УДК 336.77.037

Ковтун Д.В.,
Фартушний І.Д.
канд. фіз.-мат. наук

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗУВАННЯ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ВЛАСНОГО УТРИМАННЯ У ПЕРЕСТРАХУВАННІ

Нижче представлена модель факультативного квотно-пропорційного перестрахування, яка визначає доцільність перестрахування на основі заданих критеріїв. Розроблено прогноз норми коефіцієнту власного утримання, який варто залишити страховій компанії, за якого фінансова стійкість компанії не погіршиться. Якщо ж коефіцієнт власного утримання перевищує норму, рекомендується робити перестрахування у декількох фірмах.

The model optimal quota-proportional reinsurance, is presented in the work. The model determines expedience of reinsurance on the basis of the set criteria. The forecast rate is developed that can determine their coefficient of own maintenance, its highest level at which the financial stability of companies do not worsen. If coefficient of own maintenance higher than normal, it is recommended reinsurance in several companies.

Вступ. Перестрахування забезпечує фінансову надійність функціонування страхових компаній [3].

Питання організації перестраховувальної діяльності і розвитку ринку перестрахування в наукових працях вітчизняних економістів висвітлювались лише частково і опосередковано.

Значний внесок в розробку теоретичних основ перестрахування зробили українські вчені – В.Д. Базилевич, О.Д. Заруба, М.С. Клапків, С.С.Осадець та російські вчені - К.Г. Воблий, І.Т. Балабанов, Ю.М. Журавльов, М.Г. Каминкіна, Є.В. Коломін, А.І. Корчевська, В.К. Райхер, В.А. Сухов, К.Є. Турбіна, Т.А. Федорова, В.В. Шахов, Р.Т.Юлдашев. Серед західних вчених-економістів можна виокремити праці: Д. Бланда, К. Бурроу, Д. Гауера, Л. Гератеволя, М. Гросмана, Дж. Макензи, А. Манеса, Р. Меркіна, К. Пфайффера, Д. Хемптона.

Водночас слід зазначити, що в Україні відчувається значний дефіцит спеціальних досліджень, які стосуються безпосередньо сфери перестрахування. Бракує орієнтованих на практичне застосування наукових розробок, не узагальнюється накопичуваний досвід. Становлення перестраховувальних відносин відбувається в умовах економічної нестабільності, недосконалості законодавчої бази у сфері страхування взагалі і перестрахування – зокрема.[5].

Постановка задачі. Метою дослідження є розробка алгоритму визначення доцільності перестрахування страхової угоди за допомогою моделі факультативного квотно-пропорційного перестрахування.

Для досягнення мети у роботі було поставлено такі завдання:

1. Дослідження моделі;
2. Розробка алгоритму;
3. Виходячи з критеріїв, визначення в який випадках перестрахування є доцільним;
4. Виходячи з критеріїв визначення в яких випадках перестрахування є недоцільним;

Модель що розглядається статистична і не відображає ріст суми зібраних внесків (шляхом інвестицій) і інфляційні процеси.

Основний об'єкт дослідження – величина власного утримання страховика, тобто та частина ризику, яку страховику, виходячи з "розумних" міркувань, краще залишити за собою та величину, яку страховику вигідно віддати на перестрахування.

У розпорядженні страхової компанії, тобто страховика, є страховий портфель (СП), що складається з N договорів страхування (ДС); нижче цей СП називається "даний". Приєднання до нього нового ДС або, як то кажуть, нового ризику приводить до утворення "поповненого" СП, що складається з $(N+1)$ ДС.

Методологія. Результати дослідження отримані на основі центральної граничної теореми ймовірності.

Обчислення проводились за допомогою такого програмного продукту, як MathCAD.

Результати дослідження. Кожен ДС (у тому числі і новий, якому привласнюється номер $N+1$) характеризується наступними параметрами:
1) максимальний об'єм відповідальності C;
2) отримана страховиком премія T, точніше та частина страхового внеску, яка включається до страхового фонду, призначений для покриття майбутніх страхових відшкодувань;
3) ймовірність страхової події p (мається на увазі, що p – ймовірність настання хоча б однієї страхової події протягом часу, що залишився до закінчення терміну дії);
4) розподіл ймовірності випадкової величини "тягаря збитку" X, більш точніше – відношення суми відшкодувань, що виплачуються, починаючи з даного моменту до закінчення терміну дії ДС, за умови настання хоча б однієї страхової події.

Окрім премій, зібраних по наявних ДС, у розпорядженні страховика знаходиться "початковий капітал" U, призначений для покриття можливих збитків по даному СП (цей капітал може дорівнювати нулю). Крім того, слід взяти до уваги, що по деяким ДС даного СП могли відбуватися виплати: їх суму позначимо за W.

Нехай m – середнє значення абсолютної виплати. Передбачатимемо, що в середньому договори не збиткові, тобто премія $T > m$. Тому при орієнтації лише на середні значення страховикові слід було б прийняти на страхування весь новий ризик.

Мінімальна допустима ймовірність беззбитковості (позначимо її q) задається, як правило, самим страховиком. Цю ймовірність можна вважати мірою фінансової стійкості страховика. Формально обговорювана умова записується так:

$$P\left\{\sum T + U - W \geq \sum V\right\} \geq q, \qquad (1)$$

де q – число, що задається страховиком, між 0 і 1 (близьке до одиниці), а V_i – випадкова величина страхового відшкодування.

Можливий інший підхід до прийняття нового ризику в страхування, що формально є окремим випадком попереднього: ймовірність, виписана в лівій частині (1), має бути не менше ймовірності беззбитковості до прийняття нового ризику (фінансова стійкість не повинна зменшитися), тобто:

$$P\left\{\sum T + U - W \geq \sum V\right\} \geq P\left\{\sum T + U - W \geq \sum V_i\right\} \qquad (2)$$

Якщо нерівність (1) (або (2)) не виконується, то новий ризик не може бути прийнятий в страхуванні в "повному обсязі" (тобто з максимальною відповідальністю C), і виникає необхідність перестрахування.

Відповідно до (1) повинна виконуватись умова

$$P\left\{\sum_{i=1}^{N} V_i + V'_{N+1} > U + T_0 + T'_{N+1}\right\} \leq 1 - q \qquad (3)$$

Неважко підрахувати, що

$$\Phi(D) \geq q, \qquad (4)$$

де $\Phi(x)$ - стандартна нормальна функція розподілу.
Відомо, що (4) еквівалентно нерівності

$$D \geq Q, \qquad (6)$$

де Q - q - квантіль нормального розподілу, тобто $\Phi(Q) = q$.

Перейдемо до перестрахування. Нехай $C'_{N+1} = rC_{N+1}, 0 \leq r \leq 1$. Коефіцієнт r назвемо відносним СУ. Оскільки йдеться про квотно-пропорційне перестрахування, відповідна утриманій частині ризику премія $T_{N+1} = rT_{N+1}$.

Покладемо $m_0 = \sum_{i=1}^{N} w_i C_i$ (математичне очікування майбутніх СП) та ${\sigma_0}^2 = d_i^2 C_i^2$ (дисперсія тієї ж величини).

Нехай $m = w_{N+1}C_{N+1}$ (математичне очікування майбутніх виплат по новому ДС при повній відповідальності C_{N+1}), $\sigma^2 = d_{N+1}^2 C_{N+1}^2$ (дисперсія тієї ж величини), $T = T_{N+1}$ (повна премія за новим ДС).

Відповідно з цим

$$D = \frac{U + T_0 - m_0 + r(T - m)}{\sqrt{\sigma_0^2 + r^2\sigma^2}} \tag{7}$$

Запишемо тепер величини U, T_0 та T в природному для них масштабі, точніше, покладемо $U = u\sigma_0$; $T_0 = m_0 + t_0\sigma_0$; $T = m + t\sigma$.

Останні співвідношення є суттю визначення коефіцієнтів u, t_0, t. Це вже безрозмірні величини, що отримуються за допомогою нормування величин U, T_0, T [1,2].

Нехай $A = \sigma_0 / \sigma \quad x = rA$.

Величина x характеризує прийняте СУ і задовольняє нерівності $0 \le x \le A$. Значенню $x = 0$ відповідає повна відсутність нового ризику, а $x = A$ – прийняття нового ризику в повному обсязі (відсутність перестрахування).

Неважко перевірити, що у введених позначеннях $D = D(x) = (u + t_0 + tx)/\sqrt{1 + x^2}$.

Кінцева умова (1) або, що те саме, (6) записуються так

$$D(x) \ge Q \tag{8}$$

Величина $D(0)$ відповідає даному СП (без нового ДС), і умову (2) тим самим можна записати так

$$D(x) \ge D(0) = u + t_0 \tag{9}$$

В силу викладеного вище задача зводиться до знаходження максимального x, який не перевищує A і який задовольняє в залежності від підстановки умовам (8) чи (9).

Знаходження коефіцієнта власного утримання для перестрахування

Формула розрахунку власного утримання

$$R = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1-q}{N \cdot q}}\right)^2 \cdot \sum T = 2 \cdot k^2 \cdot \sum T; k = \left(\sqrt{\frac{1-q}{N \cdot q}}\right)$$

Де R – максимальне власне утримання, за якого не погіршиться фінансова стійкість страхових операцій що проводяться; k – коефіцієнт що характеризує степінь фінансової стійкості страхової організації; T – загальна сума страхових премій яка зібрана по всім прийнятим договорам у пакеті; q – вірогідність збитку яке знаходиться як відношення суми страхового заміщення до суми страхового договору; N – кількість застрахованих об’єктів.

Покладемо $C = u + t_0$. Елементарний аналіз показує, що функція $D(x)$ при $x \ge 0$ досягає максимуму в точці $x_0 = t/c$ та $D(x) \to t$ при $x \to \infty$. Надалі будемо вважати, що, коли настає умова (1) (або еквівалентне –(8)), вже даний СП задовольняє цій умові, тобто

$$D(0) = c \geq Q \tag{10}$$

Іншими словами, даний портфель достатньо стійкий. Аналіз протилежної ситуації аналогічний нижче приведеним міркуванням.

Почнемо з найбільш простого випадку.

Випадок 1. Нехай $c \leq t$. Вона росте при $0 \leq x \leq x_0$ від $c < t$ до максимального значення $D(x_0) = D_0 = \sqrt{c^2 + t^2}$,а потім спадає до величини t на нескінченності. При цьому $D(x)$ завжди не менше c, та, маючи на увазі (10), не менше Q. Отже, "чим менше x (чи r), тим краще", тобто перестрахування не потрібно ($x = A$ чи $r = 1$) ні при (8), ні при (9).

Випадок 2. Нехай $c > t$. Функція знову росте при $0 \leq x \leq x_0$ від $c \geq t$, то значення c приймається двічі, більш точніше $D(x') = c$, де

$$x' = \frac{2 \cdot c \cdot t}{c^2 - t^2} \tag{11}$$

Число x' відіграє тут основну роль.

(2a) Нехай $x' \geq A$. Тоді , враховуючи (10), при $x \leq A$ вірні як (8), так і (9), і перестрахування не потрібно ($x = A$ чи $r = 1$) ні при одній з вказаних умов.

(2b) Нехай $x' \leq A$, а перестрахування проходить в рамках (9), тобто при прийомі нового ризику ризиковість портфелю не повинна зменшуватися. Тоді слід вибрати $x = x'$, тобто коефіцієнт СУ $r = x'/A$, де x' визначен у (2).

(2c) Нехай $x' \leq A$, але перестрахування проходить у рамках (8). Зважаючи на (10) означає, що при прийомі нового ризику страховик готовий піти на деяке збільшення ризикованості портфеля.

Нехай $Q > t$. Тоді існує розв\`язок рівняння $D(x) = Q$. Як легко перевірити, це рішення дається числом $\bar{x} = (ct + Q\sqrt{c^2 + t^2 - Q^2})/(Q^2 - r^2)$.

Якщо $\bar{x} < A$, то перестрахування потрібно і коефіцієнт СУ $r = \bar{x}/A$. Якщо $\bar{x} \geq A$, то перестрахування не потрібно: $r = 1$. Якщо $Q \leq t$, то $D(x) > t$ при всіх x, і перестрахування знову не потрібно, тобто $x = A$ чи $r = 1$.

Чисельний приклад

Таблиця 1.

Вихідні дані про договори СП

№ договору	Максимальний об'єм відповідальності C	Отримана страховиком премія T	Вірогідність страхового випадку p	Розподіл ймовірностей випадкової величини "тягаря збитку" X

1	100 150	100 000	0,05	0,54
2	120 240	96 090	0,04	0,81
3	180 344	144 777	0,03	0,35
4	150 000	120 000	0,06	0,43
5	140 006	110 875	0,07	0,62

Вихідні дані для прикладу -

Для СП:

Початковий капітал U – 250890;

Для нового договору приведені у таблиці 2.

Таблиця 2.

Дані по додатковому договору

Максимальний об'єм відповідальності C	Отримана страховиком премія T	Вірогідність страхового випадку p	Розподіл вірогідностей випадкової величини "тягаря збитку" X
290 520	230 010	0,03	0,7

Розрахунки:

Таблиця 3.

№ дог	W	$q = W/C$	$w = p * x$	$d = pE[X^2] - p$
1	45265	0,452	0,024	0,011
2	52360	0,435	0.012	0,035
3	43865	0,243	0,012	0,047
4	44935	0,3	0,03	0,014
5	43375	0,31	0,039	0,02
Σ	229800	-	-	-

$$q := \frac{|q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5|}{5} = 0.348 \qquad R := 2 \cdot 561700 \cdot \frac{(1 - 0.348)}{5 \cdot 0.348} = 4.21 \times 10^5$$

$$m0 := w_1 \cdot C_1 + w_2 \cdot C_2 + w_3 \cdot C_3 + w_4 \cdot C_4 + w_5 \cdot C_5 \qquad m0 = 1.59 \times 10^4$$

$$\sigma k2 := dk_1 \cdot |C_1|^2 + dk_2 \cdot |C_2|^2 + dk_3 \cdot |C_3|^2 + dk_4 \cdot |C_4|^2 + dk_5 \cdot |C_5|^2 = 1.014 \times 10^9$$

$$C_6 := 290520 \qquad w_6 := 0.025 \qquad m := C_6 \cdot w_6 = 7.263 \times 10^3$$

$$\sigma k := 1002272211 \qquad T := 230010 \qquad T_0 := 331900$$

$$u := \frac{U}{\sqrt{\sigma k2}} \qquad u = 7.877$$

$$t0 := \frac{T_0 - m0}{\sqrt{\sigma k2}} \qquad t0 = 9.921$$

$$t := \frac{230010 - 7263}{\sqrt{\sigma k}} \qquad t = 7.036$$

$$A := \frac{\sqrt{\sigma k}}{\sqrt{\sigma k2}} \qquad A = 0.994$$

$$c := u + t0 \qquad c = 17.799$$

$$xh := \frac{2 \cdot c \cdot t}{c^2 - t^2} \qquad xh = 0.937 \qquad r := \frac{xh}{A} = 0.943 \qquad RR := 0.943 \cdot 561700 = 5.297 \times 10^5$$

Отже, як бачимо з розрахунків, c>t і даний приклад потрапляє у випадок 2(підпункти b, c). Оскільки компанія не планує при прийомі нового ризику зменшувати ризиковість портфеля то остаточно це випадок 2(b). Коефіцієнт власного утримання r=0,943. Власне утримання перевищує максимальне власне утримання, що означає що варто перестраховуватись у декількох фірмах щоб не погіршити фінансову стійкість компанії.

Висновки. Наукова новизна даної роботи полягає у розробці прогнозу норми коефіцієнту власного утримання, за якого фінансове становище компанії не погіршиться. Дане нововведення робить модель більш доступною для використання на практиці. Значимість даної роботи полягає у можливості ширшого використання моделі, яка дозволить знизити рівень збитків по виплаті страхових подій.

За результатами моделювання визначення оптимального коефіцієнта власного утримання можна зробити висновок, що використання обраної моделі є досить ефективним та дозволяє знизити рівень збитків, шляхом перерозподілу його виплати серед декількох перестрахувальних компаній.

Дослідження будуть спрямовані на подальше опрацювання моделі факультативного квотно-пропорційного перестрахування та усунення її недоліків.

Література

1. Бурроу К. Основы страховой статистики / Бурроу К. – М.: Издательский центр СО «Анкил», 1996. – 96 с.
2. Камынкина М.Г. Перестрахование. Практическое руководство для страховых компаний / Камынкина М.Г., Солнцева Е.Е. – М.: АО “ДИС”.–1994. – 137 с.
3. Осадець С.С. Страхування / Оселедець С.С. – К.: КНЕУ, 2002. — 599 с.
4. Ротарь В.И. О перестраховании рисков и величине собственного удержания страховой компании / Ротарь В.И., Шоргин С.Я. // Экономика и математические методы: Москва –1996. – т. 32, вип. 4. – С. 124-131.
5. Ротова Т.А. Страхування / Ротова Т.А., Руденко Л.С. – К.:КНТЕУ, 2001. – 402с.