

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 53.043

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ (підпис)

_____ (ініціали, прізвище)

“ ” _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності (спеціалізації) 104 фізика та астрономія
(код і назва спеціальності)

Комп'ютерне моделювання фізичних процесів

на тему: «Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованих
ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами» _____

Виконав (-ла): студент (-ка) 2 курсу, групи ОФ-71мп
(шифр групи)

_____ **Конотопчик Ольга Валеріївна**

(прізвище, ім'я, по батькові)

_____ (підпис)

Науковий керівник д. ф.-м. н., професор Герасимчук В.С
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Консультант _____
(назва розділу) _____ (науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

_____ (підпис)

Рецензент _____
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____
(підпис)

Київ – 2018 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет фізико-математичний факультет
(повна назва)

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) 104 фізика та астрономія
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри

(підпис) (ініціали, прізвище)
« ___ » _____ 20__ р.

**ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Конотопчик Ользі Валерійвні**
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації: Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованих ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами

науковий керівник дисертації Герасимчук Віктор Семенович, доктор фізико-математичних наук, професор _____,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від « ___ » _____ 20__ р. № _____

2. Строк подання студентом дисертації _____

3. Об'єкт дослідження: Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованому ангармонічному середовищі.

4. Предмет дослідження (Вихідні дані – для магістерської дисертації за освітньо-професійною програмою) Локалізація нелінійних хвиль в структурованому ангармонічному середовищі з двома інтерфейсами.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) Ознайомитись з еліптичними функціями Якобі, нелінійним рівнянням Шредінгера .

2) Знайти розв'язки нелінійного рівняння Шредінгера з двома дельта-подібними потенціалами.

3) Знайти повне число елементарних збуджень та повну енергію в системі за допомогою відповідних крайових умов, а також силу взаємодії між інтерфейсами.

4) Побудувати залежності знайдених величин від відстані між інтерфейсами.

6) Зробити висновки щодо отриманих результатів

6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу слайди, графіки _____

7. Дата видачі завдання 3 вересня 2018 року _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з нелінійним рівнянням Шредінгера	3.09.2018-15.09.2018	
2.	Ознайомлення з еліптичними функціями Якобі	15.09.2018-30.09.2018	
3.	Розв'язання нелінійного рівняння Шредінгера з двома дельта-подібними потенціалами	1.10.2018-11.10.2018	
4.	Знаходження повного числа елементарних збуджень за отриманими розв'язками рівняння Шредінгера.	12.10.2018-25.10.2018	
5.	Знаходження повної енергії за отриманими розв'язками.	26.10.2018-17.11.2018	
6.	Знаходження частинного розв'язку для енергії при еліптичному модулі, що прямує до одиниці.	18.11.2018-27.11.2018	
7.	Знаходження сили взаємодії між інтерфейсами.		
8.	Оформлення магістерської дисертації		

Студент

(підпис)

О.В. Конотопчик

(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

(підпис)

В.С. Герасимчук

(ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованих ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами

Актуальність: Дослідження, що проводяться в магістерській дисертації, знаходяться в руслі актуального напрямку сучасної фізики, що спирається на потужний апарат теоретичної фізики, – теорії нелінійних хвиль і солітонів у фізиці твердого тіла. Останні з досліджень в цій області спрямовані на вивчення солітонів в реальних фізичних системах з урахуванням їх внутрішньої мікроструктури, дискретності, дефектності та інших особливостей.

Мета дослідження: Дослідження нелінійних локалізованих станів в структурованих ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами.

Завдання дослідження: Дослідити особливості локалізації нелінійних хвиль у середовищі з двома інтерфейсами. Знайти інтеграли руху в зазначеній системі, повну кількість елементарних збуджень та повну енергію системи. Побудувати залежність інтегралів руху від відстані між інтерфейсами. Знайти силу взаємодії та залежність сили від відстані між двома інтерфейсами.

Об'єкт дослідження: Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованому ангармонічному середовищі.

Предмет дослідження: Локалізація нелінійних хвиль в структурованому ангармонічному середовищі з двома інтерфейсами.

Методи дослідження: Для розв'язання поставлених задач було застосовано методи теоретичної фізики. При розв'язанні застосовується апарат еліптичних функцій Якобі. Застосовано метод “скейлінгу” – введення нових масштабних змінних для знаходження універсальних залежностей між основними характеристиками системи. Побудову та аналіз залежностей між параметрами системи здійснено за допомогою програмного пакету Maple.

Наукова новизна одержаних результатів: Отримано точні розв'язки для повної енергії системи.

Результати дослідження: Отримані точні результати для загальної кількості елементарних збуджень, локалізованих у системі, загальної енергії системи та сили та побудовані їх залежності від відстані між інтерфейсами.

Галузь застосування: Нелінійна фізика, нелінійна оптика, нанофізика.

Апробація результатів дисертації: доповідь Nonlinear localized states in the structured media with interfaces на 6th International Conference “Nanotechnology and Nanomaterial`s” (NANO-2018), Kyiv, Ukraine, 27-30 August 2018, Abstract Book, P.740;

Публікації: Proceedings «Exact Solution for Localized States of Nonlinear Waves in the Structured Anharmonic Media with Two Interfaces» of the 2018 IEEE 8th International Conference on Nanomaterials: Applications & Properties (NAP-2018), Zatoka, Ukraine, 9-15 September, P.336

Ключові слова: Нелінійні хвилі, локалізований стан, солітон, дефект, інтерфейс, ангармонічне середовище, нелінійне рівняння Шредінгера.

Структура роботи: У роботі міститься 59 сторінок та 11 рисунків. Список використаних джерел містить 72 найменування.

Abstract

Localized States of Nonlinear Waves in the Structured Anharmonic Media with Two Interfaces

The purpose of the research: Investigation of localized states of nonlinear waves in the structured anharmonic media with two interfaces.

Object of research: Localized states of nonlinear waves in the structured anharmonic media with two interfaces.

Subject of research: Localization of waves in the structured anharmonic media with two interfaces.

Objectives of the research: To study analytically the localized states of nonlinear waves propagating in an anharmonic medium along a system of two coupled identical parallel plane thin layers (interfaces). We obtain the exact results for the total number of elementary excitations and the total energy of the system and demonstrate numerically a monotonous behavior of the reduced total amount of elementary excitations bound in the localized state as a function of the scaling variable characterizing the distance between the interfaces.

Methods of research: methods of theoretical physics, use Jacobi elliptic functions apparatus. The "scaling" method is applied - the introduction of new scale variables to determine the universal dependencies between the main characteristics of the system. Use the computer program Maple.

Results of the research: In this work we analytically obtained the exact solutions for the problem of localization of nonlinear waves propagating along two identical parallel plane defect layers (interfaces) in an anharmonic medium with attraction. The exact results for the total number of elementary excitations localized in the system and the energy of the system were obtained.

Field of application: nonlinear physics, nonlinear optics, nanophysics.

Keywords: nonlinear waves, localized state, soliton, defect, interface, anharmonic medium, nonlinear Schrödinger equation.

The paper contains: used literature - 72, pages: - 59, drawings - 11 .

АНОТАЦІЯ

На тему: Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованих ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами

студентки 2 курсу магістерського рівня ФМФ

гр. ОФ-71мп

Конотопчик Ольги

Дана робота присвячена питанню вивчення локалізації нелінійних хвиль в структурованому ангармонічному середовища з двома інтерфейсами. Розглянуто такі питання: повне число елементарних збуджень в системі, повна енергія системи та сила взаємодії між інтерфейсами.

Для розв'язання поставлених задач було застосовано методи теоретичної фізики. При розв'язанні застосовується апарат еліптичних функцій Якобі. Застосовано метод “скейлінгу” – введення нових масштабних змінних для знаходження універсальних залежностей між основними характеристиками системи.

Отримані точні результати для загальної кількості елементарних збуджень, локалізованих у системі, загальної енергії системи та сили та побудовані їх залежності від відстані між інтерфейсами.

ANNOTATION

Topic: Localized States of Nonlinear Waves in the Structured Anharmonic Media
with Two Interfaces

student of the course 2 master's degree of FMF

gr. OF-71mp

Olha Konotopchyck

This work is devoted to the study of localization of waves in the structured anharmonic media with two interfaces.

The following issues are considered the total number of elementary excitations localized in the system and the energy of the system were obtained.

The methods of heating theoretical physics, use Jacobi elliptic functions apparatus. The "scaling" method is applied - the introduction of new scale variables to determine the universal dependencies between the main characteristics of the system.

In this work we analytically obtained the exact solutions for the problem of localization of nonlinear waves propagating along two identical parallel plane defect layers (interfaces) in an anharmonic medium with attraction. The exact results for the total number of elementary excitations localized in the system and the energy of the system were obtained.

Рецензія на кваліфікаційну роботу

РЕЦЕНЗІЯ

на дипломний проект (дипломну роботу, магістерську дисертацію)

на здобуття ступеня магістра
(бакалавра/магістра)

виконаний (-у) на тему: «Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованих ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами» _____

_____ студентом (-кою) Конотопчик О.В. _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

Рецензент

_____ (посада, науковий ступінь, вчене звання)

_____ (підпис)

_____ (ініціали, прізвище)

Печатка установи, організації рецензента *(тільки для зовнішнього рецензента)*

Відгук керівника (наукового керівника) кваліфікаційної роботи

ВІДГУК
керівника (наукового керівника)
дипломного проекту/дипломної роботи (магістерської дисертації)
на здобуття ступеня магістра
(бакалавра/магістра)

виконаного (-ої) на тему: «Локалізовані стани нелінійних хвиль в структурованих ангармонічних середовищах з двома інтерфейсами»

студентом (-кою) Конотопчик О.В.
(прізвище, ім'я, по батькові)

Керівник (науковий керівник)
дипломного проекту/дипломної роботи
(магістерської дисертації)

Д. ф.-м. н., професор
(посада, науковий ступінь, вчене звання)

_____ (підпис)

Герасимчук В.С.
(ініціали, прізвище)

ЗМІСТ

ВСТУП	12
(Огляд літератури, стан наукової проблеми та її значущість).....	12
РОЗДІЛ 1	17
1.1. Виведення нелінійного рівняння Шредінгера для структурованих оптичних середовищ.....	17
1.2. Еліптичні функції Якобі	23
1.3. Властивості еліптичних функцій Якобі	25
РОЗДІЛ 2	28
2.1. Розповсюдження нелінійних хвиль в системі двох паралельних хвилеводів	28
2.2. Синфазний розв’язок	31
2.3. Висновки до розділу 2	32
РОЗДІЛ 3	33
3.1. Розрахунок повного числа елементарних збуджень в системі.....	33
3.2. Приведена загальна кількість елементарних збуджень	35
3.3. Висновки до розділу 3	39
РОЗДІЛ 4	40
4.1. Розрахунок повної енергії системи	40
4.2. Приведена повна енергія системи	44
4.3. Повна енергія системи. Частинний розв’язок	48
4.4. Висновки до розділу 4	56
РОЗДІЛ 5	57
5.1. Розрахунок сили взаємодії між інтерфейсами	57

5.2. Висновки до розділу 5	61
ВИСНОВКИ	62
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	63

ВСТУП

(Огляд літератури, стан наукової проблеми та її значущість)

Дослідження, що проводяться в магістерській дисертації, знаходяться в руслі актуального напрямку сучасної фізики, що спирається на потужний апарат теоретичної фізики, – теорії нелінійних хвиль і солітонів у фізиці твердого тіла. Останні з досліджень в цій області спрямовані на вивчення солітонів в реальних фізичних системах з урахуванням їх внутрішньої мікроструктури, дискретності, дефектності та інших особливостей. З точки зору технологій найбільш перспективними є шаруваті структури різного типу [1-13, 14-17]. Наприклад, в нелінійній оптиці шаруваті середовища використовуються в волоконних системах, оптичних лініях затримки і т.д.

Наявність неоднорідностей (дефектів) в нелінійному середовищі або періодичність його структури істотно змінюють властивості нелінійних локалізованих хвиль і солітонів. Яскравими прикладами є сильнолокалізовані високочастотні локальні моди в дефектних кристалах [18-25] і щілинні солітони в системах з періодичною структурою [26,27]. З експериментальної точки зору найбільш цікавим представляється спостереження локалізації потужних світлових пучків в періодичній системі оптичних хвилеводів [28,29] і несиметричні режими поширення світла в зв'язаних оптичних хвилеводах (оптичних перемикачах) [30,31].

Дослідження структури та динамічних властивостей структурованих ангармонічних середовищ сьогодні представляють великий інтерес. Особливий інтерес представляють багат шарові структури різних типів, перспективні для технологічних застосувань [32-40].

Магістерська робота присвячена питанням вивчення характеру локалізації нелінійних стаціонарних хвиль, які поширюються в ангармонічному середовищі, що містить тонкі плоскопаралельні шари, які мають властивості, що відрізняються від характеристик середовища. Виявляється, що завдяки одночасному прояву

лінійної локалізації хвиль на дефектних шарах і нелінійної локалізації за рахунок ангармонічності навколишнього середовища, з'являється можливість результуючої локалізації хвильового потоку в області, що містить велику кількість плоских шарів. Це явище експериментально спостерігалось в плоских нелінійних оптичних хвилеводах з періодично модульованим перетином [41,42]

Таким чином, проблема дослідження системи, що містить лише один дефектний шар (або один дефект), вивчалася давно і всесторонньо. У випадку декількох дефектів, взаємодіючих через нелінійне поле, дослідження стає більш громіздким, і виникає необхідність розробки ефективних методів дослідження таких систем. Основним кроком у цьому напрямку є дослідження нелінійної динаміки системи, що складається з двох паралельних дефектних шарів (двох точкових дефектів). В теорії нелінійних хвиль добре відомо [43], що основні риси солітонної динаміки містяться в задачі про два зв'язаних ангармонічних осцилятори, зокрема, прояв порушення симетрії збуджень при досягненні порогового значення його сумарної потужності. В нелінійній оптиці на цю обставину вказується в роботі [44] для системи двох зв'язаних хвилеводів. В роботах [45,46] при численному вивченні розповсюдження нелінійних оптичних імпульсів вздовж двох плоскопаралельних хвилеводів вважалося, що хвилеводи та навколишнє середовище відрізняються значеннями нелінійного показника заломлення. (Профіль цього показника в напрямку, перпендикулярному площині хвилеводів, моделювався прямокутними функціями [45] або згладженими колоколоподібними функціями [46].) Однак у всіх перерахованих роботах дослідження розповсюдження нелінійних хвиль проводилося методами численного моделювання.

Раніше було аналітично доведено [47-50], що у випадку двох плоских шарів (двох дефектів) спостерігається перехід хвильового потоку при критичному значенні його енергії в просторово-неоднорідний стан з різним сумарним потоком в шарах.

Аналогічним чином знайдена біфуркація в системі, що складається з двох нелінійних плоских дефектів (двох оптичних хвилеводів), розділених областями лінійного середовища [51]. Ці дослідження безпосередньо пов'язані з вивченням локалізації світлових пучків великої потужності.

Ефективний метод, розроблений при дослідженні нелінійної динаміки системи, що складається з двох паралельних дефектних шарів (двох точкових дефектів), дозволяє докладно розглянути питання про нелінійну локалізацію в більш складних реальних системах - періодично модульованих хвилеводах і шаруватих пружних середовищах.

Як відомо з теорії зв'язаних ангармонічних осциляторів (див., наприклад, [43]), з ростом їх кількості росте кількість стаціонарних мод у системі, і при заданій частоті при "м'якому" характері нелінійності найменшою енергією володіє просторово локалізований стан частинок, що синфазно коливаються ("дискретний бризер"). При цьому точка біфуркації (порогова величина повної енергії, при якій це локалізоване збудження відділяється від однорідного синфазного стану) зміщується в область малих енергій з збільшенням числа зв'язаних осциляторів. В нескінченному ланцюжку бризерний стан існує будь-яких малих енергіях. При "жорсткому" характері нелінійності нелінійні просторово-локалізовані стани мають частоти, що лежать вище верхньої межі спектра лінійних хвиль, і представляють локалізовані протифазні коливання сусідніх осциляторів. В даний час дослідження "дискретних бризерів" представляє важливий напрямок в теорії солітонів [52,53].

Вперше на можливість локалізації пучка в нелінійному однорідному оптичному середовищі (внаслідок нелінійного ефекту Керра) у напрямку, перпендикулярному напрямку його розповсюдження, було вказано в роботі [54]. Теорія цього явища описана в роботі [55]. З іншого боку, така поперечна локалізація світлового потоку можлива в лінійному оптичному середовищі при наявності плоского хвилевода [56]. В 1996 році в роботі [57] теоретично було показано, що в системі плоскопаралельних хвилеводів з урахуванням Керровської

нелінійності можлива локація пучка на декількох сусідніх хвилеводах (утворення просторового "суперсолітона"). Це доведення було представлено чисельно на простій моделі, що описується дискретним нелінійним рівнянням Шредінгера для амплітуд поля в хвилеводах. При цьому взаємодія хвилеводів описується феноменологічним параметром, а виникнення нелінійності в рівнянні не обговорювалось. Пізніше в така "суперлокалізація" світлового потоку спостерігалася експериментально, і результати порівнювалися з феноменологічною дискретною моделлю [54].

У подальшому увагу дослідників стали привертати і оптичні середовища з дефокусуючою нелінійністю (протилежний знак нелінійного ефекту Керра) [58]. У цих системах експериментально спостерігається поширення так званих "темних" оптичних солітонів і існування оптичних вихрів. Проте шаруваті системи з такою нелінійністю вивчаються менш інтенсивно. Нижче ми покажемо, що при зміні знака нелінійності в багатошаровій системі також може спостерігатися просторова локалізація потоку, але вона має форму специфічної "щілинного" суперсолітона з частотами в щілині спектру електромагнітних хвиль. Щілинні оптичні солітони досліджувались в останні роки достатньо широко [26,59], однак, як правило, у випадку слабкої просторової модуляції параметрів системи. У цьому сенсі розглянута нами система вузьких паралельних хвилеводів представляє діаметрально протилежний граничний випадок.

Одночасний вплив шаруватої структури середовища і нелінійності призводить до появи нових фізичних ефектів, таких як просторова локалізація нелінійних хвиль в модульованих структурах (див., наприклад, [60,61,62]), залежність прозорості середовища по інтенсивності хвилі [63] і т. д.

У даній роботі ми аналітично проаналізуємо локалізовані стани нелінійних хвиль, що поширюються уздовж двох зв'язаних ідентичних паралельних тонких дефектних шарів (інтерфейсів), що характеризуються показником заломлення, який відрізняється від показника заломлення середовища поза дефектними шарами. Розглянемо випадок, коли все середовище поза дефектними шарами

істотно нелінійне. Раніше було продемонстровано, що в цьому випадку нелінійні стани локалізовані поблизу границь, але густини двох потоків рівні тільки для малої густини повної одиниці. Для повної енергії потоків, більших за деяке граничне значення, хвиля поширюється в основному уздовж одного з інтерфейсів. У цій роботі ми знаходимо точні аналітичні результати для локалізованого розв'язку солітонів в разі позитивного характеру як інтерфейсів, так і ангармонічного середовища поза ними, загальну кількість елементарних збуджень в системі та її повну енергію. Ми наводимо ці залежності в універсальних масштабних формах, дійсних для різних значень «інтенсивності» інтерфейсу, як функції масштабної змінної, що характеризує відстань між інтерфейсами. Чисельно отримано монотонну поведінку наведеної загальної кількості елементарних збуджень в залежності від масштабної змінної.

РОЗДІЛ 1

1.1. Виведення нелінійного рівняння Шредінгера для структурованих оптичних середовищ

У цьому підрозділі будуть розглянуті приклади нелінійних оптичних систем, що мають періодичну або шарувату структуру і в яких відстань між дефектами або дефектними шарами істотно перевершує їх власний розмір.

При розгляді розповсюдження електромагнітних хвиль в модульованих нелінійних оптичних середовищах можливі дві постановки задачі з різною геометрією. По-перше, як лінії затримки зараз широко використовуються оптичні волокна з перерізом, що періодично міняється. В цьому випадку ми маємо одновимірну систему, в якій напрям розповсюдження електромагнітної хвилі співпадає з напрямом періодичної зміни властивостей середовища. При цьому спектр лінійних хвиль стає “щілинним”: в ньому виникають щілини при частотах $\omega = \frac{c}{L} 2\pi n$ (де c – швидкість світла в середовищі та L – період модуляції її параметрів) шириною порядку глибини модуляції параметрів. В нелінійному випадку в цих щілинах можливе існування специфічних локалізованих стаціонарних станів – “щілинних солітонів” [64,65].

Однак як експериментальний, так і технологічний інтерес представляє і інша постановка задачі, коли параметри середовища змінюються в напрямку, перпендикулярному напрямку поширення хвилі. Прикладами можуть служити: (1) багат шарові коаксіальні оптичні волокна, в яких показник заломлення є функцією радіальної координати; (2) оптичні перемикачі, що представляють собою два паралельних оптичних волокна (хоча волокна реально є циліндричними, при теоретичному розгляді вони, як правило, замінюються плоскими хвилеводами - рис.1.1); (3) оптичні хвилеводи змінного перерізу (рис.1.2), інтенсивно використовуються останнім часом [66,67] для спостереження нелінійної локалізації світлових пучків.

Розглянемо поширення нелінійної електромагнітної хвилі в шаруватому нелінійному оптичному середовищі, що містить плоскопаралельні хвилеводи, тобто шари, що характеризуються показником заломлення не таким як в оптичному середовищі між ними. (Як і вище, вважаємо, що шари розміщені перпендикулярно осі z .) У випадку плоскопаралельної хвилі, що розповсюджується в немагнітному середовищі ($\mu = 1$) вздовж шарів (в напрямку осі x), що не залежить від координати y і яка має вектор електричного поля \vec{E} , направлено вздовж осі y ($\vec{E} \parallel \vec{i}_y$), рівняння Максвелла набуває вигляду

$$n^2\left(z, \vec{E}\right) \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \cdot \Delta \vec{E} = 0, \quad (1.1)$$

де показник заломлення n залежить від координати z і напруженості поля: $n = n_0 + n_1(z) + n_2(\vec{E})$, $n_1(z) = n_1$ в виділених шарах та $n_1(z) = 0$ поза ними. (Виділені шари вважатимемо хвилеводами при $n_1 > 0$.) Будемо вважати що модуляція параметрів середовища і густина енергії в хвилі мала, тобто $n_1, n_2 \ll n_0$ і залежність $n(z)$ можна враховувати лише в лінійному показнику заломлення.

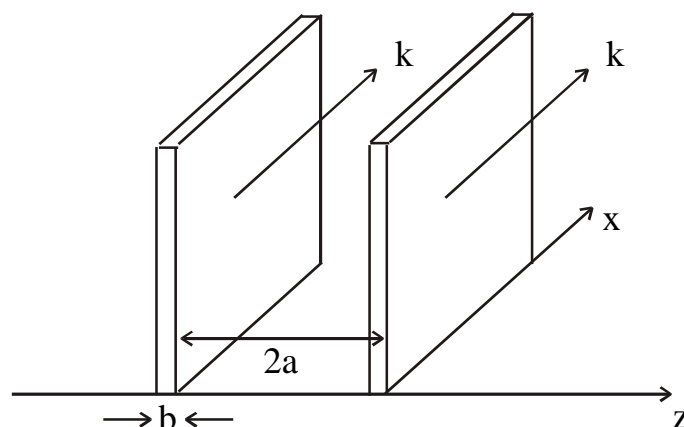


Рис. 1.1. Поширення хвилі вздовж двох плоскопаралельних хвилеводів (приклад оптичного перемикача).

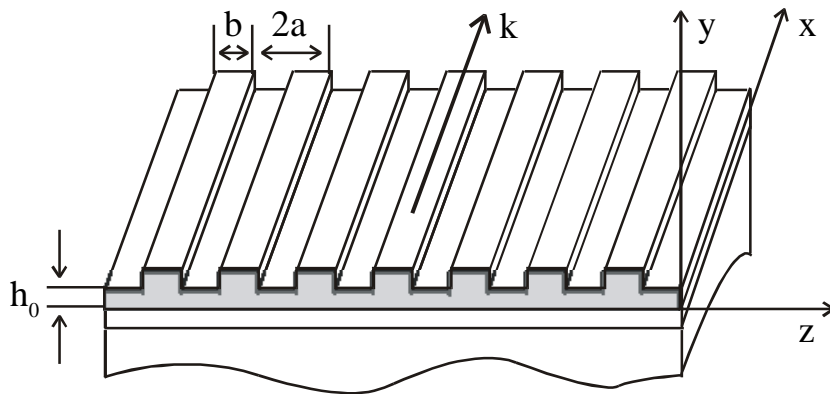


Рис. 1.2. Оптичний хвилевод зі змінним перерізом [6].

Обмежимося близькими до монохроматичної хвиля розв'язками з фіксованим

хвильовим вектором $\vec{k} = i_x k$, який зручно представити у вигляді:

$$\vec{E} = i_y \cdot \{E_1(z, t) \cdot \cos(kx - \omega_0 t) - E_2(z, t) \cdot \sin(kx - \omega_0 t)\}, \quad (1.2)$$

де E_i повільно залежить від z и t , і вибраний зв'язок $\omega_0 = ck/n_0$, що відповідає закону дисперсії лінійних хвиль в середовищі, що розділяє виділені шари. При цьому повільна залежність $E_i(t)$ враховує відмінність дійсної частоти хвилі $\omega(k)$ при даному k від $\omega_0(k)$ за рахунок нелінійних ефектів та модуляції параметрів середовища.

Ведемо комплексну функцію $E = E_1 + i \cdot E_2$, в термінах якої нелінійна добавка до показника заломлення набуває наступного вигляду: $n_2(E) = \sigma \cdot \alpha(\omega) \cdot |E|^2$, де $\sigma = \pm 1$ для фокусуючого та дефокусуючого середовища відповідно та $\alpha(\omega)$ – нелінійна діелектрична проникність. Підставляючи вираз (1.2) в рівняння (1.1) і залишаючи лише перші похідні від функції E по асу, приводимо його до вигляду:

$$2in_0^2\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2n_0 n_1(z) \omega_0^2 E + 2n_0 \alpha \omega_0^2 \sigma |E|^2 E = 0, \quad (1.3)$$

де ми замінили в першому доданку n^2 на n_0^2 , враховуючи нерівність $n_1, n_2 \ll n_0$, $\partial E / \partial t \ll \omega_0 E$. Якщо ширина виділених шарів b набагато менша чим відстань

між ними $2a$ (див. рис. 1.1), то вимірюючи час в одиницях $\frac{2n_0}{\alpha} \frac{1}{\omega_0}$, тобто вводячи

$\tau = \frac{\alpha c k}{2n_0^2} t$, а координату z – в одиницях $\sqrt{\frac{n_0}{\alpha}} \frac{1}{k}$, тобто ввівши координату

$\xi = \sqrt{\frac{\alpha}{n_0}} k z$, рівняння (1.3) можна звести до рівняння:

$$i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2\sigma \cdot |E|^2 E = - \sum_n \lambda \cdot \delta(\xi - 2\tilde{a}n) \cdot E \quad (1.4)$$

де $\lambda = 2b \frac{n_1}{\sqrt{\alpha n_0}} k$ і $\tilde{a} = a \sqrt{\frac{\alpha}{n_0}} k$.

У реальних оптичних експериментах, як зазначалося вище, постановка задачі може бути дещо іншою [66,67]: нелінійна електромагнітна хвиля поширюється в плоскому світловоді (оптичному хвилеводі) змінного перерізу (рис. 1.2). Нелінійне оптичне середовище з показником $n = n_0 + n_2(\vec{E})$ займає область $0 < y < h(z) = h_0 + \Delta(z)$, где $\Delta > 0$, плоскополяризована хвиля поширюється вздовж осі x . Якщо світловод обмежений оптично непрозорим середовищем, то розв'язки, близькі до монохроматичної хвилі, при слабкій модуляції товщини шару наближено можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{E} = \vec{i}_y \cdot \{E_1(z, t) \cdot \cos(kx - \omega_0 t) - E_2(z, t) \cdot \sin(kx - \omega_0 t)\} \cdot \sin \frac{\pi y}{h(z)}, \quad (1.5)$$

де зручно вибрати

$$\omega_0 = \omega_0(k) \approx \frac{c}{n_0} \sqrt{\left(\frac{\pi}{h_0}\right)^2 + k^2}. \quad (1.6)$$

При цьому, після інтегрування рівняння (1.1) по товщині світловоду, рівняння (1.3) для величини, що змінюється повільно $E = E_1 + iE_2$ модифікується наступним чином:

$$2in_0^2\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{c^2[h^2(z) - h_0^2]}{h^2(z)h_0^2} E + \frac{4}{3}n_0\alpha\omega_0^2\sigma|E|^2 E = 0. \quad (1.7)$$

Якщо вимірювати час в одиницях $\frac{3n_0}{\alpha} \frac{1}{\omega_0} \left(\tau = \frac{\alpha\omega_0}{3n_0} t \right)$, координату – в одиницях

$\sqrt{\frac{3n_0}{2\alpha}} \frac{1}{k} \left(\xi = \sqrt{\frac{2\alpha n_0}{3}} \frac{\omega_0}{c} z \right)$, то рівняння (1.7) зводиться до наступного стандартного

рівняння:

$$i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2\sigma \cdot |E|^2 E = -\lambda(\xi) \cdot E, \quad (1.8)$$

де при слабкій модуляції функції $h(z)$ ($\Delta_{\max} \ll h_0$) маємо

$$\lambda(\xi) = \frac{3c^2}{\alpha\omega_0^2(k)h_0^3} \Delta \left(\frac{c}{\omega_0} \sqrt{\frac{3}{2\alpha n_0}} \xi \right). \quad (1.9)$$

Таким чином, більш широкі області оптично прозорої пластини грають роль нових ефективних хвилеводів в розглянутій двовимірній нелінійній оптичній системі, але замінювати функцію $\lambda(z)$ системою δ -функцій можна лише при великій відстані між цими потовщеними ділянками.

До цих пір ми розглядали системи, в яких все середовище була нелінійним, а різні шари відрізнялися "лінійними" характеристиками, тобто коефіцієнтами в лінійних по полю доданків відповідних динамічних рівнянь. Однак, в принципі, ситуація може бути іншою. У випадку обговорених вище оптичних перемикачів хвилеводи знаходяться в вакуумі, і середовище між ними є оптично лінійним. При цьому відмінність від одиниці і нелінійні ефекти треба враховувати лише в самих

волноводах, де $\alpha \neq 0$. При цьому $\omega_0 = ck$, і з рівняння (1.3) с $\alpha = \alpha(z)$ для тонких хвилеводів товщиною b , що знаходяться в площинах $z = z_i$, впливає рівняння

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\lambda \sum_i \delta(z - z_i) E - 2\sigma \sum_i \delta(z - z_i) |E|^2 E, \quad (1.10)$$

де $\lambda = \sqrt{2} n_1 k b$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha k b$ і $n_1 = n - 1$. Приведенное уравнение рассматривалось, например, в работах [68,69], но для решения другой проблемы: распространения нелокализованной волны через слоистую систему в направлении ее периодичности.

Если нас интересуют в основном нелинейные эффекты, то для качественного исследования проблемы в основном приближении можно отбросить линейное слагаемое с δ -функциями в уравнении (1.10) – так поступили авторы статей [70,71,72].

Таким чином, в даному підрозділі сформульовані моделі нелінійних оптичних середовищ, що володіють періодичною внутрішньою структурою по одній з просторових координат. Показано, що, якщо така модульована оптична система має вигляд періодичної послідовності плоскопараллельних дефектів, поперечний переріз яких істотно менше відстані між дефектними шарами, то для стаціонарних нелінійних хвиль, що поширюються уздовж шаруватої структури, може бути виведено нелінійне рівняння Шредінгера зі змінними коефіцієнтами та послідовністю δ -функцій.

1.2. Еліптичні функції Якобі

У зв'язку з виникненням задачі обчислення довжини дуги еліпса в інтегральному численні з'явилось поняття еліптичного інтеграла, який був вперше досліджений Дж. Фаніано та Л. Ейлером.

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int f(x, R) dx$$

де $R = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ або $R = \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$, а $f(x, R)$ – раціональна функція як відносно x , так і відносно R . Такі інтеграли називають еліптичними.

Лежандром було показано, що всі еліптичні інтеграли можна звести до трьох основних:

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad (1.1)$$

$$v = \int_0^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad (1.2)$$

$$w = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(1-n\xi^2)\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad (1.3)$$

де $|k| < 1$. Число k називається модулем, а n – параметром інтеграла.

Нехай $\xi = \sin \varphi$, тоді інтеграл (1.1) набуває вигляду

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.4)$$

Для (1.2) маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)(1-\xi^2)}} &= \frac{1}{k^2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{k^2} [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)] \end{aligned}$$

де

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Інтеграл (1.3) перетворюється у

$$\Pi(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - n^2 \sin^2 \varphi)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}}$$

Інтеграли $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, $\Pi(\varphi, k)$ є зведеними до нормальних форм Лежандра. Їх називають еліптичними інтегралами. Число φ називається амплітудою.

Якщо $k = 0$, то перший інтеграл

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \arcsin \xi$$

Для практичного застосування більш важливою є не багатозначна функція $u = \arcsin \xi$, а однозначна $\xi = \sin u$, тобто така функція для якої аргументом є сам інтеграл u . Оскільки φ є амплітудою інтеграла $F(\varphi, k)$, який позначається літерою u , то φ можна виразити таким чином:

$$\varphi = am(u).$$

В цьому випадку $\xi = \sin \varphi = \sin am(u)$, $\sqrt{1 - \xi^2} = \cos \varphi = \cos am(u)$. Вводячи позначення $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta am(u)$, усі три еліптичні функції можна записати у вигляді

$$\sin am(u) = sn(u) \quad \cos am(u) = cn(u) \quad \Delta am(u) = dn(u)$$

Функції $sn u$, $cn u$ і $dn u$ називають еліптичними функціями Якобі, які являють собою набір основних еліптичних функцій комплексної змінної, і допоміжних тета-функцій, що мають пряме відношення до деяких прикладних задач (наприклад, рівняння маятника)

1.3 Властивості еліптичних функцій Якобі

Наведемо основні властивості еліптичних функцій та доведемо деякі з них.

$$1. \operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn}(u), \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn}(u)$$

тобто функція $\operatorname{sn}(u)$ непарна, а функції $\operatorname{dn}(u)$ і $\operatorname{cn}(u)$ – парні.

$$2. \operatorname{cn}^2(u) + \operatorname{sn}^2(u) = 1.$$

$$\operatorname{sn}(u) = \sin \operatorname{am}(u) = \sin \varphi, \quad \operatorname{cn}(u) = \cos \operatorname{am}(u) = \cos \varphi, \Rightarrow \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$3. \operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1.$$

$$\operatorname{dn}^2(u) = 1 - k^2 \sin^2 \varphi, \quad \operatorname{sn}^2(u) = \sin^2 \varphi \Rightarrow 1 - k^2 \sin^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

$$4. \text{Якщо } \varphi = 0 \text{ при } u = 0, \text{ то } \operatorname{sn}0 = 0, \operatorname{cn}0 = 1, \operatorname{dn}0 = 1$$

$$5. \frac{d\operatorname{sn}(u)}{du} = \operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u).$$

$$6. \frac{d\operatorname{cn}(u)}{du} = -\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u).$$

$$7. \frac{d\operatorname{dn}(u)}{du} = -k^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(u)$$

Якщо в інтегралі $F(\varphi, k)$ амплітуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то інтеграл називають повним еліптичним інтегралом першого роду і позначають через K :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Модуль k' пов'язаний із модулем k співвідношенням

$$k^2 + k'^2 = 1$$

називають додатковим для модуля k .

Отже,

$$\operatorname{sn}K = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \operatorname{cn}K = 0; \quad \operatorname{dn}K = k'.$$

Іноді вводять позначення $k' = \sin \gamma$. Величина γ називається модулярним кутом еліптичного інтеграла.

Області значення функцій Якобі

$$-1 \leq \operatorname{sn}(u, k) \leq 1, \quad -1 \leq \operatorname{cn}(u, k) \leq 1, \quad \sqrt{1 - k^2} \leq \operatorname{dn}(u, k) \leq 1.$$

Відклавши на осі Ou дійсні значення u , а на осі $O\xi$ – відповідні значення функцій $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ і $\operatorname{dn}(u, k)$ отримаємо графіки цих функцій.

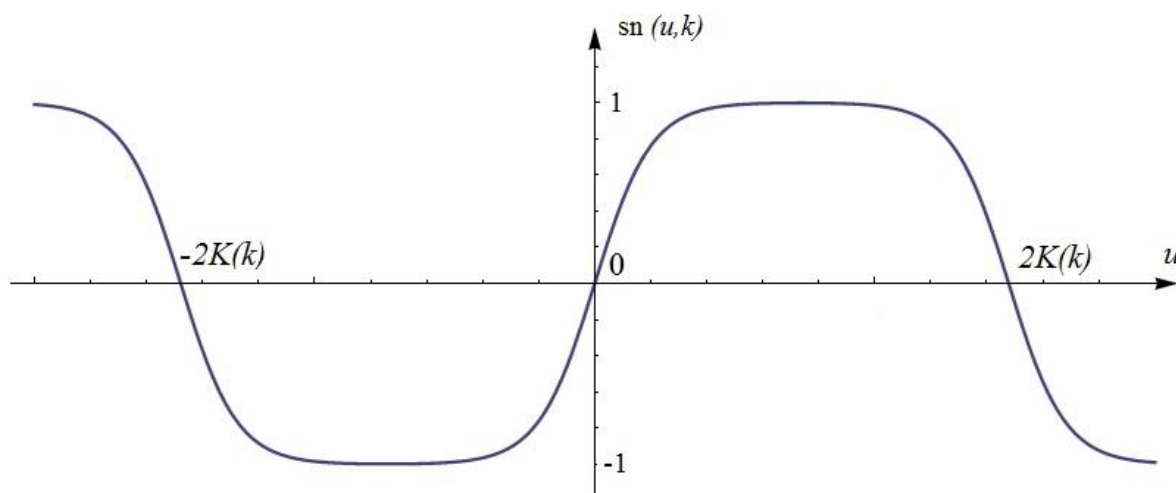


Рис.1.4 Графік еліптичного синуса Якобі

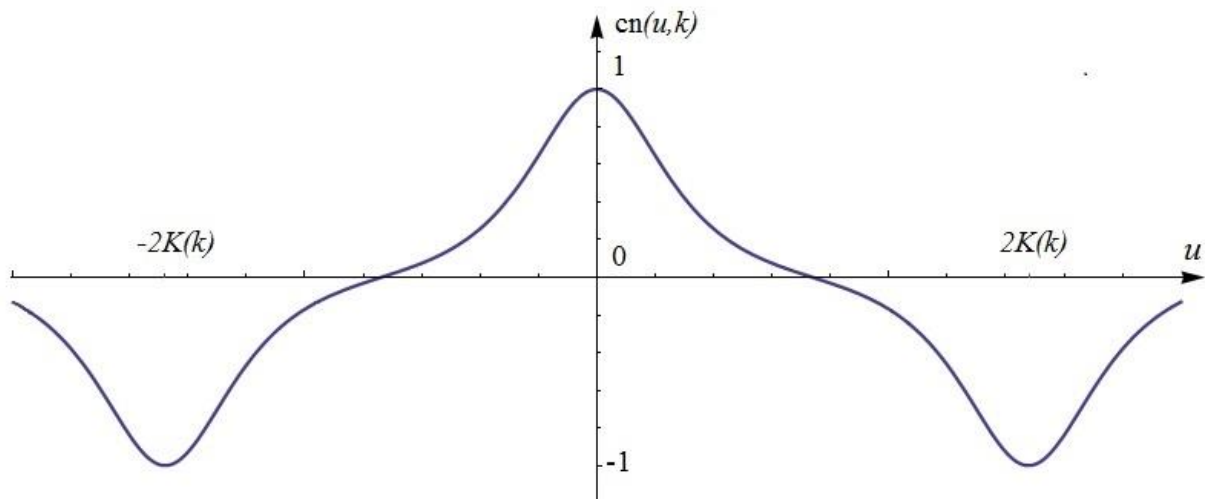


Рис.1.5 Графік еліптичного косинуса Якобі.

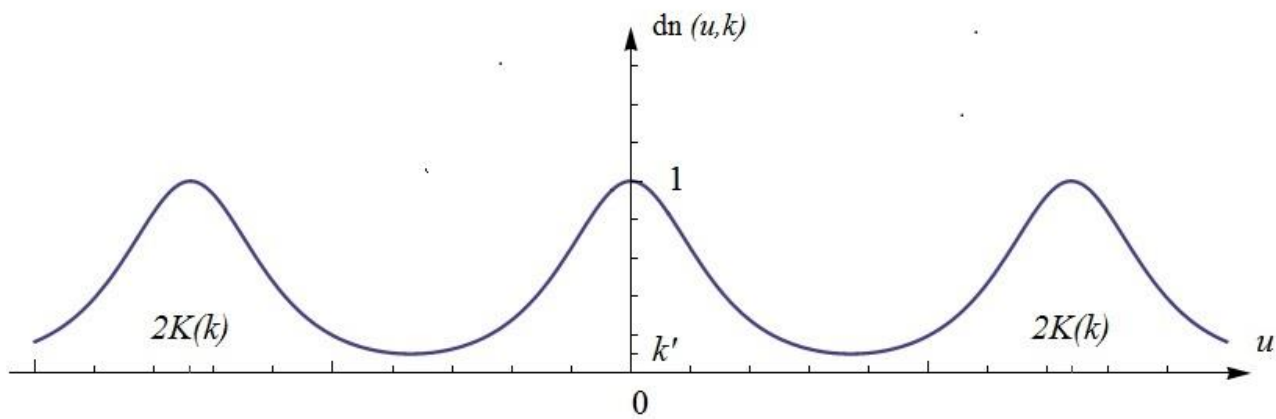


Рис.1.6 Графік дельта амплітуди Якобі

Графік кожної із цих функцій приймає визначений вигляд лише при певному значенні модуля k .

РОЗДІЛ 2

2.1. Розповсюдження нелінійних хвиль в системі двох паралельних хвилеводів

Поширення нелінійних монохроматичних хвиль уздовж осі x системи двох паралельних тонких дефектних шарів (далі інтерфейсів), які відрізняються своїми лінійними властивостями від матриці, що їх оточує і які розташовані на відстані, що значно перевищує товщину шару, описується нелінійним рівнянням Шредінгера :

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = -\lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)]u \quad (2.1)$$

де вісь z спрямована перпендикулярно дефектним шарам, $\sigma = \pm 1$ – функція знаку, яка характеризує фокусуюче (тяжіння) та дефокусуюче (відштовхування) середовища відповідно; однакові дефектні шари характеризуються параметром $\lambda > 0$ у випадку, коли вони притягують лінійні хвилі та грають роль хвилеводів, $2a$ – відстань між інтерфейсами, $\delta(x)$ – δ -функція Дірака.

Рівняння руху (2.1), що відповідає такій системі, є рівнянням Ейлера для функції Лагранжа з густиною :

$$L = \frac{i}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) - \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \sigma |u|^4 + \lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)] |u|^2 \quad (2.2)$$

Для хвиль стаціонарного профілю задача еквівалентна вивченню нелінійних збуджень в одновимірній системі, яка містить точкові дефекти (інтерфейси). Для одного ізольованого дефекту, ця задача досліджувалась в роботах [1-3] для довільних знаків σ і λ . У випадку двох інтерфейсів, що взаємодіють через нелінійне поле, розв'язок задачі суттєво ускладнюється і задача зводиться до розв'язання нелінійного рівняння Шредінгера для стаціонарних локалізованих станів виду $u(z,t) = u(z) \exp(-i\omega t)$ в області поза дефектними шарами, з відповідними граничними умовами

$$u \Big|_{\mp a-0} = u \Big|_{\mp a+0} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\mp a+0} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\mp a-0} = -\lambda u \Big|_{\mp a} \quad (2.4)$$

і нульовою асимптотикою на нескінченності ($z \rightarrow \mp\infty$).

Розглянемо спочатку випадок фокусуєчого середовища ($\sigma = +1$). У цьому випадку в системі можливі чотири типи локалізованих стаціонарних станів. У нелінійній хвилі, при малій інтенсивності повного потоку, існує два розв'язки з рівними і протилежними фазами хвиль і з однаковими амплітудами поблизу двох інтерфейсів (синфазний розв'язок). Якщо потужність хвилі перевищує деяке порогове значення, з'являються два додаткові розв'язки, що мають однакові фази, але різні амплітуди хвиль, локалізовані поблизу дефектних шарів.

Якщо фази хвиль в обох інтерфейсах рівні, то розв'язок рівняння (2.1) в областях $z < -a$ (1), $z > a$ (2) і $-a < z < a$ (3) може бути поданий у наступній формі:

$$u_{1,2}(z,t) = u_{1,2}(z)e^{-i\omega t} = \frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon(z - z_{1,2})]} e^{-i\omega t}, \quad (2.5)$$

$$u_3(z,t) = u_3(z)e^{-i\omega t} = \frac{q'\eta}{dn[\eta(z - z_3), q]} e^{-i\omega t},$$

де параметр ε , який характеризує амплітуду хвилі, зв'язаний з частотою ω співвідношенням $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$; $dn(z, q)$ – еліптична функція Якобі з модулем q ; $\eta = \varepsilon/\sqrt{2-q^2}$ і $q' = \sqrt{1-q^2}$. Розв'язок (2.5) є однопараметричним і повністю характеризується параметром ε . Інші параметри q і z_i ($i = 1, 2, 3$) виражаються через параметр ε за допомогою граничних умов (3)-(4).

Оскільки хвильовий потік локалізується в основному поблизу двох додатних інтерфейсів, зручна характеристика локалізованої хвилі забезпечується амплітудами поля всередині тонких дефектних шарів $U_1 = u(z = -a)$ і $U_2 = u(z = a)$

. З граничних умов (3)-(4) знаходимо співвідношення між параметрами ε , q , z_i ($i = 1, 2, 3$) і U_n ($n = 1, 2$):

$$U_{1,2} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}[\varepsilon(a \pm z_{1,2})]} = \frac{q'\eta}{\operatorname{dn}[\eta(a \pm z_3), q]} \quad (2.6)$$

$$U_n \sqrt{\varepsilon^2 - U_n^2} - \lambda U_n + \sqrt{U_n^2 - q'^2 \eta^2} \sqrt{\eta^2 - U_n^2} = 0 \quad (2.7)$$

Використовуючи співвідношення (2.6), можна усунути параметри z_i та q' і переписати граничну умову (2.7) у вигляді замкнутої системи двох алгебраїчних рівнянь для амплітуд U_n , які містять в якості параметрів тільки частотну характеристику ε , інтенсивність інтерфейсу λ і відстань між інтерфейсами $2a$. Ця процедура легко виконується в межах слабкого динамічного зв'язку між інтерфейсами, що було продемонстровано у роботах [4,5].

2.2. Синфазний розв'язок

Зосередимося, перш за все, на синфазному розв'язку з рівними амплітудами на двох інтерфейсах, що притягуються між собою: $U_1 = U_2 \equiv U$, $z_2 = -z_1$ і $z_3 = 0$. У цьому випадку граничні умови (2.6)-(2.7) можна переписати у вигляді:

$$U = \frac{\varepsilon}{\cosh[\varepsilon(a + z_1)]} = \frac{q'\eta}{\operatorname{dn}(\eta a, q)} \quad (2.8)$$

$$U\sqrt{\varepsilon^2 - U^2} - \lambda U + \sqrt{U^2 - q'^2\eta^2}\sqrt{\eta^2 - U^2} = 0 \quad (2.9)$$

Підставимо співвідношення (2.8) в умову (2.9):

$$\frac{q'\eta}{\operatorname{dn}[\eta a, q]} \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{q'^2\eta^2}{\operatorname{dn}^2[\eta a, q]}} + \sqrt{\frac{q'^2\eta^2}{\operatorname{dn}^2[\eta a, q]} \varepsilon^2 - \frac{q'^4\eta^4}{\operatorname{dn}^4[\eta a, q]} - q'^2\eta^2} - \frac{\lambda q'\eta}{\operatorname{dn}[\eta a, q]} = 0 \quad (2.10)$$

Помноживши вираз (2.10) на $\frac{\operatorname{dn}[\eta a, q]}{q'\eta}$ отримуємо співвідношення, яке містить частотну характеристику, завдяки параметру ε , інтенсивність інтерфейсу λ , відстань між інтерфейсами $2a$ і еліптичний модуль q :

$$q^2\eta \cdot \operatorname{sn}(\eta a, q) \cdot \operatorname{cn}(\eta a, q) - \lambda \operatorname{dn}(\eta a, q) + \varepsilon \sqrt{\operatorname{dn}^2(\eta a, q) - q'^2/(2 - q^2)} = 0. \quad (2.11)$$

Слід зазначити, що отриманий розв'язок (2.5) має сенс лише за умови, що відстань між двома інтерфейсами не перевищує періоду розв'язку в області $|z| < a$ для $z_3 = 0$. Це, у свою чергу, обумовлює умови:

$$\eta a \leq K(q) \quad \text{або} \quad \varepsilon a \leq \sqrt{2 - q^2} \cdot K(q), \quad (2.12)$$

де $K(q)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

2.3. Висновки до розділу 2

Сформульована постановка задачі про поширення нелінійних хвиль у системі двох плоскопаралельних тонких інтерфейсів, які володіють лінійними властивостями, але знаходяться в нелінійному оточуючому середовищі. Рішення задачі базується на розв'язанні неоднорідного нелінійного рівняння Шредінгера з двома симетричними точковими дефектами, які апроксимуються δ -функціями. Наведено синфазний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера у випадку фокусуєчого середовища. Отримано співвідношення, яке зв'язує основні параметри досліджуваної системи – частотну характеристику ε , інтенсивність інтерфейсів λ , відстань між інтерфейсами $2a$ і модуль q еліптичної функції. Встановлена умова, яка накладає обмеження на відстань між інтерфейсами.

РОЗДІЛ 3

3.1. Розрахунок повного числа елементарних збуджень в системі

Рівняння (2.1) описує динаміку консервативної системи і тому має інтеграл руху – повне число елементарних збуджень (квантів поля), локалізованих у системі:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} n(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dz \quad (3.1)$$

де $n(z)$ – густина збуджень.

У силу симетричності задачі, формулу (3.1) можемо подати і обчислити у більш зручній формі:

$$N = 2 \int_0^a |u_3|^2 dz + 2 \int_a^{+\infty} |u_2|^2 dz = 2 \int_0^a \left| \frac{q'\eta}{dn[\eta z, q]} \right|^2 dz + 2 \int_a^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon(z - z_2)]} \right|^2 dz = I_1 + I_2,$$

де

$$I_1 = \int_0^a \frac{q'^2 \eta^2}{dn^2[\eta z, q]} dz = q'^2 \eta^2 \int_0^a \frac{dz}{dn^2[\eta z, q]} = q'^2 \eta^2 \frac{1}{\eta} \left[-\frac{1}{q'^2} (q^2 dn^{-1}[\eta z, q] sn[\eta z, q] cn[\eta z, q]) - \right.$$

$$\left. - \int_0^a dn^2[\eta z, q] d(\eta z) \right] = -\eta q^2 \frac{sn[\eta z, q] cn[\eta z, q]}{dn[\eta z, q]} + \eta E[am(\eta z, q), q] \Big|_0^a,$$

$$I_2 = \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{ch^2[\varepsilon(z + z_1)]} dz = 1 - \varepsilon^2 th[\varepsilon(z + z_1)] \Big|_a^{+\infty}.$$

Звідси отримуємо загальну формулу для знаходження кількості елементарних збуджень у вигляді:

$$N = -2q^2 \eta \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} + 2\eta E[am(\eta a, q), q] + 2\varepsilon \{1 - \tanh[\varepsilon(a + z_1)]\} \quad (3.2)$$

де $E[\xi, q]$ – еліптичний інтеграл другого роду, $am(\eta a, q)$ – амплітуда еліптичної функції.

Використовуючи граничну умову (2.6) виразимо $\tanh[\varepsilon(a + z_1)]$ через еліптичну функцію $\text{dn}(\eta a, q)$:

$$\tanh[\varepsilon(a + z_1)] = \sqrt{1 - \frac{q'^2}{(2 - q^2) \text{dn}^2(\eta a, q)}} \quad (3.3)$$

У такий спосіб можна виключити параметр z_1 і переписати вираз (3.2) для повного числа елементарних збуджень в системі:

$$\begin{aligned} N = & -2q^2\eta \frac{\text{sn}(\eta a, q) \text{cn}(\eta a, q)}{\text{dn}(\eta a, q)} + 2\eta E[\text{am}(\eta a, q), q] + \\ & + 2\varepsilon \left[1 - \sqrt{1 - \frac{q'^2}{(2 - q^2) \text{dn}^2(\eta a, q)}} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тепер можна виключити характеристику інтерфейсу λ , вводячи масштабні змінні:

$$\eta_\lambda = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{\varepsilon_\lambda}{\sqrt{2 - q^2}}, \quad \varepsilon_\lambda = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad d = \lambda a. \quad (3.5)$$

З урахуванням (3.5) перепишемо граничну умову (2.11) у вигляді рівняння

$$q^2 \eta_\lambda \cdot \text{sn}(\eta_\lambda d, q) \cdot \text{cn}(\eta_\lambda d, q) - \text{dn}(\eta_\lambda d, q) + \varepsilon_\lambda \sqrt{\text{dn}^2(\eta_\lambda d, q) - \frac{q'^2}{2 - q^2}} = 0 \quad (3.6)$$

відносно функції $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda(d, q)$. Надалі ми будемо використовувати цю функцію для розрахунку зведеного повного числа квазічастинок в локалізованому стані і зведеної повної енергії системи.

3.2. Приведена загальна кількість елементарних збуджень

За умов нових масштабних змінних (3.5) можна використати умову (2.12) для чисельного підрахунку максимальних значень параметра d для будь-яких значень модуля q . Наприклад, при $q = 0.5$ матимемо: $d_{\max}(q = 0.5) \cong 1.460$. Аналогічно, знайдемо $d_{\max}(q = 0.1) \cong 1.567$ і $d_{\max}(q = 0.9) \cong 0.994$.

Введемо приведені повне число елементарних збуджень $N_\lambda = N/\lambda$. Тоді вираз (3.4) набуває такий вигляд:

$$N_\lambda = -2q^2 \eta_\lambda \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}(\eta_\lambda d, q)} + 2\eta_\lambda E[\operatorname{am}(\eta_\lambda d, q), q] +$$

$$+ 2\varepsilon_\lambda \left[1 - \sqrt{1 - \frac{q'^2}{(2 - q^2) \operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)}} \right], \quad (3.7)$$

де масштабні змінні η_λ , ε_λ і d визначаються формулами (3.5), а $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda(d, q)$ є розв'язком рівняння (3.6).

Підставляючи розв'язок $\varepsilon_\lambda(d, q)$ у формулу (3.7) отримаємо функцію $N_\lambda(d, q)$, яка буде залежати вже лише від однієї змінної для будь-яких фіксованих значень модуля q . Залежність $N_\lambda = N_\lambda(d, q)$ має універсальну масштабовану форму, дійсну для різних значень характеристики інтерфейсу λ .

Чисельний розв'язок для приведеної загальної кількості елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d, q)$, як функції масштабної змінної d , що характеризує відстань між інтерфейсами, для значень $q = 0.1$, $q = 0.5$ і $q = 0.9$ наведено на рисунках 3.1-3.3 відповідно. Видно, що залежність $N_\lambda = N_\lambda(d)$ зі збільшенням відстані між інтерфейсами зростає. Практично лінійна залежність при $q = 0.1$, набуває майже експоненціального вигляду при $q = 0.5$; при $q = 0.9$ вона знову стає лінійною, але число елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d)$ зменшується. В будь-якому разі, при $q \rightarrow 1$ число збуджень зменшується.

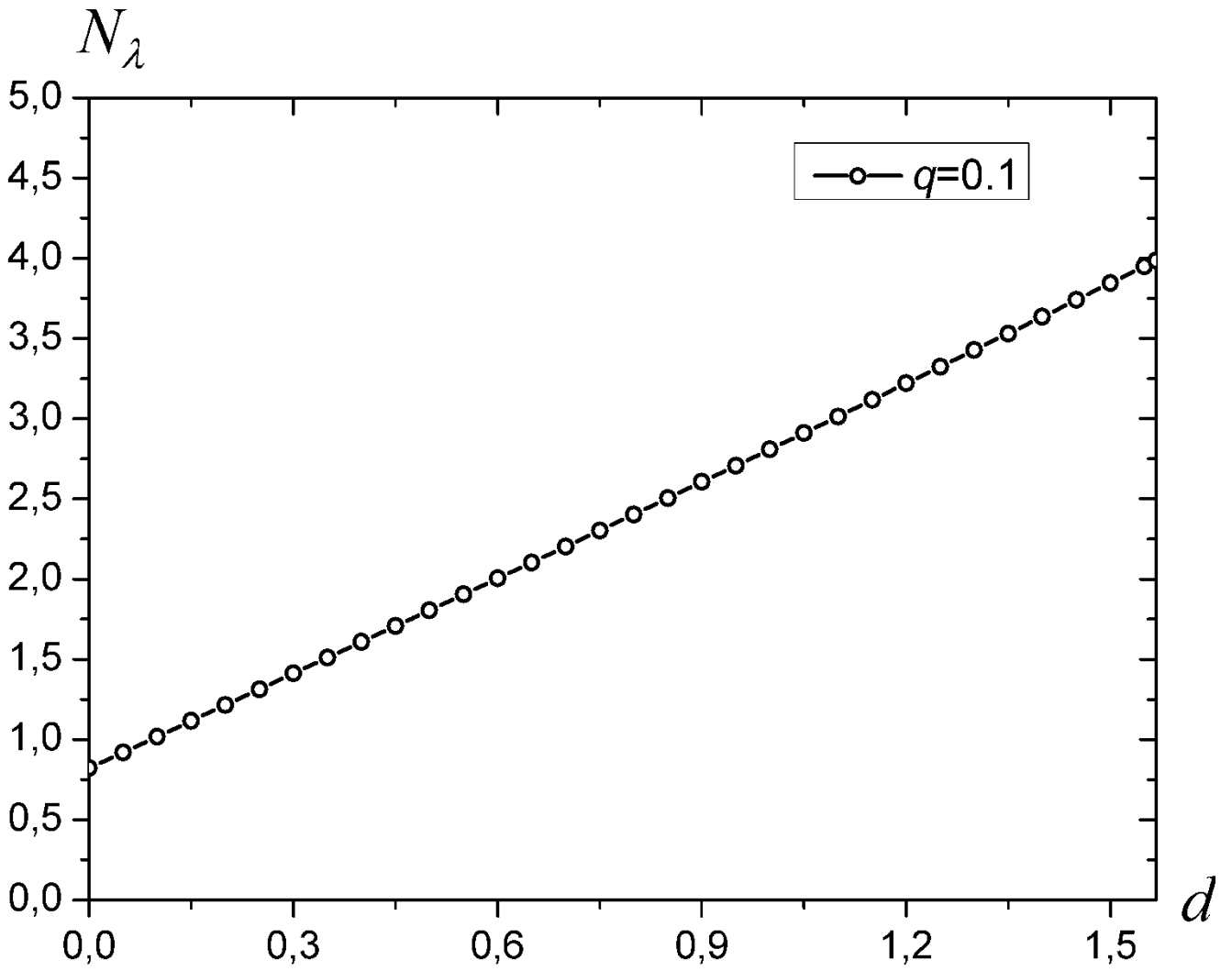


Рис.3.1. Залежність повного числа елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d)$ від відстані d між інтерфейсами для значення еліптичного модуля $q = 0.1$

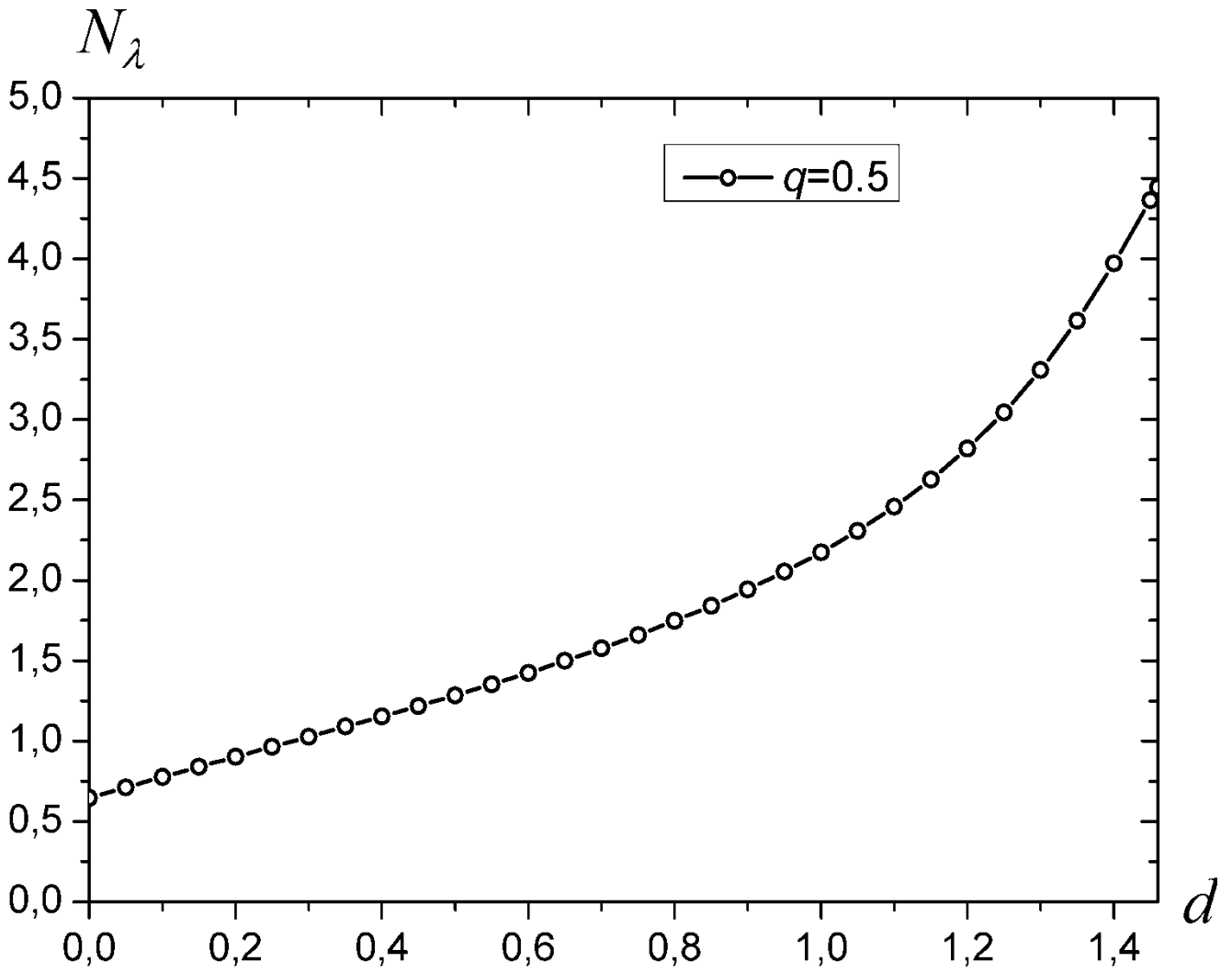


Рис.3.2. Залежність повного числа елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d)$ від відстані d між інтерфейсами для значення еліптичного модуля $q = 0.5$

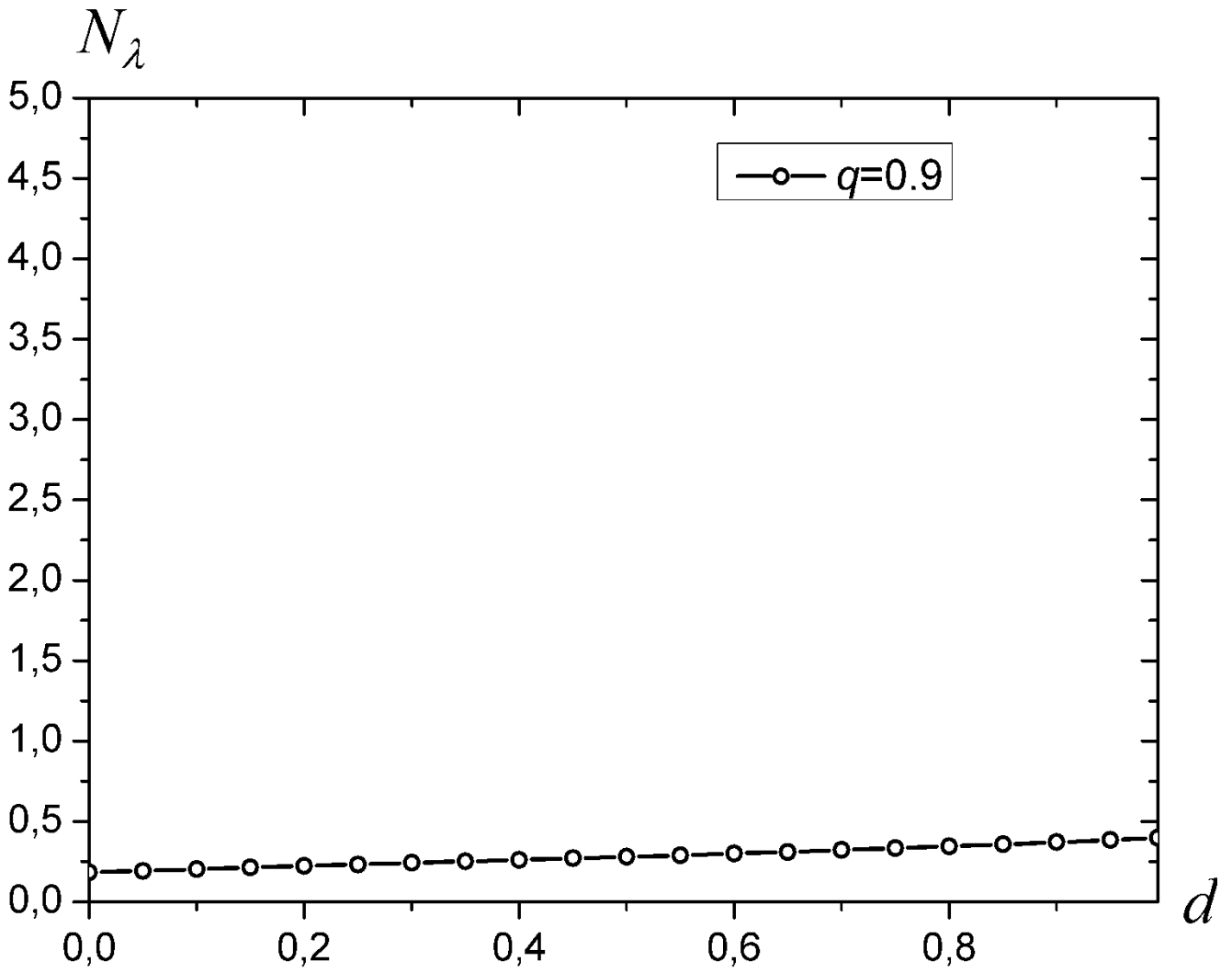


Рис.3.3. Залежність повного числа елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d)$ від відстані d між інтерфейсами для значення еліптичного модуля $q = 0.9$

3.3. Висновки до розділу 3

Обчислено повне число елементарних збуджень, які виникають в системі двох зв'язаних лінійних хвилеводів у нелінійному середовищі. Знайдена функціональна залежність приведеної загальної кількості елементарних збуджень від однієї змінної масштабування, яка зв'язує між собою відстань між інтерфейсами та довжину локалізованого стану.

Наведено чисельний розв'язок для приведеної загальної кількості елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d, q)$, як функції масштабної змінної d , що характеризує відстань між інтерфейсами, для значень $q = 0.1$, $q = 0.5$ і $q = 0.9$ відповідно. Показано, що залежність $N_\lambda = N_\lambda(d)$ зі збільшенням відстані між інтерфейсами зростає. Практично лінійна залежність при $q = 0.1$, набуває майже експоненціального вигляду при $q = 0.5$; при $q = 0.9$ вона знову стає лінійною, але число елементарних збуджень $N_\lambda = N_\lambda(d)$ зменшується. В будь якому разі, при $q \rightarrow 1$ число збуджень зменшується.

РОЗДІЛ 4

4.1. Розрахунок повної енергії системи

Рівняння (2.1) описує динаміку консервативної системи і тому має очевидний інтеграл руху – повну енергію системи:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \sigma \cdot |u|^4 - \lambda \cdot [\delta(z+a) + \delta(z-a)] \cdot |u|^2 \right\} dz \quad (4.1)$$

Враховуючи симетричність розв'язку рівняння (2.1) вираз для енергії можна подати у вигляді :

$$E = 2 \int_0^a \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 dz - 2\sigma \int_0^a |u_3|^4 dz + 2 \int_a^{+\infty} \left| \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|^2 dz - 2\sigma \int_a^{+\infty} |u_2|^4 dz - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(z+a) + \delta(z-a)] |u|^2 dz = 2I_1 - 2I_2 + 2I_3 - 2I_4 - \lambda I_5. \quad (4.2)$$

Обчислимо кожен з інтегралів окремо:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 2 \int_0^a \left[\left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 - |u_3|^4 \right] dz = \int_0^a \left[q^4 q'^2 \eta^4 \frac{\operatorname{sn}^2(\eta z, q) \operatorname{cn}^2(\eta z, q)}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} - \frac{q'^4 \eta^4}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} \right] dz = \\ &= \eta^4 q'^2 \int_0^a \left[q^4 \frac{\operatorname{sn}^2(\eta z, q) \operatorname{cn}^2(\eta z, q)}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} \right] dz = \\ &= \eta^4 q'^2 \int_0^a \left[\frac{q^4}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} + \operatorname{dn}^2(\eta z, q) \left(\frac{2}{q^4} - \frac{1}{q^2} \right) - \frac{1}{q^4} \operatorname{dn}^4(\eta z, q) \right) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} \right] dz = \\ &= \eta^4 q'^2 \int_0^a \left[\frac{q^2 - 1}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} + \frac{2 - q^2}{\operatorname{dn}^2(\eta z, q)} - 1 - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^4(\eta z, q)} \right] dz = \\ &= \eta^4 q'^2 [\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2] - \eta^4 q'^2 z, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \int_0^a \frac{q^2 - 1 - q'^2}{dn^4(\eta z, q)} dz = -2q'^2 \int_0^a \frac{1}{dn^4(\eta z, q)} dz = \\
&= 2q'^2 \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{3q'^2} \left(q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn^3(\eta z, q)} - 2(2 - q^2) \int_0^a \frac{dz}{dn^2(\eta z, q)} + \int_0^a dz \right) \right] = \\
&= \frac{2}{3} \frac{1}{\eta} \left[q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn^3(\eta z, q)} + \frac{2}{q'^2} (2 - q^2) \left(q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn(\eta z, q)} - E[am(\eta z, q), q] \right) \right] + \frac{z}{3} = \\
&= \frac{1}{\eta} \left[\frac{2}{3} q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn^3(\eta z, q)} + \frac{4}{3} \frac{(2 - q^2)}{q'^2} q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn(\eta z, q)} - \frac{4}{3} \frac{(2 - q^2)}{q'^2} E[am(\eta z, q), q] \right] + \\
&\quad + \frac{2}{3} z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= \int_0^a \frac{2 - q^2}{dn^2(\eta z, q)} dz = (2 - q^2) \int_0^a \frac{1}{dn^2(\eta z, q)} dz = \\
&= (2 - q^2) \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{-q'^2} \left(q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn(\eta z, q)} - E[am(\eta z, q), q] \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\eta} \left[-\frac{(2 - q^2)}{q'^2} q^2 \frac{sn(\eta z, q)cn(\eta z, q)}{dn(\eta z, q)} + \frac{(2 - q^2)}{q'^2} E[am(\eta z, q), q] \right].
\end{aligned}$$

Враховуємо значення \tilde{I}_1 і \tilde{I}_2 :

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \frac{2}{3} \eta^3 q^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta z, q) \operatorname{cn}(\eta z, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta z, q)} + \frac{4}{3} \eta^3 \frac{(2-q^2)}{q'^2} q^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta z, q) \operatorname{cn}(\eta z, q)}{\operatorname{dn}(\eta z, q)} - \\
&\quad - \frac{4}{3} \eta^3 \frac{(2-q^2)}{q'^2} E[\operatorname{am}(\eta z, q), q] + \frac{2}{3} \eta^4 q'^2 z + (2-q^2) \eta^3 E[\operatorname{am}(\eta z, q), q] - \\
&\quad - (2-q^2) \eta^3 q^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta z, q) \operatorname{cn}(\eta z, q)}{\operatorname{dn}(\eta z, q)} - \eta^4 q'^2 z \\
&= \frac{2}{3} \eta^3 q^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta z, q) \operatorname{cn}(\eta z, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta z, q)} + \frac{1}{3} \eta^3 \frac{(2-q^2)}{q'^2} q^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta z, q) \operatorname{cn}(\eta z, q)}{\operatorname{dn}(\eta z, q)} - \\
&\quad - \frac{1}{3} \eta^3 \frac{(2-q^2)}{q'^2} E[\operatorname{am}(\eta z, q), q] - \frac{1}{3} \eta^4 q'^2 z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_a^{+\infty} \left[\varepsilon^2 \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon(z-z_2))}{\operatorname{ch}^2(\varepsilon(z-z_2))} \right]^2 dz = \int_a^{+\infty} \varepsilon^4 \frac{\operatorname{sh}^2(\varepsilon(z-z_2))}{\operatorname{ch}^4(\varepsilon(z-z_2))} dz = \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2(\varepsilon(z-z_2))}{\operatorname{ch}^2(\varepsilon(z-z_2))} dz = \\
&= \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \operatorname{th}^2(\varepsilon(z-z_2)) d(\operatorname{th}(\varepsilon(z-z_2))) = \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon} \frac{1}{3} \operatorname{th}^3(\varepsilon(a-z_2)) = \frac{1}{3} \varepsilon^3 \operatorname{th}^3(\varepsilon(a-z_2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^4}{\operatorname{ch}^4(\varepsilon(z-z_2))} dz = \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}^2(\varepsilon(z-z_2)) - \operatorname{sh}^2(\varepsilon(z-z_2))}{\operatorname{ch}^4(\varepsilon(z-z_2))} dz = \\
&= \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\varepsilon(z-z_2))} dz - \int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^2(\varepsilon(z-z_2))}{\operatorname{ch}^4(\varepsilon(z-z_2))} dz = \\
&= \varepsilon^3 \left[\frac{2}{3} - \operatorname{th}(\varepsilon(z-z_2)) \right] + \frac{1}{3} \operatorname{th}^3(\varepsilon(z-z_2)),
\end{aligned}$$

$$\lambda I_5 = \frac{2q'^2 \eta^2}{\operatorname{dn}^2(\eta a, q)}$$

Підставляючи значення отриманих інтегралів в формулу (4.2), отримаємо вираз для повної енергії системи:

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{4}{3} q^2 q'^2 \eta^3 \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn^3(\eta a, q)} + \frac{2}{3} q^2 (2 - q^2) \eta^3 \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} - \\
 & - \frac{2}{3} (2 - q^2) \eta^3 E[am(\eta a, q), q] - \frac{2}{3} q'^2 \eta^4 a + 2\varepsilon^3 th[\varepsilon(a + z_1)] - \frac{4}{3} \varepsilon^3 th^3[\varepsilon(a + z_1)] - \\
 & - \frac{2}{3} \varepsilon^3 - \frac{2\lambda q'^2 \eta^2}{dn^2(\eta a, q)}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Користуючись граничною умовою (2.8) $\frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon(a + z_1)]} = \frac{q'\eta}{dn[\eta a, q]}$ виразимо

$th[\varepsilon(a + z_1)]$ через еліптичну функцію $dn(\eta a, q)$:

$$\begin{aligned}
 th[\varepsilon(a + z_1)] &= \frac{sh[\varepsilon(a + z_1)]}{ch[\varepsilon(a + z_1)]} = \frac{\sqrt{ch^2[\varepsilon(a + z_1)] - 1}}{ch[\varepsilon(a + z_1)]} = \sqrt{1 - \frac{1}{ch^2[\varepsilon(a + z_1)]}} = \\
 &= \sqrt{1 - \frac{q'^2 \eta^2}{dn^2[\eta a, q]}} = \sqrt{1 - \frac{q'^2}{(2 - q^2) dn^2[\eta a, q]}}.
 \end{aligned}$$

У результаті остаточний вираз для повної енергії системи набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{4}{3} q^2 q'^2 \eta^3 \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn^3(\eta a, q)} + \frac{2}{3} q^2 (2 - q^2) \eta^3 \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} - \\
 & - \frac{2}{3} (2 - q^2) \eta^3 E[am(\eta a, q), q] - \frac{2}{3} q'^2 \eta^4 a + 2\varepsilon^3 \left(1 - \frac{q'^2}{(2 - q^2) dn^2[\eta a, q]} \right)^{\frac{1}{2}} - \\
 & - \frac{4}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{q'^2}{(2 - q^2) dn^2[\eta a, q]} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \varepsilon^3 - \frac{2\lambda q'^2 \eta^2}{dn^2(\eta a, q)}. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

4.2. Приведена повна енергія системи

Введемо приведену повну енергію системи $E_\lambda = E/\lambda^3$ і використовуючи масштабні змінні (3.5), вираз для повної енергії (4.4) подамо у наступній формі:

$$\begin{aligned}
 E_\lambda = \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 \left\{ 2q^2 q'^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta_\lambda d, q)} + q^2 (2 - q^2) \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}(\eta_\lambda d, q)} - \right. \\
 \left. - (2 - q^2) \operatorname{E}[\operatorname{am}(\eta_\lambda d, q), q] - q'^2 \eta_\lambda d \right\} + 2 \varepsilon_\lambda^2 \eta_\lambda \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} - \quad (4.5) \\
 - \frac{4}{3} \eta_\lambda^3 (2 - q^2) \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \varepsilon_\lambda^3 - \frac{2q'^2 \eta_\lambda^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)}.
 \end{aligned}$$

де змінні η_λ , ε_λ і d представлені формулами (3.5).

Використовуючи розв'язок $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda(d, q)$ рівняння (3.6), ми знайшли функцію $E_\lambda(d, q)$, яка залежить лише від однієї змінної для будь-яких фіксованих допустимих значень модуля q . Залежність $E_\lambda = E_\lambda(d, q)$ в (4.5) також має універсальну масштабовану форму, дійсну для різних значень характеристики інтерфейсу λ .

Чисельні розрахунки для приведеної повної енергії системи $E_\lambda = E_\lambda(d)$, як функції масштабної змінної d , що характеризує відстань між інтерфейсами при значеннях $q = 0.1$, $q = 0.5$ і $q = 0.9$ наведено на рисунках 4.1-4.3 відповідно.

Як витікає з розрахунків, зі збільшенням відстані між інтерфейсами енергія (взагалі від'ємна) зменшується при значеннях модулів $q = 0.1$ і $q = 0.5$. Однак зі збільшенням модуля q вона стає додатньою і зростає зі збільшенням відстані між інтерфейсами d .

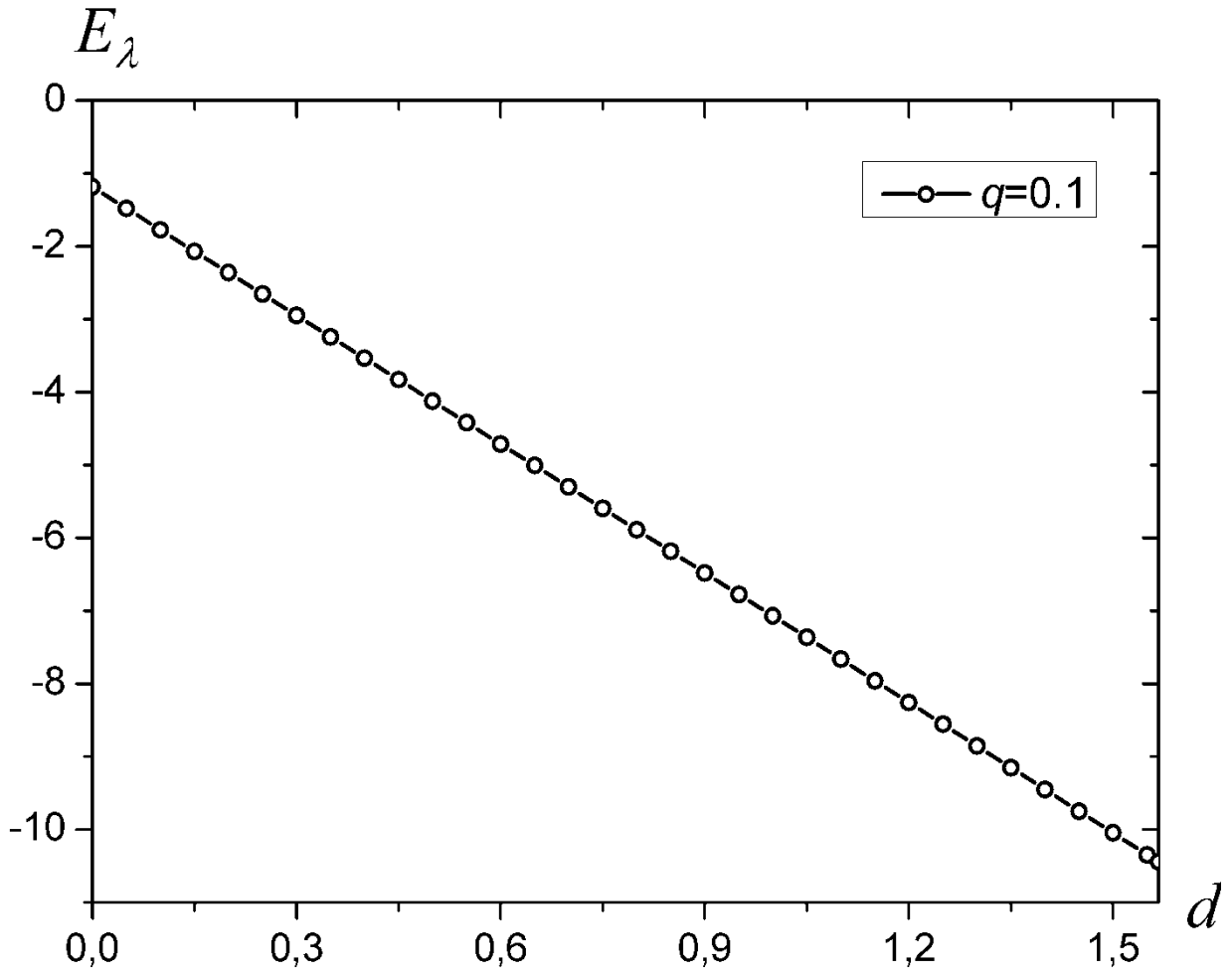


Рис.4.1. Залежність повної енергії системи $E_\lambda = E_\lambda(d)$ від відстані d між інтерфейсами при значенні еліптичного модуля $q = 0.1$

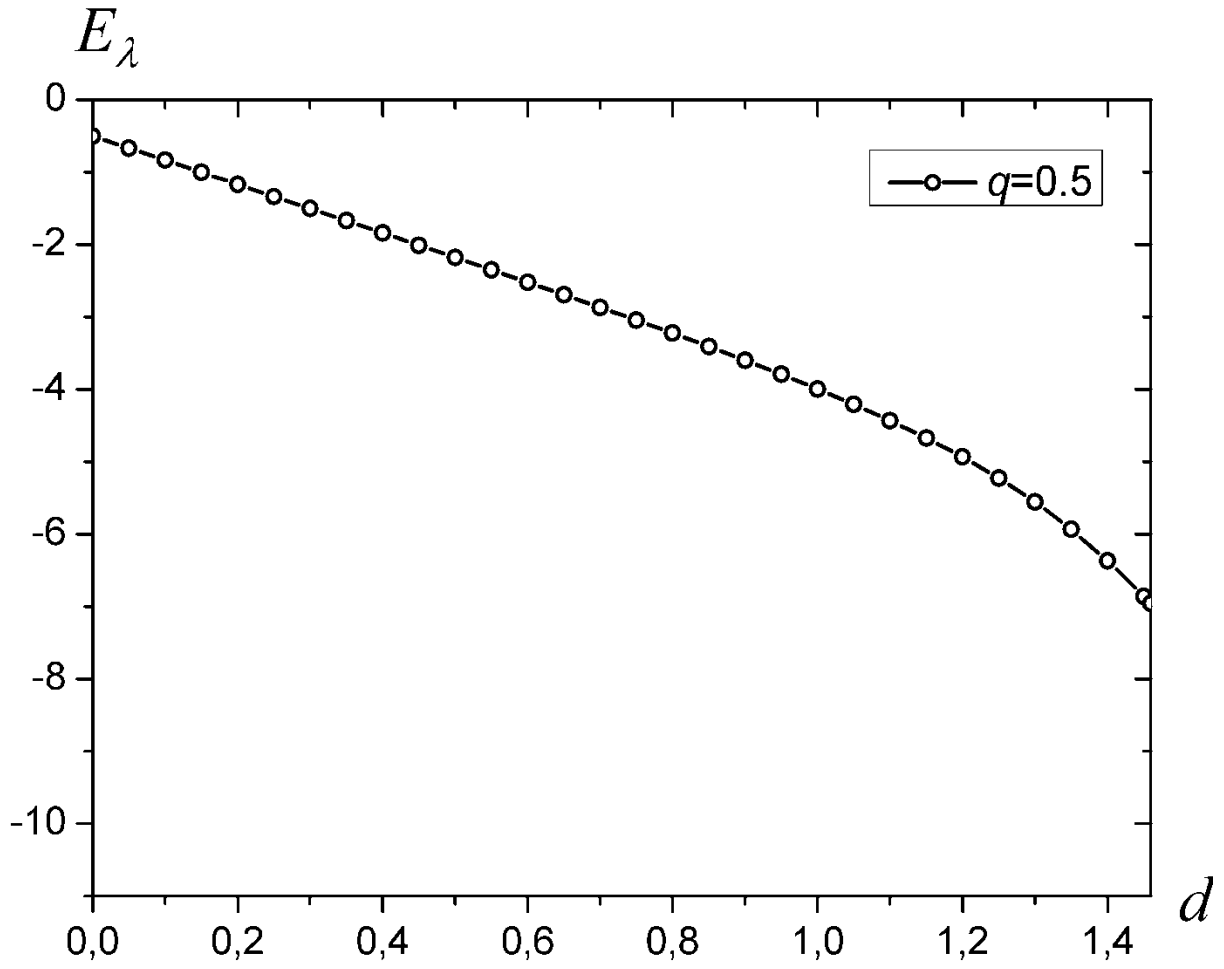


Рис.4.2. Залежність повної енергії системи $E_\lambda = E_\lambda(d)$ від відстані d між інтерфейсами при значенні еліптичного модуля $q = 0.5$

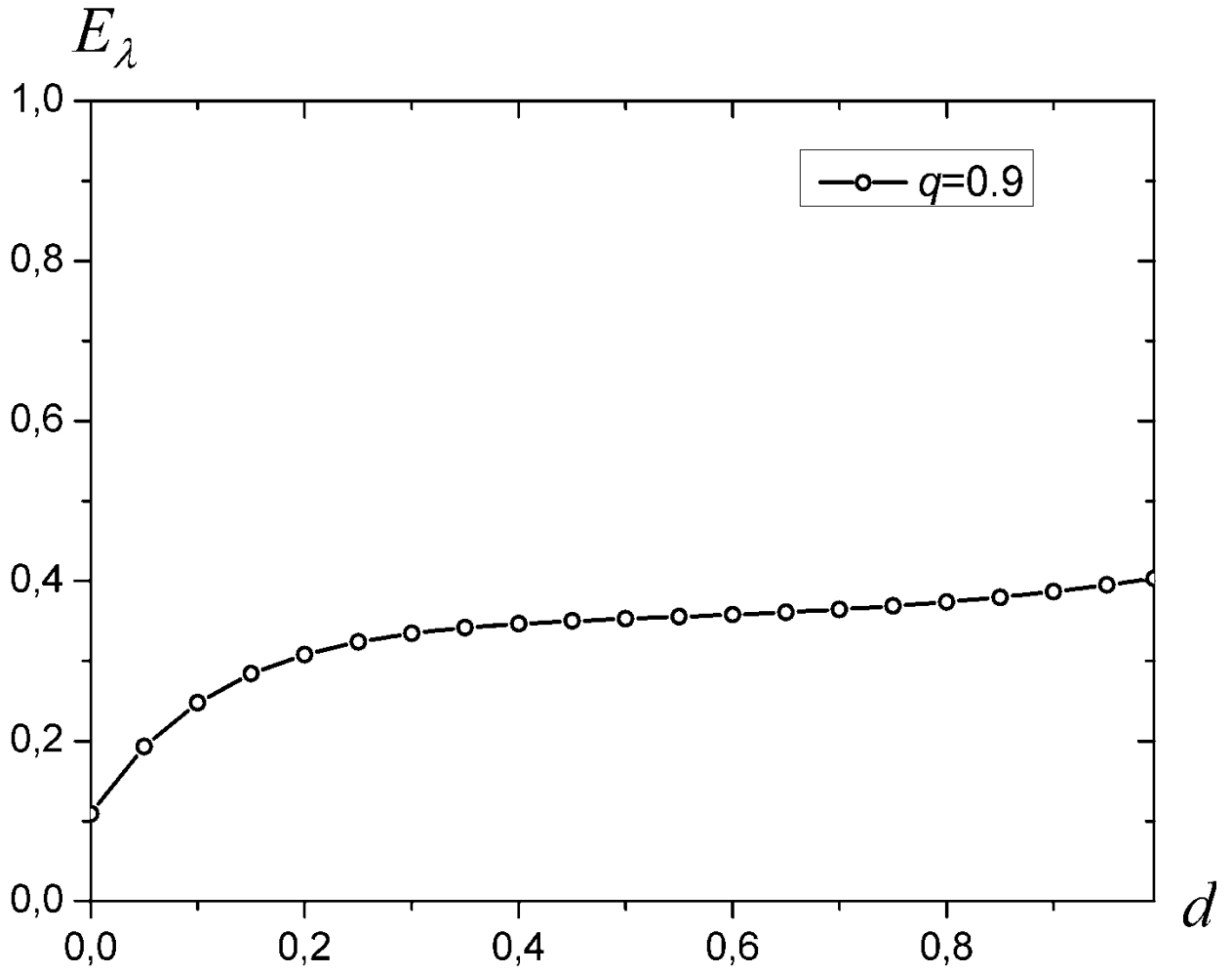


Рис.4.3. Залежність повної енергії системи $E_\lambda = E_\lambda(d)$ від відстані d між інтерфейсами при значенні еліптичного модуля $q = 0.9$

4.3. Повна енергія системи. Частинний розв'язок

Виходячи з точного загального розв'язку для повної енергії системи для будь-яких q , який отримано у попередньому розділі можна знайти частинний розв'язок для E при $q \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned}
 E_\lambda = & \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 2q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} + \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 q^2 (2-q^2) \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn(\eta_\lambda d, q)} - \\
 & - \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 (2-q^2) E[am(\eta_\lambda d, q), q] - \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 q'^2 \eta_\lambda d + 2 \varepsilon_\lambda^2 \eta_\lambda \left((2-q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} - \\
 & - \frac{4}{3} \eta_\lambda^3 (2-q^2) \left((2-q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \varepsilon_\lambda^3 - \frac{2q'^2 \eta_\lambda^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)}.
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Зручно спочатку обчислити кожен із доданків окремо:

$$E_\lambda \Big|_{q \rightarrow 1} = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 + E_5 - E_6 - E_7 - E_8. \quad (5.2)$$

$$E_1 = \frac{4}{3} \eta_\lambda^3 q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{4}{3} q'^2 \varepsilon^3 th(\varepsilon a) ch^2(\varepsilon a),$$

$$E_4 = \frac{2}{3} \eta_\lambda^4 q'^2 d \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{2}{3} q'^2 \varepsilon^4 a,$$

$$E_5 = 2 \varepsilon_\lambda^2 \eta_\lambda \left((2-q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_{q \rightarrow 1} = 2 \varepsilon^3 \left[1 - \frac{1}{2} q'^2 ch^2(\varepsilon a) \right],$$

$$E_6 = \frac{4}{3} \eta_\lambda^3 (2-q^2) \left((2-q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{4}{3} \varepsilon^3 \left[1 - \frac{3}{2} q'^2 ch^2(\varepsilon a) \right],$$

$$E_7 = \frac{2}{3} \varepsilon_\lambda^3 \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{2}{3} \varepsilon^3,$$

$$E_8 = \frac{2q'^2 \eta_\lambda^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \Big|_{q \rightarrow 1} = 2\lambda q'^2 \varepsilon^2 ch^2(\varepsilon a).$$

Для спрощення доданків E_2 і E_3 виконаємо додаткові обчислення:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 q^2 (2 - q^2) \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn(\eta_\lambda d, q)} \Big|_{q \rightarrow 1} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3}{(2 - q^2)^{\frac{3}{2}}} q^2 (2 - q^2) \frac{sn\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2 - q^2}} a, q\right) cn\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2 - q^2}} a, q\right)}{dn\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2 - q^2}} a, q\right)}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Користуючись граничними значеннями еліптичних функцій Якобі

$$\begin{aligned} sn(\xi, q) \Big|_{q \rightarrow 1} &\approx th\xi + \frac{q'^2}{4} (sh\xi ch\xi - \xi) \frac{1}{ch^2\xi} \\ cn(\xi, q) \Big|_{q \rightarrow 1} &\approx \frac{1}{ch\xi} - \frac{q'^2}{4} (sh\xi ch\xi - \xi) th\xi \frac{1}{ch\xi} \\ dn(\xi, q) \Big|_{q \rightarrow 1} &\approx \frac{1}{ch\xi} + \frac{q'^2}{4} (sh\xi ch\xi + \xi) th\xi \frac{1}{ch\xi} \end{aligned} \quad (5.4)$$

подамо формулу (5.3) у відповідній формі:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2} q'^2 \right) \frac{\left(th(\eta a) + \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) - (\eta a)) \frac{1}{ch^2(\eta a)} \right)}{\frac{1}{ch(\eta a)} + \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) + (\eta a)) th(\eta a) \frac{1}{ch(\eta a)}} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{1}{ch(\eta a)} - \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) - (\eta a)) th(\eta a) \frac{1}{ch(\eta a)} \right)}{\frac{1}{ch(\eta a)} + \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) + (\eta a)) th(\eta a) \frac{1}{ch(\eta a)}} \approx \\
&\approx \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2} q'^2 \right) \frac{\frac{th(\eta a)}{ch(\eta a)} + \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) - (\eta a)) \frac{1}{ch^3(\eta a)}}{\frac{1}{ch(\eta a)} + \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) + (\eta a)) th(\eta a) \frac{1}{ch(\eta a)}} - \\
&- \frac{\frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) - (\eta a)) \frac{sh^2(\eta a)}{ch^3(\eta a)}}{\frac{1}{ch(\eta a)} + \frac{q'^2}{4} (sh(\eta a) ch(\eta a) + (\eta a)) th(\eta a) \frac{1}{ch(\eta a)}} \approx \\
&\approx \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2} q'^2 \right) \frac{\frac{th(\varepsilon a)}{ch(\varepsilon a)} + \frac{q'^2}{4} \left(\frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} - \frac{\varepsilon a}{ch^3(\varepsilon a)} - \frac{sh^3(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} + \varepsilon a \frac{sh^2(\varepsilon a)}{ch^3(\varepsilon a)} \right)}{\frac{1}{ch(\varepsilon a)} + \frac{q'^2}{4} (sh(\varepsilon a) ch(\varepsilon a) + (\varepsilon a)) th(\varepsilon a) \frac{1}{ch(\varepsilon a)}}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

А користуючись основними властивостями еліптичних функцій Якобі

$$ch^2(\varepsilon a) - sh^2(\varepsilon a) = 1,$$

$$ch^2(\varepsilon a) - 1 = sh^2(\varepsilon a),$$

$$1 - sh^2(\varepsilon a) = 2 - ch^2(\varepsilon a),$$

дещо спростимо вираз (5.5). При цьому виконаємо перетворення деяких із доданків (5.5) у такий спосіб:

$$\frac{sh(\varepsilon a) - sh^3(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} - \varepsilon a \frac{2 - ch^2(\varepsilon a)}{ch^3(\varepsilon a)} = 2 \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} - sh(\varepsilon a) - 2 \frac{\varepsilon a}{ch^3(\varepsilon a)} + \frac{\varepsilon a}{ch(\varepsilon a)} =$$

$$= \left[sh(\varepsilon a) - \frac{\varepsilon a}{ch(\varepsilon a)} \right] \left[\frac{2}{ch^2(\varepsilon a)} - 1 \right],$$

$$ch \left[\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} q'^2 \right) a \right] = ch \left[\varepsilon a - \frac{1}{2} q'^2 \varepsilon a \right] = ch(\varepsilon a) ch \left(\frac{1}{2} q'^2 \varepsilon a \right) - sh(\varepsilon a) sh \left(\frac{1}{2} q'^2 \varepsilon a \right) \approx$$

$$\approx ch(\varepsilon a) \left[1 - \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot th(\varepsilon a) \right],$$

$$sh \left[\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} q'^2 \right) a \right] = sh \left(\varepsilon a - \frac{1}{2} q'^2 \varepsilon a \right) = sh(\varepsilon a) ch \left(\frac{1}{2} q'^2 \varepsilon a \right) - ch(\varepsilon a) sh \left(\frac{1}{2} q'^2 \varepsilon a \right) \approx$$

$$\approx sh(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a),$$

$$\frac{th(\eta a)}{ch(\eta a)} = \frac{sh(\eta a)}{ch^2(\eta a)} = \frac{sh(\varepsilon a) - \frac{q'^2 \varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a)}{2}}{\left[ch(\varepsilon a) \left(1 - \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot th(\varepsilon a) \right) \right]^2} \approx \frac{sh(\varepsilon a) - \frac{q'^2 \varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a)}{2}}{ch^2(\varepsilon a) \left(1 - q'^2 \varepsilon a \cdot th(\varepsilon a) \right)} \approx$$

$$\approx \frac{1}{ch^2(\varepsilon a)} \left[sh(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a) \right],$$

$$\begin{aligned}
\left[1 + q'^2 \varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a)\right] &\approx \frac{1}{ch^2(\varepsilon a)} \left[sh(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a) + \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} \right] \approx \\
&\approx \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} + q'^2 \varepsilon a \left(\frac{1}{2ch(\varepsilon a)} - \frac{1}{ch^3(\varepsilon a)} \right), \\
\frac{1}{ch(\eta a)} &\approx \frac{1}{ch(\varepsilon a) \left(1 - \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot th(\varepsilon a) \right)} \approx \frac{1}{ch(\varepsilon a)} \left(1 + \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot th(\varepsilon a) \right) \approx \\
&\approx \frac{1}{ch(\varepsilon a)} + \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \cdot \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)}.
\end{aligned}$$

Виконавши певні перетворення отримуємо доданок E_2 у вигляді:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{\frac{2}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2} q'^2 \right)}{\frac{1}{ch(\varepsilon a)} + \frac{q'^2}{2} \varepsilon a \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} + \frac{q'^2}{4} \left(\frac{sh^2(\varepsilon a)}{ch(\varepsilon a)} + \varepsilon a \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} \right)} \times \\
&\times \left[\frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} + q'^2 \varepsilon a \left(\frac{1}{2ch(\varepsilon a)} - \frac{1}{ch^3(\varepsilon a)} \right) + \frac{q'^2}{4} \left(2 \frac{sh(\varepsilon a)}{ch^2(\varepsilon a)} - sh(\varepsilon a) - 2 \frac{\varepsilon a}{ch^3(\varepsilon a)} + \frac{\varepsilon a}{ch(\varepsilon a)} \right) \right] \approx \\
&\approx \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2} q'^2 \right) \left[\frac{sh(\varepsilon a)}{ch(\varepsilon a)} + q'^2 \left(\frac{sh(\varepsilon a)}{2ch(\varepsilon a)} - \frac{sh(\varepsilon a)ch(\varepsilon a)}{4} + \frac{3}{4} \varepsilon a - \frac{3\varepsilon a}{2ch^2(\varepsilon a)} \right) \right] \cdot \\
&\cdot \left[1 - q'^2 \left(\frac{3\varepsilon a \cdot sh(\varepsilon a)}{4ch(\varepsilon a)} + \frac{sh^2(\varepsilon a)}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] \approx \\
&\approx \frac{2}{3} \varepsilon^3 th(\varepsilon a) - q'^2 \varepsilon^3 \left(\frac{1}{2} th(\varepsilon a) + \frac{sh(\varepsilon a)ch(\varepsilon a)}{3} + \frac{\varepsilon a}{2ch^2(\varepsilon a)} \right).
\end{aligned}$$

Відповідно,

$$E_3 = \frac{2}{3}(2-q^2)\eta^3 E[am(\eta a), q] \approx \frac{2}{3}(1+q'^2)\varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2}q'^2\right) E\left[am\left(\varepsilon a \left(1 - \frac{q'^2}{2}\right)\right), q\right] \approx$$

$$\approx \frac{2}{3}\varepsilon^3 \left(1 - \frac{1}{2}q'^2\right) E\left[am\left(\varepsilon a \left(1 - \frac{q'^2}{2}\right)\right), q\right].$$

Для знаходження доданку E_3 необхідно розкласти аргумент еліптичного інтегралу $am\left(\varepsilon a \left(1 - \frac{q'^2}{2}\right)\right)$:

$$am(\xi, q) \Big|_{q \rightarrow 1} = gd\xi + \frac{q'^2}{4}(sh\xi ch\xi - \xi) \frac{1}{ch\xi} = \arcsin(th\varepsilon) + \frac{q'^2}{4}(sh\xi ch\xi - \xi) \frac{1}{ch\xi},$$

звідки випливає необхідність в розвиненні аргумента $\arcsin(th\varepsilon)$:

$$th\left(\varepsilon a - \frac{q'^2}{2}\varepsilon a\right) = \frac{sn\left(\varepsilon a - \frac{q'^2}{2}\varepsilon a\right)}{cn\left(\varepsilon a - \frac{q'^2}{2}\varepsilon a\right)} = \frac{sh(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2}\varepsilon a \cdot ch(\varepsilon a)}{ch(\varepsilon a) \left[1 - \frac{q'^2}{2}\varepsilon a \cdot th(\varepsilon a)\right]} \approx th(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2} \frac{\varepsilon a}{ch^2(\varepsilon a)}.$$

Підставимо отримані значення $th\varepsilon$ у вираз $\arcsin(th\varepsilon)$:

$$\arcsin\left[th(\varepsilon a) \sqrt{1 - \left(\frac{q'^2 \varepsilon a}{2ch(\varepsilon a)}\right)} - \frac{q'^2}{2} \frac{\varepsilon a}{ch^2(\varepsilon a)} \sqrt{1 - th^2(\varepsilon a)}\right] \approx$$

$$\approx \arcsin\left[th(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2} \frac{\varepsilon a}{ch(\varepsilon a)}\right].$$

Отриманий вираз тепер підставити в вираз для еліптичної амплітуди $\left[am\left(\varepsilon a \left(1 - \frac{q'^2}{2}\right)\right), q\right]$:

$$\left[\operatorname{am} \left(\varepsilon a \left(1 - \frac{q'^2}{2} \right) \right), q \right] \Big|_{q \rightarrow 1} = \arcsin \left[\operatorname{th}(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{2} \frac{\varepsilon a}{\operatorname{ch}(\varepsilon a)} \right] + \frac{q'^2}{4} \operatorname{sh}(\varepsilon a) \operatorname{ch}(\varepsilon a) -$$

$$- \frac{q'^2}{4} \frac{\varepsilon a}{\operatorname{ch}(\varepsilon a)} \approx \arcsin \left[\operatorname{th}(\varepsilon a) + \frac{q'^2}{4} \left(\operatorname{sh}(\varepsilon a) \operatorname{ch}(\varepsilon a) - \frac{3\varepsilon a}{\operatorname{ch}(\varepsilon a)} \right) \right].$$

Для знаходження $E(\varphi, q)$ при $q \rightarrow 1$ потрібно проінтегрувати даний еліптичний інтеграл другого порядку:

$$E(\varphi, q) \Big|_{q \rightarrow 1} = \left(\int_0^\varphi \sqrt{1 - (1 - q'^2) \sin^2 \alpha} d\alpha \right) \Big|_{q \rightarrow 1} = \left(\int_0^\varphi \sqrt{\cos^2 \alpha + q'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \right) \Big|_{q \rightarrow 1} =$$

$$= \left(\int_0^\varphi \cos \alpha \sqrt{1 + q'^2 \operatorname{th}^2 \alpha} d\alpha \right) \Big|_{q \rightarrow 1} = \int_0^\varphi \cos \alpha \left[1 + \frac{q'^2}{2} \operatorname{th}^2 \alpha \right] d\alpha =$$

$$= \int_0^\varphi \left[\cos \alpha + \frac{q'^2}{2} \cos \alpha \operatorname{th}^2 \alpha \right] d\alpha = \sin \alpha + \frac{q'^2}{2} \int_0^\varphi \cos \alpha \operatorname{th}^2 \alpha d\alpha =$$

$$= \sin \alpha + \frac{q'^2}{2} \int_0^\varphi \cos \alpha \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \sin \alpha + \frac{q'^2}{2} \int_0^\varphi \left[\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right] d\alpha =$$

$$= \sin \alpha - \frac{q'^2}{2} \sin \alpha + \frac{q'^2}{2} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

де

$$\sin \alpha = \sin \left[\arcsin \left[\operatorname{th}(\varepsilon a) + \frac{q'^2}{4} \left(\operatorname{sh}(\varepsilon a) \operatorname{ch}(\varepsilon a) - \frac{3\varepsilon a}{\operatorname{ch}(\varepsilon a)} \right) \right] \right] =$$

$$= \operatorname{th}(\varepsilon a) + \frac{1}{\operatorname{ch}(\varepsilon a)} \frac{q'^2}{4} \left[\operatorname{sh}(\varepsilon a) - \frac{3\varepsilon a}{\operatorname{ch}(\varepsilon a)} \right].$$

Тепер отримаємо остаточний вираз для $E(\varphi, q) \Big|_{q \rightarrow 1}$:

$$\begin{aligned}
E(\varphi, q) \Big|_{q \rightarrow 1} &= th(\varepsilon a) + \frac{1}{ch(\varepsilon a)} \frac{q'^2}{4} \left[sh(\varepsilon a) - \frac{3\varepsilon a}{ch(\varepsilon a)} \right] - \frac{q'^2}{2} th(\varepsilon a) + \frac{q'^2}{2} (\varepsilon a) = \\
&= th(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{4} \left[th(\varepsilon a) - 3\varepsilon a \cdot th^2(\varepsilon a) + \varepsilon a \right].
\end{aligned}$$

Тоді доданок E_2 набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left(1 - \frac{3}{2} q'^2 \right) \left[th(\varepsilon a) - \frac{q'^2}{4} \left(th(\varepsilon a) - 3\varepsilon a \cdot th^2(\varepsilon a) + \varepsilon a \right) \right] \approx \\
&\approx \frac{2}{3} \varepsilon^3 th(\varepsilon a) - \frac{\varepsilon^3}{2} q'^2 \left[th(\varepsilon a) - \varepsilon a \cdot th^2(\varepsilon a) + \frac{\varepsilon a}{3} \right].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Нарешті, підставляючи всі доданки у формулу (5.2) отримаємо вираз для повної енергії системи за умови, що еліптичний модуль $q \rightarrow 1$:

$$E_\lambda \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{2}{3} q'^2 \varepsilon^3 th(\varepsilon a) ch^2(\varepsilon a) + \varepsilon^3 q'^2 ch^2(\varepsilon a) - \frac{1}{2} q'^2 \varepsilon^4 a - 2\lambda q'^2 \varepsilon^2 ch^2(\varepsilon a). \tag{5.7}$$

4.4. Висновки до розділу 4

Обчислено точне значення загальної енергії системи. Знайдено приведену функцію $E_\lambda(d, q)$, яка залежить лише від однієї масштабної змінної для будь-яких фіксованих допустимих значень еліптичного модуля q . Залежність $E_\lambda = E_\lambda(d, q)$ в (4.5) також має універсальну масштабовану форму, дійсну для різних значень характеристики інтерфейсу λ .

Наведено чисельні розрахунки для приведеної повної енергії системи $E_\lambda = E_\lambda(d)$, як функції масштабної змінної d , що характеризує відстань між інтерфейсами при значеннях еліптичного модуля $q = 0.1$, $q = 0.5$ і $q = 0.9$.

Показано, що зі збільшенням відстані між інтерфейсами енергія (взагалі від'ємна) зменшується при значеннях модулів $q = 0.1$ і $q = 0.5$. Однак зі збільшенням модуля q вона стає додатньою і зростає зі збільшенням відстані між інтерфейсами d .

Надано обчислення частинного випадку повної енергії системи, коли еліптичний модуль прямує до одиниці. Отримано точний розв'язок для E_λ при $q \rightarrow 1$, який підтверджує правильність отриманого виразу (4.5) для повної енергії системи.

РОЗДІЛ 5

5.1. Розрахунок сили взаємодії між інтерфейсами

Корисно знайти силу тяжіння, яка виникає в досліджуваній системі між двома інтерфейсами, що мають лінійні властивості в нелінійному оточуючому середовищі. Обчислюватимемо цю силу за формулою

$$F = -\frac{\partial E(2a, \lambda, q)}{\partial(2a)}. \quad (6.1)$$

Нормуючи вираз (6.1) на λ^4 , можемо ввести приведену силу, яка виникає між інтерфейсами $F_\lambda = F/\lambda^4$:

$$F_\lambda = \frac{F}{\lambda^4} = -\frac{1}{\lambda^4} \cdot \frac{\partial E(2a, \lambda, q)}{\partial(2a)} = -\frac{\partial E_\lambda(2d, q)}{\partial(2d)}. \quad (6.2)$$

Для розрахунку сили будемо обчислювати похідну $\frac{\partial E(2a, \lambda, q)}{\partial(2a)}$. Отже, маємо

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^3 q'^2 ch^2(\varepsilon a) - \frac{4}{3} \varepsilon^3 + - \\ & q'^2 \varepsilon^3 \frac{sh(\varepsilon a) ch(\varepsilon a)}{3} - q'^2 \varepsilon^3 \frac{\varepsilon a}{2ch^2(\varepsilon a)} - \\ & + \frac{\varepsilon^4}{2} q'^2 a \cdot th^2(\varepsilon a) = \\ & E_\lambda \Big|_{q \rightarrow 1} = \frac{4}{3} q'^2 \varepsilon^3 th(\varepsilon a) ch^2(\varepsilon a) + \varepsilon^3 q'^2 ch^2(\varepsilon a) - \frac{1}{2} q'^2 \varepsilon^4 a - 2\lambda q'^2 \varepsilon^2 ch^2(\varepsilon a) \end{aligned}$$

Зручно шукати похідну від кожного доданку окремо:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6. \quad (6.3)$$

Відповідно маємо

$$\begin{aligned}
F_1 = \eta^2 \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} & \left[2q^2 q'^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta_\lambda d, q)} + q^2 (2 - q^2) \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}(\eta_\lambda d, q)} - \right. \\
& - (2 - q^2) \operatorname{E}[am(\eta_\lambda d, q), q] - q'^2 \eta_\lambda d \left. \right\} + 2\varepsilon_\lambda^2 \eta_\lambda \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} - \\
& - \frac{4}{3} \eta_\lambda^3 \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \varepsilon_\lambda^3 - \frac{2q'^2 \eta_\lambda^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \left. \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 & \left[\frac{\partial}{\partial(2d)} \left(2q^2 q'^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta_\lambda d, q)} \right) + \frac{\partial}{\partial(2d)} \left(q^2 (2 - q^2) \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}(\eta_\lambda d, q)} \right) - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial(2d)} \left((2 - q^2) \operatorname{E}[am(\eta_\lambda d, q), q] \right) - \frac{\partial}{\partial(2d)} (q'^2 \eta_\lambda d) \left. \right] \\
& = \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 \left[q'^2 \left(\frac{2(2 - q^2)}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda q, d)} - \frac{3q'^2}{\operatorname{dn}^4(\eta_\lambda q, d)} - 1 \right) \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \right) - \frac{q'^2}{2} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} (2 - q^2) \left(\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda q, d) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda q, d)} \right) \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \right) - \\
& \left. - (2 - q^2) \frac{1}{2} \frac{\operatorname{E}[am(\eta_\lambda d, q), q] - K[am(\eta_\lambda d, q), q]}{q^2} \frac{1}{\operatorname{cn}(\eta_\lambda q, d)} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = 3(2 - q^2) \eta_\lambda^2 & \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} - \\
& - (2 - q^2) \eta_\lambda^3 q^2 q'^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta_\lambda d, q)} \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 = 2\eta_\lambda^2 \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} & \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} - 2\eta_\lambda^3 q^2 q'^2 \frac{\operatorname{sn}(\eta_\lambda d, q) \operatorname{cn}(\eta_\lambda d, q)}{\operatorname{dn}^3(\eta_\lambda d, q)} \times \\
& \times \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{\operatorname{dn}^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial(2d)} \right),
\end{aligned}$$

$$F_5 = \eta_\lambda^2 (2 - q^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)},$$

$$F_6 = q'^2 \left[\frac{2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \eta_\lambda \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} + \frac{2}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} \eta_\lambda^2 q^2 sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q) \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) \right].$$

Знайдені значення похідних підставимо у вираз для сили (6.3):

$$\begin{aligned} F = \eta^2 \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} & \left[\left\{ 2q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} + q^2 (2 - q^2) \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn(\eta_\lambda d, q)} - \right. \right. \\ & - (2 - q^2) E[am(\eta_\lambda d, q), q] - q'^2 \eta_\lambda d \left. \right\} + 2\varepsilon_\lambda^2 \eta_\lambda \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{4}{3} \eta_\lambda^3 \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \varepsilon_\lambda^3 - \frac{2q'^2 \eta_\lambda^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \left. \right] + \frac{2}{3} \eta_\lambda^3 [q'^2 \left(\frac{2(2 - q^2)}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} - \frac{3q'^2}{dn^4(\eta_\lambda d, q)} - 1 \right) \times \\ & \times \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) - \frac{q'^2}{2} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) + \frac{1}{2} (2 - q^2) \left(dn^2(\eta_\lambda d, q) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right) \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) - \\ & - (2 - q^2) \frac{1}{2} \frac{E[am(\eta_\lambda d, q), q] - K[am(\eta_\lambda d, q), q]}{q^2} \frac{1}{cn(\eta_\lambda d, q)} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) \left. \right] + 3(2 - q^2) \eta_\lambda^2 \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \times \\ & \times \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} - (2 - q^2) \eta_\lambda^3 q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) - 2\eta_\lambda^2 \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{3}{2}} + 2\eta_\lambda^3 q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} \times \\ & \times \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) - \eta_\lambda^2 (2 - q^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} - q'^2 \left[\frac{2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \eta_\lambda \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} + \right. \\ & \left. \frac{2}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} \eta_\lambda^2 q^2 sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q) \left(\eta_\lambda + d \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial (2d)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Виконуючи певні перетворення і спрощуючи отриманий вираз, знайдемо остаточну формулу для сили тяжіння між інтерфейсами:

$$\begin{aligned}
F = & \eta_\lambda^3 (\eta_\lambda + d\eta'_\lambda) \left[\frac{q'^2 (2 - q^2)}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} + q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\
& \times \left. \left((2 - q^2) - \frac{2q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right) + \frac{1}{3} (2 - q^2) dn^2(\eta_\lambda d, q) - \right. \\
& \left. \frac{(2 - q^2)}{2} \frac{E[am(\eta_\lambda d, q), q] - K[am(\eta_\lambda d, q), q]}{q^2} \frac{1}{cn(\eta_\lambda d, q)} - \frac{q'^4}{dn^4(\eta_\lambda d, q)} - q'^2 \right] + \\
& + \eta_\lambda^2 \eta'_\lambda [2q^2 q'^2 (d + 1) \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} + q^2 (2 - q^2) \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn(\eta_\lambda d, q)} - \\
& - (2 - q^2) (E[am(\eta_\lambda d, q), q] - (2 - q^2)^{\frac{1}{2}}) + \left. \left((2 - q^2) - \frac{q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)} \right)^{\frac{1}{2}} (4 - q^2) \right] - \\
& - \eta_\lambda^3 \eta'_\lambda q'^2 d - 2\eta_\lambda^2 \eta'_\lambda q^2 q'^2 \frac{sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q)}{dn^3(\eta_\lambda d, q)} - \eta_\lambda \eta'_\lambda \frac{2q'^2}{dn^2(\eta_\lambda d, q)}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Щоб знайти залежність сили F від відстані між інтерфейсами d потрібно знайти похідну від другої граничної умови (3.6):

$$\begin{cases} F_\lambda = F_\lambda(\eta'_\lambda, \eta_\lambda, d, q) \\ \eta_\lambda = \eta_\lambda(d, q) \\ \eta'_\lambda = \eta'_\lambda(d, q) \end{cases} \tag{6.5}$$

що приводить до виразу

$$\begin{aligned}
& \eta'_\lambda [q^2 sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q) (d + 1) \sqrt{(2 - q^2) dn^2(\eta_\lambda d, q) - q'^2} + \\
& + q^2 \eta_\lambda d (2cn^2(\eta_\lambda d, q) - 1) dn(\eta_\lambda d, q) \sqrt{(2 - q^2) dn^2(\eta_\lambda d, q) - q'^2} + \\
& + (2 - q^2) dn^2(\eta_\lambda d, q) - (2 - q^2) q^2 \eta_\lambda d sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q) dn(\eta_\lambda d, q) - q'^2] = \\
& = (2 - q^2) q^2 \eta_\lambda^2 sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q) dn(\eta_\lambda d, q) - \\
& - q^2 \eta_\lambda^2 (2cn^2(\eta_\lambda d, q) - 1) dn(\eta_\lambda d, q) \sqrt{(2 - q^2) dn^2(\eta_\lambda d, q) - q'^2} - \\
& - q^2 \eta_\lambda^2 sn(\eta_\lambda d, q) cn(\eta_\lambda d, q) \sqrt{(2 - q^2) dn^2(\eta_\lambda d, q) - q'^2} .
\end{aligned} \tag{6.6}$$

5.2. Висновки до розділу 5

Знайдена сила тяжіння, яка виникає між двома інтерфейсами, що мають лінійні властивості в нелінійному оточуючому середовищі.

ВИСНОВКИ

Розв'язана задача про поширення нелінійних хвиль у системі двох плоскопаралельних тонких інтерфейсів, які володіють лінійними властивостями, але знаходяться в нелінійному оточуючому середовищі. Рішення задачі базується на розв'язанні неоднорідного нелінійного рівняння Шредінгера з двома симетричними точковими дефектами, які апроксимуються δ -функціями. Наведено синфазний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера у випадку фокусуєчого середовища. Отримано співвідношення, яке зв'язує основні параметри досліджуваної системи – частотну характеристику ε , інтенсивність інтерфейсів λ , відстань між інтерфейсами $2a$ і модуль q еліптичної функції. Встановлена умова, яка накладає обмеження на відстань між інтерфейсами.

Обчислено повне число елементарних збуджень, які виникають в системі двох зв'язаних лінійних хвилеводів у нелінійному середовищі. Знайдена функціональна залежність приведеної загальної кількості елементарних збуджень від однієї змінної масштабування, яка зв'язує між собою відстань між інтерфейсами та довжину локалізованого стану.

Обчислено повну енергію системи та знайдена функціональна залежність приведеної енергії системи від однієї змінної масштабування, яка зв'язує між собою відстань між інтерфейсами та довжину локалізованого стану. А також знайдено вираз для сили яка виникає між інтерфейсами.

Використання точного розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера на інтервалах постійних потенціалів відкриває можливість розгляду різних проблем локалізації за допомогою відповідних граничних умов. Отримані результати можуть бути використані для опису нелінійних локалізованих станів у структурних середовищах різного фізичного походження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. D.L. Mills and S.E. Trullinger, Gap solitons in nonlinear periodic structures, *Phys. Rev. B*, Vol. **36**, No. 2, pp. 947–952 (1987).
2. J.J. Rhyne, D.A. Neumann, J.A. Gotaas, and F. Beech, Phonon density of states of superconducting $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ and the nonsuperconducting analog $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$, *Phys. Rev. B*, Vol. **36**, No. 4, pp. 2294–2297 (1987).
3. D. Hennig, H. Gabriel, G.P. Tsironis, and M. Molina, Wave propagation in periodic nonlinear dielectric superlattices, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **64**, No. 22, pp. 2934–2936 (1994).
4. H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A.R. Boyd, and J.S. Aitchison, Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **81**, No. 16, pp. 3383–3386 (1998).
5. U. Peschel, R. Morandotti, J.S. Aitchison, H.S. Eisenberg, and Y. Silberberg, Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **75**, No. 10, pp. 1348–1350 (1999).
6. I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev, Localization of Nonlinear Waves in Layered Media, *Low Temp. Phys.*, Vol. **26**, No. 8, pp. 586–593 (2000) [I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev, *Fiz. Nizk. Temp.*, Vol. **26**, No. 8, pp. 799–809 (2000)].
7. I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev, Spatial Localization of Nonlinear Waves in Layered and Modulated Media, *JETP Letters*, Vol. **85**, No. 10, pp. 488–492 (2007) [I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev, *Pis'ma v ZhETF*, Vol. **85**, No. 10, pp. 594–598 (2007)].
8. C. Denz, S. Flach, and Yu.S. Kivshar (Eds.), *Nonlinearities in Periodic Structures and Metamaterials* (Springer Series in Optical Sciences, Vol. 150), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, 292 p.
9. Ruy-Bing Hwang, *Periodic Structures: Mode-Matching Approach and Applications in Electromagnetic Engineering*, Wiley-IEEE Press, 2012, 320 p.

10. I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev, Spatial Localization of Light Flux in an Array of Nonlinear Optical Waveguides, *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. **13**, No. 44, pp. L885–L889 (2001).
11. Yu.S. Kivshar and B.A. Malomed, Quasiclassical quantisation and radiative decay of sine-Gordon solitons pinned by a micro-inhomogeneity, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. **21**, No. 7, pp. 1553–1561 (1988).
12. M.M. Bogdan, I.V. Gerasimchuk, and A.S. Kovalev, Dynamics and stability of localized modes in nonlinear media with point defects, *Low Temp. Phys.* **23**, 145–152 (1997) [M.M. Bogdan, I.V. Gerasimchuk, and A.S. Kovalev, *Fiz. Nizk. Temp.* **23**, 197–207 (1997)].
13. I.V. Gerasimchuk, Localized States and Their Stability in an Anharmonic Medium with a Nonlinear Defect, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, Vol. **121**, No. 4, pp. 596–605 (2015) [I.V. Gerasimchuk, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, Vol. **148**, No. 4, pp. 685–695 (2015)].
14. Colloquium Digest of 14th International Colloquium on Magnetic Films and Surfaces, □-MRS Symposium on Magnetic Ultrathin Films, Multilayers and Surfaces (ICMFS/□-MRS'94). – Düsseldorf (Germany). – 1994. – 318 p.
15. Abstract Book of 2nd International Symposium on Metallic Multilayers (MML'95). – Cambridge (UK). – 1995. – 202 p.
16. Photonic Band Gaps and Localization / Ed. by C. M. Soukoulis. – New York: Plenum, 1993. – 278 p.
17. Photonic Band Gap Materials / Ed. by C. M. Soukoulis. – London: Kluwer Academic, 1996. – 214 p.
18. Sievers A.J., Takeno S. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – Vol. 61, № 8. – P. 970-973.
19. Takeno S., Sievers A.J. Anharmonic resonant modes in anharmonic crystals // *Solid State Commun.* – 1988. – Vol. 67, № 11. – P. 1023-1026.
20. Burlakov V.M., Kiselev S.A., Pyrkov V.N. Computer simulations of intrinsic localized modes in 1-D anharmonic lattices // *Solid State Commun.* – 1990. – Vol. 74, № 5. – P. 327-331.

21. Sievers A.J., Takeno S. Anharmonic resonant modes and the low-temperature specific heat of glasses // *Phys. Rev. B.* – 1989. – Vol. 39, № 5. – P. 3374-3379.
22. Page J.B. Asymptotic solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems // *Phys. Rev. B.* – 1990. – Vol. 41, № 11. – P. 7835-7838.
23. Bickham S.R., Sievers A.J. Intrinsic localized modes in a monatomic lattice with weakly anharmonic nearest-neighbor force constants // *Phys. Rev. B.* – 1991. – Vol. 43, № 3. – P. 2339-2346.
24. Sandusky K.W., Page J.B., Schmidt K.E. Stability and motion of intrinsic localized modes in nonlinear periodic lattices // *Phys. Rev. B.* – 1992. – Vol. 46, № 10. – P. 6161-6168.
25. Kiselev S.A., Bickham S.R., Sievers A.J. Anharmonic impurity modes in a 1-D lattice with two-body potentials // *Phys. Lett. A.* – 1994. – Vol. 184, № 3. – P. 255-259.
26. Mills D.L., Trullinger S.E. Gap solitons in nonlinear periodic structures // *Phys. Rev. B.* – 1987. – Vol. 36, № 2. – P. 947-952.
27. Chubykalo O.A., Kovalev A.S., Usatenko O.V. Dynamical solitons in a one-dimensional nonlinear diatomic chain // *Phys. Rev. B.* – 1993. – Vol. 47, № 6. – P. 3153-3160.
28. Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R., Boyd A.R., Aitchison J.S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81, № 16. – P. 3383-3386.
29. Peschel U., Morandotti R., Aitchison J.S., Eisenberg H.S., Silberberg Y. Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays // *Appl. Phys. Lett.* – 1999. – Vol. 75, № 10. – P. 1348-1350.
30. Silberberg Y., Stegeman G.I. Nonlinear coupling of waveguide modes // *Appl. Phys. Lett.* – 1987. – Vol. 50, № 13. – P. 801-803.
31. Heatley D.R., Wright E.M., Stegeman G.I. Soliton coupler // *Appl. Phys. Lett.* – 1988. – Vol. 53, № 3. – P. 172-174.

32. Silberberg Y., Stegeman G.I. Nonlinear coupling of waveguide modes // *Appl. Phys. Lett.* – 1987. – Vol. 50, № 13. – P. 801-803.
33. Heatley D.R., Wright E.M., Stegeman G.I. Soliton coupler // *Appl. Phys. Lett.* – 1988. – Vol. 53, № 3. – P. 172-174.
34. Rhyne J.J., Neumann D.A., Gotaas J.A. Phonon density of states of superconducting YBa₂Cu₃O₇ and the nonsuperconducting analog YBa₂Cu₃O₆ // *Phys. Rev. B.* – 1987. – Vol. 36, № 4. – P. 2294-2297.
35. Pintschovius L., Pyka N., Reichardt W. Lattice dynamical studies of HTSC materials // *Physica B.* – 1991. – Vol. 174, № 1-4. – P. 323-329.
36. Степанов А.А., Пащенко В.А., Кобец М.И. Обменные моды в моноклинных двумерных антиферромагнетиках // *ФНТ.* – 1988. – Т. 14, № 5. – С. 550-553.
37. Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R., Boyd A.R., Aitchison J.S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81, № 16. – P. 3383-3386.
38. Peschel U., Morandotti R., Aitchison J.S., Eisenberg H.S., Silberberg Y. Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays // *Appl. Phys. Lett.* – 1999. – Vol. 75, № 10. – P. 1348-1350.
39. Степанов А.А., Яблонский Д.А. Магнитный трансляционный беспорядок в слоистых антиферромагнетиках // *ФНТ.* – 1989. – Т. 15, № 2. – С. 215-216.
40. Богдан М.М., Кобец М.И., Хацько Е.Н. Хаотические режимы антиферромагнитного резонанса в квазидвумерном легкоосном антиферромагнетике (NH₃)₂(CH₂)₄MnCl₄ // *ФНТ.* – 1999. – Т. 25, № 3. – С. 263-276.
41. Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R., Boyd A.R., Aitchison J.S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81, № 16. – P. 3383-3386.
42. Peschel U., Morandotti R., Aitchison J.S., Eisenberg H.S., Silberberg Y. Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays // *Appl. Phys. Lett.* – 1999. – Vol. 75, №
43. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наукова думка, 1989. – 304 с.

44. Jensen S.M. The dynamics of a quantum crystal with defects // *IEEE J. Quantum Electron.* – 1982. – Vol. QE-18, № 14. – P. 1580-1583.
45. Thylen L., Wright E.M., Stegeman G.I., Seaton C.T. Beam-propagation method analysis of a nonlinear directional coupler // *Opt. Lett.* – 1986. – Vol. 11, № 11. – P. 739-741.
46. Wabnitz S., Wright E.M., Seaton C.T., Stegeman G.I. Instabilities and all-optical phase-controlled switching in a nonlinear directional coherent coupler // *Appl. Phys. Lett.* – 1986. – Vol. 49, № 14. – P. 838-840.
47. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. Распространение нелинейных волн вдоль плоскопараллельных дефектов // *Вісник ХДУ. Серія “Фізика”*. – 1998. – № 418, Вип.2. – С. 8-12.
48. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. Распространение световых пучков в фокусирующей оптической среде с системой параллельных волноводов // *Радиотехника*. – 1999. – Вып.110. – С. 134-137.
49. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. Локализация нелинейных волн в слоистых средах // *ФНТ*. – 2000. – Т. 26, № 8. – С. 799-809.
50. Gerasimchuk I., Kovalev A. The localization of light beams in the system of the parallel plane waveguides in nonlinear optical media // *Book of Abstracts of the Workshop on Surface and Interface Optics (SIO'99)*. – Sainte-Maxime (France). – 1999. – P. 65.
51. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. Локализация оптических пучков в системе нелинейных волноводов // *Вісник ХДУ. Серія “Фізика”*. – 1999. – № 440, Вип.3. – С. 32-35.
52. Flach S., Willis C.R. Discrete breathers // *Phys. Rep.* – 1998. – Vol. 295. – P. 181-264.
53. Flach S. *Discrete Breathers: Habilitationsschrift*. – Dresden, Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, 1997. – 131 p.
54. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. Self-trapping of optical beams // *Phys. Rev. Lett.* – 1964. – Vol. 13, № 15. – P. 479-482.

55. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61, Вып.1(7). – С. 118-134.
56. Barthelemy A., Maneuf S., Froehly C. Propagation of nonlinear magnetization waves in layered antiferromagnets // Opt. Commun. – 1985. – Vol. 55, № 3. – P. 201-204.
57. Aceves A.B., De Angelis C., Peschel T. et al. Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53, № 1. – P. 1172-1189.
58. Kivshar Yu.S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: Physics and applications // Phys. Rep. – 1998. – Vol. 298, № 2,3. – P. 81-197.
59. Chen W., Mills D.L. Gap solitons and the nonlinear optical response of superlattices // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58, № 2. – P. 160-163.
60. Pintschovius L., Pyka N., Reichardt W. Lattice dynamical studies of HTSC materials // Physica B. – 1991. – Vol. 174, № 1-4. – P. 323-329.
61. Степанов А.А., Пащенко В.А., Кобец М.И. Обменные моды в моноклинных двумерных антиферромагнетиках // ФНТ. – 1988. – Т. 14, № 5. – С. 550-553. 10. – P. 1348-1350.
62. Hennig D., Gabriel H., Tsironis G.P., Molina M. Wave propagation in periodic nonlinear dielectric superlattices // Appl. Phys. Lett. – 1994. – Vol. 64, № 22. – P. 2934-2936.
63. Rhyne J.J., Neumann D.A., Gotaas J.A. Phonon density of states of superconducting $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ and the nonsuperconducting analog $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$ // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 36, № 4. – P. 2294-2297.
64. H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti et al. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays, Phys. Rev. Lett., 1998, Vol. 81, P. 3383-3386.
65. U. Peschel, R. Morandotti, J.S. Aitchison et al. Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays, Appl. Phys. Lett., 1999, Vol. 75, P. 1348-1350.

- 66.D. Hennig, H. Gabriel, G.P. Tsironis, M. Molina. Wave propagation in periodic nonlinear dielectric superlattices, *Appl. Phys. Lett.*, 1994, Vol. 64, P. 2934-2936.
- 67.Q. Li, C.T. Chan, K.M. Ho, C.M. Soukoulis. Wave propagation in nonlinear photonic band-gap materials, *Phys. Rev. B*, 1996, Vol. 53, P. 15577-15585.
- 68.D.L. Mills, S.E. Trullinger. Gap solitons in nonlinear periodic structures, *Phys. Rev. B*, 1987, Vol. 36, P. 947-952.
- 69.Yu.B. Gaididei, P.L. Christiansen, K.O. Rasmussen, M. Johansson. Two-dimensional effects in nonlinear Kronig-Penney models, *Phys. Rev. B*, 1997, Vol. 55, P. R13365-R13368.
- 70.A.S. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Gorbach. Bifurcation picture for gap solitons in nonlinear modulated systems, *Phys. Rev. E*, 1999, Vol. 60, P. 2309-2316.
71. I.V. Gerasimchuk and A.S. Kovalev, Spatial Localization of Light Flux in an Array of Nonlinear Optical Waveguides, *J. Phys.: Condens. Matter*, 2001, Vol. 13, P. L885-L889.
- 72.I.V. Gerasimchuk, Localized States and Their Stability in an Anharmonic Medium with a Nonlinear Defect, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2015, Vol. 121, P. 596–605.