РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІТКИ НА ДИСТРИБУТИВНІЙ ҐРАТЦІ ДЛЯ ПЕВНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ

О. Г. Монастирський[1,2], Є. В. Водолазький[2]

[1] Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
Фізико-технічний інститут

[2] Національна академія міністерства освіти і науки України
Міжнародний Науково-Навчальний Центр Інформаційних Технологій та Систем

Анотація

В даній роботі описано алгоритм для розв'язання загальної задачі розмітки (general labeling problem) на дистрибутивній ґратці для певного класу функцій.

Вступ

Ця робота спирається на узагальнення ідеї поліморфізму, запропоноване в роботі [1], і дає спосіб розв'язання загальної задачі розмітки на дистрибутивній ґратці.

1. Дистрибутивна ґратка

Дистрибутивна ґратка - це алгебраїчна структура з бінарними операціями $\wedge$ та $\vee$, які задовольняють тотожностям

$$a \wedge a = a; \qquad a \vee a = a;$$
$$a \wedge b = b \wedge a; \qquad a \vee b = b \vee a;$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c); \qquad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c);$$
$$(a \wedge b) \vee b = b; \qquad (a \vee b) \wedge b = b;$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

В цій роботі нам знадобляться два безпосередні наслідки з наведених вище тотожностей:

$$a \vee b = a \Leftrightarrow a \wedge b = b; \tag{1}$$
$$a \vee c = a, \quad b \vee c = b \Rightarrow (a \wedge b) \vee c = a \wedge b. \tag{2}$$

2. Загальна задача розмітки

Визначення 1. Під загальною задачею розмітки (general labeling problem) на комутативному напівкільці $(\oplus, \odot, S)$ будемо розуміти набір

$$(T, X, \tau \subset 2^T, f_{T'} : X^{T'} \to S),$$

де T – скінченний набір індексів, X – скінченний набір значень, $f_{T'}$ – набір функцій, для якого необхідно обчислити значення

$$\bigoplus_{\vec{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T')).$$

В цій роботі розглядається випадок, коли $(\oplus, \odot, S)$ – дистрибутивна ґратка.

Важливим частковим випадком загальної задачі розмітки є задача виконання обмежень (constraint satisfaction problem). Вона полягає у розв'язанні загальної задачі розмітки на булевій алгебрі

$$\bigvee_{\vec{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T')) \tag{3}$$

(тут $\vee$ – диз'юнкція, $\wedge$ – кон'юнкція).

3. Поліморфізм

У загальному випадку задача виконання обмежень є NP-повною задачею [2]. Проте для $f_{T'}$, які мають певну структуру, відомі способи розрахунку (3) за поліноміальний час [2]. Важливу роль для таких $f_{T'}$ відіграє поняття поліморфізму.

Визначення 2. Функцію $p : X^m \to X$ називають поліморфізмом функції $f : X^k \to \{0, 1\}$ (або f інваріантна відносно p), якщо виконується

$$\bigwedge_{i \in \overline{1,m}} f(\vec{x_i}) \to f(p(x_1^1 ... x_m^1) ... p(x_1^k ... x_m^k)),$$

де x_j^i – i-та координата вектору $\vec{x_j}$.

Тут і далі $f(p(x_1^1 ... x_m^1) ... p(x_1^k ... x_m^k))$ будемо позначати як $f(p(X))$.

В роботі [1] запропоновано узагальнення цього визначення на довільне комутативне напівкільце.

Визначення 3. Функцію $p : X^m \to X$ називають поліморфізмом функції $f : X^k \to S$ (або f інваріантна відносно p), якщо виконується

$$\bigodot_{i \in \overline{1,m}} f(\vec{x_i}) \oplus f(p(X)) = f(p(X)).$$

Відомі класи поліморфізмів $p : X^m \to X$ та відповідних функцій $f : X^k \to \{0, 1\}$, для яких задача (3) розв'язується за поліноміальний час [2].

З цього місця і далі під $(\oplus, \odot, S)$ будемо розуміти дистрибутивну ґратку.

Лема 1. *Нехай $p : X^m \to X$ поліморфізм для $f : X^k \to S$. Нехай для деякого*

$a \in S$ $f(\vec{x_i}) \oplus a = f(\vec{x_i})$ для всіх $i \in \overline{1,m}$. Тоді $f(p(X)) \oplus a = f(p(X))$.

Доведення. Із властивості (1) для ґратки та умови леми випливає, що $f(\vec{x_i}) \odot a = a$ для всіх $i \in \overline{1,m}$. Тоді

$$f(p(X)) = \bigodot_{i \in \overline{1,m}} f(\vec{x_i}) \oplus f(p(X)) =$$

$$= \bigodot_{i \in \overline{1,m}} (f(\vec{x_i}) \oplus a) \oplus f(p(X)).$$

Розкривши добуток та скориставшись властивістю (2) для ґратки, отримаємо:

$$\bigodot_{i \in \overline{1,m}} f(\vec{x_i}) \oplus f(p(X)) \oplus a = f(p(X)) \oplus a.$$

Таким чином

$$f(p(X)) = f(p(X)) \oplus a.$$

□

4. Алгоритм

Розглянемо функцію $g^a : S \to \{0,1\}$ вигляду

$$g^a(x) = \begin{cases} 1, x \oplus a = x, \\ 0, otherwise. \end{cases} \tag{4}$$

Лема 2. *Нехай $g^a : S \to \{0,1\}$ функція, введена формулою (4). Тоді $g^a(x \odot y) = g^a(x) \wedge g^a(y)$.*

Доведення. Якщо $g^a(x) = g^a(y) = 1$, то із (2) маємо

$$g^a(x \odot y) = 1.$$

Якщо $g^a(x) = 0$, то нехай $(x \odot y) \oplus a = x \odot y$. Тоді

$$(x \odot y) \oplus a \oplus x = (x \odot y) \oplus x,$$
$$x \oplus a = x.$$

Отримали суперечність. Отже,

$$g^a(x \odot y) = g^a(x) \wedge g^a(y).$$

□

Лема 3. *Нехай $g^a(x) \vee g^a(y) = 1$. Тоді $g^a(x \oplus y) = 1$.*

Доведення. Нехай $x \oplus a = x$. Тоді

$$x \oplus y \oplus a = x \oplus y, \tag{5}$$

звідки $g^a(x \oplus y) = 1$. □

Теорема 1. *Нехай $h^a_{T'} = g^a \circ f_{T'}$. Тоді*

$$\bigoplus_{\vec{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T')) = \bigoplus_{a \in S} a \cdot \bigvee_{\vec{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\vec{x}(T')),$$

де ситуація «$a \cdot 0$» означає, що a не входить в суму, ситуація «$a \cdot 1$» – що входить.

Доведення. Дійсно, якщо $\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T')) = a$ для якогось $\vec{x}$, то

$$\bigvee_{\vec{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\vec{x}(T')) = \bigvee_{\vec{x} \in X^T} g^a(\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T'))) = 1.$$

При цьому нехай для деякого a для будь-якого $\vec{x}$ маємо

$$\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T'))) \oplus a \neq \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T'))).$$

Тоді $\bigvee_{\vec{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\vec{x}(T')) = 0$. Таким чином, в суму $\bigoplus_{a \in S} a \cdot \bigvee_{\vec{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\vec{x}(T'))$ будуть входити ті і тільки ті a, для яких існує $\vec{x}$ такий, що

$$\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T'))) \oplus a = \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T'))).$$

Отже,

$$\bigoplus_{\vec{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T')) = \bigoplus_{a \in S} a \cdot \bigvee_{\vec{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\vec{x}(T')).$$

□

Наслідок 1.1. *Якщо існує поліморфізм $p : X^m \to X$ для функцій $f_{T'} : X^k \to S$, то він буде поліморфізмом і для функцій $h^a_{T'}$ (з леми 1). Таким чином, якщо відомо, що для для функцій, інваріантних відносно p, значення (3) обчислюється за поліноміальний час, то $\bigoplus_{\vec{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\vec{x}(T'))$ також можна обчислити за поліноміальний час.*

Висновок

Загальна задача маркування на ґратці може бути зведена до задачі виконання обмежень. У випадку, коли для функцій задачі маркування існує поліморфізм, який дозволяє розв'язувати задачу виконання обмежень за поліноміальний час, задачу маркування також вдається розв'язати за поліноміальний час.

Перелік використаних джерел

1. Evgeniy Vodolazskiy. Generalized Labeling Problems with a Majority Polymorphism for a Certain Class of Semirings : Thesis for a conference / Vodolazskiy Evgeniy ; Department of Image Processing and Recognition IRTC ITS.

2. Bulatov Andrei A. Tractable conservative constraint satisfaction problems // 18th Annual IEEE Symposium of Logic in Computer Science, 2003. Proceedings. / IEEE. — 2003. — P. 321–330.