості опущено):

$$\frac{1}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} \approx \frac{1}{R_0} - \left(\vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} \right),$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum \frac{\vec{e}v}{R_0} - \frac{1}{c} \sum \vec{e}v \left(\vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} \right) = \frac{d}{dt} \sum \frac{\vec{e}r}{cR_0} + \frac{1}{cR_0^3} \sum \vec{e}v \left(\vec{r} R_0 \right).$$

Врахуємо, що

$$\vec{v} \left(\vec{r} R_0 \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \left(\vec{r} R_0 \right) \right) - \vec{r} \left(\vec{v} R_0 \right)$$

(перший доданок є середнім від часової похідної). Домножимо це рівняння на 1/2:

$$\frac{1}{2} \vec{v} \left(\vec{r} R_0 \right) = -\frac{1}{2} \vec{r} \left(\vec{v} R_0 \right).$$

Додамо тепер до лівої і правої частин отриманої рівності вираз, що стоїть в лівій частині:

$$\overline{\overline{v(rR_0)}} = \frac{1}{2}\overline{\overline{v(rR_0)}} - \frac{1}{2}\overline{\overline{r(vR_0)}}.$$

Праву частину можна згорнути у подвійний векторний добуток, тоді

$$\overline{\overline{v(rR_0)}} = \frac{1}{2}\left[\overline{R_0} \times \left[\overline{v} \times \overline{r}\right]\right] = \frac{1}{2}\left[\left[\overline{r} \times \overline{v}\right] \times \overline{R_0}\right],$$

$$\overline{\overline{A}} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e \left[\left[\overline{r} \times \overline{v}\right] \times \overline{R_0}\right].$$

Введемо вектор

$$\overline{\overline{m}} = \frac{1}{2c} \sum e \left[\overline{r} \times \overline{v}\right],$$

який називається **магнітним моментом** системи зарядів. Тоді

$$\overline{\overline{A}} = \frac{\left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right]}{R_0^3}.$$

Знаючи тепер векторний потенціал, легко знайти напруженість магнітного поля (диференціюємо по координатах точки спостереження!):

$$\overline{\overline{H}} = \text{rot } \overline{\overline{A}} = \text{rot} \left[\frac{\left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right]}{R_0^3} \right] = \frac{1}{R_0^3} \text{rot} \left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right] - \left[\left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right] \times \nabla \frac{1}{R_0^3}\right],$$

$$\text{rot} \left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right] = \left[\nabla \times \left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right] \right] = \overline{\overline{m}} (\nabla \cdot \overline{R_0}) - (\overline{\overline{m}} \cdot \nabla) \overline{R_0} = 3\overline{\overline{m}} - \overline{\overline{m}} = 2\overline{\overline{m}},$$

$$- \left[\left[\overline{\overline{m}} \times \overline{R_0}\right] \times \nabla \frac{1}{R_0^3}\right] = \frac{3}{R_0^5} \left[\overline{R_0} \times \left[\overline{R_0} \times \overline{\overline{m}}\right]\right] =$$

$$= \frac{3}{R_0^5} \left(\overline{R_0} \left(\overline{R_0} \cdot \overline{\overline{m}}\right) - R_0^2 \overline{\overline{m}}\right) = \frac{3\overline{R_0} \left(\overline{R_0} \cdot \overline{\overline{m}}\right)}{R_0^5} - \frac{3\overline{\overline{m}}}{R_0^3}.$$

Отже,

$$\vec{H} = \frac{2\vec{m}}{R_0^3} + \frac{3R_0(\vec{R}_0\vec{m})}{R_0^5} - \frac{3\vec{m}}{R_0^3} = \frac{3R_0(\vec{R}_0\vec{m}) - \vec{m}R_0^2}{R_0^5}.$$

Таким чином,

$$\vec{H} = \frac{3R_0(\vec{R}_0\vec{m}) - \vec{m}R_0^2}{R_0^5}.$$

Вводячи одиничний вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0},$$

можемо переписати останню формулу у вигляді:

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{n}\vec{m})\vec{n} - \vec{m}}{R_0^3}. \quad (6.2.2)$$

Бачимо, що магнітне поле виражається через магнітний момент аналогічно тому, як електричне поле виражається через дипольний момент:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}.$$

6.3 Момент сил для системи зарядів у зовнішньому магнітному полі

Розглянемо систему зарядів, що знаходиться в зовнішньому постійному однорідному магнітному полі.

Середня (за часом) сила, що діє на систему,

$$\vec{F} = \sum \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] = \frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} [\vec{r} \times \vec{H}] = 0,$$

перетворюється в нуль як середнє значення похідної за часом від будь-якої величини, яка змінюється в скінчених межах. Середнє ж значення моменту сил

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

буде відмінним від нуля, причому його можна виразити через магнітний момент системи. Для цього запишемо, розкриваючи подвійний векторний добуток:

$$\overline{\vec{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\left[\vec{r} \times \left[\vec{v} \times \vec{H} \right] \right]} = \sum \frac{e}{c} \overline{\vec{v}(\vec{r}\vec{H})} - \sum \frac{e}{c} \overline{\vec{H}(\vec{r}\vec{v})}.$$

При усередненні другий член обертається в нуль, оскільки

$$\overline{(\vec{r}\vec{v})} = \frac{d}{dt} \frac{r^2}{2}.$$

Отже (див. подібне перетворення в попередньому параграфі)

$$\overline{\vec{v}(\vec{r}\vec{H})} = \frac{1}{2} \left(\overline{\vec{v}(\vec{r}\vec{H})} - \overline{\vec{r}(\vec{v}\vec{H})} \right) = \frac{1}{2} \left[\vec{H} \times \overline{[\vec{v} \times \vec{r}]} \right] = \frac{1}{2} \left[\overline{[\vec{r} \times \vec{v}]} \times \vec{H} \right],$$

$$\overline{\vec{K}} = \frac{1}{2c} \sum e \left[\overline{[\vec{r} \times \vec{v}]} \times \vec{H} \right] = \left[\overline{\vec{m}} \times \vec{H} \right].$$

Таким чином, момент сил

$$\boxed{\overline{\vec{K}} = \left[\overline{\vec{m}} \times \vec{H} \right]}.$$

Звернемо увагу на аналогію з моментом сил, що діють на систему зарядів в зовнішньому постійному однорідному *електричному* полі

$$\overline{\vec{K}_E} = \left[\overline{\vec{d}} \times \vec{E} \right].$$

6.4 Теорема Лармора

Функція Лагранжа для системи зарядів у зовнішньому постійному однорідному магнітному полі містить додатковий (по відношенню до функції Лагранжа замкнутої системи) член

$$L_H = \sum \frac{e}{c} (\vec{A}\vec{v}) = \left\{ \vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H} \times \vec{r}] \right\} = \sum \frac{e}{2c} \left([\vec{H} \times \vec{r}] \vec{v} \right) = \frac{1}{2c} \sum e \left([\vec{r} \times \vec{v}] \vec{H} \right) = (\overline{\vec{m}}\vec{H})$$

(ми скористалися виразом для векторного потенціалу постійного однорідного магнітного поля).

Знову звернемо увагу на аналогію з електричним полем: в постійному однорідному електричному полі функція Лагранжа системи з рівним нулю повним зарядом і дипольним моментом містить член

$$L_E = (\vec{d}\vec{E}),$$

який в цьому випадку фактично є потенціальною енергією системи зарядів, взятою з протилежним знаком.

Тепер давайте розглянемо систему зарядів, які здійснюють фінітний рух (зі швидкостями $v \ll c$) в центральній-симетричному електричному полі, створюваному деяким нерухомим зарядом.

Перейдемо від нерухомої системи координат до системи, яка рівномірно обертається навколо осі, що проходить через цю нерухому частинку. Згідно з відомою формулою, швидкість \vec{v} будь-якої частинки в новій системі координат пов'язана з її ж швидкістю \vec{v}' в старій (нерухомій) системі співвідношенням

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega} \times \vec{r}],$$

де \vec{r} – радіус-вектор частинки, а $\vec{\Omega}$ – кутова швидкість системи координат, що обертається. Перерахуємо функцію Лагранжа системи зарядів:

$$\begin{aligned} L &= \sum \frac{mv'^2}{2} - U = \sum \frac{mv^2}{2} + \sum m\vec{v}[\vec{\Omega} \times \vec{r}] + \sum \frac{m}{2} [\vec{\Omega} \times \vec{r}]^2 - U = \\ &= \sum \frac{mv^2}{2} + \sum m\vec{v}[\vec{\Omega} \times \vec{r}] - U. \end{aligned}$$

тут U – потенціальна енергія зарядів у зовнішньому електричному полі разом з енергією їх взаємодії один з одним, і ми знехтували квадратом векторного добутку, припускаючи, що кутова швидкість Ω є достатньо малою. Потенціальна енергія U є функцією від відстаней зарядів до нерухомої частинки і від їх взаємних відстаней, тому при переході до системи координат, що обертається, вона залишається, очевидно, незмінною.

Припустимо, що у всіх частинок співвідношення зарядів до мас однаково, і покладемо

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{e\vec{H}}{2mc}}, \quad (6.4.1)$$

Тоді при достатньо малих \vec{H} (коли можна знехтувати членами з \vec{H}^2) функція Лагранжа набуває вигляду

$$\begin{aligned} L &= \sum \frac{mv^2}{2} + \sum \frac{e}{2c} (\vec{v} [\vec{H} \times \vec{r}]) - U = \sum \frac{mv^2}{2} + \sum \frac{e}{2c} ([\vec{r} \times \vec{v}] \cdot \vec{H}) - U = \\ &= \sum \frac{mv^2}{2} + (\vec{m} \cdot \vec{H}) - U. \end{aligned}$$

Бачимо, що вона збігається з функцією Лагранжа, яка описувала б рух розглянутих зарядів в нерухомій системі координат при наявності постійного магнітного поля.

Таким чином, приходимо до висновку, що в нерелятивістському випадку поведінка системи зарядів з однаковими відношеннями $e/m = const$, що здійснюють фінітний рух в центральній-симетричному електричному полі і в слабкому однорідному магнітному полі \vec{H} , еквівалентна поведінці цієї ж системи зарядів в тому ж самому електричному полі, але в системі координат, яка рівномірно обертається з кутовою швидкістю (6.4.1) навколо центру поля. Це ствердження становить зміст так званої **теорема Лармора**, а

кутова швидкість $\vec{\Omega} = \frac{e\vec{H}}{2mc}$ називається **ларморовою частотою**.

Отримаємо також зв'язок між магнітним моментом та механічним моментом імпульсу в нерелятивістському випадку для системи зарядів з однаковими відношеннями $e/m = const$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\vec{r} \times \vec{v}] = \left\{ \frac{e}{m} = const \right\} = \frac{e}{2mc} \sum [\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{e}{2mc} \vec{M}.$$

Отже,

$$\boxed{\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{M}}.$$

7. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

7.1 Хвильове рівняння для електромагнітного поля

Електромагнітне поле в вакуумі за відсутності зарядів та струмів визначається рівняннями Максвелла, в яких треба покласти $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Випишемо їх ще раз:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (7.1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7.1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (7.1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (7.1.4)$$

Ці рівняння можуть мати відмінні від нуля розв'язки. Це означає, що електромагнітне поле може існувати навіть за відсутності яких би то не було зарядів або струмів.

Електромагнітні поля, які існують в вакуумі за відсутності зарядів та струмів, називають *електромагнітними хвилями*.

Насамперед відзначимо, що ці поля обов'язково мають бути змінними.

Дійсно, в іншому випадку ми б мали $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, і рівняння (7.1.1–7.1.4)

перейшли б в рівняння для постійного поля, в яких, проте, тепер $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$.

Але розв'язки цих рівнянь при $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ дають нульові потенціали:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV = 0,$$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV = 0.$$

Виведемо рівняння, що визначають потенціали електромагнітних хвиль.

Як ми вже знаємо, в силу неоднозначності потенціалів завжди можна накласти на них деяку додаткову умову. На цій підставі виберемо потенціали електромагнітних хвиль так, щоб скалярний потенціал дорівнював нулю:

$$\varphi = 0. \quad (7.1.5)$$

Тоді

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (7.1.6)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (7.1.7)$$

Підставляючи обидва ці вирази в рівняння (7.1.3), знаходимо:

$$\text{rot rot } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (7.1.8)$$

Незважаючи на те, що ми вже наклали одну додаткову умову на потенціали, потенціал \vec{A} все ще не є цілком однозначним. Саме, до нього можна додати градієнт довільної функції $\nabla f(\vec{r})$, яка не залежить від часу (при цьому φ не зміниться). Зауважимо, що за рахунок підбору цієї функції, зокрема, можна вибрати потенціал електромагнітної хвилі таким чином, щоб

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Дійсно, підставляючи \vec{E} з (7.1.6) в рівняння $\text{div } \vec{E} = 0$, маємо:

$$\text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = 0.$$

Тобто $\text{div } \vec{A}$ є функцією тільки просторових координат. Цю функцію завжди можна перетворити в нуль додаванням до \vec{A} градієнта від відповідної функції, яка не залежить від часу.

Рівняння (7.1.8) набуває тепер вигляду

$$\cancel{\nabla \text{div } \vec{A}} - \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0}. \quad (7.1.9)$$

Це і є рівняння, що визначає потенціал електромагнітних хвиль. Воно називається *рівнянням д'Аламбера* або *хвильовим рівнянням*.

Оператор

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

називається *даламберіаном* або *оператором д'Аламбера*. Тепер за його допомогою можна записати хвильове рівняння у вигляді:

$$\square \vec{A} = 0. \quad (7.1.10)$$

У 4-вимірному вигляді оператора д'Аламбера має, очевидно, форму:

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i}.$$

Застосовуючи до (7.1.9) операції *rot* і $\frac{\partial}{\partial t}$, переконуємося в тому, що напруженості \vec{E} і \vec{H} задовольняють таким же самим хвильовим рівнянням.

Виведемо хвильове рівняння в 4-вимірному вигляді. Запишемо другу пару рівнянь Максвелла в 4-вимірному вигляді:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

За відсутності зарядів та струмів маємо:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

Підставивши сюди компоненти тензора електромагнітного поля F^{ik} , виражені через потенціали,

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

отримуємо:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = 0. \quad (7.1.11)$$

Накладемо на 4-потенціал додаткову умову

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \quad (7.1.12)$$

(цю умову називають *лоренцевою калібровкою*, а потенціали, які її задовольняють, називають *потенціалами в лоренцевій калібровці*). Тоді в рівнянні (7.1.11) перший член зникає, і залишається

$$\boxed{\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = 0}$$

або

$$\square A^i = 0.$$

Перепишемо умову (7.1.12) в 3-вимірному вигляді:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (7.1.13)$$

Вона є більш загальною, ніж використані нами вище умови $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$: потенціали, що задовольняють ці останні, задовольняють також і умову (7.1.13), а навпаки, в загальному випадку, – ні. На відміну від них, умова Лоренца має релятивістськи інваріантний характер: потенціали, що задовольняють її в одній інерціальній системі відліку, задовольняють її і у всякій іншій інерціальній системі.

7.2 Плоскі електромагнітні хвилі

Розглянемо окремий випадок електромагнітних хвиль, коли поле залежить тільки від однієї просторової координати, скажімо x (і від часу). Такі хвилі називаються *плоскими*. У цьому випадку хвильове рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (7.2.1)$$

де під f мається на увазі будь-яка компонента напруженості або потенціалу електромагнітного поля.

Для розв'язання цього рівняння перепишемо його у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0,$$

і введемо нові змінні

$$\begin{cases} \xi = t - \frac{x}{c}, \\ \eta = t + \frac{x}{c}, \end{cases}$$

так що

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \\ x = \frac{c}{2}(\eta - \xi). \end{cases}$$

Тоді похідні по нових змінних

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

тож

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

і рівняння для функції f переписеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{7.2.2}$$

Очевидно, що його загальний розв'язок має вигляд

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

де f_1 та f_2 – довільні функції. Таким чином,

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Нехай, наприклад, $f_2 = 0$, так що $f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$. З'ясуємо зміст цього

розв'язку. У кожній площині $x = const$ поле змінюється з часом; в кожен даний момент поле різне для різних x . Очевидно, що поле має однакове значення для

координат x і моментів часу t , які задовольняють співвідношення

$$t - \frac{x}{c} = \text{const}, \text{ тобто}$$

$$x - ct = \text{const}.$$

Це означає, що якщо в деякий момент $t = 0$ в деякій точці x простору поле має певне значення, то через проміжок часу t те ж саме значення поле має на відстані $x = ct$ вздовж осі x від початкового місця. Тобто всі значення електромагнітного поля поширюються уздовж осі x зі швидкістю, рівною швидкості світла c .

Таким чином, $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ представляє собою плоску хвилю, яка прямує зі швидкістю світла в позитивному напрямку осі x . Очевидно, що $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ представляє собою хвилю, що прямує в протилежному, негативному, напрямку осі x .

Як було показано в попередньому параграфі, потенціали електромагнітної хвилі можна вибрати так, щоб $\varphi = 0$, причому $\text{div} \vec{A} = 0$.

Виберемо потенціали розглянутої плоскої хвилі саме таким чином. Умова

$\text{div} \vec{A} = 0$ дає в цьому випадку $\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$, оскільки всі величини, що

характеризують поле, не залежать від y і z . Згідно (7.2.1) будемо мати тоді й

$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0$, тобто $\frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$. Але похідна $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ визначає електричне поле, і ми

бачимо, що відмінна від нуля компонента A_x означала б в розглянутому

випадку наявність постійного поздовжнього електричного поля. Оскільки таке

поле не має відношення до електромагнітної хвилі, то можна покласти $A_x = 0$.

Таким чином, *векторний потенціал плоскої хвилі може бути завжди обраний перпендикулярним до осі x , тобто до напрямку поширення цієї хвилі.*

Розглянемо плоску хвилю, що біжить в позитивному напрямку осі x . В такій хвилі всі величини, зокрема і \vec{A} , є функціями тільки від $\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Тоді маємо такі напруженості полів:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{A}'_{t-\frac{x}{c}} \frac{\partial}{\partial t} \left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{1}{c} \vec{A}',$$

$$\vec{H} = [\nabla \times \vec{A}] = \left[\nabla \left(t - \frac{x}{c}\right) \times \vec{A}' \right] = -\frac{1}{c} [\vec{n} \times \vec{A}'] = [\vec{n} \times \vec{E}],$$

де штрих означає диференціювання по $t - \frac{x}{c}$, а \vec{n} – одиничний вектор уздовж напрямку поширення хвилі. Отже,

$$\boxed{\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}]} \quad (7.2.3)$$

Ми бачимо, що електричне і магнітне поля \vec{E} і \vec{H} плоскої хвилі спрямовані перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі. На цій підставі плоскі електромагнітні хвилі називають *поперечними*. З (7.2.3) видно, що електричне і магнітне поля плоскої хвилі також перпендикулярні одне до одного і однакові за абсолютною величиною.

Густина потоку енергії в плоскій хвилі:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} (E^2 \vec{n} - \cancel{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n},$$

отже, вектор Пойнтінга для плоскої електромагнітної хвилі:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}}.$$

Таким чином, потік енергії спрямований уздовж напрямку поширення хвилі. Оскільки $W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}$ є густиною енергії хвилі, то можна написати:

$$\boxed{\vec{S} = cW\vec{n}}, \quad (7.2.4)$$

у згоді з тим, що енергія поля переноситься зі швидкістю світла у напрямку поширення плоскої електромагнітної хвилі.

7.3 Монохроматичні плоскі хвилі

Важливий окремий випадок електромагнітних хвиль представляють хвилі, в яких поле є простою періодичною функцією часу. Така хвиля називається *монохроматичною*. Всі величини (потенціали, компоненти полів) в монохроматичній хвилі залежать від часу за допомогою множника виду $f \sim \cos(\omega t + \alpha)$, де ω – *циклічна частота* (або просто частота) хвилі.

У хвильовому рівнянні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

друга похідна від поля по часу дорівнює тепер $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$, так що розподіл

поля в просторі визначається в монохроматичній хвилі рівнянням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \quad (7.3.1)$$

У плоскій хвилі, яка розповсюджується, наприклад, уздовж позитивного напрямку осі x , поле, крім того, є функцією тільки від комбінації $t - \frac{x}{c}$. Тому якщо плоска хвиля ще й монохроматична, то її поле є простою періодичною функцією від $t - \frac{x}{c}$. Векторний потенціал такої хвилі найзручніше написати у вигляді дійсної частини комплексного виразу:

$$\vec{A} = \text{Re} \left\{ \vec{A}_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}. \quad (7.3.2)$$

Тут \vec{A}_0 – деякий сталий комплексний вектор. Очевидно, що і напруженості \vec{E} і \vec{H} в такій хвилі матимуть аналогічний вид з тією ж частотою ω . Величина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (7.3.3)$$

називається **довжиною хвилі**, це є період зміни поля з координатою x в заданий момент часу t .

Вектор

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}, \quad (7.3.4)$$

де \vec{n} – одиничний вектор у напрямку поширення хвилі, називається **хвильовим вектором**. З його допомогою можна переписати (7.3.2) у вигляді

$$\vec{A} = \text{Re} \left\{ \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}, \quad (7.3.5)$$

що не залежить від вибору осей координат. Величину, що стоїть з множником i в показнику, називають **фазою** хвилі.

Доти, поки ми здійснюємо над величинами лише лінійні операції, можна опускати знак знаходження дійсної частини і оперувати з комплексними величинами як такими. Так, при обчисленнях можна користуватися виразом

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.$$

Отримаємо зв'язок між напруженостями складових поля і векторним потенціалом плоскої монохроматичної хвилі:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{A},$$

$$\vec{H} = [\nabla \times \vec{A}] = [\nabla i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \times \vec{A}] = \left\{ \nabla(\vec{k}\vec{r}) = (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{r} + 0 + 0 + 0 = \vec{k} \right\} = i [\vec{k} \times \vec{A}].$$

Таким чином, для плоских монохроматичних хвиль

$$\boxed{\vec{E} = ik\vec{A}}, \quad \boxed{\vec{H} = i[\vec{k} \times \vec{A}]}. \quad (7.3.6)$$

7.4 Напрямок поля монохроматичної плоскої хвилі

Розглянемо докладніше питання про напрямок поля монохроматичної хвилі. Будемо для визначеності говорити про електричне поле

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}$$

(все сказане нижче стосується, зрозуміло, тою ж мірою і магнітного поля). Множник \vec{E}_0 є певним комплексним вектором. Його квадрат E_0^2 є деяким, взагалі кажучи, теж комплексним числом. Якщо позначити аргумент цього числа є -2α (тобто $E_0^2 = |E_0^2| e^{-2i\alpha}$), то вектор \vec{b} , введений в такий спосіб, що

$$\vec{E}_0 = \vec{b} e^{-i\alpha}, \quad (7.4.1)$$

матиме вже дійсний квадрат $b^2 = |E_0^2|$. З таким визначенням запишемо:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{b} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha)} \right\}. \quad (7.4.2)$$

Представимо \vec{b} у вигляді

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2,$$

де \vec{b}_1 і \vec{b}_2 – якісь дійсні вектори. Оскільки скалярний квадрат $b^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i\vec{b}_1\vec{b}_2$ має бути дійсною величиною, то $\vec{b}_1\vec{b}_2 = 0$, тобто вектори \vec{b}_1 і \vec{b}_2 взаємно перпендикулярні. Виберемо напрямок \vec{b}_1 паралельним до напрямку осі y (вісь x співпадає з напрямком поширення хвилі). Тоді з (4.4.2) маємо:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re} \left\{ \vec{b} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha)} \right\} = \text{Re} \left\{ (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) \left(\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha) + i \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha) \right) \right\} = \\ &= \vec{b}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha) - \vec{b}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Тобто,

$$E_y = b_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha), \quad (7.4.3)$$

де знак плюс або мінус має місце в залежності від того, спрямований вектор \vec{b}_2 в позитивному чи негативному напрямку осі z . З (7.4.3) випливає, що

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (7.4.4)$$

Ми бачимо, таким чином, що в кожній точці простору вектор електричного поля обертається в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, причому його кінець описує еліпс (7.4.4). Така хвиля називається *еліптично поляризованою*. Обертання відбувається в напрямку по або проти напрямку гвинта, який закручується вздовж осі x , відповідно при знаку плюс чи мінус в (7.4.3).

Якщо $b_1 = b_2$, то еліпс (7.4.4) перетворюється в коло, тобто вектор \vec{E} обертається, залишаючись постійним за абсолютною величиною. У цьому випадку говорять, що хвиля *поляризована по колу*. Вибір напрямку осей y і z при цьому стає, очевидно, довільним. Відзначимо, що в такій хвилі відношення $y - i z$ – складових комплексної амплітуди \vec{E}_0 дорівнює

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i,$$

відповідно для обертання по і проти напрямку гвинта (*права і ліва поляризації*).

Нарешті, якщо \vec{b}_1 або \vec{b}_2 дорівнює нулю, то поле хвилі направлено скрізь і завжди паралельно (або антипаралельно) одному і тому ж напрямку. Хвилю називають в цьому випадку *лінійно поляризованою* або *плоскополяризованою*. Еліптично поляризовану хвилю можна розглядати, очевидно, як накладення двох лінійно поляризованих хвиль.

7.5 Чотиривимірний хвильовий вектор

Повернемося до визначення хвильового вектору і введемо *чотиривимірний хвильовий вектор*:

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right). \quad (7.5.1)$$

Той факт, що ці величини дійсно становлять 4-вектор, очевидний хоча б з того, що при множенні на 4-радіус-вектор x_i він дає скаляр – фазу хвилі:

$$k^i x_i = \frac{\omega}{c} ct - \vec{k}\vec{r} = \omega t - \vec{k}\vec{r}, \quad (7.5.2)$$

З визначень (7.3.4) і (7.5.1) видно, що квадрат хвильового 4-вектора дорівнює нулю:

$$k^i k_i = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Це співвідношення впливає також і безпосередньо з того, що вираз

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-ik^i x_i}$$

повинен бути розв'язком хвильового рівняння.

7.6 Ефект Допплера

Нарешті, використовуючи закон перетворення хвильового 4-вектора, легко винайти так званий *ефект Допплера* – зміну частоти хвилі ω , випромінюваної джерелом, яке рухається по відношенню до спостерігача, у порівнянні з «власною» частотою ω_0 того ж джерела в системі відліку k' , в якій він знаходиться в спокої.

Нехай в системі K' покоїться джерело сигналу, частота якого ω_0 , а в системі K шукану частоту позначимо ω . Запишемо зворотні перетворення Лоренца для нульової компоненти 4-вектора k^i :

$$k'^0 = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тут, очевидно, $k'^0 = \frac{\omega_0}{c}$, $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $k^1 = k_x = k \cos \alpha$, де α – кут між

напрямком руху джерела сигналу та напрямком поширення хвилі в системі K .

Далі,

$$k^1 = \frac{\omega}{c} \cos \alpha,$$

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c} \frac{\omega}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\omega_0 = \frac{\omega - \frac{V}{c} \omega \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Звідси знаходимо:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}.$$

Це і є зміна частоти при ефекті Допплера. При $V/c \ll 1$ з неї випливає, якщо кут $\alpha \neq \pi/2$:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right).$$

При $\alpha = \pi/2$, відповідно, маємо:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right).$$

В цьому випадку, як бачимо, відносна зміна частоти пропорційна квадрату відношення V/c .

7.7 Запізнілі потенціали

Ми вже вивчали постійне поле, створюване зарядами, які знаходяться в спокої, а також змінне поле, але за відсутності зарядів. Тепер ми перейдемо до вивчення змінних полів при наявності довільно рухомих зарядів.

Виведемо рівняння, що визначають потенціали поля, створювані рухомими зарядами. Це зручно зробити в чотиривимірному вигляді, користуючись відповідною формою другої пари рівняння Максвелла з відмінною від нуля правою частиною:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Виразимо тензор електромагнітного поля через 4-потенціал:

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

тоді маємо:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Накладемо на потенціали умову Лоренца

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0. \quad (7.7.1)$$

Отримуємо :

$$\boxed{\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j^i}. \quad (7.7.2)$$

Це і є рівняння, що визначає потенціали довільного електромагнітного поля. У тривимірному вигляді воно записується у вигляді двох рівнянь – для \vec{A} і для φ :

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}}, \quad (7.7.3)$$

$$\boxed{\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho}. \quad (7.7.4)$$

Для постійного поля вони зводяться до вже відомих нам рівнянь Пуассона, а для змінного поля без зарядів – до однорідних хвильових рівнянь.

Розв'язки неоднорідних лінійних рівнянь (7.7.3–7.7.4) може бути представлено, як відомо, у вигляді суми розв'язків цих же рівнянь з нульовою правою частиною і частинних розв'язків рівнянь з правою частиною. Очевидно, рівняння ідентичні за формою, тож для визначеності зосередимося, наприклад, на скалярному потенціалі. Для знаходження частинного розв'язку

неоднорідного рівняння розділимо весь простір на нескінченно малі елементи dV , в яких знаходяться заряди $de(t)$, і визначимо спочатку поле, створюване зарядом, що знаходиться в одному з таких елементів об'єму. Внаслідок лінійності рівнянь поле буде дорівнює сумі полів, створюваних усіма такими елементами, тобто в кінці треба буде проінтегрувати поле від всіх подібних елементарних зарядів. Відзначимо, що заряд de в заданому елементі об'єму ϵ , взагалі кажучи, функцією від часу. Отже, почнемо.

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho,$$

$$\varphi = \varphi_o + \varphi_{ч.н.}$$

Функція φ_o є розв'язком відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння д'Аламбера, і відповідає зовнішньому полю, яке грає роль граничних умов, а $\varphi_{ч.н.}$ описує поле самої системи зарядів (саме його ми і будемо шукати, опустивши для простоти індекси).

Якщо вибрати початок координат в розглянутому елементі об'єму, то густина заряду $\rho = de(t)\delta(\vec{R})$, де \vec{R} – радіус-вектор з початку координат до точки спостереження. Таким чином, нам треба розв'язати рівняння

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\vec{R}). \quad (7.7.5)$$

Скрізь, крім початку координат, $\delta(\vec{R}) = 0$, і ми маємо рівняння

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (7.7.6)$$

Очевидно, поле володіє сферичною симетрією, тобто є функцією тільки від абсолютного значення R , тому запишемо радіальну частину нашого рівняння:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння зробимо заміну $\varphi(R,t) = \frac{\chi(R,t)}{R}$. Тоді

отримуємо (штрих означатиме похідну по R):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\chi}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \chi + \frac{\chi'}{R},$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} (R\chi' - \chi) = \chi' + R\chi'' - \chi' = R\chi'',$$

$$\frac{1}{R} \chi'' - \frac{1}{R} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Але це – рівняння для плоских хвиль, розв'язок якого має вигляд:

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right).$$

Оскільки ми шукаємо тільки частинний розв'язок рівняння, то достатньо взяти тільки одну з функцій f_1 чи f_2 . Зазвичай буває зручним вибирати $f_2 = 0$

, а отже $\chi = \chi \left(t - \frac{R}{c} \right)$. Тоді потенціал φ скрізь, крім початку координат, має

вигляд

$$\varphi = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (7.7.7)$$

Функція χ в цій рівності поки довільна, – виберемо її тепер так, щоб отримати вірне значення для потенціалу також і в початку координат. Інакше кажучи, ми повинні підібрати χ так, щоб в початку координат задовольнити рівняння (7.7.5), Це легко зробити, зауваживши, що при $R \rightarrow 0$ сам потенціал прямує до нескінченності, а тому його похідні по координатах ростуть швидше, ніж похідні за часом. Отже, при $R \rightarrow 0$ в рівнянні (7.7.5) можна

знехтувати членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ в порівнянні з $\Delta \varphi$. Тоді воно переходить у відоме вже нам рівняння

$$\Delta \varphi = -4\pi de(t)\delta(R),$$

яке, як пам'ятаємо, призводить до закону Кулона:

$$\varphi = \frac{de(t)}{R}.$$

Таким чином, поблизу початку координат і формула (7.7.7) повинна відповідати закону Кулона. Тобто, згадуючи, що

$$\varphi(R, t) = \frac{\chi(R, t)}{R},$$

маємо:

$$\chi\left(t - \frac{R}{c}\right) = de\left(t - \frac{R}{c}\right),$$

$$\boxed{\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}}.$$

Це – потенціал поля, створюваного одним елементарним зарядом. Звідси легко перейти до розв'язку рівняння (7.7.4) для довільного розподілу зарядів. Для цього достатньо записати $de = \rho dV$ і проінтегрувати по всьому простору. До отриманого таким чином розв'язку неоднорідного рівняння (7.7.4) слід додати ще розв'язок φ_0 цього ж рівняння без правої частини. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (7.7.8)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки спостереження, в якій ми шукаємо значення потенціалу, \vec{r}' – радіус-вектор елемента об'єму dV' , в якому знаходиться елементарний заряд, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ є відстанню від елемента об'єму dV' до точки спостереження. Ми писатимемо цей вираз коротко у вигляді

$$\boxed{\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV}, \quad (7.7.9)$$

де індекс показує, що значення ρ треба брати в момент часу $t - R/c$, а штрих у dV опущений.

Аналогічним чином маємо для векторного потенціалу:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 + \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R} dV}, \quad (7.7.10)$$

Вирази (7.7.9-7.7.10) (без φ_0 і \vec{A}_0) називаються **запізнілими потенціалами**, оскільки значення потенціалу в якийсь момент часу визначається розподілом заряду не в той самий час, а в момент $t - R/c$.

У разі нерухомих зарядів (тобто густини ρ , яка не залежить від часу) формула (7.7.9) переходить у відому вже нам формулу для потенціалу електростатичного поля; формула же (7.7.10) у разі стаціонарного руху зарядів переходить (після усереднення) в формулу для векторного потенціалу постійного магнітного поля.

7.8 Поле системи зарядів на далеких відстанях

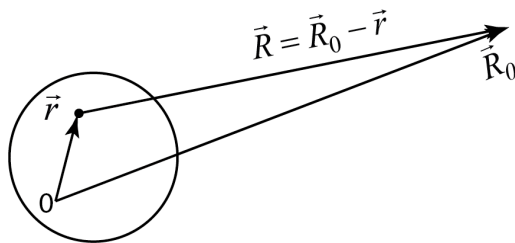


Рис. 7.8.1.

Розглянемо поле, створюване системою рухомих зарядів на відстанях, великих у порівнянні з її власними розмірами (рис. 7.8.1).

Виберемо початок координат O де-небудь всередині системи зарядів. Радіус-вектор в точку спостереження поля позначимо \vec{R}_0 , а одиничний вектор у цьому напрямку – \vec{n} . Радіус-вектор елемента заряду $de = \rho dV$ нехай буде \vec{r} , а вектор від dV в точку спостереження позначимо як \vec{R} ; очевидно, що $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$.

На великих відстанях від системи $R_0 \gg r$ і наближено маємо:

$$R = |\vec{R}_0 - \vec{r}| \approx R_0 - \vec{r} \cdot \nabla R_0 = R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}.$$

Підставимо це в формули для запізнілих потенціалів (7.7.9) – (7.7.10). У знаменнику підінтегральних виразів можна знехтувати $\vec{n}\vec{r}$ в порівнянні з R_0 . В аргументі ж $t - R/c$ цього нехтування, взагалі кажучи, допустити не можна; можливість такого нехтування визначається тут не відносною величиною R_0 і $\vec{n}\vec{r}$, а тим, наскільки змінюються самі ρ і \vec{j} за час $\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}$. Враховуючи, що при інтегруванні R_0 є сталою і тому може бути винесено за знак інтеграла, знаходимо для потенціалів поля на великій відстані від системи зарядів такі вирази:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} dV, \quad (7.8.1)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} dV. \quad (7.8.2)$$

На достатньо великих відстанях від системи поле в малих ділянках простору можна розглядати як плоску хвилю. Для цього треба, щоб відстані були великі не тільки в порівнянні з розмірами системи, але і в порівнянні з довжиною випромінюваних системою електромагнітних хвиль. Про цю область поля говорять як про *хвильову зону випромінювання*.

У плоскій хвилі поля \vec{E} і \vec{H} пов'язані один з одним співвідношенням $\vec{E} = [\vec{H} \times \vec{n}]$. Оскільки $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, то для повного визначення поля в хвильовій зоні достатньо обчислити лише векторний потенціал. Пам'ятаємо, що ротор береться по координатах точки спостереження, тому градієнт можемо внести під знак інтеграла, який береться по координатах зарядів:

$$\vec{H} = [\nabla \times \vec{A}] = \frac{1}{c} \left[\nabla \times \frac{1}{R_0} \int \vec{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} dV \right] = \frac{1}{c} \int \left[\nabla \times \frac{1}{R_0} \vec{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} \right] dV.$$

Далі,

$$\left[\nabla \times \frac{1}{R_0} \vec{j} \right] = \frac{1}{R_0} \left[\nabla \times \vec{j} \right] - \left[\vec{j} \times \nabla \frac{1}{R_0} \right] = \frac{1}{R_0} \left[\nabla \times \vec{j} \right] + \left[\vec{j} \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} \right].$$

Тут останнім доданком нехтуємо як малою другого порядку на великих відстанях. Відзначимо також, що

$$\left[\nabla \times \vec{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} \right] = \left[\nabla \left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} \right) \times \vec{j}' \right] = -\frac{1}{c} \left[\nabla R_0 \times \vec{j}' \right] = -\frac{1}{c} \left[\vec{n} \times \vec{j}' \right],$$

тому

$$\vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{1}{cR_0} \int \left[\vec{n} \times \vec{j}' \right] dV = \left\{ \dot{\vec{A}} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}} dV \right\} = -\frac{1}{c} \left[\vec{n} \times \dot{\vec{A}} \right] = \frac{1}{c} \left[\dot{\vec{A}} \times \vec{n} \right].$$

$$\vec{E} = \left[\vec{H} \times \vec{n} \right] = \frac{1}{c} \left[\left[\dot{\vec{A}} \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right].$$

Відзначимо, що поле на далеких відстанях виявляється обернено пропорційним першому ступеню відстані R_0 від випромінюючої системи. Слід також зауважити, що час t входить у вирази (7.8.1) – (7.8.2) скрізь в комбінації $t - R_0/c$ з відстанню R_0 .

Випромінювані системою електромагнітні хвилі несуть із собою певну енергію. Потік енергії дається вектором Пойнтінга, рівним в плоскій хвилі

$$\vec{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \vec{n}.$$

Інтенсивність dI випромінювання в елемент тілесного кута do визначають як кількість енергії, що протікає в одиницю часу через елемент $df = R_0^2 do$ кульової поверхні з центром в початку координат і з радіусом R_0 . Ця величина, таким чином, дорівнює густині потоку енергії \vec{S} , помноженій на $d\vec{f}$, тобто

$$dI = \vec{S} d\vec{f}.$$

А отже,

$$\boxed{dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 do}.$$

Оскільки поле H обернено пропорційне R_0 , то ми бачимо, що кількість енергії, випромінюваної системою в одиницю часу в елемент тілесного кута $d\Omega$, є однаковою для всіх відстаней (при однакових для них значеннях різниці $t - R_0/c$). Так, зрозуміло, і повинно бути, оскільки випромінювана системою енергія поширюється в навколишньому просторі зі швидкістю c , ніде не нагромаджуючись і не зникаючи.

8. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ. ЕЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВІДНИКІВ

8.1 Електростатичне поле провідників

До цього ми працювали з електромагнітними полями, які існують в вакуумі, тепер перейдемо до вивчення полів в середовищах. Цим напрямком фізичних досліджень займається *електродинаміка суцільних середовищ*.

Електродинаміка в середовищах, відповідно до ідеї Лоренца, має справу з полями, усередненими по всіх нескінченно малих об'ємах, тобто основні рівняння електродинаміки суцільних середовищ отримуються з усереднення рівнянь електромагнітного поля в пустоті. Такий перехід від мікро- до макроскопічний рівнянь був здійснений Лоренцом (1902 рік).

Наприклад, якщо позначити точне електричне поле вектором \vec{e} , то макроскопічне поле \vec{E} визначиться виразом

$$\vec{E} = \vec{e}. \quad (8.1.1)$$

Далі ми так само будемо всі мікроскопічні поля позначати малими літерами, а усереднені макроскопічні – великими.

Вигляд рівнянь мікроскопічної електродинаміки і зміст величин, які входять до них, суттєво залежать від фізичної природи матеріального середовища, а також від характеру зміни поля з часом. Тому є доцільним досліджувати ці рівняння для кожної категорії фізичних об'єктів окремо.

Як відомо, всі тіла поділяються у відповідності до їхніх електричних властивостей на два основні класи – *провідники та діелектрики*. Перші відрізняються від других тим, що будь-яке електричне поле викликає в них рух зарядів – електричний струм.

Розпочнемо вивчення постійних електричних полів, які створюються зарядженими провідниками (*електростатика провідників*). З головної властивості провідників зрозуміло, що в електростатичному випадку напруженість електричного поля всередині них повинна бути рівною нулю. Дійсно, відмінна від нуля напруженість \vec{E} призвела б до виникнення струму;

між тим розповсюдження струму в провіднику пов'язано з дисипацією енергії і тому не може саме по собі (без зовнішніх джерел енергії) підтримуватися в стаціонарному стані.

Звідси в свою чергу слідує, що всі заряди в провіднику повинні бути розподілені по його поверхні: наявність зарядів в об'ємі провідника призвело б до появи електричного поля в ньому; розподіл зарядів по поверхні може бути здійснений таким чином, щоб створювані ними всередині провідника поля взаємно компенсувалися.

Тим самим, задача електростатики провідників зводиться до знаходження електричного поля в вакуумі поза провідником і знаходження розподілу зарядів на поверхні провідника.

В точках, які знаходяться не надто близько до поверхні тіла, середнє поле \vec{E} в вакуумі фактично співпадає з істинним полем \vec{e} . Ці дві величини відрізняються одна від одної лише в безпосередній близькості до тіла, де ще береться до уваги вплив нерегулярних молекулярних полів. Остання обставина, тим не менш, не впливає на вигляд усереднених рівнянь поля. Точні мікроскопічні рівняння Максвелла в вакуумі:

$$\operatorname{div} \vec{e} = 0, \quad (8.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = 0. \quad (8.1.3)$$

Відзначимо, що тут врахована відсутність змінного магнітного поля. В результаті усереднення знаходимо, що постійне електричне поле поза провідником задовольняє рівнянням

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 0}, \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}. \quad (8.1.4)$$

Звідси випливає, що електричне поле має потенціальний характер, і тому можна ввести потенціал φ , який пов'язаний з напруженістю співвідношенням

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi} \quad (8.1.5)$$

і задовольняє рівняння Лапласа

$$\boxed{\Delta \varphi = 0}. \quad (8.1.6)$$

Отримаємо граничні умови для поля \vec{E} на поверхні провідника з рівняння $\text{rot}\vec{E} = 0$, справедливого поза тілом і всередині нього. Виберемо вісь z за напрямком вектора нормалі \vec{n} до поверхні провідника в деякій її точці. Компонента E_z поля в безпосередній близькості до поверхні тіла досягає дуже великих значень. Це велике поле є властивістю самої поверхні і залежить від її фізичної структури, але не має відношення до електростатичної задачі, яку ми розглядаємо, оскільки швидко спадає вже на відстанях, які можна порівняти з атомними. Суттєво, проте, що, якщо поверхня провідника достатньо однорідна, похідні $\frac{\partial E_z}{\partial x}$, $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ вздовж поверхні залишаються, вочевидь, скінченними, не дивлячись на дуже великі значення самого E_z . Тому з x -компоненти першого з рівнянь (8.1.4) маємо:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0.$$

Тож отримуємо, що $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ є також скінченною величиною. Це означає, що E_y залишається неперервною величиною при переході через поверхню (стрибок E_y призводив би до нескінченної похідної $\frac{\partial E_y}{\partial z}$). Теж саме відноситься і до E_x , – її неперервність на поверхні впливає з y -компоненти того ж рівняння. А оскільки всередині провідника взагалі $\vec{E} = 0$, то можемо зробити висновок, що дотичні компоненти зовнішнього поля на його поверхні також повинні перетворюватися в нуль:

$$\boxed{\vec{E}_\tau = 0}. \quad (8.1.7)$$

Таким чином, електростатичне поле повинно бути нормальним до поверхні провідника в кожній його точці. Оскільки $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то це означає, що потенціал поля повинен бути незмінним уздовж всієї поверхні провідника.

Іншими словами, *поверхня провідника є еквіпотенціальною поверхнею електростатичного поля.*

Нормальна до поверхні компонента поля пов'язана з густиною розподілу заряду по поверхні. Цей зв'язок отримується з загального мікроскопічного рівняння $\text{div} \vec{e} = 4\pi\rho$, яке після усереднення приймає вигляд

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\bar{\rho}, \quad (8.1.8)$$

де $\bar{\rho}$ – середня густина зарядів. В інтегральному вигляді це рівняння означає, що потік електричного поля через замкнену поверхню дорівнює повному заряду, який знаходиться в обмеженому цією поверхнею об'ємі (помноженому на 4π). Застосувавши цю теорему до елемента об'єму між двома нескінченно близькими малими ділянками, які розташовані по різні боки від поверхні, і враховуючи, що на внутрішній ділянці $\vec{E} = 0$, знайдемо:

$$\int \text{div} \vec{E} dV = 4\pi \int \bar{\rho} dV,$$

$$\oint \vec{E} d\vec{f} = 4\pi e,$$

де e – повний заряд, що потрапив в даний об'єм. Іншими словами, якщо на достатньо малих ділянках поверхні поле можна вважати незмінним, то

$$\int E_n df = 4\pi e,$$

$$E_n S = 4\pi e,$$

$$E_n = 4\pi\sigma.$$

Тут S – площа ділянки поверхні, $\sigma = e/S$ – поверхнева густина заряду.

Далі знаходимо, що в кожній точці поверхні

$$\sigma = \frac{E_n}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (8.1.9)$$

Тепер повний заряд, що знаходиться на всій поверхні провідника, можна записати чотирма рівноправними виразами:

$$e = \frac{1}{4\pi} \oint E_n df,$$

$$e = \frac{1}{4\pi} \oint \vec{E} d\vec{f},$$

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} df,$$

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \nabla \varphi d\vec{f}. \quad (8.1.10)$$

Зауваження. Розподіл потенціалу в будь-якому електростатичному полі володіє наступною властивістю: функція $\varphi(x, y, z)$ може досягати максимального чи мінімального значення лише на межах області поля.

Дійсно, припустимо, що в якійсь точці простору потенціал досягає, наприклад, максимуму. Тоді існує поверхня в околі цієї точки, на якій $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$.

Очевидно, що і інтеграл по цій поверхні $\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} df < 0$.

Якщо ж $\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} df < 0$, тоді й $\oint \nabla \varphi d\vec{f} = \int \Delta \varphi dV < 0$, але це суперечить рівнянню $\Delta \varphi = 0$, тобто наше припущення не є вірним, і в цій точці максимуму, як і мінімуму, бути не може.

Наслідком цієї властивості потенціалу є те, що *будь-який пробний заряд, внесений в електростатичне поле, не зможе знаходитися в стані рівноваги в жодній точці простору поза провідником*, оскільки його потенціальна енергія $U = e\varphi$ теж не матиме мінімуму.

8.2 Енергія електростатичного поля провідників

Порахуємо повну енергію U електростатичного поля системи заряджених провідників:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (8.2.1)$$

де інтеграл береться по всьому об'єму простору поза провідниками (оскільки поле всередині провідників, як пам'ятаємо, відсутнє). Перетворимо цей інтеграл наступним чином:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \left\{ \vec{E} = -\nabla \varphi \right\} = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \nabla \varphi dV = \left\{ \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) = \varphi \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \nabla \varphi \right\} =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \cancel{\varphi \operatorname{div} \vec{E}} dV.$$

Останній інтеграл обертається в нуль, оскільки поза провідниками $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, а передостанній інтеграл перетворюється в інтеграл по обмежуючим поле поверхням провідників і по нескінченно віддаленій поверхні. Але інтеграл по нескінченно віддаленій поверхні S_∞ дорівнює нулю в силу природних граничних умов (поле на нескінченності зникає). Нумеруючи провідники індексом α і позначаючи постійні значення потенціалу на поверхні кожного з них φ_α , отримаємо

$$U = -\frac{1}{8\pi} \oint \varphi \vec{E} \overrightarrow{df} = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \varphi \vec{E} \overrightarrow{df} - \frac{1}{8\pi} \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} \varphi_\alpha \vec{E} \overrightarrow{df}_\alpha = \left\{ \overrightarrow{df}_\alpha = -\overrightarrow{df}_\alpha \right\} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_\alpha \varphi_\alpha \oint_{S_\alpha} \vec{E} \overrightarrow{df}_\alpha = \left\{ e_\alpha = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_\alpha} \vec{E} \overrightarrow{df}_\alpha \right\} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \varphi_\alpha e_\alpha.$$

Тут $\overrightarrow{df}_\alpha$ позначено вектор зовнішньої нормалі до елементарної ділянки поверхні, яка обмежує область поля на поверхнях провідників. Очевидно, цей вектор напрямлений протилежно вектору зовнішньої нормалі до елементарної ділянки поверхні провідника $\overrightarrow{df}_\alpha$ (див. рис. 8.2.1). Отже, маємо **електростатичну енергію поля системи провідників:**

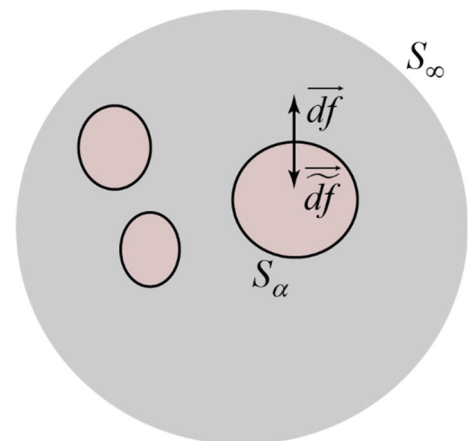


Рис. 8.2.1.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \varphi_{\alpha} .$$

Ця формула, як бачимо, за формою абсолютно аналогічна енергії системи точкових зарядів в вакуумі.

8.3 Коефіцієнти ємності та індукції

Заряди і потенціали провідників не можуть бути задані одночасно довільним чином, між ними існує певний зв'язок. В силу лінійності і однорідності рівнянь поля в вакуумі цей зв'язок має бути лінійним, тобто виражатися співвідношенням вигляду

$$e_{\alpha} = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \varphi_{\beta} , \quad (8.3.1)$$

де величини $C_{\alpha\beta}$ мають розмірність довжини і залежать від форми і фізичних властивостей провідників. Величини $C_{\alpha\alpha}$ (тобто, якщо $\alpha = \beta$) називають **коефіцієнтами ємності**, а величини $C_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) – **коефіцієнтами електростатичної індукції**. Зокрема, якщо маємо лише один провідник, то для нього $e = C\varphi$, де C – ємність провідника. Порядок величини ємності співпадає з лінійними розмірами тіла. Зворотній вираз для потенціалів через заряди має вигляд:

$$\varphi_{\alpha} = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta}^{-1} e_{\beta} ,$$

де коефіцієнти $C_{\alpha\beta}^{-1}$ складають матрицю, обернену матриці коефіцієнтів $C_{\alpha\beta}$.

Розрахуємо зміну енергії системи провідників при нескінченно малій зміні їх зарядів або потенціалів. За означенням енергії,

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV ,$$

ТОЖ

$$\delta U = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \overline{\delta E} dV.$$

Цей вираз можна перетворити двома альтернативними способами.

1. Підставимо $E = -\nabla \varphi$ в перший множник під інтегралом:

$$\begin{aligned} \delta U &= -\frac{1}{4\pi} \int \nabla \varphi \overline{\delta E} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\varphi \overline{\delta E}) dV + \frac{1}{4\pi} \int \varphi \overline{\text{div} E} dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint \varphi \overline{\delta E} \vec{df} = -\frac{1}{4\pi} \int \varphi \overline{\delta E} \vec{df} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \oint \varphi_{\alpha} \overline{\delta E} \vec{df}_{\alpha} = \left\{ \vec{df}_{\alpha} = -\overline{df}_{\alpha} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \oint \varphi_{\alpha} \overline{\delta E} \vec{df}_{\alpha} = \left\{ e_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \oint \vec{E} \vec{df}_{\alpha} \right\} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \delta e_{\alpha}. \end{aligned}$$

Так, ми отримали зміну енергії, яка виражена через зміну зарядів.

2. З іншого боку, можна підставити $E = -\nabla \varphi$ в другий множник. Тоді

маємо:

$$\begin{aligned} \delta U &= -\frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \nabla \delta \varphi dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\delta \varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{4\pi} \int \delta \varphi \overline{\text{div} E} dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint \delta \varphi \vec{E} \vec{df} = -\frac{1}{4\pi} \int \delta \varphi \vec{E} \vec{df} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \oint \delta \varphi_{\alpha} \vec{E} \vec{df}_{\alpha} = \left\{ \vec{df}_{\alpha} = -\overline{df}_{\alpha} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \oint \delta \varphi_{\alpha} \vec{E} \vec{df}_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \delta \varphi_{\alpha} \oint \vec{E} \vec{df}_{\alpha} = \left\{ e_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \oint \vec{E} \vec{df}_{\alpha} \right\} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \delta \varphi_{\alpha}. \end{aligned}$$

Тут зміну енергії виражено через зміну потенціалів провідників.

Ці формули показують, що про диференціювавши енергію U по величинах зарядів ми отримуємо потенціали провідників, а похідні від U по потенціалах дають значення зарядів:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{\alpha}} = \varphi_{\alpha}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\alpha}} = e_{\alpha}.$$

З іншого боку, потенціали і заряди є лінійними функціями одна одної. З урахуванням (8.3.1) маємо:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_{\alpha} \partial \varphi_{\beta}} = \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial \varphi_{\beta}} = C_{\alpha\beta}.$$

Змінивши порядок диференціювання, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_\beta \partial \varphi_\alpha} = \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi_\alpha} = C_{\beta\alpha},$$

тобто

$$\boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}.$$

Енергія U може бути записана у вигляді квадратичної форми:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \varphi_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta},$$

Ця квадратична форма має бути суттєво додатною (як і енергія). З цієї умови виникають нерівності, яким задовольняють коефіцієнти $C_{\alpha\beta}$. Зокрема, всі коефіцієнти ємності мають бути додатними:

$$\boxed{C_{\alpha\alpha} > 0}.$$

Крім того, відзначимо другу умову додатності квадратичної форми:

$$C_{\alpha\alpha} C_{\beta\beta} > C_{\alpha\beta}^2.$$

І навпаки, покажемо, що всі коефіцієнти електростатичної індукції від'ємні:

$$C_{\alpha\beta} < 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Це очевидно з наступних міркувань. Уявімо, що всі провідники, крім одного (наприклад, провідника β), заземлені, тобто їхні потенціали дорівнюють нулю, а, припустимо, $\varphi_{\beta} > 0$ (рис 8.3.1).

Тоді заряд на провіднику α :

$$e_{\alpha} = C_{\alpha\beta} \varphi_{\beta}.$$

З іншого боку,

$$e_{\alpha} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df_{\alpha}.$$

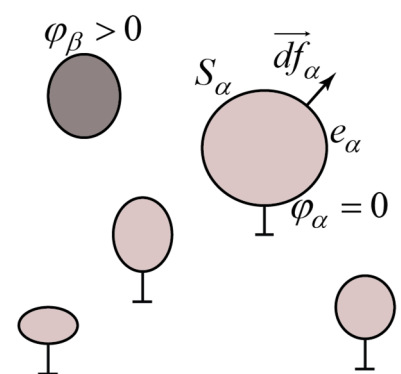


Рис. 8.3.1.

Але потенціал електростатичного поля не може досягати мінімального чи максимального значення поза провідником, тому максимальним значенням буде $\varphi_\beta > 0$, а мінімальним – нуль на поверхнях інших провідників. Очевидно, потенціал буде додатним і в усьому просторі, так що його найменше значення (нуль) досягається на заземлених провідниках. Звідси випливає, що на поверхнях S_α останніх нормальна похідна потенціалу $\frac{\partial\varphi}{\partial n} > 0$, а заряд, відповідно, від’ємний:

$$e_\alpha = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial n} df < 0,$$

оскільки

$$\oint_{S_\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial n} df > 0.$$

Отже, маємо:

$$e_\alpha < 0, \quad \varphi_\beta > 0,$$

причому $e_\alpha = C_{\alpha\beta}\varphi_\beta$. Таким чином,

$$\boxed{C_{\alpha\beta} < 0}.$$

9. ЕЛЕКТРОСТАТИКА ДІЕЛЕКТРИКІВ

9.1 Електростатичне поле в діелектриках. Вектор діелектричної поляризації

Головна властивість діелектриків полягає в неможливості протікання в них постійного струму. Тому, на відміну від провідників, напруженість постійного електричного поля в діелектриках не повинна бути рівною нулю. Запишемо усереднені рівняння, якими це поле описуються:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (9.1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\bar{\rho}. \quad (9.1.2)$$

Припустимо, що всередину діелектрика не внесено зовні жодних сторонніх зарядів. Це є найбільш поширений і важливий випадок. Тоді, очевидно, повний заряд в усьому об'ємі діелектрика залишається рівним нулю і після внесення його в електричне поле:

$$\int \bar{\rho} dV = 0.$$

Це інтегральне співвідношення, яке має виконуватися для тіла будь-якої форми, означає, що середня густина зарядів може бути записана у вигляді дивергенції деякого вектору, який прийнято позначати як $-\vec{P}$:

$$\boxed{\bar{\rho} = -\operatorname{div} \vec{P}}. \quad (9.1.3)$$

При чому поза діелектриком $\vec{P} = 0$. Дійсно, інтегруючи по об'єму, який обмежений поверхнею, що охоплює весь діелектрик і всюди знаходиться поза його межами, отримуємо

$$\int \bar{\rho} dV = -\int \operatorname{div} \vec{P} dV = -\oint \vec{P} d\vec{f} = 0.$$

Величина \vec{P} називається **вектором діелектричної поляризації** тіла; діелектрик, в якому $\vec{P} \neq 0$ називається **поляризованим**.

Визначимо зв'язок між вектором \vec{P} та іншими характеристиками діелектрика. Для цього розрахуємо повний дипольний момент діелектрика, – на відміну від повного заряду ця величина не повинна дорівнювати нулю. За

визначенням дипольного моменту (з урахуванням неперервного розподілу зарядів),

$$\vec{d} = \sum e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \Rightarrow \int \vec{p} \vec{r} dV ,$$

$$\vec{d} = \int \vec{p} \vec{r} dV = - \int \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV .$$

Розрахуємо допоміжний інтеграл (знов область інтегрування обираємо такою, що повністю охоплює все тіло, а її поверхня всюди знаходиться поза тілом):

$$- \vec{c} \int \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV = - \int (\vec{c} \vec{r}) \operatorname{div} \vec{P} dV = - \int \operatorname{div} \{ (\vec{c} \vec{r}) \vec{P} \} dV + \int \vec{P} \nabla (\vec{c} \vec{r}) dV = - \oint (\vec{c} \vec{r}) \vec{P} d\vec{f} + \int \vec{P} \{ \vec{c} \times \operatorname{rot} \vec{r} + \vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{c} + (\vec{c} \nabla) \vec{r} + (\vec{r} \nabla) \vec{c} \} dV = \vec{c} \int \vec{P} dV .$$

Тут \vec{c} – довільний сталий вектор. Отже,

$$\vec{c} \vec{d} = \vec{c} \int \vec{P} dV ,$$

$$\vec{d} = \int \vec{P} dV .$$

Таким чином, **вектор поляризації представляє собою дипольний момент одиниці об'єму діелектрика.**

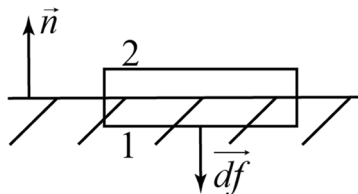


Рис. 9.1.1.

Відзначимо, що вектор \vec{P} визначає також і поверхневу густину σ зарядів, розподілених по поверхні поляризованого діелектрика. Дійсно, якщо проінтегрувати формулу (9.1.3) по об'єму,

який знаходиться між двома невеличкими нескінченно близькими площадками, що знаходяться з обох сторін діелектрика (рис. 9.1.1), і враховуючи, що на зовнішній площадці, позначеною цифрою 2, $\vec{P} = 0$, отримуємо:

$$\int \vec{p} dV = - \int \operatorname{div} \vec{P} dV ,$$

причому

$$\int \vec{p} dV = e ,$$

$$- \oint \vec{P} d\vec{f} = - \int_1 \vec{P} d\vec{f} = \int_1 P_n df .$$

Тут P_n – складова вектора \vec{P} по зовнішній нормалі до поверхні діелектрика. Отже,

$$e = P_n S,$$

$$\boxed{P_n = \sigma}.$$

Підставивши тепер (9.1.3) в (9.1.2), отримаємо друге рівняння електростатичного поля у вигляді

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 0}, \quad (9.1.6)$$

де введена нова величина

$$\boxed{\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}}, \quad (9.1.7)$$

яка називається **вектором електричної індукції**. Рівняння (9.1.6) було отримане шляхом усереднення густини зарядів, які входять в склад діелектрика. Якщо ж в діелектрик внести зовнішні по відношенню до його речовини постійні заряди (будемо називати їх **сторонніми**), то до правої частини рівняння (9.1.6) повинна бути додана їх густина ρ_{cm} :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\bar{\rho} + \rho_{cm}).$$

Тоді маємо:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_{cm}}.$$

На поверхні розділу двох різних діелектриків повинні виконуватися певні граничні умови. Одна з цих умов є наслідком рівняння $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Якщо поверхня розділу однорідна за своїми фізичними властивостями, то ця умова потребує неперервності тангенціальної складової напруженості поля (див. аналогічні пояснення для провідників):

$$\boxed{\vec{E}_{\tau 1} = \vec{E}_{\tau 2}}. \quad (9.1.9)$$

Друга ж умова випливає з рівняння $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ і потребує неперервності нормальної до поверхні складової індукції:

$$\boxed{D_{n1} = D_{n2}}. \quad (9.1.10)$$

Дійсно, стрибок нормальної складової $D_n = D_z$ означає би перетворення в нескінченність похідної $\frac{\partial D_z}{\partial z}$, яка є останнім доданком в дивергенції. Отже, нормальна складова вектора індукції має змінюватися неперервно при переході через поверхню.

Зауважимо, що *на межі розділу діелектрика та зарядженого провідника* (заряди провідника розташовані на його поверхні і будуть сторонніми для діелектрика) поверхнева густина зарядів визначається нормальною компонентою вектора індукції. Дійсно, проінтегрувавши по області, схематично зображеній на рис. 9.1.2, і вважаючи середовище 1 провідником (в ньому поле відсутнє), а середовище 2 – діелектриком, маємо:

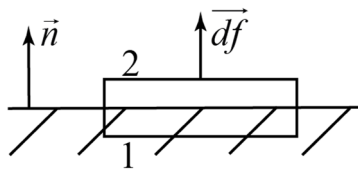


Рисунок 9.1.2.

$$\int \operatorname{div} \bar{D} dV = 4\pi \int \rho_{cm} dV$$

$$\oint \bar{D} d\vec{f} = 4\pi e,$$

$$D_n S = 4\pi e,$$

$$\boxed{D_n = 4\pi\sigma}.$$

Нормаль тут – зовнішня до провідника.

9.2 Діелектрична проникність. Діелектрична сприйнятливість

Для того, щоб рівняння (9.1.1) і (9.1.6) склали повну систему рівнянь, які визначають електростатичне поле, до них можна ще приєднати співвідношення, яке пов'язує індукцією \bar{D} і напруженість поля \bar{E} . В багатьох випадках цю залежність можна вважати лінійною. Вона відповідає першим членам розкладу \bar{D} по степеням \bar{E} і пов'язана з малістю зовнішніх електричних полів у порівнянні з внутрішніми молекулярними полями.

Лінійна залежність \bar{D} від \bar{E} має простий вигляд у важливому випадку *ізотропних* діелектриків. Очевидно, що в ізотропному діелектрику вектори \bar{D} і \bar{E} повинні мати однакові напрямки. Тому їх лінійна залежність зводиться до простої пропорційності:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}. \quad (9.2.1)$$

Коефіцієнт ε називається **діелектричною проникністю** речовини і є функцією її термодинамічного стану.

Для анізотропних діелектриків:

$$\boxed{\vec{D}_i = \varepsilon_{ik} \vec{E}_k}.$$

Відзначимо, що тензор діелектричної проникності ε_{ik} симетричний:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$$

Разом з індукцією пропорційна полю і поляризація:

$$\varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P},$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}}. \quad (9.2.2)$$

Позначимо

$$\boxed{\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}},$$

тоді

$$\boxed{\vec{P} = \chi \vec{E}}.$$

Величина χ називається **діелектричною сприйнятливістю** (або **поляризуємістю**) речовини. Вона показує, наскільки змінюється поляризація діелектрика при впливі на нього зовнішнього електричного поля. Діелектрична проникність завжди більша за одиницю, а поляризація, відповідно, завжди додатна.

Тепер граничні умови на поверхні розділу двох ізотропних діелектриків приймають вигляд:

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{E}_{\tau 1} = \vec{E}_{\tau 2}, \\ \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}. \end{matrix}} \quad \text{або} \quad \boxed{\begin{matrix} \frac{\vec{D}_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{\tau 2}}{\varepsilon_2}, \\ D_{n1} = D_{n2}. \end{matrix}}, \quad (9.2.3)$$

Таким чином, нормальна складова напруженості поля зазнає стрибка, змінюючись обернено пропорційне діелектричним проникностям відповідних середовищ.

Якщо діелектрик однорідний, тобто $\varepsilon = const$, то з рівняння $div \vec{D} = 0$ випливає, що $div \vec{P} = 0$. Це означає, що усереднена об'ємна густина зарядів в такому тілі відсутня. Якщо ж діелектрик не є однорідним, то маємо відмінну від нуля об'ємну густину:

$$\bar{\rho} = -div \vec{P},$$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E},$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= -div \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = -div \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \vec{D} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} div \vec{D} - \frac{1}{4\pi} \vec{D} \nabla \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \\ &= \left\{ \nabla \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \nabla \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon^2} \right\} = -\frac{1}{4\pi} \vec{D} \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon^2} = -\frac{\vec{E}}{4\pi\varepsilon} \nabla \varepsilon. \end{aligned}$$

Ще раз: в неоднорідному середовищі можемо отримати $\bar{\rho} \neq 0$ навіть за відсутності сторонніх зарядів!

Якщо ввести потенціал електричного поля відповідно до співвідношення $\vec{E} = -\nabla \varphi$, то рівняння $rot \vec{E} = 0$ задовольняється автоматично, а з рівняння $div \vec{D} = 0$ отримуємо:

$$div(\varepsilon \nabla \varphi) = 0. \quad (9.2.4)$$

Отже, рівняння $\Delta \varphi = 0$ отримаємо тільки, якщо $\varepsilon = 0$.

Граничні умови для потенціалу на межі двох однорідних діелектриків, очевидно, такі:

$$\nabla_{\tau} \varphi_1 = \nabla_{\tau} \varphi_2.$$

За умови калібровочної інваріантності ці потенціали обирають так, щоб на поверхні розділу виконувалася рівність

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2}.$$

З другої граничної умови,

$$D_{n1} = D_{n2},$$

маємо:

$$\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}}.$$

Всередині ж кожної з контактуючих однорідних частин виконується рівняння Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0.$$

10. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ

10.1 Густина струму. Електропровідність

Будемо позначати середню густину потоку зарядів \vec{j} , – її, власно, і називають *густиною електричного струму*. В постійному струмі, очевидно, просторовий розподіл зарядів не залежить від часу, тому рівняння неперервності дає:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0} . \quad (10.1.1)$$

Це рівняння виражає незмінність повного середнього заряду, який знаходиться в будь-якій частині об'єму провідника.

Електричне поле, яке існує всередині провідника, через який протікає постійний струм, також постійне, а тому задовольняє умову

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}, \quad (10.1.2)$$

тобто, електричне поле має потенціал.

До рівнянь (10.1.1) та (10.1.2) повинно бути додане рівняння, яке пов'язує між собою величини \vec{j} та \vec{E} . Цей зв'язок залежить від властивостей провідника. В багатьох випадках його можна вважати лінійним.

Якщо провідник однорідний і ізотропний, тоді лінійна залежність зводиться до простої пропорційності (**закон Ома**)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (10.1.3)$$

Тут σ – *коефіцієнт електропровідності*, або просто *провідність*, він залежить від складу та термодинамічного стану провідника. Для анізотропних провідників маємо:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

причому тензор провідності – симетричний:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}.$$

В однорідному провіднику $\sigma = const$, і підстановка (10.1.3) в (10.1.1) дає $div \vec{E} = 0$. Тому в цьому випадку потенціал електричного поля задовольняє рівняння Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0.$$

На межі розділу двох середовищ, що проводять струм, нормальна компонента густини струму повинна бути неперервною. Крім того, згідно загальній умові неперервності тангенціальної компоненти напруженості, повинно бути неперервним відношення \vec{j}/σ . Таким чином, граничні умови для напруженості поля та густини струму мають вигляд:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2}, \\ \sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}. \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{j}_{\tau 1} = \vec{j}_{\tau 2}, \\ \sigma_1 = \sigma_2, \\ E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \end{array}}$$

На поверхні ж провідника, очевидно,

$$j_n = 0 \text{ та } E_n = 0.$$

10.2 Закон Джоуля-Ленца

Електричне поле, яке підтримує струм, виконує над зарядженими частинками, що переміщуються в провіднику, механічну роботу. Ця робота за рахунок дисипації в речовині провідника переходить в тепло. Записавши зміну кінетичної енергії зарядів в наближенні неперервного середовища

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = \sum e \vec{E} \vec{v} = \left\{ \sum e \rightarrow \int \rho dV \right\} = \int \vec{v} \vec{E} \rho dV = \int \vec{j} \vec{E} dV,$$

бачимо, що підінтегральний вираз являє собою *кількість енергії, що виділяється в в одиниці об'єму провідника за одиницю часу у вигляді тепла, тобто, потужність*:

$$\boxed{W = \vec{j} \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}}.$$

Це співвідношення називається *законом Джоуля-Ленца*

В той же час, зрозуміло, W – це *робота, яка виконується полем по переміщенню зарядів за одиницю часу в одиниці об'єму провідника*.

Кількість виділеного тепла пов'язана зі зміною ентропії:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

При виділенні тепла $dQ = WdVdt = \vec{j}\vec{E}dVdt$, ентропія даного елемента об'єму змінюється за час dt на величину

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\vec{j}\vec{E}}{T} dV = \int \frac{\sigma E^2}{T} dV.$$

В силу закону зростання ентропії, ця похідна повинна бути додатною. Тоді з цієї умови отримуємо, що провідність також є додатною величиною:

$$\boxed{\sigma > 0}.$$

11. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

11.1 Постійне магнітне поле. Намагніченість. Вектор магнітної індукції.

Постійне магнітне поле в матеріальних середовищах описуються двома рівняннями Максвелла, які отримуються шляхом усереднення відповідних мікроскопічних рівнянь:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{h} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v}. \end{aligned} \quad (11.1.1)$$

Усереднене значення напруженості магнітного поля прийнято називати *магнітною індукцією* і позначати

$$\boxed{\vec{h} = \vec{B}}. \quad (11.1.2)$$

Тому в результаті усереднення першого з рівнянь (11.1.1) маємо:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}. \quad (11.1.3)$$

В другому рівнянні часова похідна при усередненні зникає, оскільки середнє поле вважається постійним, так що

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v}}. \quad (11.1.4)$$

Середнє значення мікроскопічної густини струму відмінне від нуля як в провідниках, так і в діелектриках. Різниця між цими двома категоріями речовин полягає в тому, що в діелектриках завжди

$$\int \rho \vec{v} d\vec{f} = 0, \quad (11.1.5)$$

де інтеграл береться по повній площі будь-якого поперечного перерізу тіла (рис.11.1.1); в провідниках же цей інтеграл може бути відмінним від нуля. Припустимо спочатку, що в тілі відсутній повний струм, тобто справедливе співвідношення (11.1.5).

Рівність нулю інтеграла (11.1.5) по будь-якому перерізі тіла означає, що вектор $\rho \vec{v}$ може бути записаний у вигляді ротора деякого іншого вектора, який прийнято позначати як $c \vec{M}$ (c – швидкість світла в вакуумі),

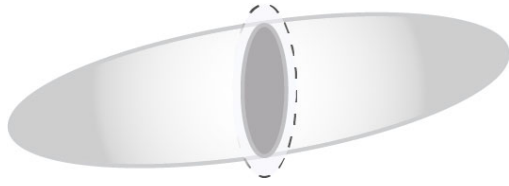


Рисунок 11.1.1.

$$\boxed{\overline{\rho\vec{v}} = c \operatorname{rot} \overline{M}}, \quad (11.1.6)$$

причому величина \overline{M} відмінна від нуля лише всередині тіла. Дійсно, інтегруючи по поверхні, яка обмежена контуром, що охоплює поперечний переріз і проходить всюди поза тілом (рис. 11.1.1), отримаємо:

$$\int \overline{\rho\vec{v}} d\vec{f} = c \int \operatorname{rot} \overline{M} d\vec{f} = c \oint \overline{M} d\vec{l} = 0.$$

Вектор \overline{M} називається **намагніченістю** тіла. Підставивши його в (11.1.4) отримаємо

$$\boxed{\operatorname{rot} \overline{H} = 0}, \quad (11.1.7)$$

де вектор \overline{H} пов'язаний з вектором магнітної індукції \overline{B} співвідношенням

$$\boxed{\overline{B} = \overline{H} + 4\pi \overline{M}}, \quad (11.1.8)$$

аналогічним відношенню між електричною індукцією \overline{D} та напруженістю електричного поля \overline{E} .

Визначимо фізичний зміст вектора \overline{M} , для чого розглянемо повний усереднений магнітний момент тіла, який створюється всіма зарядженими частинками, що рухаються всередині тіла:

$$\overline{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\vec{r} \times \vec{v}] = \left\{ \sum e \rightarrow \int \rho dV \right\} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \times \overline{\rho\vec{v}}] dV = \frac{1}{2} \int [\vec{r} \times \operatorname{rot} \overline{M}] dV.$$

Розрахуємо допоміжний інтеграл, домножуючи підінтегральний вираз на якийсь сталий вектор \vec{c} :

$$\begin{aligned} \vec{c} \int [\vec{r} \times \operatorname{rot} \overline{M}] dV &= \int [\vec{c} \times \vec{r}] \operatorname{rot} \overline{M} dV = \left\{ \begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{a} \times \vec{b}] &= \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}, \\ \vec{a} &\equiv \overline{M}, \vec{b} \equiv [\vec{c} \times \vec{r}] \end{aligned} \right\} = \\ &= \int \operatorname{div} [\overline{M} \times [\vec{c} \times \vec{r}]] dV + \int \overline{M} \operatorname{rot} [\vec{c} \times \vec{r}] dV = \cancel{\oint [\overline{M} \times [\vec{c} \times \vec{r}]] d\vec{f}} + \\ &+ \int \overline{M} \left[\nabla \times \left[\vec{c} \times \vec{r} \right] \right] dV = \int \overline{M} \left\{ \underbrace{\vec{c} (\nabla \cdot \vec{r})}_{\operatorname{div} \vec{r} = 3} - \underbrace{(\vec{c} \cdot \nabla) \vec{r}}_{\vec{c}} \right\} dV = 2\vec{c} \int \overline{M} dV. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int [\vec{r} \times \text{rot} \vec{M}] dV = 2 \int \vec{M} dV,$$

і маємо

$$\boxed{\vec{m} = \int \vec{M} dV}. \quad (11.1.9)$$

Таким чином, *намагніченість являє собою магнітний момент одиниці об'єму тіла.*

11.2 Магнітна проникність. Магнітна сприйнятливість

Індукція і напруженість магнітного поля пов'язані між собою співвідношенням, аналогічним тому, що існує між індукцією і напруженістю електричного поля:

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}. \quad (11.2.1)$$

Враховуючи, що

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M},$$

маємо:

$$\mu \vec{H} = \vec{H} + 4\pi \vec{M},$$

$$\vec{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \vec{H}.$$

Коефіцієнт μ називається *магнітною проникністю*, а коефіцієнт пропорційності

$$\boxed{\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}} \quad (11.2.2)$$

називається *магнітною сприйнятливістю* речовини. Таким чином,

$$\boxed{\vec{M} = \chi \vec{H}}.$$

На відміну від діелектричної проникності ϵ , яка в усіх діелектриках більша за одиницю, магнітна проникність може бути як більшою, так і меншою за одиницю. Можна тільки стверджувати, що завжди $\mu > 0$. Відповідно, магнітна сприйнятливість χ може бути як додатною так і

від'ємною. В залежності від знаку та величини магнітної сприйнятливості всі тіла поділяються на *діамагнетики* (для них $\chi < 0$), *парамагнетики* ($\chi > 0$), а також *феромагнетики* (на відміну від парамагнетиків, у них $\chi \gg 1$). Відзначимо, що абсолютні значення магнітної сприйнятливості для діамагнетиків та парамагнетиків дуже мало відрізняються від нуля, тому ці матеріали часто називають *немагнітними* на відміну від феромагнетиків.

Зауважимо, що в анізотропних тілах звичайна пропорційність (11.2.1) змінюється лінійним тензорним співвідношенням:

$$B_i = \mu_{ik} H_k. \quad (11.2.3)$$

Відзначимо, що тензор магнітної проникності μ_{ik} є симетричним.

З рівнянь $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{rot} \vec{H} = 0$ випливає, що на межі розділу двох різних однорідних середовищ повинні виконуватися умови (див. аналогічне виведення граничних умов для провідників):

$$\boxed{B_{n1} = B_{n2}}, \quad \boxed{\vec{H}_{\tau 1} = \vec{H}_{\tau 2}}. \quad (11.2.4)$$

По аналогії з електричним потенціалом можна ввести магнітний потенціал ψ , так що

$$\boxed{\vec{H} = -\nabla \psi}.$$

Тоді отримаємо рівняння для ψ , абсолютно аналогічні за формою рівнянням для потенціалу електричного поля φ .

11.3 Магнітні поля постійних струмів

Якщо в провіднику протікає відмінний від нуля повний струм, то середня густина струму в ньому може бути представлена у вигляді суми

$$\vec{\rho v} = c \cdot \text{rot} \vec{M} + \vec{j}.$$

Перший доданок в правій частині, пов'язаний з намагніченістю середовища, не дає внеску в повний струм, так що повне перенесення заряду через поперечний переріз тіла визначається інтегралом $\int \vec{j} d\vec{f}$ тільки від другого доданку. Величину \vec{j} називають *густиною струму провідності*.

Задача про визначення магнітного поля, створюване струмами \vec{j} , повинна розв'язуватися за заданим розподілом останніх. Рівняння цього поля відрізняються від розглянутих вище наявністю $\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ замість нуля в правій частині усередненого відповідного рівняння Максвелла:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (11.3.1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (11.3.2)$$

Густина струму провідності \vec{j} , що пропорційна напруженості електричного поля, є величиною обмеженою, яка не перетворюється на нескінченність, зокрема, і на межі розділу двох середовищ. Тому наявність правої частини в рівнянні (11.3.2) не впливає на граничну умову неперервності тангенціальних компонент \vec{H} .

Для розв'язання рівнянь (11.3.1) – (11.3.2) зручно ввести **векторний потенціал** \vec{A} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \quad (11.3.3)$$

Рівністю (11.3.3) векторний потенціал ще не визначається однозначно. До нього, очевидно, можна додати будь-який вектор вигляду ∇f , де f – довільна функція координат. Тому на вектор \vec{A} можна накласти одну додаткову умову, наприклад:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \quad (11.3.4)$$

Рівняння для \vec{A} отримаємо підстановкою (11.3.3) в (11.3.2). При лінійному зв'язку $\vec{B} = \mu\vec{H}$ маємо

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot}\vec{A}}{\mu}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (11.3.5)$$

В такому вигляді це рівняння справедливо для будь-якого неоднорідного середовища.

В однорідному середовищі $\mu = \text{const}$, тому маємо:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j},$$

$$\nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j},$$

і з урахуванням (11.3.4) отримуємо рівняння на визначення векторного потенціалу:

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}}. \quad (11.3.6)$$

Якщо середовище складається з декількох однорідних частин, то з рівняння (11.3.3) отримаємо на межах (очевидно, індукція магнітного поля на межі контакту середовищ є обмеженою величиною, тому і відповідні похідні компонент векторного потенціалу в операторі ротора не можуть бути нескінченними):

$$\boxed{\vec{A}_{\tau 1} = \vec{A}_{\tau 2}}.$$

Крім того, з рівняння (11.3.5) маємо ще одну обов'язкову граничну умову:

$$\boxed{\frac{[\operatorname{rot} \vec{A}]_{\tau 1}}{\mu_1} = \frac{[\operatorname{rot} \vec{A}]_{\tau 2}}{\mu_2}}.$$

11.4 Закон Біо-Савара для лінійних струмів

Рівняння магнітного поля струмів можуть бути розв'язані у загальному випадку, коли магнітними властивостями середовища можна знехтувати, тобто можна покласти $\mu = 1$. Для векторного потенціалу тоді у всьому просторі має місце рівняння Пуассона:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

звідки, як пам'ятаємо (див. аналогічні міркування щодо визначення поля в вакуумі),

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV, \quad (11.4.1)$$

де R – відстань від елемента об'єму dV до точки спостереження, в якій ми шукаємо \vec{A} . Знаючи тепер векторний потенціал, знаходимо індукцію:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

$$\vec{B} = \vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j} \times \vec{R}]}{R^3} dV. \quad (11.4.2)$$

Якщо провідник, через який протікає струм, достатньо тонкий і нас цікавить лише поле, яке ним створюється, то товщиною провідника можна знехтувати. Інтегрування по об'єму провідника можна замінити в цьому випадку інтегруванням по довжині провідника:

$$\vec{j}dV \rightarrow Id\vec{l},$$

де I – повний струм, який протікає в провіднику. Отже, з формул (11.4.1)-(11.4.2) отримуємо:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{l}}{R}}, \quad \boxed{\vec{H} = \frac{I}{c} \int \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3}}. \quad (11.4.3)$$

Друга з цих формул виражає собою **закон Біо-Савара для лінійних струмів**.

Отримані формули для магнітного поля лінійних струмів, взагалі кажучи, не пов'язані з вимогою $\mu=1$. Оскільки товщиною провідника ми нехтуємо, то ніяких граничних умов на його поверхні записувати не потрібно, і магнітні властивості його речовини взагалі несуттєві. Тоді потенціал та індукція магнітного поля в середовищі, яке оточує провідник, запишеться у вигляді

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu I}{c} \int \frac{d\vec{l}}{R}}, \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu I}{c} \int \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3}}. \quad (11.4.4)$$

12. КВАЗІСТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

12.1 Рівняння квазістаціонарного електромагнітного поля

Характер змінних електромагнітних полів в матеріальних середовищах суттєво залежить від типу цих середовищ і від порядку значень частоти поля. Розглянемо явища, що мають місце в масивних провідниках, які поміщені в змінне зовнішнє магнітне поле. Будемо вважати, що швидкість зміни поля не дуже велика і обмежена певними умовами. Електромагнітні поля і струми, які задовольняють ці умови, називаються *квазістаціонарними*. Ми перелічимо відповідні умови нижче. По-перше, довжина хвиль має набагато перевищувати геометричні розміри тіла:

$$\boxed{\lambda \gg l}. \quad (12.1.1)$$

Тоді розподіл магнітного поля *поза провідником* в певний момент часу можна взагалі описувати рівняннями статичного поля

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0,$$

нехтуючи всіма ефектами, які пов'язані зі скінченністю швидкості розповсюдження електромагнітних збурень. Очевидно, таке нехтування можливе лише на відстанях від тіла, малих у порівнянні з довжиною хвилі, але цього, тим не менш, цілком достатньо для визначення поля всередині тіла.

Повна система рівнянь поля *всередині провідника* складається з рівнянь:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12.1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (12.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (12.1.4)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (12.1.5)$$

Рівняння (12.1.4) було виведено, строго кажучи, для постійних струмів і магнітних полів. Тому необхідно вказати критерій, який дозволяє з достатньою точністю використовувати це рівняння для змінних полів. В рівняннях (12.1.4) – (12.1.5) суттєво, що зв'язок струму з напруженістю

електричного поля дається співвідношенням $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ з постійним значенням σ , яке відноситься до стаціонарного випадку. Це має місце, якщо період зміни поля великий у порівнянні з часом, який характерний для здійснення мікроскопічного механізму провідності, тобто, часом вільного пробігу електронів:

$$\boxed{T_n \gg \tau_{в.пр.}} \quad (12.1.6)$$

Іншими словами, частота поля повинна бути малою в порівнянні з оберненим часом вільного пробігу електронів в провіднику. Для типових металів (при кімнатній температурі) гранично допустимі цими умовами частоти лежать в інфрачервоній області спектру.

Крім того, існує і інша умова, яка обмежує в даному випадку застосування рівнянь. Рівняння (12.1.5) припускає, що зв'язок між струмом і полем є локальним, тобто що густина струму в деякій точці провідника визначається значенням поля тільки в цій точці. Це, в свою чергу, вимагає, щоб довжина вільного пробігу електронів була малою у порівнянні з відстанями, на яких поле суттєво змінюється:

$$\boxed{l_n \gg l_{в.пр.}} \quad (12.1.7)$$

Умови (12.1.1), (12.1.6), (12.1.7) і є *умовами квазістаціонарності* електромагнітного поля.

В рівняннях (12.1.1) і (12.1.5) вектор \vec{E} є напруженістю індукційного електричного поля, яке виникає завдяки зміні магнітного поля. З рівнянь (12.1.4) – (12.1.5) маємо:

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot} \vec{H}.$$

Підставляючи це співвідношення у рівняння (12.1.2), отримуємо:

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot} \frac{\text{rot} \vec{H}}{\sigma} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\boxed{\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \frac{\text{rot} \vec{H}}{\sigma}}. \quad (12.1.8)$$

Якщо середовище однорідне, тобто μ і σ – константи, то з урахуванням $\vec{B} = \mu\vec{H}$ можемо записати

$$\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot rot } \vec{H},$$

$$\nabla \text{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Оскільки

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

то при $\mu = \text{const}$ маємо

$$\text{div} \vec{H} = 0,$$

$$\boxed{\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}. \quad (12.1.9)$$

Це – *рівняння квазістаціонарного магнітного поля в однорідному середовищі*. Воно має вигляд рівняння теплопровідності з коефіцієнтом теплопровідності $K = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$.

Граничні умови для магнітного поля на поверхні провідника очевидні з вигляду з самих рівнянь:

$$\boxed{B_{n1} = B_{n2}}, \quad \boxed{\vec{H}_{\tau 1} = \vec{H}_{\tau 2}}. \quad (12.1.10)$$

Вираз в правій частині рівняння (12.1.4) не впливає на друге з цих рівнянь в силу своєї обмеженості. При $\mu = 1$ можна просто записати:

$$\boxed{\vec{H}_1 = \vec{H}_2}. \quad (12.1.11)$$

Тут відзначимо, що в діамагнетиках та парамагнетиках магнітна проникність практично не відрізняється від одиниці. В феромагнетиках же вона може досягати великих значень, але із зростанням частоти порівняно рано настає дисперсія (залежність магнітної проникності від частоти), яка призводить до швидкого зменшення μ практично до одиниці.

В силу рівняння (12.1.4) маємо $\text{div} \vec{j} = 0$, звідки на межі провідника $j_n = 0$, $E_n = 0$, оскільки в вакуумі струму немає.

Граничної умови (12.1.11) недостатньо для повного формулювання задачі, якщо провідник представляє собою тіло, яке складається із частин з різними провідностями. В такому випадку з рівняння (12.1.8) маємо додатково умову:

$$\boxed{\frac{[\text{rot} \vec{H}]_{\tau 1}}{\sigma_1} = \frac{[\text{rot} \vec{H}]_{\tau 2}}{\sigma_2}}.$$

12.2 Згасання магнітного поля при вимиканні джерела

Припустимо, що провідник знаходиться в магнітному полі, джерело якого в певний момент часу вимикається. Поле в провіднику та навколо нього не зникає миттєво, а згасає відповідно до рівняння (12.1.9):

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Розв'язки цього рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_m(\vec{r}) e^{-\gamma_m t}.$$

Підставимо це співвідношення в рівняння квазістаціонарного магнітного поля:

$$\Delta \vec{H}_m = -\gamma_m \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \vec{H}_m.$$

Цьому рівнянню відповідає набір власних значень γ_m , за яких рівняння матиме ненульові розв'язки при заданих граничних умовах, та власних функцій \vec{H}_m , які складають повний набір ортогональних функцій і по яких можна розкласти будь-який розв'язок. Зокрема, якщо в початковий момент розподіл поля в просторі визначається функцією $\vec{H}_0(\vec{r})$, то можна записати

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \sum c_m \vec{H}_m(\vec{r}).$$

Тут c_m – константи розкладання, які визначаються граничними умовам. Отже, розв’язок рівняння виглядатиме так:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum c_m e^{-\gamma_m t} \vec{H}_m(\vec{r}).$$

Час згасання τ визначається в основному тим членом цієї суми, який відповідає найменшому із значень γ_m :

$$\tau = \frac{1}{\min\{\gamma_m\}}.$$

Оцінку ж τ можна отримати з таких міркувань:

$$\Delta H \sim \frac{H}{l^2},$$

де l – лінійні розміри провідника,

$$\frac{\partial H}{\partial t} \sim \frac{H}{\tau},$$

тому

$$\frac{H}{l^2} \sim \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{H}{\tau},$$

$$\tau \sim \frac{4\pi\mu\sigma l^2}{c^2}.$$

Як бачимо, час згасання залежить від характеристик середовища та його розмірів.

12.3 Глибина проникнення електромагнітного поля в провідник

Змінне магнітне поле проникає в провідник та призводить до появи електричного поля i , як наслідок, виникнення струмів Фуко. Розрахуємо глибину проникнення струмів в провідник. Як пам’ятаємо, квазістаціонарне магнітне поле описується рівнянням типу рівняння теплопровідності:

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

з коефіцієнтом теплопровідності

$$K = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

Як відомо з теорії рівнянь теплопровідності, будь-яка величина, яка характеризується таким рівнянням, проникає за час t всередину середовища на величину порядку $\delta \sim \sqrt{Kt}$, тож, якщо поле має частоту ω , то за період зміни поля воно проникає на глибину порядку

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \frac{2\pi}{\omega}} \sim \frac{c}{\sqrt{\mu\sigma\omega}} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Отже, за оцінкою, глибина проникнення поля в провідник обернено пропорційна частоті поля. Звичайно, подібний порядок має і електричне поле, індуковане змінним зовнішнім магнітним полем.

В змінному полі, часова залежність якого дається виразом

$$\vec{H} \sim e^{-i\omega t},$$

маємо

$$\Delta \vec{H} = -i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} \vec{H}.$$

Розглянемо два граничних випадки:

1. Частота мала, отже глибина проникнення δ – велика ($\delta \gg l$). Тоді в першому наближенні можемо знехтувати правою частиною в рівнянні квазістаціонарного поля, і фактично маємо стаціонарне поле (позначимо його \vec{H}_{cm}), яке задається зовнішніми умовами вдалині від тіла і відповідає рівнянню: $\Delta \vec{H}_{cm} = 0$. Електричне поле визначимо з рівняння

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

звідки

$$\text{rot} \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}_{cm}.$$

Це рівняння разом з рівнянням

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 0},$$

яке випливає з (12.1.4)–(12.1.5) при постійній провідності σ , повністю визначає розподіл електричного поля.

2. Частота велика, тобто $\delta \ll l$ (але все одно залишається умова $\delta \gg l_{e.np.}$). Для визначення поля поза провідником можемо взагалі вважати, що поле зовсім не проникає в провідник. Тоді отримуємо задачу, аналогічну задачі про надпровідник в зовнішньому магнітному полі. Для розрахунку ж поля всередині провідника розіб'ємо всю поверхню на маленькі ділянки, кожна з яких можна вважати плоскою, і розв'яжемо модельну задачу про проникнення зовнішнього поля в необмежений провідник з плоскою поверхнею. Вісь z спрямуємо уздовж нормалі до поверхні всередину провідника. Якщо поверхня однорідна, залежність від x і y буде відсутня, тому рівняння поля буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} \vec{H} = 0,$$

або

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + k^2 \vec{H} = 0}, \quad (12.3.1)$$

де $k = \sqrt{i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}}$. Зауваживши, що

$$\sqrt{i} = \left\{ i = e^{i\frac{\pi}{2}} \right\} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

отримуємо:

$$k = \frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c} (1+i).$$

Позначимо

$$\boxed{\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}}$$

Тоді можемо записати:

$$k = \frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta},$$

і розв'язок рівняння (12.3.1) набуває вигляду:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)} = \vec{H}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}.$$

Звідси бачимо, що δ грає роль глибини проникнення (розв'язок, пропорційний e^{-ikz} , не враховуємо, оскільки він не задовольняє умову згасання при $z \rightarrow \infty$).

Знайдемо тепер напруженість електричного поля:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot} \vec{H} = \frac{c}{4\pi\sigma} [\nabla \times \vec{H}] = \left\{ \vec{k} = k\vec{n}, \vec{n} \uparrow \uparrow Oz \right\} = \frac{c}{4\pi\sigma} ik [\vec{n} \times \vec{H}] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{1+i}{\delta} \\ \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \end{array} \right\} = \frac{c}{4\pi\sigma} i(1+i) \frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c} [\vec{n} \times \vec{H}] = (i-1) \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} [\vec{n} \times \vec{H}]. \end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{E} = (1-i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} [\vec{H} \times \vec{n}].$$

Таким чином, визначено розподіл як магнітного, так і електричного полів.

ЛІТЕРАТУРА

1. L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Classical Theory of Fields. – Pergamon Press, 1971.
2. L.D. Landau and E.M. Lifshitz "Electrodynamics of Continuous Media". – Pergamon Press, 1960.
3. Федорченко А. М. Класична механіка і електродинаміка // Теоретична фізика. — К. : Вища школа, 1992. — Т. 1. — 535 с.