

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Н.М.БРУКВА, І.Ф.СКІЦЬКО

ФІЗИКА

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗГАСАЮЧИХ  
І ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Методичною радою  
КПІ ім. Ігоря Сікорського, як навчальний посібник для здобувачів  
ступеня бакалавра, які навчаються за освітньою програмою «Без-  
пека державних інформаційних ресурсів, спеціальні телекомуніка-  
ційні системи» спеціальності 125 «Кібербезпека», 122  
Комп'ютерні науки», 172 «Телекомунікації та радіотехніка»*

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2024

УДК 534.5

В19

Автори:

Бруква Наталія Миколаївна, старший викладач.  
Скіцько Іван Федорович, канд.фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензент

Савченко Д.В., в.о. зав. кафедри ЗФ та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського, д-р фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор

Лінчевський І.В., професор кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, д-р фіз.-мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 4 від 01.02.2024 р.)  
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол №11 від 22.11.2023 р.)*

Скіцько І.Ф.

В19

Фізика: Дослідження електричних згасаючих і вимушених коливань. Інструкція до лабораторної роботи [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Безпека державних інформаційних ресурсів, спеціальні телекомунікаційні системи» спеціальності 125 «Кібербезпека», 122 «Комп'ютерні науки», 172 «Телекомунікації та радіотехніка» спец./ Н.М.Бруква, І.Ф.Скіцько; КПІ ім. Ігоря Сікорського.– Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 69 с.

Посібник забезпечує проведення лабораторної роботи: "Дослідження електричних згасаючих і вимушених коливань" за програмою навчальної дисципліни "Фізика". Детально розглядається теорія лабораторної роботи, методика проведення дослідження і обробки результатів вимірювань. Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 125 "Кібербезпека", 122 "Комп'ютерні науки", 172 "Телекомунікації та радіотехніка". Буде корисним і для студентів інших технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 534.5

Реєстр. № НП 23/24-200. Обсяг 4,32 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056, <https://kpi.ua>

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Н.М.Бруква, І.Ф.Скіцько, 2024  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

# Дослідження електричних згасаючих і вимушених коливань

## Мета роботи

1. Дослідження згасаючих коливань. Визначення характеристик коливального контуру (логарифмічний декремент, добротність) та їх залежність від параметрів контуру.

2. Визначити активний опір котушки та її індуктивність, оцінити їх невизначеності. Визначити власну частоту контуру і коефіцієнт згасання.

3. Переконатись у справедливості наближених формул для розрахунку логарифмічного декременту згасання і добротності коливальної системи для двох значень ємності в даній роботі.

4. Отримати вимушені коливання у коливальному контурі. Дослідити залежність напруги на конденсаторі та струму у коливальному контурі від частоти.

5. Дослідити залежність частоти, при якій напруга на конденсаторі досягає максимальних значень, від активного опору.

6. Визначити добротність коливального контуру за резонансними кривими для випадку слабого згасання.

7. Дослідити залежність характеристик коливань від параметрів коливального контуру.

8. Зробити висновки по роботі.

## Теорія

### 1. Згасаючі коливання

Електричні коливання відіграють дуже важливу роль у техніці, зокрема у техніці зв'язку.

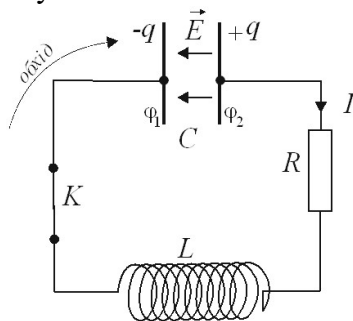


Рис. 1.1.

Електричні коливання виникають у коливальному контурі, який складається з конденсатора  $C$ , котушки  $L$  і активного опору  $R$  (рис. 1.1). Якщо зарядити конденсатор  $C$  і замкнути ключ  $K$ , то конденсатор почне

розряджати. У колі потече струм, який плавно буде зростати через появу е.р.с. самоіндукції. При цьому енергія поля конденсатора переходить в енергію магнітного поля котушки.

Зростання струму до деякого максимального значення відбувається за  $1/4$  періоду коливання. За наступну  $1/4$  частину періоду відбувається поступове (через виникнення струмів самоіндукції) спадання струму, яке закінчується перезарядкою конденсатора. Протягом другої половини періоду процес відбувається у зворотному напрямку. Таким чином, у колі відбувається періодичне перетворення енергії електричного поля конденсатора в енергію магнітного поля струму котушки. Повна енергія ідеалізованого контуру ( $R =$

0) дорівнює сумі електричної і магнітної енергії і вона зберігається з часом.

Однак у реальному контурі енергія зменшується у зв'язку з тим, що існує активний опір  $R$ , у якому виділяється тепло, і амплітуда коливань буде зменшуватись. Тобто, електромагнітні коливання у реальному коливальному контурі завжди є згасаючими.

Будемо вважати, що електричні процеси в контурі **квазістационарні**. Це означає, що миттєве значення величини струму  $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$  — одне й те саме в будь-якому місці контуру і що до миттєвих значень електричних величин можна застосовувати правила Кірхгофа. Нехай заряд конденсатора  $q_0$ , а струм в колі  $I = \dot{q}$ . Тоді, згідно другого пра-

вила Кірхгофа, можна записати, що

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \varphi_1 - \varphi_2 &= -(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= -U_c = -\frac{q}{c} \text{ — напруга на} \end{aligned}$$

конденсаторі,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s &= -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{dq}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} = \\ &= -L\ddot{q} \text{ — е.р.с. самоіндукції, яка} \\ &\text{виникає в котушці, індуктивність} \\ &\text{якої } L. \end{aligned}$$

Диференційне рівняння згасаючих коливань отримаємо із (1.1), розділивши його на  $L$ :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Ввівши позначення

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (1.2)$$

який носить назву *коефіцієнта згасання*, отримаємо рівняння

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.3)$$

де  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  частота власних коливань.

Ми отримали лінійне диференційне рівняння другого порядку із звичайними похідними і з сталими коефіцієнтами. Таке саме рівняння можна отримати для напруги  $U$  і для величини струму  $I$ . Зауважимо, що коливання, які описуються лінійними диференційними рівняннями, називаються лінійними коливаннями, а відповідні коливальні системи – лінійними системами.

Розв'язок рівняння (1.3)

будемо шукати у вигляді

$$q = u(t)e^{-\beta t}. \quad (1.4)$$

Підставимо (1.4) в (1.3),

врахувавши, що

$$\dot{q} = (\dot{u} - \beta u) e^{-\beta t}$$

і

$$\ddot{q} = (\ddot{u} - 2\beta\dot{u} + \beta^2 u) e^{-\beta t}.$$

Тоді отримаємо для змінної  $u(t)$  рівняння:

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \beta^2)u = 0. \quad (1.5)$$

Розв'язок цього рівняння має різний вигляд залежно від співвідношення між коефіцієнтами.

1). Допустимо спочатку, що

$$\omega_0^2 > \beta^2, \quad (1.6)$$

і тоді позначимо

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.7)$$

При такій умові рівняння (1.5) переписеться так:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0.$$

Це диференціальне рівняння гармонічних коливань, розв'язок якого має вигляд

$$u = q_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

де  $q_0$  і  $\varphi$  – сталі, які визначаються з початкових умов. Отже, розв'язком рівняння (1.3) буде

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.8)$$

де  $q_0 e^{-\beta t}$  – «амплітуда» згасаючих коливань,  $q_0$  – початкова

амплітуда (максимальний заряд конденсатора).

Відповідно напруга на конденсаторі, буде:

$$U = \frac{q}{C} = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.9)$$

Амплітуда згасаючих коливань зменшується з плином часу, і тим швидше, чим більший коефіцієнт  $\beta$ .

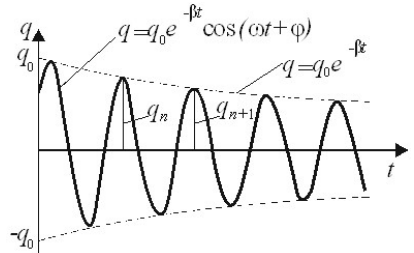


Рис.1.2.

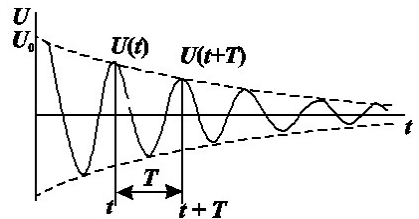


Рис.1.3.

Величина, що визначається формулою (1.7) називається *власною циклічною частотою згасаючих коливань*. Графік за-

лежності заряду  $q$  і напруги  $U$  на конденсаторі від часу наведений на рис.1.2 і 1.3.

Щоб знайти силу струму в контурі, продиференціюємо (1.8) по часу:

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q} = q_0 e^{-\beta t} \cdot (-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)). \quad (1.10)$$

Помножимо і розділимо цей вираз на  $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0$ .

Тоді

$$I = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \left( -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right).$$

Якщо ввести кут  $\psi$ , який визначається умовами:

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0},$$

$$\sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

то можна написати, що

$$I = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \psi). \quad (1.11)$$

Так як  $\cos \psi < 0$ , а  $\sin \psi > 0$ , то значення  $\psi$  знаходиться в ме-

жах від  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$  ( $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ ).

Таким чином, при наявності в контурі активного опору сила струму випереджає по фазі напругу (заряд) на конденсаторі більше, ніж на  $\frac{\pi}{2}$  (при  $R = 0$  випередження складає  $\frac{\pi}{2}$ ).

Дослідимо докладніше розв'язок (1.8) і знайдемо насамперед ті моменти часу, в які заряд  $q$  досягає максимумів і мінімумів. Для цього за правилом знаходження екстремумів прирівняємо (1.10) до нуля. Це дає:

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = -\frac{\beta}{\omega}.$$

Нехай  $t = t_1$  є який-небудь розв'язок цього рівняння. Тоді його розв'язками також будуть:

$$t_1 - 2T, t_1 - T, t_1 + T, t_1 + 2T, \dots;$$

$$t_1 - \frac{3}{2}T, t_1 - \frac{T}{2}, t_1 + \frac{T}{2}, t_1 + \frac{3}{2}T, \dots$$

де

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.12)$$

При цьому легко впевнитись, що коли при  $t = t_1$  маємо максимум  $q$ , то всі значення  $t$ , що стоять у першому рядку, відповідають також максимуму ( $\frac{d^2q}{dt^2} < 0$ ), а всі значення другого рядка – мінімуму  $q$ . Отже, хоч згасаючі коливання не є періодичним процесом у строгому розумінні цього слова, однак цей процес має певну **повторюваність** у тому розумінні, що максимальні і мінімальні значення заряду (а також струму і напруги) досягаються через однакові проміжки часу  $T$ . Цей проміжок часу  $T$  (формула (1.12)) ми і називаємо **періодом** згасаючих коливань.

Нехай  $q_n$  і  $q_{n+1}$  – максимальні значення заряду конденсатора (рис.1.2) в двох послідовних максимумах з номерами  $n$  і  $(n+1)$  в моменти часу  $t_n$  і  $t_{n+1}$ , причому  $t_{n+1} = t_n + T$ . Згідно з (1.8) і (1.12), отримаємо:

$$q_n = q_0 e^{-\beta t_n} \cos(\omega t_n + \varphi),$$

$$q_{n+1} = q_0 e^{-\beta(t_n+T)} \cos \left[ \omega \left( t_n + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] =$$

$$= q_0 e^{-\beta(t_n+T)} \cos(\omega t_n + \varphi).$$

Поділивши почленно обидві ці рівності, знаходимо:

$$D = \frac{q_n}{q_{n+1}} = e^{\beta T}. \quad (1.13)$$

Ми бачимо, що відношення двох послідовних максимальних значень заряду не залежить від номера максимумів, або, інакше кажучи, ці максимальні значення зменшуються в геометричній прогресії. Відношення (1.13) називається **декрементом згасання**, а його натуральний логарифм

$$\lambda = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = \ln D = \beta T \quad (1.14)$$

**логарифмічним декрементом згасання.**

Логарифмічний декремент згасання  $\lambda$  можна визначити й інакше. Позначимо через  $\tau$  час, протягом якого амплітуда коливань зменшується в  $e = 2,71828 \dots$  раз. Тоді згідно (1.8)



$$\frac{q_0 e^{-\beta(t+\tau)}}{q_0 e^{-\beta t}} = e^{-\beta\tau} = \frac{1}{e},$$

а отже,

$$\beta\tau = 1.$$

Поділивши почленно (1.14) на останнє співвідношення, отримаємо:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} = \lambda. \quad (1.15)$$

Тут  $N_e = \frac{\tau}{T}$  – число повних коливань за час  $\tau$ , який називається **часом релаксації (час згасання)**. Отже, логарифмічний декремент є величина обернена до числа коливань, що здійснює система за час  $\tau$ .

Для характеристики згасання коливальних контурів часто користуються, особливо в радіотехніці, ще іншою величиною, яка називається **добротністю контура** і позначають буквою  $Q$ . З логарифмічним декрементом вона зв'язана співвідношенням:

$$Q = \pi/\lambda. \quad (1.16)$$

Через те, що  $\lambda = 1/N_e$ , то

$$Q = \pi N_e. \quad (1.17)$$

Добротність контуру є помножене на  $\pi$  число повних коливань, за час релаксації. Отже, добротність контура тим вища, чим менше згасання коливань у ньому.

Формула (1.7) показує, що частота електричних коливань  $\omega$  залежить від коефіцієнта згасання  $\beta$  і не дорівнює частоті коливань  $\omega_0$  того самого контура при опорі  $R = 0$  ( $\beta = 0$ ). Із збільшенням опору контура частота  $\omega$  зменшується, а період коливань  $T$  збільшується.

Покажемо, що при слабкому згасанні (коли  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) добротність коливальної системи з точністю до множника  $2\pi$  дорівнює відношенню енергії, яка запасена в системі в даний момент, до зменшення цієї енергії за один період коливань. Згі-

дно (1.8), амплітуда заряду конденсатора зменшується за законом  $e^{-\beta t}$ . Енергія, яка запасасться в конденсаторі, пропорційна квадрату амплітуди заряду; значить енергія конденсатора  $W$  зменшується за законом  $e^{-2\beta t}$ . Відносне зменшення енергії за період коливань дорівнює:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{W} &= \frac{W(t) - W(t + T)}{W(t)} = \\ &= \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

При слабкому згасанні (тобто при умові, що  $\lambda \ll 1$ ) можна за формулами приблизного підрахунку вважати, що  $e^{-2\lambda} \approx 1 - 2\lambda$ . Тоді

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda.$$

Скориставшись формулою (1.16) отримаємо, що

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (1.18)$$

Для слабого згасання для добротності можна отримати ще і таку формулу:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} \cong \frac{\pi \omega_0}{2\pi\beta} = \\ &= \frac{2L}{2\sqrt{LC} \cdot R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.19) \end{aligned}$$

2). Розглянемо випадок, коли  $\omega_0^2 = \beta^2$ . Це буде мати місце, коли опір коливального контуру

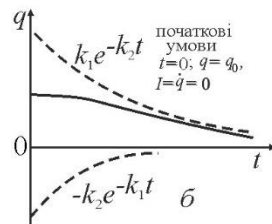
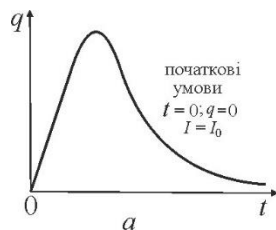


Рис.1.4. Аперіодичний процес при  $\omega_0^2 = \beta^2$  (а) та аперіодичний розряд конденсатора при  $\omega_0^2 < \beta^2$  (б).

$$R = 2\sqrt{L/C} = R_{кр}, \quad (1.20)$$

де  $R_{кр}$  називається критичним опором. Тоді (1.5) прийме вигляд:  $\ddot{u} = 0$ . Розв'язком цього рівняння є:  $u = a + bt$ . Це означає, що розв'язок (1.4) буде мати вид:

$$q = (a + bt)e^{-\beta t}, \quad (1.21)$$

де  $a$  і  $b$  визначаються із початкових умов, наприклад:  $t = 0, q = 0, I = I_0$ . Тоді  $a = 0$ , а  $b = I_0$  і

$$q = I_0 t \cdot e^{-\beta t}.$$

Цей розв'язок описує так званий аперіодичний процес, графік якого показаний на рис. 1.4, а.

Коливальна система, що виведена із положення рівноваги, повертається (експоненційно) в рівноважний стан. Такий процес використовується в балістичних гальванометрах, приладах для вимірювання кількості заряду, який протік через поперечний переріз провідника в електричному колі

**3).** Припустимо тепер, що опір контура великий наскільки, що

$$\omega_0^2 < \beta^2.$$

У цьому випадку частота  $\omega$ , яка виражається формулою (1.7), буде уявною. Це означає, що

розв'язок (1.8) вже не існує, а отже, електричних коливань у контурі не буде. В цьому випадку розв'язок основного рівняння (1.3) має вигляд:

$$q = A_1 e^{-k_1 t} + A_2 e^{-k_2 t}, \quad (1.22)$$

де

$$k_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

$$k_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

а  $A_1$  і  $A_2$  – довільні сталі. Підставляючи (1.22) у (1.3), можна впевнитись, що рівняння при цьому задовільняється тотожно, а отже, (1.22) є справді шуканим розв'язком. Через те, що  $\omega_0^2 < \beta^2$ , то  $k_1$  і  $k_2$  обидва дійсні і додатні.

Значення сталих  $A_1$  і  $A_2$  визначаються з початкових умов задачі. Якщо такими є умови:

$$t = 0: q = q_0, \quad I = \dot{q} =$$

0, то

$$q|_{t=0} = A_1 + A_2 = q_0,$$

$$\dot{q}|_{t=0} = -A_1 k_1 - A_2 k_2 = 0.$$

Це дає, що

$$A_1 = -q_0 \frac{k_2}{k_1 - k_2},$$

$$A_2 = q_0 \frac{k_1}{k_1 - k_2}.$$

Після чого розв'язок

(1.22) набирає вигляду:

$$q = \frac{q_0}{k_1 - k_2} (k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}).$$

На рис.1.4,б зображено графічно обидва доданки цієї формули (пунктир) і їх сума (суцільна крива), яка відображає так званий аперіодичний розряд конденсатора.

Якщо опір контура дуже великий, так що  $\beta^2 \gg \omega_0^2$ , то  $k_1 \gg k_2$ , і в останньому виразі можна знехтувати другим доданком порівняно з першим, а в знаменнику —  $k_2$  порівняно з  $k_1$ . Тоді

$$q = q_0 e^{-k_2 t}.$$

Цей випадок відповідає розряду конденсатора.

З вищезазначеного видно, що для можливості електричних коливань необхідно, щоб виконувалась умова  $\omega_0^2 > \beta^2$ . Підставляючи замість  $\beta$  і його значення (1.2) і  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  знаходимо умову можливості коливань у вигляді:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2},$$

або

$$R < 2\sqrt{L/C} = R_{\text{кр}}. \quad (1.23)$$

Формула (1.23) визначає *критичний опір*, при якому коливальний процес переходить в аперіодичний.

## 2. Вимушені електричні коливання.

### Резонанс

У техніці дуже часто потрібні незгасаючі коливання. Так, наприклад, вони використовуються у коливальних контурах генераторів, радіопередавачів. Оскільки будь-які коливання згасають з часом, то незгасаючими коли-

ваннями можуть бути тільки вимушені коливання, що відбувається під дією додаткової періодичної зовнішньої сили, яка поповнює втрату енергії у коливальному контурі.

Щоб викликати вимушені коливання, необхідно, щоб на коливальну систему впливала зовнішня періодично змінна дія. У випадку електричних коливань це можна здійснити, якщо в електричне коло (рис.1.1) включити послідовно з елементами

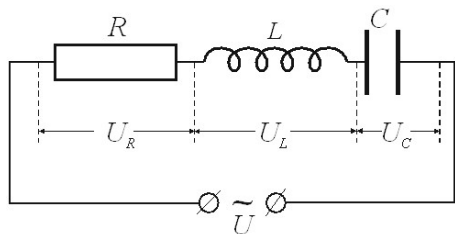


Рис.2.1.

контур змінну е.р.с. або, розірвавши контур, подати на контакти, які утворились, періодичну напругу (рис.2.1):

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (2.1)$$

де  $U_m$  — амплітуда, а  $\omega$  — частота вимушуючої сили. Цю напругу необхідно додати до е.р.с. самоіндукції в рівнянні (1.1). В результаті формула (1.1) приймає вид:

$$IR = -\frac{q}{c} - L \frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (2.2)$$

Після перетворення отримаємо рівняння

$$\ddot{q} + 2p\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t, \quad (2.3)$$

де  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  і  $\beta = \frac{R}{2L}$ . Рівняння (2.3) називається диференціальним неоднорідним другого порядку рівнянням вимушених коливань. Загальним розв'язком рівняння (2.3) є сума загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (1.3), тобто розв'язок (1.8), і частинного розв'язку рівняння (2.3). Розв'язок (1.8) відіграє помітну роль лише на початковій стадії виникнення вимушених коливань. З часом внаслідок експоненційного множника  $e^{-\beta t}$  роль доданка (1.8) зменшу-

ється, амплітуда вимушених коливань зростає, доки не досягне певного значення.

Серед частинних розв'язків рівняння (2.3) є такий, який змінюється з часом синусоїдально з частотою  $\omega$  зовнішньої вимушуючої сили (2.1). Будемо шукати його в комплексній формі. Це можна робити, так як всі математичні операції, з якими прийдеться мати справу, є лінійні і дійсні. Замінімо праву частину рівняння (2.3) на комплексну величину  $U_m e^{i\omega t}$ , тобто напишемо, що

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m e^{i\omega t}}{L}. \quad (2.4)$$

Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (2.4) у комплексному вигляді. Знайшовши його, відкинемо його уявну частину і отримаємо розв'язок рівняння (2.3). Частинний розв'язок рівняння (2.4) шукаємо у вигляді

$$q = q_1(\omega) e^{i\omega t}, \quad (2.5)$$

і його похідні будуть:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = i\omega q_1 e^{i\omega t} = i\omega q,$$

$$\ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2} = i^2 \omega^2 q_1 e^{i\omega t} = -\omega^2 q.$$

Підставимо (2.5) в (2.4) і отримаємо

$$q_1 = \frac{U_m/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega}. \quad (2.6)$$

Тоді частинний розв'язок (2.5) запишеться так:

$$q = \frac{U_m/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} e^{i\omega t}. \quad (2.7)$$

Розв'язок (2.7) тільки символічно представляє вимушене коливання. В ньому повинна бути залишена тільки **дійсна частина**. Для знаходження останньої введемо позначення

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega = \rho e^{i\psi}, \quad (2.8)$$

де  $\rho$  і  $\psi$  – величини дійсні і визначаються згідно теорії комплексних чисел за формулами:

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (2.10)$$

Таким чином, розв'язок (2.7) може бути записаний, як

$$q = q_m e^{i(\omega t - \psi)}, \quad (2.11)$$

де

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (2.12)$$

є амплітуда вимушених коливань. Виділивши у (2.11) дійсну частину, отримаємо частинний розв'язок рівняння (2.3) у вигляді

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (2.13)$$

який для часу  $t \gg \tau = 1/\beta$  стане загальним розв'язком рівняння (2.3), оскільки вільні коливання, що описуються рівнянням (1.8), практично зовсім згаснуть.

Таким чином, вимушені коливання будуть гармонійними з частотою  $\omega$  вимушуючої сили (2.1). Амплітуда  $q_m$  цих коливань залежить від  $\omega$  і визначається формулою (2.12). Коливання (2.13) відстають по фазі

від прикладеної напруги (2.1) на величину  $\psi$ , яка визначається формулою (2.10) і теж залежить від  $\omega$ .

Дослідимо отриманий результат. Продиференціюємо розв'язок (2.13) по  $t$  і знайдемо силу струму в контурі для коливань, які встановились:

$$I = \dot{q} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2),$$

де  $I_m = \omega q_m$ . Запишемо цей вираз у вигляді

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.14)$$

де  $\varphi = \psi - \pi/2$ , є зсув по фазі між струмом і прикладеною напругою (2.1). У відповідності з (2.10)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \\ &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Із цієї формули витікає, що струм відстає за фазою від напруги (2.1) ( $\varphi > 0$ ) в тому випадку, коли  $\omega L > 1/(\omega C)$ , і випе-

реджає напругу (2.1) ( $\varphi < 0$ ) при умові, що  $\omega L < 1/(\omega C)$ . Згідно (2.12)

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot (2.16)$$

Порівнюючи (2.16) із законом Ома  $I = \frac{U}{R}$ , бачимо, що знаменник у (2.16)

$\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$  визначає опір всього кола.  $R$ —називається активним опором,  $\omega L$  і  $1/(\omega C)$ —реактивними опорами (розглядаються в подальшому).

Представимо співвідношення (2.2) у вигляді

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. (2.17)$$

Добуток  $IR$  дорівнює напрузі  $U_R$  на активному опорі,  $q/C$  є напруга на конденсаторі  $U_C$ , вираз  $L(dI/dt)$  визначає напругу на індуктивності  $U_L$  з урахуванням цього можна записати

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. (2.18)$$

Таким чином, сума напруг (це векторна сума коливань) на окремих елементах контуру дорівнює в кожний момент часу напрузі, яка прикладена зовні (рис.2.1).

Згідно (2.14)

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). (2.19)$$

Розділивши вираз (2.13) на ємність, отримаємо напругу на конденсаторі:

$$U_C = \frac{qm}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{cm} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2). (2.20)$$

Тут  $U_{cm} = q_m/C = I_m/(\omega C)$ , де враховано, що  $I_m = \omega q_m$ .

Помноживши похідну по часу від функції (2.14) на  $L$ , отримаємо напругу на індуктивності

$$U_L = L(dI/dt) = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos(\omega t - \varphi + \pi/2). (2.21)$$

Тут

$$U_{Lm} = \omega LI_m. (2.22)$$

Співставлення формул (2.14), (2.19), (2.20), (2.21) показує, що



напруга на ємності відстає по фазі від сили струму на  $\pi/2$ , а напруга на індуктивності випереджає струм на  $\pi/2$ . Напруга на активному опорі змінюється у фазі зі струмом. Згідно з геометричним представленням гармонічних коливань фазові співвідношення можна наглядно представити за допомогою векторної діаграми. Візьмемо пряму, від якої відраховується початкова

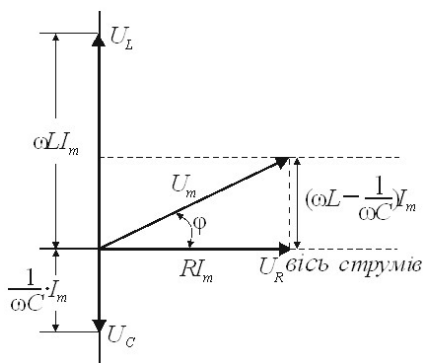


Рис.2.2.

фаза, за вісь струмів. Тоді вийде діаграма, яку наведено на рис.2.2. Згідно (2.17), три функції  $U_R$ ,  $U_C$  і  $U_L$  в сумі повинні дорівнювати прикладеній напру-

зі  $U$ . У відповідності з цим, напруга  $U$  зображується на діаграмі вектором, який дорівнює сумі векторів  $U_R$ ,  $U_C$  і  $U_L$ . Зауважимо, що із прямокутного трикутника, який утворений на діаграмі векторами  $U_m$ ,  $U_R$  і різницею  $U_L - U_C$ , легко отримати формулу (2.16).

**Резонанс** (французьке resonance, від латинського resono — звучу у відповідь, відзиваюсь) відносно великий селективний (вибірковий) відклик коливальної системи на періодичну дію з частотою, близькою до частоти її власних коливань. При резонансі відбувається різке зростання амплітуди вимушених коливань. Резонанс як механічне і акустичне явище вперше описав італійський учений Г.Галілей, а в електромагнітних системах — на прикладі колива-

льного контуру – англійський учений Дж.Максвелл (1868р.).

Розрізняють резонанс напруг в послідовному контурі (рис.2.1), при якому  $U_L = U_C$  і струм досягає максимального значення, та резонанс струму в паралельному контурі, в якому конденсатор і котушка індуктивності з'єднані паралельно.

В подальшому розглянемо послідовний контур на рис.2.1. Резонансну частоту для заряду  $q$  і напруги на конденсаторі  $U_C$  знайдемо з умови мінімуму підкореневого виразу у формулі (2.12). Тобто похідна по  $\omega$  від цього виразу повинна дорівнювати нулю:

$$\frac{d}{d\omega} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2) = 0.$$

Звідки знаходимо, що

$$\begin{aligned} \omega_{q_{\text{рез}}} &= \omega_{U_{\text{рез}}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

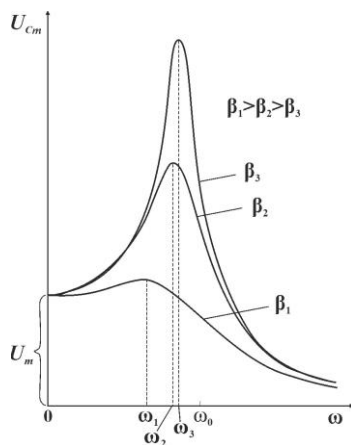


Рис.2.3.

Резонансні криві для  $U_C$  зображені на рис.2.3 (резонансні криві для  $q$  мають такий же вид). При  $\omega \rightarrow 0$  резонансні криві сходяться в одній точці з ординатою  $U_{Cm} = U_m$ . Це означає, що конденсатор підключений до джерела постійної напруги  $U_m$ . Максимум при резонансі тим вищий і гостріший, чим менший коефіцієнт згасання  $\beta = R/(2L)$ , тобто чим менший активний опір і більша індуктивність контуру.

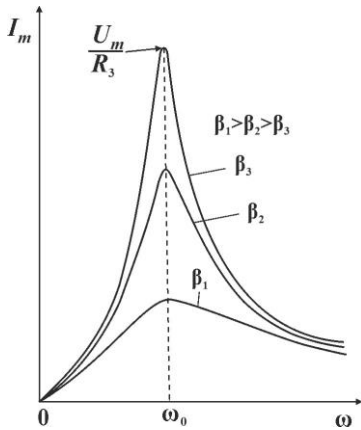


Рис.2.4.

Резонансні криві для сили струму зображено на рис.2.4, для різних коефіцієнтів згасання. Із формули (2.16) видно, що амплітуда сили струму має максимальне значення при  $\omega L - 1/(\omega C) = 0$ . Отже, резонансна частота для сили струму співпадає із власною частотою контуру  $\omega_0$ :

$$\omega_{I_{\text{рез}}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (2.24)$$

При  $\omega \rightarrow 0$ ,  $I_m = 0$ , так як при постійній напрузі постійний струм в колі з конденсатором

протікати не може. Згідно (2.16) при  $\omega \rightarrow \omega_0$   $I_{m \text{ рез}} = U_m/R$ .

Резонансне значення напруги на конденсаторі знайдемо з формули (2.12), поділивши її на ємність  $C$  і підставивши замість частоти  $\omega$  її резонансне значення з формули (2.23). Тоді отримаємо, що

$$U_{cm \text{ рез}} = \frac{U_m \omega_0^2}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.25)$$

Особливий інтерес представляє випадок слабого згасання (коли  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{U_{cm \text{ рез}}}{U_m} &= \frac{1}{\omega_0 CR} = \\ &= \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (2.26) \end{aligned}$$

При цьому враховано, що для випадку слабого згасання добротність визначається формулою (1.19).

Таким чином, добротність контуру (для слабого згасання) показує, в скільки разів

напруга на конденсаторі може перевищувати прикладену напругу.

Добротність контуру визначає також гостроту резонансних кривих. На рис.2.5 показана одна із нормуючих резонансних кривих для сили струму в контурі. По вертикальній осі відкладено не значення  $I_m$  (формула (2.16)), що відповідає даній частоті, а відношення  $I_m/I_{m \text{ рез}}$ .

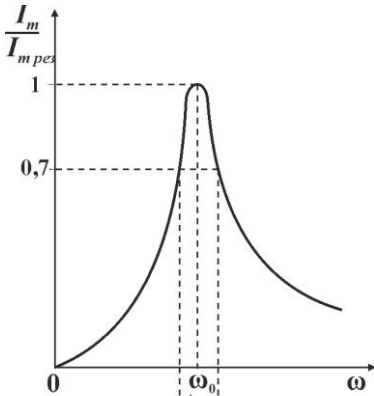


Рис.2.5.

Взагалі кажучи, чим більша добротність контуру  $Q$ , тим вужчий і вищий максимум на кривій залежності амплітуди струму від

частоти вимушуючої сили. Щоб з'ясувати це питання з більшою точністю, розглянемо частоти, які близькі до  $\omega_0$ , наприклад,  $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega/2$ . Потім вирахуємо величину  $\omega L - 1/(\omega C)$ , яка входить в знаменник рівняння (2.16), з точністю до першої степені відношення  $\Delta\omega/(2\omega_0)$ . Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} &= \omega_0 L \left( 1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\omega_0 C \left( 1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \right)} = \\ &= \omega_0 L \left( 1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} - \frac{1}{1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}} \right) = \\ &= \pm \omega_0 L \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \end{aligned}$$

При цьому враховано, що

$$\begin{aligned} \omega_0 L &= \frac{1}{(\omega_0 C)} i \\ \frac{1}{1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}} &= \left( 1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \right)^{-1} \approx \\ &\approx 1 \mp \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}. \end{aligned}$$

Розглянемо ширину  $\Delta\omega$  кривої  $\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}}(\omega)$  на рис.2.5, яку взято на висоті 0,7 (відношення амплітуд струмів, яке дорівнює 0,7, відповідає відношенню потужностей, яке дорівнює  $0,7^2 \approx 0,5$ , оскільки потужність пропорційна  $I^2$ ). Тоді

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}}\right)^2 &= \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega_0 L \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L \Delta\omega}{R}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Звідки отримаємо, що  $Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1$   
і

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega. \quad 2.27$$

Точки на осі  $\omega$ , яким відповідають значення  $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ , називають точками "половинної енергії". За ширину резонансної кривої часто приймають відстань  $\Delta\omega$  між точками половинної енергії. Радіоприймач налаштовують на певну станцію і розрізняють її від інших за до-

помогою резонансного контуру з добротністю  $Q$ , яка дорівнює декільком сотням. Неважко виготовити мікрохвильовий резонансний контур з добротністю  $Q$  порядку  $10^4$  або навіть  $10^5$ .

Звернемося тепер до різниці фаз  $\varphi$  між струмом (2.14) і прикладеною напругою (2.1). З (2.15) видно, що при дуже малих частотах, коли  $\omega L \ll 1/(\omega C)$ ,  $\text{tg}\varphi$  дуже великий і від'ємний, а отже,  $\varphi \cong -\pi/2$ . У цьому разі струм випереджає напругу і коло має ємнісний характер. При збільшенні частоти  $\omega$  реактивний опір  $(\omega L - 1/(\omega C))$ , залишаючись від'ємним, зменшується за абсолютним значенням і різниця фаз  $\varphi$  зменшується. Коли  $\omega = \omega_0$  формула (2.15) дає  $\text{tg}\varphi = 0$ , а отже  $\varphi = 0$ . При подальшому збільшенні  $\omega$  реактивний опір  $(\omega L - 1/(\omega C)) > 0$  і збільшується із зростанням  $\omega$ .

Тому  $0 < \operatorname{tg}\varphi < +\infty$  і  $0 < \varphi < +\pi/2$ . Отже, при  $\omega > \omega_0$  струм відстає від напруги і коло набуває індуктивного характеру, причому кут  $\varphi$  при збільшенні частоти  $\omega$  асимптотично прямує до граничного значення  $+\pi/2$ .

Залежність різниці фаз  $\varphi$  від частоти коливань зображено графічно на рис.2.6. Так само як

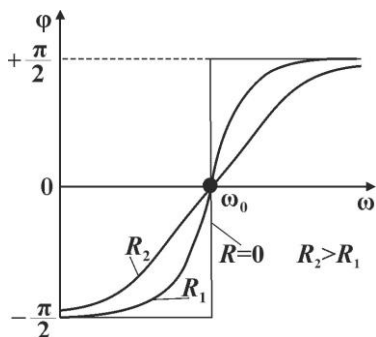


Рис.2.6.

і  $I_m$   $\varphi$  залежить ще й від активного опору контура  $R$ . Чим менше  $R$ , тим швидше змінюється  $\varphi$  біля  $\omega = \omega_0$  і в граничному випадку при  $R=0$  зміна фази набуває стрибкоподібного характеру (рис.2.6).

В переважній більшості практичних випадків  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ . Вище ми припускали, що змінюється частота прикладеної напруги  $\omega$ , а параметри контуру залишаються незмінними. Однак зрозуміло, що для одержання резонансу можна робити й інакше: змінювати в контурі індуктивність або ємність (тобто змінювати  $\omega_0$ ), залишаючи частоту  $\omega$  сталою.

#### Параметричний резонанс

При вивченні електричного резонансу (напруги і струмів) ми розглядали дію періодичної е.р.с. генератора змінної напруги (2.1) на коливальний контур. Проте виявляється, що аналогічні явища спостерігаються і при зовнішньому впливі інших типів, причому коливання, які виникають, як і при дії е.р.с., істотно залежать від частоти дій на контур. Тому поняття резона-

нсу можна узагальнити і поширити на більшу кількість явищ.

Припустимо, що дія зовнішніх факторів змінює один з параметрів коливальної системи, і розглянемо спочатку простий

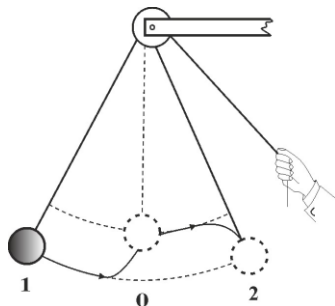


Рис.2.7.Параметричний резонанс у механіці.

механічний приклад. Нехай  $\epsilon$  маятник, довжину якого можна змінювати (рис.2.7), підтягуючи кінець нитки, перекинутої через блок, або, навпаки, опускаючи його. Періодично змінюватимемо довжину маятника, підтягуючи нитку (зменшуючи довжину) кожного разу, коли маятник перебуватиме поблизу положення рівноваги (0), і відпускати

нитку (збільшувати довжину) при крайніх положеннях маятника (1 і 2), тобто з частотою, яка дорівнює подвоєній частоті власних коливань маятника. Ми знайдемо, що маятник почне здійснювати коливання із зростаючою амплітудою, яка збільшуватиметься доти, поки нитка не зіскоче з блока. Це спостерігатиметься і тоді, коли частота зміни довжини не дорівнює подвоєній власній частоті, але близька до неї.

Отже, в цьому досліді ми маємо наростаючі коливання, як і у випадку резонансу під дією періодичної зовнішньої сили, однак вони виникають внаслідок періодичної зміни одного з параметрів системи (довжини). Тому описане явище дістало назву *параметричного резонансу*.

Причину зростання коливань можна пояснити, виходячи з енергетичних міркувань. Коли ми вкорочуємо нитку в положенні 0 (рис.2.7), то зовнішня сила (сила руки) виконує роботу не тільки проти сили тяжіння, а й проти відцентрової сили, бо, проходячи через положення рівноваги 0, маятник має найбільшу швидкість. При видовженні нитки роботу виконує маятник. Проте ця робота виконується тільки за рахунок сили тяжіння, бо в положеннях 1 і 2 відцентрова сила дорівнює нулю (швидкість дорівнює нулю) і тому вона менша від роботи при вкороченні нитки. Отже, у коливальну систему (маятник) безперервно вводиться енергія за рахунок роботи зовнішньої сили, що й веде до зростання коливань. Такі явища параметричного резонансу спостерігаються і в електрич-

них коливальних контурах, якщо параметри контуру (ємність чи індуктивність) змінюються періодично. Розглянемо, наприклад, коливальний контур (рис.2.8), що має конденсатор з рухомою

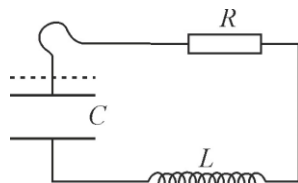


Рис.2.8.Коливальний контур із ємністю, яка змінюється.

пластиною, яку можна періодично наближати до другої пластини або віддаляти від неї. Далі, припустимо, що в контурі внаслідок яких-небудь випадкових причин виникли коливання і що в момент часу, коли заряд конденсатора дорівнює нулю, ми зближуємо пластини. Це явище не супроводжується ніякою роботою, бо заряд конденсатора дорівнює нулю, а значить, і сила притягання між пластинами також дорівнює нулю. Через час,



який дорівнює чверті періоду власних коливань  $T/4$ , заряд конденсатора буде найбільшим. Якщо в цей час розсунути пластини, то зовнішні сили виконують роботу, яка витрачається на перемагання взаємного притягання пластин. При цьому ємність конденсатора зменшиться, а напруга між його обкладками збільшиться, сприяючи коливанням у контурі. Якщо потім знову через час  $T/4$  зблизити пластини, то енергія контура не зміниться, бо заряд конденсатора в цей момент знову дорівнює нулю. При подальшому розсуванні пластин у контур знову буде введена певна енергія і т.п. Тому, змінюючи значною мірою ємність конденсатора з частотою, яка дорівнює подвоєній частоті власних коливань (чи близька до неї), ми дістанемо в контурі електричні коливання із

зростаючою амплітудою, яка збільшуватиметься доти, поки не буде пробитий конденсатор.

Зауважимо, що початкові малі коливання і в механічних, і в електричних системах завжди виникають під дією випадкових зовнішніх факторів, чи флуктуацій. Тому при досить значній періодичній зміні параметрів системи спостерігається *самозбудження* коливань. Правильне співвідношення між фазою коливань і фазою зміни параметра здійснюється при цьому автоматично, бо підсилюються тільки ті з коливань, які мають потрібну початкову фазу.

Описаний дослід з електричним параметричним резонансом вперше здійснили Л.І. Мандельштам і М.Д. Папалексі в 1933 р. Збудована ними ємнісна «параметрична машина» мала обертовий конденсатор, який

складався з двох систем пластин, що мали радіальні вирізи. Одна з систем була нерухома, а друга оберталася за допомогою електродвигуна. Така машина розвивала напруги до багатьох тисяч вольт.

Явище параметричного резонансу можна використати для технічного добування змінних струмів.

### Змінний струм

Описані вимушені коливання, які встановились в контурі, можна розглядати, як протікання в колі, яке має ємність, індуктивність і активний опір, змінного струму, обумовленого змінною напругою (2.1).

Сила струму визначається за формулами (2.14), (2.15) і (2.16). У випадку, коли  $\varphi < 0$ , струм фактично випереджає напругу.

Вираз

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (2.28)$$

який є знаменником у формулі (2.16), називається *повним електричним опором* або *імпедансом*.

Якщо коло складається тільки з активного опору  $R$ , то рівняння закону Ома має вид

$$IR = U_m \cos \omega t.$$

Звідси виходить, що струм в цьому випадку змінюється у фазі з напругою, а амплітуда сили струму дорівнює

$$I_m = U_m/R.$$

Порівняння цього виразу з (2.16) показує, що заміна конденсатора провідною ділянкою кола означає перехід не до  $C = 0$ , а до  $C = \infty$ .

Всяке реальне коло має кінцеві  $R, L$  і  $C$ . В окремих випадках деякі із цих параметрів бувають такі, що їхнім впливом на струм можна знехтувати. До-

пустимо, що  $R$  кола дорівнює нулю, а  $C$  – дорівнює нескінченності. Тоді із формули (2.15) і (2.16) отримаємо, що

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L},$$

а  $\operatorname{tg}\varphi = \infty$  (відповідно  $\varphi = \pi/2$ ).

Величину

$$X_L = \omega L \quad (2.29)$$

називають *реактивним індуктивним опором* або просто *індуктивним опором*. Якщо  $L$  виразити в генрі, а  $\omega$  – в рад/с, то  $X_L$  буде виражено в Омах. Із (2.29) видно, що індуктивний опір зростає із збільшенням частоти  $\omega$ . Постійному струму ( $\omega = 0$ ) індуктивність не чинить опору. Напруга на індуктивності випереджає струм на  $\pi/2$  (рис.2.2).

Тепер допустимо, що  $R = 0$  і  $L = 0$ . Тоді згідно формул (2.15) і (2.16)

$$I_m = \frac{U_m}{1/(\omega C)}, \quad (2.30)$$

$\operatorname{tg}\varphi = -\infty$  (тобто  $\varphi = -\pi/2$ ).

Величину

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (2.31)$$

називають *реактивним ємнісним опором*. Якщо  $C$  виразити у фарадах, а  $\omega$  – в рад/с, то  $X_C$  буде виражено в Омах. Із (2.31) видно, що ємнісний опір зменшується із ростом частоти  $\omega$ . Для постійного струму ( $\omega = 0, X_C = \infty$ ) – постійний струм через конденсатор протікати не може. Так як  $\varphi = -\pi/2$ , то струм, який протікає через конденсатор, випереджає напругу на  $\pi/2$ . Відповідно напруга на конденсаторі відстає від струму на  $\pi/2$  (рис.2.2).

Нарешті допустимо, що  $R = 0$ . В цьому випадку формула (2.16) приймає вид:

$$I_m = \frac{U_m}{\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|}. \quad (2.32)$$

Величина

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \quad (2.33)$$

називається *реактивним опором* або *реактансом*.

Формули (2.14) і (2.15)

можна представити у вигляді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}; I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_m}{Z}. \quad (2.34)$$

Знайдемо потужність, яка виділяється в колі змінного струму. Миттєве значення потужності дорівнює добутку миттєвих значенню напруги і сили струму:

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t) \cdot I(t) = \\ &= U_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Скориставшись формулою

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \\ &+ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

вираз (2.35) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \\ &+ \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Практичний інтерес має середнє за часом значення  $P(t)$ ,

яке позначимо просто  $P$ . Так як середнє значення  $\cos(2\omega t - \varphi)$  дорівнює нулю, то

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (2.37)$$

Із (2.36) видно, що миттєва потужність коливається біля середнього значення з частотою, яка у два рази перевищує частоту струму (рис.2.9). Так як  $\cos \varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-1/2}$ , то, використавши формулу (2.15), отримаємо:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (2.38)$$

Підставивши це значення  $\cos \varphi$  у формулу (2.37) і врахувавши (2.34), отримаємо

$$P = \frac{R I_m^2}{2}. \quad (2.39)$$

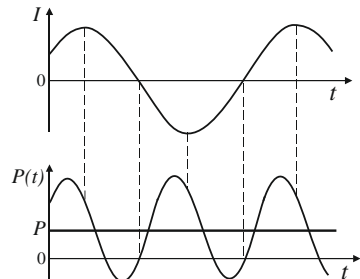


Рис.2.9.

Таку ж потужність розвиває постійний струм, сила якого дорівнює

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (2.40)$$

Величина (2.40) називається *діючим (або ефективним) значенням сили струму*. Аналогічно величина

$$U = U_m / \sqrt{2} \quad (2.41)$$

називається *діючим значенням напруги*.

Формула (2.37) через діючі значення сили струму і напруги має вид

$$P = IU \cos \varphi. \quad (2.42)$$

Множник  $\cos \varphi$ , який входить у формулу (2.42) називають *коефіцієнтом потужності*. В техніці стараються зробити  $\cos \varphi$  як можна більшим. При малому  $\cos \varphi$  для виділення в колі необхідної потужності необхідно пропускати струм великої сили, що призводить до зро-

стання втрат у підвідних провідниках.

#### Автоколивання

Автоколивання — це незгасаючі коливання, які підтримуються зовнішніми джерелами енергії в нелінійних коливальних системах, де є розсіювання енергії, вид і властивості яких визначаються самою системою.

Автоколивання принципово відрізняються від інших коливальних процесів в коливальних системах, де є розсіювання енергії тим, що для їхньої підтримки, не потрібно періодичної дії ззовні. Коливання струни скрипки при рівномірному русі смичка, струму в радіотехнічному генераторі, повітря в органній трубі, маятника в годиннику, спів соловейка — приклади автоколивань. В найпростіших автоколивальних систе-

мах можна виділити коливальну систему із згасанням (коливальний контур), підсилювач коливань, нелінійний обмежувач і ланку *оберненого зв'язку*. Одну з найпростіших класичних схем лампового генератора незгасаючих коливань подано на рис.2.10. Коливальний контур, що має ємність  $C$  і індуктивність  $L$ , увімкнений в коло сітки електронної лампи. В колі анода, крім батареї живлення, є ще котушка  $L'$ , розміщена в безпосередній близькості до котушки  $L$ , так, що між обома котушками існує індуктивний зв'язок.

Принцип дії генератора є такий. Коли в коливальному контурі виникають коливання (при вмиканні батареї або під впливом яких-небудь випадкових причин), то між обкладками конденсатора виникає змінна напруга напруга. Така сама на-

пруга. Така сама напруга виникає між сіткою і катодом  $K$ , бо вони приєднані до обкладок конденсатора. Внаслідок цього в колі анода виникає змінний струм  $I_a$ . Але котушки  $L'$  і  $L$  індуктивно зв'язані між собою і тому змінний струм  $I_a$  спричинює в котушці  $L$  змінну е.р.с. взаємної індукції

$$\mathcal{E} = -L_{12} \frac{dI_a}{dt}, \quad (2.43)$$

де  $L_{12}$  – коефіцієнт взаємної

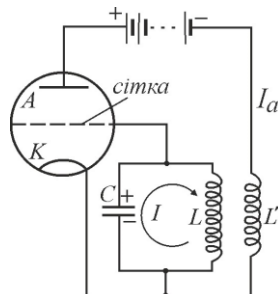


Рис.2.10. Класичний ламповий генератор з коливальним контуром у колі сітки.

індукції. Ця е.р.с., залежно від спеціального взаємного напрямку намотки витків котушок  $L'$  і  $L$ , може або перешкоджати ко-

ливанням струму в контурі, або сприяти їм.

Очевидно, що, перемикаючи при потребі кінці котушки  $L$ , можна завжди домогтися, щоб е.р.с.  $\mathcal{E}$ , яка виникає, мала такий самий знак, як і струм  $I$  в контурі. Тоді робота цієї е.р.с. буде додатною і коливальний контур одержуватиме енергію за рахунок джерела струму, так що згасання контуру зменшиться. Якщо зв'язок між котушками досить сильний, енергія, яку отримує контур, може бути більша за ту, яка витрачається в контурі. У цьому випадку амплітуда коливань зростатиме доти, поки одержувана енергія не дорівнюватиме втратам, після чого встановляться незгасаючі коливання.

Подивимося тепер, яку кількісну умову повинні задовольняти параметри лампового

генератора (опір контуру  $R$  коефіцієнт взаємоіндукції  $L_{12}$  і т.д.), щоб автоколивання були можливі.

Знову повернемося до схеми на рис.2.10. Коливальний контур цього генератора можна подати еквівалентною схемою рис.2.11, в якій позитивний зворотний зв'язок здійснюється деяким генератором (подібно до вимушуючої сили (2.1) в рівнянні (2.2)) із величиною змінної е.р.с. (2.43).

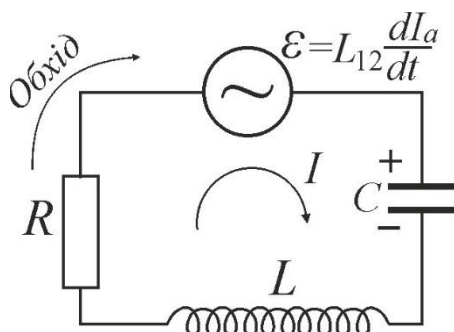


Рис.2.11. Еквівалентна схема генератора, зображеного на рис.2.10.

Застосовуючи до цього контуру друге правило Кірхгофа, отримаємо:

$$IR + U_C = -L \frac{dI}{dt} + L_{12} \frac{dI_a}{dt}.$$

Враховуючи, що  $U_C = q/C$  і  $I = \frac{dq}{dt} > 0$  (зарядка конденсатора), це рівняння перепишемо так:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} - \frac{L_{12}}{L} \cdot \frac{dI_a}{dt} = 0. \quad (2.44)$$

У цих рівняннях анодний струм  $I_a$  є функція сіткової напруги  $u_c$  (що виражається сітковою характеристикою лампи  $I_a(u_c)$ ), яка в свою чергу залежить від заряду конденсатора. Але сіткова характеристика лампи нелінійна. Тому і написане рівняння є нелінійним рівнянням, а отже, автоколивання є *нелінійними коливаннями*. Однак, щоб розв'язати поставлене питання, задачу можна спростити. Припустимо, що ми маємо *малі* коливання і що робочу точку вибрано в середній частині сіткової характеристики. Тоді малий відрізок характеристики можна вважати відрізком

прямої лінії і рівняння коливань буде *лінійним*. Крім того, для простоти вважатимемо, що проникність сітки лампи дуже мала, так, що  $I_a$  практично залежить тільки від потенціалу сітки  $u_c$  (але не від потенціалу анода  $U_a$ ). Тоді потенціал сітки визначається напругою на конденсаторі  $U_C$  і

$$I_a = a + S U_C = a + \frac{S}{C} q,$$

де  $S$  – так звана крутість сіткової характеристики лампи,  $a$  – постійна. Тому

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{S}{C} \frac{dq}{dt}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння коливань (2.44), отримаємо:

$$\ddot{q} + \left( \frac{R}{L} - \frac{S L_{12}}{LC} \right) \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (2.45)$$

Це рівняння того самого виду, що й (1.3), і його розв'язком є (1.8):

$$q = q_0 e^{-\beta' t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.46)$$



Але в цьому випадку коефіцієнт згасання  $\beta'$  дорівнює

$$\beta' = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} - \frac{SL_{12}}{LC} \right). \quad (2.47)$$

Він менший за коефіцієнт  $\beta = R/(2L)$  при відсутності зворотного зв'язку і тому можна сказати, що дія зворотного зв'язку еквівалентна введенню в контур *від'ємного опору*.

З (2.47) видно, що при певних умовах коефіцієнт згасання  $\beta'$  може дорівнювати нулю або навіть бути від'ємним, що відповідає виникненню автоколивань. Це буде тоді, коли

$$SL_{12}/C > R. \quad (2.48)$$

Записана умова є *умовою самозбудження* лампового генератора.

Якщо виконується умова (2.48), то  $\beta' < 0$  і розв'язок (2.46) відображає *наростаючі* коливання, амплітуда яких збільшується з часом до нескінчен-

ності. Причина цього дивного результату полягає в тому, що ми нелінійне рівняння коливань (2.44) замінили наближеним лінеаризованим рівнянням (2.45), яке справджується тільки для малих коливань (початкової стадії процесу), але не відповідає всім властивостям генератора. Насправді ж після самозбудження амплітуда наростаючих коливань прагнуть до деякої *скінченної* границі, що визначається властивостями генератора і не залежить від початкових умов.

## Експеримент

### 3. Спостереження згасаючих коливань у коливальному контурі та дослідження характеристик згасання

#### Опис установки і методика вимірювань

Для вивчення згасаючих коливань використовують електричну схему з генератором імпульсів (рис.3.1) і лабораторну установку на рис.3.2. Кожен ім-

пульс генератора збуджує в коливальному контурі коливання, які є згасаючими. Ці коливання

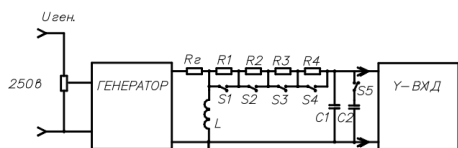


Рис.3.1.

йдуть одне за одним і на екрані осцилографа можна одержати стійку картину згасаючих коливань.

Вмикаючи в коливальний контур різні активні опори можна вивчити їх вплив на характер згасання коливань.

Вимірjувальна установка складається з наступних основних вузлів: генератора імпульсів, коливального контура і осцилографа (рис.3.1 і 3.2). Генератор імпульсів формує імпульси напруги, що надходять на конденсатор  $C$  контура.

При розряді конденсатора в контурі виникають вільні згасаючі коливання. Реєструється цей коливальний процес за допомогою осцилографа: на його екрані одержимо картину

загасаючих коливань, показану на рис.3.3. Тривалість імпульсів



Рис.3.2.

т генератора багато менше періоду  $T_r$  їхнього повторення так, що в інтервалі  $(T_r - \tau)$  між імпульсами коливання в контурі встигають згасати до надходження на конденсатор наступного імпульсу.

#### Порядок виконання роботи

1. З'єднати вхід осцилографа з виходом макета. Переконатися, що ручка напруги живлення генератора знаходиться в крайньому лівому положенні.
2. Увімкнути осцилограф

і лабораторний макет у мережу і дати прогрітися  $5 \div 10$  хв.

3. Ручкою потенціометра  $R_0$  на макеті збільшити напругу живлення генератора імпульсів та домогтися появи сигналу на екрані осцилографа. Підібрати підсилення каналу “Y” осцилографа таким чином, щоб амплітуда вертикального зміщення променя була дещо меншою від висоти екрана. 4. Підібрати частоту розгортки осцилографа такою, щоб зображення згасаючих коливань зайняло більшу частину екрана (рис.3.3).

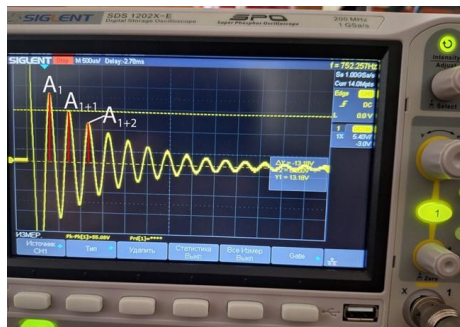


Рис.3.3. Згасаючі коливання на екрані осцилографа.

5. Регулюючи частоту генератора домогтися, щоб коливання встигали достатньо за-

гасати до приходу наступного імпульсу в коливальний контур.

6. Увімкнути перемикачами S1-S4 один з опорів  $R_1-R_4$  і визначити величину якого-небудь максимуму  $A_1$  й одного з наступних максимумів, наприклад,  $A_{1+1}$ ,  $A_{1+2}$ . Результати записати у таблицю 1.1. Досліді повторити для 3 – 6 значень опорів  $R_1-R_6$ .

7. Перемикачем S5 змінити ємність контуру і повторити вимірювання п.6. Дані вимірювань занести в табл.1.2. Таблиця 1.2 по формі така ж, як і таблиця 1.1.

**Примітка.** Номінали опорів, ємностей та індуктивності вказані на робочому місці установки.

#### **Обробка результатів вимірювань згасаючих коливань**

1. За даними вимірів, приведених в таблицях обчислити значення логарифмічного декременту згасання для різних опорів (див. рис.3.3) за формулою (3.1).

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A_1}{A_{1+n}} \right) \quad (3.1)$$

де  $n$  – номер наступного максимуму (брати попарно амплітуди 1 і 2 та 1 і 3) і результати занести в табл.1.1 і 1.2.

2. За даними таблиць побудувати графіки залежності  $\lambda$  від опору  $R$  для двох значень ємності в контурі.

3. За побудованими графіками залежності  $\lambda = f(R)$  визначити активний опір котушки  $R_L$ , як точку перетину прямої з віссю  $R$ . Оцінити невизначеність опору котушки за формулою (2.3.3) із [3]

$$U_B = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u_B^2(x_i)}. \quad (3.2)$$

Зауважимо, що логарифмічний декремент можна виразити через параметри контуру, для випадку слабкого згасання (формули (1.16), (1.19))

$$\lambda = \pi R_{\Pi} \sqrt{C/L}, \quad (3.3)$$

де  $R_{\Pi} = R + R_L$  – опір всього коливального контуру,  $R$  – задані нами опори схеми,  $R_L$  – активний опір котушки. Тому формулу (3.3) можна переписати так:

$$\lambda = \pi(R + R_L) \sqrt{C/L},$$

або

$$\lambda = aR + b, \quad (3.4)$$

де  $a = \pi \sqrt{C/L}$ ,  $b = \pi R_L \sqrt{C/L}$ .

Ми побудували графік  $\lambda = f(R)$  без врахування опору котушки. Тому графік має зсув на величину, яка залежить від опору котушки. Значить, опір котушки визначаємо як

$$R_L = b/a.$$

4. Визначити індуктивність котушки по параметру  $a$  із (3.4):

$$L = C \frac{\pi^2}{a^2} \quad (3.5)$$

для кожного конденсатора та оцінити її невизначеність по формулі (3.2).

5. Визначити власні частоти двох контурів та коефіцієнт згасання:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{a}{\pi C} \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{Ra^2}{2C\pi^2} \quad (3.7)$$

6. Визначити критичний опір для кожного значення ємності як:

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C} = \frac{2\pi}{a} \quad (3.8)$$

7. Обчислити добротність контуру для різних значень опору  $R$  за формулою  $Q = \pi/\lambda$ . Побудувати графіки залежності добротності контуру  $Q$  від оберненого опору  $1/R$  для двох значень ємності в контурі.

8. Прологарифмуємо формулу (1.19):

$$\ln(Q) = -\ln(R_{\pi}) + \ln\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right),$$

де  $R_{\pi} = R + R_L$  - опір всього кола, тому необхідно враховувати опір котушки. Розрахувати величини  $\ln(Q)$  і  $\ln(R + R_L)$  для кожного значення  $R$ .

9. Побудувати графік залежності  $\ln Q = f(-\ln(R + R_L))$  для двох ємностей. Це пряма лінія виду  $y = ax + b$ , де  $a$  повинна дорівнювати 1. На листку паперу зошита в клітинку вибрати масштаб відповідних координатних осей так, щоб графік містив точку  $(0,0)$  і проставити експериментальні точки. За допомогою лінійки провести пряму лінію між точками так, щоб кількість точок по обидві сторони прямої лінії була по можливості однаковою.

10. Визначити нахил цієї прямої, як відношення:

$$\frac{\Delta \ln(Q)}{\Delta \ln(R + R_L)} = n,$$

де  $|n|$  теоретично повинно дорівнювати одиниці.

11. Переконатись в тому, що при дослідженні згасаючих коливань в нашій лабораторній роботі має місце випадок слабого згасання.

**Контрольні запитання до вивчення згасаючих коливань**

1. Які коливання називаються гармонічними?

2. Дати визначення амплітуди, фази, періоду, лінійної та циклічної частоти гармонічного коливання.

3. Коливання яких величин відбуваються в електричному коливальному контурі?

4. Написати диференціальне рівняння згасаючих коливань та його розв'язок.

5. Пояснити, чому вільні коливання в контурі загасають. Пояснити, як відбувається втрата енергії в контурі, яка була йому надана?

6. Пояснити, чому частота згасаючих коливань відрізняється від частоти гармонічних коливань.

7. Зобразити графік згасаючого коливання.

8. Що таке коефіцієнт згасання? Від яких параметрів контуру він залежить?

9. Дати визначення логарифмічного декременту згасання?

10. Дати визначення часу релаксації (часу згасання) згасаючих коливань. Від яких параметрів контуру залежить час релаксації?

11. Дати визначення добротності коливального контуру.

12. Записати формулу, яка зв'язує коефіцієнт згасання та логарифмічний декремент.

13. Який є зв'язок між логарифмічним декрементом згасання і кількістю коливань, які здійснює коливальна система за час релаксації?

14. При яких умовах згасаючі коливання переходять в аперіодичний процес?

15. Знайти зв'язок між добротністю та критичним опором контуру при слабкому згасанні.

16. Зобразити та пояснити схему для дослідження згасаючих коливань.

#### Приклад обробки результатів дослідження згасаючих коливань

Заповнюємо таблиці 1.1 і 1.2. Визначаємо логарифмічний декремент згасання (формули 1.14 для  $\lambda_1$  та 3.1 для  $\lambda_3$ ), його середнє значення та добротність (формула 1.16).

Будуємо графік залежності  $\lambda = f(R)$  для двох ємностей:  $C_1=25\text{пФ}$ ,  $C_2=55\text{пФ}$  (рис.3.4). Ми побудували графік  $\lambda = f(R)$  без врахування опору котушки. Тому графік має зсув на величину, яка залежить від опору котушки. Значить, опір котушки визначаємо як

$$R_L = b/a.$$

Визначаємо опір котушки як точку перетину лінії тренду з віссю  $R$ . Також можна скористатися математичною обробкою даних експерименту за методом

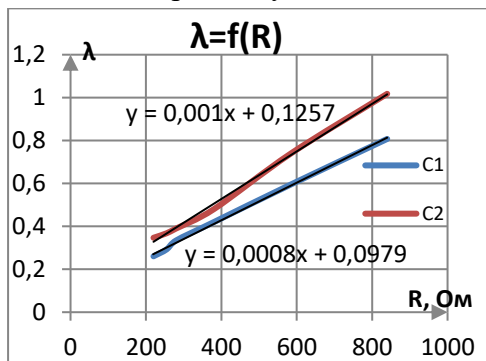


Рис. 3.4.

найменших квадратів, який приведений в [3], а програма окремо додається до інструкції.

Математична обробка результатів експерименту (таб.1.3) дає значення кутового коефіцієнта  $a$  залежності величини  $\lambda$  від  $R$  і параметра  $b$ . Тобто, для  $C_1$ :  $a = 0,000875 \text{ Ом}^{-1}$ , середня квадратична похибка  $\sigma_a = 1,59 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}^{-1}$ ;  $b=0,0783$  і  $\sigma_b=0,0035$ . Тоді  $R_L=b/a$  і  $R_{L1}=89,5 \text{ Ом}$ . Якщо прийняти середню квадратичну похибку за невизначеність типу

А, то можна оцінити невизначеність опору котушки за формулою:

$$U_A(R_L) = \sqrt{\left(\frac{1}{a} U_A(b)\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2} U_A(a)\right)^2}. \quad (3.9)$$

$$U_A(R_L) = 4,3 \text{ Ом.}$$

Для другого конденсатора  $C_2$  отримуємо  $R_{L2}=75,9$  Ом та невизначеність  $U_A(R_L) = 5,25$  Ом. Тоді середнє значення опору котушки  $\langle R_L \rangle = 82,7$  Ом, за невизначеність приймаємо більше з двох  $U_A(R_L) = 5,25$  Ом, розширена невизначеність опору котушки  $(R) = 2U_A(R_L) \approx 10,5$  Ом з ймовірністю довіри  $P=95\%$ . Відносна невизначеність  $R_L \delta_R = \frac{2U_A(R_L)}{R_L} = \left(\frac{10,5}{82,7}\right) \cdot 100\% \cong 13\%$ .

Визначаємо індуктивність котушки по формулі (3.5):

$$\text{для } C_1 - L = 0,32 \text{ мГн;}$$

$$\text{для } C_2 - L = 0,44 \text{ мГн.}$$

Також можемо оцінити невизначеність індуктивності:

$$U_A(L) = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{a^2} U_A(C)\right)^2 + \left(\frac{2c\pi^2}{a^3} U_A(a)\right)^2} \quad (3.10)$$

де  $U_A(C) = 10^{-12} / 2\sqrt{3}$  так як ємність задана з точністю до  $1\text{пФ}$ ,

що дорівнює  $10^{-12}\Phi$ , тоді отримаємо:

$$\text{для } C_1 - U_A(L) = 0,012 \text{ мГн;}$$

$$\text{для } C_2 - U_A(L) = 0,020 \text{ мГн.}$$

Визначаємо власні частоти двох контурів по формулі (3.6), отримаємо:

$$\text{для } C_1 - \omega_0 = 11,1 \cdot 10^6 \text{ рад/с;}$$

$$\text{для } C_2 - \omega_0 = 6,4 \cdot 10^6 \text{ рад/с.}$$

Визначаємо максимальне значення коефіцієнта згасання по формулі (3.7), маємо:

$$\text{для } C_1 - \beta = 1,2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{для } C_2 - \beta = 0,9 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Можемо порівняти отримані значення власної частоти і коефіцієнта згасання, видно, що  $\omega_0^2 > \beta^2$

Із параметра  $b$  також можемо визначити критичний опір для кожного значення ємності (1.19), (3.8):

$$\text{для } C_1 - R_{\text{кр}} = 7,2 \text{ кОм;}$$

$$\text{для } C_2 - R_{\text{кр}} = 5,7 \text{ кОм.}$$

Отримані значення критичного опору раз в 10 перевищують значення опорів в даній роботі, тому можемо вважати, що



в контурі мають місце слабкі згасання.

Будуємо графік залежності  $Q = f(1/R)$  для двох ємностей (рис.3.5).

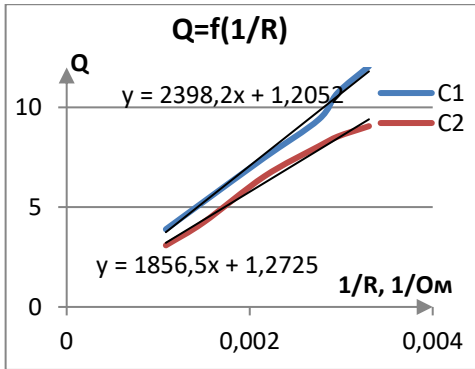


Рис. 3.5.

Будуємо графік залежності  $\ln(Q) = f(-\ln(R))$  для двох ємностей (рис.3.6).

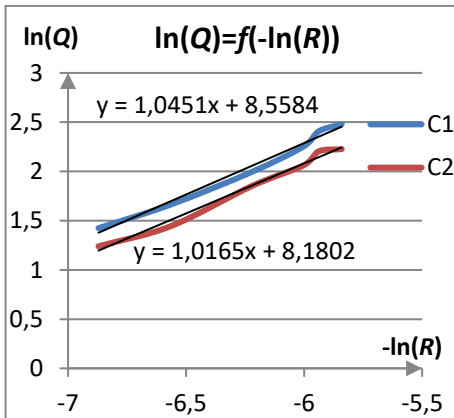


Рис. 3.6.

Математична обробка дає значення кутового коефіцієнта залежності величини  $\ln(Q)$  від  $-\ln(R)$ : для ємності  $C_1 - a = 1,0038$ , середня квадратична похибка  $\sigma_a = 0,025$ ; та для ємності  $C_2 - a = 0,997$ , середня квадратична похибка  $\sigma_a = 0,012$ . Середню квадратичну похибку  $\sigma_a$  приймаємо за невизначеність типу А. Тоді розширена невизначеність величини  $a$   $U(a) = 2\sigma_a \approx 0,05$  з ймовірністю довіри  $P=95\%$ . Відносна невизначеність  $a$   $\delta_a = \frac{2\sigma_a}{a} = \left(\frac{0,05}{1,038}\right) \cdot 100\% = 4,8\%$ . Таким чином, можемо вважати, що наш експеримент підтверджує обернено пропорційну залежність добротності від опору контуру для випадку слабого згасання.

Аналіз отриманих результатів (висновки):

1. Отриманий кутовий коефіцієнт залежності  $\ln(Q) = f(-\ln R)$  дорівнює  $a = 1,0038$ , що мало відрізняється від теоретичного значення 1 (див. формулу 1.19). Ця різниця складає

величину  $\Delta a = 0,0038$ . Тому відносна невизначеність  $\delta_a = (2 \cdot 0,0038 / 1) \cdot 100\% = 0,8\%$ , що вказує на дуже добре проведений експеримент, таким чином, можемо вважати, що в нашому експерименті формула (1.19) виконується на 99%.

2. Отримали досить великі відносні значення експериментальних невизначеностей опору котушки – 12,8%, але, з цих же даних, маємо відносну невизначеність її індуктивності – 10%.

3. Порівнюючи між собою значення власної частоти контуру та його коефіцієнт згасання, можна сказати, що умова (1.6) виконується, при цьому

$$\omega_0^2 \gg \beta^2.$$

#### **Додаток 1. Приклад розрахунків роботи за допомогою програми Excel**

Для розрахунків скористаємося ексель файлом «3-16 робоча прогр. мет. наймен. квадрат (10 точок)», який окремо додається до завдання. Його необхідно *завантажити*, відкрити, створити новий файл для

цієї роботи, для цього перейти на вкладку «файл», і натиснути кнопку «запам'ятати як», назву файлу обираємо таким чином: номер роботи і ваше прізвище, наприклад: «3-16. Левко».

1. Приступаємо до створення і одночасного заповнення двох таблиць 1.1 і 1.2.

До комірки T2 заносимо «№», нижче в комірки E3 і E4 вносимо числа 1 та 2, виділяємо ці комірки так щоб курсор став на нижній правий кут і сам курсор прийняв вигляд жирного знака «+» затискаємо ліву кнопку мишки і тягнемо вниз на 4 комірок, при цьому програма сама пронумерує клітинки в виділеній області.

Оскільки в даній роботі проводяться аналогічні виміри для двох різних значень ємності конденсатора  $C_1$  і  $C_2$  та шести різних значень опору резистора, то другу таблицю розміщуємо під першою через один вільний рядок, тому до комірок T10 і T11 заносимо числа 1 та 2 та по-

вторюємо дії описані в попередньому абзаці.

2. До наступного стовпчика заносимо значення опору резисторів, що підключаються до контуру: в комірку U2 заносимо літери «*Rm*, Ом» - символ опору та його розмірність, в наступні комірки цього стовпчика заносимо значення шести опорів з таблиці даних. Виділяємо ці комірки (U3-U8): натискаємо на комірку U3, затискаємо ліву кнопку миші, опускаємо курсор до останньої комірки U8, відпускаємо кнопку миші, натискаємо кнопку «копіювати», натискаємо на комірку U10, натискаємо кнопку «вставити», при цьому біля комірки спливає віконце «параметри вставлення», в якому слід відмітити першу іконку «вставити значення», в комірках з'являться такі ж числа як і вище в комірках стовпчика U.

3. Наступні три стовпчики міститимуть значення трьох амплітуд. До комірок V2, W2 та X2 заносимо літери «A1», «A2» та

«A3» відповідно. В наступні комірки кожного стовпчика вносимо значення амплітуд з таблиці даних: комірки V3 - V8, W3 - W8, X3 - X8 містять амплітуди для ємності  $C_1$ , а комірки V10 - V15, W10 - W15, X10 - X15 містять амплітуди для  $C_2$ .

4. В наступному стовпчику будуть значення логарифмічного декременту. До комірки Y2 заносимо літеру « $\lambda_1$ », а до комірки Y3 заносимо формулу:  $\lambda = \ln(A_1/A_2)$ , для цього виконуємо наступні дії: наводимо курсор на комірку Y3, натискаємо ліву кнопку миші, натискаємо знак дорівнює на клавіатурі «=», набираємо на клавіатурі «LN(» наводимо курсор на комірку зі амплітудою  $A_1$  - V3 і натискаємо ліву кнопку миші, на клавіатурі набираємо знак ділення «/», потім курсор на комірку з амплітудою  $A_2$  - W3 і натискаємо ліву кнопку миші, закриваючи дужку і кнопку «Enter». В рядку формул має бути: «=LN(V3/W3)» при цьому в комірці з'явиться

результат. Дублюємо формулу в наступні комірки цього стовпчика: для цього знову натискаємо на комірку Y3 курсор наводимо на нижній правий кут і сам курсор прийняв вигляд знака «+», затискаємо ліву кнопку мишки і тягнемо вниз до 16 рядка (W15), при цьому програма сама впише формулу в наступні комірки в виділеній області, і в них появиться результат. Слід зауважити, що дев'ятий рядок служить межею розділу двох таблиць і має бути порожнім, тому з комірки W9 треба все видалити.

5. Наступний стовпчик також буде містити значення логарифмічного декремента, але розрахованого по формулі (3.1). До комірки Z2 вносимо літеру «λ3», а до комірки Z3 заносимо формулу:  $\lambda = \ln(A1/A3)/2$ , в рядку формул має бути «=0,5\*LN(V3/X3)», не забуваємо натиснути кнопку «Enter» після запису формули в комірці, і дублюємо формулу в наступні комі-

рки цього стовпчика Z4 і т.д. так як описано в пункті 4.

6. В наступному стовпчику будуть середні значення логарифмічного декремента. В комірку AA2 записуємо літеру «<λ>», а до комірки Y3 заносимо формулу:  $\lambda = (\lambda1 + \lambda3)/2$ , в рядку формул має бути «=(Y3+Z3)/2», не забуваємо натиснути кнопку «Enter» після запису формули в комірці, і дублюємо формулу в наступні комірки цього стовпчика AA4 – AA15 так як описано в пункті 4.

7. Будуємо графіки: для цього натискаємо на комірку U3, затискаємо ліву кнопку миші, опускаємо курсор до останньої комірки U8, відпускаємо кнопку миші, натискаємо кнопку «копіювати», наводимо курсор на X1 (відповідна комірка B5) на виділеній області методу найменших квадратів, натискаємо на неї, і натискаємо кнопку «вставити», при цьому біля комірки спливає віконце «параметри вставлення», в якому слід відмі-

тити першу іконку під «вставити значення», в комірках з'являться такі ж числа як в комірках стовпчика U, ці ж значення необхідно записати до другого графіка (комірка B20) Так само потрібно перенести значення стовпчика AA3-AA8 до комірок Y графіка (відповідні комірки C5-C10), і значення комірок AA10 – AA15 до комірок Y другого графіка (відповідні комірки C20-C25).

8. Програма «метод найменших квадратів» визначає кутовий коефіцієнт  $a$  та точку перетину з віссю ординат  $b$  лінійної апроксимації:  $y = ax + b$  та їх середньо квадратичні похибки. Опір котушки визначаємо як

$$R_L = b/a.$$

В комірку T18 заносимо літери « $rL1$ , Ом» - символ опору котушки та його розмірність. До комірки U18 формулу  $b/a$ , в рядку формул має бути « $=F6/F5$ », не забуваємо натиснути кнопку «Enter» після запису формули в комірниці, аналогічно до комірки T19 заносимо літери

« $rL2$ , Ом», а до комірки U19 таку ж формулу, але дані будуть з другого графіка, в рядку формул має бути « $=F21/F20$ », не забуваємо про кнопку «Enter». В комірку T20 записуємо літери « $<rL>$ , Ом», а до комірки U20 формулу середнього, в рядку формул має бути « $=(U18+U19)/2$ ».

9. Визначаємо невизначеності опору котушки по формулі (3.9). До комірок W18, W19, W20 записуємо літери « $\sigma_{rL1}$ , Ом», « $\sigma_{rL2}$ , Ом» та « $<\sigma_{rL}>$ , Ом». До комірки X18 заносимо формулу (3.9), тоді в рядку формул будемо мати: « $=SQRT((F9/F5)^2+(F6*F8/F5^2)^2)$ », до комірки X19 записуємо таку ж формулу, але для даних з другого графіка, тоді в рядку формул буде: « $=SQRT((F24/F20)^2+(F21*F23/F20^2)^2)$ ». Для невизначеності середнього значення опору беремо більше та округлюємо його до двох значущих цифр і заносимо до комірки X20.

Визначаємо відносну невизначеність: до комірки W21 записуємо літери « $\delta_{rL}$ , %», до комірки X21 – формулу  $\sigma_{<rL>/<rL>$ , в рядку формул має бути « $=2*X20/U20*100$ », не забуваємо про кнопку «Enter».

10. В подальшому для визначення індуктивності та власної частоти контуру необхідні значення ємності конденсатора, тому до комірки T17 заносимо літери «C, Ф» - позначення ємності та її розмірності, а до комірок U17 та V17 - її значення: «25E-12» і «55E-12» (тільки на англійській!).

11. Визначаємо індуктивність котушки: до комірок T22, T23 і T24 записуємо літери «L1, Гн», «L2, Гн» та «<L>, Гн», в комірку U22 заносимо формулу (3.5), в рядку формул має бути « $=PI()^2/F5^2*U17$ », до комірки U23 заносимо таку саму формулу, але для другої ємності і дані беремо з другого графіка, тому в рядку формул має бути « $=PI()^2/F20^2*V17$ », в комірку

U24 заносимо формулу середнього, в рядку формул має бути « $=(U22+U23)/2$ », не забуваємо натиснути кнопку «Enter».

12. Визначаємо невизначеності індуктивності котушки по формулі (3.10). До комірок W22, W23, W24 записуємо літери « $\sigma_{L1}$ , Гн», « $\sigma_{L2}$ , Гн» та «< $\delta_L$ >, %». До комірок X22 та X23 заносимо формулу, тоді в рядку формул першої комірки: « $=SQRT((PI()^2/F5^2*X17)^2+(2*U17*PI()^2/F5^3*F8)^2)$ » та другої комірки « $=SQRT((PI()^2/F20^2*X17)^2+(2*V17*PI()^2/F20^3*F23)^2)$ ».

Відносну невизначеність середнього значення індуктивності визначаємо по більшому значенню невизначеності, яке округлюємо до двох значущих цифр, тоді в рядку формул буде: « $=2*X23/U24*100$ ».

13. Визначаємо критичний опір по формулі (3.8) для двох ємностей: до комірок T26 і T27 записуємо літери «Rkp1, Ом» і «Rkp2, Ом», до комірки U26 за-

носимо формулу , в рядку формул має бути « $=2*PI()/F5$ » і в U27 буде « $=2*PI()/F20$ ».

14. Визначаємо власну циклічну частоту контурів. До комірок T29 і T30 записуємо літери « $\omega_1$ , рад/с» і « $\omega_2$ , рад/с», до комірки U29 і U30 формулу (3.6), тоді в рядку формул буде « $=F5/PI()/U17$ » для  $C_1$  і « $=F20/PI()/V17$ » відповідно для  $C_2$ .

15. Визначаємо коефіцієнт згасання для обох контурів по найбільшому з опорів (800 Ом) по формулі (1.2). в комірки T32 та T33 записуємо літеру « $\beta_1$ ,  $c^{-1}$ » та « $\beta_2$ ,  $c^{-1}$ », в комірки U32 і U33 - формулу, тоді в рядку формул буде: « $=800/(2*U22)$ » та « $=800/(2*U23)$ ».

16. Наступний стовпчик АВ міститиме значення добротності: до комірки АВ2 записуємо літеру « $Q$ », в комірку АВ3 записуємо формулу  $\pi/\lambda$ , в рядку формул буде « $=PI()/AA3$ », не забуваємо натиснути кнопку «Enter» після запису формули в комірку, і дублюємо формулу в

наступні комірки цього стовпчика до комірки AA15 так як описано в пункті 4.

17. В наступному стовпчику будуть значення логарифму добротності: до комірки AC2 заносимо літери « $\ln(Q)$ », а до комірки AC3 заносимо формулу:  $\ln(Q)$ , в рядку формул буде « $=LN(AB3)$ », не забуваємо про кнопку «Enter» і дублюємо формулу в наступні комірки цього стовпчика.

18. До комірок стовпчика AD заносимо значення опору коливального контуру: в комірку AD2 записуємо літеру « $R=R_m+rL$ », а до комірки AD 3 заносимо цю формулу, тоді в рядку формул буде « $=U3+82,7$ », і дублюємо цю формулу в наступні комірки цього стовпчика.

19. Останній стовпчик таблиці містить значення  $-\ln R$ . в комірку AE2 заносимо літери « $-\ln R$ », а до комірки AE3 заносимо відповідну формулу, тоді в командному рядку має бути « $=-LN(AD3)$ » (перед логарифмом

знак «мінус»), не забуваємо натиснути кнопку «Enter», і дублюємо формулу в наступні комірки цього стовпчика так як описано в пункті 4.

20. Будуємо графіки залежності  $\ln Q$  від  $-\ln R$  так як описано в пункті 7 (стор.44).

21. Дана програма визначає кутові коефіцієнти  $a$  та їх середньо квадратичні похибки лінійної залежності  $\ln Q = f(-\ln R)$ . Їх приймаємо за невизначеність типу А. Тоді розширена невизначеність величини  $a$   $U(a) = 2\sigma_a \approx 0,05$  з ймовірністю довіри  $P=95\%$ . Відносна невизначеність  $a$   $\delta_a = 2\sigma_a/a = (0,05/1,004) \cdot 100\% \approx 5\%$ .

#### 4. Дослідження вимушених коливань та визначення характеристик коливального контуру із резонансних кривих

##### Опис установки й методу вимірювань

Для вивчення вимушених коливань у контурі використовується установка, зображена на

рис.4.1, а електрична схема приведена на рис.4.2.



Рис.4.1.

За допомогою цієї установки можна вивчити залежність напруги на конденсаторі  $C$  (перемикач  $K1$  у положенні 1) або на опорах  $R_1-R_3$  (перемикач  $K1$  у положенні 2) від частоти  $\omega$  зовнішнього генератора. Вимірювання напруги діючої здійснюється за допомогою цифрового вольтметра  $V$  (рис.4.1). Активний опір контуру можна змінювати за допомогою резисто-



рів  $R_1$ - $R_3$  та перемикачів  $K_2$  –  $K_4$ .



Рис.4.2.

### Порядок виконання роботи

1. Увімкнути звуковий генератор в мережу. Встановити на виході генератора напругу 10 В.

2. Установити перемикач  $K_1$  в положення 1,  $K_2$  у положення 1,  $K_3$  у положення 2 і  $K_4$

у положення 2 (це відповідає шунтуванню опорів  $R_2$ ,  $R_3$ ) При цьому в контур буде увімкнений опір  $R_1$ ). Змінюючи частоту генератора  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ , знайти резонансну частоту  $\nu_p$ , при якій напруга на конденсаторі буде максимальною  $U_{Cm} = U_{Cm \text{ рез}}$ . Значення  $\nu_p$  та  $U_{Cm}$  занести до табл.2.1.

3. Зменшуючи й збільшуючи частоту генератора в обидва боки від резонансної частоти (узяти 8-10 значень), виміряти амплітуди напруги  $U_{Cm}$ . Значення  $\nu$  і  $U_{Cm}$  занести до табл. 2.1.

4. Перевести перемикач  $K_1$  у положення 2. (При цьому вольтметр  $V$  буде показувати напругу на опорі контура). Змінюючи частоту генератора, знайти резонансну частоту  $\nu_0 =$

$= \frac{\omega_0}{2\pi}$  при якій напруга на резисторі  $R_1$  буде максимальною. Виміряти амплітуду напруги  $U_{max}^{R_1}$  на резисторі  $R_1$  при резонансній частоті  $\nu_0$ . Значення  $R_1$ ,  $\nu_0$  та  $U_{R_1}^{max}$  занести до табл. 2.

5. Зменшуючи і збільшуючи частоту генератора в обидва боки від резонансної частоти (взяти 8-10 значень частоти), обчислити амплітуди напруги  $U_m^{R_1}$ . Значення  $\nu$  та  $U_m^{R_1}$  занести до табл.2.2. Для кожного значення  $U_m^{R_1}$  знайти амплітуду струму  $I_m = U_m^{R_1}/R_1$  і занести результат у табл. 2.1.

6. Виміри п.п. 2 – 5 повторити при опорі контуру  $R_2$  та  $R_3$ . Вибір опорів здійснити за допомогою перемикачів К2 – К4.

7. УВАГА. Для економії часу раціональніше зафіксувати певну

частоту і проводити виміри з різними опорами контуру. Потім змінити значення частоти і знову провести виміри для різних опорів. Такі виміри провести для дев'яти значень частоти по чотири значення по обидва боки від резонансної частоти.

#### Обробка результатів вимірювань

1. За даними табл.2.1 побудувати резонансні криві  $U_m^R = f(\nu)$  для різних значень  $R$ .

2. Визначити добротність контуру за формулою (2.26) для різних значень  $R$ . За отриманими даними побудувати графік  $Q = f(1/R)$ , відкладаючи по осі ординат добротність  $Q$ , а по осі абсцис – обернений опір контуру  $1/R$ .

3. За даними табл.2.2 побудувати резонансні криві  $I_m = f(\nu)$  для різних значень  $R$ .

4. Із графіків п.3 визначити значення ширини  $\Delta\nu$  резонансних кривих струму та обчи-

слити добротність контуру  $Q$  для різних значень  $R$  за формулою (2.27). Отримані значення  $Q$  нанести на графік п.2 і порівняти результати, отримані в п.2 і п.3.

**Приклад обробки результатів експерименту** (всі фізичні величини на графіках приведені в одиницях системи СІ)

1. Будуємо резонансні криві  $U_m^R = f(\nu)$  для різних значень  $R$  за даними табл.2.1 (рис.4.3).

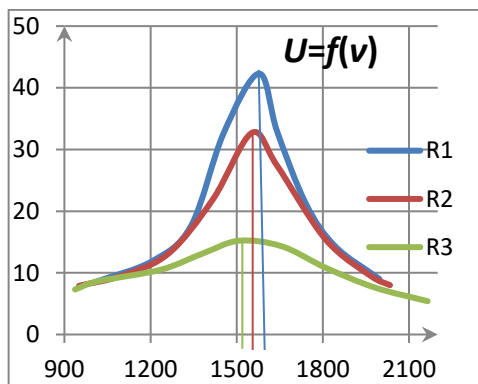


Рис.4.3.

2. Визначаємо добротність контуру для різних значень

$R$ , величину  $1/R$ , обернену до опору, та будуюмо графік:  $Q = f(1/R)$  (рис.4.4).

3. Розраховуємо значення сили струму за законом Ома для трьох значень опору:  $I = \frac{U}{R}$ .

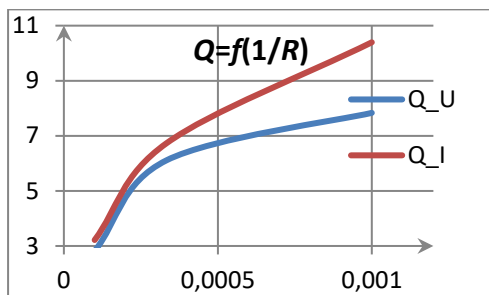


Рис.4.4.

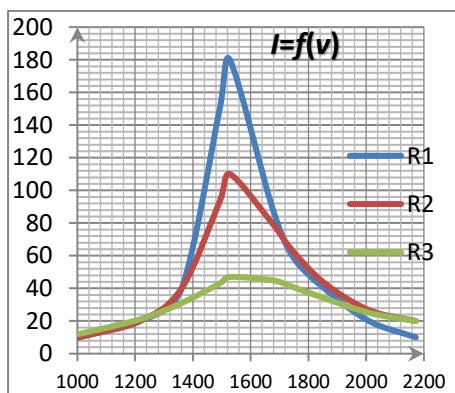


Рис.4.5.

4. Будуємо резонансні криві за даними табл.2.2

$$I_m^R = f(v) \text{ (рис.4.5).}$$

5. Для кожного значення опору  $R$  визначаємо максимальне значення сили струму, ділимо його на  $\sqrt{2}$ , проводимо горизонтальну пряму на цьому рівні, визначаємо точки перетину її з резонансною кривою, з цих точок опускаємо перпендикуляри до вісі абсцис, визначаємо значення частот рис.4.5 (для цього варто встановити масштаб 5 – 10 Гц/поділку, див. табл.2.4).

6. Визначаємо добротність для кожного опору та відкладаємо відповідні значення на графіку рис. 4.4 (див.табл.2.3).

7. Визначаємо коефіцієнти згасання  $\beta$  з формули (2.23)

$$\beta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{U_{рез}}^2)/2},$$

де  $\omega_0$  визначаємо з таблиці 2.2 як резонансну частоту, яка є однаковою для всіх опорів, а

$\omega_{U_{рез}}$  – з таблиці 2.1 як частоти з найбільшою амплітудою коливань напруги на конденсаторі, які залежать від опору.

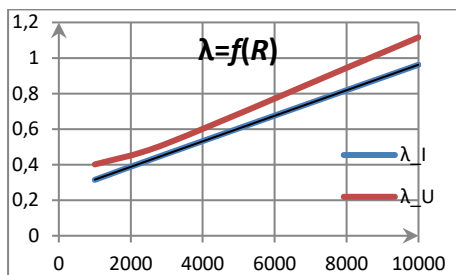


Рис.4.6.

8. Визначаємо логарифмічний декремент згасання  $\lambda$  та будуємо графік залежності  $\lambda$  від опору (рис. 4.6).

Аналіз отриманих результатів (висновки):

1. Резонансна частота  $\omega_{U_{рез}}$  залежить від опору  $R$ : зі збільшенням опору частота  $\omega_{U_{рез}}$  зменшується, що підтверджує теоретичну формулу (2.23) (табл.2.3).

2. Резонансна частота струму  $\omega_{I_{рез}}$  не залежить від

опору і дорівнює власній частоті контура  $\omega_0$  (формула 2.24, табл.2.4).

3. Так як отримані значення коефіцієнта згасання  $\beta$ , що визначаються за резонансними частотами  $\omega_{U_{рез}}$  та  $\omega_{I_{рез}}$  задовільняють умові  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , то оправдані формули для визначення добротності  $Q$  (2.26) та (2.27) і логарифмічного декременту  $\lambda$  (1.19).

4. Лінійна залежність логарифмічного декременту від опору дуже добре підтверджується графіками на рис. 4.6.

5. Залежність добротності від оберненого значення опору в межах експериментальних невизначеностей підтверджується графіками на рис. 4.4.

#### Контрольні питання

1. Які коливання називають вимушеними?

2. Записати диференційне рівняння вимушених коливань у послідовному контурі. Який вигляд має загальний розв'язок цього рівняння?

3. Що таке стаціонарні вимушені коливання та який вигляд має їх рівняння?

4. За яким законом змінюється заряд та напруга на обкладинках конденсатора при вимушених коливаннях?

5. За яким законом змінюється струм в коливальному контурі при вимушених коливаннях?

6. Дати визначення явища резонансу.

7. Записати формули для амплітудної характеристики напруги на конденсаторі контуру та резонансної частоти напруги.

8. Записати формули для амплітудної характеристики струму в контурі та резонансної частоти струму.

9. В чому різниця між резонансом напруги на конденсаторі і резонансом струму при

вимушених коливаннях у послідовному контурі.

10. Який вигляд мають резонансні криві напруги на конденсаторі та струму в контурі при різних значеннях опору  $R$ ?

11. Дати визначення добротності коливального контуру. Який його фізичний зміст?

12. Як можна визначити добротність коливального контуру за параметрами резонансної кривої напруги на конденсаторі у випадку слабого згасання?

13. Як можна визначити добротність за параметрами резонансної кривої струму в контурі?

14. Що таке ширина резонансної кривої? Чому для визначення ширини резонансної кривої потрібно для нормуючих резонансних кривих  $I_m/I_m \text{ рез}$  для сили струму в контурі вибрати частоти, для яких це відношення дорівнює  $1/\sqrt{2} \cong 0,7$ .

15. Який вигляд має векторна діаграма напруг при ви-

мущених коливаннях у послідовному контурі?

16. Яке практичне застосування мають вимушені коливання?

17. Як використовуються вимушені коливання в класичному ламповому генераторі?

#### **Додаток 2. Приклад розрахунків даних роботи за допомогою програми Excel**

Для розрахунків можемо скористатися ексель файлом «Робоча прогр. мет. наймен. квадрат», який окремо додається до завдання, його необхідно *завантажити*, відкрити, створити новий файл для цієї роботи, для цього перейти на вкладку «файл», і натиснути кнопку «запам'ятати як», або відкрити новий файл. Назву файлу обираємо таким чином: номер роботи і ваше прізвище, наприклад: «3-17. Левко».

1. Приступаємо до створення і одночасного заповнення таблиці 2.1.

Якщо скористалися наданим файлом, то переходимо на другу сторінку, для цього в нижньому лівому кутку натискаємо кнопку «Аркуш 2».

Стовпчики А,С та Е міститимуть значення частоти, а стовпчики В,Д,Ф – значення напруги на конденсаторі для різних значень опорів R1, R2, R3. До комірок А3, С3 та Е3 заносимо літери « $\nu$ , Гц» – символ частоти та її розмірність, в комірки А4 – А12, С4 – С12 та Е4 – Е12 заносимо значення частоти з таблиці даних. До комірок В3, Д3, Ф3 заносимо літери « $U_c$ , В» - символ напруги та її розмірність, в комірки В4 – В12, Д4 – Д12 та Ф4 – Ф12 заносимо відповідні значення напруги з таблиці даних.

Слід зауважити, що два перші стовпчики містять дані, які отримані коли опір R1 був включений до кола, а два наступні – R2. Тому об'єднуємо комірки А2 і В2, для цього їх слід виділити та натиснути кнопку

«Об'єднати та розташувати в центрі», потім заносимо текст: «R1=1кОм», об'єднуємо комірки С2 і Д2 та заносимо текст: «R2=3кОм», об'єднуємо комірки Е2 і Ф2 та заносимо текст: «R3=10кОм».

До комірки А1 вписуємо назву таблиці: « таблиця 2.1».

2. Приступаємо до побудови графіків  $U=f(\nu)$ .

Спочатку побудуємо графік для R1. Виділяємо комірки А4 – А12 та В4 – В12, для цього наводимо курсор на комірку А4, затискуємо ліву кнопку миші, зміщуємо курсор на одну комірку вправо та вниз до комірки В12, відпускаємо ліву кнопку миші, натискаємо вгорі кнопки «Вставлення», потім – діаграма «точкова», при цьому появляється віконце з п'ятьма діаграмами і вибрати – «точкова діаграма із гладкими лініями» (при наведенні курсора на кожну з іконок з'являється їхня назва). З'явиться графік на вільних комірках посередині екрану, його

варто перенести на комірки A14 – A27 та внести його назву. Для цього натискаємо вгорі кнопку «конструктор», з'являються одинадцять макетів діаграм, для нашого графіка найкраще вибрати перший або восьмий макет. Замість слів «Назва діаграми» пишемо « $U=f(v)$ », замість «Ряд 1» – «R1». Щоб перенести графік потрібно навести курсор на вільне місце графіку, при цьому він прийме вигляд перехрещених відрізків зі стрілочками на кінцях та появиться віконце з написом «область діаграми», затиснути ліву кнопку миші та встановити на обране місце.

Таким же чином будуюмо графік для R2, тільки виділяємо комірки C4 – C12 та D4 – D12, графік переносимо на комірки A29 – A42 та змінюємо слово «Ряд 1» на «R2».

По такому же алгоритму будуюмо графік для R3, тільки виділяємо комірки E4 – E12 та F4 – F12, графік переносимо на

комірки I14 – I27 і змінюємо слово «Ряд 1» на «R3».

3. Побудуємо три резонансні криві на одному графіку. Спочатку побудуємо графік для R1, як вказано в пункті 2, вибираємо перший макет, змінюємо слово «Ряд 1» на «R1», переносимо його на вільні комірки I29 – I42.

Щоб додати другу криву треба навести курсор на графік, при цьому курсор прийме вигляд перехрещених відрізків зі стрілочками на кінцях та появиться віконце з написом «область побудови», натиснути праву кнопку миші, в спливаючому віконечку натиснути кнопку «вибрати дані», появиться нове віконце, в якому слід натиснути кнопку «дати», з'явиться ще одне віконце, в якому маємо вказати ім'я ряду – «R2»; значення ряду X: наводимо курсор на другу комірку, натискаємо на неї, потім натискаємо на першу комірку з даними – C4, затискуємо ліву кнопку



миші, зміщуємо курсор вниз до комірки C12, відпускаємо ліву кнопку миші; тепер необхідно записати значення ряду Y: наводимо курсор на нижню комірку, натискаємо на неї та видаляємо все що там є, а саме: «={1}», потім натискаємо на першу комірку з даними – D4, затискуємо ліву кнопку миші, зміщуємо курсор вниз до комірки D12, відпускаємо ліву кнопку миші; та натиснути кнопку «ОК».

Для побудови третьої кривої знову натискаємо кнопку «додати» та виконати дії, що вказані в попередньому абзаці, але ім'я ряду буде «R3», дані для ряду X будуть в комірках: E4 – E12, а для ряду Y - в комірках: F4 – F12.

Тепер змінимо масштаб вісі X. Наводимо курсор на будь яке число на осі X, натискаємо праву кнопку миші, з'являється віконце, в якому слід натиснути кнопку «Формат осі», з'являється ще одне віконце, в якому можемо змінити налаш-

тування «автоматично» на «фіксовано»: вибираємо «мінімальне значення», ставимо прапорець біля «фіксовано» та в комірку записуємо найменше округлене значення частоти з таблиці даних (наприклад 900); вибираємо «максимальне значення», ставимо прапорець біля «фіксовано» та в комірку записуємо найбільше округлене значення частоти з таблиці даних (наприклад 2200); вибираємо «ціна основних поділок», ставимо прапорець біля «фіксовано» та в комірку записуємо бажану величину (наприклад 100).

Також можемо змінити розміри графіка; для цього натискаємо на графік, навколо нього з'являється подвійна рамка, яка має вісім активних точок: по кутах і в центрі сторін. Якщо треба збільшити тільки по горизонталі, то наводимо курсор на середину лівої сторони подвійної рамки (або правої), курсор приймає вигляд горизонтального відрізка зі стрілочками, зати-

скаємо ліву кнопку миші, курсор стає жирним хрестиком, і розтягуємо графік на 3-6 комірок основного поля (або стискаємо). Таким же чином можемо змінювати розмір по висоті, а якщо потягнути за кут, то можемо одночасно змінювати обидва розміри графіка.

4. Для обчислення добротності та побудови ще двох графіків створимо ще одну таблицю 2.3.

До комірки Н1 впишемо назву таблиці: «таблиця 2.3».

До комірок Н2 та Н3 занесемо дані: напруга генератора - « $U_0=5,4В$ » та ємність конденсатора - « $C=2,95 \cdot 10^{-9}Ф$ ».

До комірок Н4, Н5 і Н6 заносимо літери «R1, Ом», «R2, Ом», «R3, Ом» - позначення опорів та його розмірність, а до комірок І4, І5, І6 – відповідні значення опорів з таблиці даних. В наступному стовпчику будуть величини, що є оберненими до опорів, тому до комірки J3 запишемо літери « $1/R, Ом^{-1}$ », а до

наступних комірок – формулу, тоді в комірці J4 в рядку формул буде: « $=1/I4$ », яку слід продублювати до наступних комірок цього стовпчика. Для цього натискаємо на комірку з формулою, наводимо курсор на правий нижній кут комірки, при цьому сам курсор прийме вигляд жирного перехрестя, натискаємо і утримуємо ліву кнопку миші та тягнемо курсор вниз (або в сторону) на необхідну кількість комірок.

До комірки К3 заносимо літери «Q\_U» - позначення добротності, яку визначаємо по формулі (2.26)., а в комірку К4 записуємо відповідну формулу, тоді в рядку формул буде: « $=MAX(B4:B12)/5,4$ » для першого опору, відповідно для другого та третього опорів: « $=MAX(D4:D12)/5,4$ » та « $=MAX(F4:F12)/5,4$ ».

В комірку L3 заносимо літери «Q\_I» - позначення добротності, яку будемо визначати по формулі (2.27), для цього необ-

хідно побудувати резонансні криві: залежності струму контуру від частоти.

5. Переходимо на наступну сторінку, для цього слід в нижньому лівому кутку натиснути кнопку «Аркуш 2», або «Аркуш 3» та приступаємо до побудови таблиці 2.2.

До комірки A1 заносимо назву таблиці: «Таблиця 2.2».

До комірок A3, A6, A9 заносимо літери: «R1», «R2», «R3» - позначення опорів.

До комірки B2 заносимо літери: «v, Гц» - позначення частоти та її розмірність, а до решти комірок цього ряду (C2 – K2) – значення частот з таблиці даних.

В комірки B3, B6, B9 записуємо літери «U, В» - позначення напруги на відповідному опорі та її розмірність, а до решти комірок ряду (C3 – K3), (C6 – K6), (C9 – K9) – значення напруги з таблиці даних для першого, другого та третього опору відповідно.

До комірок B4, B7, B10 заносимо літери «I, А» - позначення сили струму та її розмірність, а до комірки C4 вносимо формулу:  $U/R1$ , тоді в рядку формул буде: «=C3/1000», яку слід продублювати до решти комірок цього ряду (C4 – K4). До комірки C7 записуємо формулу «=C6/3000» та дублюємо її до наступних комірок цього ряду (C7 – K7), а до комірки C10 - «=C9/10000» та дублюємо її до решти комірок цього ряду (C10 – K10).

6. Отримані значення сили струму дуже малі, тому для побудови графіків доцільно їх збільшити в однакове число раз, в даному випадку 100000.

Будуємо ще одну таблицю. До комірки B12 заносимо літеру «X», а до решти комірок цього ряду значення комірок C2 – K2, для цього треба виділити комірки C2 – K2, натиснути кнопку «копіювати», потім виділити комірки C12 – K12 і натиснути кнопку «вставити».

До комірок B13, B14, B15 заносимо літери «R1», «R2», «R3», а до комірки C13 - формулу: «=C4\*100000», яку слід продублювати до решти комірок цього ряду (C13 – K13), відповідно до комірок C14 та C15 заносимо формули: «=C7\*100000» та «=C10\*100000», які також дублюємо до решти комірок ряду.

7. Будуємо графік з трьома кривими (див. пункт 2 і 3), де значення осі X будуть в комірках C12 – K12, значення аргументу - в комірках C13 – K13 для R1, C13 – K14 для R2, C15 – K15 для R3.

Збільшуємо графік на весь екран, змінюємо параметри осей, для цього наводимо курсор на графік, натискаємо праву кнопку миші, натискаємо кнопку «формат осі», з'являється нове вікно, в якому змінюємо параметри осі X: «мінімальне значення» встановлюємо прапорець «фіксовано» та записуємо найменше округлене значення

частоти в віконце (1000); «максимальне значення» - прапорець «фіксовано», заносимо найбільше округлене значення частоти (2200); «ціна основних поділок» - прапорець «фіксовано», в віконце записуємо 50; «ціна проміжних поділок» - прапорець «фіксовано», до віконця записуємо число 5; зліва натискаємо кнопку «тип лінії», натискаємо на віконце справа слів «тип закінчення», та натискаємо на стрілочку, у віконечку нижче можемо її збільшити.

Щоб змінити параметри осі Y необхідно навести курсор на любе число цієї осі, натиснути праву кнопку миші, в віконечку, що з'явилося, натиснути кнопку «формат осі», з'явиться ще одне віконце, в якому змінюємо параметри осі Y: «ціна основних поділок» встановлюємо прапорець «фіксовано», в віконце записуємо число 10; «ціна проміжних поділок» - прапорець «фіксовано», до віконця – число 1, зліва натискаємо кнопку «тип

лінії», вибираємо стрілочку на закінчення лінії та її розмір (такі ж самі як для осі X).

8. Для визначення добротності по резонансним кривим необхідно провести ряд обчислень та побудов.

До комірок A17, A18, A19 записуємо літери: «R1», «R2», «R3», до комірки B16: – « $I_{\max}/\sqrt{2}$ », а до комірки B17 – формулу «=MAX(C13:L13)/SQRT(2)», яку дублюємо до комірок B18 та B19.

До комірок C16, D16 та E16 заносимо літери «v1, Гц», «v2, Гц» та «Δv, Гц» - позначення та розмірність частот, що відповідають ширині резонансної кривої.

9. Тепер потрібно на графіку провести горизонтальну пряму на рівні  $I_{\max}/\sqrt{2}$  (наприклад 127 для «R1»), для цього натискаємо послідовно кнопки вгорі: «вставлення», «фігури», «лінія», та натискаємо на вільному місці на графіку,

з'являється відрізок прямої під кутом  $\pi/4$  з двома кільцями на кінцях. Одночасно з'являються засоби креслення, де можна змінити колір цієї лінії (я вибрала зелений для синьої основної кривої), наводимо курсор на одне з кілець, курсор при цьому змінює свою форму, натискаємо та встановлюємо на число 127 на осі Y, переводимо курсор на друге кільце, натискаємо та тягнемо його так, щоб лінія стала горизонтальною і перетинала резонансну криву в двох точках.

Добавляємо ще одну лінію як описано в попередньому абзаці, але тепер будемо її встановлювати вертикально: натискаємо на одне з кілець, при цьому курсор приймає вигляд перехрестя і встановлюємо його в першу точку перетину горизонтальної прямої з резонансною кривою, переводимо курсор на друге кільце, натискаємо та тягнемо його так, щоб лінія стала вертикальною і перетнула вісь X. Лінія проходить між проміж-

ними лініями сітки 1465 та 1470, тому беремо ціле число 1468. Таким же чином будуємо другу вертикальну пряму, що проходить через другу точку перетину горизонтальної прямої з резонансною кривою та отримуємо друге число 1625. Отримані числа заносимо до комірок C17 та D17, а до комірки E17 - формулу «=D17-C17», яку дублюємо до комірок E18 та E19.

10. Повторюємо дії описані в пункті 9 для визначення ширини резонансних кривих для інших опорів R2 та R3 (див. таблиця 2.4).

**Зауваження:** всі лінії вставлення при зміщенні графіка чи зміні його розмірів залишатимуться на місці, оскільки прив'язані не до графіка, а до комірок, тому всі зміни графіка потрібно вносити до побудови ліній.

11. До комірки F16 заносимо літеру «Q», а до комірки F17 – формулу: «=1568/E17», яку дублюємо до комірок F18 і F19. Число 1568 – це резонансна

частота, яку визначаємо за таблицею даних 2.2.

12. Переносимо отримані значення добротності до таблиці 2.3. Переходимо на попередню сторінку (вниз, зліва, «Аркуш 1»), до комірки L4 записуємо знак «=>», потім переходимо до наступної сторінки і натискаємо на комірку F17, в рядку формул має бути: «=Аркуш2!\$F\$17», цю формулу дублюємо до наступних комірок L5 і L6.

13. Із формули (2.23)  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  можемо знайти коефіцієнт згасання

$$\beta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)/2}$$

В комірку H8 записуємо літери « $\omega$ , рад/с» - позначення власної частоти та її розмірність, а до комірки I8 – формулу: «=2\*PI()\*1568», де число 1568 - це резонансна частота, яку визначаємо за таблицею даних 2.2.

До комірки M3 заносимо літеру « $\beta$ , с<sup>-1</sup>» - позначення коефіцієнта згасання. До комірки

М4 записуємо формулу: «=SQRT((I8^2-(2\*PI()\*A8)^2)/2)», до комірки М5 – формулу: «=SQRT((I8^2-(2\*PI()\*C8)^2)/2)», до комірки М6 – формулу: «=SQRT((I8^2-(2\*PI()\*E8)^2)/2)».

14. До комірок N3 та O3 вносимо літери « $\lambda_U$ » та « $\lambda_I$ » - позначення логарифмічного декремента згасання, визначених з відповідних значень добротності. В комірку N4 записуємо формулу «=PI()/K4», яку дублюємо до наступних комірок N5 та N6, а потім до комірок O4, O5, O6.

15. Будуємо графіки залежності добротності від  $1/R$  та логарифмічного декремента  $\lambda$  від опору  $R$  так як описано в пунктах 2 та 3 (див таблиця 2.3).

### Література

1.Скіцько І.Ф., Скіцько О.І. Фізика (Фізика для інженерів): Підручник /: – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017.—513с. - Доступ:

<http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19035>.

2.Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Електрика і магнетизм. Том 2, §12.1-12.5. - К: Техніка, 1999р., 452с.

3.Скіцько І.Ф., Скіцько О.І. Обробка результатів фізичних вимірювань. [Електронний ресурс]: навч. посіб./ КПІ ім. Ігоря Сікорського/: –Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 88 с. - Доступ:

<http://ela.kpi.ua/handle/123456789/25320>.

Таблица 1.1 (для  $C_1$ )

№	$R_m$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\lambda_1$	$\lambda_3$	$\langle \lambda \rangle$	$Q_{\text{эксп}}$	$\ln(Q_{\text{эксп}})$	$R=R_m+R_L$	$-\ln R$
1											
2											
3											
4											
5											
6											

Таблица 1.2 (для  $C_2$ )

№	$R_m$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\lambda_1$	$\lambda_3$	$\langle \lambda \rangle$	$Q_{\text{эксп}}$	$\ln(Q_{\text{эксп}})$	$R=R_m+R_L$	$-\ln R$
1											
2											
3											
4											
5											
6											



# Таблиця 1.3

3-16 мет. наймен. квадрат (10точок)

### Метод найменших квадратів

Дозволяє отримати рівняння прямої на основі аналізу отриманих експериментальних точок

Координати експ. точок:		Коефіцієнти рівняння прямої $y=ax+b$		Коеф. рівняння прямої (інший спосіб)	
X	Y	a	b	a	b
1	220	0,0008752 (4.1)	0,0008752 (4.1)	0,000875 (4.4)	0,000875 (4.4)
2	255	0,0782974 (4.2)	0,0782974 (4.2)	0,078297 (4.5)	0,078297 (4.5)
3	280	Середній квадрат: похибки в і b		Квадрат: відхилення точок від	
4	380	$\sigma_a = 1,594E-05$ (4.6)	$\sigma_b = 0,0035161$ (4.7)	$S = 0,070564$ (4.8)	$S_y(x,y) = 0,028848$ (4.9)
5	585				
6	840				

Координати експ. точок:		Коефіцієнти рівняння прямої $y=ax+b$		Коеф. рівняння прямої (інший спосіб)	
X	Y	a	b	a	b
1	220	0,0011085 (4.1)	0,0011085 (4.1)	0,001108 (4.4)	0,001108 (4.4)
2	255	0,0841841 (4.2)	0,0841841 (4.2)	0,084184 (4.5)	0,084184 (4.5)
3	280	Середній квадрат: похибки в і b		Квадрат: відхилення точок від	
4	380	$\sigma_a = 2,496E-05$ (4.6)	$\sigma_b = 0,0055038$ (4.7)	$S = 0,076731$ (4.8)	$S_y(x,y) = 0,031325$ (4.9)
5	585				
6	840				

№	Rm	A1	A2	A3	λ1	λ3	<λ>	Qексп.	In(Qексп)	R=Rm*λ	~InR
1	220	17,6	13,6	10,4	0,2578	0,2630	0,2604	12,0627	2,4901	302,70	-5,7128
2	255	17,6	13	10	0,3029	0,2827	0,2928	10,7294	2,3730	337,70	-5,8222
3	280	17,4	12,4	9	0,3388	0,3296	0,3342	9,4004	2,2408	362,70	-5,8936
4	380	16	10,6	6,8	0,4117	0,4278	0,4198	7,4838	2,0127	462,70	-6,1371
5	585	13,8	7,6	4,2	0,5965	0,5948	0,5957	5,2742	1,6628	667,70	-6,5038
6	840	11,8	5	2,6	0,8587	0,7563	0,8075	3,8906	1,3586	922,70	-6,8273

1	220	13,4	9,4	6,8	0,3545	0,3392	0,3469	9,0574	2,2036	302,70	-5,7128
2	255	12,4	8,4	6,2	0,3895	0,3466	0,3680	8,5365	2,1444	337,70	-5,8222
3	280	12	8,2	5,4	0,3808	0,3993	0,3900	8,0551	2,0863	362,70	-5,8936
4	380	10,2	6,4	3,8	0,4661	0,4937	0,4799	6,5465	1,8789	462,70	-6,1371
5	585	8,8	4,2	2	0,7397	0,7408	0,7402	4,2440	1,4455	667,70	-6,5038
6	840	7,4	2,4	1,2	1,1260	0,9096	1,0178	3,0867	1,1271	922,70	-6,8273

C, Ф	2,5E-11	5,5E-11	σ_C	2,9E-13
r1, Ом	89,459879	σ_r1, Ом	4,3354	
r1, Ом	75,945592	σ_r1, Ом	5,2514	
<r1>, Ом	82,702735	σ_r1, Ом	5,3	
δ_r1, %			12,82	
l1, Гн	0,0003221	σ_l1, Гн	1,2E-05	
l2, Гн	0,0004418	σ_l2, Гн	2,0E-05	
<l>, Гн	0,0003819	δ_L, %	10,49	
Rxp1, Ом	7178,9475			
Rxp2, Ом	5668,2968			
ω01, рад/с	1,11E+07			
ω02, рад/с	6,42E+06			
β1, с <sup>-1</sup>	1,24E+06			



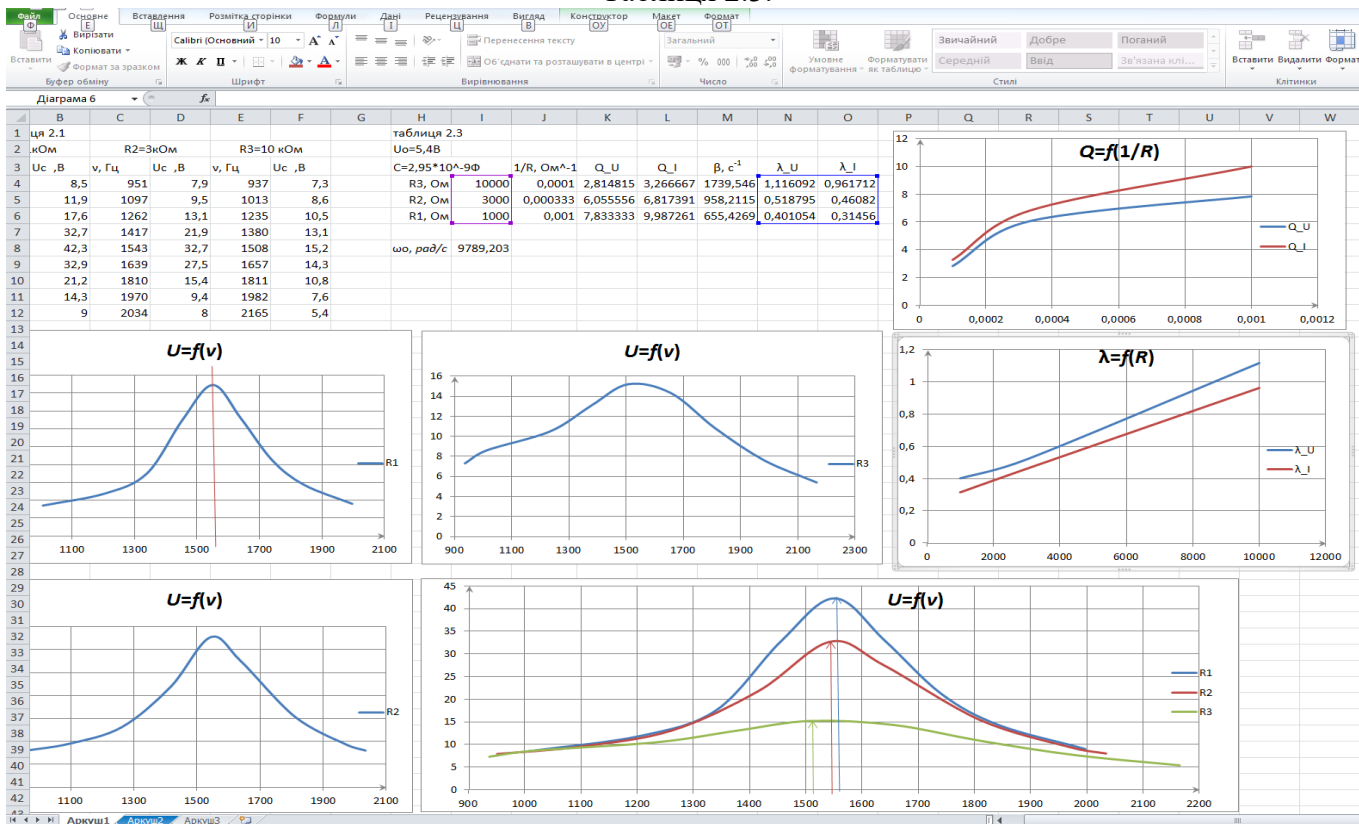
Таблица 2.1.

$R_1$	$\nu, \Gamma\text{Ц}$									
	$U_{Cm}$									
$R_2$	$\nu, \Gamma\text{Ц}$									
	$U_{Cm}$									
$R_3$	$\nu, \Gamma\text{Ц}$									
	$U_{Cm}$									

Таблица 2.2

$R_1$	$\nu, \Gamma\text{Ц}$									
	$U_m^{R_1}$									
	$I_m$									
$R_2$	$\nu, \Gamma\text{Ц}$									
	$U_m^{R_2}$									
	$I_m$									
$R_3$	$\nu, \Gamma\text{Ц}$									
	$U_m^{R_3}$									
	$I_m$									

### Таблиця 2.3.



Таблиця 2.4.

