ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.21

В.В. Булдигін, І.П. Блажієвська

ПРО КОРЕЛЯЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ КОРЕЛОГРАМНИХ ОЦІНОК ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ

Вступ

При дослідженні фізично здійснимих однорідних лінійних систем з імпульсною перехідною функцією $H(\tau), \tau \in \mathbb{R}$, виникає *задача оцінювання функції* H по спостереженнях за реакцією системи на вхідний сигнал. Для розв'язання цієї задачі поряд з детермінованими методами існують статистичні методи, пов'язані зі збуренням системи стаціонарними випадковими процесами та з подальшим аналізом характеристик вхідного та вихідного процесів [1–5]. Для стійкої системи $(H \in L_1(\mathbb{R}))$ у вихідного процесу існує спектральна щільність, і оцінювання можна здійснювати за допомогою періодограм [6, 7]. У випадку нестійких систем доцільно використовувати інші методи, зокрема корелограмний метод, суть якого полягає в побудові сумісної корелограми між випадковим процесом, що подається на вхід системи, та відгуком системи [8]. Відповідні корелограмні оцінки мають "добрі" властивості у випадку збурення системи білим шумом. Такий підхід є ідеалізованим, і в дійсності систему можна збурювати процесами, які в деякому розумінні наближаються до білого шуму [9–12].

Постановка задачі

У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbb{R})$. Таке припущення дає можливість розглядати нестійкі системи з резонансними особливостями. Задача полягає у вивченні асимптотичної поведінки кореляційної функції корелограмної оцінки за умови, що систему збурює послідовність гауссівських стаціонарних процесів, спектральні щільності яких збігаються до сталої в кожній точці.

Означення та попередні відомості

Введемо позначення, що використовуються протягом всієї статті:

$L_p(\mathbb{R}), p \in [1,\infty)$, – простір комплекснозначних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in \mathbb{R})$, інтегрованих у p-му степені по мірі Лебега, з нормою $\|\varphi\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}$;

$L_\infty(\mathbb{R})$ – простір обмежених комплекснозначних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in \mathbb{R})$ з нормою $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$.

Нехай задано *фізично здійсниму однорідну лінійну систему з імпульсною перехідною функцією* $H(\tau), \tau \in \mathbb{R}$. Це означає, що дійснозначна функція H задовольняє умову $H(\tau) = 0, \tau < 0$, а реакція системи на "допустимий" вхідний сигнал $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$y(t) = \int_0^\infty H(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau. \qquad (1)$$

Якщо $H \in L_2(\mathbb{R})$, то *частотною характеристикою (частотною функцією) системи* H^* називають перетворення Фур'є–Планшереля [13] функції H у просторі $L_2(\mathbb{R})$

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-i\lambda t} dt, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо серію стаціонарних гауссівських центрованих процесів $(X_\Delta(t), t \in \mathbb{R}), \Delta > 0$, що збурюють систему (1), і таких, що їх спектральні щільності збігаються в кожній точці до сталої при $\Delta \to \infty$. Відгуком системи на вхідний сигнал X_Δ є випадковий процес

$$Y_\Delta(t) = \int_0^\infty H(s) X_\Delta(t-s)\, ds, t \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що тут і далі всі інтеграли від значень процесів слід розуміти як середньоквадратичні інтеграли Рімана [14].

Оцінку для H шукатимемо у вигляді нормованої сумісної емпіричної корелограми

$$\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cT}\int_0^T Y_\Delta(t+\tau) X_\Delta(t)\, dt, \tau \geq 0, \qquad (2)$$

де c – деяка додатна стала, яка буде визначена нижче; T – довжина інтервалу усереднення.

Як спектральні щільності $(f_\Delta(\lambda), \lambda \in \mathbb{R})$, $\Delta > 0$, процесів X_Δ будемо розглядати дійснозначні невід'ємні неперервні функції, що задовольняють такі умови:

функції симетричні

$$f_{\Delta}(\lambda) = f_{\Delta}(-\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}; \tag{3а}$$

виконується нерівність

$$\sup_{\Delta>0} \| f_{\Delta} \|_{\infty} < \infty; \tag{3б}$$

має місце

$$f_{\Delta} \in L_1(\mathbb{R}); \tag{3в}$$

існує стала $c \in (0,\infty)$, така, що для будь-якого $a \in (0,\infty)$

$$\lim_{\Delta\to\infty} \sup_{-a\le\lambda\le a} \left| f_{\Delta}(\lambda) - \frac{c}{2\pi} \right| = 0; \tag{3г}$$

має місце

$$K_{\Delta} \in L_1(\mathbb{R}), \tag{3д}$$

де $K_{\Delta}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{\Delta}(\lambda) d\lambda, \ t \in \mathbb{R}$, – кореляційна функція процесу X_{Δ}.

З умов (3в) та (3д) випливає, що процеси X_{Δ} і Y_{Δ} є неперервними в середньому квадратичному. Умови (3а)–(3д) визначають характер збіжності послідовності $(X_{\Delta}, \Delta > 0)$ до гауссівського білого шуму при $\Delta \to \infty$. Ці умови задовольняють, наприклад, такі функції:

$$f_{\Delta}(\lambda) = \frac{c}{2\pi} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\Delta} \right), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо центровану та нормовану емпіричну корелограму

$$\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\,[\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)], \ \tau \ge 0,$$

де $E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{c}\int_0^T K_{\Delta}(\tau - s) H(s) ds$.

Якщо $H \in L_2(\mathbb{R})$, то для всіх $\tau_1, \tau_2 \ge 0$ *кореляційна функція процесу* $\hat{Z}_{T,\Delta}$ має вигляд (див. [9])

$$E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) = \hat{C}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2) =$$

$$= \frac{2\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} | H^*(\lambda_2)|^2 +$$

$$+ e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2)] \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) \times$$

$$\times f_{\Delta}(\lambda_1) f_{\Delta}(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{4}$$

де Φ_T – ядро Фейєра:

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2} \right)^2, \ \lambda \in \mathbb{R};$$

H^* – перетворення Фур'є–Планшереля функції H у просторі $L_2(\mathbb{R})$; c – стала з умови (3г).

Основний результат

Розглянемо умови, за яких кореляційна функція процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ має границю при $T, \Delta \to \infty$, і наведемо її вигляд.

Позначимо

$$C_{\infty}(\tau_1, \tau_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda} | H^*(\lambda)|^2 + e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda} (H^*(\lambda))^2] d\lambda,$$

$$\tau_1, \tau_2 \ge 0,$$

і зауважимо, що функція коректно визначена, а також є неперервною функцією за умови $H \in L_2(\mathbb{R})$. Цю функцію можна записати в такому вигляді:

$$C_{\infty}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos(\tau_1 - \tau_2)\lambda \, | H^*(\lambda)|^2 +$$

$$+ \cos(\tau_1 + \tau_2)\lambda \cdot \mathrm{Re}(H^*(\lambda))^2 -$$

$$- \sin(\tau_1 + \tau_2)\lambda \cdot \mathrm{Im}(H^*(\lambda))^2] d\lambda, \ \tau_1, \tau_2 \ge 0,$$

звідки видно, що вона дійснозначна.

Теорема. Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді для всіх $\tau_1 \ge 0$ та $\tau_2 \ge 0$ матимемо

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) = C_{\infty}(\tau_1, \tau_2). \tag{5}$$

Наслідок. Гранична дисперсійна функція процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ має вигляд

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} T\,|\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau)-E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau)|^2=\|H\|_2^2+$$

$$+\int_0^{2\tau} H(t)H(2\tau-t)dt,\ \tau>0.$$

Зауваження. Теорема дає зображення граничної кореляційної функції процесу $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ при умовах, значно слабших, ніж у [9], де вимагалось: 1) $H\in L_2(\mathbb{R})$; 2) існує таке $p>2$, що $H^*\in L_{2p}(\mathbb{R})$; 3) функція H^* неперервна майже скрізь (відносно міри Лебега).

Доведення теореми. При доведенні теореми розвиваються загальні підходи, запропоновані в працях [10, 11].

Доведення розіб'ємо на дві частини. У першій частині доводиться, що

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} \widehat{C}^{(1)}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=C^{(1)}_{\infty}(\tau_1,\tau_2), \tag{6}$$

де

$$\widehat{C}^{(1)}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=\frac{2\pi}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\times$$

$$\times\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2;$$

$$C^{(1)}_{\infty}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2 d\lambda,\ \tau_1,\tau_2\ge 0.$$

У другій частині встановлюється рівність

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} \widehat{C}^{(2)}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=C^{(2)}_{\infty}(\tau_1,\tau_2), \tag{7}$$

де

$$\widehat{C}^{(2)}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=\frac{2\pi}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)}H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)f_\Delta(\lambda_1)\times$$

$$\times f_\Delta(\lambda_2)\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2;$$

$$C^{(2)}_{\infty}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda}(H^*(\lambda))^2 d\lambda,\ \tau_1,\tau_2\ge 0.$$

Перша частина: доведення формули (6). Зафіксуємо довільне $b>0$ і через $\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}$ позначимо індикатор сегмента $[-b/2,b/2]$.

Далі для будь-яких $\tau_1,\tau_2\ge 0$, $T>0$ та $\Delta>0$ розглянемо різницю

$$C^{(1)}_{\infty}(\tau_1,\tau_2)-\widehat{C}^{(1)}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2 d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\times$$

$$\times\left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2=$$

$$=\frac{1}{2\pi}[d_1(b)+d_2(b,T,\Delta)+d_3(b,T,\Delta)],$$

де

$$d_1=d_1(b)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2 d\lambda-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,\,b/2]}(\lambda)d\lambda;$$

$$d_2=d_2(b,T,\Delta)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda)d\lambda-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2;$$

$$d_3=d_3(b,T,\Delta)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\times$$

$$\times\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Розглянемо поведінку кожної з величин d_k, $k=1,2,3$. Оскільки для будь-якого $b>0$ матимемо

$$|d_1(b)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2[1-\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda)]d\lambda\right|=$$

$$=\left|\int_{|\lambda|>b/2} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}|H^*(\lambda)|^2 d\lambda\right|\le\int_{|\lambda|>b/2}|H^*(\lambda)|^2 d\lambda$$

та $|H^*|^2\in L_1(\mathbb{R})$, то одержимо

$$\lim_{b\to\infty} d_1(b)=0. \quad (8)$$

Оскільки $\|\Phi_T\|_1=1$, то для будь-яких $b>0$, $T>0$ та $\Delta>0$ отримаємо вираз оцінки для d_2

$$|d_2(b,T,\Delta)|=$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right|\le$$

$$\le\left|\iint_{D_b} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right|+$$

$$+\left|\iint_{\mathbb{R}^2\setminus D_b} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right|,$$

де $D_b=[-b,b]\times[-b,b]$.

Перший з двох доданків оцінюємо таким чином:

$$B_1(T,\Delta)=\left|\iint_{D_b} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right|\le$$

$$\le\iint_{D_b}\left|H^*(\lambda_2)\right|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times$$

$$\times\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right|\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\le$$

$$\le\sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right|\|H^*\|_2^2\|\Phi_T\|_1=$$

$$=2\pi\|H\|_2^2\sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right|.$$

З умови (3б) випливає оцінка

$$\sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right|\le$$

$$\le\sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left[\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)f_\Delta(\lambda_1)\right|+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2\pi}{c}\right)|f_\Delta(\lambda_1)|\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)f_\Delta(\lambda_2)\right|\right]\le$$

$$\le\left[1+\left(\frac{2\pi}{c}\right)\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right]\sup_{-b\le\lambda\le b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)f_\Delta(\lambda)\right|, \quad (9)$$

з якої, використовуючи умову (3г), одержуємо

$$\lim_{T,\Delta\to\infty} B_1(T,\Delta)=0.$$

Для даного $b>0$ розглянемо множину

$$\Pi(b/2)=\{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2:|\lambda_2-\lambda_1|\le b/2\}.$$

Тоді матимемо

$$B_2(T,\Delta)=$$

$$=\left|\iint_{\mathbb{R}^2\setminus D_b} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right|\le$$

$$\le\iint_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi(b/2)}|H^*(\lambda_2)|^2\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2)\times$$

$$\times\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1)f_\Delta(\lambda_2)\right|\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\le$$

$$\le\left(1+\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2\|f_\Delta\|_\infty^2\right)\int_{-b/2}^{b/2}|H^*(\lambda)|^2 d\lambda\int_{|\lambda|>b/2}\Phi_T(\lambda)d\lambda\le$$

$$\leq 2\pi \| H \|_2^2 \left(1 + \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \left(\sup_{\Delta>0} \| f_\Delta \|_\infty \right)^2 \right) \int\limits_{|\lambda|>b/2} \Phi_T(\lambda) d\lambda .$$

Оскільки для всіх $b > 0$ $\lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{|\lambda|>b/2} \Phi_T(\lambda) d\lambda = 0$, то отримаємо

$$\lim_{T,\Delta\to\infty} B_2(T,\Delta) = 0,$$

а з того, що $|d_2| \leq B_1(T,\Delta) + B_2(T,\Delta)$, випливає

$$\lim_{T,\Delta\to\infty} d_2(b,T,\Delta) = 0. \qquad (10)$$

Переходячи до величини $d_3(b,T,\Delta)$, бачимо, що для будь-яких $b > 0$, $T > 0$ і $\Delta > 0$

$$|d_3(b,T,\Delta)| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 [\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2) - 1] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) \right] \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda_2)|^2 |\mathbf{1}_{[-b/2,b/2]}(\lambda_2) - 1| \times$$

$$\times \left| \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) \right| \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \| f_\Delta \|_\infty^2 \int\limits_{|\lambda|>b/2} |H^*(\lambda)|^2 d\lambda \| \Phi_T \|_1 =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \| f_\Delta \|_\infty^2 \int\limits_{|\lambda|>b/2} |H^*(\lambda)|^2 d\lambda .$$

Отже, маємо

$$\sup_{T,\Delta>0} |d_3(b,T,\Delta)| \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \left(\sup_{\Delta>0} \| f_\Delta \|_\infty \right)^2 \int\limits_{|\lambda|>b/2} |H^*(\lambda)|^2 d\lambda ,$$

і оскільки $|H^*|^2 \in L_1(\mathbb{R})$, то звідси випливає, що

$$\lim_{b\to\infty} \sup_{T,\Delta>0} |d_3(b,T,\Delta)| = 0. \qquad (11)$$

З формул (8), (10) і (11) отримаємо

$$\limsup_{T,\Delta\to\infty} | C_\infty^{(1)}(\tau_1,\tau_2) - \widehat{C}_{T,\Delta}^{(1)}(\tau_1,\tau_2) | \leq \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times [\limsup_{b\to\infty} |d_1(b)| + \limsup_{b\to\infty} (\limsup_{T,\Delta\to\infty} |d_2(b,T,\Delta)|) +$$

$$+ \limsup_{b\to\infty} (\limsup_{T,\Delta\to\infty} |d_3(b,T,\Delta)|)] = 0.$$

Таким чином, виконується формула (6) і першу частину теореми доведено.

Друга частина: доведення формули (7). Розглянемо простір комплекснозначних неперервних фінітних функцій $C_f(\mathbb{R})$, визначених на $\mathbb{R}$. Це означає, що якщо $h \in C_f(\mathbb{R})$, тоді h неперервна на $\mathbb{R}$ та існує таке додатне число $a_0(h)$, що $h(\lambda) = 0$ для $|\lambda| > a_0(h)$. Зауважимо, що будь-яка $h \in C_f(\mathbb{R})$ є рівномірно неперервною.

В інтегральному зображенні кореляційної функції процесу $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ (див. (4)) фігурують функції $(H^*(\lambda) e^{i\tau_k\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}) \in L_2(\mathbb{R}), k = 1,2$. Оскільки простір $C_f(\mathbb{R})$ всюди щільний у $L_2(\mathbb{R})$, то для довільного $\varepsilon > 0$ та всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ можна вибрати такі функції $h_k^\varepsilon \in C_f(\mathbb{R}), k = 1,2$, що $\| H^*(\lambda) e^{i\tau_k\lambda} - h_k^\varepsilon(\lambda) \|_2 < \varepsilon$.

Для всіх $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, $T > 0, \Delta > 0$ та $\varepsilon > 0$ запишемо

$$C_\infty^{(2)}(\tau_1,\tau_2) - \widehat{C}_{T,\Delta}^{(2)}(\tau_1,\tau_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda} (H^*(\lambda))^2 d\lambda -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) \right] \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [d_1(\varepsilon) + d_2(\varepsilon,T,\Delta) + d_3(\varepsilon,T,\Delta)],$$

де

$$d_1 = d_1(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda} (H^*(\lambda))^2 d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda) h_2^\varepsilon(\lambda) d\lambda ;$$

$$d_2 = d_2(\varepsilon,T,\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda) h_2^\varepsilon(\lambda) d\lambda -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) \right] \times$$

$$\times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2;$$

$$d_3 = d_3(\varepsilon, T, \Delta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2)\right] \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1\lambda_1 + \tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2)\right] \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

З нерівності Коші–Буняковського випливає, що

$$|d_1(\varepsilon)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda} (H^*(\lambda))^2 - h_1^\varepsilon(\lambda) h_2^\varepsilon(\lambda)] d\lambda \right| \le$$

$$\le \| e^{i\tau_1\lambda} H^*(\lambda) \|_2 \| e^{i\tau_2\lambda} H^*(\lambda) - h_2^\varepsilon(\lambda) \|_2 +$$

$$+ \| e^{i\tau_2\lambda} H^*(\lambda) \|_2 \| e^{i\tau_1\lambda} H^*(\lambda) - h_1^\varepsilon(\lambda) \|_2 +$$

$$+ \| e^{i\tau_1\lambda} H^*(\lambda) - h_1^\varepsilon(\lambda) \|_2 \| e^{i\tau_2\lambda} H^*(\lambda) - h_2^\varepsilon(\lambda) \|_2 <$$

$$< \varepsilon[2\| H^*(\lambda) \|_2 + \varepsilon] = \varepsilon[2\sqrt{2\pi} \| H \|_2 + \varepsilon].$$

Отже, маємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_1(\varepsilon) = 0. \qquad (12)$$

З нерівності Юнга для згорток [15] випливає така оцінка для d_3:

$$|d_3(\varepsilon, T, \Delta)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2)) - \right.$$

$$- e^{i(\tau_1\lambda_1 + \tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2)\right] \times$$

$$\left. \times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right| \le$$

$$\left[\sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2} \left| \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) \right| \right] \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} | h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) -$$

$$- e^{i(\tau_1\lambda_1 + \tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) | \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$

$$\le \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \| f_\Delta \|_\infty^2 \right] \| \Phi_T \|_1 [\| e^{i\tau_1\lambda_1} H^*(\lambda_1) \|_2 \| h_2^\varepsilon(\lambda_2) -$$

$$- e^{i\tau_2\lambda_2} H^*(\lambda_2) \|_2 + \| e^{i\tau_2\lambda_2} H^*(\lambda_2) \|_2 \| h_1^\varepsilon(\lambda_1) -$$

$$- e^{i\tau_1\lambda_1} H^*(\lambda_1) \|_2 + \| h_1^\varepsilon(\lambda_1) - e^{i\tau_1\lambda_1} H^*(\lambda_1) \|_2 \| h_2^\varepsilon(\lambda_2) -$$

$$- e^{i\tau_2\lambda_2} H^*(\lambda_2) \|_2] < \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \| f_\Delta \|_\infty^2 \right] \times$$

$$\times \varepsilon[2\| H^*(\lambda) \|_2 + \varepsilon] < \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \| f_\Delta \|_\infty^2 \varepsilon[2\sqrt{2\pi} \| H \|_2 + \varepsilon].$$

Таким чином, отримаємо нерівність

$$\sup_{T,\Delta>0} | d_3(\varepsilon, T, \Delta) | \le$$

$$\le \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \left[\sup_{\Delta>0} \| f_\Delta \|_\infty \right]^2 \varepsilon[2\sqrt{2\pi} \| H \|_2 + \varepsilon],$$

звідки

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{T,\Delta>0} | d_3(\varepsilon, T, \Delta) | = 0. \qquad (13)$$

Тепер розглянемо величину $d_2(\varepsilon, T, \Delta)$ і зауважимо, що при будь-яких $\varepsilon > 0$, $T > 0$ і $\Delta > 0$ має місце нерівність

$$| d_2(\varepsilon, T, \Delta) | \le \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda) h_2^\varepsilon(\lambda) d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 - \right.$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) \left[\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2)\right] \times$$

$$\left. \times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right|.$$

Для фіксованого $\varepsilon > 0$ розглянемо смугу

$$\Pi(\varepsilon) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : | \lambda_2 - \lambda_1 | \le \varepsilon\}.$$

Оскільки $\| \Phi_T \|_1 = 1$, то для першого доданка з оцінки для d_2 маємо

$$E_1(\varepsilon, T) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda) h_2^\varepsilon(\lambda) d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) h_2^\varepsilon(\lambda_2) \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\varepsilon(\lambda_1) [h_2^\varepsilon(\lambda_1) - h_2^\varepsilon(\lambda_2)] \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right| \le$$

$$\leq \iint_{\Pi(\varepsilon)} |h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)||h_2^{\varepsilon}(\lambda_1)-h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)|\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+\iint_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi(\varepsilon)} |h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)||h_2^{\varepsilon}(\lambda_1)-h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)|\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq \max_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Pi(\varepsilon)} |h_2^{\varepsilon}(\lambda_1)-h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)|\,||h_1^{\varepsilon}||_1 ||\Phi_T||_1 +$$

$$+2||h_2^{\varepsilon}||_{\infty}||h_1^{\varepsilon}||_1 \int_{|\lambda|>\varepsilon}\Phi_T(\lambda)d\lambda = ||h_1^{\varepsilon}||_1 \times$$

$$\times\left[\max_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Pi(\varepsilon)} |h_2^{\varepsilon}(\lambda_1)-h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)| + 2||h_2^{\varepsilon}||_{\infty}\int_{|\lambda|>\varepsilon}\Phi_T(\lambda)d\lambda\right].$$

Звідси випливає, що

$$\limsup_{T,\Delta\to\infty} E_1(\varepsilon,T) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\limsup_{T,\Delta\to\infty} E_1(\varepsilon,T)\right) = 0\,,$$

оскільки h_2^{ε} рівномірно неперервна і при довільному $\varepsilon>0$ маємо $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{|\lambda|>\varepsilon}\Phi_T(\lambda)d\lambda = 0$.

Тепер розглянемо другий доданок у виразі оцінки для d_2. Покладемо $b=\max\{a_0(h_1^{\varepsilon}), a_0(h_2^{\varepsilon})\}$. Тоді для всіх $\varepsilon>0$, $T>0$ і $\Delta>0$ матимемо

$$E_2(\varepsilon,T,\Delta) =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right| \leq \left|\iint_{D_b} h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right]\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right| +$$

$$+\left|\iint_{\mathbb{R}^2\setminus D_b} h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)\left[1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2\right| \leq$$

$$\leq \sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right|\times$$

$$\times\iint_{D_b}|h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)||h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)|\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+\iint_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi(b/2)}|h_1^{\varepsilon}(\lambda_1)||h_2^{\varepsilon}(\lambda_2)|\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right|\times$$

$$\times\,\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq \sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right| ||h_1^{\varepsilon}||_2||h_2^{\varepsilon}||_2\times$$

$$\times||\Phi_T||_1 + \left(1+\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2||f_{\Delta}||_{\infty}^2\right)||h_2^{\varepsilon}||_{\infty}||h_1^{\varepsilon}||_1\times$$

$$\times\int_{|\lambda|>b/2}\Phi_T(\lambda)d\lambda = \sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in D_b}\left|1-\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 f_{\Delta}(\lambda_1)f_{\Delta}(\lambda_2)\right|\times$$

$$\times||h_1^{\varepsilon}||_2||h_2^{\varepsilon}||_2 + \left(1+\left(\frac{2\pi}{c}\sup_{\Delta>0}||f_{\Delta}||_{\infty}\right)^2\right)\times$$

$$\times||h_2^{\varepsilon}||_{\infty}||h_1^{\varepsilon}||_1\int_{|\lambda|>b/2}\Phi_T(\lambda)d\lambda.$$

З формули (9) та властивостей ядер Фейєра випливає співвідношення

$$\limsup_{T,\Delta\to\infty} E_2(\varepsilon,T,\Delta) = 0\,,$$

справедливе для будь-якого $\varepsilon>0$.

Оскільки $|d_2|\leq E_1(\varepsilon,T,\Delta)+E_2(\varepsilon,T,\Delta)$ при будь-якому $\varepsilon>0$, то одержимо

$$\limsup_{T,\Delta\to\infty} d_2(\varepsilon,T,\Delta) = 0. \qquad (14)$$

Тепер, використовуючи формули (12)–(14), бачимо, що для всіх $\tau_1,\tau_2\geq 0$ маємо

$$\limsup_{T,\Delta\to\infty}|C_{\infty}^{(2)}(\tau_1,\tau_2)-\widehat{C}_{T,\Delta}^{(2)}(\tau_1,\tau_2)|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\left[\limsup_{\varepsilon\to 0}|d_1(\varepsilon)|+\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\limsup_{T,\Delta\to\infty}|d_2(\varepsilon,T,\Delta)|\right)+\right.$$

$$\left.+\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\limsup_{T,\Delta\to\infty}|d_3(\varepsilon,T,\Delta)|\right)\right]=0.$$

Отже, виконується (7), що завершує доведення другої частини теореми.

З першої і другої частин маємо

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}}\widehat{C}_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2) = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}}[\widehat{C}_{T,\Delta}^{(1)}(\tau_1,\tau_2)+\widehat{C}_{T,\Delta}^{(2)}(\tau_1,\tau_2)] =$$

$$= C_{\infty}^{(1)}(\tau_1,\tau_2)+C_{\infty}^{(2)}(\tau_1,\tau_2) = C_{\infty}(\tau_1,\tau_2).$$

Таким чином, теорему повністю доведено.

Доведення наслідка. Використовуючи обернене перетворення Фур'є для $(H^*)^2 \in L_1(\mathbb{R})$ та властивість перетворення Фур'є згортки функцій [13], з (5) маємо

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\to\infty}} T\,|\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau)|^2 = C_\infty(\tau,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [|H^*(\lambda)|^2 + e^{i(2\tau)\lambda}(H^*(\lambda))^2]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2\tau)\lambda}(H * H)^*(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}||H^*||_2^2 + (H * H)(2\tau) =$$

$$= ||H||_2^2 + \int_0^{2\tau} H(t)H(2\tau - t)\,dt.$$

Висновки

Доведена теорема вимагає мінімальні умови на порядок інтегрованості функції $H \in L_2(\mathbb{R})$ і дає зображення граничної кореляційної функції процесу $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ при значно слабших умовах, ніж, наприклад, у праці [9]. Отриманий результат буде використовуватись для подальшого дослідження асимптотичної нормальності скінченновимірних розподілів відповідної оцінки $\widehat{H}_{T,\Delta}$ за допомогою кумулянтних методів та теорії інтегралів, що містять циклічні добутки ядер [12, 16].

В.В. Булдыгин, И.П. Блажиевская

О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ КОРЕЛОГРАМНЫХ ОЦЕНОК ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрены статистические оценки импульсных переходных функций линейных систем при их возмущении стационарными гауссовскими процессами, отличными от белого шума. Изучены свойства корреляционных функций оценок при условии, что переходная функция принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$.

V.V. Buldygin, I.P. Blazhievska

ON CORRELATION PROPERTIES OF THE CROSS-CORRELOGRAM ESTIMATORS OF IMPULSE RESPONSE FUNCTIONS

Statistical estimators of unit impulse responses of linear systems under perturbations by Gaussian processes which are different from the white noise are considered. Some properties of correlation functions of estimators are studied in the case when the impulse response function is from the space $L_2(\mathbb{R})$.

1. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
2. *Cariolaro G.L. and Di Masi G.B.* Second-order analysis of the input of a discrete-time Volterra system driven by white noise // IEEE Trans. Inform. Theory 26. – 1980. – P. 175–184.
3. *Schetzen M.* The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. – Wiley, New York, 1980.
4. *Бендат Дж., Пирсол А.* Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
5. *Bosq D. and Lessi O.* Recursive nonparametric estimation of nonlinear systems of Volterra type // Statistica (Bologna). – 1995. – **55**. – P. 263–284.
6. *Akaike H.* On the statistical estimation of the frequence response function of a system having multiple input // Ann. Inst. Statist. Math 17. – 1965. – P. 185–210.
7. *Бенткус Р.* Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции // Литов. мат. сб. – 1972. – **12**, № 3. – С. 3–17.
8. *Булдыгин В.В.* О свойствах эмпирической коррелограммы гауссовского процесса с интегрируемой в квадрате спектральной плотностью // Укр. мат. журн. – 1995. – 7, № 47. – С. 876–889.
9. *Buldygin V.V. and Fu Li.* On asymptotical normality of an estimation of unit impulse responses of linear systems, I, II // Theor. Probability and Math. Statist. – 1997. – **54**. – P. 3–17; **55**. – P. 30–37.
10. *Buldygin V.V. and Kurotschka V.G.* On cross-correlogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations // Random Oper. and Stoch. Equ. – 1999. – **7**, N 1. – P. 71–90.
11. *Buldygin V., Utzet F. and Zaiats V.* Cross-correlogram estimates of the response function in linear and bilinear

Volterra systems // (Huŝková M. et al., eds.), Prague Stichastics'98, Union of Czech Mathematicians and Physicists. Prague. – 1998. – P. 61–66.

12. *Buldygin V., Utzet F. and Zaiats V.* Asymptotic normality of cross-correlogram estimates of the response function // Statistical Inference for Stochastic Processes. – 2004. – **7**. – P. 1–34.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
14. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1979. – 408 с.
15. *Edwards R.E.* Functional analysis: theory and applications. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
16. *Buldygin V.V. and Dychovichny O.O.* On some singular integrals and their applications to the problem of statistical estimation // Theor. Probability and Math. Statist. – 1996. – **53**. – P. 19–31.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
1 липня 2009 року