ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.518.3:681.2.088

А.С. Шантир, С.В. Шантир

ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЛАСТІ ЗАСТОСУВАННЯ РЯДУ ЕДЖВОРТА ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ РОЗШИРЕНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТУ НЕПРЯМОГО ВИМІРЮВАННЯ

Вступ

Методика знаходження розширеної невизначеності при непрямих вимірюваннях для випадку, коли вимірювана величина (Y) зв'язана з вихідними незалежними величинами (X) довільним відомим співвідношенням $Y = Q(X_1, X_2, ..., X_n)$ та розподілена нормально, установлена документом ISO GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements) [1]. Однак на практиці існують розподіли вимірюваної величини Y, відмінні від нормального, що в [1] не передбачено. Оскільки такі випадки можуть призвести до неоднозначних та довільних трактувань і мати непередбачувані наслідки, то розробка нових методик знаходження розширеної невизначеності є важливим напрямком досліджень [2–4].

Постановка задачі

Метою даної статті є розробка на базі ряду Еджворта методики знаходження розширеної невизначеності результату непрямого вимірювання для випадку, коли:

- формула непрямого вимірювання має вигляд $y = x_1 + x_2 + ... + x_N$;
- розподілення величин X_n, що вимірюються безпосередньо, відрізняються від нормальних;
- число N випадкових величин X_n незначне і статистика Y не нормалізується;
- дослідження розробленої методики проводяться для визначення області її застосування.

Методика знаходження розширеної невизначеності відповідно до ISO GUM

Методику знаходження розширеної невизначеності при непрямих вимірюваннях, установлену документом [1], можна зобразити схемою, наведеною на рис. 1.

Оператори, вказані на рис. 1, виконують такі функції: підготовку вихідних даних; $Q_{x_n}^{(1)}$ – взяття N частинних похідних формули непрямого вимірювання; $Q(\cdot)$ – обчислення значен-

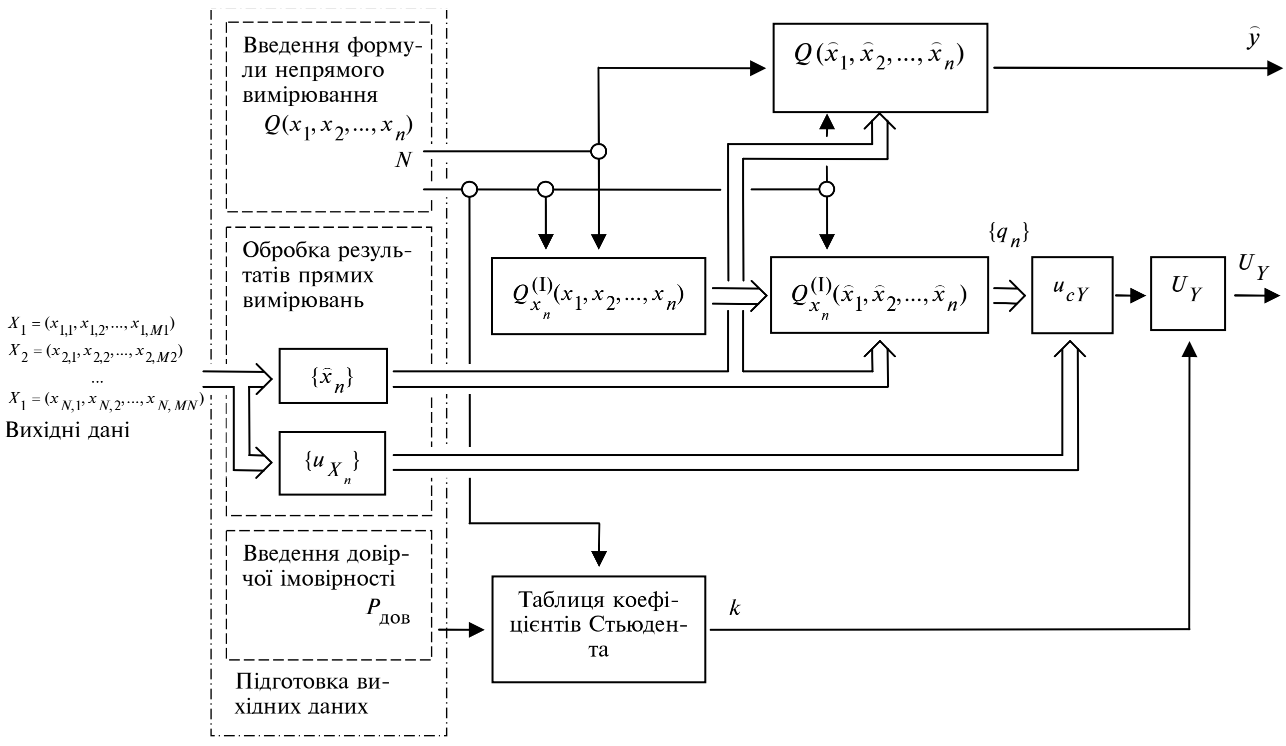

Рис. 1. Методика знаходження розширеної невизначеності відповідно до [1]

ня оцінки величини непрямого вимірювання; $Q^{(\mathrm{I})}_{x_n}(\cdot)$ — обчислення значень частинних похідних; u_{cY} — обчислення комбінованої стандартної невизначеності; знаходження коефіцієнта покриття k за таблицею Стьюдента; U_Y — обчислення розширеної невизначеності результату непрямого вимірювання.

Підготовка вихідних даних передбачає ряд дій.

1. Визначення формули непрямого вимірювання для N (число) величин X_n, що вимірюються безпосередньо, у вигляді $y = Q(x_1, x_2, ..., x_N)$ і введення цієї формули в алгоритм обробки.

2. Статистична обробка результатів спостережень кожної величини $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nM_n})$, що вимірюється безпосередньо, та подання результатів обробки в такому вигляді: $\hat{x}_n$ — оцінка величини X_n (масив чисел розмірністю N); u_{X_n} — стандартна невизначеність результатів вимірювання величини X_n (масив чисел розмірністю N).

3. Висування вимог до результату непрямого вимірювання: $P_{\text{дов}}$ — рівень довіри до оцінки величини, вимірюваної непрямим способом (число, не більше 1).

Взяття частинних похідних формули непрямого вимірювання виконується за таблицею похідних

$$Q^{(\mathrm{I})}_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{\partial}{\partial x_n} Q(x_1, x_2, ..., x_N) .$$

Значення оцінки величини, вимірюваної непрямим способом, обчислюється за формулою

$$\hat{y} = Q_{X_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_N) .$$

Обчислення значень частинних похідних виконується за формулою

$$q_n = Q^{(\mathrm{I})}_{X_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_N) .$$

Комбінована стандартна невизначеність обчислюється так:

$$u_{\mathrm{c}Y} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} [u_{X_n} q_n]^2} .$$

Коефіцієнт покриття k знаходиться за даною методикою, при цьому приймається, що він дорівнює коефіцієнту Стьюдента (оскільки припускається, що вимірювана величина Y розподілена нормально).

Розширена невизначеність визначається за формулою

$$U_Y = k u_{\mathrm{c}Y} .$$

Результат вимірювання подається у вигляді

$$Y = \hat{y} \pm U_Y .$$

Загальні відомості

З теорії імовірності відомо, що числові характеристики функцій випадкових величин можуть бути визначені одним із двох способів [5]:

- перерахунком числових характеристик вихідних випадкових величин X_n;
- знаходженням розподілу та розрахунком числових характеристик випадкової величини Y.

Оскільки в розглянутому випадку число вихідних випадкових величин незначне, то перший спосіб може бути застосований тільки для нормально розподілених складових. Тому доцільно застосувати другий спосіб. Щільність імовірностей випадкової величини Y може бути знайдена різними методами (безпосереднім обчисленням, методом Монте-Карло, композицією вихідних розподілів, наближеними методами). Найбільш точною є композиція щільностей імовірності вихідних випадкових величин [6], а найбільш економним за обсягом обчислень (приблизно на порядок порівняно з композицією для двох вихідних випадкових величин) є наближення рядом Еджворта [7, 8]

$$f_E(z) = \varphi(z) + \sum_{l=1}^{\infty} E_l(z) ,$$

де z — нормована змінна, зв'язана з вимірюваною величиною Y співвідношенням $z = (y - m_Y)/\sigma_Y$; $\varphi(z)$ — щільність нормального розподілу (стандартизованого); $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$; $E_l(z)$ — член ряду Еджворта з номером l. Члени нумеруються в порядку зменшення та обчислюються за формулами

$$E_1(z, \gamma_1) = -\frac{\gamma_1}{3!} \varphi^{(\mathrm{III})}(z) ,$$

$$E_2(z,\gamma_1,\gamma_2) = \frac{\gamma_2}{4!}\varphi^{(\mathrm{IV})}(z) + \frac{10\gamma_1^2}{6!}\varphi^{(\mathrm{VI})}(z) \ \ldots$$

Коефіцієнти, що входять до формули членів ряду Еджворта, обчислюються так:

коефіцієнт асиметрії

$$\gamma_1 = \sum_{n=1}^{N}\mu_{3n}\left(\sum_{n=1}^{N}\mu_{2n}\right)^{-3/2}, \qquad (1)$$

коефіцієнт ексцесу

$$\gamma_2 = \left(\sum_{n=1}^{N}\mu_{4n} + 6\sum_{j<n}\mu_{2n}\mu_{2j}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\mu_{2n}\right)^{-2} - 3, \qquad (2)$$

де μ_{2n}, μ_{3n}, μ_{4n} – центральні моменти другого, третього та четвертого порядків відповідної випадкової величини X_n; умова $j < n$ під знаком суми означає, що додавання поширюється на всі можливі попарні комбінації випадкових величин $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$.

З формул (1) і (2) випливає, що максимальний порядок моментів вихідних випадкових величин X_n, що використовуються в кожному члені ряду Еджворта, визначається співвідношенням: максимальний порядок моменту дорівнює $l+2$.

Обмеження числа членів ряду Еджворта визначається порядком залишкового члена, який залежить від числа N вихідних випадкових величин $\{X_n\}$ та числа врахованих членів ряду Еджворта L:

$$f_E(z\,|\,L) = \varphi(z) + \sum_{l=1}^{L} E_l(z) + \Delta(z),$$

$$|\Delta(z)| \le N^{-L/2}.$$

Залежність порядку наближення від N і L показана в табл. 1.

***Таблиця* 1**. Порядок наближення

N	L		
	1	2	...
2	0,707	0,500	< 0,500
3	0,577	0,333	< 0,333
4	0,500	0,250	< 0,250
...	< 0,500	< 0,250	...

Розробка методики знаходження розширеної невизначеності

Для поставленої задачі, відповідно до вимог [1] і основних положень теорії імовірностей, наведених вище, нами розроблено методику знаходження розширеної невизначеності (рис. 2).

Оператори на рис. 2 виконують такі функції: підготовку вихідних даних; первинну обробку вихідних даних; α_1 – визначення пер-

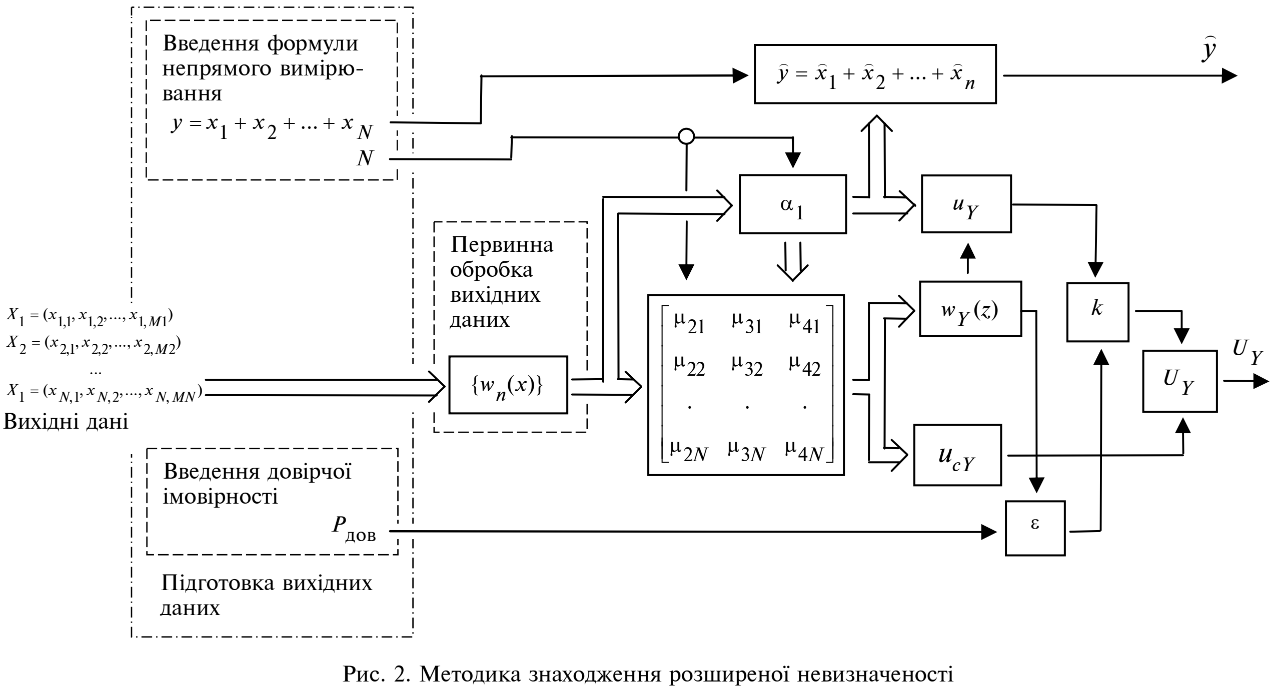

Рис. 2. Методика знаходження розширеної невизначеності

ших початкових моментів величин X_n і Y; $\hat{y}$ — обчислення значення оцінки величини, вимірюваної непрямим способом; μ — знаходження центральних моментів величин X_n; $w_Y(z)$ — обчислення щільності імовірності вимірюваної величини; u_{cY} — обчислення комбінованої стандартної невизначеності; u_Y — знаходження стандартної невизначеності величини Y, що вимірюється непрямим способом; ε — визначення величини ε; k — визначення коефіцієнта покриття; U_Y — обчислення розширеної невизначеності результату непрямого вимірювання.

Підготовка вихідних даних виконує ряд дій.

1. Визначення формули непрямого вимірювання для N величин X_n, що вимірюються безпосереднім способом, у вигляді виразу $y = x_1 + x_2 + ... + x_N$ і введення цієї формули в алгоритм обробки.

2. Висування вимог до результату непрямого вимірювання: $P_{дов}$ — рівень довіри до оцінки величини, вимірюваної непрямим способом (число, не більше 1).

Первинна обробка вихідних даних здійснює знаходження експериментальних щільностей імовірності для кожної величини X_n, що вимірюється безпосереднім способом, і апроксимацію їх одним із відомих розподілів, наприклад нормальним, χ^2-розподілом, Стьюдента, Фішера, β-розподілом, прямокутним, Коші, Лапласа, урізаним нормальним або Парето.

Перші початкові моменти величин X_n обчислюються за формулою

$$\alpha_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_n(x) dx .$$

Значення оцінки величини, вимірюваної непрямим способом, знаходиться за формулою

$$y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + ... + \hat{x}_N .$$

Як оцінки $\hat{x}_n$ застосовуються перші початкові моменти величин X_n.

Центральні моменти другого, третього і четвертого порядків величин X_n обчислюються за формулами

$$\mu_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_{1n})^2 w_n(x) dx ,$$

$$\mu_{3n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_{1n})^3 w_n(x) dx ,$$

$$\mu_{4n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_{1n})^4 w_n(x) dx .$$

Щільності імовірності вимірюваної величини визначаються з використанням ряду Еджворта у вигляді

$$w_Y(z) \approx f_E(z) .$$

Комбінована стандартна невизначеність обчислюється за центральними моментами другого порядку величин X_n:

$$u_{cY} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \mu_{2n}} .$$

Стандартна невизначеність величини Y, що вимірюється непрямим способом, знаходиться за формулою

$$u_Y = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (z - \alpha_{1Y})^2 w_Y(z) dz} .$$

Величина ε визначається для заданої довірчої імовірності $P_{дов}$ з рівняння

$$\int_{\alpha_{1Y}}^{\varepsilon} w_Y(z) dz = \frac{P_{дов}}{2} , \qquad (3)$$

а коефіцієнт покриття — за формулою

$$k = \frac{\varepsilon - \alpha_{1Y}}{u_Y} .$$

Розширена невизначеність результату непрямого вимірювання знаходиться так:

$$U_Y = k u_{cY} .$$

Результат вимірювання подається у вигляді

$$Y = \hat{y} \pm U_Y .$$

Дослідження методики знаходження розширеної невизначеності

Дослідження розробленої методики виконано для ряду Еджворта з членів, що містять моменти до четвертого порядку

$$f_E(z, \gamma_1, \gamma_2) \approx \varphi(z) + E_I(z, \gamma_1) + E_{II}(z, \gamma_1, \gamma_2) . \qquad (4)$$

Дослідження методики включає:

- знаходження межі області застосування методики;
- знаходження похибок коефіцієнта покриття в області застосування для деяких законів розподілу вимірюваної величини Y.

Зведемо вихідні співвідношення до вигляду, зручного для обчислень. Похідні щільності нормального розподілу (стандартизованого) порядку r запишемо в розгорнутому вигляді

$$\varphi^{(r)}(z) = (-1)^r e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^r e^{-\frac{z^2}{2}}}{dz^r} \varphi(z) . \quad (5)$$

Виконавши диференціювання у формулі (5), отримаємо необхідні для формули (4) вирази

$$\varphi^{(\mathrm{III})}(z) = -(z^3 - 3z)\,\varphi(z) = h_3(z)\,\varphi(z) ,$$

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(z) = (z^4 - 6z^2 + 3)\,\varphi(z) = h_4(z)\,\varphi(z) ,$$

$$\varphi^{(\mathrm{VI})}(z) = (z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15)\,\varphi(z) = h_6(z)\,\varphi(z) .$$

Тоді розрахункове співвідношення (4) набуває вигляду

$$f_E(z,\gamma_1,\gamma_2) \approx H(z,\gamma_1,\gamma_2)\,\varphi(z) ,$$

де $H(z,\gamma_1,\gamma_2) = 1 - \frac{\gamma_1}{3!} h_3(z) + \frac{\gamma_2}{4!} h_4(z) + \frac{10\gamma_1^2}{6!} h_6(z)$.

Знайдемо межу області застосування методики. Виконаємо дослідження функції $H(z, \gamma_1,\gamma_2)$. На рис. 3 і 4 показано тривимірні зображення функцій $H(z,0,\gamma_2)$ і $H(z,\gamma_1,0)$ при $z \in [-5;5]$.

З рис. 3 і 4 видно, що при деяких значеннях (z,γ_1,γ_2) функція $H(z,\gamma_1,\gamma_2) < 0$, що суперечить поняттю щільності імовірності і викликає неоднозначність у розрахунках коефіцієнта покриття. Для більш повної оцінки вказаного недоліку функції $H(z,\gamma_1,\gamma_2)$ визначимо області від'ємних значень у більш широких межах зміни γ_1 і γ_2. На рис. 5 зображено області від'ємних значень $H(z,\gamma_1,\gamma_2)$ при різних комбінаціях значень коефіцієнтів γ_1 і γ_2.

Обмежимо область застосування розробленої методики двома умовами: однозначності і точності. Оскільки умова однозначності інваріантна вихідним даним, а умова точності залежить від кількості величин та виду їх розподілів, то розрахунок області застосування виконаємо в такій послідовності: розрахунок області однозначності; розрахунок похибок обчислення коефіцієнтів покриття для деяких законів розподілу.

Розрахунок області застосування може бути замінений розрахунком її межі. Припустимо, що умова однозначності виконується, якщо $f_E(z,\gamma_1,\gamma_2) \ge -\omega$ для $z \in [-5;5]$.

Залежно від значень γ_1 і γ_2 рівняння (4) може мати від 0 до 6 коренів, а рівняння (3) – від 0 до 3 коренів. Отже, задачу знаходження коефіцієнта покриття можна розв'язати однозначно тільки при значеннях γ_1 і γ_2 з деякої множини.

Як показано вище, при деяких значеннях z вираз (4) може давати від'ємні значення, тому слід визначити множину значень γ_1 і γ_2, при яких $f_E(z) \ge -\omega$:

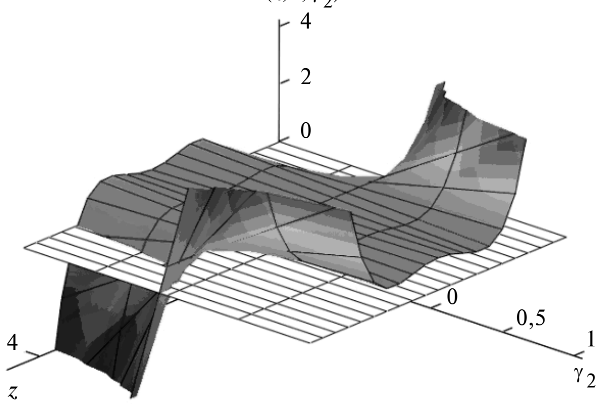

Рис. 3. Зображення функції $H(z,\gamma_1,\gamma_2)$ при фіксованому $\gamma_1 = 0$ і $z \in [-5;5]$

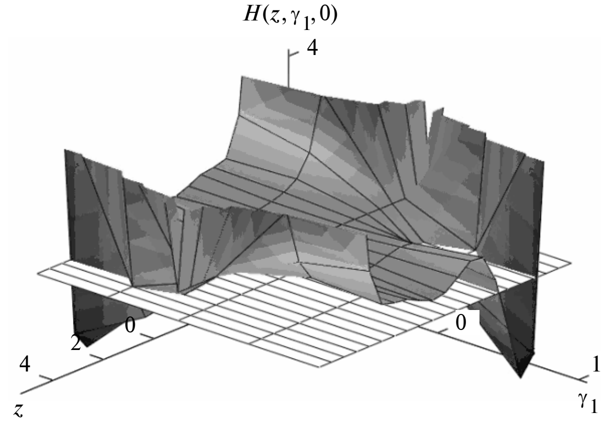

Рис. 4. Зображення функції $H(z,\gamma_1,\gamma_2)$ при фіксованому $\gamma_2 = 0$ і $z \in [-5;5]$

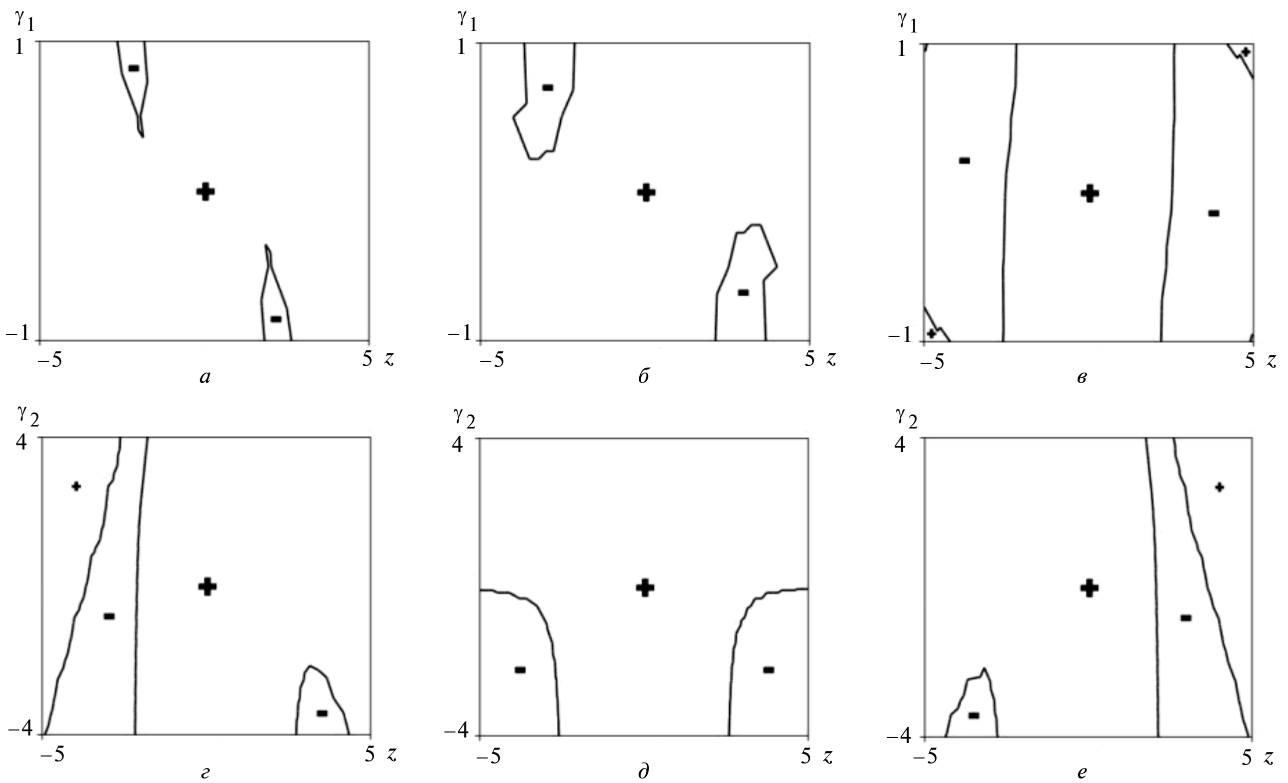

Рис. 5. Області від'ємних і додатних значень функції $H(z,\gamma_1,\gamma_2)$ при $z \in [-5;5]$ та фіксованих значеннях: *а* – $\gamma_2 = 4$; *б* – $\gamma_2 = 0$; *в* – $\gamma_2 = -4$; *г* – $\gamma_1 = 1$; *д* – $\gamma_1 = 0$; *е* – $\gamma_1 = -1$

$$\varphi(z)\left(1-\frac{\gamma_1}{3!}h_3(z)+\frac{\gamma_2}{4!}h_4(z)+\frac{10\gamma_1^2}{6!}h_6(z)\right) \geq -\omega\,. \quad (6)$$

Параметр ω вибирається так, щоб задовольнялась умова

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z,\gamma_1,\gamma_2)dz \leq 1-P, \\ |g(z,\gamma_1,\gamma_2)| \leq \omega, \end{cases}$$

де

$$g(z,\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} f_E(z,\gamma_1,\gamma_2) & \text{при}\, f_E(z,\gamma_1,\gamma_2) < 0, \\ 0 & \text{при}\, f_E(z,\gamma_1,\gamma_2) \geq 0. \end{cases}$$

Для $P_{\text{дов}} \leq 0{,}999$ беремо $\omega = 10^{-3}$.

Покладемо $\gamma_1 = 0$. Тоді матимемо

$$\varphi(z)\left(1+\frac{\gamma_2}{4!}h_4(z)\right) \geq -\omega\,. \quad (7)$$

Вираз (7) справедливий для значень $\gamma_2 \in \in [-0{,}64;4{,}04]$. Знаючи множину можливих значень γ_2, чисельно розв'язуємо нерівність (6). Множину значень γ_1 і γ_2, для яких справедлива нерівність (6) при $z \in (-\infty;\infty)$, зображено на рис. 6 (заштрихована область).

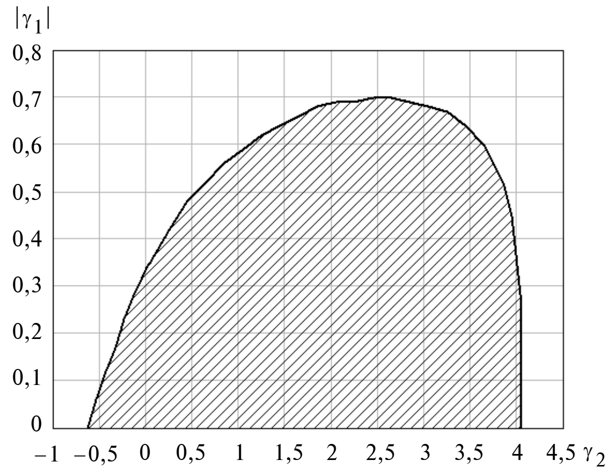

Рис. 6. Область однозначного визначення коефіцієнтів покриття для $P_{\text{дов}} \leq 0{,}999$

Знайдемо похибки коефіцієнта покриття в області однозначного визначення. Відносна похибка обчислення коефіцієнтів покриття розраховується за формулою

$$\delta = \frac{k - k_\text{в}}{k} \cdot 100\,\%,$$

де k – реальне значення коефіцієнта покриття; $k_\text{в}$ – значення коефіцієнта покриття, обчислене за розробленою методикою.

Результати обчислень і похибок обчислення коефіцієнтів покриття для деяких законів розподілу наведено в табл. 2.

Результати дослідження точності методики дають можливість зробити такі висновки. Використання методики дозволяє визначити кое-

Таблиця 2. Похибки обчислення коефіцієнтів покриття $k_\text{в}$ для $P_\text{дов} = 0{,}99$

Розподіл	Формули для обчислення	γ_1	γ_2	k_1	k_2	$k_{1\text{в}}$	$k_{2\text{в}}$	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$
Нормальний	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ для будь-яких m і σ	0	0	2,58		2,58		0	
χ^2	$\begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ при $n = 64$	0,35	0,19	2,24	2,91	2,23	2,92	0,45	–0,34
Стьюдента	$\frac{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ при $n = 6$	0	3	3,03		3,39		–11,88	
	при $n = 10$	0	1	2,84		2,97		–4,58	
Фішера	$\begin{cases} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ для будь-яких m і n	–	–	–	–	–	–	–	–
β	$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}$ при $p = q = 5,\ x \in [0;1]$	0	–0,46	2,35		2,42		–2,98	
Прямокутний	$\begin{cases} \frac{1}{2h}, & -h < x < h, \\ 0, & -h \ge x \ge h, \end{cases}$ для будь-яких h	–	–	–	–	–	–	–	–
Коші	$\frac{1}{\pi}\left(\frac{p}{(x - x_0)^2 + p^2}\right)$ при $p = 1$ та для будь-яких x_0	0	4,01	27,32		3,50		87,19	
Лапласа	$\frac{p}{2} e^{-p\lvert x - x_0 \rvert}$, при $p > 0$ та для будь-яких x_0	0	3	3,26		3,39		–3,99	
Урізаний нормальний	$\frac{1}{P\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ -\varepsilon < x < \varepsilon$, для $P(-\varepsilon < x < \varepsilon) = 0{,}98$	0	–0,34	2,42		2,45		–1,24	
Парето	$\begin{cases} \frac{p}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{p+1}, & x \ge x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$ для будь-яких x_0 і p	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблиця 3. Значення коефіцієнтів покриття для $P_{\text{дов}} = 0,99$

$\|\gamma_1\|$	k	γ_2									
		$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0	k	2,41	2,58	2,78	2,97	3,11	3,23	3,31	3,39	3,44	3,50
0,1	k_1	–	2,68	2,88	3,05	3,17	3,27	3,35	3,42	3,47	3,52
	k_2	–	2,46	2,67	2,88	3,06	3,19	3,28	3,36	3,42	3,47
0,2	k_1	–	2,77	2,96	3,11	3,23	3,32	3,39	3,45	3,50	3,55
	k_2	–	2,33	2,54	2,79	2,99	3,13	3,24	3,33	3,40	3,45
0,3	k_1	–	2,87	3,04	3,18	3,28	3,36	3,43	3,49	3,54	3,57
	k_2	–	2,20	2,37	2,66	2,92	3,09	3,21	3,30	3,37	3,44
0,4	k_1	–	–	3,11	3,24	3,34	3,42	3,48	3,53	3,57	–
	k_2	–	–	2,20	2,46	2,82	3,03	3,17	3,28	3,35	–
0,5	k_1	–	–	–	3,31	3,39	3,46	3,52	3,56	3,61	–
	k_2	–	–	–	2,18	2,65	2,97	3,14	3,26	3,34	–
0,6	k_1	–	–	–	–	3,45	3,51	3,56	3,61	3,64	–
	k_2	–	–	–	–	2,16	2,89	3,11	3,23	3,33	–
0,7	k_1	–	–	–	–	–	–	3,62	–	–	–
	k_2	–	–	–	–	–	–	3,07	–	–	–

фіцієнти покриття з похибкою $\delta < 5\,\%$ для випадків, коли вимірювана величина Y розподілена за нормальним законом або за законом Лапласа. Також методика дає похибку $\delta < 5\,\%$ для урізаного нормального розподілу, β-розподілу та χ^2-розподілу при умові, що їх коефіцієнти асиметрії γ_1 та ексцесу γ_2 лежать в області однозначного визначення коефіцієнтів покриття (див. рис. 6). Для розподілу Стьюдента результат застосування методики залежить від значення параметра n: $\delta \le 5\,\%$ при $n \ge 10$, $\delta \le 15\,\%$ при $6 \le n < 10$. Застосування методики для розподілу Коші завжди дає похибку $\delta > 15\,\%$. Коефіцієнти асиметрії γ_1 та ексцесу γ_2 розподілів Фішера, прямокутного та Парето завжди лежать за межами області однозначного визначення коефіцієнтів покриття (див. рис. 6) і тому в цьому випадку методика не може бути застосована. Наведені висновки також справедливі для вимірюваних величин Y, які мають розподіли, наближені за формою до перерахованих вище.

При наближеній оцінці розширеної невизначеності для вибору коефіцієнтів покриття зручно використати табл. 3, округлюючи коефіцієнти γ_1 і γ_2 до найближчого табличного значення.

Висновки

Апроксимація композиції різних комбінацій наведених законів розподілу рядом Еджворта дає можливість отримати аналітичний вираз щільності імовірності величини, що визначена непрямим способом, за умови, що її коефіцієнти асиметрії та ексцесу належать області, наведеній на рис. 6.

Розрахунок відносної похибки обчислення коефіцієнтів покриття в області застосування методики показав її ефективність для законів розподілу: нормального, χ^2, Стьюдента, β, Лапласа, урізаного нормального (див. табл. 2).

Значення коефіцієнтів покриття інваріантні до виду розподілів величин, що вимірюються безпосередньо. Наведена таблиця значень коефіцієнтів покриття (табл. 3), залежно від значень коефіцієнтів асиметрії γ_1 та ексцесу γ_2 вимірюваної величини Y для $P_{\text{дов}} = 0,99$, інваріантних до розподілів величин, що вимірюються безпосередньо, може бути використана при наближеній оцінці розширеної невизначеності.

Запропонована методика знаходження розширеної невизначеності досліджена для випадку, коли результат непрямого вимірювання зв’язаний із результатами безпосередніх вимірювань адитивно. Подальше дослідження запропонованої методики дасть можливість обґрунтувати її застосування для інших формул непрямого вимірювання.

А.С. Шантырь, С.В. Шантырь

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ РЯДА ЭДЖВОРТА ПРИ НАХОЖДЕНИИ РАСШИРЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТА КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Предложена методика нахождения расширенной неопределенности для случая, когда результат косвенного измерения связан с результатами непосредственных измерений аддитивно. Показано, что аппроксимация композиции законов распределения рядом Эджворта позволяет получить аналитическое выражение плотности вероятности величины, измеренной косвенным способом. Определены границы применимости разработанной методики. Приведена таблица значений коэффициента покрытия в зависимости от значений коэффициентов асимметрии и эксцесса измеряемой величины.

A.S. Shantyr, S.V. Shantyr

THE STUDY OF THE APPLICATION AREA OF EDGEWORTH SERIES AT FINDING EXTENDED UNCERTAINTY OF INDIRECT MEASUREMENT RESULT

This study proposes the method of finding the extended uncertainty under the condition when indirect measurement result is additively related to direct measurement results. Using Edgeworth series, we show that approximation of distributions composition allows obtaining the analytical expression of probability density for the indirectly measured quantity. In addition, we outline the boundaries of the application area of the proposed method. We present the table of coverage factors values in relation to the values of skewness and kurtosis coefficients.

1. *Guide* to the Expression of Uncertainty in Measurements: 1-st Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 p.
2. *Draft* GUM Supplement. 1. Propagation of Distributions using Monte Carlo Method (BIPM Joint Committee on Guides in Metrology JCGM), 2006. – 60 p.
3. *Sim C.H., Lim M.H.* Evaluating expanded uncertainty in measurement with a fitted distribution // Metrologia. – 2008. – N 45. – P. 178–184.
4. *Циделко В.Д., Яремчук Н.А., Галевская М.В.* Исследование методов оценивания расширенной неопределенности // Системи обробки інформації. – 2008. – Вип. 4 (71). – С. 49–54.
5. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 7-е изд., стереотип. – М.: Высш. шк., 2001. – 576 с.
6. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
7. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ. – Изд. 2-е, стереотип. – М.: Мир, 1975. – 642 с.
8. *Cramer H.* Random Variables and Probability Distributions // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1937. – N 36. – P. 119.

Рекомендована Радою
факультету авіаційних і космічних
систем НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
1 грудня 2008 року