

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітньою програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації»  
спеціальності 174(151) «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології  
та робототехніка»*

\

Електронне мережеве навчальне видання

КИЇВ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2024

УДК 519.876.5:62-5](075.8)

М 33

Укладачі: *Жученко Анатолій Іванович, д-р. техн. наук, проф.*  
*Козаневич Звенислава Ярославівна, канд. техн. наук, ст. наук. співр.,*  
*Ладієва Леся Ростиславівна, канд. техн. наук, доц*  
*Дунаєва Тамара Альбінівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

Рецензент *Степанюк А. Р., канд. техн. наук, доц. завідувач кафедри машин та*  
*апаратів хімічних та нафтопереробних виробництв інженерно-хімічного*  
*факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського,*

Відповідальний

редактор *Цапар В. С., і, канд. техн. наук, доц., в.о. зав. кафедри технічних та*  
*програмних засобів автоматизації*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*  
*(протокол № 7 від 09.05.2024 р.)*  
*за поданням вченої ради Інженерно-хімічного факультету*  
*(протокол № 4 від 29.04.24 р.)*

Математичне моделювання технологічних об'єктів. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації» спец. 174(151) «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» / А. І. Жученко, З. Я. Козаневич, Л. Р. Ладієва, Т.А. Дунаєва; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані ( 1 файл). – Київ : КПІ ім.. Ігоря Сікорського, 2024. – 168 с.

Запропонований навчальний посібник містить матеріали для лекцій з кредитного модуля «Технічні та програмні засоби автоматизації».

Призначений для студентів спеціальності 174(151) «Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання.

УДК 519.876.5:62-5](075.8)

Реєстр. № НП Обсяг 7 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

## ЗМІСТ

	Вступ .....	5
1	Моделі, їх класифікація і застосування.....	6
1.1	Види моделей. Математичні моделі. Обмеження. Математичний опис.....	6
1.2	Застосування математичних моделей в системах керування хіміко-технологічними процесами .....	12
1.3	Математичне моделювання технологічних об'єктів.....	14
1.3.1	Методики математичного моделювання хіміко-технологічних об'єктів керування.....	20
1.3.1.1	Аналіз хіміко-технологічного процесу як ТОК.....	21
1.3.1.2	Складання математичної моделі ТОК на базі матеріальних і енергетичних балансів.....	27
1.3.1.3	Одержання динамічних характеристик ТОК на базі математичної моделі в розмірних величинах.....	33
1.3.1.4	Операторний метод розв'язання системи диференційних рівнянь математичної моделі.....	36
1.3.1.5	Одержання статичних характеристик ТОК на базі математичної моделі динаміки .....	47
1.3.1.6	Комп'ютерне моделювання перехідних характеристик ТОК за каналами керування і збурення .....	50
1.4	Математичне моделювання систем регулювання.....	52
2	Рівняння гідродинаміки рідких та газоподібних середовищ.....	58
3	Типові математичні моделі структури потоків в апаратах .....	62
4	Керованість і спостережуваність (відновлюваність) системи .....	70
5	Моделі у виді сигнальних графів.....	74
6	Особливості моделювання хімічних реакторів.....	83
7	Хімічний реактор ідеального змішування як ТОК .....	86
7.1	Матеріальний баланс для і-го ключового компоненту .....	90
7.2	Тепловий баланс реактора.....	91
8	Основні закономірності перенесення тепла.....	93
9	Основні закономірності процесів згоряння палива.....	97
10	Основні закономірності процесів масопередачі.....	99
11	Математичне моделювання процесів теплопередачі як об'єктів з зосередженими та одномірно розподіленими параметрами.....	106
11.1	Об'єкти з зосередженими параметрами.....	116

11.2	Особливості моделювання об'єктів з розподіленими параметрами..	119
	Додаток.1. Приклад складання математичної моделі в розмірних величинах процесу абсорбції .....	127
	Додаток 2. Приклад отримання статичних і динамічних характеристик процесу абсорбції на основі математичної моделі..	136
	Додаток 3. Дослідження впливу зміни навантаження процесу абсорбції на його динамічні властивості у виді перехідних характеристик .....	148
	Додаток 4. Числові методи розв'язання системи диференціальних рівнянь математичної моделі технологічного об'єкту керування...	156
	Літературні джерела.....	168

## ВСТУП

Математичне моделювання технологічних об'єктів керування (ТОК) широко застосовується в при проектуванні автоматичних систем керування цими об'єктами.

ТОК – це сукупність технологічного обладнання (апаратури) і технологічного регламенту, який містить як характеристики обладнання, так і режимні значення параметрів процесів, які відбуваються з використанням цього обладнання.

Така сукупність обладнання і режиму пов'язана з тим, що як характеристики обладнання, так і значення режимних параметрів визначають динамічні характеристики ТОК. А як динамічні характеристики об'єкту, так і вимоги до систем керування впливають на склад системи автоматизації, в тому числі і систем автоматичного регулювання окремих параметрів.

Один і той же технологічний процес може відбуватися з використанням різного обладнання. Так само як і на одному і тому ж обладнанні можуть реалізовуватися різні технологічні процеси при різних значеннях параметрів.

На математичне відображення безперервних технологічних процесів значний вплив мають допущення, прийняті при їх складанні, зокрема про характер переміщення матеріальних потоків в самому апараті, а також закономірності тих технологічних перетворень, що відбуваються в ньому.

В подальшому будуть розглянуті закономірності основних хіміко-технологічних процесів, які використовуються при універсальному методі складання їх математичних моделей на основі матеріальних і теплових балансів основних ємностей акумулювання матерії чи енергії.

Основна увага направлена на математичне моделювання динамічних характеристик ТОК у виді їх передатних функцій і перехідних характеристик за каналами керування і збурення.

Складання математичних моделей хіміко-технологічних об'єктів керування розглядається на основі балансних рівнянь мас і енергій для ємностей, що їх акумулюють

# 1. МОДЕЛІ, ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ І ЗАСТОСУВАННЯ

## 1.1 Види моделей. Математичні моделі. Обмеження. Математичний опис.

Під моделлю розуміють *уявну або фізичну побудову*, яка може в деяких умовах представляти або замінювати відповідне явище, тобто об'єкт моделювання.

Модель дозволяє *прогнозувати поведінку об'єкту* в конкретній ситуації.

*Моделі застосовують* тоді, коли використання самого об'єкту моделювання нераціональне, не вигідне або неможливе.

Людським розумом створені моделі всесвіту, сонячної системи, соціальних структур, людини, її органів, різноманітних машин, пристроїв, технологічних процесів, процесів керування ними і т. д.

Моделі, які використовують при розробці чи проектуванні споруд для оцінки їх розташування чи естетичного виду, мають вигляд макетів, а для дослідження їх міцності – мають вигляд математичних виразів, за якими розраховують допустимі навантаження.

Під час розробки та проектування *автоматичних чи автоматизованих систем керування* їх моделюють *структурними і/або функціональними схемами*, а для *дослідження стійкості чи якості перехідних процесів* – *математичними виразами*, які відображають кількісні залежності між вхідними і вихідними змінними [1].

Тобто ті самі явища можуть бути представлені *різними видами моделей* в залежності від *способу їх використання*.

Одним із найбільш поширених *способів використання моделей* є формування *уявлень* (у свідомості людини) *під час пізнання* навколишнього світу.

Другий спосіб використання – *створення певної системи моделей світу для спрощення його сприйняття розумом* (дитячі іграшки в дошкільному віці чи схеми, макети, муляжі, карти в навчальному процесі в школах чи вузах).

Моделі *використовуються і у виробничій діяльності* людини:

- *при проектно-конструкторських роботах* використовують різні компоновки складного обладнання, його розташування і взаємодії, наприклад, в автоматизованих системах проектування (АСП чи САПР);

- *математичні моделі* в системах автоматичного проектування технологічних процесів, *обладнання чи систем автоматизації*;

- для керування виробничими процесами в рамках автоматизованих систем керування технологічними процесами (АСКТП) використовують математичні моделі *як окремих технологічних процесів чи установок, так і всього виробничого процесу* для визначення керівних впливів, які б забезпечили раціональний (чи оптимальний з точки зору певного критерію) режим одержання готового продукту;

- *за математичними моделями визначають технологічні параметри, які неможливо виміряти* в режимі реального часу (непряме, *опосередковане* вимірювання);

- математичні моделі використовують в *тренажерах операторів складних* чи потенційно небезпечних технологічних процесів;

- різні види моделей використовують *в науково-дослідних роботах*.

Звичайно моделі *характеризують не всі, а тільки деякі* властивості об'єкта, відповідно до способу подальшого їх використання.

*Класифікація моделей* ділить їх на дві групи:

- уявні;
- матеріальні.

*Уявні моделі* – це певна уява (в свідомості людини або викладена на папері чи інших носіях інформації) про явище чи об'єкт, які підлягають моделюванню.

*Уявні моделі* ще можна назвати *інформаційними*. Діляться на образні, знакові та формалізовані (математичні).

**Матеріальні моделі** – це моделі, виготовлені у вигляді **певних фізичних пристроїв**, які виконують функції моделей (просторово-, фізично- та математично подібні моделі).

**Математичні моделі відносяться до числа уявних моделей.**

Тепер математичні моделі знаходять більш широке застосування, ніж фізичні (матеріальні). Завдяки їм значно **скорочується час розробки чи модернізації технологічних процесів і апаратів**, а також **систем керування ними**, тобто прискорюється технічний прогрес.

**Математичне моделювання стало основним методом досліджень** в фізико-математичних та технічних науках, зокрема в автоматизованих системах наукових досліджень (АСНД). Воно є **основою сучасних методів розробки та проектування технологічних процесів та апаратів і систем керування ними** [1].

**Математичне моделювання включає** в себе:

- одержання,
- дослідження та
- застосування математичних моделей.

**Вимоги до математичних моделей** залежать від їх **призначення**, тобто **способу використання**.

**Методи використання чи застосування** математичних моделей **визначають метод отримання**, вигляд, складність, точність моделей.

**Універсальних моделей не існує**. Такими можуть бути тільки **деякі їх структури**.

Математичні моделі **встановлюються для конкретного застосування**.

Наприклад, математичні моделі, що використовуються в автоматизованих системах проектування АСП (САПР) технологічних процесів, повинні *зв'язувати показники процесу, що проектується, з конструктивними і технологічними параметрами*. Тому тут *час обчислення* на ЕОМ чи їх *складність* мають *другорядне значення*.

В цьому випадку *важливішими є точність результату і врахування якомога більшої кількості факторів*, які впливають на цей конкретний процес в конкретних умовах. Це *приводить до ускладнення математичної моделі і, як наслідок, до затягування часу розрахунків до багатьох годин*. Та цей факт *не вважається недоліком* цих моделей при їх *використанні в рамках АСП (САПР)*.

Зате до математичних моделей, що *використовуються в алгоритмах керування*, ставлять інші вимоги: *швидкодії, простоти, здатності до адаптації, тобто можливості працювати в режимі реального часу* (час розв'язання рівнянь повинен бути *співмірним з часом протікання технологічного процесу і обов'язково – випереджувати технологічний процес*, інакше їх застосування втрачає сенс.

*Математична модель – це система рівнянь, що відображають суть явищ, які протікають в об'єкті моделювання і з допомогою яких можна прогнозувати поведінку об'єкта при зміні вхідних величин.*

Всі математичні моделі ділять на *статичні і динамічні*.

*Статичні моделі* (моделі статички) відображають *статичні режими* роботи об'єкту. В статичних режимах проводять розрахунки технологічних та фізико-хімічних процесів *на основі матеріальних та енергетичних балансів*.

Статичні моделі *використовуються* здебільшого в автоматизованих системах проектування (АСП, САПР) і наукових досліджень з використанням АСНД, а також при розробці систем керування – *при статичній оптимізації* та для встановлення *номінального статичного режиму* при лінеаризації рівнянь динаміки.

*Динамічні моделі* (моделі динаміки) *описують перехідні або динамічні* режими роботи об'єктів, тобто такі, в яких *параметри стану змінюються в часі*.

Системи автоматичного регулювання та керування *працюють в динамічному режимі* (для цього вони і створені), тому динамічні моделі об'єктів застосовуються для *створення* таких систем та їх *експлуатації*.

*Динамічні моделі використовують і для створення різних типів тренажерів* як для операторів технологічних процесів, так і для інших професій (водіїв, пілотів та ін.).

Всі процеси, що *носять періодичний характер*, описуються *динамічними моделями*.

*Статичні моделі можуть бути отримані з динамічних моделей* шляхом прирівнювання до нуля похідних по часу *всіх параметрів стану*.

Система рівнянь математичної моделі повинна бути *доповненою рядом обмежень* відповідно до фізичної суті процесів, які підлягають моделюванню.

*Обмеження для реального процесу* складають 4 групи:

1. *функційні зв'язки*, які треба враховувати, щоб задача була *фізично здійсненою* (реалізованою), наприклад, закони збереження маси, енергії, кількості руху і т. д.;
2. *граничні діапазони* значень параметрів;
3. *емпіричні зв'язки* між параметрами у вигляді рівностей;

4. *додаткове обмеження у вигляді рівності*, що утворюється при введенні нових змінних для *спрощення рівнянь* моделі .

*Кожне обмеження у вигляді рівності зменшує на одиницю число степенів свободи* і приводить до появи ще однієї залежної змінної.

*Математичний опис* технологічного процесу – це *сукупність математичної моделі та системи обмежень* для конкретного технологічного об'єкту керування..

*Всі фізичні процеси* протікають (і досліджуються) в *певному діапазоні параметрів*. Тому система рівнянь, яка складає математичну модель цих процесів (явищ), повинна *розглядатися і досліджуватися в діапазоні змін цих параметрів*.

## 1.2 Застосування математичних моделей в системах керування хіміко-технологічними процесами

Математичні моделі як технологічних об'єктів, так і систем керування широко застосовуються *при синтезі та проектуванні систем керування* хіміко-технологічними об'єктами.

Здебільшого *вони використовуються для*

- *обґрунтування справедливості припущень*, прийнятих при створенні математичної моделі технологічного об'єкта – шляхом порівняння перехідних характеристик технологічного об'єкта за каналами керування і збурення, отриманих з врахуванням і без врахування конкретних припущень – і встановлення раціональної складності математичної моделі;
- встановлення *меж зміни динамічних характеристик* технологічного об'єкта при можливих регламентних *змінах його навантаження*;
- *обґрунтування параметрів налаштування* стандартних регуляторів в замкненій системі регулювання;
- визначення *структури і параметрів налаштування оптимального регулятора*;
- визначення *оптимального статичного режиму* технологічного об'єкту при заданому критерію (статична оптимізація);
- визначення *оптимального динамічного режиму* технологічного об'єкту за конкретним критерієм (динамічна оптимізація);
- визначення *структури і параметрів динамічних компенсаторів* в комбінованих системах регулювання;
- побудови *раціональної структури системи керування*;
- *оптимізації перехідних процесів* при необхідності переведення технологічного об'єкту з одного статичного режиму в інший;

- *еквівалентних перетворень структури багатоконтурних систем регулювання* з метою визначення параметрів налаштування відповідних регуляторів;
- *синтезу адаптивних і робастних систем керування;*
- *синтезу багатоконтурних систем регулювання;*
- *обчислення поточних значень показників технологічного процесу* в рамках АСКТП.

### 1.3 Математичне моделювання технологічних об'єктів

Основною *перевагою* математичного моделювання технологічного об'єкту вважають *можливість вивчення його характеристик* (як статичних, так і динамічних) без наявності самого об'єкту, чи втручання в його нормальну роботу.

Крім того, *нарошуючи складність математичної моделі* шляхом врахування впливу все більшої кількості зовнішніх факторів (зменшенню кількості припущень), можна *досягнути раціональної структурно-параметричної схеми внутрішніх зв'язків* між параметрами технологічного об'єкту.

Хоча *ніяка модель не спроможна повністю замінити об'єкт*, вона все ж таки може відобразити деяку, *найбільш суттєву*, сторону процесу.

*Математичне моделювання технологічних об'єктів складається з декількох етапів:*

1. *Аналіз конкретного технологічного об'єкту чи процесу як об'єкту керування.* Внаслідок цього аналізу *встановлюються змінні величини*, які *впливають* на стан об'єкту і виконання ним своїх функцій; *вхідні і вихідні величини* технологічного процесу; *вхідні величини* діляться на *керування  $X_i$  і збурення  $Z_j$* , а *вихідні  $Y_n$  – на регульовані  $Y_r$  і проміжні  $Y_{np}$* . *Проміжні* величини – це теж змінні, які визначають стан об'єкту, але не вимагають, крім окремих спеціальних випадків, їх регулювання. Якщо проміжні змінні вимагають за прийнятою технологією їх регулювання, то вони переходять в число регульованих.

Наприклад, температура проміжної чи обмежувальної стінки в теплообміннику є проміжною змінною. Вона характеризує стан об'єкта, але здебільшого не вимагає регулювання. Регульованою величиною вважається температура одного з середовищ на його виході з теплообмінника. Проміжною змінною є також температура на виході іншого середовища.



Система рівнянь (1.1) складає *математичну модель технологічного об'єкту керування* (ТОК)

- *в розмірних величинах*, якщо змінні  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  наведені в розмірних одиницях;
- *в безрозмірних величинах*, якщо змінні  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  наведені в безрозмірних одиницях;
- *+у відхиленнях*, якщо змінні  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  наведені у відхиленнях від їх значень в номінальному статичному режимі;
- *в зображеннях*, якщо змінні  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  наведені в перетворених за Лапласом (іноді за Лапласом-Карсоном) значеннях часу  $t \rightarrow p$  для змінних  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ , наведених у відхиленнях від їх значень в номінальному статичному режимі, тобто при т. зв. *нульових початкових умовах*.

3. *Визначення динамічних характеристик* технологічного об'єкта у виді передатних функцій, перехідних, імпульсних перехідних, частотних чи амплітудно-фазових характеристик, які використовуються при розв'язанні різноманітних конкретних задач керування, на основі рівнянь математичної моделі. *Статичні характеристики* можуть бути визначені на основі динамічних, прийнявши в них нульові значення похідних за часом.

4. *Комп'ютерне моделювання технологічного об'єкту* з аналітичним чи графічним відображенням його статичних і динамічних характеристик.

Математичні моделі об'єктів *можна отримати аналітичним* (розрахунковим) або *експериментальним методами*.

*Аналітичні методи* базуються на найбільш загальних законах *природи*: законах збереження матерії та енергії, фізичних законах Ньютона, гідростатики і гідродинаміки, теплопередачі, масообміну, хімічних перетворень і т. п.

При аналітичному моделюванні істотне значення мають *припущення про необхідність враховувати наявність (або прийняти відсутність) просторового розподілення визначальних параметрів (параметрів стану)*.

*Якщо в межах об'єкту* можна припустити, що *параметр стану* має *однакове значення* (в тому числі і в динамічному режимі) в кожній точці цього об'єкту, то такі об'єкти називаються *об'єктами із зосередженими параметрами*. Вони описуються *звичайними диференційними рівняннями*.

Якщо *параметр стану істотно змінюється в залежності від просторової координати* (в межах об'єкту моделювання), то такі об'єкти називаються *об'єктами з розподіленими параметрами*. Вони описуються *диференційними рівняннями в частинних похідних*. Якщо приймається, що параметри процесу змінюються тільки в одному напрямку, наприклад, в напрямку руху основного матеріального потоку (розчину чи газової суміші), то маємо об'єкт з *одномірно розподіленими параметрами*.

У випадку припущення про *лінійний розподіл параметру* між входом і виходом з апарату діюча сила процесу масо- чи теплопередачі буде визначатися *середніми значеннями* концентрацій чи температур. В результаті *отримуємо систему звичайних диференційних рівнянь*, але в деяких випадках *втрачаємо початковий характер* перехідної характеристики.

Іноді добрі результати дає т. зв. **коміркова модель**, суть якої полягає в тому, що матеріальний чи тепловий (енергетичний) потік представляють **окремими ланками (комірками)**, в межах яких припускають наявність зосереджених параметрів, а між комірками додають ланки чистого запізнення, які повинні відобразити передачу матеріального потоку між окремими комірками (аналог – послідовний ланцюжок хімічних реакторів чи випарних апаратів).

При **граничному зменшенні розміру комірки** в напрямку руху потоку коміркова модель **перетворюється** в модель з одномірно розподіленими параметрами, що описується диференціальним рівнянням в частинних похідних.

При моделюванні різних об'єктів ми **отримуємо моделі** відповідно з **зосередженими або розподіленими параметрами**, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь або диференціальних рівнянь в частинних похідних.

В цьому випадку виникає **задача визначення умов** для конкретного ТОК, при яких його динамічні характеристики за моделями з розподіленими чи зосередженими (в т.ч. і коміркова модель) параметрами будуть співпадати з заданою точністю. Зокрема задача визначення кількості комірок.

Моделі, отримані аналітичним шляхом, можуть використовуватися **для аналізу впливу** різних **вхідних величин на статичні чи динамічні властивості** процесу.

При **експериментальному отриманні** математичних моделей використовують детермінований та статистичний методи.

**Детермінований метод моделювання** використовується за наявності однозначної залежності між вхідними та вихідними величинами.

Якщо наявні *значні шуми* (завади, неконтрольовані збурення), які не дають можливості встановити такі однозначні залежності, то використовують *статистичні методи моделювання*.

*Експериментально-статистичний метод* отримання статичних характеристик ділять на методи *активного та пасивного експериментів*.

### 1.3.1 Методики математичного моделювання хіміко-технологічних об'єктів керування

Методика математичного моделювання технологічних об'єктів керування (ТОК) вибирається в залежності від того, які саме властивості ТОК підлягають моделюванню. При аналізі здатності регулювати параметри конкретного хіміко-технологічного процесу, що здійснюється в певній апаратурі, виникає задача моделювання динамічних властивостей цього ТОК.

Динамічні властивості об'єкту для візуальної оцінки бажано мати у вигляді перехідної характеристики або передатної функції, з якої легко можна отримати перехідну характеристику.

Перехідна характеристика  $h(t)$  визначається за відомою передатною функцією  $W(p)$  шляхом *зворотного перетворення за Лапласом* її зображення, що є добутком  $W(p)$  і зображення  $1/p$  одиничної функції  $1(t)$  як вхідної величини:

$$h(t) = L^{-1}[(1/p) \cdot W(p)] = \text{invlapl} [(1/p) \cdot W(p)] \quad (1.2)$$

Крім того, передатні функції ТОК використовують як при синтезі багатоконтурних систем регулювання, так і при обчисленні показників виробництва, які ґрунтуються на технологічних параметрах, що мають між собою динамічні зв'язки.

Існує декілька загальних етапів математичного моделювання ТОК, що присутні в різних галузях хімічних виробництв, і математичні моделі яких отримуються аналітичним шляхом та використовуються при проектуванні систем автоматизації:

1. Аналіз хіміко-технологічного процесу як технологічного об'єкту керування (ТОК).
2. Складання математичної моделі ТОК на базі матеріальних і енергетичних балансів .

3. Одержання динамічних характеристик ТОК на базі математичної моделі.
4. Одержання статичних характеристик ТОК на базі математичної моделі динаміки.
5. Комп'ютерне моделювання перехідних характеристик ТОК за каналами керування і збурення.

**Поелементна методика** складання математичної моделі полягає в **розділенні** всього технологічного процесу на ряд незалежних ділянок - **ємностей акумулювання** - , що здатні акумулювати матерію, компонент розчину чи однорідної суміші або енергію, які зв'язані між собою входами і виходами, а також у **встановленні зв'язків** між ними.

**Наявність ємностей** акумулювання в технологічних процесах є причиною появи **перехідного запізнення**, а факт переміщення матеріальних потоків визиває **чисте запізнення** в об'єкті моделювання.

**Періодичні процеси** складаються з окремих стадій, кожна з яких має свої динамічні характеристики.

### **1.3.1.1 Аналіз хіміко-технологічного процесу як ТОК**

На цьому етапі на основі вивчення як закономірностей технологічного процесу, так і особливостей його апаратної реалізації, встановлюються:

- **основні змінні величини** (параметри), що характеризують функціонування конкретного технологічного процесу;
- **структурно-параметрична схема** основних динамічних каналів;
- **структурно-параметрична схема досліджуваних** динамічних каналів;

- **перелік ємностей, що акумулюють** матерію, компоненти чи енергію досліджуваного ТОК, і які мають однорідні фізико-технічні властивості;

- **перелік припущень**, при яких складаються рівняння балансів для ємностей акумулювання і для яких **буде справедливою** отримана математична модель;

- **розрахункова схема об'єкту**, на основі якої складаються рівняння балансів для **кожної ємності акумулювання** з метою одержання математичної моделі всього об'єкту.

**Основні змінні величини** діляться на групи:

**вхідні**, в склад яких входять

**збурення** і

**керування** та

**вихідні**, в склад яких входять

**регульовані** та

**проміжні** величини.

Вихідні величини є **параметрами стану**.

**Вхідні величини** можна коротко описати наступним чином:

1. **Збурення, що допускають стабілізацію** за допомогою автоматичних систем регулювання. Це – деякі параметри вхідних потоків (витрата, якщо перед апаратом є буферна ємність; температура, якщо перед апаратом встановлено теплообмінник і т. д.).

При проектуванні передбачають такі технологічні рішення, які покращать якість керування процесом в цілому.

Якщо передбачена система стабілізації такого збурення, то ця величина **переходить** зі збурень в число **регульованих вхідних величин** і в випадках їх стабілізації на вході в об'єкт моделювання виключається з числа змінних.

2. **Контрольовані збурення** – їх можна виміряти, але неможливо або недоцільно стабілізувати. При істотних їх впливах на регульовану величину слід застосовувати **комбіновану систему регулювання**, яка забезпечить регулювання, інваріантне до цього збурення.

3. **Неконтрольовані збурення**, які неможливо або недоцільно вимірювати (падіння активності каталізатора; зменшення коефіцієнтів теплопередачі внаслідок утворення накипу; тиск в магістральному паропроводі, що змінюється випадково і впливає на процеси теплопередачі). Ліквідувати вплив таких збурень на регульовану величину вдається застосуванням **інваріантних систем регулювання** з введенням двох додаткових контурів впливу.

4. **Керування** – матеріальні чи енергетичні (теплові) потоки, які можна цілеспрямовано змінювати для керування технологічним процесом. При наявності двох і більше регульованих величин необхідно передбачити таку ж кількість керувань, щоб система рівнянь була однозначно визначеною (за винятком застосування особливих за структурою систем регулювання, наприклад, каскадних чи з двома керуваннями).

**Вихідні величини** складаються з двох груп змінних:

1. **Регульовані величини** – це ті визначальні параметри стану технологічного процесу, які характеризують якість протікання цього процесу, поточні значення яких можуть бути виміряні з достатньою точністю і прийняти задане значення під дією конкретного керування.

Номинальні значення регульованих величин присутні в технологічному регламенті або встановлюються у відповідності з певним критерієм керування.

2. **Проміжні величини** – це ті змінні, які визначають стан об'єкту, але не вимагають, крім окремих спеціальних випадків, їх регулювання. Якщо проміжні змінні вимагають за прийнятою технологією їх регулювання, то вони **переходять в число регульованих**.

Грунтуючись на такій класифікації, складають **структурно-параметричну схему ТОК** (див. рис.1.1), де вказують всі вхідні та вихідні величини та відомі канали впливу вхідних величин на вихідні.

Якщо потрібно дослідити динамічні характеристики певних конкретних каналів впливу ТОК, складають **структурно-параметричну схему досліджуваних каналів**, на якій наведені тільки ті динамічні канали і змінні величини, що підлягають розгляду (приклад наведений в Додатку 1).

На етапі аналізу об'єкта як ТОК визначають **перелік ємностей акумулювання** в досліджуваному ТОК, які мають здатність накопичувати в динамічному режимі матерію, компоненти середовища чи енергію (зі знаком + при збільшенні та – при зменшенні). Ця здатність для великих за нею ємностей істотно впливає на поточні значення вихідних величин. Наявність ємностей акумулювання є причиною виникнення **перехідного запізнення**.

Важливою умовою при **встановленні границь** ємності акумулювання є **однорідні** (одинакові) **теплофізичні, електрохімічні, оптичні і т.д. властивості** речовини, що знаходиться в межах цієї ємності.

Рівняння балансу **буде складатися окремо для кожної конкретної ємності акумулювання і кожного з видів балансів** (матерії, компонента чи енергії).

Також на цьому етапі встановлюють **перелік припущень**, при яких складаються рівняння балансів і для яких буде справедливою отримана математична модель. Ці **припущення** здебільшого **торкаються** :

- швидкості технологічних процесів (фізичних чи хімічних);
- характеру переміщення матеріальних потоків газових, рідинних чи сипучих середовищ, що приводить до вибору моделей з зосередженими чи розподіленими параметрами;

- залежності теплофізичних параметрів цих середовищ від температури чи концентрації;
- матеріальних або теплових втрат в технологічному процесі;
- границь ТОК та ємностей акумулювання в ньому і т. д.

Прийняте припущення про *характер переміщення матеріальних потоків* в ємності акумулювання істотно впливає на структуру і динамічні характеристики математичної моделі.

З метою дослідження динамічних властивостей в апаратах хімічної технології виділяють *три характерні зони*: повного змішування, повного витіснення і застійна зона.

Зона *повного змішування* характеризується *однаковим* значенням *параметрів стану* в кожній точці цієї зони. Прикладом такої зони може бути ємність акумулювання розчину в апараті з мішалкою. Більшість хімічних реакторів обладнані мішалками, які інтенсифікують хімічний процес завдяки інтенсивному перемішуванню розчину. Іноді з цією ж метою використовують вимушений барботаж повітря через шар розчину, особливо якщо для хімічного процесу потрібний розчинений кисень. Параметри стану цієї зони (ємності акумулювання) описуються *звичайними диференціальними рівняннями*.

Зона *повного витіснення* припускає, що в напрямку, перпендикулярному руху потоку, параметри стану мають однакове значення, а в напрямку його руху є розподіленими по довжині траєкторії. Такий об'єкт ще називають об'єктом з *одномірно розподіленими параметрами*. Прикладом такої зони може бути змієвиковий теплообмінник або теплообмінник типу «труба в трубі». Переміщення мас в реакторах трубчатого типу, як і в екструдерах, може бути віднесено до цього типу руху матеріальних потоків.

Параметри стану такої зони описуються *диференційними рівняннями в частинних похідних*. Частинні похідні беруться не тільки по часу, а і по просторовій координаті. В деяких випадках розглядають технологічні об'єкти з двомірним розподіленням параметрів. Тоді частинні похідні беруться як по часу, так і по двох просторових координатах. Рівняння Нав'є–Стокса передбачає трьохмірне розподілення параметрів.

*Застійна зона* характеризується наявністю чистого запізнення між вхідним і вихідним потоком. Прикладом можуть бути довгі трубопроводи з рідиною чи газом або транспортери чи елеватори з сипучим матеріалом. Параметри стану такої зони описуються *зсувом змінної часу* на час перебування матерії, компонента чи носія енергії в зоні, тобто *чистим запізненням*.

Розподіл таких зон в межах апарату може бути встановлений експериментальним шляхом. Для *спрощення розрахунків* припускають, що в конкретному апараті переважає одна з цих зон і розглядають його як апарат повного змішування або повного витіснення з запізненням або без нього.

Теорія автоматичного керування на сьогоднішній день найкраще розвинута для об'єктів, що описуються звичайними диференційними рівняннями з лінійними зв'язками між змінними. Тому математичне моделювання динамічних властивостей технологічних об'єктів на практиці йде в напрямку використання припущень і границь ємностей акумулювання, в межах яких застосовують звичайні диференційні рівняння з їх подальшою лінеаризацією..

Наявність диференційних рівнянь в частинних похідних як елементу математичної моделі об'єктів з просторово розподіленими параметрами призводить до присутності нелінійностей, зокрема і трансцендентних співвідношень, в виразах передатних функцій.

Це істотно затрудняє їх аналіз в загальному виді та їх використання при синтезі багатоконтурних систем керування..

Тому появилася **коміркова модель**, ідея якої полягає в представленні об'єкта послідовним з'єднанням декількох його ділянок («комірок»), для моделювання кожної з яких використовується модель повного змішування.

Ще один спосіб уникнення диференційних рівнянь в частинних похідних **полягає в припущенні**, що параметрам стану притаманне **лінійне розподілення** по довжині (висоті) апарату. Тоді **діюча сила процесу** масо- чи теплопередачі може бути прийнятою як **середньоарифметичне** її значень на вході і виході з технологічного апарату. Таким чином появляється можливість обминути частинні похідні в диференційних рівняннях математичної моделі об'єкта з розподіленими параметрами.

Аналіз конкретного технологічного об'єкту як ТОК завершується складанням **розрахункової схеми** об'єкту керування. На цій схемі спрощено зображені особливості внутрішньої будови апарату, наведені вхідні і вихідні матеріальні потоки, позначені усі параметри стану, керування і збурення в місцях їх знаходження. Приклад розрахункової схеми абсорбера наведений в Додатку 1.

### ***1.3.1.2 Складання математичної моделі ТОК на базі матеріальних і енергетичних балансів .***

**Математична модель** – це система рівнянь, що відображають суть явищ, які протікають в об'єкті моделювання (в нашому випадку ТОК) і з допомогою яких можна прогнозувати поведінку об'єкта при зміні керування і збурення.

Система рівнянь, що є математичною моделлю ТОК, складається на основі рівнянь балансів енергії, матерії чи її компонентів, що базуються на твердженні:

**Загальна кількість речовини або енергії, які поступають до ТОК, дорівнює загальній кількості речовин чи енергії, що виходить з ТОК, та її кількості, що акумулювалася в ТОК.**

Рівняння балансів складаються з врахуванням **прийнятих припущень**. Невідповідний вибір чи формулювання цих припущень може призвести до неадекватності (невідповідності) отриманої математичної моделі реальному об'єкту.

Загальне рівняння балансів записується як:

$$Q_{otr} - Q_{vyt} = Q_{ak}$$

де  $Q_{otr}$  – кількість отриманої речовини або енергії, кг чи дж;

$Q_{vyt}$  – кількість витраченої речовини або енергії, кг чи дж;

$Q_{ak}$  – кількість акумульованої речовини або енергії, кг чи дж..

Звичайно ці кількості беруться за певний проміжок часу, в основному **в одиницю часу**, тобто **витрати** в одиницю часу.

Якщо  $Q_{otr}$  і  $Q_{vyt}$  беруться в одиницю часу, тобто як **витрати**, то рівняння балансу матиме вид

$$Q_{otr} - Q_{vyt} = \frac{d}{dt} Q_{ak} \quad (1.3)$$

**Отримана чи витрачена кількість речовини чи енергії** при складанні **рівнянь балансів** для **кожної ємності акумулювання** включає в себе ту, що

- прийшла чи відійшла з відповідними **матеріальними потоками**;
- прийшла/відійшла внаслідок **зміни фізичного стану**;

(випаровування/конденсація, розчинення/кристалізація і т. п.);

- прийшла/відійшла внаслідок **масообміну** в процесах сорбції (абсорбція, адсорбція, десорбція) чи переходу речовини з одної ємності акумулювання в іншу;

- прийшла/відійшла внаслідок *теплообміну*;
- прийшла/відійшла внаслідок *хімічних перетворень* і появи продуктів реакції.

В реальних апаратах для різних ємностей акумулювання можуть бути присутніми, і це треба враховувати, *усі або тільки деякі* з наведених вище складових балансів.

*Кількість речовини*, що акумулювалася в ємності в одиницю часу  $Q_{ak}$  визначається як

$$\frac{d}{dt} Q_{ak} = \frac{d}{dt}(V \cdot \rho) \quad (1.4)$$

де  $V$  – об’єм, зайнятий речовиною;  
 $\rho$  – густина речовини.

Для *рідини або сипучого матеріалу* об’єм

$$V = S \cdot H, \quad (1.5)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу апарату і  
 $H$  – рівень рідини чи сипучого в апараті.

При *постійних* значеннях  $\rho$  і  $S$

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho) = \frac{d}{dt}(S \cdot H \cdot \rho) = S \cdot \rho \cdot \frac{dH}{dt} \quad (1.6)$$

Для речовини в стані *ідеального газу*

$$P \cdot V = G \cdot R \cdot \Theta \quad (1.7)$$

де  $P$  – абсолютний тиск, Па;

$G$  – кількість речовини, моль;

$R$  – газова стала, Дж/(моль · град К);

$\Theta$  – абсолютна температура, град К

Тоді з (1.7)

$$\rho = \frac{G}{V} = \frac{P}{R\theta} \quad (1.8)$$

і кількість речовини, що акумулювалася в ємності за одиницю часу

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho) = \frac{d}{dt}\left(V \cdot \frac{P}{R\theta}\right) \quad (1.9)$$

При *постійних* значеннях  $V$ ,  $R$  і  $\theta$  рівняння (1.9) буде

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho) = \frac{V}{R\theta} \frac{dP}{dt} \quad (1.10)$$

*Кількість компоненту в розчині*, що акумулювалася в ємності в одиницю часу визначається як

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho \cdot c) \quad (1.11)$$

де  $V$  – об'єм, зайнятий розчином;

$\rho$  – густина розчину;

$c$  – концентрація компоненту в розчині.

При *постійних* значеннях  $\rho$  і  $V$

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho \cdot c) = V \cdot \rho \cdot \frac{dc}{dt} \quad (1.12)$$

*Кількість теплової енергії (тепла)*, що акумулювалася в тепловій ємності в одиницю часу визначається як

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho \cdot c_T \cdot \theta) \quad (1.13)$$

де  $V$  – об'єм речовини в ємності акумулювання;

$\rho$  – густина речовини;

$c_T$  – питома теплоємність речовини;

$\theta$  – температура речовини.

При *постійних* значеннях  $V$ ,  $\rho$ , і  $c_T$

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho \cdot c_T \cdot \theta) = V \cdot \rho \cdot c_T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (1.14)$$

Кількість речовини чи енергії, яка акумулювалася в конкретній ємності внаслідок *невідповідності* матеріальних чи енергетичних (в хіміко-технологічних процесах це здебільшого теплових) *вхідних і вихідних потоків* відповідає *зміні конкретних параметрів*:

- при відсутності *матеріального балансу для рідини чи сипучого матеріалу* в апараті змінюється її кількість, що дає зміну *рівня* при постійній площі поперечного перерізу апарату і густині речовини;
- при відсутності *матеріального балансу для газу* в апараті при постійній температурі змінюється його *тиск*;
- при відсутності *матеріального балансу за компонентом* при постійному об'ємі і густині розчину чи суміші змінюється його *концентрація*;
- при відсутності *теплого балансу* в ємності акумулювання при постійних значеннях об'єму, густини і питомої теплоємності середовища змінюється *температура*.

Хоча *ніяка модель* внаслідок наявності припущень *не спроможна повністю замінити об'єкт*, вона все ж таки може відтворити деяку, найбільш суттєву, сторону технологічного процесу.

Рівняння балансів складають *окремо* для *кожної ємності акумулювання і кожного виду балансу (матерії, компоненту чи енергії)*. *Недопустимо* складання рівнянь балансів *одночасно для двох і більше* ємностей акумулювання з *різними фізико-технічними* властивостями середовищ чи різними технологічними процесами. Такі рівняння в кращому випадку відображатимуть статичні залежності. А в динаміці – процес *змішування* потоків. В динаміці важливе значення мають швидкості протікання конкретних технологічних процесів, які в цьому випадку або взагалі зникають з рівнянь або не можуть бути однозначно встановленими.

Таким чином для ТОК з багатьма ємностями акумулювання отримують *систему рівнянь*, що складає *математичну модель ТОК в розмірних величинах*. У випадку однієї регульованої величини і однієї ємності акумулювання матимемо *одне рівняння балансу* (теплого, матеріального чи за компонентом).

Буває, що для *однієї фізичної ємності* акумулювання потрібно скласти *декілька різних рівнянь балансів*, якщо цього вимагають фізичні і хімічні процеси, що проходять в цій ємності. Наприклад, для ємності розчину в проточному реакторі, де реакція проходить при певних оптимальних умовах (температура, концентрація) складають балансів рівняння за *масою розчину* в реакторі (параметр стану – *рівень рідини*), за кількістю *теплової енергії* (параметр стану – *температура*), за кількістю *компонента* (параметр стану – *концентрація однієї* з речовин в розчині для *простої* хімічної реакції, а для складної хімічної реакції – *концентрації к ключових* речовин, кількість яких *к* визначається *рангом матриці* стехіометричних коефіцієнтів простих реакцій, що складають цю складну хімічну реакцію).

Рівняння балансів *часом складають для частин* установок (наприклад, для сушильної установки, що складається з камери спалювання і камери висушування). Тоді вихідні величини однієї з частин установки є вхідними величинами другої частини.

Рівняння балансів для окремої ємності акумулювання в динаміці є диференціальним рівнянням здебільшого першого порядку (крім процесів дифузії, теплопровідності та ін.).

Для сукупності ємностей акумулювання, що входять в склад ТОК, будемо мати *систему диференціальних рівнянь* зі складовими виду (1.3), яка і є *математичною моделлю в розмірних величинах*.

В загальному випадку математична модель хіміко-технологічного об'єкту в розмірних величинах є *системою нелінійних диференційних рівнянь*.

### ***1.3.1.3 Одержання динамічних характеристик ТОК з математичної моделі в розмірних величинах***

Розв'язавши систему рівнянь балансів відносно регульованих величин при одиничних значеннях відповідних вхідних величин  $[1(t)]$ , отримуємо *аналітичні вирази* для перехідних характеристик за каналами керування і збурення.

За цими аналітичними виразами будуються *графіки перехідних характеристик*, що дає змогу як *візуально, так і кількісно оцінити* динамічні властивості конкретних каналів впливу.

Розв'язання системи рівнянь математичної моделі в розмірних одиницях відносно регульованої величини може відбуватися різними способами:

1. для одного лінійного диференційного рівняння або системи з двох таких рівнянь існують класичні методи їх розв'язання, які дають аналітичні вирази; результат отримуємо в загальному вигляді, що дає змогу відразу аналізувати вплив окремих вхідних величин;

2. для систем з двох і більше *нелінійних* диференційних рівнянь застосовують *операторний метод*, який складається з *декількох етапів* (див. Приклади в Додатках 1, 2, 3):

- лінеаризація системи рівнянь в точці номінального статичного режиму і отримання математичної моделі *у відхиленнях*;

- перетворення за Лапласом змінної часу  $t \rightarrow p$  і отримання математичної моделі *в зображеннях змінних*;
- розв'язання *лінійної системи рівнянь* математичної моделі в зображеннях відносно регульованої величини як функції керування і збурення і одержання передатних функцій за цими каналами в загальному виді (в т. ч. в результаті застосування *правила Крамера*);
- одержання перехідних характеристик за передатними функціями каналів керування і збурення шляхом зворотного перетворення за Лапласом  $p \rightarrow t$  їх зображень; результат отримуємо в загальному вигляді, що дає змогу відразу аналізувати вплив окремих вхідних величин на динамічні властивості ТОК; це відкриває здатність *проектування* технологічних апаратів з *бажаними динамічними* властивостями.

3. одержання перехідних характеристик в числовому виді, враховуючи значення всіх параметрів в точці лінеаризації (номінального статичного режиму), шляхом дискретного представлення рівнянь динаміки і отримання їх в кінцево-різницевого вигляді з наступним послідовним їх розв'язанням з використанням відповідних рекурентних співвідношень; цей метод вимагає багато машинного часу і може використовуватися лишень в наукових дослідженнях;

4. для числового розв'язання рівнянь лінійної математичної моделі з отриманням перехідних характеристик технологічного об'єкту широко застосовують пакет програм MATLAB.

Введення математичної моделі до середовища програми Matlab відбувається за допомогою пакетів Simulink та Control System Toolbox і можливе в чотирьох форматах:

- 1) у вигляді коефіцієнтів чисельників та знаменників передатних функцій як поліномів;
- 2) в форматі матриць простору стану;
- 3) в форматі нулів, полюсів та коефіцієнтів передачі системи;
- 4) в форматі доданків простих дробів.

Математичні моделі систем у векторно-матричній формі мають дуже важливе практичне значення. Вони широко використовуються в сучасній теорії автоматичного керування при аналітичному конструюванні регуляторів, розробці оптимальних систем керування, тощо. Векторно-матричний опис дозволяє формалізувати процедури розв'язання багатьох складних задач, що дуже важливо при їх розв'язанні за допомогою ЕОМ.

В MATLAB для розв'язання диференціальних рівнянь застосовують числові методи, зокрема метод Рунге-Кутта четвертого порядку (Додаток 4).

Універсальним є *операторний метод*, який дає змогу не тільки розв'язувати системи диференціальних рівнянь високого порядку, а також і попутно *одержати передатну функцію* об'єкту керування за конкретним каналом керування, яка широко застосовується при синтезі складних систем регулювання, зокрема багатоконтурних систем.

Одержання передатної функції і перехідної характеристики в *загальному (явному) виді* має ту перевагу, що створює можливість дослідити вплив як конструктивних параметрів апарату, так і фізичних властивостей середовищ на динамічні характеристики технологічних процесів.

В подальшому будемо використовувати *операторний метод* розв'язання системи диференціальних рівнянь і отримання динамічних характеристик каналів керування і збурення у виді передатних функцій і на їх основі - перехідних характеристик.

### 1.3.1.4. Операторний метод розв'язання системи диференціальних рівнянь математичної моделі

**Операторний метод** розв'язання системи диференціальних рівнянь вимагає, щоб оригінал (початкова функція, в нашому випадку диференціальні рівняння балансів) був лінійною функцією своїх змінних. Звідси виникає **необхідність лінеаризації** математичної моделі в розмірних величинах.

**Лінеаризація рівнянь балансів** відбувається з використанням формули розкладання функції багатьох змінних в ряд Тейлора.

Лінеаризація нелінійного диференціального рівняння базується на **припущенні про достатню малість відхилень всіх змінних** (фізичних величин) ланки від їх усталених номінальних значень.

Функцією  $f(X)$  позначаємо **ліву і праву сторону рівняння балансу**,

де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , а  $x_i$  – це є наступні змінні:

- **параметри стану** (регульовані  $X_p$  і проміжні  $X_{np}$  величини),  
 $X_{cm}(X_p, X_{np}); X_p = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pR}), X_{np} = (x_{np(R+1)}, x_{np(R+2)}, \dots, x_{np(R+r)});$
- **керування**,  $X_{кер}; X_{кер} = (x_{кер(R+r+1)}, x_{кер(R+r+2)}, \dots, x_{кер(2R+r)});$
- **збурення**,  $X_{зб.}; X_{зб.} = (x_{зб(2R+r+1)}, x_{зб(2R+r+2)}, \dots, x_{зб(2R+r+z)}).$

Множина  $X$  змінних, які беруть участь в лінеаризації, складається з

$$X = (X_p, X_{np}, X_{кер}, X_{зб.}) = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pR}; x_{np(R+1)}, x_{np(R+2)}, \dots, x_{np(R+r)}; x_{кер(R+r+1)}, x_{кер(R+r+2)}, \dots, x_{кер(2R+r)}; x_{зб(2R+r+1)}, x_{зб(2R+r+2)}, \dots, x_{зб(2R+r+z)}),$$

де  $R$  – кількість регульованих величин і кількість керувань прийняті рівними, що здебільшого відповідає реальності;

$r$  – кількість проміжних величин;

$z$  – кількість збурень, що підлягають врахуванню.

Таким чином, загальна **кількість** змінних, що беруть участь в **лінеаризації**:

$$N = R + r + R + z = 2R + r + z. \quad (1.15)$$

В тому числі *кількість вхідних* змінних (керування і збурення) є  $R + z$ , а *кількість вихідних* змінних (параметрів стану, що складаються з регульованих і проміжних) є  $n = R + r$ .

Лінеаризація  $f(X)$  здійснюється *в точці номінального статичного режиму*  $X_0$ , параметри якого  $x_{i0}$  позначаємо індексом «0»; тобто  $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})$ .

Залишаючи *2 складові при розкладанні  $f(X)$  в ряд Тейлора*, маємо:

$$f(X) \cong f(X_0) + \Delta f(X), \quad (1.16)$$

$$\text{де} \quad \Delta f(X) = \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \right) \Big|_0 \cdot \Delta x_i \quad (1.17)$$

Кожна змінна  $x_i(t)$  представляється сумою її значення в номінальному статичному режимі  $x_{i0}$  і її відхилення відносно цього значення  $\Delta x_i(t)$ :

$$x_i(t) = x_{i0} + \Delta x_i(t) \quad (1.18)$$

Зважаючи на те, що  $f(X)$  в рівнянні балансів відображає різницю між отриманою і витраченою кількістю матеріалу, компоненту суміші чи енергії, то

- на основі закону збереження кількості матерії чи енергії  $f(X_0) = 0$ , бо відображає баланс матерії, компонента чи енергії в статичному режимі;

- значення параметрів  $x_i$  в статичному режимі, тобто  $x_{i0}$ , є постійними в часі  $x_{i0} = \text{const}$ , тому  $\frac{\partial x_{i0}}{\partial t} = 0$ .

Внаслідок лінеаризації рівняння балансу в точці номінального статичного режиму отримаємо лінійне диференціальне рівняння для кожної ємності акумулювання матерії, тепла чи компоненту середовища:

$$K_{x1} \cdot \Delta x_1 + K_{x2} \cdot \Delta x_2 + \dots + K_{xN} \cdot \Delta x_N = \frac{d}{dt}(\Delta Q_{ак}) \quad (1.19)$$

де  $N$  – кількість змінних,

$\Delta Q_{ak}$  – зміна кількості акумульованої матерії, компонента чи енергії в ємності акумулювання, для якої складено рівняння балансу, що виникає внаслідок відхилення змінних  $x_i$  від їх значень в статичному режимі.

Коефіцієнти при  $\Delta x_i$ , що оцінюють вплив на  $f(X)$  відхилення змінної  $x_i$ , знаходяться як частинні похідні від  $f(X)$  по  $x_i$ , взяті в статичному режимі, тобто при  $X = X_0$ :

$$K_{xi} = \left( \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \right) \Big|_0 \quad (1.20)$$

Оскільки  $Q_{ak}$  як кількість акумульованої матерії, компонента чи енергії може бути функцією змінних  $x_i$ ,

$$Q_{ak} = f_Q(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1.21)$$

то права частина рівняння (1.19) може виявитися сумою похідних за часом цих  $N$  змінних зі своїми коефіцієнтами, що є частинними похідними від  $Q_{ak}$  по  $x_i$ :

$$\frac{d}{dt}(\Delta Q_{ak}) = T_1 \frac{d\Delta x_1}{dt} + T_2 \frac{d\Delta x_2}{dt} + \dots + T_m \frac{d\Delta x_N}{dt}, \quad (1.22)$$

де 
$$T_i = \frac{\partial Q_{ak}}{\partial x_i} \text{ при } x_i = x_{i0}$$

Таким чином отримуємо для кожної ємності акумулювання отримуємо рівняння балансу у виді наступного лінійного диференційного рівняння, що є *математичною моделлю одно ємнісного об'єкта у відхиленнях*:

$$K_{x1} \cdot \Delta x_1 + K_{x2} \cdot \Delta x_2 + \dots + K_{xi} \cdot \Delta x_n = T_1 \frac{d\Delta x_1}{dt} + T_2 \frac{d\Delta x_2}{dt} + \dots + T_m \frac{d\Delta x_N}{dt}$$

або 
$$\sum_{i=1}^n K_{xi} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^m T_i \cdot \frac{d\Delta x_i}{dt}. \quad (1.23)$$

Зазвичай більшість  $T_i$  мають нулеві значення, бо в кожному балансі кількість акумульованих маси, енергії чи компонента є залежними здебільшого від однієї, рідко коли двох чи дуже рідко трьох параметрів стану одночасно.

Математична модель об'єкта у відхиленнях (1.23) може бути приведена до різних тотожних співвідношень в залежності від способу її застосування. Найчастіше застосовують такі диференціальні рівняння в **канонічному вигляді** або у **формі Коші**, що стосується виду представлення формули (1.23) або у **безрозмірних величинах** змінних, що стосується масштабу змінних з метою приведення їх до безрозмірних величин.

Форма математичної моделі у **безрозмірних величинах** застосовується, коли потрібно порівняти динамічні моделі за різними каналами впливу, щоб виключити розмірність з характеристик, що підлягають порівнянню.

Рівняння в безрозмірних величинах утворюються з рівнянь в розмірних величинах або рівнянь у відхиленнях внаслідок представлення кожної змінної  $x_i(t)$  як добутку її безрозмірного значення  $x_i^{\theta}(t)$  і її номінального статичного значення  $x_{i0}$ :

$$x_i(t) = x_i^{\theta}(t) \cdot x_{i0} \quad \text{або} \quad x_i^{\theta}(t) = x_i(t) / x_{i0}. \quad (1.24)$$

Приведення рівняння (1.23) до **канонічного вигляду** полягає в наступному:

- в рівнянні (1.23) **зліва** від знаку рівності переносяться всі складові з відхиленнями **параметрів стану** (регульовані  $x_p$  і проміжні величини  $x_{np}$ ), а також їх похідні за часом;
- **справа** від знаку рівності переносяться всі складові з відхиленнями **вхідних величин** (керування  $x_{кер}$  і збурення  $x_{зб}$ ), а також їх похідні за часом;
- обі сторони рівняння ділять на коефіцієнт при параметрі стану  $x_j$ , зміна якого в **конкретному рівнянні балансу** проявляється при зміні акумульованої маси, енергії чи компонента середовища.

Внаслідок таких перетворень рівняння (1.23) для  $i$ -ї ємності акумулювання для випадку, коли внаслідок небалансу змінюється  $j$ -та змінна величина  $x_j$  і коли будемо ділити всі складові цього рівняння на коефіцієнт  $K_{xji}$  при  $x_j$ , матиме вид:

$$T_{il}^k \frac{d\Delta x_1}{dt} + K_{ixl}^k \cdot \Delta x_l + \dots + T_{ij}^k \frac{d\Delta x_j}{dt} + \Delta x_j + \dots + T_{in}^k \frac{d\Delta x_R}{dt} + K_{ixn}^k \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^r (T_{keri}^k \frac{d\Delta x_{keri}}{dt} + K_{xkeri}^k \cdot \Delta x_{keri}) + \sum_{i=1}^z (T_{z\bar{i}}^k \frac{d\Delta x_{z\bar{i}}}{dt} + K_{x\bar{i}}^k \cdot \Delta x_{z\bar{i}}), \quad (1.25)$$

$$\text{де } T_{il}^k = T_{il} / K_{ixij}; \quad K_{ixl}^k = K_{ixlj} / K_{ixjj}; \quad T_{ij}^k = T_{ij} / K_{ixjj}; \quad T_{in}^k = T_{in} / K_{ixjj}; \\ K_{ixn}^k = K_{ixnj} / K_{ixjj};$$

Рівняння (1.25) є *математичною моделлю* у відхиленнях в *канонічному вигляді* для *однієї* ємності акумулювання *багато ємнісного* об'єкта. Верхній індекс «к» вказує на приналежність коефіцієнта до рівняння в канонічному вигляді.

Для *одно ємнісного об'єкта* з однією ємністю акумулювання характерна одна регульована величина  $x_r$ , одне керування  $x_{ker}$  і для досліджень вибирається одне, бажано найбільш впливове, збурення  $x_{z\bar{o}}$ . В цьому випадку *рівняння динаміки у відхиленнях* для ємності акумулювання має дещо спрощений вигляд:

$$T_1 \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} + K_1 \cdot \Delta x_1(t) = K_2 \cdot \Delta x_{ker}(t) + K_3 \cdot \Delta x_{z\bar{o}}(t),$$

звідки, поділивши обі сторони рівняння на коефіцієнт  $K_1$ , отримаємо рівняння в *канонічному вигляді*

$$T \cdot \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} + \Delta x_1(t) = K_{ker} \cdot \Delta x_{ker}(t) + K_{z\bar{o}} \cdot \Delta x_{z\bar{o}}(t). \quad (1.26)$$

$$\text{де } T = T_1 / K_1; \quad K_{ker} = K_2 / K_1; \quad K_{z\bar{o}} = K_3 / K_1.$$

Для ТОК, в склад якого входять *декілька ємностей акумулювання*, для кожної з яких складається одне чи більше рівнянь балансів, математична модель у розмірних величинах є *системою диференційних рівнянь*. За аналогією математична модель такого ТОК у відхиленнях буде *системою лінійних диференційних рівнянь у відхиленнях* змінних від їх значень в статичному режимі .

*Форма Коші* передбачає представлення такої системи лінійних диференційних рівнянь в *векторно-матричній формі (форма Коші)*:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \quad (1.27)$$

де:

**A** – *матриця системи* розмірності  $n \times n$  де  $n$  – кількість *параметрів стану* і кількість *незалежних рівнянь* математичної моделі;

**B** – *матриця входу* розмірності  $n \times t$ , де  $t$  – кількість *зовнішніх дій*..

$X(t)$  – вектор *параметрів стану* розмірності  $n$ ;

$U(t)$  – вектор *зовнішніх дій* розмірності  $t$ . В зовнішні дії можуть включатися як *керування*, так і *збурення*, в залежності від постановки задачі.

Для *одно ємнісного* об'єкта лінійне (у відхиленнях) рівняння балансу в канонічному вигляді (1.26) має *форму Коші*:

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = a_1 \cdot \Delta x_1(t) + b_1 \cdot u_1(t) \quad (1.28)$$

де  $a_1 = -1/T$ ;  $b_1 = K_{кер}/T$ , якщо  $u \in x_{кер}$ .

*Перетворення за Лапласом* змінної часу  $t \rightarrow p$  відбувається з метою трансформації *лінійного диференційного рівняння* (1.23) в звичайне *лінійне алгебричне рівняння* відносно  $p$ , розв'язання якого в загальному виді може бути одержано достатньо просто.

Внаслідок перетворення  $t \rightarrow p$  змінні  $\Delta x_i(t)$  стануть функціями параметра  $p$ :

$$\Delta x_i(t) \rightarrow x_i(p)$$

В операторному численні  $x_i(p)$  називають *зображенням*  $\Delta x_i(t)$ , а  $\Delta x_i(t)$  називають *оригіналом*  $x_i(p)$ .

Диференційне рівняння (1.25) внаслідок перетворення за Лапласом змінної часу трансформується в звичайне лінійне алгебричне рівняння, яке стане *математичною моделлю в зображеннях*:

$$\sum_{i=1}^n K_{xi} \cdot x_i(p) = \sum_{i=1}^m T_i \cdot p \cdot x_{qi}(p) \quad (1.29)$$

Якщо модель ТОК є *системою лінійних диференційних рівнянь у відхиленнях*, то внаслідок перетворення за Лапласом змінної часу при нульових початкових умовах вона трансформується в *систему лінійних алгебричних рівнянь*.

Для того, щоб система лінійних алгебричних рівнянь мала *єдине рішення*, потрібно, щоб кількість параметрів стану (регульовані + проміжні змінні) дорівнювала кількості рівнянь балансів, тобто кількості цих рівнянь. Припускається, що кількість регульованих величин і кількість керувань рівні. Кількість збурень не обмежена.

Розв'язання системи таких лінійних алгебричних рівнянь відносно зображення будь-якої вихідної величини (параметра стану) в загальному вигляді є сумою добутків зображення кожної вхідної величини на передатну функцію за каналом впливу цієї вхідної величини на вихідну величину.

*Передатна функція* каналу впливу будь-якої динамічної ланки – це відношення зображення за Лапласом вихідної змінної до зображення за Лапласом вхідної змінної, здійснених при нульових початкових умовах.

Нульові початкові умови забезпечуються лінеаризацією рівнянь балансів в точці статичного режиму. Відхилення  $\Delta x_i(t)$  при  $t = 0$  завдяки цьому теж рівне нулю:  $\Delta x_i(0) = 0$ .

Якщо ланка (система) має декілька вхідних величин, то при визначенні передатної функції відносно будь-якої одної вхідної величини решта вхідних величин вважаються рівними нулю. Властивість *адитивності результату* впливу декількох вхідних величин випливає як з лінійності рівнянь, так і взаємної незалежності цих вхідних величин.

Для  $i$ -ї регульованої величини  $x_{pi}(p)$ , а саме вони нас цікавлять, в результаті розв'язання системи рівнянь в зображеннях отримаємо:

$$x_{pi}(p) = W_{kepi}(p) \cdot x_{kep(i+R+r)}(p) + \sum_{k=2R+r+1}^{2R+r+z} W_{збki}(p) \cdot x_{збk}(p) \quad (1.30)$$

де  $W_{kepi}(p)$  – передатна функція за каналом керування  $i$ -ї регульованої величини  $x_{pi}(p)$ , тобто за каналом  $x_{kep(i+R+r)}(p) \rightarrow x_{pi}(p)$ :

$$W_{kepi}(p) = \frac{x_{pi}(p)}{x_{kep(i+R+r)}(p)}; \quad (1.31)$$

$W_{збki}(p)$  – передатна функція за каналом впливу  $k$ -го збурення  $x_{збk}$  на  $i$ -ту регульовану величину  $x_{pi}$ , тобто  $x_{збk}(p) \rightarrow x_{pi}(p)$ :

$$W_{збki}(p) = \frac{x_{pi}(p)}{x_{збk}(p)}; \quad (1.32)$$

Якщо вважати, що кожне керування прив'язане до певної регульованої величини (скільки регульованих величин – стільки повинно бути і керувань), то кожне збурення може впливати на декілька, або і всі вихідні величини. Винятки можуть бути при застосуванні багатоконтурних систем керування, наприклад, каскадних систем чи систем з двома керуваннями, але тоді це торкається всієї системи керування, а не тільки ТОК.

Таким чином розв'язання системи алгебричних рівнянь, кожне з яких має вид (1.26), зводиться до *визначення коефіцієнтів при зображеннях* вхідних величин (керування і збуреннях), які і є передатними функціями за відповідними динамічними каналами.

Для розв'язання системи лінійних рівнянь *математичної моделі в зображеннях* використовують *правило Крамера*.

*Правило* Крамера може бути застосоване до систем лінійних рівнянь тільки тоді, коли *кількість рівнянь дорівнює кількості вихідних змінних*, тобто кількості параметрів стану, і коли *визначник матриці коефіцієнтів* системи рівнянь *не дорівнює нулю*.

Це правило використовується для знаходження значень невідомих величин *шляхом обчислення визначників матриць*, які утворені з коефіцієнтів системи рівнянь.

Головна відмінність *правила* Крамера від інших методів розв'язання систем лінійних рівнянь полягає в тому, що воно представляє собою зручний спосіб *знаходження тільки однієї з невідомих* без необхідності розв'язувати всю систему рівнянь.

Ця властивість *правила Крамера* використана ще і тому, що при розв'язанні *практичних задач керування* необхідно визначити вплив на конкретну регульовану величину (а не всіх вихідних змінних) тільки певних вхідних змінних (не всіх керувань і збурень).

Для використання *правила* Крамера *кожне з рівнянь* математичної моделі в зображеннях, що має вид (1.26), потрібно дещо *трансформувати*, привівши їх до *канонічного* виду:

по-перше, перенести всі складові так, щоб *зліва* від знаку рівності опинилися *параметри стану* (вихідні змінні, тобто регульовані і проміжні), а *справа* – *вхідні* змінні (керування і збурення);

по-друге, *звести подібні* члени ;

по-третє, зберегти *однакову послідовність* змінних у всіх рівняннях.

Внаслідок такого трансформування отримаємо систему з  $(R+r)$  лінійних рівнянь, кожне з яких матиме вид

$$\sum_{i=1}^R (T_i p - K_{x_{pi}}) x_{pi}(p) + \sum_{i=R+1}^{R+r} (T_i p - K_{x_{ipi}}) x_{ipi}(p) = \sum_{i=R+r+1}^{2R+r} (-T_i p + K_{x_{kepi}}) x_{kepi}(p) + \sum_{i=2R+r+1}^{2R+r+z} (-T_i p + K_{x_{збі}}) x_{збі}(p) \quad (1.33)$$

Система рівнянь, складених з  $R+r$  рівнянь типу (1.33), в векторно-матричній формі матиме вигляд

$$AX = BX_{кер} + CX_{зб} \quad (1.34)$$

де  $A$  – квадратна матриця коефіцієнтів при *зображеннях* параметрів стану системи, розмірність  $(R+r) \times (R+r)$

$X$  – вектор *зображень параметрів* стану (регульовані і проміжні змінні), розмірність  $(R+r) \times 1$ ;

$B$  – матриця коефіцієнтів при керуваннях, розмірність  $(R+r) \times R$ ;

$X_{кер}$  – вектор керувань, розмірність  $R \times 1$ ;

$C$  – матриця коефіцієнтів при збуреннях, розмірність  $(R+r) \times z$ ;

$X_{зб}$  – вектор збурень, розмірність  $z \times 1$ .

*Метод Крамера* дає розв'язання системи рівнянь (1.34) у виді (1.30) шляхом знаходження коефіцієнтів  $W_{kepi}(p)$  (1.31) і  $W_{збіki}(p)$  (1.32), якими є

$$W_{kepi}(p) = \frac{\det A_{kepi}}{\det A} \quad (1.35)$$

де  $\det A$  – детермінант матриці  $A$ ;

$\det A_{kepi}$  – детермінант матриці  $A_{kepi}$ , утвореної шляхом заміни в матриці  $A$  стовпця коефіцієнтів при  $x_{pi}$  на *вектор-стовпець керування  $i$ -ї* регульованої величини, тобто  $B_{кер(R+r+i)}$ , і

$$W_{збіki}(p) = \frac{\det A_{збіki}}{\det A} \quad (1.36)$$

де  $\det A_{збіki}$  – детермінант матриці  $A_{збіki}$ , утвореної шляхом заміни в матриці  $A$  стовпця коефіцієнтів при  $x_{pi}$  на вектор-стовпець впливу  $k$ -го збурення на  $i$ -ту регульовану величину, тобто  $C_{збіk(2R+r+i)}$ .

Не слід плутати матрицю системи  $A$  в формі Коші (1.27), де аргументом є час  $t$  з матрицею  $A$  коефіцієнтів при зображеннях параметрів стану в правилі Крамера (1.34), де аргументом є параметр  $p$  як зображення часу  $t$ .

Для матриці  $A$  в правилі Крамера рівняння

$$\det A = 0$$

є *характеристичним рівнянням* системи рівнянь математичної моделі в зображеннях змінних

При наявності в ТОК двох і більше регульованих величин *керування для будь-якої з них* розглядається по відношенню до інших як *додаткове збурення*.

В практиці синтезу систем регулювання часто *необхідно порівнювати передатні функції* за різними динамічними каналами.

Щоб виключити вплив розмірностей різних змінних на результат такого порівняння, всі *змінні приводять до безрозмірного виду*.

Для цього *нормують кожну змінну її значенням в номінальному статичному режимі*

Враховуючи лінеаризацію системи рівнянь математичної моделі в розмірних величинах завдяки допущенню, що

$$x_i = x_{i0} + \Delta x_i,$$

а також позначивши безрозмірне значення змінної  $x_i$  як  $x_i^b$ , отримаємо, *нормуючи змінну величину  $x_i(t)$  її номінальним статичним значенням*

$$x_i^b(t) = x_i(t) / x_{i0}$$

звідки у відхиленнях

$$\Delta x_i^b(t) = \Delta x_i(t) / x_{i0}$$

або

$$\Delta x_i(t) = x_{i0} \cdot \Delta x_i^b(t).$$

Після перетворення за Лапласом змінної часу  $t \rightarrow p$  зображення оригіналів  $\Delta x_i(t)$  та  $\Delta x_i^b(t)$  стануть зв'язаними співвідношенням

$$x_i(p) = x_{i0} \cdot x_i^b(p). \quad (1.37)$$

Застосуємо отриману залежність до передатної функції будь-якого динамічного каналу  $x_j \rightarrow x_i$ , де індекс  $j$  відноситься до вхідної величини (керування або збурення), а індекс  $i$  – до вихідної (параметр стану, може бути регульованою або проміжною величиною).

Позначимо  $W_{ji}(p)$  передатну функцію за каналом  $x_j \rightarrow x_i$ , отриману в розмірних величинах, а  $W_{ji}^b(p)$  - передатну функцію за каналом  $x_j \rightarrow x_i$ , отриману в безрозмірних величинах, тоді :

$$W_{ji}(p) = \frac{x_i(p)}{x_j(p)} = \frac{x_{i0} \cdot x_i^b(p)}{x_{j0} \cdot x_j^b(p)} = \frac{x_{i0}}{x_{j0}} \cdot W_{ji}^b(p)$$

або

$$W_{ji}^b(p) = \frac{x_{j0}}{x_{i0}} \cdot W_{ji}(p) \quad (1.38)$$

### ***1.3.1.5. Одержання статичних характеристик ТОК на базі математичної моделі динаміки***

Статичні характеристики ТОК відображають залежність регульованої величини від керування і збурення в статичному режимі. Це буває тоді, коли *похідні від усіх змінних за часом* дорівнюють нулю:

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad (1.39)$$

для всіх  $x_i$  від  $I$  до  $N$ .

Для отримання аналітичних виразів статичних характеристик достатньо в системі диференціальних рівнянь виду (1.3), яка є *математичною моделлю в розмірних величинах*, врахувати (1.39), тоді:

$$Q_{otr} - Q_{vyt} = 0$$

Розв'язання одержаної таким чином системи в точці основного (номінального) статичного режиму відносно досліджуваної регульованої величини  $x_{pi}$ :

- як функції керування  $x_{кер(R+r+i)}$ , визначить *статичну характеристику за каналом керування*

$$x_{pi0} = f(x_{кер(R+r+i)0}) \quad (1.40)$$

- як функції збурення  $x_{збікi}$ , визначить *статичну характеристику за каналом збурення  $x_{збікi}$* :

$$x_{pi0} = f(x_{збікi0}) \quad (1.41)$$

Статичні характеристики (1.40) і (1.41) *враховують нелінійності*, притаманні математичній моделі в розмірних величинах (1.3).

При великій кількості ємностей акумулювання та складних формулюваннях швидкості технологічних процесів та взаємопов'язаності процесів, що відбуваються об'єктах моделювання, математичні моделі в розмірних величинах часто складаються з системи трансцендентних рівнянь.

Розв'язання системи трансцендентних рівнянь з метою отримання статичних характеристик в явному виді (1.40)-(1.41) практично неможливе. Числові методи дозволяють в деяких випадках отримати розв'язок у вигляді окремих точок відповідності, тобто в числовому вигляді (Додаток 4).

Якщо математична модель в розмірних величинах є системою трансцендентних рівнянь, обмежуються для визначення статичних характеристик лінеаризованою системою рівнянь (1.25), що є математичною моделлю у відхиленнях, з врахуванням (1.39).

Для розв'язання такої лінійної системи рівнянь, можна теж використати метод Крамера. При такому розв'язанні статичні характеристики мають **лінійний характер** і відповідають стану об'єкта тільки в околиці точки номінального статичного режиму.

Статичні характеристики можна отримати і з математичної моделі в зображеннях змінних (1.33) чи (1.34), врахувавши в них (1.39) шляхом прийняття для параметра перетворення за Лапласом  $p = 0$  або в (1.33) або в матрицях А, В і С в (1.34) з наступним розв'язанням системи рівнянь для регульованої величини як функції керування чи збурення. Зворотне перетворення за Лапласом дасть теж **лінійний характер** статичних характеристик. Отримані таким чином статичні характеристики теж відповідають стану об'єкта **тільки в околиці точки основного статичного режиму**.

**Графіки статичних характеристик, як і перехідних характеристик, будуються з врахуванням основного (номінального) статичного режиму ТОК., параметри якого наводяться по формі таблиці 1.1.**

Таблиця 1.1

Значення параметрів номінального статичного режиму ТОК

№ п/п	Назва величини	Умовне позначення	Значення	Одиниця вимірювання	Зауваження

В таблицю вносяться значення **всіх параметрів (змінних і постійних)**, які присутні в рівняннях балансів.

**Перевірка правильності** внесених значень полягає в виконанні формул рівнянь відповідних балансів в статичному режимі, а також перевіркою розмірностей усіх складових рівнянь балансів.

### **1.3.1.6 Комп'ютерне моделювання перехідних характеристик ТОК за каналами керування і збурення**

Комп'ютерне моделювання перехідних характеристик ТОК *полягає в* одержанні аналітичних виразів цих характеристик і побудові на їх основі графіків  $h(t)$  перехідних характеристик.

Основою для одержання аналітичних виразів динамічних характеристик ТОК є математичні моделі динаміки ТОК, складені на основі матеріальних і енергетичних балансів фізичних ємностей, що мають здатність акумулювати масу, і/або компоненти і/або енергію.

Розв'язання системи диференційних рівнянь математичної моделі в розмірних величинах відбувається різними способами в залежності від кількості рівнянь та виду функцій, що в них використовуються (див. 1.3.1.3).

Універсальним є *операторний метод* розв'язання системи диференційних рівнянь, який дозволяє отримати результат для достатньо складного об'єкту з великою кількістю ємностей акумулювання. Цей метод вимагає попередньої лінеаризації рівнянь балансів і його результати доцільно використовувати в околиці номінального статичного режиму, при якому і відбулася лінеаризація.

В практиці експлуатації безперервно діючих технологічних об'єктів доволі часто має місце неочікувана зміна величини технологічних потоків, що тягне за собою зміну динамічних характеристик таких об'єктів. Це обумовлює зміну характеру перехідного процесу регулювання технологічних параметрів та деколи вимагає зміни параметрів налаштування відповідних регуляторів.

Шляхом математичного моделювання можна дослідити вплив різних збурень, а також зміни навантаження на конкретний ТОК, що найчастіше має місце на діючому технологічному об'єкті, на його динамічні властивості, в т. ч. у виді перехідних характеристик.

Приклад дослідження впливу зміни навантаження на процес абсорбції на перехідні характеристики за каналом керування (витрата розчину лугу NaOH → концентрація CO<sub>2</sub> в очищеному газі) наведений в Додатку 3.

## 1.4 Математичне моделювання систем регулювання

Математичне моделювання систем регулювання як одно контурними, так і багатоконтурними системами. має за мету:

- для існуючих систем регулювання **визначення запасу стійкості та якості систем регулювання** параметрів технологічного об'єкту;
- для проєктованих систем регулювання **визначення оптимальних за заданим критерієм параметрів налаштування** регуляторів.

Для створення математичної моделі системи регулювання треба знати склад системи, її структуру та математичні моделі елементів.

На рис. 1.2 наведена типова структурна схема одно контурної автоматичної системи регулювання.

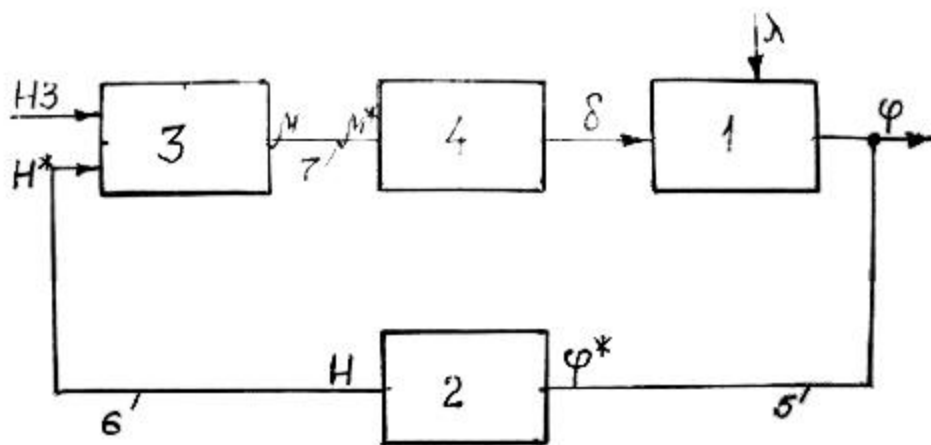


Рис.1.2 Структурна схема одно контурної системи автоматичного регулювання

Одноконтурна система автоматичного регулювання, наведена на рис. 1.2, складається з таких елементів:

1. об'єкт з вихідною величиною  $\varphi$  та входами  $\delta$  і  $\lambda$  ( $\lambda$  - збурення);
2. датчик з вихідною величиною  $H$  та входом  $\varphi^*$ ;
3. регулятор з виходом  $\mu$  та входами  $H^*$  та  $H_3$  (завдання);
4. виконавчий механізм та регулюючий орган з вихідною величиною  $\delta$  та входом  $\mu^*$ ;
5. імпульсна лінія зв'язку між об'єктом 1 і вимірювачем 2 з входом  $\varphi$  та виходом  $\varphi^*$ ;
6. імпульсна лінія зв'язку між вимірювачем 2 та регулятором 3 з входом  $H$  і виходом  $H^*$ ;
7. командна лінія зв'язку між регулятором 3 та виконуючим механізмом 4 з входом  $\mu$  і виходом  $\mu^*$ .

Всі ці елементи можуть істотно впливати на роботу системи регулювання, тому повинні бути враховані в її моделі.

Нижче наведені типові моделі елементів як динамічних ланок цієї замкнутої системи регулювання:

**1. технологічний об'єкт керування (ТОК):** вихід (*регульована величина*)  $\varphi$  та два входи: *керування*  $\delta$  та *збурення*  $\lambda$ .

Динамічна модель ТОК є найбільш невизначеною. Може змінюватися зі зміною навантажень. Залежить від припущень, прийнятих при її створенні.

Якщо припустити, що **динамічна модель ТОК** має лінійне (лінеаризоване) рівняння динаміки в канонічній формі

$$a_n \varphi^{(n)} + a_{n-1} \varphi^{(n-1)} + \dots + a_1 \varphi^{(1)} + \varphi = k_1 \delta + k_2 \lambda, \quad (1.38)$$

то такий ТОК можна представити **двома передатними функціями**

- за каналом керування  $\delta(p) \rightarrow \varphi(p)$

$$W_{I_{кер}}(p) = \frac{\varphi(p)}{\delta(p)} = \frac{k_1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1} \quad (1.39)$$

- за каналом збурення  $\lambda(p) \rightarrow \varphi(p)$

$$W_{13\delta}(p) = \frac{\varphi(p)}{\lambda(p)} = \frac{k_2}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1} \quad (1.40)$$

2. **датчик** звичайно апроксимують **аперіодичною ланкою 1-го порядку**

$$T_B \cdot \dot{H}(t) + H(t) = k_3 \cdot \varphi^*(t) \quad (1.41)$$

де  $\varphi^*(t)$  – вхідна величина;  $H(t)$  – вихідна величина.

Тоді передатна функція вимірювача

$$W_2(p) = \frac{H(p)}{\varphi^*(p)} = \frac{k_3}{T_B \cdot p + 1} \quad (1.42)$$

Якщо швидкодія вимірювача значно більша від швидкодії ТОК, то часто приймають

$$W_2(p) = \frac{H(p)}{\varphi^*(p)} = k_3 \text{ і } k_3 = 1 \quad (1.43)$$

3. **регулятор**; математична модель регулятора визначається його **законом регулювання**. Найбільш вживані стандартні закони регулювання:

- **пропорційно-інтегральний ПІ-регулятор**, в якому вхідна величина  $\Delta H(t)$ , а вихідна

$$\mu(t) = k_p [\Delta H(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \Delta H(t) dt] \quad (1.44)$$

Передатна функція такого регулятора

$$W_3(p) = \frac{\mu(p)}{\Delta H(p)} = \frac{k_p(1 + T_i p)}{T_i p}; \quad (1.45)$$

- **пропорційний П-регулятор**, в якому вихідна величина

$$\mu(t) = k_p \cdot \Delta H(t) \quad (1.46)$$

Передатна функція такого регулятора

$$W_3(p) = \frac{\mu(p)}{\Delta H(p)} = k_p \quad (1.47)$$

- **пропорційно-інтегрально-диференційний ПІД-регулятор**, в якому вихідна величина

$$\mu(t) = k_p[\Delta H(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \Delta H(t) dt + T_d \frac{d\Delta H(t)}{dt}] \quad (1.48)$$

Передатна функція такого регулятора

$$W_3(p) = \frac{\mu(p)}{\Delta H(p)} = \frac{k_p(1 + T_i p + T_i T_d p^2)}{T_i p} \quad (1.49)$$

Може бути використаний і інший тип регулятора зі своєю передатною функцією.

**4. виконавчий механізм і регулюючий орган** мають досить **складну точну** математичну модель, яку звичайно **апроксимують** (як і датчик) аперіодичною ланкою першого порядку

$$T_{BM} \delta'(t) + \delta(t) = k_{BM} \mu^*(t) \quad (1.50)$$

Передатна функція виконавчого механізму (разом з регулюючим органом) буде

$$W_4(p) = \frac{\delta(p)}{\mu^*(p)} = \frac{k_4}{T_{BM} p + 1} \quad (1.51)$$

де  $k_4 = k_{BM}$ .

У випадку великої швидкодії

$$W_4(p) = \frac{\delta(p)}{\mu^*(p)} = k_4 = 1 \quad (1.52)$$

**5, 6, 7 лінії** зв'язку приводять до запізнення (особливо пневматичні або аналізатори з відбором проби), яке здебільшого апроксимують **чистим запізненням**

$$\varphi^*(t) = \varphi(t - \tau_5) \quad (1.53)$$

$$H^*(t) = H(t - \tau_6) \quad (1.54)$$

$$\mu^*(t) = \mu(t - \tau_7) \quad (1.55)$$

Відповідні передатні функції розглянутих ліній зв'язку:

$$W_5(p) = e^{-\tau_5 p} \quad (1.56)$$

$$W_6(p) = e^{-\tau_6 p} \quad (1.57)$$

$$W_7(p) = e^{-\tau_7 p} \quad (1.58)$$

Для *електричних ліній зв'язку* приймають

$$W_5(p) = W_6(p) = W_7(p) = 1. \quad (1.59)$$

Для самої *системи регулювання*:

- передатна функція *розімкненої системи*:

$$W_{pc}(p) = W_5(p) \cdot W_2(p) \cdot W_6(p) \cdot W_3(p) \cdot W_7(p) \cdot W_4(p) \cdot W_1(p); \quad (1.60)$$

- *зображення вихідної величини*:

$$\varphi(p) = W_3(p) \cdot W_7(p) \cdot W_4(p) \cdot W_1(p) \cdot H_3(p) - W_{pc}(p) \cdot \varphi(p) \quad (1.61)$$

- передатна функція *замкненої системи за каналом керування*  $H_3(p) \rightarrow \varphi(p)$ :

$$W_{3Cкер}(p) = \frac{\varphi(p)}{H_3(p)} = \frac{W_3(p) \cdot W_7(p) \cdot W_4(p) \cdot W_1(p)}{1 + W_{pc}(p)}; \quad (1.62)$$

Якщо *нехтувати динамічними властивостями* ліній зв'язку і датчика (тобто *привіряти їх передатні функції*  $W_5(p)$ ,  $W_6(p)$ ,  $W_7(p)$ ,  $W_2(p)$  *до*  $1$ ), то *приблизно можна оцінити передатну функцію замкненої системи за каналом керування* як

$$W_{3Cкер}(p) = \frac{\varphi(p)}{H_3(p)} \approx \frac{W_{pc}(p)}{1 + W_{pc}(p)}; \quad (1.63)$$

- передатна функція *замкненої системи за каналом збурення*  $\lambda(p) \rightarrow \varphi(p)$  при аналогічних допущеннях буде

$$W_{3Cзб}(p) = \frac{\varphi(p)}{\lambda(p)} \approx \frac{W_{1зб}(p)}{1 + W_{pc}(p)}; \quad (1.64)$$

*Адекватність (відповідність) об'єкту його математичної моделі ТОК* перевіряється здебільшого за *критерієм Фішера*, в якому береться співвідношення середньоквадратичного відхилення значень вихідного параметру з реального об'єкту від його значень, отриманих за моделлю і його дисперсії, отриманої в реальному ТОК. Порівняння конкретного значення критерія Фішера з його табличним значенням дає можливість зробити висновок про адекватність математичної моделі, отриманої аналітичним шляхом.

Для обчислення критерія Фішера необхідно мати *експериментальні дані* з технологічного об'єкту керування.

*Динамічні характеристики замкнених систем регулювання* здебільшого використовуються у *виді передатних і перехідних характеристик* за каналами керування (зміна завдання регулятора) і збурення. Ці характеристики для одно контурних систем визначаються в значній мірі динамічними характеристиками об'єкта і регулятора при стандартній одно контурній системі регулювання зі структурною схемою, наведеною на рис.1.2

Всі фізичні процеси протікають (і досліджуються) *в певному діапазоні параметрів*. Тому система рівнянь, яка складає математичну модель цих процесів (явищ), повинна розглядатися і досліджуватися *в діапазоні змін цих параметрів*.

Особлива увага приділяється гідродинаміці матеріальних потоків як в межах кожного технологічного апарату, так і при транспортуванні цих потоків між окремими технологічними апаратами. Зміна характеру потоків істотно впливає на динамічні властивості математичних моделей, що повинні відображати зв'язки між параметрами стану технологічного об'єкту керування та керуванням і збуренням.

## 2. РІВНЯННЯ ГІДРОДИНАМІКИ РІДКИХ ТА ГАЗОПОДІБНИХ СЕРЕДОВИЩ

Потоки речовин, які переміщуються між окремими технологічними апаратами або в самих апаратах можуть бути в *однофазному* стані (газ, рідина, сипучі матеріали) або в *багатофазному* (паро рідинна суміш, емульсія, суспензія).

*Рух в однофазному* середовищі описується системою рівнянь матеріального потоку в об'ємі  $dV$  (рівняння *нерозривності потоку*) та *рівнянь руху* (Нав'є – Стокса).

Для рішення цих диференціальних рівнянь необхідно встановити *початкові та граничні* умови.

Для малого об'єму  $dV$  в потоці, що рухається, *матеріальний баланс* буде

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV \cdot dt \quad (2.1)$$

де  $m$  – *маса* потоку в об'ємі  $dV$ ;

$\rho$  – *густина* речовини в потоці;

$t$  – *час*.

Якщо виразити  $dm$  як різницю приходу і витрати речовини за час  $dt$  через поверхню, що обмежує об'єм  $dV$ , отримаємо рівняння матеріального балансу для *3-х вимірного* простору з координатами  $x, y, z$ :

- 1) Рівняння *нерозривності нестационарного потоку* для *стискуваної* рідини:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

2) **Рівняння нерозривності** для **стаціонарного** потоку **нестискуваної** рідини ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

де  $v_x, v_y, v_z$ - **проекції швидкості** на осі координат  $x, y, z$ .

**Рівняння руху (Нав'є – Стокса)** виводиться з **другого закону Ньютона**

$$\sum_{n=1}^n S_{ni} = m \frac{dv_i}{dt} \quad (2.4)$$

де  $S_{ni}$  – проекція сили  $S_n$  на  $i$ -ту вісь;

$m$  – маса речовини у виділеному об'ємі;

$\frac{dv_i}{dt}$  - повна похідна складової швидкості потоку в напрямку  $i$ .

При русі **в'язкої рідини** в напрямку **осі  $x$**  в полі сил тяжіння на виділений об'єм **діють сили**:

$$\text{гравітації} \quad S_{gp,x} = \rho \cdot g_x; \quad (2.5)$$

$$\text{тиску} \quad S_{p,x} = - \frac{\partial P}{\partial x}; \quad (2.6)$$

$$\text{тертя} \quad S_{tp} = \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (2.7)$$

де  $g_x$  – проекція прискорення вільного падіння на вісь  $x$ ;

$P$  – тиск у виділеному об'ємі;

$\mu$  – динамічна в'язкість рідини.

$\rho$  – густина середовища.

Загальне рівняння балансу сил:

$$S_{gp,x} + S_{p,x} + S_{tp} = S_{in,x}^I + S_{in,x}^K \quad (2.8)$$

де *локальна складова* сил інерції в напрямку осі  $x$

$$S_{in,x}^I = \rho \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t}; \quad (2.9)$$

- *конвективна складова* сил інерції в напрямку осі  $x$

$$S_{in,x}^K = \rho \cdot (v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}). \quad (2.10)$$

Рівняння *Нав'є-Стокса* при русі *нестискуваної рідини в напрямку осі  $x$* :

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot (\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}) = \rho (\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}) \quad (2.11)$$

*Рівняння Дарсі-Вейсбаха* визначає *втрати тиску на лінійній ділянці трубопроводу*, якщо відома величина *коефіцієнту гідравлічного опору  $\xi_a = f(Re)$* , що залежить від критерію Рейнольдса:

$$Re = \frac{vl\rho}{\mu} = \frac{vl}{\nu} \quad (2.12)$$

де  $\nu$  – кінематична в'язкість;

$l$  – характерний геометричний розмір.

З другого боку коефіцієнт гідравлічного опору  $\xi_a$  визначається як втратами тиску на внутрішнє тертя рідини, так і втратами тиску на взаємодію потоку з поверхнею труби.

Для ламінарного руху  $Re < 2300$  і  $\xi_a$  залежить тільки від внутрішнього тертя рідини.

Для розвиненого турбулентного руху  $Re > 10000$  і  $\xi_a$  залежить як від *внутрішнього тертя* рідини, так і від *шорсткості труби*.

Для практичного використання  $\xi_a$  коефіцієнт гідравлічного опору *визначається експериментально* для кожної номенклатури труб.

**Втрати тиску** рідини при її переміщенні по **лінійній ділянці труби** згідно рівняння **Дарсі – Вейбаха** становить:

$$\Delta P_a = \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho \cdot \xi_a \quad (2.13)$$

Де  $l$  – довжина лінійної ділянки;

$d$  – діаметр труби;

$\xi_a$  – коефіцієнт гідравлічного опору.

Втрати тиску рідини при проходженні рідини через  $i$ -тий **місцевий опір** з коефіцієнтом гідравлічного опору  $\xi_i$ :

$$\Delta P_i = \frac{v^2}{2} \cdot \rho \cdot \xi_i \quad (2.14)$$

Практично **втрати тиску при русі рідини по трубі**:

$$\Delta P = \left( \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ai} \frac{l_i}{d_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \right) \frac{v^2}{2} \cdot \rho \quad (2.15)$$

### 3. ТИПОВІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СТРУКТУРИ ПОТОКІВ В АПАРАТАХ

Будь-який хіміко-технологічний процес звичайно *супроводжується переміщенням* деяких матеріальних потоків рідини, газу чи сипучих матеріалів, або їх сумішей (суспензія, емульсія, димові гази і т. п.) як всередині апарату, так і між апаратами з різними технологічними процесами.

Рівняння гідродинаміки навіть однофазних матеріальних потоків (наприклад, рівняння Нав'є-Стокса) є *достатньо складними*, а для двофазних потоків *не завжди можуть бути записаними* і не завжди можна отримати рішення в загальному виді.

Це пов'язано з тим, що *немає* можливості *задати граничні умови* на *нестационарній поверхні* розділення фаз.

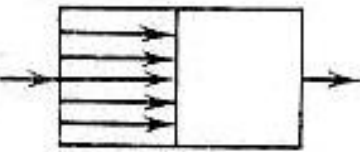
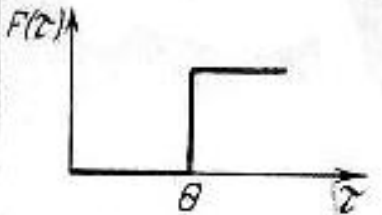
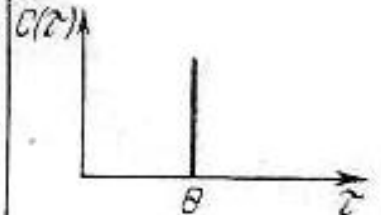
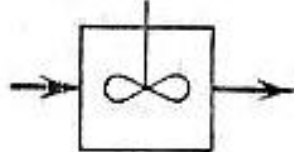
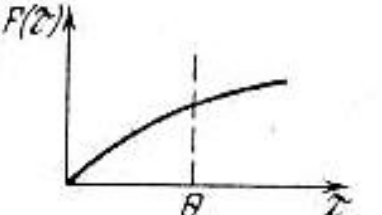
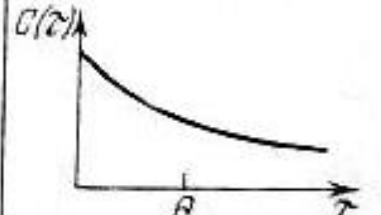
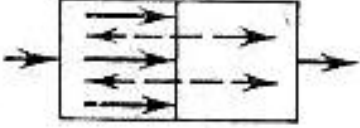
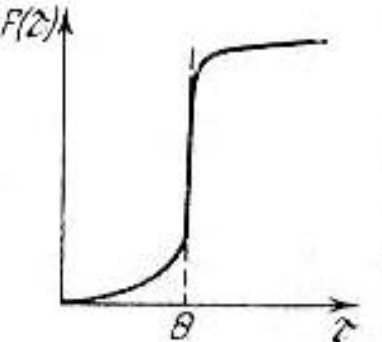
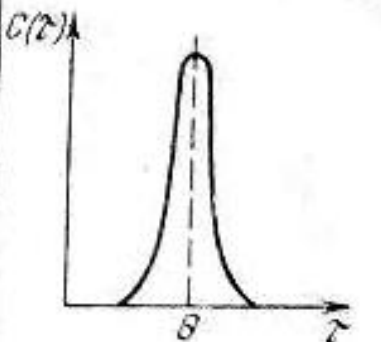

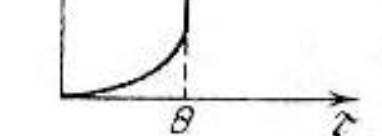
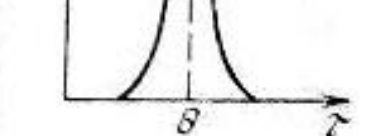
Тому на практиці для математичного моделювання використовують *приблизні уявлення про внутрішню структуру потоків*. Це спрощує *встановлення граничних умов* для рівнянь динаміки. Важливим тут є припустити *певний рух потоку* з точки зору переміщення і розподілу речовини в ньому .

Для хіміко-технологічних об'єктів *модель руху потоків* здебільшого потрібна у відношенні до *переміщення і розподілення речовин* в цих потоках.

Тому типові гідродинамічні моделі потоків будемо розглядати у виді рівнянь, що характеризують *зміну концентрації речовини* в потоці, яка *викликана рухом* цього потоку.

На стадіях наукових досліджень і проектування для хіміко-технологічних апаратів *встановлюються зони* повного (ідеального) *перемішування*, повного (ідеального) *витіснення* і (іноді) *застійна* зона.

На рис.3.1 наведені *основні типи моделей руху потоків*, пов'язаних зі *змінюю концентрацій* речовини в цих потоках.

1. Модель Ідеального витіснення		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -w \frac{\partial c}{\partial x}$		
2. Модель ідеального змішування		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{V_0}{V} (c_{\text{вх}} - c)$		
3. Дифузійна модель а) однопараметрична		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -w \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$		
б) двопараметрична		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial c}{\partial R} \right)$		

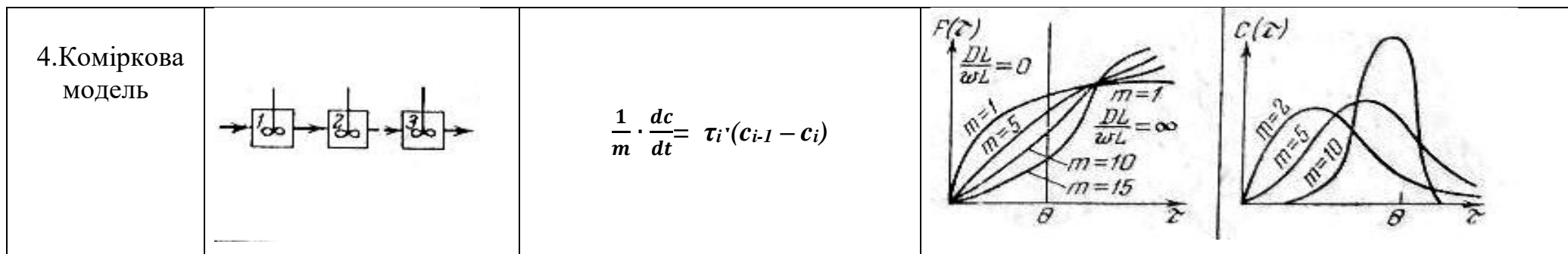


Рис. 3.1 Типові моделі руху потоків

В типових математичних моделях, наведених на рис. 3.1, прийняті наступні **позначення**:

$c_{вх}$  – **концентрація** речовини в потоці **на вході** в апарат;

$c$  – **концентрація** речовини **на виході** з апарату;

$w$  – **лінійна швидкість** потоку;

$\tau$  – **відносний час** (нормований **середнім часом** перебування в апараті);

$x$  – **лінійна координата в напрямку** руху потоку;.

$V$  – **об'єм рідини** в апараті;

$V_c$  – **об'ємна швидкість** (об'ємна витрата) потоку;

$D_L$  – коефіцієнт перемішування (дифузії) в напрямку руху потоку;  
 $D_R$  – коефіцієнт перемішування (дифузії) в радіальному напрямку руху потоку;  
 $R$  – радіус перерізу апарату циліндричної форми;  
 $m$  – кількість комірок (ланок з ідеальним перемішуванням) в математичній моделі;  
 $i$  – номер комірки.  
 $\Theta$  – середній час перебування рідини в апараті ( $\Theta = V/V_c$ );  
 $F(\tau)$  – перехідна характеристика;  
 $C(\tau)$  – імпульсна перехідна характеристика.

### **1. Модель ідеального витіснення.**

Припущення відносно руху потоку в цьому випадку полягає в т. зв. **поршневому руху** потоку. Це значить, що в **напрямку його руху перемішування повністю відсутнє**, а в напрямку, **перпендикулярному до руху, відбувається ідеальне змішування**.

**Час перебування** всіх частинок **однаковий** і дорівнює **відношенню** об'єму апарату до об'ємної витрати рідини, тобто дорівнює **середньому часу перебування**.

При **постійній** лінійній швидкості потоку  $w = const$  аргумент часу  $t$  може бути **замінений** аргументом відстані від входу потоку  $x$ , що виходить з математичної моделі.

Модель ідеального витіснення аналогічна моделі з **одномірно розподіленими параметрами** (по осі  $x$  в напрямку руху потоку).

Рішення рівняння математичної моделі ідеального витіснення при **початкових умовах**

$$c(x,0) = c^0(x) \text{ для } 0 \leq x \leq L \quad (3.1)$$

і граничній умові

$$c(0,t) = c^0(t) \text{ для } t > 0 \quad (3.2)$$

де  $L$  – **довжина зони** ідеального витіснення

буде

$$c(x, t) = \begin{cases} c^0(x), & \text{якщо } t < \frac{x}{w} \\ c^0(t) = c^0\left(t - \frac{x}{w}\right), & \text{якщо } t > \frac{x}{w} \end{cases} \quad (3.3)$$

Моделі ідеального витіснення використовують в хімічній технології для опису апаратів, що **працюють за принципом витіснення**, наприклад трубчатих реакторів, екструдерів чи деяких видів теплообмінників.

Переваги моделі полягають у **відносній простоті рішення** при **достатній** для багатьох випадків **точності** представлення реальних гідродинамічних умов.

За перехідними характеристиками і передатною функцією **моделі ідеального витіснення аналогічні моделям чистого запізнення**.

**Моделі ідеального витіснення** в першому наближенні відповідають процесам, що відбуваються в трубчастих апаратах при **відношеннях довжини труби до її діаметра більше 100**.

## **2. Модель ідеального змішування.**

Згідно цієї моделі приймається ідеальне змішування речовини в потоці, внаслідок чого **будь-яка зміна концентрації речовини на вході** в зону ідеального змішування **моментально розподіляється по всьому об'єму зони** змішування.

Для *інтенсифікації процесів* і з метою *наближення до моделі ідеального змішування* в хімічній технології часто встановлюють в апаратах *спеціальні мішалки*.

Моделям ідеального змішування відповідають *процеси*, що відбуваються в *циліндричних апаратах з сферичним дном* в умовах *інтенсивного* перемішування.

Як видно з графіків перехідних процесів *модель ідеального змішування* за динамічними характеристиками відповідає *аперіодичній ланці першого порядку*. Така модель ще називається ще *моделлю з зосередженими параметрами*, бо ідеальне змішування передбачає однакові значення параметрів у всьому об'ємі апарату.

### *3. Дифузійні моделі.*

Ці моделі побудовані *на базі моделі ідеального витіснення*. Відрізняють *одно параметричну* і *дво параметричну* дифузійні моделі.

*Одно параметрична* дифузійна модель відповідає *поршневому руху потоку* з врахуванням *поздовжнього перемішування в напрямку руху потоку*. *Таке перемішування* описується *рівнянням молекулярної дифузії*.

Параметром, який характеризує цю модель, є *коефіцієнт турбулентної дифузії* або *коефіцієнт поздовжнього перемішування  $D_L$* .

В напрямку, *перпендикулярному* до руху потоку, вважається наявність *ідеального перемішування*.

Додаткові *припущення* при складанні одно параметричної дифузійної моделі:

- зміна *концентрації  $c$*  є *неперервною функцією координати* (відстані  $x$  в напрямку руху потоку);
- в даному *перерізі* (координата  $x$ ) концентрація  $c$  є *постійною*;
- *коефіцієнт поздовжнього перемішування  $D_L$*  і об'ємна швидкість потоку  $V_c$  є *постійними і не змінюються ні по довжині  $x$  ні по перерізу потоку*.

При *таких припущеннях* одно параметрична дифузійна модель описується рівнянням:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -w \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) відрізняється від рівняння моделі ідеального витіснення наявністю складової, яка відповідає за *поздовжнє перемішування*.

*Величина  $D_L$*  визначається *експериментальним* шляхом.

*Двопараметрична модель* враховує *перемішування* потоку як в *поздовжньому*, так і в *радіальному* напрямку. Вона характеризується *коефіцієнтами* поздовжнього  $D_L$  і радіального  $D_R$  перемішувань.

При цьому припускається, що коефіцієнти  $D_L$  і  $D_R$  є *постійними* і не змінюються по довжині чи перерізу апарата., а також швидкості потоку (лінійна  $w$  і об'ємна  $V_c$ ) є постійними.

При умові руху потоку в апараті циліндричної форми радіуса  $R$  з постійною по довжині і перерізу швидкістю рівняння *двопараметричної дифузійної моделі* буде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -w \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_R}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial c}{\partial R} \right) \quad (3.5)$$

При *експериментальному визначенні* коефіцієнтів  $D_L$  і  $D_R$  їх представляють у вигляді безрозмірних комплексів – *критеріїв Пекле*:  $Pe_L = wL/D_L$  або  $Pe_R = wL/R$ , а рівняння дифузійної моделі теж приводять до безрозмірного виду.

Тоді якщо  $D_L/wL = 0$  (критерій Пекле  $Pe_L = \infty$ ), то дифузійна модель переходить в *модель ідеального витіснення*, а якщо  $D_L/wL = \infty$  ( $Pe_L = 0$ ), то дифузійна модель переходить в *модель ідеального змішування*.

#### **4. Коміркова модель.**

Основою для коміркової моделі є припущення про *ідеальне перемішування в межах* окремих послідовно розташованих *комірок* і *відсутність перемішування між комірками*.

*Параметром*, що характеризує цю модель, є *кількість комірок  $m$* .

*Математична модель коміркової моделі* складається з  $m$  лінійних диференціальних рівнянь першого порядку як результат балансів по компоненту для кожної комірки:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dc}{d\tau} = \tau_i(c_{i-1} - c_i) \quad (3.6)$$

Кількість комірок  $m$  визначається за *експериментальною С-кривою* розподілення *часу перебування частинок* потоку в конкретному апараті.

*Функція розподілення* часу перебування  $C(\tau)$  характеризує долю індикатора в вихідному потоці, що *знаходився в апараті протягом часу, меншого за  $\tau$* .

При  $m = 1$  коміркова модель переходить в *модель ідеального змішування*, а при  $m = \infty$  – в *модель ідеального витіснення*.

На практиці використовуються також *різні види комбінованих моделей*, що відповідають певному з'єднанню типових моделей.

Зокрема це відноситься до процесів, що включають *байпасні та циркуляційні потоки*, а також в апаратах *при наявності застійних зон*.

#### 4. КЕРОВАНІСТЬ І СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ (ВІДНОВЛЮВАНІСТЬ) СИСТЕМИ

**Керованість** характеризує *можливість переведення* керованої системи з початкового *в заданий стан* за допомогою керування.

Система вважається *керованою*, якщо існує таке *керування  $u(t)$* , що забезпечує переведення системи з *довільного початкового стану  $x_0$*  в *довільний заданий стан  $x_a$*  протягом скінченного часу.

**Визначення керованості** сформулював Р. Калман на прикладі *лінійної стаціонарної* системи, що описується рівнянням (форма Коші)

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \quad (4-1)$$

де:

**A** – *матриця системи* розмірності  $n \times n$ ;

( $n$  – кількість *параметрів стану* і кількість *незалежних рівнянь* математичної моделі)

**B** – *матриця входу* розмірності  $n \times m$ ;

( $m$  – кількість *керувань*).

**X(t)** – *вектор змінних стану* розмірності  $n$ ;

**U(t)** – *вектор зовнішніх дій* розмірності  $m$ .

Рівняння (4-1) *доповнюють рівнянням зв'язку* між *вектором змінних стану X(t)* і *вектором вимірюваних параметрів системи Y(t)* :

$$Y(t) = C \cdot X(t) \quad (4-2)$$

де:

**C** – *матриця виходу* розмірності  $r \times n$ ;

$r$  – *кількість вимірюваних параметрів Y(t)*.

Система називається *цілком або повністю керованою*, якщо для будь-яких моментів часу  $t_0$  і  $t_1$ , де  $t_1 > t_0$  і для будь-яких *заданих станів*  $X_0$  і  $X_1$  існує *керування*  $U(t)$  ( $t_0 < t < t_1$ ), що переводить систему із початкового стану  $X(t_0) = X_0$  в кінцевий  $X(t_1) = X_1$ .

Умову *повної керованості* дає *теорема Р. Калмана*:

*лінійна n – вимірна система*, що описується рівнянням (4-1), є *повністю керованою* тоді і тільки тоді, коли *блочна матриця*

$$K = [ B \mid A \cdot B \mid A^2 \cdot B \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot B ] \quad (4-3)$$

*розмірності nхnt* має *ранг*, що дорівнює  $n$ :

$$\text{rank } K = n \quad (4-4)$$

*Ранг матриці* дорівнює *найвищому порядку мінорів* матриці, що не дорівнюють нулю.

$K$  – *матриця керованості*, вона складається зі стовпців матриці входу  $B$  та добутоків матриць системи  $A$  та входу  $B$ :

$$B ; A \cdot B ; A^2 \cdot B ; \dots ; A^{n-1} \cdot B \quad (4-5)$$

*Приклад*: Об'єкт 2-го порядку, що описується рівняннями

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \quad (4-6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + b_{22}u_2 \quad (4-7)$$

Тоді матриці

$$\text{- системи} \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \quad (4-8)$$

$$\text{- входу} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix} \quad (4-9)$$

Тоді добуток

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} + a_{22} \cdot 0 & 0 \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ 0 & a_{22} \cdot b_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4-10)$$

**Матриця керованості**

$$\mathbf{K} = |\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & b_{22} & 0 & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \quad (4-11)$$

Судячи з матриці керованості (4-11),

**при  $b_{22} \neq 0$  ранг  $\text{rank } \mathbf{K} = 2$  і об'єкт повністю керований;**

**при  $b_{22} = 0$  ранг  $\text{rank } \mathbf{K} = 1$  і об'єкт не повністю керований, а тільки за однією координатою.**

Система називається **цілком або повністю спостережуваною**, якщо існує таке  $t_1$  ( $t < t_1 < \infty$ ), що за **відомою інформацією про вихід  $Y(\tau)$  і вхід  $u(\tau)$**  системи для інтервалу  $t \leq \tau \leq t_1$  можна **визначити всі координати вектора змінних стану системи  $X(t)$ .**

*Проблема спостережуваності виникає* тому, що при *синтезі систем зі зворотними зв'язками* керування визначається як *функція змінних стану*. Піддаються вимірюванню вектор вихідних величин  $Y(t)$  і вектор керівної дії  $u(t)$ .

Для лінійної стаціонарної системи, що описується (4-1) і (4-2), **критерій повної спостережуваності**:

система **повністю спостережувана** (відновлювана) тоді і тільки тоді, коли **ранг матриці спостережуваності** розмірності  $n \times nt$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mid \dots \mid (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] \quad (4-12)$$

дорівнює  $n$ , тобто

$$\text{rank } \mathbf{H} = n \quad (4-13)$$

Це є **необхідні і достатні умови спостережуваності Калмана**.

**Відновлене значення вектора змінних стану** називається його **оцінкою**.

Пристрій, що забезпечує **знаходження оцінки за вимірюваними векторами** керування  $u(\tau)$  і вихідних параметрів  $y(\tau)$  для інтервалу  $t_0 < \tau < t$  називається **спостерігачем**.

## 5. МОДЕЛІ У ВИДІ СИГНАЛЬНИХ ГРАФІВ

Структурні схеми достатньо повно представляють зв'язки між регульованими і вхідними параметрами. Для систем зі *складною структурою* процес спрощення їх структурних схем трудомісткий.

Мейсон запропонував альтернативний метод представлення зв'язків між змінними системи, який ґрунтується на використанні *сигнальних графів*.

*Переваги* цього методу – за сигнальним графом: використовуючи *формулу Мейсона можна відразу встановити зв'язки* між змінними системи.

*Сигнальний граф* – це діаграма, що складається з *вузлів*, зв'язаних між собою *направленими гілками*

Сигнальний граф є *графічним* способом опису *лінійних зв'язків* між змінними. Сигнальні графи є особливо важливими для систем керування зі *зворотними зв'язками*.

Основним елементом сигнального графа є *однонаправлений відрізок*, який називається *гілкою*. Гілка відображає *зв'язок між вхідною і вихідною змінними*.

Наприклад, гілка, що зв'яже температуру в апараті  $\Theta(p)$  з витратою гріючої пари  $F(p)$  буде мати вигляд

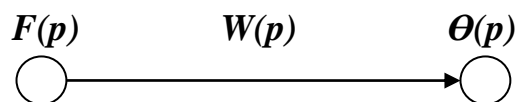


Рис.5.1 Зображення гілки з двома вузлами

Точки входу і виходу гілки називаються *вузлами* і відображаються *кружечками*. Сигнальний граф для системи з перехресними зв'язками буде мати вигляд (рис. 5.2):

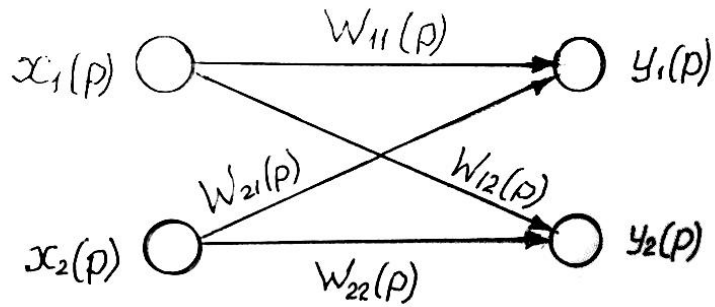


Рис. 5.2 Сигнальний граф для системи з перехресними зв'язками

Сигнальний граф – *наочний метод* запису *алгебричних рівнянь*, що показує зв'язок між змінними.

*Сума всіх сигналів*, що входять у вузол, утворює відповідну цьому вузлу *змінну*.

*Шлях* – це гілка або послідовність гілок, що можуть бути проведені від одного вузла до іншого.

*Контур* – це замкнутий шлях, що починається і закінчується в тому ж вузлі, причому впродовж цього шляху ні один інший вузол не зустрічається двічі.

*Недотичними* називаються такі контури які не мають спільного вузла. Два *дотичні* контури мають один або більше *спільних вузлів*.

Для графа з перехресними зв'язками (рис. 5.2) маємо:

$$\begin{aligned} y_1(p) &= W_{11}(p)x_1(p) + W_{21}(p)x_2(p) \\ y_2(p) &= W_{22}(p)x_2(p) + W_{12}(p)x_1(p). \end{aligned} \quad (5.1)$$

**Приклад 5.1:** система рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

де  $(u_1, u_2)$  – вхідні змінні (керівні дії і збурення),

$(x_1, x_2)$  – вихідні змінні (параметри стану, тобто регульовані і проміжні змінні).

Відповідний сигнальний граф наведений на рис. 5.3

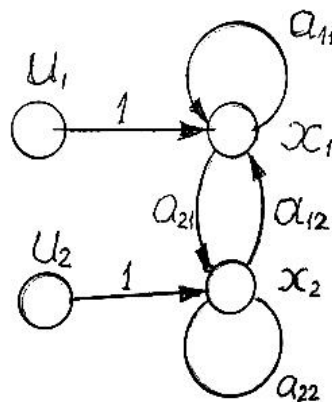


Рис.5.3 Сигнальний граф, що відповідає системі рівнянь (5.2)

Для її **рішення за правилом Крамера** систему рівнянь (5.2) запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} x_1(1 - a_{11}) + x_2(-a_{12}) &= u_1 \\ x_1(-a_{21}) + x_2(1 - a_{22}) &= u_2 \end{aligned}$$

За правилом **Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \quad (5.3)$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} u_1 & -a_{12} \\ u_2 & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = (1 - a_{22})u_1 + a_{12}u_2 \quad (5.4)$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{1 - a_{22}}{\Delta} u_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} u_2 \quad (5.5)$$

Аналогічно для  $x_2$ :

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & u_1 \\ -a_{21} & u_2 \end{vmatrix} = (1 - a_{11})u_2 + a_{21}u_1 \quad (5.6)$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{1 - a_{11}}{\Delta} u_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} u_1 \quad (5.7)$$

**Знаменник дорівнює:** 1 <мінус><коефіцієнти передачі окремих контурів  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  і  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ><плюс><добуток коефіцієнтів передачі 2-х недотичних контурів  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ >. Конттури  $a_{22}$  і  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ , як і  $a_{11}$  і  $a_{21}$ ,  $a_{12}$  є дотичними.

**Формула Мейсона дає лінійну залежність між змінною  $x_i$  та залежною від неї змінною  $x_j$ :**

$$W_{ij}(p) = \frac{\sum_k P_{ijk}(p) \cdot \Delta_{ijk}}{\Delta} \quad (5.8)$$

де  $P_{ijk}(p)$  – коефіцієнт передачі  $k$ -го шляху від змінної  $i$  до змінної  $j$ ;

$\Delta$  - визначник графа;

$\Delta_{ijk}$  – додатковий множник для  $P_{ijk}(p)$ .

Сума береться по всіх можливих шляхах « $k$ » від  $x_i$  до  $x_j$ .

$\Delta_{ijk}$  дорівнює визначнику всіх дотичних контурів при видаленні  $k$ -го шляху.

Визначник графа:

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q - \sum_{r=1, s=1, t=1}^{R, S, T} L_r L_s L_t + \dots \quad (5.9)$$

де  $L_q$  є коефіцієнт передачі  $q$ -го контура.

**Правило обчислення  $\Delta$  через  $L_1, L_2, \dots, L_n$  :**

$\Delta = 1 -$  (сума коефіцієнтів передачі **всіх окремих контурів**) + (сума добутків всіх можливих **комбінацій із 2-х недотичних** контурів) – (сума добутків усіх можливих **комбінацій із 3-х недотичних** контурів) + ...

**Формула Мейсона у спрощеному виді** для встановлення зв'язку між **вихідною** змінною  $x(p)$  і **вхідною**  $u(p)$ :

$$W_{ux}(p) = \frac{x(p)}{u(p)} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta} \quad (5.10)$$

Коефіцієнт передачі **шляху**  $P_k$  визначається як **неперервна послідовність гілок** в напрямку стрілок, при чому **ні один вузол не зустрічається** в цьому ланцюжку **більше 1 разу**.

**Приклад 5.2 :** Сигнальний граф системи з **паралельними шляхами** наведений на рис. 5.4.

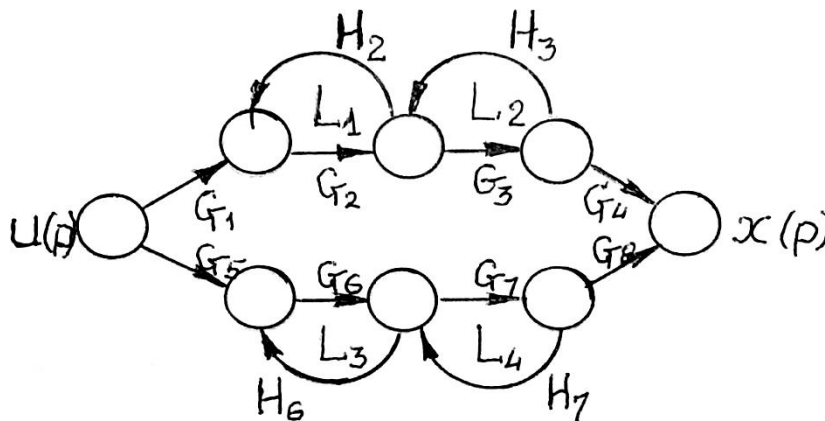


Рис.5.4. Сигнальний граф системи з паралельними шляхами

Від входу  $u(p)$  до виходу  $x(p)$  існує декілька *шляхів*:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4; \quad (5.5)$$

$$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8. \quad (5.6)$$

Граф містить *4 контури*:

1.  $L_1 = G_2 H_2;$
2.  $L_2 = G_3 H_3;$
3.  $L_3 = G_6 H_6;$
4.  $L_4 = G_7 H_7.$

(5.7)

*Визначник системи* (знаменник):

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4) \quad (5.8)$$

Додатковий *множник для 1-го шляху* обчислюється в результаті *видалення із  $\Delta$  контурів, які дотичні до шляху  $P_1$* . Тому

$$L_1 = L_2 = 0$$

$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4).$$

Для *шляху 2*:

$$L_3 = L_4 = 0;$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2).$$

*Передатна функція* системи:

$$\begin{aligned} W_{ux}(p) &= \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4} = \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 (1 - L_3 - L_4) + G_5 G_6 G_7 G_8 (1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4} \end{aligned} \quad (5.9)$$

**Приклад 5.3. Передатна функція багатоконтурної системи регулювання з використанням сигнального графа.**

Структурна схема багатоконтурної системи наведена на рис. 5.5.

Це багатоконтурна замкнута система регулювання з *регульованою величиною*  $y(p)$ , *керівною дією (керуванням)*  $u(p)$  основним *від'ємним зворотним зв'язком*  $H_3$  і двома *додатковими зворотними зв'язками*, що зменшують вплив відповідних збурень на систему: *додатного*  $H_1$  і *від'ємного*  $H_2$ .

Для знаходження передатної функції за каналом керування  $W_{uy}(p) = y(p)/u(p)$  попередньо слід визначити змінні в проміжних точках, рішення отриману систему рівнянь відносно  $y(p)$ , знайти функцію  $y(p) = W_{uy}(p)u(p)$ , звідки і знаходять  $W_{uy}(p)$ .

Величини змінних (сигналів) в проміжних точках системи регулювання:

$$\begin{aligned}x_1 &= u(p) - H_3 y(p); \\x_2 &= G_1 x_1 - H_2 x_4; \\x_3 &= H_1 u + G_2 x_2; \\x_4 &= G_3 x_3; \\y(p) &= G_4 x_4.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Рішення системи рівнянь (5.10) відносно хоч і не складне, та трудозатратне.

Простіше *структурну схему* рис.5.5 *перетворити в сигнальний граф*, і використати *спрощену формулу Мейсона* для визначення передатної функції за каналом керування  $u(p) \rightarrow y(p)$ .

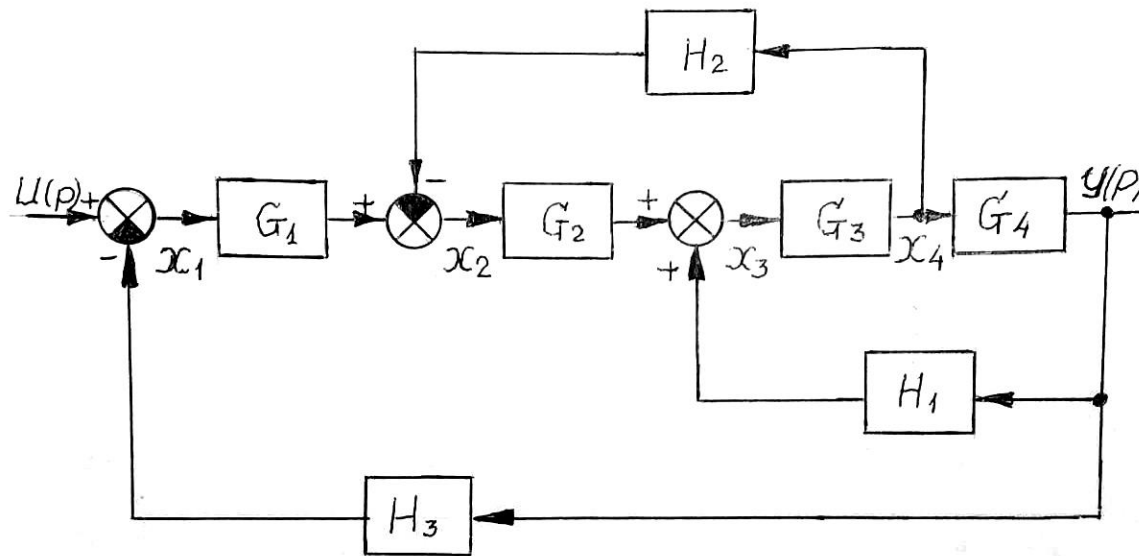


Рис.5.5 Структурна схема багатоконтурної системи регулювання:

$H_1, H_2, H_3$  – зворотні зв'язки;  $u(p)$  – завдання регулятора;  $y(p)$  – регульована величина;  $G_1$ –регулятор;  $G_2$ –виконавчий механізм;  $G_3$ –об'єкт;  $G_4$ –вимірювач;  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – сигнали у зазначених місцях.

На рис. 5.6 наведений сигнальний граф, що відповідає структурній схемі багатоконтурної системи регулювання з рис. 5.5.

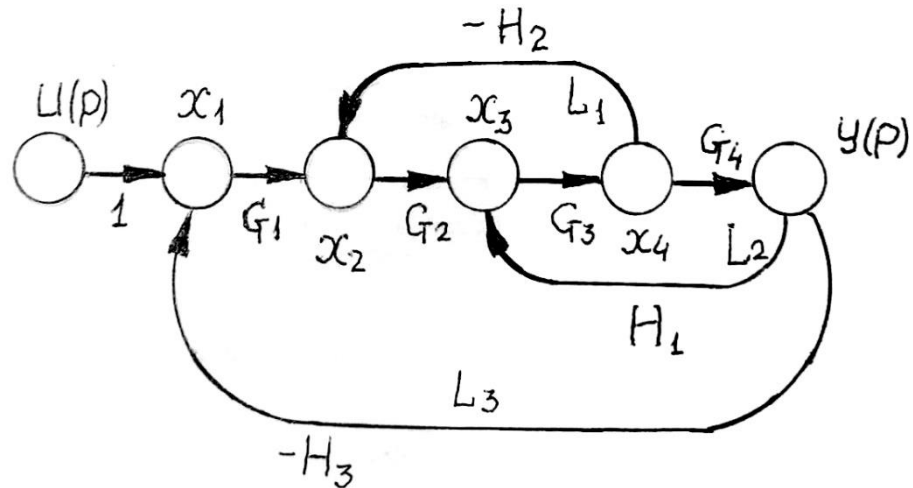


Рис. 5.6 Сигнальний граф, що відповідає структурній схемі системи регулювання на рис. 5.5.

Сигнальний граф рис. 5.6 для каналу  $u(p) \rightarrow y(p)$  має єдиний шлях  $P_1 = G_1G_2G_3G_4$ , а також *три контури*:

$$\begin{aligned} L_1 &= -G_2G_3H_2; \\ L_2 &= G_3G_4H_1; \\ L_3 &= -G_1G_2G_3G_4H_3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

*Всі контури* графа на рис. 5.6 мають *спільні вузли*, тому вони є *дотичними*. Визначник системи:

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 \quad (5.11)$$

Шлях  $P_1$  торкається всіх контурів, тому множник  $\Delta_1 = 1$ .

Передатна функція замкненої системи рис. 5.5 є:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{P_1\Delta_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3H_2 - G_3G_4H_1 + G_1G_2G_3G_4H_3} \quad (5.12)$$

## 6. ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ХІМІЧНИХ РЕАКТОРІВ

В хімічних реакторах можуть відбуватися реакції двох типів:

1. *Прості хімічні реакції*, що характеризуються одним хімічним перетворення і відповідно мають одну формулу хімічної реакції);
2. *Складні хімічні реакції* в яких присутні два або більше перетворення та дві або і більше формули, що описують хімічний процес.

Кожна проста хімічна реакція, що входить в склад складної реакції, називається *стадією складної хімічної реакції*.

Нижче наведені особливості визначення швидкостей простих хімічних реакцій, які для складних реакцій будуть швидкостями окремих стадій складної хімічної реакції.

*Швидкість хімічної реакції*  $\omega_A$  – зміна концентрації  $x_A$  *реагенту*  $A$  в одиницю часу *при постійному об'ємі*  $V_r$ , моль.

Звичайно *реагентом*  $A$  є так званий *лімітуючий компонент* (реагент), *тобто той, якого на вході в реактор є найменше* відносно стехіометричної кількості (чи стехіометричного співвідношення) реагентів

$$dm_A = V_r \omega_A dt \quad (6.1)$$

де  $dm_A$  – зміна кількості реагенту  $A$ ;

$dt$  – проміжок часу;

$\omega_A$  – швидкість зміни концентрації реагенту  $A$ .

*З іншого боку*

$$dm_A = d(V_r x_A) \quad (6.2)$$

тоді

$$d(V_r x_A) = V_r \omega_A dt \quad (6.3)$$

або

$$\frac{d(V_r x_A)}{dt} = V_r \omega_A \quad (6.4)$$

Якщо  $V_r = \text{const}$ , то

$$\omega_A = \frac{dXA}{dt} \quad (6.5)$$

*Швидкість хімічної реакції* залежить як від температури  $\Theta$  (*закон Ареніуса*), так і від концентрації діючих компонентів ( $x_1, x_2$ ) (*закон діючих мас*)

$$\omega_A = f(\Theta, X_i) = K(\Theta) \varphi(x_1, x_2) \quad (6.6)$$

де  $K(\Theta)$  – константа швидкості реакції, що залежить від абсолютної температури  $\Theta$  і визначається *законом Ареніуса*;

$\varphi(x_1, x_2)$  – деяка функція концентрації діючих компонентів (тобто тих, що вступають в реакцію) і визначається *законом діючих мас*.

Згідно *закону Ареніуса*

$$K(\Theta) = K \exp(-E / R \Theta) \quad (6.7)$$

де  $E$  – енергія активації реакції;

$R$  - універсальна газова постійна;

$\Theta$  – абсолютна температура, град К.

За *законом діючих мас*

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1)^n (x_2)^m \quad (6.8)$$

де  $x_1, x_2$  – *поточні концентрації* діючих компонентів;

$n + m$  – *порядок хімічної реакції*, що визначається експериментально.

Здебільшого приймається  $n + m < 3$  оскільки нехтується ймовірністю одночасної зустрічі трьох молекул для хімічної реакції.

Для *простої хімічної реакції* характерна можливість визначення поточної концентрації *будь-якого компонента  $X_j$*  за *поточною концентрацією іншого* компонента  $X_i$  та їх початковими значеннями (на вході в реактор)  $X_{i0}$  та  $X_{j0}$ , використовуючи наступні співвідношення:

якщо використовуються *мольні концентрації*, тобто кг-моль/ м<sup>3</sup> або кг-моль/ кг, то

$$\frac{X_i - X_{i0}}{N_i} = \frac{X_j - X_{j0}}{N_j} \quad (6.9)$$

де  $X_{i0}, X_{j0}$  – початкові концентрації  $i$ -го і  $j$ -го компонента (реагента);

$X_i, X_j$  – поточні концентрації  $i$ -го і  $j$ -го компонента (реагента);

$N_i, N_j$  – стехіометричні коефіцієнти простої реакції для  $i$ -го і  $j$ -го компонента (реагента); якщо  $i$ -й реагент зникає внаслідок реакції, то  $N_i < 0$ , якщо  $i$ -й реагент появляється внаслідок реакції, то  $N_i > 0$ ;

якщо використовуються *вагові концентрації*, тобто кг/ кг суміші, % або кг/м<sup>3</sup>, то

$$\frac{X_i - X_{i0}}{N_i M_i} = \frac{X_j - X_{j0}}{N_j M_j} \quad (6.10)$$

де  $M_i, M_j$  – молекулярні ваги  $i$ -го і  $j$ -го компонента (реагента).

Тому для реактора, в якому відбувається *проста хімічна реакція*, складаємо *тільки одне рівняння* матеріального балансу *по будь-якому одному* компоненту, а поточні значення концентрацій всіх інших реагентів визначаються за стехіометричними співвідношеннями, наведеними вище.

Якщо в реакторі відбувається *складна хімічна реакція*, то концентрація будь-якого компонента визначається за концентраціями *ключових речовин (компонентів)*. Кількість ключових компонентів визначається *рангом матриці стехіометричних коефіцієнтів* складної хімічної реакції.

## 7. ХІМІЧНИЙ РЕАКТОР ІДЕАЛЬНОГО ЗМІШУВАННЯ ЯК ТОК

Розглянемо неперервної дії хімічний реактор ідеального змішування, в якому проходить складна хімічна реакція з екзотермічним ефектом, в якій приймають участь *т ключових речовин*, як технологічний об'єкт керування.

Хімічні реакції відбуваються в більшості випадків в рідкій фазі реакційної маси.

Допущення про те, що апарат має ідеальне змішування передбачає однакові параметри середовища (концентрація, температура) як в будь-якій точці реакційної маси, так і у вихідному потоці. Теоретично це забезпечується наявністю мішалки або іншого способу інтенсивного перемішування реакційної маси в апараті. В апараті можуть використовуватися і інші способи інтенсивного перемішування, наприклад, барботаж рідкої реакційної маси газовим потоком.

Екзотермічний ефект реакції вимагає встановлення системи охолодження для забезпечення оптимальної температури реакційної маси складної хімічної реакції. При наявності мішалки всередині реактора найпростішим способом є охолоджуюча сорочка на зовнішній стінці реактора або виносні теплообмінники з охолоджуючою речовиною. При перемішуванні реакційної маси за допомогою барботажу використовують і вбудовані теплообмінні поверхні різної форми.

Основні визначальні параметри реактора, що характеризують його роботу, є *концентрація компоненту*, який є його продуктом, у вихідному потоці і *температура* в реакторі.

Якщо реакція проходить при певній кислотності середовища, то до регульованих параметрів часто додають ще і *pH реакційної маси*. Керуванням в цьому випадку виступає *витрата* додаткової речовини.

При безперервній роботі реактора необхідно забезпечити певний об'єм рідкої реакційної маси в ньому. Тоді додається ще одна регульована величина – *рівень рідини* в апараті. Керуванням при цьому є *витрата реакційної маси* на виході з апарату.

Будемо розглядати дві *регульовані* величини:

- *концентрація* одного з компонентів реакційної маси на виході з реактора;
- *температура* в реакторі.

Керуванням при регулюванні концентрації звичайно є *витрата одного з реагентів* або *співвідношення витрат реагентів* на вході в реактор. В окремих випадках концентрацію одного з компонентів регулюють зміною *температури в реакторі*. Це торкається складних хімічних реакцій з різними швидкостями окремих стадій.

Керуванням при регулюванні температури реакційної маси в реакторі є *витрата* матеріального потоку, що *охолоджує (чи нагріває* при ендотермічній реакції) цю реакційну масу безпосередньо в реакторі. Іноді (при особливо великій швидкості реакції) температуру в реакторі регулюють *зміною температури* одного з реагентів на вході в реактор.

Хімічні реактори відзначаються великою різноманітністю як по конструкції, так і по фізичному стану початкових компонентів і продуктів реакції. Тому кожне апаратурне оформлення і кожен вид хімічної реакції, що реалізуються в ньому, повинні розглядатися індивідуально.

Структурно-параметрична схема хімічного (біохімічного) реактора зображена на рис. 7 1.

В практичних розрахунках динаміки складних хімічних реакцій часто швидкість складної реакції визначають за швидкістю *лімітуючої елементарної стадії*, тобто стадії з найменшою швидкістю реакції.

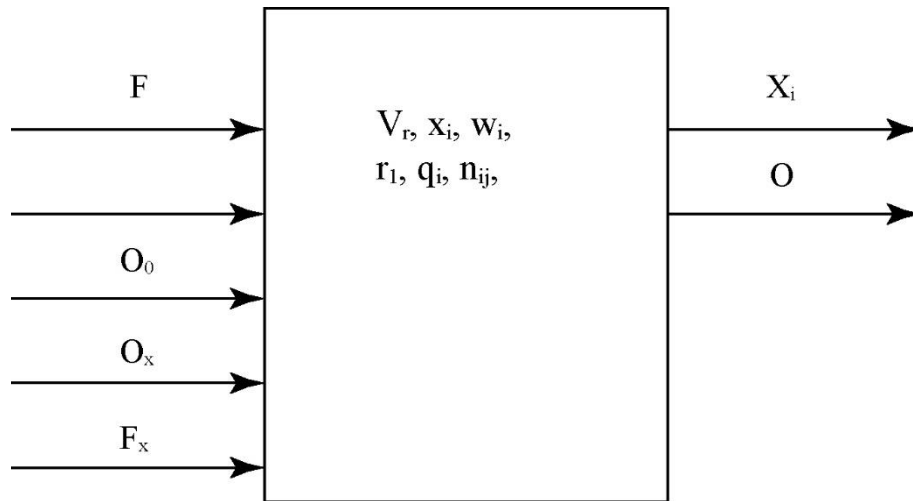


Рис.7.1 Структурно-параметрична схема реактора ідеального змішування

На рис.7.1 прийняті наступні позначення:

$F$  – витрата реакційної суміші;

$F_x$  – витрата холодоагента;

$x_{i0}$  – концентрація  $i$ -го ключового компонента (речовини) на вході в реактор;

$\theta_0$  – температура реакційної суміші на вході в реактор;

$\theta_x$  – температура холодоагента (охолоджувача) в реакторі;

$V_r$  – об'єм реакційної маси в реакторі, моль;

$\theta$  – температура реакційної маси в реакторі і на виході з нього;

$x_i$  – концентрація  $i$ -го ключового компонента в реакторі та на виході з нього.

$w_i$  – швидкість утворення  $i$ -го ключового компонента в складній хімічній реакції;

$q_j$  – тепловий ефект  $j$ -ї стадії складної хімічної реакції;

$r_j$  – швидкість  $j$ -ї стадії складної хімічної реакції.

*Швидкість лімітуючої стадії* як простої хімічної реакції:

$$r_j = K_j(\Theta) \cdot \varphi_j(x_1, x_2) \quad (7.1),$$

де  $K_j(\Theta)$  – *константа швидкості* реакції, яка залежить від *абсолютної температури*  $\Theta$  згідно *закону Ареніуса*

$$K_j(T) = K_{j\infty} \cdot \exp(-E_j / R \Theta) \quad (7.2)$$

$E_j$  – енергія активації  $j$ -ї стадії,

$R$  - універсальна газова постійна,

$\Theta$  – абсолютна температура, град. К,

$\varphi_j(x_1, x_2)$  визначається згідно *закону діючих мас*:

$$\varphi_j(x_1, x_2) = (x_1)^n (x_2)^m \quad (7.3)$$

$x_1, x_2$  – *концентрації* початкових компонентів (речовин),

$(n + m) < 3$  – *порядок хімічної реакції* визначається експериментально.

При розгляді матеріальних і теплових балансів хімічного реактора як основи його математичної моделі будемо користуватися наступними допущеннями

- циліндрична форма апарату з вбудованою мішалкою і охолодженням зовнішньої поверхні;
- постійні теплофізичні параметри як реакційної маси, так і охолоджувача;
- основна ємність, що акумулює як тепло, так і реакційну масу – це ємність рідкої реакційної маси в апараті з постійним об'ємом;

## 7.1 Матеріальний баланс для $i$ -го ключового компоненту

Всі кількісні величини виражаються в молях.

Припустимо, що кількість молів реагентів *не змінюється в процесі хімічних* перетворень, тобто

$$V_r = \text{const.} \quad (7.4)$$

Кількість  $i$ -го компоненту, яка поступила в реактор в складі реакційної суміші є

$$F \cdot x_{i0}. \quad (7.5)$$

Кількість  $i$ -го компоненту, яка утворилася внаслідок хімічної реакції є

$$V_r \cdot w_i, \quad (7.6)$$

де  $w_i$  – швидкість *утворення  $i$ -го* компоненту в складній реакції.

Кількість  $i$ -го компоненту, яка *вийшла* з реактора

$$F \cdot x_i. \quad (7.7)$$

Кількість  $i$ -го компоненту, що *накопичилася* в реакторі

$$V_r \cdot \frac{dx_i}{dt}. \quad (7.8)$$

Тоді *матеріальний баланс для  $i$ -го ключового* компоненту буде

$$V_r \cdot \frac{dx_i}{dt} = F(x_{i0} - x_i) + V_r \cdot w_i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.9)$$

При використанні (7.9) треба бути *дуже обережним з розмірністю* величин.

## 7.2 Тепловий баланс реактора

Якщо  $q_j$  – тепловий ефект  $j$ -ї стадії, віднесений до 1 моля продукту цієї стадії  $A_{ij}$ , Дж·моль<sup>-1</sup>, то сумарний тепловий ефект складної хімічної реакції

$$Q_r = \sum_{j=1}^s n_{ij} \cdot q_j \cdot r_j \quad (7.10)$$

де  $n_{ij}$  – стехіометричний коефіцієнт при  $i$ -му компоненті в  $j$ -й стадії;

$r_j$  – швидкість  $j$ -ї стадії;

$s$  – кількість стадій складної хімічної реакції.

Якщо тепловий ефект  $j$ -ї стадії є *екзотермічним*, то  $q_j > 0$ , якщо *ендотермічним*, то  $0 > q_j$ .

Якщо  $i$ -й компонент внаслідок  $j$ -ї стадії *утворюється*, то  $n_{ij} > 0$ , якщо *зникає*, то  $0 > n_{ij}$ .

Кількість тепла, *внесена в реактор* з реакційною масою

$$F \cdot c_p \cdot \Theta_0, \quad (7.11)$$

де  $c_p$  – питома теплоємність реакційної суміші; припускають, що внаслідок реакції питома теплоємність реакційної суміші не змінюється, тобто

$$c_p = \text{const}. \quad (7.12)$$

Кількість тепла, що *виноситься з реактора* з реакційною сумішшю

$$F \cdot c_p \cdot \Theta. \quad (7.13)$$

Кількість тепла, що *виділяється /поглинається* внаслідок хімічної реакції

$$V_r \cdot Q_r. \quad (7.14)$$

Кількість тепла, що *передається* через стінку *до охолоджувача*

$$K_\theta \cdot S \cdot (\theta - \theta_x), \quad (7.15)$$

де  $K_\theta$  – коефіцієнт теплопередачі від реакційної маси реактора до охолоджувача;

$S$  – поверхня теплопередачі.

Кількість *акумульованого в об'ємі* реакційної маси тепла

$$V_p \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{dt}. \quad (7.16)$$

*Рівняння теплового балансу* хімічного реактора

$$V_p \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{dt} = F \cdot c_p \cdot (\theta_0 - \theta) + V_r \cdot Q_r - K_\theta \cdot S \cdot (\theta - \theta_x). \quad (7.17)$$

Система рівнянь (7.9) і (7.17) представляє собою *математичну модель* екзотермічного *реактора ідеального змішування* в розмірних одиницях.

Слід не забувати, що в *рівнянні* (7.17) об'єм реактора  $V_r$  має розмірність *моль* (часом *кмоль*), а  $V_p$  – *кг* (часом *т*).

## 8..ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА

*Перенесення тепла* від однієї точки простору до іншої відбувається:

- *теплопровідністю,*
- *конвекцією,*
- *випромінюванням (радіацією).*

Розглянемо перенесення тепла між *двома однофазними потоками*, розділеними плоскою багатошаровою *твердою стінкою*.

Таке перенесення тепла від одного потоку до іншого можна розглядати як послідовність стадій:

1. Перенесення тепла *від ядра потоку I до поверхні стінки* за рахунок конвекції, випромінювання і теплопровідності в ламінарному потоці;
2. Перенесення тепла *через 1-й, 2-й ... шари стінки* за рахунок теплопровідності матеріалів;
3. Перенесення тепла *від поверхні стінки до ядра потоку II* за рахунок теплопровідності в ламінарному шарі, конвекції і випромінюванні в потоці.

*Швидкість процесу перенесення тепла*  $q_T$  (кДж/год) визначається як добуток рушійної сили (перепаду температур)  $\Delta T$  (град), коефіцієнту теплопередачі  $K_T$  (кДж/м<sup>2</sup>·год·град) і поверхні теплообміну  $S$  (м<sup>2</sup>):

$$q_T = K_T \cdot \Delta T \cdot S \quad (8.1)$$

*Рівняння Фур'є* описує перенесення тепла *теплопровідністю* в нерухомому шарі товщиною  $\delta$  (м) з коефіцієнтом теплопровідності матеріалу шару  $\lambda$  (кДж/м·год·град).

### Рівняння Фур'є

- в диференціальній формі

$$q_T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \delta} S \quad (8.2)$$

- в кінцевій формі, при умові, якщо градієнт температури по товщині шару постійний, тобто  $\frac{\partial T}{\partial \delta} = \text{const}$  і температура стінки  $T^{cm}$ , тоді

$$q_T = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (T_1^{cm} - T_2^{cm}) \cdot S \quad (8.3)$$

**Статика** перенесення тепла *від потоку до твердої стінки* за рахунок конвекції описується **рівнянням Ньютона**:

$$q_T = \alpha_k \cdot (T_1 - T_2^{cm}) \cdot S \quad (8.4)$$

$T_1$  – температура в ядрі потоку;

$\alpha_k$  – коефіцієнт **конвективної тепловіддачі**, який є складною функцією двох груп параметрів:

- теплофізичних параметрів потоку (теплоємність, теплопровідність, густина, в'язкість і т.д.),
- величин, що визначають гідродинаміку і умови конвективного перенесення тепла в потоці.

Коефіцієнт  $\alpha_k$  в сталому потоці знаходиться як розв'язання системи, що складається з **трьох рівнянь**

- 1) **Нав'є-Стокса** при русі **нестискуваної рідини в напрямку осі x**:

$$\begin{aligned} \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \\ \rho \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

- 2) Рівняння **нерозривності потоку**

для **стискуваної** рідини:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8.6)$$

для *стаціонарного* потоку *нестискуваної* рідини ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (8.7)$$

де  $v_x, v_y, v_z$ - *проекції швидкості* на осі координат  $x, y, z$ .

3) Рівняння *Фур'є – Кірхгофа* для конвективного перенесення тепла в потоці при стаціонарних умовах:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = A \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (8.8)$$

де  $A = \lambda / c_T \cdot \rho$  – коефіцієнт температуропровідності;

$\lambda$  – питома теплопровідність;

$c_T$  – питома теплоємність;

$\rho$  – густина

*при граничних умовах* на твердій стінці:

$$\alpha_k \cdot (T - T^m) = - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \quad (8.9)$$

На поверхні стінки утворюється ламінарний шар товщиною  $\delta$ , перенесення тепла в якому відбувається тільки *теплопровідністю*.

Система рівнянь (8.5) – (8.8) *не може бути проінтегрована* аналітичним шляхом. Тому дослідження теплообміну проводиться на основі *теорії подібності*. При цьому використовують *критерії*

*Рейнольдса:*  $Re = (v \cdot l \cdot \rho) / \mu = (v \cdot l) / \nu,$

*Нуссельта:*  $Nu = (\alpha_k \cdot l) / \lambda,$

*Пекле:*  $Pe = (v \cdot l) / A,$

*Прандтля:*  $Pr = Pe / Re = \nu / A = \mu / (\rho \cdot A) .$

де  $v$  – лінійна швидкість;

$l$  – характерний лінійний розмір;

$\nu$  – кінематична в'язкість;

$\mu$  – динамічна в'язкість.

Загальний вигляд рівняння для визначення  $\alpha_k$ :

$$f(Re, Pr, Pe, Nu) = 0 \quad (8.10)$$

В газовій фазі при високій температурі перенесення тепла здійснюється в основному *випромінюванням* на основі закону *Стефана-Больцмана* (температури в град. К):

$$q_T = K_B (T_\phi^4 - T_{ст}^4) \cdot \phi \quad (8.11)$$

де  $K_B$  – коефіцієнт теплопередачі випромінюванням,

$\phi$  - кутовий коефіцієнт, що залежить від взаємного розташування поверхонь.

$T_\phi$  – температура факела, град К;

$T_{ст}$  – температура стінки, град К.

В реальних технологіях присутні одночасно всі 3 види перенесення тепла, при цьому один з них має істотну перевагу, принаймні так проектується відповідні апарати з перевагою одного з трьох видів перенесення тепла. При математичному моделюванні використовуються закономірності того виду перенесення тепла, який за допущенням вважається найбільшим. Іноді ж допускається певне постійне співвідношення кількості тепла, переданого різними способами.

Наведені вище закономірності використовуються при складанні теплових балансів ємностей, що акумулюють тепло.

## 9. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ПРОЦЕСІВ ЗГОРЯННЯ ПАЛИВА

**Питома теплота спалювання** - це кількість тепла (кДж), що виділяється при повному згорянні 1 кг палива. Якщо паливо – газ, то береться на 1 нм<sup>3</sup>.

**Нижня теплота спалювання**  $Q^p_H$  визначається при умові, що вода, яка утворилася внаслідок спалювання, знаходиться у **виді пари**.

**Питома теплота спалювання** визначається за **формулою Менделєєва** в залежності від процентного вмісту в паливі вуглецю (С), водню (Н), кисню (О), сірки (S) та вологи (W) в %:

$$Q^p_H = 339,3 \cdot C + 1256 \cdot H - 109 \cdot (O - S) - 25,2 \cdot (9 \cdot H + W), \text{ кДж/кг} \quad (9.1)$$

В процентний склад палива звичайно входять: вуглець С, водень Н, кисень О, сірка S, азот N, зола А, волога W так, що при їх значеннях в %:

$$C + H + O + S + N + W = 100 \quad (9.2)$$

Верхня теплота спалювання (при умові, що утворена внаслідок спалювання H<sub>2</sub>O знаходиться у виді рідини) визначається як

$$Q^p_B = Q^p_H + 25,2 \cdot (9 \cdot H + W) \quad (9.3)$$

Максимальна (теоретична) температура спалювання визначається як:

$$\theta_{\text{макс}} = \frac{Q^p_H + c\theta_T + \alpha G(1,02 + 1,95x)\theta_B}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots} \quad (9.4)$$

$c$  – середня питома теплоємність палива;

$\theta_T$  – температура палива, що поступає в топку;  
 $\alpha G(1,02 + 1,95x)\theta_B$  – тепловміст вологого повітря;  
 $G$  – теоретична витрата повітря в кг, що йде на згоряння 1 кг палива;  
 $\alpha$  – коефіцієнт надлишку повітря: тверде паливо 1,3 – 1,7; рідке паливо 1,1 – 1,2; газоподібне 1,0 – 1,2;  
 $1,02$  – питома теплоємність повітря;  
 $1,95$  – питома теплоємність водяної пари;  
 $x$  – вологовміст повітря в кг на 1 кг сухого повітря;  
 $\theta_B$  – температура повітря, що поступає на спалювання;  
 $m_1, m_2, \dots$  – маса складових частин продуктів спалювання в кг на 1 кг палива;  
 $c_1, c_2, \dots$  – середні питомі теплоємності складових частин продуктів спалювання.

Якщо паливо і повітря поступають в топку без підігріву, тоді другою і третьою складовою в (9.4) нехтують.

**Теоретична витрата повітря  $G$**  (в кг на 1 кг палива) визначається, виходячи зі складу палива (в %):

$$G = \frac{1}{23} \left[ \frac{32}{12} C + \frac{16}{2} H + \frac{32}{32} (S - O) \right] \quad (9.5)$$

або 
$$G = 0,116 C + 0,348 H + 0,0435(S - O) \quad (9.6)$$

Наведені вище залежності використовуються при складанні рівнянь матеріальних і/чи теплових балансів процесів згоряння палива.

## 10. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕДАЧІ.

Перерозподіл компоненту між двома взаємодіючими фазами відбувається за рахунок *масопередачі*.

*При взаємодії двох фаз* встановлюються *рівноважні концентрації* в газі  $y_r^*$  і рідині  $x_r^*$ . При *постійних тиску і температурі*

$$y_r^* = f(x) \quad \text{і} \quad x_r^* = f_l(y) \quad (10.1)$$

де  $x$  і  $y$  – *поточні значення концентрацій компоненту* в рідині і газі.

Для *ідеальних бінарних сумішей*

$$y_r^* = \frac{\alpha_l \cdot x}{1 + (\alpha_l - 1) \cdot x} \quad (10.2)$$

де  $\alpha_l$  – коефіцієнт *відносної леткості компонентів*, він дорівнює *відношенню тиску насиченої пари більш леткого компоненту до тиску насиченої пари менш леткого компоненту* (при *однаковій температурі*).

Перенесення речовини *в межах однієї фази* відбувається *молекулярною дифузійною і конвекційною*.

*Молекулярна дифузія* відбувається *без видимого переміщення ділянок фази і ґрунтується на тепловому русі молекул*.

*Еквімолярний рух* (при *рівності числа молів компонентів*, що переносяться з однієї фази в іншу) описується *рівнянням Фіка*:

в диференційній формі 
$$q_m = - D \cdot \frac{\partial c}{\partial \delta} \cdot S \quad (10.3)$$

в кінцевій формі 
$$q_m = - \frac{D}{\delta} \cdot \Delta c \cdot S \quad (10.4)$$

де  $q_m$  – кількість перенесених молів компонента;

$D$  – коефіцієнт молекулярної дифузії;

$c$  – концентрація компоненту;

$\delta$  – товщина шару суміші;

$S$  – поверхня масообміну.

Потік речовини  $q_m$  пропорційний градієнту концентрації компоненту  $c$  по товщині шару  $\delta$  і поверхні  $S$ .

При  $\delta c / \delta \delta = \text{const}$  маємо кінцеву форму (10.4).

*Умова рівноваги* при молекулярній дифузії *в межах однієї фази* відповідає *рівності концентрації* компоненту *у всіх точках*.

*В рухомій фазі* перенесення речовини відбувається за рахунок *конвекції*, тобто за рахунок *відносного переміщення* окремих ділянок потоку.

Перенесення компонента від *границі до ядра потоку* описується *рівнянням Ньютона-Шукарева*:

$$q_m = \beta \cdot (c^p - c) \cdot S \quad (10.5)$$

де  $\beta$  – *коефіцієнт масовіддачі* – складна функція сукупності параметрів;

$c^p$  – концентрація компонента на границі потоку.

*Конвективний масоперенос* (аналогічно тепло переносу) в цілому описується *системою рівнянь*, що складається з рівнянь:

- *Нав'є-Стокса* - баланс сил

$$S_{\text{гр},x} + S_{p,x} + S_{\text{тр}} = S_{\text{ін},x}^{\text{Л}} + S_{\text{ін},x}^{\text{К}} \quad (10.6)$$

в напрямку осі  $x$

$$\begin{aligned} \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \\ \rho \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

- *нерозривності потоку* для *нестационарного потоку стискуваної* рідини

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (10.8)$$

- *рівняння нерозривності* для *стаціонарного потоку нестискуваної* рідини ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (10.9)$$

- *рівняння конвективної дифузії компоненту* (*другий закон Фіка*) для *стаціонарних умов*:

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \cdot \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (10.10)$$

Рівняння (10.10) – це *рівняння матеріального балансу по компоненту* для безконечно малого об'єму в *рухомому потоці*.

*Рівняння другого закону Фіка* за формою аналогічне *рівнянню Фур'є–Кірхгофа* для конвективного теплопереносу.

Система рівнянь (10.6 – 10.10) доповнюється *початковими і граничними* умовами.

*Граничні умови* для масопередачі з однієї фази в іншу при допущенні наявності на границі *дифузійного шару товщиною  $\delta$* , перенос через який здійснюється тільки *молекулярною дифузією*:

$$\beta \cdot \Delta c = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial \delta} /_{\delta=0} \quad (10.11)$$

**Коефіцієнт масовіддачі  $\beta$**  знаходять на основі **теорії подібності**

$$f(Re_d, Pr_d, Fo_d, Nu_d \dots) = 0 \quad (10.12)$$

**Дифузійні критерії подібності:**

$$\text{Пекле } Re_d = \frac{wl}{D},$$

$$\text{Прандтля } Pr_d = \frac{v_c}{D},$$

$$\text{Фур'є } Fo_d = \frac{\tau D}{l^2},$$

$$\text{Нуссельта } Nu_d = \frac{\beta l}{D} \quad (10.13)$$

**Рівняння масопередачі** з однієї фази в іншу:

Загальний вид  $q_m = K \cdot \Delta c \cdot S \quad (10.14)$

В межах однієї фази  $q_m = \beta \cdot (c - c^{sp}) \cdot S \quad (10.15)$

При розрахунку по площі ефективного поперечного перерізу апарату  $q_m = K1 \cdot \Delta c \cdot S_{\text{еф}} \quad (10.16)$

При розрахунку по величині об'єму апарату  $q_m = K2 \cdot \Delta c \cdot V \quad (10.17)$

Рівняння загального коефіцієнту масопередачі за коефіцієнтами масовіддачі  $K = \frac{1}{\frac{1}{\beta_y} + \frac{m}{\beta_x}} \quad (10.18)$

**Допущення:**

- **концентрації на границі розділу фаз є рівноважними;**
- **коефіцієнт  $m$  залежить від тангенсу кута нахилу рівноважної кривої до осі абсцис (концентрації  $x$ ).**

Характерними **процесами масопередачі** в хімічній технології є процеси **сорбції**.

Розрізняють наступні *процеси сорбції*:

*абсорбція* – поглинання компоненту газового середовища *рідким сорбентом*; використовується як для очищення газової суміші від певних компонентів, так і для поглинання корисної складової з наступним виділенням її внаслідок процесу десорбції;

*адсорбція* – поглинання компоненту газового середовища *твердим сорбентом*; здебільшого використовується для *очищення газових сумішей* від різних домішок;

*десорбція* – виділення компоненту з рідкого чи твердого сорбента з метою його (*сорбента*) *регенерації* і подальшого використання компонента. .

Формування *рушійної сили* процесу *абсорбції  $\Delta c$*  продемонстровано на рис. 10.1.

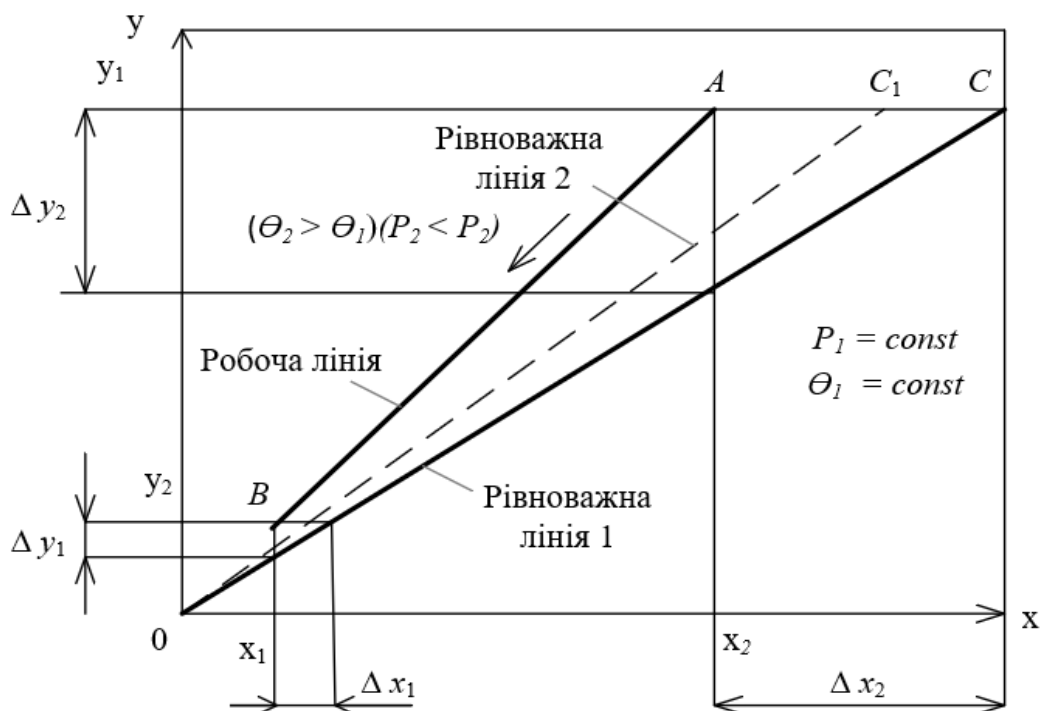


Рис. 10.1 Формування рушійної сили процесу абсорбції (протиток):

$x_1, y_1$  – концентрації компонента в рідкій і газовій фазах на входах в абсорбер;  $x_2, y_2$  – концентрації компонента в рідкій і газовій фазах на виходах з абсорбера;  $\Theta$  – температура;  $P$  – тиск в абсорбері

Точка *A* (*нижня частина абсорбера*) на рис. 10.1 відповідає концентраціям компоненту в різних фазах: на *вході газу в абсорбер*  $y_1$  і *виході рідини з абсорбера*  $x_2$ . В цій точці маємо *рушійну силу процесу* в газовій фазі  $\Delta y_2$  і в рідині  $\Delta x_2$ .

Точка *B* (*верхня частина абсорбера*) відповідає концентраціям компоненту на *виході газу з абсорбера*  $y_2$  і *вході рідини в абсорбер*  $x_1$ . В точці *B* є *рушійна сила процесу* в газовій фазі  $\Delta y_1$  і в рідині  $\Delta x_1$ .

Точка *C* характеризує положення рівноважної лінії, яке залежить від температури  $\theta$  і тиску  $P$  в абсорбері. При *збільшенні температури  $\theta$  і зменшенні тиску  $P$*  точка *C* зміщується вліво (точка  $C_1$ ), що веде до *зменшення рушійних сил абсорбції*.

Тому процес *абсорбції ведуть при низьких температурах і високому тиску*, наскільки це дозволяє технологія і економіка. При подальшому зменшенні  $P$  і зростанні  $\theta$  настає *стан рівноваги*, якому відповідає рівноважна лінія, а далі – і *десорбція*.

Допускаючи *лінійний розподіл концентрацій* компонента в газовій і рідинній фазах, приймаємо діючу рушійну силу процесу абсорбції як *середньоарифметичне* її значення в протилежних точках апарату, відповідно до формул (10.19) і (10.20).

З боку газу (газ  $\rightarrow$  абсорбційний шар)

$$\Delta y = 0,5 \cdot (\Delta y_1 + \Delta y_2); \quad (10.19)$$

З боку рідини (абсорбційний шар  $\rightarrow$  рідина)

$$\Delta x = 0,5 \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2). \quad (10.20)$$

Процес *десорбції ведуть при високих температурах і низькому тиску* в апараті. *Робоча лінія процесу десорбції* знаходиться справа від рівноважної лінії, наведеної на рис. 10.1.

Визначення кількості компоненту, *виділеного внаслідок десорбції*, проводиться аналогічно поглинутому внаслідок абсорбції з врахуванням того, що поточна концентрація компоненту в газовому середовищі є меншою за рівноважну.

## 11. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ЯК ОБ'ЄКТІВ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ТА ОДНОВИМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В апаратах безперервної дії температури гріючого і нагріваного середовищ навіть при тепловій рівновазі не залишаються постійними, а змінюються по ходу процесу, в просторових координатах. Ці зміни можуть описуватися складними математичними залежностями.

Час переміщення середовища може мати різні значення: від близьких нулю до декількох годин.

Зміна температур по довжині апарату визиває різні значення теплофізичних параметрів (теплоємність, питома вага, теплопровідність, в'язкість, і т. п.) і як наслідок – зміни коефіцієнту теплопередачі по довжині апарату.

При порушенні теплового балансу всередині об'єкту, змінюються температури середовищ як в часі, так і в просторі. При цьому закономірності в різних точках апарату можуть бути різними.

В процесі теплопередачі беруть участь проміжні і захисні стінки. Якщо вони мають велику теплову ємність, то істотно впливають на динаміку ТОК.

Оскільки температура  $\theta$  залежить не тільки від часу, а і від просторової координати, то *процес нестационарного конвективного теплообміну* в загальному випадку описується *диференціальним рівнянням в частинних похідних* і є ланкою з розподіленими параметрами:

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t} = \text{div}(\lambda\cdot\text{grad}\theta) - \rho(\text{grad}(c\theta, v)) + q^* \quad (11.1)$$

де *div* – дивергенція (розходження по осях  $x, y, z$ );

$c, \lambda, \rho, v$  – питомі теплоємність, теплопровідність і густина та лінійна швидкість середовища;

$q^*$  - джерела тепла.

*Джерелами тепла* (виділення або поглинання його) можуть бути:

- теплопередача від однієї ємності акумулювання до іншої шляхом теплопровідності, конвекції чи радіації;
- зміна фізичного стану, що супроводжується виділенням/поглинанням тепла (конденсація, випаровування, сублімація, процеси сорбції чи екстракції, процеси розчинення чи змішування і т. п.);
- екзотермічна/ендотермічна хімічна реакція.

Якщо теплоносій – *нестискувана і нев'язка рідина*, то рівняння збереження маси і кількості руху перетворюються в нулеві тотожності і тоді розглядається *рівняння збереження енергії (теплової)*.

Більшість теплових об'єктів – це групи взаємозв'язаних динамічних ланок з *самовирівнюванням*.

Розглядати такі об'єкти треба з деякими *спрощеннями (допущеннями)*, щоб не отримати надто складні результати.

*Вид допущень* залежить від:

- виду технологічного об'єкту автоматизації,
- конструкції,
- режиму роботи.

*Характерні допущення:*

1. *фізичні властивості* середовищ і стінок постійні ( $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  і т. п.):
2. *коефіцієнт тепловіддачі* від середовища до стінки представлений деяким середнім значенням, постійним для всієї поверхні теплообміну  $\alpha - \text{const}$ ,
3. *кінетична і потенціальна енергії* потоку малі по відношенні до теплової,
4. *рідини не стискувані* і не в'язкі,
5. *зовнішні стінки повністю ізольовані* і знаходяться при постійній температурі.
6. *нехтування втратами тепла* в зовнішнє середовище.

*Математичне моделювання* повинно супроводжуватися тою задачею, де воно буде *використане*.

*Поелементна методика* складання математичної моделі полягає в *розділенні* всього процесу теплопередачі на ряд незалежних ділянок (*ємностей акумулювання*), які зв'язані між собою входами і виходами, і у *встановленні зв'язків* між ними.

П'ять типових *ємностей акумулювання тепла* наведені на рис.11.1 у виді їх *розрахункових* схем.

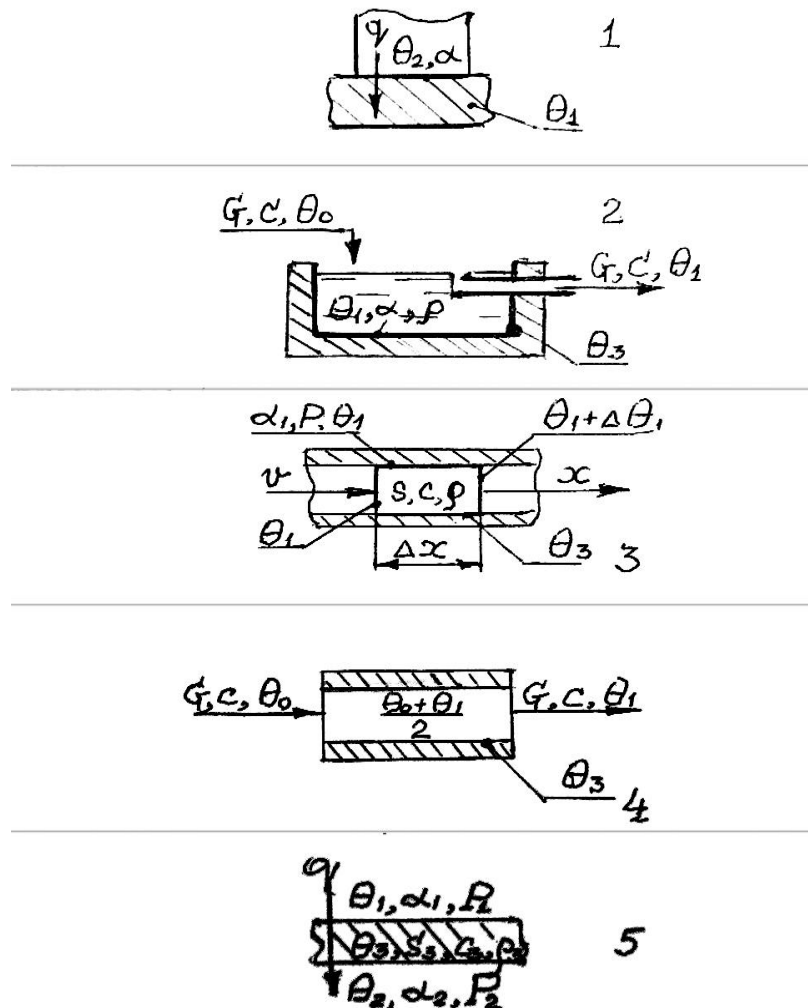


Рис. 11.1 Типові розрахункові схеми ємностей акумулювання тепла

**Тип 1.** Ємність акумулювання тепла з *постійною температурою* (конденсація, кипіння) рідини чи пари.

*Питомий* тепловий потік:

$$q = \alpha(\theta_2 - \theta_1) \quad (11.2)$$

де  $\theta_1$  та  $\theta_2$  - температури стінки і середовища ( $\theta_2 = \text{const}$ );

$\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі.

Рівняння (11.2) в зображеннях змінних:

$$(T \cdot p + 1)q(p) = -\alpha\theta_1(p) \quad (11.3)$$

де  $T = f(Bi, Fo)$  залежить від критеріїв Біо ( $Bi = \alpha l / \lambda$ ) та Фур'є ( $Fo = \lambda \cdot \tau / c \cdot \rho \cdot l^2$ ) і є малою величиною  $T \rightarrow 0$ , якою здебільшого *нехтують*.

**Тип 2.** Ємність з *добрим перемішуванням всієї рідини*, температура якої залежить тільки від часу  $\theta_1 = f(t)$ . Їй відповідає модель *повного перемішування*, яку ще називають моделлю з *зосередженими параметрами*. В такій моделі параметр стану *залежить тільки від часу* і приймається незалежним від просторової координати.

Тепловий баланс

$$V\rho c(d\theta_1/dt) = Gc(\theta_0 - \theta_1) + \alpha S(\theta_3 - \theta_1), \quad (11.4)$$

де  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  – температури рідини на вході та виході і стінки,

$G$  – витрата рідини,

$\rho$ ,  $c$  – густина і питома теплоємність рідини,

$S$  – площа поверхні теплообміну.

В операторній формі після перетворення  $t \rightarrow p$  рівняння (11.4):

$$(Tp + 1)\theta_1(p) = K_{01}\theta_0(p) + K_{31}\theta_3(p) \quad (11.5)$$

де  $T = V\rho c / (Gc + \alpha S)$ ,

$K_{01} = Gc / (Gc + \alpha S)$ ,

$K_{31} = \alpha S / (Gc + \alpha S)$ .

**Тип 3.** Ємність потоку рідини, що *не перемішується в напрямку руху*, а температура рідини залежить від часу  $t$  і від просторової координати  $x$  в напрямку руху  $\Theta(t, x)$ . Це модель *повного витіснення* або її ще називають моделлю з *одномірною розподіленими параметрами*.

*Додаткові припущення:*

1. Рух рідини розглядається як *одно направлений*, вводиться *єдина просторова координата*  $x$ , вісь якої направлена *по течії* гріючої рідини;
2. *Швидкість і температура рідини однакові* в будь-якій площині, *перпендикулярній* до осі течії (прямокутний профіль швидкості  $v$  і температури  $\Theta$  по перерізу потоку);
3. Природна *конвекція* в рідині і *передача тепла в напрямку руху відсутні* (при  $Re < 500000$  повздовжня дифузія мало впливає на теплообмін).

Рівняння *теплого балансу* для елемента  $\Delta x$ :

$$s\Delta x\rho c(\Delta\Theta_1/\Delta t) = sv\rho c\Theta_1 - sv\rho c(\Theta_1 + \Delta\Theta_1) + \alpha P\Delta x(\Theta_3 - \Theta_1) \quad (11.6)$$

де  $\alpha$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_3$  – коефіцієнт теплопередачі, температури середовища в потоці і стінки,

$s$  – площа поперечного перерізу потоку рідини,

$v$  – швидкість потоку рідини,

$\rho$ ,  $c$  – густина і питома теплоємність рідини,

$P$  – периметр потоку рідини.

Після ділення обох частин на  $\Delta x(svpc)$ , введення позначень і перетворення за Лапласом змінної часу  $t \rightarrow p$  отримаємо в операторній формі (в зображеннях змінних):

$$(d\theta_1(p,x)/dt) + (\tau p + a_{31}) \theta_1(p,x) = a_{31}\theta_3(p,x) \quad (11.7)$$

де  $\tau = 1/v$  і  $a_{31} = \alpha P/(svpc)$ .

**Тип 4.** Ємність потоку рідини, температура якої *лінійно змінюється по довжині* апарату в напрямку руху середовища (проміжна модель або математична модель з лінійно-розподіленими параметрами).

Моделями з зосередженими параметрами *в широкому розумінні* називають такі, в яких параметри стану залежать тільки від часу і в яких присутні *звичайні диференціальні рівняння*.

Тепловий баланс для ємності з речовиною, що акумулює тепло:

$$V\rho c \frac{d}{dt} \left( \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \right) = Gc\theta_0 - Gc\theta_1 + \alpha S (\theta_3 - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}) \quad (11.8)$$

де  $\theta_0, \theta_1, \theta_3$ - температури рідини на вході та виході і температура стінки;

$S$  – площа поверхні теплообміну,

$G$  – витрата рідини.

Після перетворення за Лапласом  $t \rightarrow p$  отримаємо:

$$(Tp + 1)\theta_1(p) = - (Tp - K_{01})\theta_0(p) + K_{31}\theta_3(p) \quad (11.9)$$

де  $T = V\rho c/(2Gc + \alpha S)$ ,

$K_{01} = (2Gc - \alpha S)/(2Gc + \alpha S)$ ,

$K_{31} = 2\alpha S/(2Gc + \alpha S)$ .

В цьому випадку ємність акумулювання тепла описується звичайним диференціальним рівнянням, хоча припускалася лінійна зміна температури середовища від входу до виходу

### Тип 5. Ємність *проміжної або загороджувальної стінки.*

Розглянемо теплообмін через плоску стінку в декартовій системі координат, де середовище 1 рухається в напрямі осі  $x$ , вісь  $y$  направлена перпендикулярно стінці в напрямку теплового потоку ( $\theta_1 > \theta_3 > \theta_2$ ), з середовища 1 в середовище 2, яке рухається в напрямку  $x$  (прямоток) або  $-x$  (протиток). При таких умовах слід розглядати три ємності акумулювання тепла: ємності середовищ 1 і 2, а також плоскої стінки 3, що їх розділяє. Нас цікавить баланс тепла для ємності стінки, яка його акумулює.

#### *Тип 5.1 Тонка стінка .*

Для *тонкої стінки* зміна температури за її товщиною невелика, нею нехтують вважаючи, що стан стінки характеризується тільки її середньою температурою, як і кількість акумульованого тепла. Це припущення за змістом відповідає дуже великій теплопровідності матеріалу стінки.

Тепловий баланс елементу  $\Delta x$  *тонкої стінки* шириною  $l$  і товщиною  $\delta$  з її середньою температурою  $\theta_3$

$$S_3 \Delta x \rho_3 c (\Delta \theta_3 / \Delta t) = \alpha_1 \Delta x (\theta_1 - \theta_3) - \alpha_2 \Delta x (\theta_3 - \theta_2) \quad (11.10)$$

де  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  – температури середовищ 1 і 2 а також стінки  $\theta_3$ ;

$\alpha_1, \alpha_2$  – коефіцієнти тепловіддачі від середовища 1 до стінки і від стінки до середовища 2 відповідно;

$S_3 = l \cdot \delta$  – площа поперечного перерізу стінки;

$\rho_3, c$  – густина і питома теплоємність матеріалу стінки

Після скорочення на  $\Delta x$ , перетворення за Лапласом  $t \rightarrow p$  і приведення до канонічного виду отримаємо:

$$(T_3 p + 1) \theta_3(p) = a_{13} \theta_1(p) + a_{23} \theta_2(p) \quad (11.11)$$

де  $a_{13} = \alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2)$ ;

$a_{23} = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)$ ;

$T_3 = \delta \rho_3 c / (\alpha_1 + \alpha_2)$ .

Якщо і  $\theta_1(t)$  і  $\theta_2(t)$  є функціями тільки часу, то і  $\theta_3(t)$  теж буде функцією тільки часу  $t$ , а диференціальне рівняння аналог рівнянню в зображеннях змінних (11.11) буде звичайним диференціальним рівнянням, а отже і типова ємність акумулювання тепла тонкою стінкою буде представлена моделлю з зосередженими параметрами.

Якщо хоча б одне з середовищ має температуру, що залежить не тільки від часу, а і просторової координати ( $\theta_1(t, x)$  або  $\theta_2(t, x)$ ), то і температура тонкої стінки  $\theta_3$  теж буде залежати як від часу, так і просторової координати  $\theta_3(t, x)$ . В цьому випадку диференціальне рівняння аналог рівнянню в зображеннях змінних (11.11) буде диференціальним рівнянням в частинних похідних відносно аргументів  $t$  і  $x$ .

**Тип 5.2 Товста стінка.** Для товстої стінки характерною є значна зміна температури в напрямку потоку тепла. Розглянемо випадок, коли потік тепла є нормальним до поверхні стінки постійної товщини і відповідає осі  $y$  декартової системи координат. В цьому випадку будемо мати одномірне розподілення температури стінки за віссю  $y$ .

Розглянемо тепловий баланс елементу стінки розміром  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , при тепловому потоку через стінку тільки в напрямку  $y$ , зумовлений теплопровідністю матеріалу стінки  $\lambda$ .

Тепловий потік, що прийшов з середовища 1 до середовища 2 через площу  $dx \cdot dz$  елементу стінки об'ємом  $dV$  в напрямку осі  $y$  залежить від:

- теплопровідності стінки  $\lambda$ ,
- градієнту температури в напрямку осі  $y$ :  $-\partial\theta_3(y)/\partial y$ ,
- площі поверхні теплообміну  $dx \cdot dz$  :

$$Q(y,t) = -\lambda(d\theta_3(y,t)/dy)dx dz \quad (11.12)$$

де  $\theta_3(y)$  – температура стінки в об'ємі  $dV$ .

Тепловий потік, що вийшов з елемента стінки об'ємом  $dV$  в напрямку осі  $y$

$$Q(y + dy, t) = Q(y, t) + (\partial Q(y, t) / \partial y) dy \quad (11.13)$$

Враховуючи (11.12) значення частинної похідної  $\partial Q(x) / \partial x$  є:

$$\partial Q(y, t) / \partial y = \partial [ - \lambda (\partial \theta_3(y, t) / \partial y) dx dz ] / \partial y = - \lambda (\partial^2 \theta_3(y, t) / \partial y^2) dx dz \quad (11.14)$$

Кількість тепла  $Q_{ак} (y, t)$ , що акумулювалося в об'ємі  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  внаслідок зміни температури  $d\theta_3(y, t)$ , визначається зміною в часі :

його об'єму  $V$ ,

густини  $\rho$ ,

питомої теплоємності матеріалу стінки  $c$ ,

температури  $\theta_3(y, t)$ :

$$Q_{ак} (y, t) = \partial [dV \rho \cdot c \cdot \theta_3(y, t)] / \partial t = \rho \cdot c [\partial \theta_3(y, t) / \partial t] dx \cdot dy \cdot dz \quad (11.15)$$

Баланс тепла для об'єму  $dV$  товстої стінки:

$$Q(y, t) - Q(y + dy, t) = Q_{ак} (y, t) . \quad (11.16)$$

Звідки

$$Q(y, t) - Q(y, t) - (\partial Q(y, t) / \partial y) dy = Q_{ак} (y, t);$$

Враховуючи (11.14) і (11.15), отримаємо

$$\lambda (\partial^2 \theta_3(y, t) / \partial y^2) dx dy dz = \rho \cdot c [\partial \theta_3(y, t) / \partial t] dx \cdot dy \cdot dz, \quad (11.17)$$

Остаточню

$$\lambda (\partial^2 \theta_3(y, t) / \partial y^2) = \rho \cdot c \cdot (\partial \theta_3(y, t) / \partial t) \quad (11.18)$$

$$(\partial^2 \theta_3(y, t) / \partial y^2) = (\rho \cdot c / \lambda) \cdot (\partial \theta_3(y, t) / \partial t) = a \cdot (\partial \theta_3(y, t) / \partial t), \quad (11.19)$$

де  $a = \rho \cdot c / \lambda$  – коефіцієнт *температуропровідності* матеріалу стінки.

Після перетворення за Лапласом  $t \rightarrow p$  при нульових початкових умовах рівняння (11.19) приймає вигляд

$$\partial^2 \theta_3(y, p) / \partial y^2 = a \cdot p \theta_3(y, p) \quad (11.20)$$

Температура ємності акумулювання у виді *товстої стінки* відображається моделлю з одномірно розподіленими параметрами (за координатою  $y$ ), якщо ємності акумулювання 1 і 2 розглядаються як об'єкти з зосередженими параметрами, і їх температури є функціями тільки часу, тобто  $\theta_1(t)$  і  $\theta_2(t)$ .

Якщо ємність акумулювання тепла хоча б одного з середовищ, яке контактує з цією стінкою і бере участь в теплообміні, розглядається як об'єкт з одномірно розподіленими параметрами, наприклад, по осі  $x$ , то теплова ємність стінки повинна розглядатися як об'єкт з двомірно розподіленими параметрами  $\theta_3(x, y, t)$ .

## 11.1 Об'єкти з зосередженими параметрами

Об'єкти з зосередженими параметрами передбачають можливість припущення про *одинакові значення параметрів стану* в межах виділеної ємності акумулювання.

Об'єктам з зосередженими параметрами найкраще відповідають ємності акумулювання, де відбуваються технологічні процеси *в циліндричних апаратах з сферичним дном* в умовах *інтенсивного* перемішування.

Деякі *фізичні процеси*, наприклад, конденсація чи випаровування, проходять *при постійній температурі* (при умові забезпечення постійного тиску). Такі ємності акумулювання теж розглядаються як об'єкти з зосередженими параметрами.

Параметри стану об'єктів з зосередженими параметрами є *функціями тільки часу* і не залежать від просторової координати.

Моделі об'єктів з зосередженими параметрами містять *звичайні диференційні* рівняння.

Для отримання динамічних характеристик такого конкретного технологічного об'єкту, що складається тільки з однієї ємності акумулювання тепла, необхідно розв'язати *одне звичайне диференційне* рівняння. Якщо в об'єкті присутні *n* ємностей акумулювання, то будемо мати систему рівнянь, що складається з *n* звичайних диференційних рівнянь,

*Одна і та ж фізична ємність* може бути ємністю, що акумулює і теплову енергію (визначальний параметр – температура) і матерію (визначальний параметр – рівень рідини чи сипучого в апараті, а для газу – тиск в ньому), і компонент (визначальний параметр - концентрація компоненту в розчині чи суміші). Можуть також мати місце одна або дві з наведених фізичних сутностей. Наприклад, ємність розчину в кубі ректифікаційної колони може акумулювати одночасно і матерію (параметр стану - рівень рідини) і теплову енергію (параметр стану – температура).

Кількість диференціальних рівнянь в системі рівнянь математичної моделі і їх порядок визначають **кількість початкових умов**, що необхідна для розв'язання цієї системи. Початкові умови складають значення параметрів стану в момент нанесення збурення, тобто при  $t = 0$ . Здебільшого використовують т. зв. **нульові початкові умови**, при яких як параметри стану, так і всі їх похідні за часом дорівнюють нулю. Це відповідає умовам утворення **математичної моделі у відхиленнях** від номінального статичного режиму.

Розглянемо типові ємності акумулювання тепла, наведені на рис. 11.1, що описуються звичайними диференціальними рівняннями, з точки зору моделей об'єктів з зосередженими параметрами.

Типові **ємності акумулювання тепла 1 і 2**, належать до об'єктів з зосередженими параметрами і процес теплопередачі в них описується звичайним диференціальним рівнянням. Визначальний параметр (параметр стану) – температура.

Типова **ємність акумулювання тепла 4** хоч і описується звичайним диференціальним рівнянням, але передбачає одномірне **лінійне розподілення** параметру стану – температури. Припущення, при якому рушійна сила процесу теплопередачі є середньо арифметичне її значення на вході і виході апарату, визиває безпосередній вплив вхідної температури середовища на її значення на виході апарату, без її участі в процесі теплообміну. Таке припущення приводить до деякого викривлення (деформації) початкової ділянки перехідної характеристики, оскільки збурення чи керування, що поступають на вхід об'єкта, будучи автоматично одночасно, хоч і частково (з коефіцієнтом 0,5), представлені в швидкості процесу, істотно впливають на вихідну величину, особливо на високих частотах.

Типова *модель тонкої стінки 5.1 як ємності акумулювання тепла* описується звичайним диференціальним рівнянням і є моделлю з зосередженими параметрами при умові, що ємності акумулювання 1 і 2 є об'єктами з зосередженими параметрами, тобто їх параметри стану – температури – є функціями тільки часу і описуються звичайними диференціальними рівняннями. Тобто якщо є  $\theta_1(t)$  і  $\theta_2(t)$ , то для тонкої стінки її температура  $\theta_3(t)$  залежить тільки від часу.

Моделі з зосередженими параметрами описуються звичайними диференціальними рівняннями. Розв'язання системи таких рівнянь для багато ємнісного об'єкту може відбуватися:

або класичним методом, якщо початкова система є лінійною відносно наявних змінних;

або після лінеаризації нелінійної системи диференціальних рівнянь з використанням класичного методу (при невеликій кількості параметрів стану) або з використанням операторного методу (при практично необмеженій кількості параметрів стану);

або за рахунок перетворення диференціальних рівнянь в кінцево-різницеві співвідношення (дискретне перетворення рівнянь динаміки) і отримання результату в цифровому вигляді.

## 11.2. Особливості моделювання об'єктів з розподіленими параметрами

Для об'єктів з просторово розподіленими параметрами притаманною є *зміна параметрів стану як в просторі, так і в часі*. Знехтування їх зміною в просторі, як це присутнє в об'єктах з зосередженими параметрами, веде до значних втрат в точності відображення процесів в такому об'єкті.

При *складанні рівнянь балансів* для об'єктів з розподіленими параметрами характерним є виділення *безмежно малих за розміром* фізичних ємностей акумулювання, в межах яких припускається постійне значення параметрів стану в напрямках вибраної просторової системи координат. Реальна просторова зміна параметру стану має безперервний характер. Ця зміна визначається частинною похідною від параметра стану по конкретній просторовій координаті.

Припущення при складанні рівнянь балансів для ємностей акумулювання з розподіленими параметрами повинні враховувати *напрямок зміни параметра стану*, що передбачає одновимірне (в напрямку однієї осі просторових координат), двовимірне (в напрямку двох осей) чи тривимірне розподілення параметру стану.

Вибір просторової системи координат (наприклад, декартової, циліндричної чи сферичної) залежить від *напрямку матеріальних та/чи енергетичних* (теплого, механічного, радіаційного і т. п.) *потоків* в об'єкті моделювання. В значній мірі він залежить як від геометрії самого об'єкту, так і від напрямку матеріальних чи енергетичних потоків в ньому.

Наприклад, ємності 3 на рис.11.1 згідно прийнятим допущенням притаманне *одновимірне розподілення* температури в напрямку руху потоку рідини  $\theta_0(x)$  в статичному режимі. Індекс «0» вказує на статичний режим. В динамічному режимі додається фактор часу  $t$ , тому маємо для одновимірно розподіленої температури в потоці рідини  $\theta(t, x)$ .

Якщо врахувати і потік тепла в напрямку від теплообмінної поверхні до центру матеріального потоку, то для трубчатої поверхні теплообміну як границі ємності акумулювання треба застосувати циліндричну систему координат з двовимірним розподіленням температур (за напрямком руху потоку  $x$  і за радіусом  $r$  в кожному перетині  $x$ ). Для двовимірного розподілення температур при трубчатій поверхні теплообміну в статичному режимі будемо мати  $\theta_0(x, r)$ , а в динамічному режимі  $\theta(t, x, r)$ .

Аналогічно для трьохвимірного розподілення визначального параметру (для теплообміну це температура в безконечно малій ємності акумулювання тепла розміром  $v = dx \cdot dy \cdot dz$  для декартової системи координат) в статиці визначальний параметр (параметр стану) визначається як  $\theta_0(x, y, z)$ , а в динаміці  $\theta(t, x, y, z)$ .

**Вибір форми і розміру** безконечно малої ємності акумулювання, а також системи координат та її розташування в значній мірі залежить як від геометричної форми об'єкта моделювання, так і від напрямку матеріальних і енергетичних потоків в ньому.

Математичні моделі об'єктів з розподіленими параметрами складені з **диференційних рівнянь в частинних похідних** як за просторовою координатою (для балансних рівнянь статички), так ще додатково і за часом (для балансних рівнянь динаміки).

Для розв'язання диференційних рівнянь математичної моделі в частинних похідних, **крім початкових** умов (як для об'єктів з зосередженими параметрами), потрібні ще і **граничні умови**.

**Початкові умови** відповідають значенням параметрів стану в момент нанесення збурення. Звичайно використовують **нульові початкові умови**, як для об'єктів з зосередженими параметрами. Різниця полягає в тому, що початкові умови є також розподіленими в використовуваних просторових координатах.

Для *одновимірного* розподілення параметрів стану по осі  $x$  температура середовища є  $\theta(t, x)$ . Початкові умови складатимуть  $\theta(t, x)|_{t=0} = \theta_0(0, x)$ .

Для *двовимірного* розподілення параметру стану температури  $\theta$  С вона складатиме  $\theta(t, x, y)$ , з початковими умовами  $\theta(t, x, y)|_{t=0} = \theta_0(0, x, y)$ , тобто початкове (при  $t = 0$ ) двовимірне розподілення температури  $\theta_0(0, x, y)$ .

**Граничні умови** відображають зв'язок параметра стану з зовнішнім середовищем на границі об'єкта моделювання. Цей зв'язок визначається тими фізичними чи хімічними процесами, які відбуваються на границях об'єкту моделювання.

Наприклад, для процесів теплообміну використовують граничні умови чотирьох родів:

- граничні умови *першого роду* задають значення параметру стану  $\theta(t, x)$  на границях (межах) об'єкту від  $x = 0$  до  $x = l$ :

$$\theta(t, x)|_{x=0} = \theta(t, 0) \quad (11.21)$$

$$\theta(t, x)|_{x=l} = \theta(t, l) \quad (11.22)$$

- граничні умови *другого роду* задають значення теплового потоку на границях об'єкта:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = q(t) \quad (11.23)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,

$q(t)$  – тепловий потік.

Знак мінус вказує на напрямок теплового потоку протилежний градієнту температури.

- граничні умови *третього роду* відповідають конвективному теплообміну між різними середовищами, наприклад, стінкою і потоком рідини чи газу:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(t,x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \alpha [\theta(t,x) \Big|_{x=x_0} - \theta_I(t)] \quad (11.24)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,

$\theta_I(t)$  – температура середовища, яке контактує з об'єктом.

- граничні умови *четвертого роду* відповідають теплообміну двох суміжних твердих тіл, які мають однакові температури і теплові потоки на границі контакту:

$$\theta(t,x) \Big|_{x=x_1} = \theta_I(t,x) \Big|_{x=x_1} \quad (11.25)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(t,x)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = -\lambda \frac{\partial \theta_1(t,x)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \quad (11.26)$$

Для отримання *статичних характеристик* необхідно розв'язати рівняння статичного режиму, яке можна отримати з рівняння динаміки, прийнявши, що похідні параметрів стану за часом дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial \theta(t,x,y)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (11.27)$$

Таким чином для об'єкта з *одновимірним розподіленням* параметрів диференціальне рівняння *в частинних похідних* для *динамічного режиму* перетворюється *в звичайне* диференціальне рівняння для *статичного режиму*, де параметр стану є функцією *тільки однієї* просторової координати.

Розглянемо типові ємності акумулювання тепла, розрахункові схеми яких наведені на рис.11.1, з точки зору об'єктів з просторово розподіленими параметрами.

**Ємність 3** відповідає тепловій ємності матеріального потоку, що рухається в напрямку осі  $x$  і знаходиться в стані конвективного теплообміну з нерухомою стінкою. Стан такої ємності описується диференціальним рівнянням в частинних похідних відносно просторової координати  $x$  і часу  $t$ . Така ємність акумулювання тепла є об'єктом з **одновимірною розподіленими параметрами**.

Якщо припустити зміну температури в середовищі за радіусом труби  $r$  за рахунок теплопровідності матеріалу, що рухається в напрямку осі  $x$ , і градієнту температури в напрямку від центру трубопроводу до стінки, то температура такого середовища в циліндричній системі координат буде залежати від двох просторових координат  $x$  і  $r$  і часу  $t$ , тобто  $\theta(t, x, r)$ . Така ємність 3 буде об'єктом з **двовимірним розподіленням параметрів**, за кількістю просторових координат.

Якщо припустити добре перемішування середовища в кожному перерізі трубопроводу, що приводить до залежності температури тільки від часу  $t$  і координати в напрямку переміщення середовища  $x$ , то повернемося до об'єкту з **одновимірною розподіленими параметрами**.

**Вибір системи координат** залежить від

- **конфігурації** апарату,
- **напрямку руху середовищ**, які беруть участь в теплообміні,
- **напрямку** зміни параметру стану,
- **припущень** відносно фізичних особливостей технологічного процесу.

**Ємність акумулювання тепла 4**, хоч і має припущення про лінійний характер зміни параметра стану (температури) від входу матеріального потоку в апарат до його виходу, зате баланс тепла описується лінійним диференціальним рівнянням, при цьому швидкість потоку повинна бути постійною, тобто постійна і об'ємна витрата середовища, яку іноді називають об'ємною швидкістю..

Якщо вхідною величиною (керування або збурення) є швидкість потоку (лінійна чи об'ємна), то будемо мати *нелінійне диференційне рівняння*, яке вимагатиме лінеаризації для визначення передатної функції за відповідним динамічним каналом.

Ємність акумулювання тепла *тонкої стінки 5.1* є об'єктом з розподіленими параметрами, якщо хоча б одне із середовищ 1 чи 2 є об'єктом з розподіленими параметрами. Розмірність розподілення параметрів (одно-, дво- чи тривимірне) відповідає *найбільшій розмірності* розподілення параметрів середовищ 1 або 2.

Ємність акумулювання тепла *товстої стінки 5.2* завжди буде відповідати об'єкту з *розподіленими параметрами*. Він буде одновимірним, якщо ємності акумулювання тепла 1 і 2 є об'єктами з зосередженими параметрами. *Двовимірним*, якщо теплова ємність хоча б одного із середовищ 1 чи 2 є об'єктом з одновимірно розподіленими параметрами і *тривимірним*, якщо теплова ємність хоча б одного із середовищ 1 чи 2 є об'єктом з *двовимірно* розподіленими параметрами.

Як передатні функції, так і перехідні характеристики для об'єктів з розподіленими параметрами пов'язані з розв'язанням диференційних рівнянь в частинних похідних.

Якщо рівняння *статики* для об'єкта з *одновимірно розподіленим* параметром  $\theta(t, x)$  перетворюється в звичайне диференційне рівняння відносно  $\theta_0(x)$  з відомими способами його розв'язання, то *для рівнянь динаміки*, де  $\theta(t, x)$  при присутності *частинних* похідних, їх розв'язання в *загальному (явному)* виді пов'язане з виконанням послідовності наступних процедур:

- лінеаризація рівняння динаміки,

- перетворення за Лапласом змінної часу  $t \rightarrow p$  і перетворення параметру стану в функцію двох змінних  $\theta(p,x)$ , при цьому граничні умови теж стають функціями цих двох змінних  $(p,x)$ ,
- розв'язання звичайного диференційного рівняння, в яке перетворилося диференційне рівняння в частинних похідних для об'єкта з одномірно розподіленими параметрами, відносно  $\theta(p,x)$  і отримання передатної функції як коефіцієнта при відповідній вхідній величині,
- отримання перехідної характеристики за вже тепер відомою передатною функцією.

Якщо параметр стану є функцією двох просторових координат  $\theta(t,x,y)$ , то розв'язання рівняння чи системи рівнянь можна отримати багатократним застосуванням перетворення змінних за Лапласом, наприклад, спочатку при  $t \rightarrow p$  маємо  $\theta(t,x,y) \rightarrow \theta(p,x,y)$ , потім при  $x \rightarrow s$  отримаємо перетворений параметр стану  $\theta(p,x,y) \rightarrow \theta(p,s,y)$  і відповідне звичайне диференційне рівняння. Якщо це рівняння важко розв'язати, то можна застосувати і потрібне перетворення за Лапласом з потребою розв'язати *лінійне алгебричне рівняння* відомими методами.

Зворотним перетворенням за Лапласом отримуємо потрібні динамічні показники.

Для отримання перехідних характеристик в цифровому виді з використанням обчислювальної техніки використовують *дискретне представлення рівнянь динаміки об'єктів з розподіленими параметрами*. Цей метод передбачає перетворення диференційних рівнянь в частинних похідних в кінцево-різницеві рівняння з наступним послідовним розв'язанням відповідних рекурентних співвідношень. Ці процедури займають багато машинного часу і не можуть бути використаними при керуванні реальним об'єктом в режимі реального часу, але можуть бути застосованими для наукових досліджень на стадії проектування систем керування.

Передатні функції для лінійних об'єктів з одномірно розподіленими параметрами, отримані класичним методом розв'язання лінійних диференційних рівнянь 1-го порядку, містять чисте запізнення, що затрудняє одержання перехідних характеристик.

Апроксимація експоненти на відношення двох поліномів дає можливість отримати перехідні характеристики на основі передатних функцій.

Якщо в лінійних об'єктах присутні процеси, що вимагають застосування лінійних диференційних рівнянь 2-го порядку (наприклад, теплопровідність чи дифузія), то в передатних функціях pojawiaються гіперболічні синус і косинус, які складно апроксимувати будь-яким співвідношенням поліномів.

В такому випадку єдиним способом отримання перехідних характеристик є безпосереднє розв'язання нелінійних диференційних рівнянь є використання рівняння чи системи рівнянь до дискретного виду з наступним його розв'язанням за допомогою стандартних підпрограм в різних додатках Матлаб. При цьому втрачається можливість аналізу впливу окремих факторів технологічного процесу на динамічні властивості ТОК. Це можливе лишень при багатократних отриманнях результатів при різних початкових чи/і граничних умовах. і є предметом наукових досліджень.

В зв'язку з цим досі не втрачає актуальність інтерпретація об'єктів з розподіленими параметрами деякою сукупністю об'єктів з зосередженими параметрами з різними способами їх взаємодії, зокрема, кількість таких об'єктів, їх властивості та способи взаємного зв'язку. При цьому критерієм можуть послужити різні види представлення динамічних властивостей складних об'єктів і перетворення їх структурних схем в еквівалентні структурні схеми з точки зору динамічних властивостей або хоча б апроксимація з наперед заданою точністю.

## Приклад складання математичної моделі в розмірних величинах для процесу абсорбції

### 1. Процес абсорбції як технологічний об'єкт керування (ТОК)

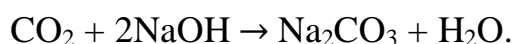
**Короткий опис технології:** Абсорбція – вбирання газів всім об'ємом рідини яка є абсорбентом. Абсорбція – основа технологічних процесів вилучення парів води, вуглеводневих компонентів, сірчаних сполук з потоків природного та синтетичного газів, очищення (знешкодження) газових викидів з метою охорони довкілля.

Для реалізації абсорбції використовують спеціальні апарати – абсорбери; абсорбційне очищення газів відбувається у скруберах – апаратах зі зрошенням водою, суспензією або спеціальним розчином.

При отриманні ацетилену ( $C_2H_2$ ) із газів процесу електропіролізу метану необхідним етапом є очищення його від домішок. Концентрація  $CO_2$  в ацетилені характеризує якість продукції. Вилучення  $CO_2$  із ацетилену на заключній стадії його виробництва відбувається в скрубєрі шляхом його абсорбції розчином лугу (в цілому процес хемосорбції).

Скрубєр розглядається як технологічний об'єкт керування концентрацією  $CO_2$  в ацетилені на його виході. Ця концентрація є оцінкою результату очищення газової суміші від  $CO_2$ .

Очищення ацетилену складається з двох етапів. На першому етапі відбувається абсорбція  $CO_2$  водним розчином лугу, а на другому – сама реакція зв'язування  $CO_2$  лугом:



Оскільки швидкість хімічної реакції значно більша від швидкості абсорбції, то лімітуючим процесом є абсорбція  $CO_2$ , яка і розглянута. При цьому під концентрацією  $CO_2$  в розчині розуміється концентрація  $CO_2$  в пограничному з газом шарі розчину.

До нижньої частини скрубера надходить охолоджена газова суміш ацетилену та вуглекислого газу з витратою  $F_{gex} = 100$  кг/год та початковою концентрацією  $\text{CO}_2$  у ацетилені,  $y_0 = 3\%$ .

Ця суміш рівномірно розподіляється по перетині колони і надходить на контактні елементи (насадку).

У верхню частину колони подають 0,5 % розчин лугу (NaOH) з витратою  $F_r$  та концентрацією двоокису вуглецю практично  $x_0 = 0\%$ . У колоні здійснюється протиточна взаємодія газу та рідини. Стікаючи по насадці вниз, розчин NaOH з витратою  $F_r$ , вилучає  $\text{CO}_2$  із суміші ацетилену з  $\text{CO}_2$  (відбувається процес абсорбції) та виходить зі скрубера з концентрацією  $\text{CO}_2$  у ньому  $x_1$ .

**Задача керування** – отримати газ, очищений від  $\text{CO}_2$ , тобто з заданою концентрацією  $\text{CO}_2$  на виході з абсорбера  $y_1$ .

**Структурно-параметрична схема** об'єкта наведена на рис. Д1.1.

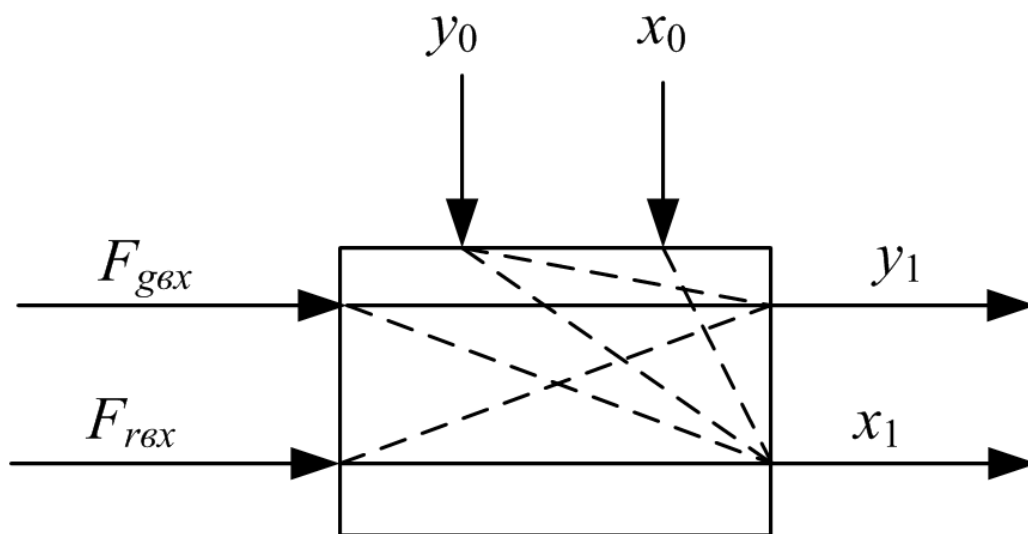


Рис. Д1.1 Структурно-параметрична схема об'єкта, де  $F_{gex} = F_g$  – витрата газової суміші ацетилену та вуглекислого газу;  $F_{rgx} = F_r$  – витрата розчину лугу;  $y_0$  – початкова концентрація  $\text{CO}_2$  у газовій суміші;  $y_1$  – концентрація  $\text{CO}_2$  в газовій суміші на виході;  $x_0$  – концентрація  $\text{CO}_2$  у розчині на вході;  $x_1$  – концентрація  $\text{CO}_2$  в пограничному шарі розчину на виході.

В скрубер поступають і беруть участь в процесі абсорбції два основні матеріальні потоки: газова суміш ацетилену і вуглекислого газу витратою  $F_g$  з концентрацією  $\text{CO}_2$  в ній  $y_0$  та розчин лугу витратою  $F_r$  з концентрацією  $\text{CO}_2$  у ньому  $x_0$ .

В процесі абсорбції частина  $\text{CO}_2$  з газу переходить в рідину, внаслідок чого на виході з скрубера концентрація  $\text{CO}_2$  в газі зменшується і складає  $y_1$ , а концентрація  $\text{CO}_2$  в рідині зростає до  $x_1$ .

Основна *регульована величина*, що оцінює якість процесу в апараті: концентрація  $\text{CO}_2$  в газовій суміші *на виході з абсорбера*  $y_1$ .

*Керування*: витрата луку *на вході* в абсорбер  $F_r$  (розчин вилучає  $\text{CO}_2$  із газової суміші).

Основне *збурення*: витрата газової суміші на вході в абсорбер  $F_{gex}$ .

*Проміжна змінна (параметр стану)* : концентрація  $\text{CO}_2$  у розчині на виході з абсорбера  $x_1$ .

На рис. Д1.2 зображена структурно-параметрична схема досліджуваних динамічних каналів.

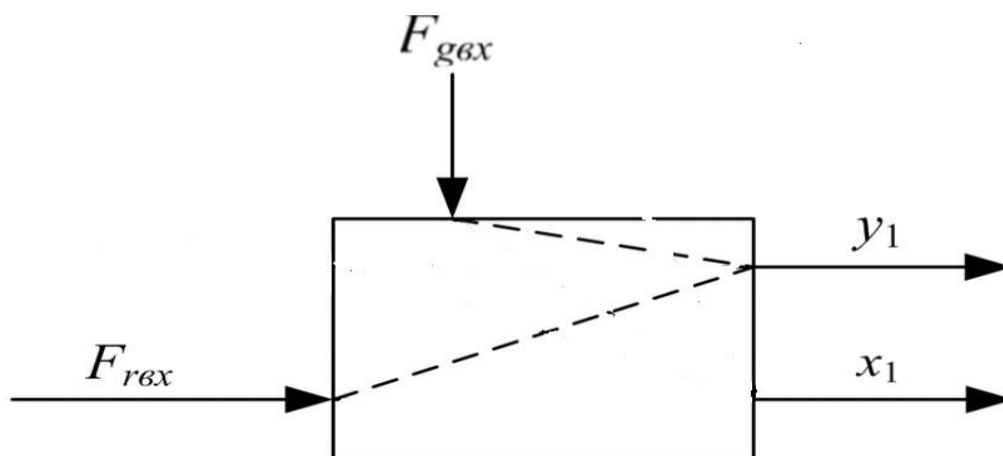


Рис. Д1.2 Структурно-параметрична схема досліджуваних динамічних каналів

*Основні ємності акумулювання  $\text{CO}_2$*  : –

1. *газова ємність* суміші ацетилену і  $\text{CO}_2$  в абсорбері;
2. *ємність розчину* в абсорбері.

*Прийняті припущення* при складанні рівнянь *балансів за компонентом  $\text{CO}_2$*  для виділених ємностей акумулювання:

1. Температура і тиск в апараті постійні;

2. Теплофізичні параметри середовищ (газу і рідини) в апараті постійні;

3. Кількість  $\text{CO}_2$ , що відійшла з газової фази, дорівнює кількості  $\text{CO}_2$ , що поступила в рідину;

4. Одномірний (в напрямку руху газового потоку) лінійний розподіл концентрацій  $\text{CO}_2$  в газовій і пограничному шарі рідинної фази;

5. Швидкість процесу абсорбції пропорційна різниці поточної і рівноважної концентрацій  $\text{CO}_2$  в газі та пограничному шарі розчину;

6. Діюча сила процесу абсорбції в апараті – це її середньоарифметичне значення в нижній і верхній частинах абсорбера;

7. Об'єм апарату, зайнятий насадкою, розчином і газом, як і площа поверхні контакту газ – розчин, – постійні;

8. Для рівноважних концентрацій  $y_r(x)$  справедливий закон Генрі:

$$y_r(x) = mx, \quad (\text{Д1.1})$$

де  $y_r(x)$  – концентрація  $\text{CO}_2$  в газі, рівноважна до концентрації  $\text{CO}_2$  в пограничному шарі розчину  $x$ ;

$m$  - постійна Генрі для конкретної пари газ-рідина.

9. Із газової суміші в рідину абсорбується тільки  $\text{CO}_2$ .

Розрахункова схема об'єкта наведена на рис. Д1.3.

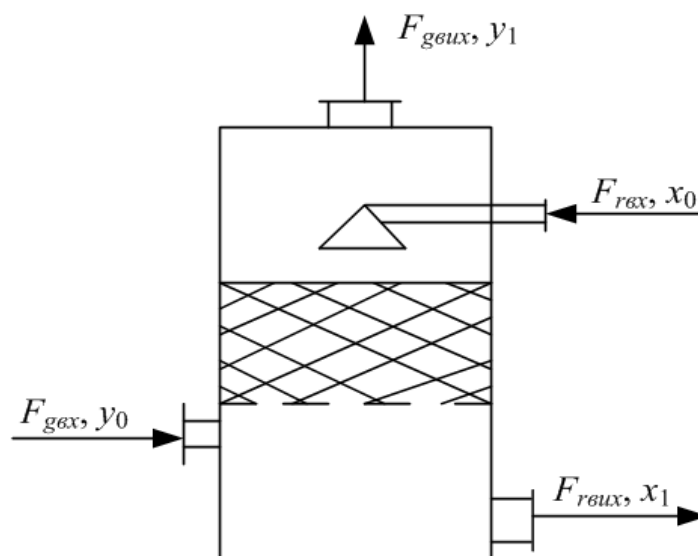


Рис. Д1.3 Розрахункова схема абсорбера

## 2. Складання математичної моделі ТОК на базі матеріальних балансів за CO<sub>2</sub>

*Складання рівнянь балансів за компонентом – CO<sub>2</sub>* - для двох основних *ємностей акумулювання* CO<sub>2</sub> – газової і рідинної - відбувається з врахуванням концентрації CO<sub>2</sub> в матеріальних потоках, наведених на розрахунковій схемі (рис.Д1.3), напрямку їх руху та потоку абсорбованого CO<sub>2</sub>.

*Складові рівнянь балансів* для основних *ємностей акумулювання* CO<sub>2</sub> в абсорбері:

1. *газова ємність* суміші ацетилену і CO<sub>2</sub> в абсорбері:

- кількість CO<sub>2</sub>, що прийшла з газовим потоком на вході в апарат  $F_g y_0$ ,
- кількість CO<sub>2</sub>, що відійшла з газовим потоком на виході з апарату  $(F_g - F_{ga}) y_1$ ,
- кількість CO<sub>2</sub>, що перейшла з газу в рідину в одиницю часу, враховуючи наведені вище припущення:

$$F_{ga} = SK_g \frac{(y_0 - y_r(x_1)) + (y_1 - y_r(x_0))}{2} = SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} \quad (\text{Д1.2})$$

- кількість CO<sub>2</sub>, що акумулювалася в газі  $V_g \rho_g \frac{d}{dt} \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right)$ ;

2. *ємність рідини* в абсорбері:

- кількість CO<sub>2</sub>, що прийшла з рідиною на входів апарат  $F_r x_0$ ,
- кількість CO<sub>2</sub>, що відійшла з апарату з рідиною  $(F_r + F_{ga}) x_1$ ,
- кількість CO<sub>2</sub>, що перейшла з газу в рідину  $F_{ga}$ ,
- кількість CO<sub>2</sub>, що акумулювалася в рідині  $V_r \rho_r \frac{d}{dt} \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$ .

де  $y_0, x_0$  – концентрації  $\text{CO}_2$  в газовій суміші та рідині на вході в апарат,  
 $y_1, x_1$  – концентрації  $\text{CO}_2$  в газовій суміші та рідині на виході з апарату,  
 $F_g, F_r$  – витрати газової суміші та рідини на вході в абсорбер,  
 $y_r(x_0), y_r(x_1)$  – рівноважні концентрації  $\text{CO}_2$  в газовій суміші на вході  
 рідини та на виході рідини з абсорбера;

$K_g$  – коефіцієнт масообміну з газової фази;

$S$  – поверхня масообміну в абсорбері;

$V_g, V_r$ , – об'єм абсорбера, зайнятий газом та відповідно розчином;

$\rho_g, \rho_r$ , – густини газової суміші та розчину;

$F_{ga}$  – витрата  $\text{CO}_2$ , що перейшла з газової суміші в рідину.

Рівняння балансу  $\text{CO}_2$  для газової ємності акумулювання  $\text{CO}_2$ :

$$F_g y_0 - (F_g - F_{ga}) y_1 - F_{ga} = V_g \rho_g \frac{d}{dt} \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right). \quad (\text{Д1.3})$$

Рівняння балансу  $\text{CO}_2$  для ємності акумулювання  $\text{CO}_2$  в рідині:

$$F_r x_0 - (F_r + F_{ga}) x_1 + F_{ga} = V_r \rho_r \frac{d}{dt} \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad (\text{Д1.4})$$

Система рівнянь (Д1.3) і (Д1.4) з врахуванням (Д1.2) (складає **математичну модель** процесу абсорбції **в розмірних величинах**).

З врахуванням (Д1.1) і (Д1.2) система рівнянь (Д1.3) і (Д1.4) прийме вигляд

$$F_g y_0 - \left( F_g - SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} \right) y_1 - SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} = V_g \rho_g \frac{d}{dt} \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right) \quad (\text{Д1.5})$$

$$F_r x_0 - \left( F_r + SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} \right) x_1 + SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} = V_r \rho_r \frac{d}{dt} \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad (\text{Д1.6})$$

Система рівнянь (Д1.5)-(Д1.6) є **математичною моделлю** динамічного режиму (динаміки) процесу абсорбції **в розмірних величинах**.

В системі рівнянь (Д1.5)-(Д1.6) присутні наступні **змінні величини**:

- **параметри стану** (вихідні величини):

регульована величина  $y_1$ ,

проміжна величина  $x_1$ ,

- **вхідні величини**:

керування  $F_r$ ,

збурення  $F_g$ .

Розв'язавши нелінійну систему диференціальних рівнянь (Д1.5)-(Д1.6) відносно регульованої величини  $y_1$  як функції  $F_r$  і  $F_g$ , одержимо аналітичний вираз залежності регульованої величини  $y_1$  від керування  $F_r$  і збурення  $F_g$ .

$$y_1(t) = f [F_r(t), F_g(t)] \quad (Д1.7)$$

**Перехідні характеристики** можна отримати шляхом розв'язання нелінійної системи диференціальних рівнянь (Д1.5)-(Д1.6) відносно  $y_1$  при одиничних значеннях  $I(t)$  керування або збурення відповідно:

$h_{Fr}(t) = f [I(t), F_{g0}]$  - перехідна характеристика за каналом керування  $F_r \rightarrow y_1$ ;

$h_{y0}(t) = f [F_{r0}, I(t)]$  - перехідна характеристика за каналом збурення  $F_g \rightarrow y_1$ ;

де  $F_{g0}$  і  $F_{r0}$  – постійні величини (значення в статичному режимі).

### 3. Параметри основного статичного режиму та перевірка розмірностей

Рівняння статичного режиму (статики) отримується з рівнянь динамічного режиму (динаміки) Д1.5- Д1.6 при нульових значеннях похідних усіх змінних за часом:

$$F_g y_0 - (F_g - F_{ga0}) y_{10} - SK_g \frac{(y_{00} - mx_{10}) + (y_{10} - mx_0)}{2} = 0 \quad (Д1.8)$$

$$F_{r0} x_0 - (F_{r0} + F_{ga0}) x_{10} + SK_g \frac{(y_{00} - mx_{10}) + (y_{10} - mx_0)}{2} = 0 \quad (Д1.9)$$

Для визначення коефіцієнтів рівнянь та передатних функцій використовуються значення параметрів в основному статичному режимі, які наведені в таблиці Д1.1.

## Параметри номінального (основного) статичного режиму

№ п/п	Назва параметру	Позначення	Одиниці вимірювання	Числове значення
1	Витрата газу (C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> та CO <sub>2</sub> ) на вході в абсорбер	$F_{g0}$	кг-газ/год	100
2	Витрата рідини (NaOH з CO <sub>2</sub> ) на вході в абсорбер	$F_{r0}$	кг-рід/год	1002,5
3	Концентрація CO <sub>2</sub> в газі на вході в абсорбер	$y_0$	кгCO <sub>2</sub> -газ / кг-газ	0,0300
4	Концентрація CO <sub>2</sub> в газі на виході з абсорбера	$y_{10}$	кгCO <sub>2</sub> -газ / кг-газ	0,0050
5	Концентрація CO <sub>2</sub> в рідині на вході в абсорбер	$x_0$	кгCO <sub>2</sub> -рід/ кг-рід	0
6	Концентрація CO <sub>2</sub> в рідині на виході з абсорбера	$x_{10}$	кгCO <sub>2</sub> -рід/ кг-рід	0,0025
7	Об'єм, який займає газ в абсорбері	$V_g$	м <sup>3</sup> -газ	3,92
8	Об'єм, який займає рідина в абсорбері	$V_r$	м <sup>3</sup> -рід	2
9	Густина газу	$\rho_g$	кг-газ/ м <sup>3</sup> -газ	1,190
10	Густина рідини	$\rho_r$	кг-рід/ м <sup>3</sup> -рід	1130
11	Кількість CO <sub>2</sub> , яка абсорбувалася рідиною з газу на одиницю рушійної сили в газовій фазі	$SK_g$	кг-газ/год	167,5
13	Постійна Генрі	$m$	кгCO <sub>2</sub> -газ· кг-рід/кг-газ·кгCO <sub>2</sub> -рід	2,00
14	Витрата CO <sub>2</sub> , абсорбованого рідиною	$F_{ga0}$	кгCO <sub>2</sub> -газ/год	2,51256

Додатковий індекс «0» присвоєно значенню величини в основному статичному режимі.

Перевірка *розмірностей складових* системи рівнянь (Д1.5) – (Д1.6):

для балансу CO<sub>2</sub> в газовій ємності його акумулювання

$$\left[ \frac{\text{кг-газ}}{\text{год}} \frac{\text{кгCO}_2\text{-газ}}{\text{кг-газ}} \right] - \left[ \frac{\text{кг-газ}}{\text{год}} \frac{\text{кгCO}_2\text{-газ}}{\text{кг-газ}} \right] - \left[ \frac{\text{кг-газ}}{\text{год}} \frac{\text{кгCO}_2\text{-газ}}{\text{кг-газ}} \right] = [\text{м}^3\text{-газ}] \cdot \left[ \frac{\text{кг-газ}}{\text{м}^3\text{-газ}} \right] \cdot \left[ \frac{\text{кгCO}_2\text{-газ}}{\text{кг-газ}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{год}} \right] = \left[ \frac{\text{кгCO}_2\text{-газ}}{\text{год}} \right]$$

для балансу CO<sub>2</sub> в рідинній ємності його акумулювання

$$\left[ \frac{\text{кг-рід}}{\text{год}} \cdot \frac{\text{кгCO}_2\text{-рід}}{\text{кг-рід}} \right] - \left[ \frac{\text{кг-рід}}{\text{год}} \cdot \frac{\text{кгCO}_2\text{-рід}}{\text{кг-рід}} \right] + \left[ \frac{\text{кгCO}_2\text{-рід}}{\text{год}} \right] = [\text{м}^3\text{-рід}] \cdot \left[ \frac{\text{кг-рід}}{\text{м}^3\text{-рід}} \right] \cdot \left[ \frac{\text{кгCO}_2\text{-рід}}{\text{кг-рід}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{год}} \right] = \left[ \frac{\text{кгCO}_2\text{-рід}}{\text{год}} \right].$$

Перевірка *відповідності значень величин* в номінальному (основному) статичному режимі *рівнянням статики* (рівняння Д1.8 і Д1.9):

Витрата CO<sub>2</sub>, що перейшла з газової суміші в розчин

$$F_{ga0} = SK_g \frac{(y_{00} - y_r(x_1)) + (y_1 - y_r(x_0))}{2} = 167,5 \cdot 0,5 \cdot (0,030 - 2 \cdot 0,0025 + 0,0050 - 2 \cdot 0) = 2,51256.$$

Рівняння Д1.8:

$$100 \cdot 0,030 - (100 - 2,51256) \cdot 0,0050 - 2,51256 = 0,0000028 \sim 0.$$

Рівняння Д1.9:

$$1002,5 \cdot 0 - (1002,5 + 2,51256) \cdot 0,0025 + 2,51256 = 0,0000286 \sim 0.$$

## Приклад отримання статичних і динамічних характеристик процесу абсорбції на основі математичної моделі

Математичну модель статички ТОК отримуємо з її математичної моделі динаміки внаслідок прийняття рівними нулю всіх похідних за часом.

Таким чином з математичної моделі процесу абсорбції в розмірних величинах (Додаток 1, система рівнянь Д1.8-Д1.9) отримуємо математичну модель статички:

$$F_g y_0 - (F_g - F_{ga0}) y_{10} - SK_g \frac{(y_{00} - mx_{10}) + (y_{10} - mx_0)}{2} = 0 \quad (Д2.1)$$

$$F_{r0} x_0 - (F_{r0} + F_{ga0}) x_{10} + SK_g \frac{(y_{00} - mx_{10}) + (y_{10} - mx_0)}{2} = 0 \quad (Д2.2)$$

Розв'язання системи рівнянь (Д2.1)-(Д2.2) відносно регульованої величини  $y_{10}$  як функції керування  $F_{r0}$  в статичному режимі дасть статичну характеристику за каналом керування  $F_{r0} \rightarrow y_{10}$ :

$$y_{10} = f_{кер}(F_{r0}) \quad (Д2.3)$$

Розв'язання системи рівнянь (Д2.1)-(Д2.2) відносно регульованої величини  $y_{10}$  як функції збурення  $F_{g0}$  в статичному режимі дасть статичну характеристику за каналом збурення  $F_{g0} \rightarrow y_{10}$ :

$$y_{10} = f_{зб}(F_{g0}). \quad (Д2.4)$$

Однак отримати розв'язок системи рівнянь (Д2.1)-(Д2.2) в явному виді (Д2.3)-(Д2.4) складно, або і зовсім неможливо, бо система рівнянь містить поліноми другого порядку як регульованої  $y_{10}$ , такі проміжної  $x_{10}$  величин. Можна поспробувати визначити статичні характеристики одним з числових методів, використавши відповідні підпрограми.

Тому будемо знаходити статичні характеристики в лінійному наближенні, виходячи з рівнянь моделей у відхиленнях або в зображеннях змінних при нульових значеннях похідних за часом. Тобто отримаємо статичні характеристики з відповідних динамічних характеристик при нульовій частоті.

Динамічні характеристики за каналами керування і збурення визначимо операторним методом. з системи рівнянь математичної моделі в розмірних величинах (Додаток 1, формули Д1.5 і Д1.6):

$$F_g y_0 - \left( F_g - SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} \right) y_1 - SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} = V_g \rho_g \frac{d}{dt} \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right) \quad (Д2.5)$$

$$F_r x_0 - \left( F_r + SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} \right) x_1 + SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2} = V_r \rho_r \frac{d}{dt} \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad (Д2.6)$$

*1-й етап.* Лінеаризація рівнянь (Д2.5) і (Д2.6) відносно змінних величин  $y_0, y_1, x_1, F_r$ .

Приймаємо, що  $F_g(t) = F_{g0} + \Delta F_g(t)$ ;

$y_1(t) = y_{10} + \Delta y_1(t)$ ;

$x_1(t) = x_{10} + \Delta x_1(t)$ ;

$F_r(t) = F_{r0} + \Delta F_r(t)$ .

Для спрощення позначимо ліву і праву сторони рівняння (Д2.5) через  $M1(t)$ . Тоді лінеаризоване рівняння Д2.5 відносно відхилень змінних  $F_g, y_1, x_1, F_r$  від їх значень в основному статичному режимі ( $y_{00}, y_{10}, x_{10}, F_{r0}$  відповідно) буде:

$$\begin{aligned} \Delta M1(t) = & \left( \frac{\partial M1(t)}{\partial F_g} \right) |_0 \cdot \Delta F_g(t) + \left( \frac{\partial M1(t)}{\partial y_1} \right) |_0 \cdot \Delta y_1(t) + \left( \frac{\partial M1(t)}{\partial x_1} \right) |_0 \cdot \Delta x_1(t) \\ & + \left( \frac{\partial M1(t)}{\partial F_r} \right) |_0 \cdot \Delta F_r(t) \end{aligned} \quad (Д2.7)$$

Враховуючи значення частинних похідних від лівої та правої сторін рівняння (Д2.5), а також витрату CO<sub>2</sub>, абсорбованого рідиною,

$$F_{ga} = SK_g \frac{(y_0 - mx_1) + (y_1 - mx_0)}{2}, \quad (Д2.8)$$

$$\Delta F_{ga}(t) = \frac{SK_g}{2} \cdot \Delta y_1(t) - \frac{SK_g m}{2} \cdot \Delta x_1(t) \quad (Д2.9)$$

(величини  $x_0$  і  $y_0$  є постійними, тому їх частинні похідні за поточними змінними, як і похідні за часом, будуть нульовими),

отримаємо з (Д2.7) з врахуванням  $x_0 = 0$  (таблиця Д1.1) та (Д2.8) і (Д2.9):

$$\Delta M1(t) = (y_0 - y_{10}) \cdot \Delta F_g(t) - [F_{g0} - F_{ga0} + (1 - y_{10}) \cdot \frac{SK_g}{2}] \cdot \Delta y_1(t) + (1 - y_{10}) \cdot \frac{SK_g m}{2} \cdot \Delta x_1(t) = \frac{V_g \rho_g}{2} \cdot \left( \frac{d\Delta y_1(t)}{dt} \right) \quad (Д2.10)$$

Аналогічно для спрощення позначимо ліву і праву сторони рівняння (Д2.6) через  $M2(t)$  і отримаємо це рівняння у відхиленнях, враховуючи, що  $x_0 = 0$  (таблиця Д1.1), а також (Д2.8) і (Д2.9):

$$\Delta M2(t) = -x_{10} \cdot \Delta F_r(t) + (1 - x_{10}) \cdot \frac{SK_g}{2} \cdot \Delta y_1(t) - [(1 - x_{10}) \cdot \frac{SK_g m}{2} + F_{r0} + F_{ga0}] \cdot \Delta x_1(t) = \frac{V_r \rho_r}{2} \cdot \left( \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \right) \quad (Д2.11)$$

Приведемо систему рівнянь у відхиленнях (Д2.10)-(Д2.11) до *класичного* виду, залишивши зліва параметри стану (вихідні величини), а справа – керування і збурення (вхідні величини):

$$\frac{V_g \rho_g}{2} \cdot \frac{d\Delta y_1(t)}{dt} + [F_g - F_{ga0} + (1 - y_{10}) \cdot \frac{SK_g}{2}] \cdot \Delta y_1(t) - (1 - y_{10}) \cdot \frac{SK_g m}{2} \cdot \Delta x_1(t) = (y_0 - y_{10}) \cdot \Delta F_g(t) \quad (Д2.12)$$

$$- (1 - x_{10}) \cdot \frac{SK_g}{2} \cdot \Delta y_1(t) + \frac{V_r \rho_r}{2} \cdot \left( \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \right) + [(1 - x_{10}) \cdot \frac{SK_g m}{2} + F_{r0} + F_{ga0}] \cdot \Delta x_1(t) = -x_{10} \cdot \Delta F_r(t) \quad (Д2.13)$$

Система рівнянь (Д2.12)-(Д2.13) є *математичною моделлю* процесу абсорбції в скрубєрі у *відхиленнях* від основного статичного режиму (таблиця Д1.1).

Приведемо систему рівнянь (Д2.12)-(Д2.13) до *канонічного* виду, поділивши кожне з цих рівнянь на *коефіцієнт при відхиленні величини*, що змінюється при виникненні небалансу між вхідними і вихідними потоками відповідних ємностей акумулювання газу чи рідини. Для ємності акумулювання CO<sub>2</sub> в газі цією величиною є  $y_1$ , а для ємності акумулювання CO<sub>2</sub> в рідині цією величиною є  $x_1$ .

Тому рівняння (Д2.12) ділимо на коефіцієнт при  $\Delta y_1(t)$ :

$$A = [F_g - F_{ga0} + (1 - y_{10}) \cdot \frac{SK_g}{2}] \quad (Д2.14)$$

а рівняння (Д2.13) ділимо на коефіцієнт при  $\Delta x_1(t)$ :

$$B = [(1 - x_{10}) \cdot \frac{SK_{gm}}{2} + F_{r0} + F_{ga0}] \quad (Д2.15)$$

Введемо додаткові позначення коефіцієнтів з врахуванням (Д2.14) і (Д2.15):

для рівняння(Д2.12):

$$T_g = \frac{V_g \rho_g}{2A}; \quad K_{x_1 y_1} = (1 - y_{10}) \cdot \frac{SK_{gm}}{2A};$$

$$K_{F_{gy1}} = \frac{(y_0 - y_{10})}{A}. \quad (Д2.16)$$

для рівняння (Д2.13):

$$T_r = \frac{V_r \rho_r}{2B}; \quad K_{y_1 x_1} = (1 - x_{10}) \cdot \frac{SK_g}{2B};$$

$$K_{F_{rx1}} = \frac{x_{10}}{B}. \quad (Д2.17)$$

Система рівнянь (Д2.12)-(Д2.13) з врахуванням (Д2.14)-(Д2.17) має вигляд:

$$T_g \frac{d\Delta y_1(t)}{dt} + \Delta y_1(t) - K_{x_1 y_1} \Delta x_1(t) = K_{F_{gy1}} \Delta F_g(t) \quad (Д2.18)$$

$$-K_{y_1 x_1} \Delta y_1(t) + T_r \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} + \Delta x_1(t) = -K_{F_{rx1}} \Delta F_r(t) \quad (Д2.19)$$

Система рівнянь (Д2.18)-(Д2.19) є *математичною моделлю* процесу абсорбції у *відхиленнях* в канонічному вигляді.

**2-й етап.** Перетворення за Лапласом змінної часу  $t \rightarrow p$  при нульових початкових умовах ( $\Delta F_g(0) = 0$ ;  $\Delta y_1(0) = 0$ ;  $\Delta x_1(0) = 0$ ;  $\Delta F_r(0) = 0$ ) в системі рівнянь у відхиленнях (Д2.18)-(Д2.19).

$$\Delta F_g(t) \rightarrow F_g(p);$$

$$\Delta y_1(t) \rightarrow y_1(p);$$

$$\Delta x_1(t) \rightarrow x_1(p);$$

$$\Delta F_r(t) \rightarrow F_r(p).$$

Це перетворення трансформує систему *лінійних диференціальних рівнянь* (Д2.18)-(Д2.19) відносно змінної часу  $t$  в систему звичайних *лінійних алгебричних рівнянь* відносно параметра  $p$ :

$$(T_g p + 1) \cdot y_1(p) - K_{x_1 y_1} \cdot x_1(p) = K_{F_g y_1} \cdot F_g(p); \quad (\text{Д2.20})$$

$$- K_{y_1 x_1} \cdot y_1(p) + (T_r p + 1) \cdot x_1(p) = - K_{F_r x_1} \cdot F_r(p). \quad (\text{Д2.21})$$

Система лінійних рівнянь (Д2.20)-(Д2.21) є *математичною моделлю* процесу абсорбції *в зображеннях змінних*.

**3-й етап.** Розв'язання системи рівнянь в зображеннях (Д2.20)-(Д2.21) і знаходження зображення регульованої величини  $y_1(p)$  як функції зображення керування  $F_r(p)$  і зображення збурення  $F_g(p)$ .

Цю систему рівнянь можна розв'язати виключенням проміжної змінної  $x_1(p)$  шляхом визначення її з першого рівняння і підставлення в друге, так і з допомогою *правила Крамера*, яке здебільшого застосовується для системи з 3-х і більше рівнянь.

Використаємо правило Крамера як більш універсальний метод розв'язання системи лінійних рівнянь.

Вектор-стовпці коефіцієнтів при зображеннях керування і збурення

$$K F_r = \begin{vmatrix} 0 \\ -K_{F_r x_1} \end{vmatrix}; \quad K F_g = \begin{vmatrix} K_{F_g y_1} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{Д2.22})$$

Детермінант матриці  $\mathbf{A}$  системи рівнянь (Д2.20)-(Д2.21):

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} T_g p + 1 & -K_{x1y1} \\ -K_{y1x1} & T_r p + 1 \end{vmatrix} = (T_g p + 1)(T_r p + 1) - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1} \quad (\text{Д2.23})$$

Детермінант матриці  $\mathbf{A}_{Fr}$ , утвореної шляхом заміни в матриці  $\mathbf{A}$  стовпця коефіцієнтів при регульованій величині  $y_I$  на вектор-стовпець коефіцієнтів при зображеннях керування  $F_r(p)$ :

$$\det \mathbf{A}_{Fr} = \det \begin{vmatrix} 0 & -K_{x1y1} \\ -K_{Fr x1} & T_r p + 1 \end{vmatrix} = -(-K_{x1y1})(-K_{Fr x1}) = -K_{x1y1} \cdot K_{Fr x1} \quad (\text{Д2.24})$$

Детермінант матриці  $\mathbf{A}_{Fg}$ , утвореної шляхом заміни в матриці  $\mathbf{A}$  стовпця коефіцієнтів при регульованій величині  $y_I$  на вектор-стовпець коефіцієнтів при зображеннях збурення  $y_0(p)$ :

$$\det \mathbf{A}_{Fg} = \det \begin{vmatrix} K_{Fgy1} & -K_{x1y1} \\ 0 & T_r p + 1 \end{vmatrix} = K_{Fgy1} \cdot (T_r p + 1) \quad (\text{Д2.25})$$

Передатна функція за каналом керування  $F_r \rightarrow y_I$ :

$$W_{FryI}(p) = \frac{\det \mathbf{A}_{Fr}}{\det \mathbf{A}} = \frac{-K_{x1y1} \cdot K_{Fr x1}}{(T_g p + 1)(T_r p + 1) - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}} \quad (\text{Д2.26})$$

Передатна функція за каналом збурення  $Fg \rightarrow y_I$ :

$$W_{FgyI}(p) = \frac{\det \mathbf{A}_{Fg}}{\det \mathbf{A}} = \frac{K_{Fgy1} \cdot (T_r p + 1)}{(T_g p + 1)(T_r p + 1) - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}} \quad (\text{Д2.27})$$

В числовому виді, враховуючи значення величин в таблиці Д1.1, а також коефіцієнтів з співвідношень ((Д2.16) і (Д2.17) передатні функції за каналами керування і збурення будуть

$$W_{FryI}(p) = \frac{-1.019 \cdot 10^{-6}}{(0.0134 \cdot p + 1) \cdot (1.044 \cdot p + 1) - 0.031} \quad (\text{Д2.28})$$

$$W_{FgyI}(p) = \frac{(1.044 \cdot p + 1) \cdot 1.433 \cdot 10^{-4}}{(0.0134 \cdot p + 1) \cdot (1.044 \cdot p + 1) - 0.031} \quad (\text{Д2.29})$$

Перехідні характеристики отримуються шляхом зворотного перетворення за Лапласом їх зображень, що є добутком зображення  $1/p$  вхідної одиничної функції  $I(t)$  на передатну функцію відповідного каналу (керування чи збурення).

$$h_{ji}(t) = \text{invlaplace}[(1/p) \cdot W_{ji}(p)] \quad (\text{Д2.30})$$

В нашому випадку перехідна характеристика за каналом керування

$$h_{FryI}(t) = L^{-1}[(1/p) \cdot W_{FryI}(p)] = -108 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-37.9t} \cdot \sin(36.9i \cdot t) + 105 \cdot 10^{-8} \cdot \cos(36.9i \cdot t) \cdot e^{-37.9t} - 105 \cdot 10^{-8} \quad .(Д2.31)$$

і за каналом збурення

$$h_{FgyI}(t) = L^{-1}[(1/p) \cdot W_{FgyI}(p)] = -1.38 \cdot 10^{-4} i \cdot e^{-37.9t} \cdot \sin(36.9i \cdot t) + (1.48 \cdot 10^{-4} - 1.48 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(36.9i \cdot t) \cdot e^{-37.9t}) \quad (Д2.32)$$

Графіки перехідних характеристик  $h_{FryI}(t)$  і  $h_{FgyI}(t)$  наведені на рис. Д2.1 і Д2.2.

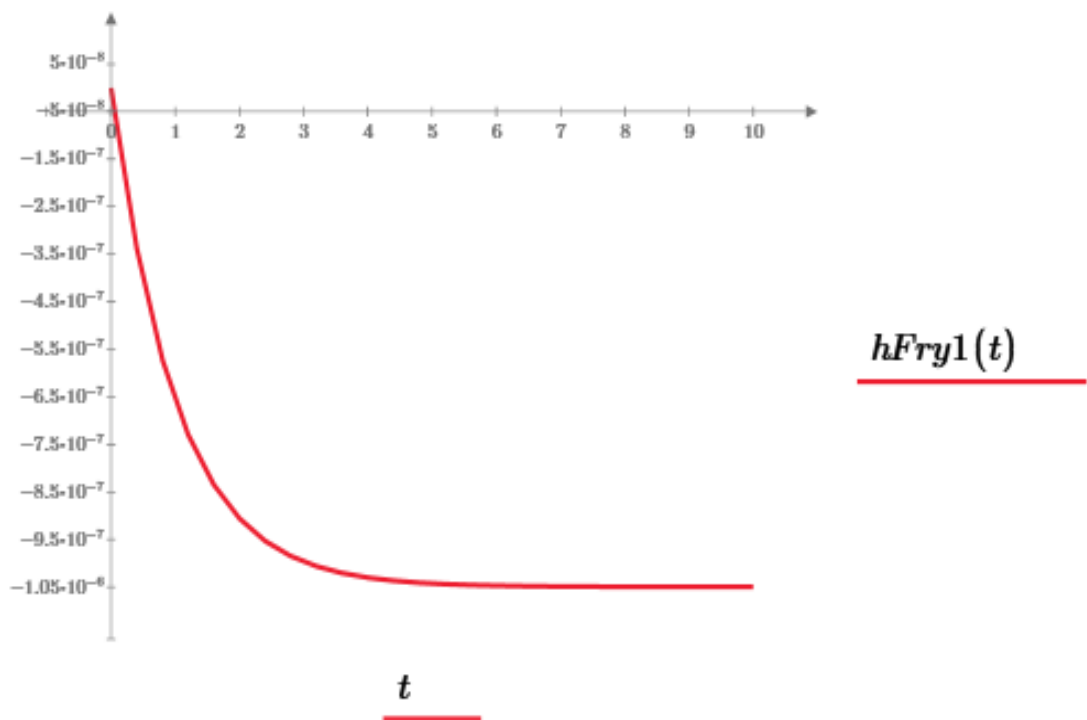


Рис. Д2. 1. Перехідна характеристика за каналом керування  $h_{FryI}(t)$

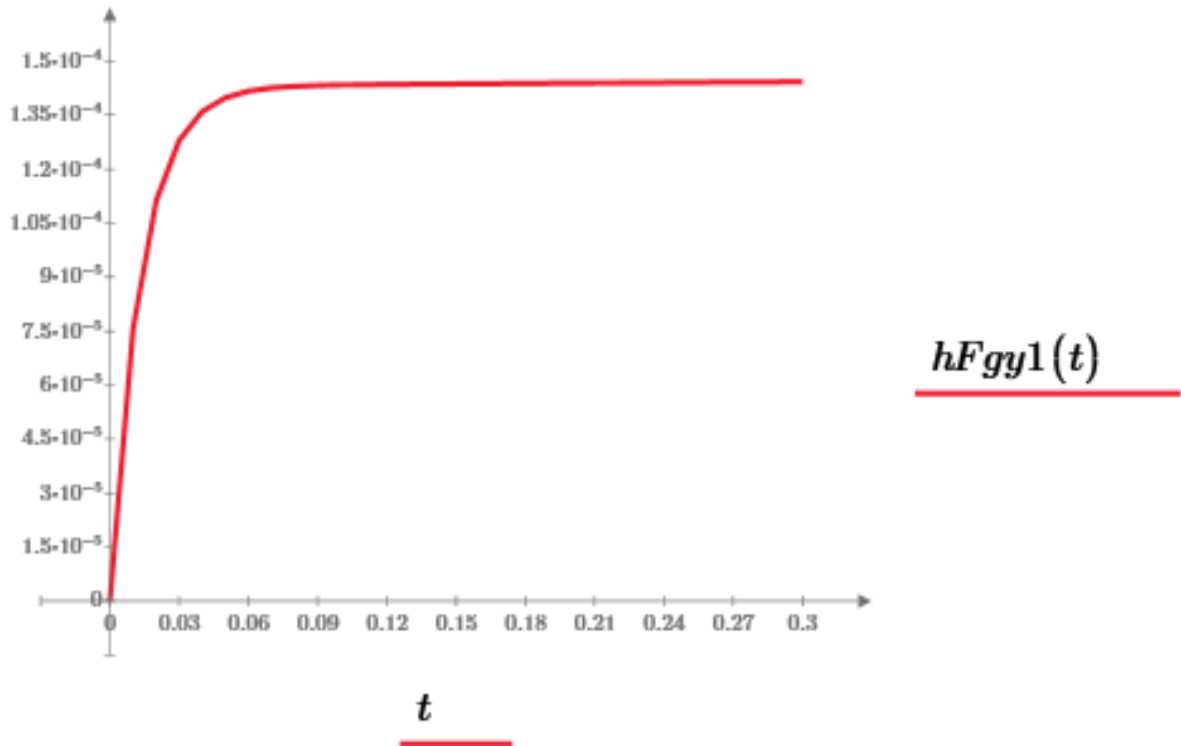


Рис. Д2.2. Перехідна характеристика за каналом збурення  $h_{Fgy1}(t)$

Для порівняння динамічних властивостей різних каналів впливу за їх перехідними характеристиками і виключення впливу на них одиниць вимірювання змінних величин приводять ці змінні до безрозмірного виду. Це досягається шляхом нормування їх (і їх відхилень) номінальними статичними значеннями. Для передатних функцій є наступне співвідношення (див. (1.34)):

$$W_{ji}^b(p) = \frac{x_{j0}}{x_{i0}} \cdot W_{ji}(p) \quad (\text{Д2.33})$$

де  $W_{ji}(p)$  – передатна функція за каналом  $x_j \rightarrow x_i$ , отримана за значеннями змінних в розмірних величинах;

$W_{ji}^b(p)$  - передатна функція за каналом  $x_j \rightarrow x_i$ , отримана за значеннями змінних в безрозмірних величинах;

$x_{j0}$  - розмірне значення вхідної величини (керування або збурення) в номінальному статичному режимі;

$x_{i0}$  – розмірне значення параметру стану (регульована або проміжна величина) в номінальному статичному режимі.

Визначимо передатні функції для безрозмірних значень змінних  $y_I$ ,  $F_r$  та  $F_g$  за каналом керування  $F_r \rightarrow y_I$  (Д2.26)  $W_{FryI}^b(p)$  і за каналом збурення  $F_g \rightarrow y_I$  (Д2.27)  $W_{FgyI}^b(p)$  :

$$W_{FryI}^b(p) = \frac{F_{r0}}{y_{10}} W_{FryI}(p) = \frac{F_{r0}}{y_{10}} \cdot \frac{-K_{x1y1} \cdot K_{Fr x1}}{(T_g p + 1) \cdot (T_r p + 1) - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}} \quad (Д2.34)$$

$$W_{FgyI}^b(p) = \frac{F_{g0}}{y_{10}} W_{FgyI}(p) = \frac{F_{g0}}{y_{10}} \cdot \frac{K_{Fgy1} \cdot (T_r p + 1)}{(T_g p + 1) \cdot (T_r p + 1) - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}} \quad (Д2.35)$$

В числовому виді, враховуючи значення величин в таблиці Д1.1 і формул для коефіцієнтів (Д2.16) і (Д2.17) обчислимо передатні функції при безрозмірних значеннях змінних:

$$\begin{aligned} W_{FryI}^b(p) &= \frac{1002,5}{0,005} \cdot \frac{-1,019 \cdot 10^{-6}}{(0,0134 \cdot p + 1) \cdot (1,044 \cdot p + 1) - 0,031} = \\ &= \frac{-0,204}{(0,0134 \cdot p + 1) \cdot (1,044 \cdot p + 1) - 0,031} \end{aligned} \quad (Д2.36)$$

$$\begin{aligned} W_{FgyI}^b(p) &= \frac{100}{0,005} \cdot \frac{(1,044 \cdot p + 1) \cdot 1,433 \cdot 10^{-4}}{(0,0134 \cdot p + 1) \cdot (1,044 \cdot p + 1) - 0,031} = \\ &= \frac{2,866 \cdot (1,044 \cdot p + 1)}{(0,0134 \cdot p + 1) \cdot (1,044 \cdot p + 1) - 0,031} \end{aligned} \quad (Д2.37)$$

Перехідна характеристика за каналом керування при безрозмірних змінних

$$h_{FryI}^b(t) = L^{-1}[(1/p) \cdot W_{FryI}^b(p)] = -0,216i \cdot e^{-37,9t} \cdot \sin(36,9i \cdot t) + (0,211 \cdot \cos(36,9i \cdot t) \cdot e^{-37,9t} - 0,211) \quad (Д2.38)$$

і за каналом збурення при безрозмірних збуреннях

$$h_{FgyI}^b(t) = L^{-1}[(1/p) \cdot W_{FgyI}^b(p)] = -2,77i \cdot e^{-37,9t} \cdot \sin(36,9i \cdot t) + (2,96 - 2,96 \cdot \cos(36,9i \cdot t) \cdot e^{-37,9t}) \quad (Д2.39)$$

Графіки перехідних характеристик  $h_{FryI}^b(t)$  і  $h_{FgyI}^b(t)$  наведені на рис. Д2.3 і Д2.4.

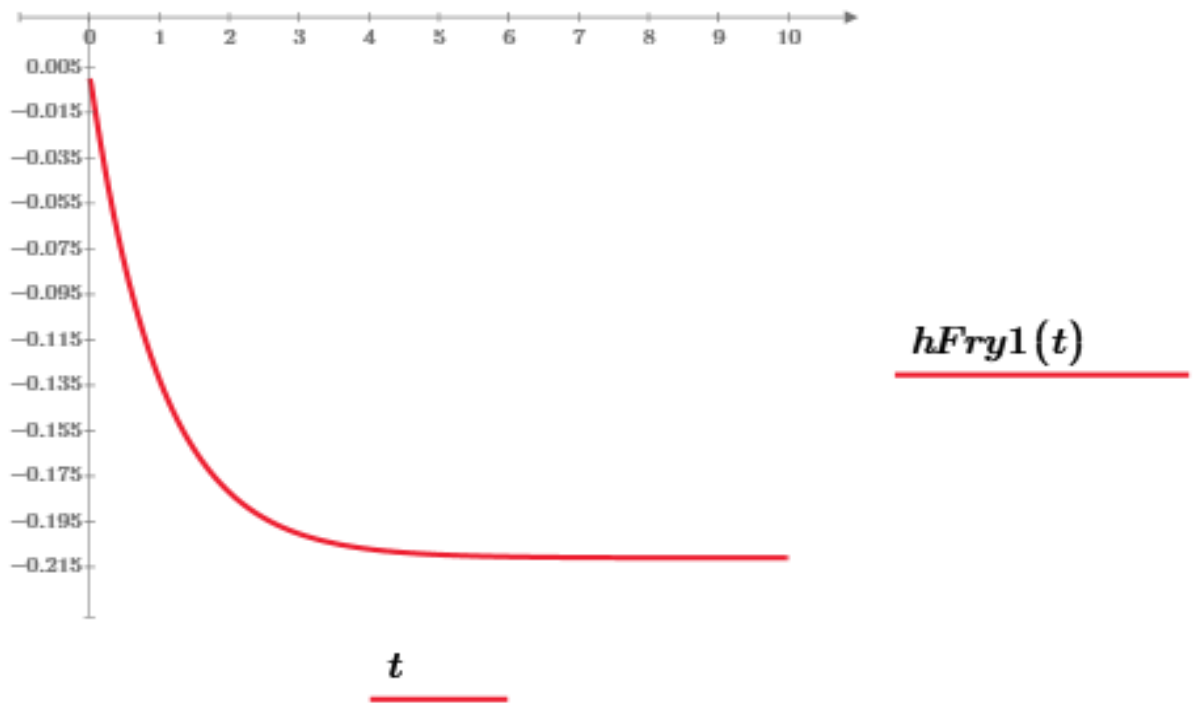


Рис.Д2.3 Перехідна характеристика за каналом керування  $h_{Fry1}^b(t)$  при безрозмірних значеннях змінних

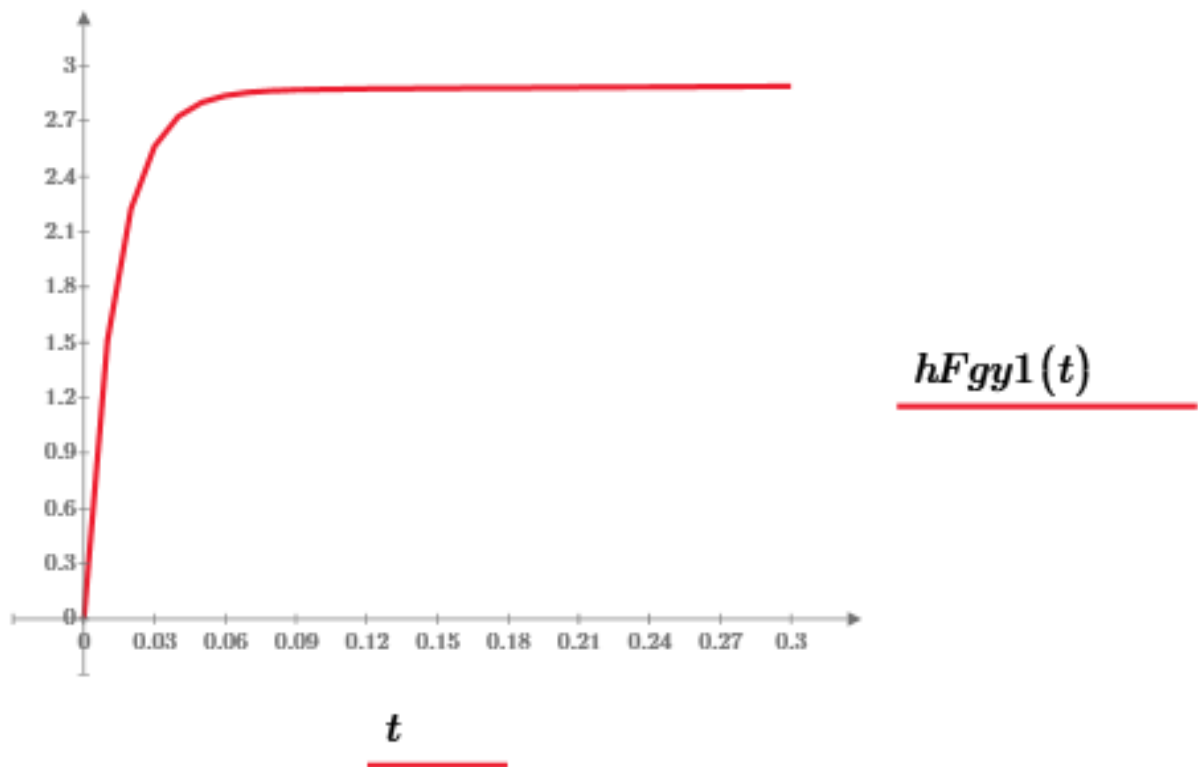


Рис.Д2.4 Перехідна характеристика за каналом збурення  $h_{Fgy1}^b(t)$  при безрозмірних значеннях змінних

*Статичні характеристики* отримуємо з математичної моделі у відхиленнях (Д2.18)-(Д2.19) при нульових значеннях усіх похідних за часом і врахуванням того, що

$$F_g(t) = F_{g0} + \Delta F_g(t);$$

$$y_1(t) = y_{10} + \Delta y_1(t);$$

$$x_1(t) = x_{10} + \Delta x_1(t);$$

$$F_r(t) = F_{r0} + \Delta F_r(t).$$

Математична модель статички визначається системою рівнянь

$$\Delta y_1 - K_{x1y1} \cdot \Delta x_1 = + K_{Fgy1} \cdot \Delta F_g \quad (\text{Д2.40})$$

$$-K_{y1x1} \cdot \Delta y_1 + \Delta x_1 = - K_{Fr x1} \cdot \Delta F_r \quad (\text{Д2.41})$$

Розв'язання системи рівнянь статички (Д2.40)-(Д2.41) дає статичні характеристики за каналами керування  $y_1 = f(F_r)$  і збурення  $y_1 = f(F_g)$ .

Статичні характеристики можна отримати також з передатних функцій за каналами керування  $W_{Fry1}(p)$  і збурення  $W_{Fgy1}(p)$  при  $p=0$  тобто ( $t = \infty$ ).

Статична характеристика за каналом керування може бути отриманою зі співвідношення

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta F_r} = \frac{y_1 - y_{10}}{F_r - F_{r0}} = W_{Fry1}(0) = \frac{-K_{x1y1} \cdot K_{Fr x1}}{1 - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}} \quad (\text{Д2.42})$$

З (Д2.42) отримана статична характеристика за каналом керування

$$y_1 = y_{10} + (F_r - F_{r0}) \cdot \frac{-K_{x1y1} \cdot K_{Fr x1}}{1 - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}}. \quad (\text{Д2.43})$$

В числових значеннях

$$y_1 = 0,0050 + (F_r - 1002.5) \cdot (-1.052 \cdot 10^{-6}) = -1.052 \cdot 10^{-6} \cdot F_r + 0.0061 \quad (\text{Д2.44})$$

Статична характеристика за каналом збурення може бути отриманою зі співвідношення

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta F_g} = \frac{y_1 - y_{10}}{F_g - F_{g0}} = W_{Fgy1}(0) = \frac{K_{Fgy1}}{1 - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}} \quad (\text{Д2.45})$$

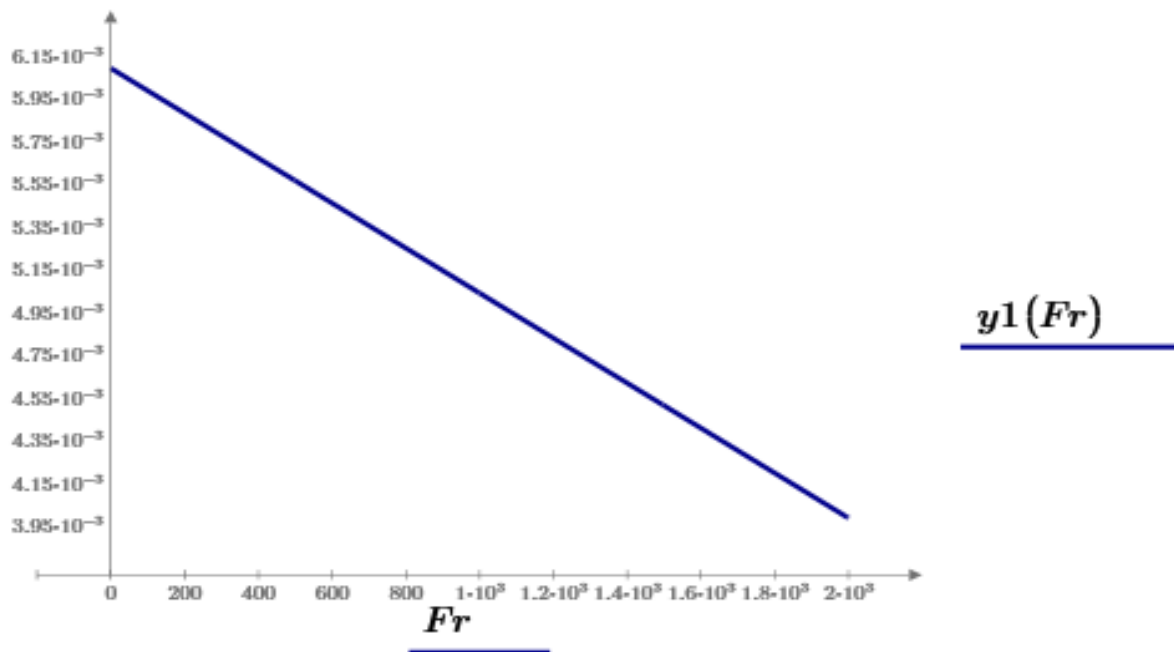
З (Д2.45) отримана статична характеристика за каналом збурення

$$y_1 = y_{10} + (F_g - F_{g0}) \frac{K_{Fgy1}}{1 - K_{x1y1} \cdot K_{y1x1}}. \quad (\text{Д2.46})$$

В числових значеннях статична характеристика за каналом збурення

$$y_1 = 0,0050 + (Fg - 100) \cdot 1.479 \cdot 10^{-4} = 1.479 \cdot 10^{-4} Fg - 0,0098 \quad (\text{Д2.47})$$

Графіки статичних характеристик наведені на рис. Д2.5 і Д2.6



Д2.5 Статична характеристика за каналом керування  $y_1 = f(F_r)$

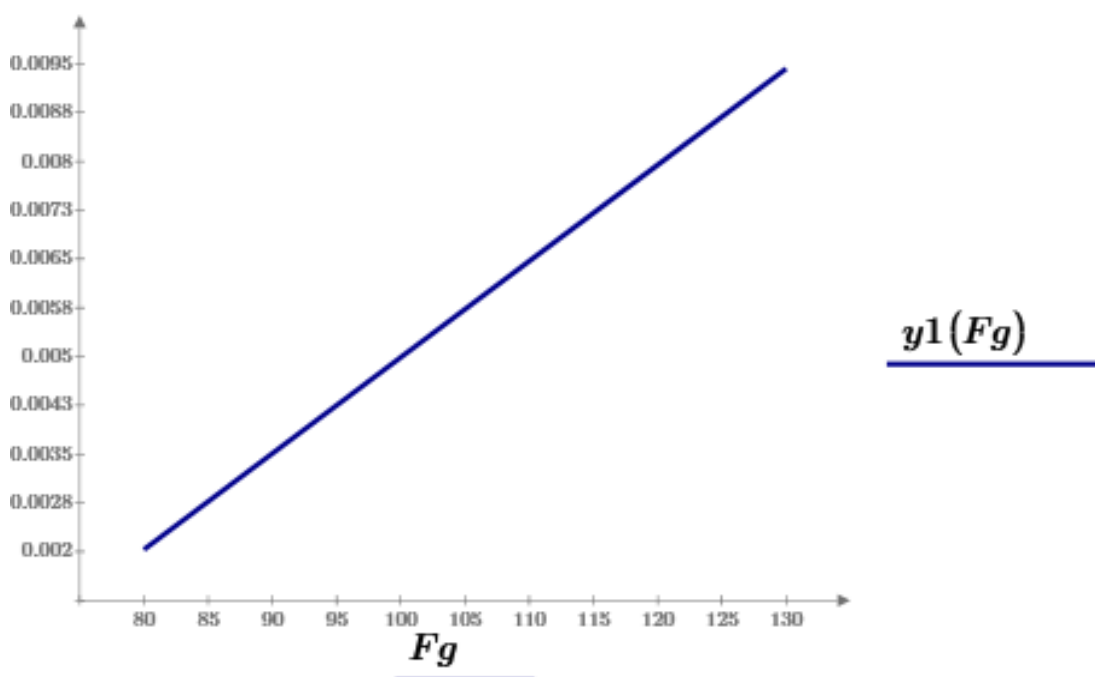


Рис. Д.2.6. Статична характеристика за каналом збурення  $y_1 = f(F_g)$

### Дослідження впливу зміни навантаження процесу абсорбції на його динамічні властивості у виді перехідних характеристик

Дослідимо, як будуть змінюватись динамічні характеристики технологічного об'єкту при зміні навантаження процесу абсорбції.

Навантаженням на абсорбер вважаємо витрату газової суміші  $F_g$ , що поступає на абсорбцію.

При зміні навантаження, будуть змінюватись і динамічні характеристики об'єкту, які будемо розглядати у виді перехідних характеристик за каналом збурення : витрата суміші газів ацетилену  $C_2H_2$  і вуглекислого газу  $CO_2$ , яка поступає на абсорбцію  $\rightarrow$  концентрація  $CO_2$  в очищеному газі на виході з абсорбера  $F_g \rightarrow y_1$ .

Навантаження змінюємо на  $\pm 20\%$  від номінального значення і порівнюємо перехідну характеристику при номінальному значенні навантаження та збільшеному/зменшеному.

Таблиця Д3.1

Таблиця параметрів номінального статичного режиму

№	Назва параметру	Одиниці вимірювання	Позначення	Числове значення
1	Витрата газу ( $C_2H_2$ та $CO_2$ ) на вході в абсорбер	кг- газ/год	$F_{g0}$	100
2	Витрата рідини на вході в абсорбер	кг-рід/год	$F_{r0}$	1002,5
3	Концентрація $CO_2$ в газі на вході в абсорбер	кг $CO_2$ -газ /кг-газ	$y_0$	0.03
4	Концентрація $CO_2$ в газі на виході з абсорбера	кг $CO_2$ -газ /кг-газ	$y_{10}$	0.005
5	Концентрація $CO_2$ в рідині на вході в абсорбер	кг $CO_2$ -рід/ кг рід	$x_0$	0
6	Концентрація $CO_2$ в рідині на виході з абсорбера	кг $CO_2$ -рід/ кг-рід	$x_{10}$	0.0025
7	Об'єм, який займає газ в абсорбері	м <sup>3</sup> -газ	$V_g$	3.92
8	Об'єм, який займає рідина в абсорбері	м <sup>3</sup> -рід	$V_r$	2.0
9	Густина газу	кг-газ/ м <sup>3</sup> -газ	$\rho_g$	1.19
10	Густина рідини	кг-рід/ м <sup>3</sup> -рід	$\rho_r$	1130
11	Кількість $CO_2$ , яка абсорбувалася рідиною з газу на одиницю рушійної сили в газовій фазі	кг-газ/год	$SK_g$	154.62

12	Постійна Генрі	кгСО <sub>2</sub> -газ· кг-рід/кг-газ·кгСО <sub>2</sub> -рід	m	1.00
13	Витрата СО <sub>2</sub> , абсорбованого рідиною	кгСО <sub>2</sub> -газ/год	F <sub>ga0</sub>	2.51256

Розрахунки проводилися в середовищі Mathcad Prime 9.0.0.0 компанії Parametric Technology Corporation

Передатна функція за каналом керування  $F_r \rightarrow y_I$  (див. Д2.26)

$$WF_{ry1}(p) := \frac{-Kx1y1 \cdot KFr x1}{(Tg \cdot p + 1) \cdot (Tr \cdot p + 1) - Kx1y1 \cdot Ky1x1}$$

Передатна функція за каналом збурення  $F_g \rightarrow y_I$  (див. Д2.27)

$$WF_{gy1}(p) := \frac{(Tr \cdot p + 1) \cdot KFgy1}{(Tg \cdot p + 1) \cdot (Tr \cdot p + 1) - Kx1y1 \cdot Ky1x1}$$

Зворотне перетворення за Лапласом добутку  $(1/p) \cdot WF_{ry1}(p)$  тобто  $p \rightarrow t$  дає зображення перехідної характеристики за каналом керування:  $Fr \rightarrow y_I$  при різних навантаженнях і має вираз:

$$hF_{ry1}(t) := WF_{ry1}(p) \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow[\text{float, 3}]{\text{invlaplace, } p} \begin{bmatrix} -0.00000123i \cdot e^{-33.6 \cdot t} \cdot \sin(32.7i \cdot t) + (0.00000119 \cdot \cos(32.7i \cdot t) \cdot e^{-33.6 \cdot t} - 0.00000119) \\ -0.00000108i \cdot e^{-37.9 \cdot t} \cdot \sin(36.9i \cdot t) + (0.00000105 \cdot \cos(36.9i \cdot t) \cdot e^{-37.9 \cdot t} - 0.00000105) \\ -(0.962i \cdot 10^{-6}) \cdot e^{-42.2 \cdot t} \cdot \sin(41.2i \cdot t) + (0.941 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(41.2i \cdot t) \cdot e^{-42.2 \cdot t} - 0.941 \cdot 10^{-6}) \end{bmatrix}$$

Зворотне перетворення за Лапласом добутку  $(1/p) \cdot WF_{gy1}(p)$  тобто  $p \rightarrow t$  дає зображення перехідної характеристики за каналом збурення:  $Fg \rightarrow y_I$  при різних навантаженнях і має вираз:

$$hF_{gy1}(t) := WF_{gy1}(p) \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow[\text{float, 3}]{\text{invlaplace, } p} \begin{bmatrix} -0.000156i \cdot e^{-33.6 \cdot t} \cdot \sin(32.7i \cdot t) + (0.000168 - 0.000168 \cdot \cos(32.7i \cdot t) \cdot e^{-33.6 \cdot t}) \\ -0.000138i \cdot e^{-37.9 \cdot t} \cdot \sin(36.9i \cdot t) + (0.000148 - 0.000148 \cdot \cos(36.9i \cdot t) \cdot e^{-37.9 \cdot t}) \\ -0.000125i \cdot e^{-42.2 \cdot t} \cdot \sin(41.2i \cdot t) + (0.000132 - 0.000132 \cdot \cos(41.2i \cdot t) \cdot e^{-42.2 \cdot t}) \end{bmatrix}$$

Графіки перехідних характеристик за каналами керування  $hF_{ry1}(t)$  і збурення  $hF_{gy1}(t)$  наведені на рис. Д3.1 і Д3.2. На одному полі розташовуються графіки номінального навантаження та навантаження, яке змінюється на  $\pm 20\%$  від номінального.

Витрата газу  $F_g$  на вході в абсорбер приймає значення: 80, 100 і 120 кг/год.

Початкові дані

$$Fg0 := \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 120 \end{bmatrix} \quad Vg := 3.92$$

$$Fr0 := 1002.5 \quad Vr := 2 \quad \rho g := 1.19 \quad y10 := 0.005 \quad \rho r := 1130$$

$$x0 := 0 \quad SKg := 154.62$$

$$x10 := 0.0025 \quad m := 1$$

$$y00 := 0.030$$

$$Fga0 := 2.51256$$

Хід виконання

$$A := Fg0 - Fga0 + (1 - y10) \cdot \frac{SKg}{2} \quad A = \begin{bmatrix} 154.411 \\ 174.411 \\ 194.411 \end{bmatrix}$$

$$B := (1 - x10) \cdot \frac{SKg \cdot m}{2} + Fr0 + Fga0 \quad B = 1082.129$$

$$Tg := \frac{Vg \cdot \rho g}{2 \cdot A} \quad Tg = \begin{bmatrix} 0.0151 \\ 0.0134 \\ 0.012 \end{bmatrix}$$

$$Kx1y1 := (1 - y10) \cdot \frac{SKg}{2 \cdot A} \quad Kx1y1 = \begin{bmatrix} 0.498 \\ 0.441 \\ 0.396 \end{bmatrix}$$

$$Tr := \frac{Vr \cdot \rho r}{2 \cdot B} \quad Tr = 1.044$$

$$Ky1x1 := (1 - x10) \cdot \frac{SKg}{2 \cdot B} \quad Ky1x1 = 0.071$$

$$KFr x1 := \frac{x10}{B} \quad KFr x1 = 2.31 \cdot 10^{-6}$$

$$Ky0x1 := (1 - x10) \cdot \frac{SKg}{2 \cdot B} \quad Ky0x1 = 0.071$$

$$KFgy1 := \frac{y0 - y10}{A} \quad KFgy1 = \begin{bmatrix} 1.619 \cdot 10^{-4} \\ 1.433 \cdot 10^{-4} \\ 1.286 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

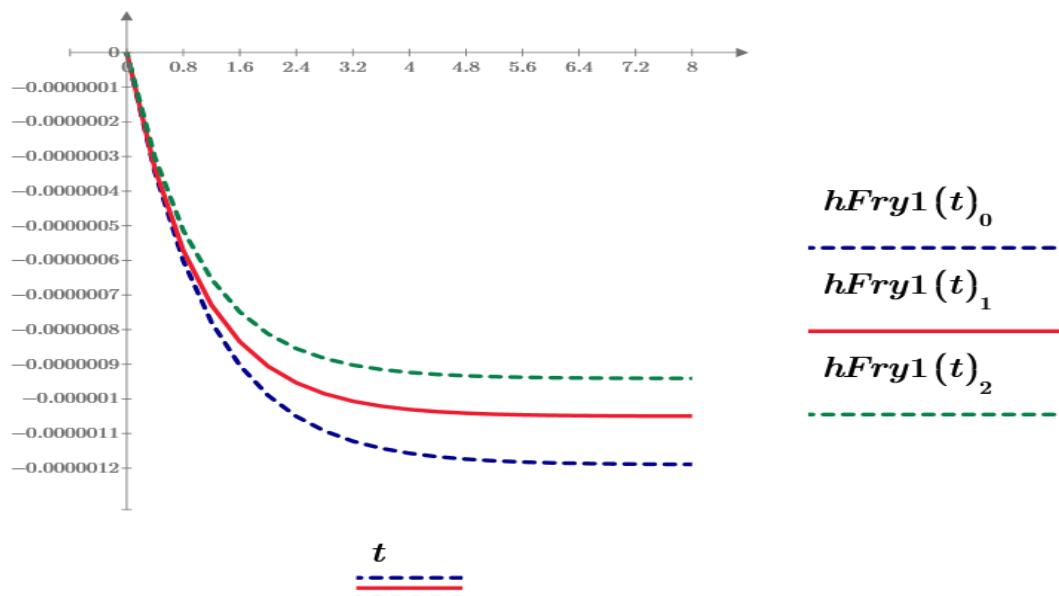


Рис.Д3.1 Перехідні характеристики за каналом керування:  
 $hFry1(t)_0$ - при зменшенні навантаження (-20%),  $hFry1(t)_1$ - при номінальному навантаженні, $hFry1(t)_2$ -при збільшенні навантаження (+20%)

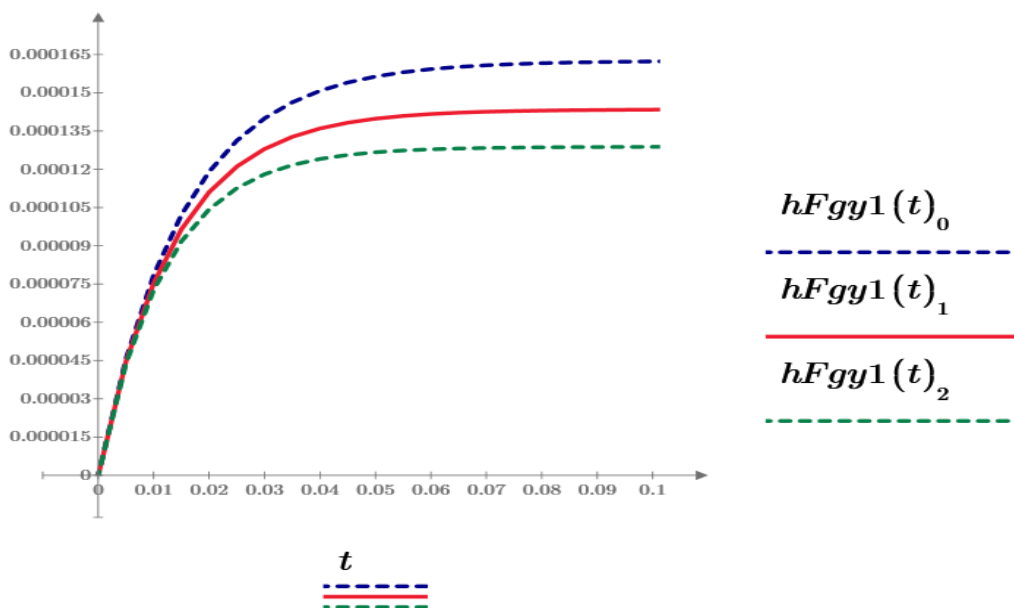


Рис. Д3.2.Перехідні характеристики за каналом збурення  
 $hFry1(t)_0$  - при зменшенні навантаження (-20%),  $hFry1(t)_1$ - при номінальному навантаженні, $hFry1(t)_2$ -при збільшенні навантаження(+20%)

Висновки:

1. Для каналу керування при збільшенні навантаження:

- збільшується початкова швидкість росту перехідної характеристики,
- збільшується значення (за модулем)  $u_{100}$ - значення вихідної величини  $u_1$  в новому статичному стані після нанесення одиничного збурення  $I(t)$  за каналом керування  $F_r \rightarrow u_1$ ,

- а також збільшується час перехідного процесу досягнення  $u_1 = 0,98u_{100}$ , тобто час, за який вихідна величина  $u_1$  практично досягне свого нового статичного значення.

2. Для каналу керування при зменшенні навантаження ці всі показники змінюються в протилежному напрямку;

3. Для каналу збурення при збільшенні навантаження

- зменшується початкова швидкість росту перехідної характеристики;
- зменшується  $u_{100}$  - значення вихідної величини  $u_1$  в новому статичному стані після нанесення одиничного збурення  $I(t)$  за каналом збурення  $F_g \rightarrow u_1$ ,

- а також зменшується час перехідного процесу досягнення  $u_1 = 0,98u_{100}$ , тобто час, за який вихідна величина  $u_1$  практично досягне свого нового статичного значення.

4. Для каналу збурення при зменшенні навантаження ці всі показники змінюються в протилежному напрямку;

5. Для подальшого дослідження залишається задача визначення граничного значення зміни навантаження, при якому система регулювання вихідної величини  $u_1$  за допомогою керування  $F_r$  втрачає стійкість або її запас стійкості виходить за межі гранично допустимого значення.

Для визначення передатних функцій *розширеного технологічного об'єкту* (тобто з врахуванням динамічних властивостей датчика та виконавчого механізму) приймемо, що передатні функції датчика та виконавчого механізму апроксимовані аперіодичними ланками 1-го порядку з коефіцієнтами підсилення  $K_d = K_{vm} = 1$  та постійними часу  $T_d = 5\text{с} = 0.0014\text{год}$  і  $T_{vm} = 10\text{с} = 0.0028\text{год}$  відповідно.

Передатні функції датчика і виконавчого механізму мають вигляд:

$$W_d(p) := \frac{1}{T_d \cdot p + 1}$$

$$W_{bm}(p) := \frac{1}{T_{bm} \cdot p + 1}$$

Тоді передатна функція розширеного технологічного об'єкта за каналом керування набуває вигляду:

$$W_{1Fry1}(p) := W_d(p) \cdot W_{Fry1}(p) \cdot W_{bm}(p)$$

І відповідно передатна функція розширеного технологічного об'єкту за каналом збурення має вигляд:

$$W_{1Fgy1}(p) := W_d(p) \cdot W_{Fgy1}(p) \cdot W_{bm}(p)$$

Зворотне перетворення за Лапласом  $p \rightarrow t$  передатної функції за каналом керування:  $Fr \rightarrow y_I$  розширеного об'єкту обчислюється за формулою:

$$h_{1Fry1}(t) = W_{1Fry1}(p) \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow[\text{float, 3}]{\text{invlaplace, p}} \begin{bmatrix} 0.00000121 \cdot e^{-0.923 \cdot t} + (0.141 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-357.0 \cdot t} - (0.158 \cdot 10^{-9} \cdot e^{-714.0 \cdot t} + 0.00000119) - 0.228 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-662 \cdot t}) \\ 0.00000107 \cdot e^{-0.923 \cdot t} + (0.145 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-357.0 \cdot t} - (0.16 \cdot 10^{-9} \cdot e^{-714.0 \cdot t} + 0.00000105) - 0.187 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-74.8 \cdot t}) \\ 0.955 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0.93 \cdot t} + (0.15 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-357.0 \cdot t} - (0.162 \cdot 10^{-9} \cdot e^{-714.0 \cdot t} + 0.941 \cdot 10^{-6}) - 0.157 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-83.4 \cdot t}) \end{bmatrix}$$

Зворотне перетворення за Лапласом  $p \rightarrow t$  передатної функції за каналом збурення:  $Fg \rightarrow y_I$  розширеного технологічного об'єкту має вигляд:

$$h_{1Fgy1}(t) = W_{1Fgy1}(p) \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow[\text{float, 3}]{\text{invlaplace, p}} \begin{bmatrix} -0.00000615 \cdot e^{-0.923 \cdot t} + (0.0000737 \cdot e^{-357.0 \cdot t} + (0.000168 - 0.0000165 \cdot e^{-714.0 \cdot t}) - 0.000219 \cdot e^{-662 \cdot t}) \\ -0.00000479 \cdot e^{-0.923 \cdot t} + (0.0000759 \cdot e^{-357.0 \cdot t} + (0.000148 - 0.0000168 \cdot e^{-714.0 \cdot t}) - 0.000202 \cdot e^{-74.8 \cdot t}) \\ -0.00000383 \cdot e^{-0.93 \cdot t} + (0.0000783 \cdot e^{-357.0 \cdot t} + (0.000132 - 0.000017 \cdot e^{-714.0 \cdot t}) - 0.00019 \cdot e^{-83.4 \cdot t}) \end{bmatrix}$$

Аналогічно будуюмо графіки перехідних характеристик розширеного технологічного об'єкту за каналом керування і збурення. На одному полі розташовуються графіки номінального, та навантаження, яке змінюється. Вони наведені на рис.Д3.3 та Д3.4.

Зміна навантаження аналогічна

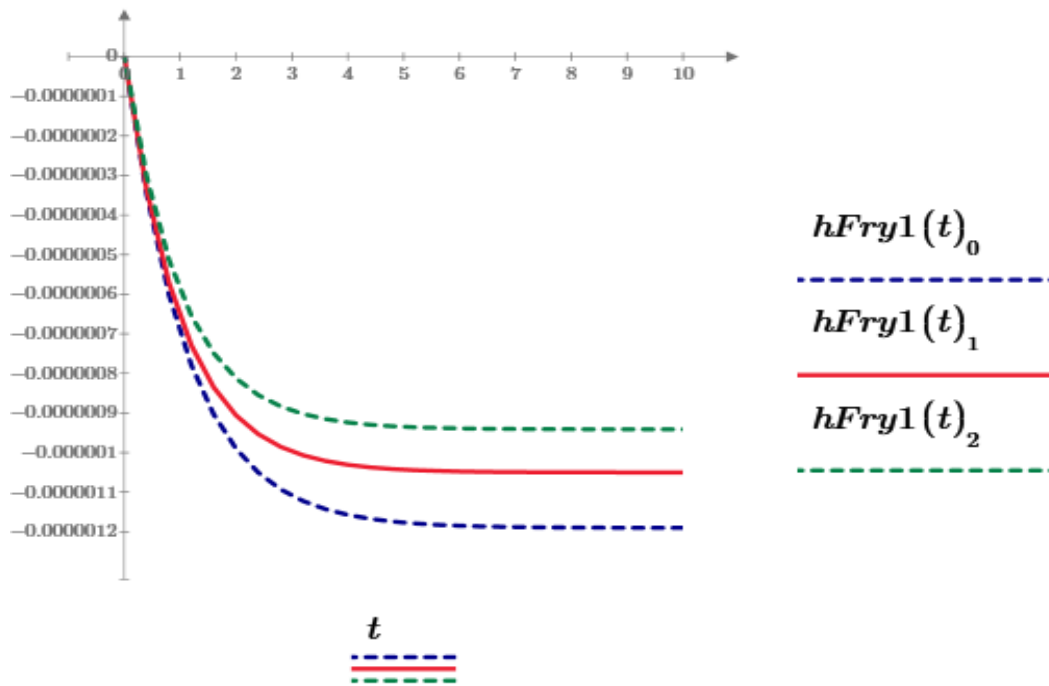


Рис.Д3.3 Перехідні характеристики за каналом керування  $h1Fry1(t)_0$ - при зменшенні навантаження (-20%),  $h1Fry1(t)_1$ – при номінальному навантаженні,  $h1Fry1(t)_2$ - при збільшенні навантаження(+20%)

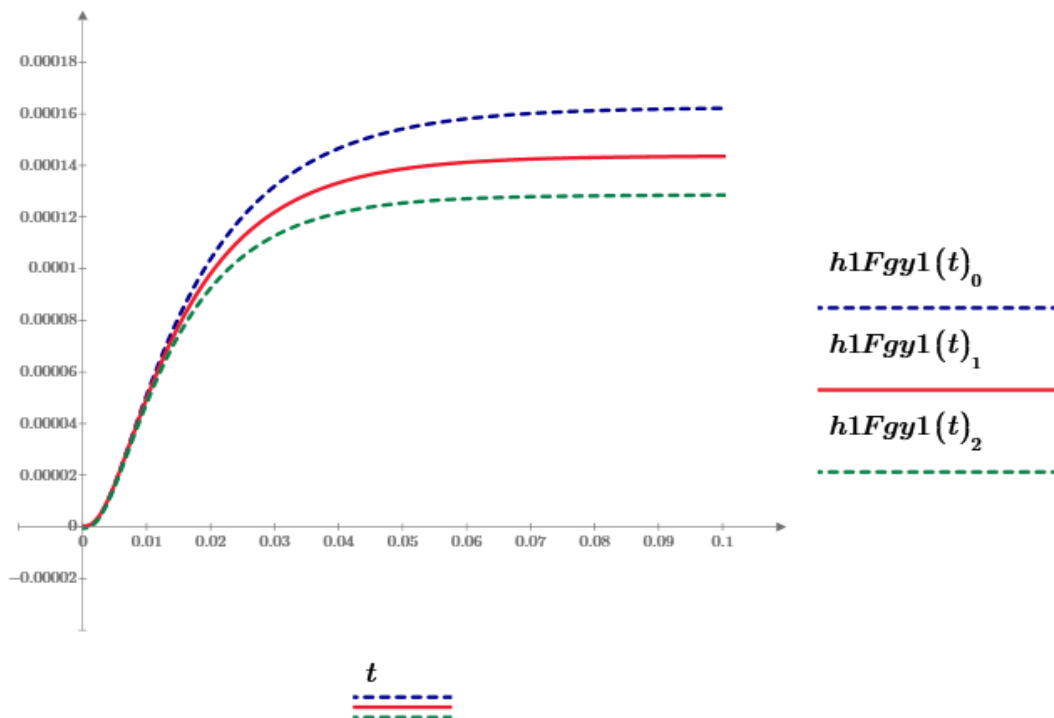


Рис. Д3.4.Перехідні характеристики за каналом збурення  $h1Fry1(t)_0$  при зменшенні навантаження (-20%),  $h1Fry1(t)_1$ – при номінальному навантаженні,  $h1Fry1(t)_2$ - при збільшенні навантаження(+20%)

Дивлячись на графіки ДЗ.1 і ДЗ.3 та ДЗ.2 і ДЗ.4 та порівнюючи їх, можна зробити висновок, що врахування динамічних властивостей датчика та виконавчого механізму практично не впливає на зміну динамічних властивостей об'єкту при зміні навантаження.

Розрахунки проводилися в середовищі Mathcad Prime 9.0.0.0 компанії Parametric Technology Corporation.

## Числові методи розв'язання системи диференційних рівнянь математичної моделі технологічного об'єкту керування

При розв'язанні диференційних рівнянь математичної моделі застосовують числові методи для отримання наближених розв'язків. Прості ідеї, які використовуються для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, можна розширити до розв'язків більш складних систем рівнянь у частинних похідних.

**Метод скінчених різниць**(МСР) оснований на апроксимації похідних, що входять в диференціальні рівняння, їх дискретними (різницеvими) аналогами. Безперечною перевагою метода є висока ефективність і простота реалізації, що дає можливість побудови схем високого порядку точності.

Існують наступні методи вирішення задачі Коші:

1. **Однокрокові** методи, в яких для знаходження наступної точки на кривій  $y = f(x)$  потрібна інформація лише про один попередній крок. Однокроковими є:

- метод Ейлера;
- методи Рунге-Кутта.

2. **Методи прогнозу та корекції** (багатокрокові), в яких для відшукування наступної точки кривої  $y = f(x)$  потрібна інформація більш ніж про одну з попередніх точок. Щоб отримати досить точне числове значення, часто вдаються до ітерації. До таких методів належать методи:

- Мілна;
- Адамса-Башфорта;
- Хеммінга та ін.

Всім однокроковим методам притаманні певні спільні риси:

- щоб отримати інформацію у новій точці, треба **мати дані лише в одній попередній точці**. Тому однокрокові методи називають «самостартуючими»;

- в основі всіх однокрокових методів лежить розкладання функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, що містять  $h$  в ступені до  $k$  включно. Ціле число  $k$  називається *порядком методу*;

- всі однокрокові методи *не вимагають дійсного обчислення похідних*, а обчислюється лише сама функція в одній або кількох проміжних точках;

- властивість "самостартування" дозволяє легко змінювати величину кроку.

Якщо в однокрокових методах значення  $y_{n+1}$  залежало тільки від інформації в попередній точці  $t_n$ , то здається цілком ймовірним, що можна домогтися більшої точності, якщо використовувати інформацію про кілька попередніх точок  $t_n, t_{n-1}, \dots$ . Саме так і чинять у *багатокрокових методах*. Якщо метод використовує інформацію в двох точках, це означає, що він має другий порядок точності. Наприклад, метод Адамса-Башфорта другого порядку.

Процес підвищення порядку, а отже й точності, в принципі, можна продовжити, використовуючи дедалі більше попередніх точок, отже, і інтерполяційний поліном  $P$  вищого ступеня, і отримати метод Адамса – Башфорта як завгодно високого порядку. Однак точність обчислень із збільшенням порядку зростає нелінійно. Що далі попередня точка від поточної точки, тим слабше вона впливає на точність. Багатокрокові методи породжують проблему, яка не виникала під час використання однокрокових методів. Так як в розглянутих методах використовується інформація про кілька раніше отриманих точок, то на відміну від однокрокових методів вони не мають властивість "самостартування". Тому перед тим, як застосовувати багатокроковий метод, доводиться обчислювати вихідні дані з допомогою будь-якого однокрокового методу. Часто при цьому вдаються до методу Рунге - Кутта.

Найпростіший однокроковий метод розв'язування задачі Коші — метод Ейлера. Хоча це не найефективніший метод, він дає картину того, як діяти, і його можна покращити шляхом впровадження кращих методів, які, як правило, описані в тексті числового аналізу.

Рівняння (Д4.1) відображає диференціальне рівняння у формі Коші, що задовольняє початкову умову (Д4.2):

$$y' = f(t, y) \quad (\text{Д4.1})$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{Д4.2})$$

Числове розв'язання задачі полягає у побудові таблиці наближених значень  $y_1, y_2, \dots, y_n$  розв'язання рівняння (Д4.1) у точках  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Точки  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — вузли сітки. Використовується система рівновіддалених вузлів. Розмір  $h$  — крок сітки (крок інтегрування).

Метод Ейлера базується на розкладанні  $y$  в ряд Тейлора на  $t_0$ :

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + \dots \quad (\text{Д4.3})$$

Якщо значення  $h$  мале, то члени, що містять  $h$  у другому або вищому ступені, є малими вищих порядків і ними можна знехтувати. Тоді маємо наступне рівняння :

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) \quad (\text{Д4.4})$$

Значення  $y'(t_0)$  знаходиться з диференціального рівняння (Д4.1), шляхом підставлення в нього початкової умови (Д4.2). Таким чином, можна отримати наближене значення залежної змінної при малому зміщенні  $h$  від початкової точки. Цей процес можна продовжити, використовуючи співвідношення, представлене у рівнянні (Д4.5), і роблячи необхідну кількість кроків:

$$y_{h+1} = y_n + hf(t_n, y_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Д4.5})$$

Геометричний зміст методу Ейлера полягає в апроксимації рішення на відрізку  $[t_n, t_{n+1}]$  відрізком дотичної, проведеної до графіка рішення у точці  $t_n$ .

Як видно із рисунка Д4.1, на кожному новому кроці наближене рішення переходить на інший член сімейства рішень. В результаті накопичується помилка дискретизації, яка лінійно залежить від  $h$ , так як члени ряду Тейлора, що містять  $h$  у другому і вищому ступені, відкидаються. Тому метод Ейлер має перший порядок точності.

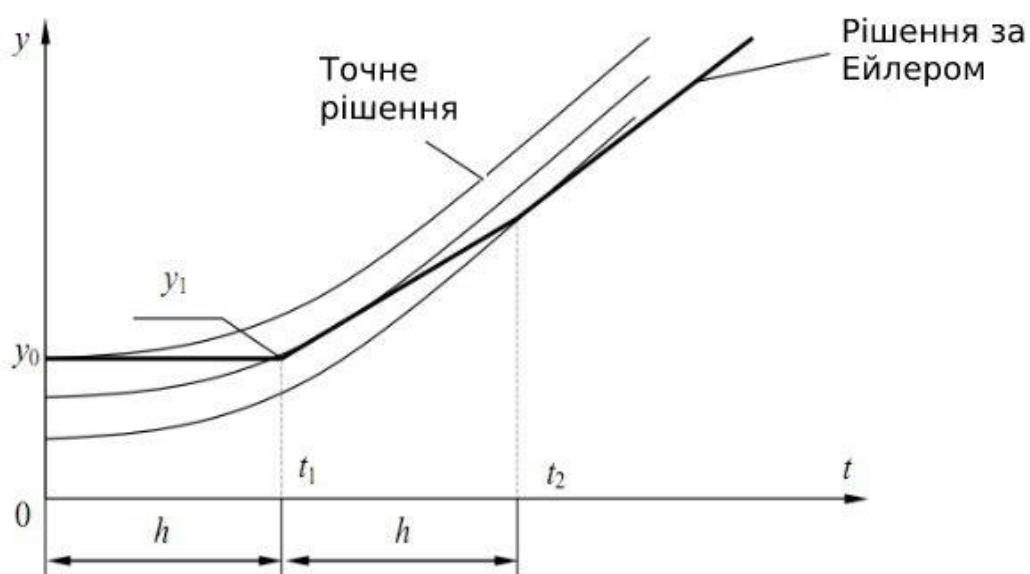


Рис. Д4.1 – Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Практичним наслідком цього факту є очікування того, що при зменшенні  $h$  наближене рішення буде все більш точним і при русі  $h$  до значення нуль буде сходиться до точного рішення з лінійною швидкістю по  $h$ . Тобто очікується, що при зменшенні кроку  $h$  вдвоє помилка зменшиться в 2 рази. Дуже повільна збіжність при зменшенні  $h$  характерна для методів першого порядку і служить перешкодою для їх широкого використання.

Хоча тангенс кута нахилу дотичної до істинної кривої у початковій точці відомий, він змінюється відповідно до зміни незалежної змінної. Тому в точці  $(t_0+h)$  нахил дотичної вже не такий, яким він був у точці  $t_0$ . Отже, при збереженні початкового нахилу дотичної по всьому інтервалі  $h$  до результатів обчислень вноситься похибка. Точність методу Ейлера можна суттєво підвищити, використовуючи, наприклад, середнє значення похідної на початку та наприкінці інтервалу. Саме це вирішує модифікований метод Ейлера.

У модифікованому методі Ейлера спочатку обчислюється значення функції у наступній точці за простим методом Ейлера:

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(t_n + y_n) \quad (\text{Д4.6})$$

Це значення використовується для обчислення наближеного значення похідної наприкінці інтервалу  $f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)$ . Обчисливши середнє між цим значенням похідної та її значенням на початку інтервалу, можна знайти більш точне значення  $y_{n+1}$ :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(t_n + y_n) + f(t_{n+1} + y_{n+1}^*)] \quad (\text{Д4.7})$$

Графічна інтерпретація модифікованого методу Ейлера представлена на рисунку Д4.2.

Принцип, на якому ґрунтується модифікований метод Ейлера, можна пояснити інакше. Для цього необхідно повернутися до розкладання функції в ряд Тейлора, як на рівнянні (Д4.8):

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + \dots \quad (\text{Д4.8})$$

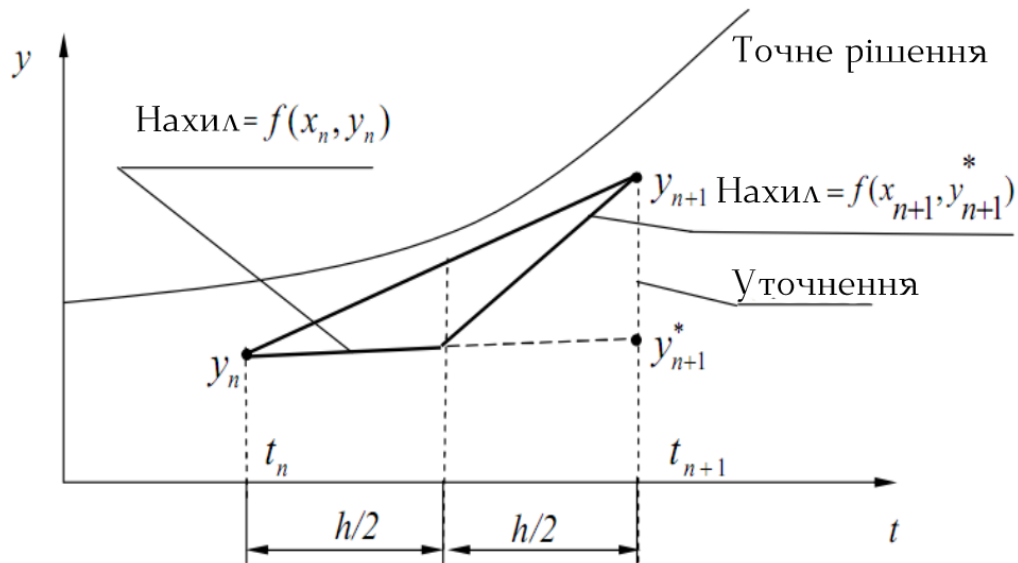


Рис. Д4.2 – Графічна інтерпретація модифікованого методу Ейлера

Здається, що, зберігши член з  $h^2$  і відкинувши члени вищих порядків, можна підвищити точність. Однак для того, щоб зберегти член з  $h^2$ , треба знати другу похідну  $y''(t_0)$ . Її можна апроксимувати кінцевою різницею, відображеною у формулі (Д4.9).

$$y''(t_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{y'(t_0+h) - y'(t_0)}{h} \quad (\text{Д4.9})$$

Підставивши вираз (Д4.9) у ряд Тейлора з відкинутими членами третього порядку, буде знаходитись наступне:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \frac{1}{2}h[y'(t_0 + h) + y'(t_0)]$$

Отримане співпадає з раніше наведеним виразом, представленим у формулі (Д4.7).

Цей метод є методом другого порядку, тому що в ньому використовується член Тейлора ряду, що містить  $h^2$ . Підвищенням точності доводиться розплачуватися додатковими витратами машинного часу, необхідними для обчислень.

Для однокрокового числового методу Рунге-Кутта основною задачею є знайти розв'язання диференційного рівняння (Д4.10).

$$y' = f(t, y) \quad (\text{Д4.10})$$

Це рівняння задовольняє початкову умову, як на рівнянні :

$$y'(t_0) = y_0 \quad (\text{Д4.11})$$

Принцип, на якому заснований метод Рунге-Кутта, можна пояснити, як і принцип, на якому заснований метод Ейлера, за допомогою розкладання функції в ряд Тейлора, зображеної у рівнянні (Д4.8).

Щоб утримати у ряді Тейлора член  $n$ -го порядку, необхідно обчислити  $n$ -у похідну залежної змінної. При використанні модифікованого методу Ейлера для отримання другої похідної в кінцевій формі достатньо було знати нахил кривої на кінцях інтервалу, що розглядається. Щоб обчислити третю похідну в кінцево-різницевому вигляді, необхідно мати значення другої похідної щонайменше у двох точках. Для цього необхідно додатково визначити нахил кривої в деякій проміжній точці інтервалу  $h$ , тобто між  $t_n$  та  $t_{n+1}$ . Очевидно, чим вище порядок обчислюваної похідної, тим більше додаткових точок потрібно обчислити всередині інтервалу. Оскільки існує кілька способів розташування внутрішніх точок та вибору відносних ваг для знайдених похідних, то метод Рунге–Кутта, по суті, поєднує цілу сукупність методів розв'язання диференціальних рівнянь.

Найбільш поширеним є метод четвертого порядку точності, у якому присутні всі члени ряду Тейлора, включаючи  $h_4$ . Розрахунки під час використання цього класичного методу проводяться за формулою :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{Д4.12})$$

Коефіцієнти  $k_1, k_2, k_3, k_4$  дорівнюють наступним виразам .

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, \quad y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, \quad y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_n + h, \quad y_n + k_3) \end{aligned}$$

Метод Ейлера та його модифікація по суті є методами Рунге – Кутта першого і другого порядку відповідно. Вища точність методу Рунге – Кутта дозволяє збільшити крок інтегрування  $h$ . Допустима похибка на кроці визначає його максимальну величину. У прикладних пакетах програм вибір кроку часто здійснюється автоматично. Для цього проводять обчислення спочатку з кроком  $h$ , а потім з кроком  $h/2$ .

При реалізації методів Рунге – Кутта на ЕОМ для кожної точки проводять подвійне обчислення. Якщо отримані при цьому значення не перевищують встановлену похибку, то для точки  $t_{n+1}$  крок подвоюють, інакше зменшують удвічі.

Формули Рунге-Кутта можна використовувати для розв'язання систем диференціальних рівнянь і, відповідно, для розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків, оскільки будь-яке диференціальне рівняння  $n$ -го порядку можна звести до  $n$  диференціальних рівнянь першого порядку.

Наприклад, маємо диференціальне рівняння другого порядку, зображене на формулі :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (\text{Д4.13})$$

Нехай буде прийнято наступне:

$$z = \frac{dy}{dt}$$

Тоді маємо:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Як результат, отримано два рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = g(t, y, z) \end{cases} \quad (\text{Д4.14})$$

В такому випадку задача Коші містить дві початкові умови, зображені у рівняннях (Д4.15) та (Д4.16).

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{Д4.15})$$

$$z(t_0) = z_0 \quad (\text{Д4.16})$$

Для цього випадку формули Рунге-Кутта мають наступний вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{Д4.17})$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \quad (\text{Д4.18})$$

Визначення кожного з коефіцієнтів представлено у формулах

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, y_n, z_n) \\
 L_1 &= hg(t_n, y_n, z_n) \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}L_1\right) \\
 L_2 &= hg\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}L_1\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}L_2\right) \\
 L_3 &= hg\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}L_2\right) \\
 k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3, z_n + L_3) \\
 L_4 &= hg(t_n + h, y_n + k_3, z_n + L_3)
 \end{aligned}$$

Наприклад маємо систему лінійних диференційних рівнянь, де рівняння вже були згруповані для відокремлення складових, має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_1y_2 + a_2y_1 + a_3 \\ \frac{dy_2}{dt} = a_4y_1 - a_4y_2 \end{cases} \quad (\text{Д4.19})$$

Тепер необхідно використати рівняння Рунге-Кутта четвертого порядку:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f_1(y_1, y_2) \\
 k_2 &= f_1\left(y_1 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_1}{2}\right) \\
 k_3 &= f_1\left(y_1 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_2}{2}\right) \\
 k_4 &= f_1(y_1 + h, y_2 + hk_3) \\
 f_1(y_1, y_2) &= y_1 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= f_2(y_1, y_2) \\
m_2 &= f_2\left(y_1 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hm_1}{2}\right) \\
m_3 &= f_2\left(y_1 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hm_2}{2}\right) \\
m_4 &= f_2(y_1 + h, y_2 + hm_3) \\
f_2(y_1, y_2) &= y_2 + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)
\end{aligned}$$

Підставимо змінні з рівнянь (Д4.19) до рівнянь Рунге-Кутта:

$$\begin{aligned}
k_1 &= a_1 y_2 + a_2 y_1 + a_3 \\
k_2 &= a_1 \left(y_2 + \frac{hk_1}{2}\right) + a_2 \left(y_1 + \frac{h}{2}\right) + a_3 \\
k_3 &= a_1 \left(y_2 + \frac{hk_2}{2}\right) + a_2 \left(y_1 + \frac{h}{2}\right) + a_3 \\
k_4 &= a_1 (y_2 + hk_3) + a_2 (y_1 + h) + a_3 \\
f_1(y_1, y_2) &= y_1 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
m_1 &= a_4 y_1 - a_4 y_2 \\
m_2 &= a_4 \left(y_1 + \frac{h}{2}\right) - a_4 \left(y_2 + \frac{hm_1}{2}\right) \\
m_3 &= a_4 \left(y_1 + \frac{h}{2}\right) - a_4 \left(y_2 + \frac{hm_2}{2}\right) \\
m_4 &= a_4 (y_1 + h) - a_4 (y_2 + hm_3) \\
f_2(y_1, y_2) &= y_2 + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)
\end{aligned}$$

У більшості випадків **МСР** обмежений випадками відносно простих по геометрії розрахункових областей.

Для опису динаміки рідини і газу сформульовано окремий напрямок метода скінчених елементів, що створений спочатку для розв'язку рівнянь механіки деформованого твердого тіла. *Метод скінчених елементів* (МСЕ) - числова техніка знаходження розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь у частинних похідних. Процес розв'язання побудований або на повному усуненні диференціального рівняння для стаціонарних задач, або на розкладанні диференціальних рівнянь у частинних похідних в апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь, які потім розв'язуються використанням якої-небудь стандартної техніки, такої як метод Ейлера, Рунге-Кутта тощо.

У сучасній обчислювальній гідрогазодинаміці найбільш популярним способом дискретизації рівнянь є *метод скінчених об'ємів* (МСО). Це числовий метод інтегрування систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. Використання блочно-структурованих сіток є відносно простим і ефективним засобом вирішення проблеми моделювання течій в областях складної геометрії.

## Літературні джерела

1. Остапенко Ю.О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування. Підручник для студентів вищих закладів освіти, що навчаються за напрямом «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». – К.: Задруга, 1999. – 424 с.: Іл. – Бібліогр. В кінці розділів. ISBN 966-7405-36-2
2. Голінко І.М., Кубрак А.І. Моделювання та оптимізація систем керування // Кам'янець–Подільський: ПП Буйницький, 2012. –262с.
3. Математичне моделювання об'єктів керування хімічних і фармацевтичних виробництв: навч. посібник/ Красніков І. Л., Бабіченко А. К., Вельма В. І., Подустов М. О., Зайцев О. І., Бабіченко Ю. А.; за ред. А.К. Бабіченко. – Х. :Вид-во ТОВ "С.А.М.", 2015 р. – 224 с.
4. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1 :навчальний посібник / Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О.М.; за заг. ред. Р.Н. Кветного. –Вінниця: ВНТУ, 2012. – 193с.
5. Kvyetnyy R. Basics of Modelling and Computational Methods /R. Kvyetnyy. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.