

Національний технічний університет України «Київський політехнічний університет
імені Ігоря Сікорського»

Національний технічний університет України «Київський політехнічний університет
імені Ігоря Сікорського»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Шолохов Олексій Вікторович

УДК 519.8: 519.7: 629.7

ДИСЕРТАЦІЯ

**Робастне еліпсоїдальне оцінювання станів лінійних керованих систем
з обмеженими збуренням та завадою**

01.05.04 – Системний аналіз та теорія оптимальних рішень

124 – Системний аналіз

Подается на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів
і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

О.В. Шолохов

Науковий керівник Панкратова Наталія Дмитрівна, доктор технічних наук,
професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Шолохов О. В. Робастне еліпсоїдальне оцінювання станів лінійних керованих систем з обмеженими збуренням та завадою. – Кваліфікаційна наукова робота на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – Системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, 2019 р.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню на підставі системного підходу важливої науково-практичної проблеми – розробці методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем, що функціонують в умовах нестатистично заданої невизначеності, тобто їх стан збурюється обмеженим за величиною зовнішнім збуренням, а вимірювання змінної стану, за якою система є спостережуваною, містить обмежену за величиною похибку вимірювання. Цей метод має забезпечувати робастність процесу оцінювання щодо порушення апріорних припущень відносно зовнішніх збурень і похибки вимірювання стану системи, тобто відновлення оцінювання після декількох обробок вимірювань, «несумісних» з попередньою оцінкою, та збереження керування системою в цьому випадку.

Для розробки запропонованого методу у дисертаційній роботі проведено системний аналіз процесів функціонування і оцінювання спостережуваних керованих лінійних систем, функціонування яких може бути описано системою диференціальних або різницевих рівнянь в нормальній формі Коші. Прикладами таких об'єктів і процесів є рух літальних і надводних апаратів: літаків, аеродинамічних і балістичних ракет, штучних супутників Землі та інших небесних тіл; суден, підводних човнів, рух яких збурюється зовнішніми невідомими, але обмеженими чинниками. Особливо цей метод затребуваний для застосування оцінювання станів і керування безпілотними об'єктами. Оцінюванню в таких об'єктах підлягають змінні стану – параметри траєкторного та кутового руху: координати положення центру мас об'єкта в просторі, його швидкість, прискорення, кути орієнтації відносно базової системи відліку, кутові швидкість та прискорення

тощо – коли безпосереднє вимірювання цих змінних вимагає дорогих приладів або взагалі неможливо.

Прикладами процесів є установки для синтезу хімічних сполук, коли потрібно оцінювати, наприклад, температуру в середині установки, або ступень готовності вихідного продукту в залежності від вимірюваних тиску, температури, часу тощо.

Серед цих систем було виділено такі системи, які збурюються переважно по одній змінній стану, а збурення по іншим змінним стану визначають поведінку такої системи несуттєво і на практиці їх впливом на цю систему можна знехтувати без помітного погіршення якості її функціонування. До того ж, часто вимірюванню доступні не всі змінні стану, або засоби для вимірювання деяких змінних неприпустимо дорогі. Тому, якщо така система спостережується за вимірюванням неповного вектору стану, то доцільно вимірювати тільки ці змінні, що входять до неповного вектору стану, за яким система є спостережуваною. Окремим випадком таких систем є системи зі скалярними входом і виходом – так звані одновимірні системи, які раніше також називали однозв'язними. Вони описуються системою диференціальних рівнянь в формі Коші, а матриця динаміки при цьому має форму Фробеніуса. Прикладом таких систем є системи з почерговим керуванням, що характеризуються специфічним обмеженням на керування – обмеженням на кількість одночасно увімкнених входів (каналів) системи.

Якщо відомі статистичні характеристики зовнішніх збурень і завади вимірювання, то цю задачу вирішують з допомогою, наприклад, фільтру Калмана. Але аналіз стану проблеми показав, що є частими випадки, коли технічні об'єкти і процеси функціонують в умовах нестатистичної невизначеності і щодо невизначеності відомі тільки границі, якими обмежено значення збурення і вимірювання. Також, аналіз функціонування реальних технічних об'єктів показав, що під дією неврахованих чинників можливі зміни апріорних границь похибки вимірювання та або границь зовнішнього збурення. В таких випадках застосування фільтру Калмана неможливо.

Для наближення множини невизначеності стану – множини можливих стану системи і множини можливих значень зовнішнього збурення була обрана добре

відома еліпсоїдальна апроксимація, яка є найбільш зручною з точки зору мінімуму параметрів, що треба визначати в процесі оцінювання станів системи і простоти операцій з цими множинами. В якості критеріїв мінімізації застосовано найбільш відомі: мінімум багатовимірною об'єму еліпсоїду і мінімум суми квадратів його півосей.

На підставі вищевикладеного вирішення проблеми в дисертації було поділено на декілька послідовних етапів.

На перших двох етапах вирішувалось завдання еліпсоїдальної апроксимації множини можливого стану динамічної системи, що його набуває система під дією зовнішнього збурення.

На першому етапі будується еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності яка є сумою за Мінковським апріорного еліпсоїду початкового стану системи і відрізка, що є множиною можливих значень, яких може набувати зовнішнє збурення, що діє на систему по одному каналу керування або по одній змінній, за критерієм мінімум багатовимірною об'єму еліпсоїду. У порівнянні з відомим рішенням запропоноване в даній дисертаційній роботі рішення не потребує одночасного приведення двох еліпсоїдів до діагонального вигляду, тобто до комутативності матриць обох еліпсоїдів. Для отримання рішення було запропоновано і доведено лему і твердження. Отримане рішення співпало з відомим.

Також на підставі тієї же самої леми було отримано відоме оптимальне рішення за критерієм мінімуму суми квадратів півосей, для суми двох еліпсоїдів. Для цього також було доведено твердження.

На другому етапі запропоновано спрощення отриманого рішення і одержано субоптимальну еліпсоїдальну апроксимацію за критерієм мінімуму об'єму еліпсоїду оцінки. Це суттєво зменшило кількість обчислень, що є важливим для практики. Комп'ютерне моделювання показало прийнятне відхилення значення критерію мінімізації від оптимального значення.

Наукова новизна результатів, одержаних на першому і другому етапах, полягає у тому, що *вперше*:

- запропоновано і доведено лему, на підставі якої можна одержати оптимальні рішення, принаймні, за двома критеріями мінімізації;
- отримано оптимальне рішення за критерієм мінімуму об'єму апроксимуючого еліпсоїду більш простим шляхом ніж відомий.

Також на цьому етапі запропоноване субоптимальне рішення за критерієм мінімуму об'єму еліпсоїду оцінки *практична цінність* якого у тому, що значення критерію мінімізації при його застосуванні не дуже відрізняється від оптимального, але це рішення набагато простіше, що у багатьох практичних випадках є переважним відносно незначного поліпшення оцінки.

На третьому та четвертому етапах аналізується усі можливі випадки розташування у просторі станів системи апріорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання. На підставі цього отримуються необхідні формальні вирази, які застосовуються для дослідження порушення апріорних припущень щодо границь зовнішнього збурення та завади вимірювання змінної стану з метою подальшого надання робастної властивості методу оцінювання.

На третьому етапі проаналізовано і потім формалізовано усі можливі випадки (їх всього чотири) взаємного розташування апріорного еліпсоїду стану і множини вимірювання одної з змінних стану, яка уявляє собою так званий «гіпершар» у просторі станів спостережуваної системи. Запропоновано аналітичні вирази щодо визначення який саме випадок взаємного розташування має місце. Знання цього необхідно для прийняття рішення щодо дій для подальшого оцінювання.

На четвертому етапі на підставі отриманих аналітичних виразів запропоновано спосіб надання робастної властивості методу оцінювання шляхом перевизначення границі завади вимірювання доки не зникне ознака порушення знов прийнятого припущення щодо границі завади вимірювання.

Наукова новизна результатів, одержаних на третьому і четвертому етапах, полягає у тому, що:

- по-перше, проаналізовано і формалізовано усі чотири можливі випадки взаємного розташування апріорного еліпсоїду стану і множини вимірювання одної з змінних стану;
- по-друге, на підставі цієї формалізації *вперше* запропоновано спосіб надавання робастності через адаптацію методу оцінювання до зміни границі завади вимірювання, а також через комбінацію цього способу з відомим способом масштабування апріорного еліпсоїду до його перетину з «гіпершаром» множини вимірювання.

На п'ятому етапі розроблено математичний апарат для використання наявних вимірювань однієї змінної стану або деякої лінійної комбінації змінних стану спостережуваної системи для уточнення її стану за критерієм, який мінімізує об'єм або суму квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду множинної оцінки; вирішено проблему особливих випадків у процесі обчислення потрібних виразів для оцінювання – ділення на нуль та появи від'ємних та уявних значень параметрів у виразах.

Наукова новизна і практична цінність одержаних на цьому етапі результатів полягає у дослідженні відомих оптимальних рішень щодо їх працездатності в окремих випадках, які часто трапляються на практиці, з'ясовано їх непрацездатність у таких випадках і запропоновано субоптимальні рішення для двох критеріїв мінімізації множинної оцінки, які у найбільш частих на практиці випадках дають трохи більше значення критеріїв оптимізації ніж оптимальні рішення проте працездатні при любых випадках, конструктивно реалізують робастність оцінювання і значно простіші ніж оптимальні. Все це збільшує надійність методу оцінювання.

Наукова новизна результатів, отриманих на шостому етапі у тому, що вперше виведено зв'язок між апріорним еліпсоїдом, параметрами вимірювача, максимальним значенням завади вимірювання, розмірністю простору стану системи і ступеню невизначеності апостеріорного еліпсоїду відносно апріорного. Для цього сформульовано і доведено теорему. *Практична цінність одержаних на цьому етапі*

результатів у тому, що це дає можливість обирати вимірювач в залежності від вимог то точності оцінки змінних стану спостережуваної системи.

На останньому етапі розроблений метод оцінювання було апробовано шляхом моделювання і вирішення задачі оцінювання положення нерухомого об'єкту з рухомого об'єкту та оцінювання параметрів кутового руху штучного супутника Землі і керування його кутовим рухом. *Отримані результати показали практичну придатність розробленого методу для вирішення практичних задач.*

На підставі запропонованого методу оцінювання було розроблено і впроваджено у виробництво на Казенному підприємстві спеціального приладобудування «Арсенал» Державного космічного агентства України конструктивні алгоритми для вирішення практичних задач, а саме: оцінювання станів технічних виробів у процесі їх налаштування. Це сприяє підвищенню технічних та експлуатаційних характеристик зазначених виробів. Відповідний «Акт впровадження результатів дисертаційної роботи Шолохова О. В.» за №717/70-12/2 від 25.04.18, наданим Казенним підприємством спеціального приладобудування «Арсенал» додається.

Також результати, отримані у дисертаційної роботі, впроваджено в навчальний процес кафедри математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», що підтверджується довідкою.

Ключові слова: лінійна керована спостережувана система; фазовий простір станів; зовнішнє збурення; множина досяжності; еліпсоїдальна апроксимація; сума множин за Мінковським; завада вимірювання; «гіпершар»; перетин множин; робастність; порушення апріорних припущень; багатовимірний об'єм еліпсоїду; слід матриці еліпсоїду.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К задаче гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы, *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2005. № 4. С. 44-51. (Особистий внесок – доведено твердження

щодо оптимальних значень параметрів, які мінімізують еліпсоїд, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи, яка є сумою за Мінковським початкового еліпсоїду стану і відрізка – множини зовнішнього збурення. Також здобувачем розроблено математичну та комп'ютерну моделі цієї апроксимації та проведено комп'ютерне моделювання для порівняння з уже відомим способом апроксимації).

2. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 1. С. 16-25. (журнал індексується наукометричною базою SCOPUS). (Особистий внесок – доведено лему про покриття перетину еліпсоїду і «гіпершару»).
3. Шолохов А. В. Субоптимальная аппроксимация суммы эллипсоидов и пересечения эллипсоида с гиперслоем. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 3. С. 78-87.
4. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. О связи параметров множества возможных состояний наблюдаемой системы с параметрами измерительного устройства и размерностью пространства состояний системы. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. № 4. С. 96-103. (журнал індексується наукометричними базами DOAJ, Index Copernicus, EBSCO, Google Scholar, РІНЦ, ВІНТІ, українським реферативним журналом «Джерело», українською реферативною базою даних «Україніка наукова», науковою періодикою України). (Особистий внесок – висунуто і доведено теорему про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів статичного еліпсоїдального оцінювання).
5. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. №1. С.96-105. (журнал індексується наукометричною базою SCOPUS) |DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10559-019-00114-x>

(Особистий внесок – вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням: висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апріорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі).

6. Oleksii V. Sholokhov. Investigation and simulating of algorithm of building of set of attainability of linear controlled system. 2007. *4th IEEE Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. IDAACS 2007* | conference-paper | (труди конференції індексуються наукометричною базою SCOPUS) DOI: [10.1109/IDAACS.2007.4488439](https://doi.org/10.1109/IDAACS.2007.4488439) EID: 2-s2.0-50149093918.
7. Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы: Школа-семинар для молодых ученых: «Научные космические исследования». 7-13 вересня 2006р., м. Євпаторія.
8. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы: XXV научно-техническая конференция памяти Н.Н.Острякова. 10-12 октября 2006г, г. Санкт-Петербург, Россия.
9. Шолохов А. В. Исследование эллипсоидальной аппроксимации пересечения эллипсоида с гиперслоем по критерию минимума объема: Міжнародна науково-технічна конференція: «Інтелектуальні системи прийняття рішень і прикладні аспекти інформаційних технологій» (ISDMIT'2007). 15-18 травня 2007р., м. Євпаторія.

10. Шолохов А. В. Оценивание параметров ориентации космического аппарата и погрешностей датчиков системы ориентации алгоритмом эллипсоидального гарантированного оценивания: 1-а Всеукраїнська науково-технічна конференція «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 11-12 грудня 2014р., м. Харків.
11. Шолохов А. В. Ориентация микроспутника с помощью робастного алгоритма эллипсоидального оценивания: 15-та Українська конференція з космічних досліджень. 24-28 серпня 2015р., м. Одеса.
1. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли: 2-а Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 06-07 грудня 2018р., м. Харків.

SUMMARY

Sholokhov O. V. Robust guaranteed ellipsoidal estimation of the states of linear controlled systems with the limited disturbance and the limited interference. – The manuscript.

Thesis for a candidate degree in specialty 01.05.04 – System analysis and the theory of optimal solutions. – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2019.

This thesis is devoted to solving the problem based on the systematic approach of an important scientific and practical problem – developing a method for evaluating the states of dynamic systems in conditions of uncertain uncertainty, namely: a robust guaranteed ellipsoidal estimation of states of linear controlled systems by scalar measurements in conditions of uncertain uncertainty. This method ensures the robustness of the estimation with respect to the violation of a priori assumptions relative to external perturbation, acting on the system, and the error of measurement of the state of the system – that is, maintaining the control of the system in this case, and also improves the quality of its state assessment.

In order to develop the proposed method in the dissertation work, a systematic analysis of the processes of functioning and evaluation of controlled linear systems, the operation of which can be described by a system of differential or difference equations in the normal form of the Cauchy in a continuous or discrete form in such a way that the behavior of real dynamic objects and processes in real conditions can be quantified. Examples of such objects and processes are the movement of aircraft and surface vehicles: airplanes, aerodynamic and ballistic missiles, artificial satellites of the Earth and other celestial bodies; vessels, submarines, the movement of which is intruded by external unknown, but limited factors. Especially this method is in demand for application of the estimation of states and control of unmanned objects. Estimates in the listed objects subject to state variables – parameters of trajectory and angular motion: the coordinates of the position of the center of mass of the object in space, its speed, acceleration, orientation angles relative to basic reference frame, angular velocity and acceleration, etc., when the direct measurement of these variables requires expensive devices or even impossible at all.

Examples of processes are installations for the synthesis of chemical compounds where it is necessary to evaluate, for example, the temperature in the middle of the installation, or the degree of readiness of the output product, depending on the measured pressure, temperature, time, etc.

Among these systems, the same systems were allocated that are perturbed mainly by one variable state, and perturbation by other variables determine the behavior of such a system insignificant and in practice their influence on this system can be neglected without noticeable deterioration in the quality of its functioning. Also not all state variables are often available for measurement, or tools for measuring some variables are unacceptably expensive. Therefore, if such a system is observed by measuring a partial state vector, then it is expedient to measure only those variables that include a partial state vector for which the system is observable. A special case of such systems is systems with scalar input and output, called one-dimensional systems, or also called single-connected systems. They are described by a system of differential equations in the form of Cauchy, and the matrix of dynamics thus has the form of Frobenius. An example of such systems is systems with

alternate control, characterized by a specific control restriction – a limitation on the number of simultaneously inputs (channels) of the system.

If the statistical characteristics of external disturbances and measurement noise are known, then this problem is solved by, for example, the Kalman filter. But the analysis of the state of the problem has shown that there are frequent cases when technical objects and processes function in conditions of non-statistical uncertainty and only the boundaries known to limit the perturbation and measurement are limited in terms of uncertainty. Also, the analysis of the functioning of real technical objects has shown that under the action unrecognized factors may alter the a priori limits of measurement noise and / or the boundaries of external perturbation. In such cases, the Kalman filter cannot be used.

A well-known ellipsoidal approximation was chosen to approximate the set of state uncertainty – the set of possible states of the system and the set of possible values of external perturbation, which is most convenient in terms of the minimum parameters that must be determined in the process of assessing the states of the system and the simplicity of operations with these sets. As the criteria for minimization, the most famous are used: the minimum of the multidimensional volume of the ellipsoid and the minimum sum of squares of its semiaxis.

Based on the above solution, the problem in the dissertation was divided into several successive stages.

In the first two stages, the problem of the ellipsoidal approximation of the set of the possible state of a dynamic system, which the system acquires under the action of external perturbation, was solved.

In the first stage, an ellipsoidal approximation of the set of reaches is constructed, which is the sum of the Minkowski a priori ellipsoid of the initial state of the system and the segment, which is the set of possible values that may acquire the external perturbation that acts on the system by one control channel or one variable, by the criterion of a minimum of multidimensional the volume of the ellipsoid. In comparison with the known solution, the solution proposed in this dissertation does not require the simultaneous reduction of two ellipsoids to a diagonal form, that is, to the commutativity of the matrixes of both ellipsoids. To obtain a solution, a lemma was proposed and proved. The solution

obtained coincided with the known. Also, on the basis of the same lemma, we obtained a known optimal solution for the criterion of the minimum sum of squares of the semiaxis, for the sum of two ellipsoids. To this end, the statement was also proved. In the second stage, simplification of the solution was proposed and suboptimal ellipsoidal approximation was obtained by the criterion of the minimum of the ellipsoid volume estimation. This significantly reduced the number of computations that is important for practice. Computer simulation showed an acceptable deviation of the criterion of minimization from the optimal value.

The scientific novelty of the results obtained at the first and second stages is that for the first time:

- a lemma is proposed and proved, on the basis of which it is possible to obtain optimal solutions, at least for two criteria of minimization;
- the optimal solution for the criterion of the minimum volume of the approximating ellipsoid is obtained in a simpler way than is known.

Also, at this stage, a suboptimal solution is proposed based on the criterion of the minimum ellipsoid volume estimation, *the practical value* of which is that the significance of the minimization criterion in its application is not very different from the optimal, but this solution is much simpler, which in many practical cases is preferable to a relatively slight improvement assessments.

At the third and fourth stages, all possible cases of location of the a priori ellipsoid system and the «hyperlayer» of the set of measurements in the space of states of the system are analyzed. On the basis of this, the necessary formal expressions are obtained, which are used to investigate the violation of a priori assumptions about the boundaries of external perturbation and to prevent the measurement of a variable state in order to further provide the robust property of the method of evaluation.

In the third stage, all possible cases (of which only four) of the mutual arrangement of the a priori ellipsoid of the state and the set of measurements of one of the state variables, representing the so-called "hyper layer" in the space of the states of the observed system, are analyzed and then formalized.

Analytical expressions are proposed to determine what exactly the case of a mutual arrangement takes place. Knowledge of this is necessary to make a decision about the actions for further evaluation.

In the fourth stage, on the basis of the received analytical expressions, a method of providing the robust quality of the method of estimation by redefining the boundary of the measurement noise is proposed until the sign of the violation of the newly assumed assumption along the boundary of the measurement noise is not lost.

The scientific novelty of the results obtained in the third and fourth stages is that:

- firstly, all four possible cases of the mutual arrangement of the a priori ellipsoid of the state and the set of measurements of one of the state variables are analyzed and formalized;
- secondly, on the basis of this formalization, *for the first time*, a method of providing robustness through the adaptation of the method of estimation to the change of the measurement disturbance boundary, as well as through a combination of this method with a known method of scaling the a priori ellipsoid to its intersection with the “hyperlayer” of the measurement set, is proposed *for the first time*.

At the fifth stage, a mathematical instrument was developed to use existing measurements of one variable state or some linear combination of variables of the state of the observed system to specify its state by the criterion that minimizes the volume or sum of the squares of the semis of the approximating ellipsoid of multiple estimation; solved the problem of special cases in the process of calculating the necessary expressions for evaluation – the division into zero and the appearance of negative and imaginary values of parameters in expressions.

The scientific novelty and practical value of the results obtained at this stage is the study of known optimal solutions for their ability to work in some cases, which often occur in practice, it is found that they are incapacitated in such cases, and suboptimal solutions are proposed for two criteria of minimization of multiple estimation, which in the most frequent cases in practice give a little more importance to the optimization criteria

than optimal solutions but workable in any case, constructively implement the robustness of the evaluated I'm much simpler than optimal. All this increases the reliability of the evaluation method.

The scientific novelty of the results obtained at the sixth stage is that *for the first time* the connection between the a priori ellipsoid, the parameters of the meter, the maximum value of the measurement noise, the dimensionality of the space of the system and the degree of uncertainty of the a posteriori ellipsoid relative to the a priori are derived. For this purpose, the theorem is formulated and proved. *The practical value of the results* obtained at this stage is that it gives the opportunity to choose a meter, depending on the requirements of the accuracy of the assessment of the variables of the state of the observed system.

At the last stage, the method of evaluation was tested by simulating and solving the problem of evaluating the position of a fixed object from a moving object and evaluating the parameters of the angular motion of an artificial satellite of the Earth and controlling its angular motion. *The obtained results showed the practical applicability of the developed method for solving practical problems.*

Based on the proposed method of evaluation, constructive algorithms for solving practical problems, namely: assessment of technical product condition during their adjustment, were developed and introduced at ARSENAL Special Device Production State Enterprise of the State Space Agency of Ukraine. This contributes to improving the technical and operational characteristics of these products. The corresponding «Act of implementation Nr. 717/70-12/2 dated 25.04.18» is attached.

Also, the results obtained in the dissertation work are introduced into the educational process of the Department of Mathematical Methods of System Analysis of the Institute of the Applied Systems Analysis NTUU «Igor Sikorsky KPI», which is confirmed by the certificate.

Keywords: a linear controlled observable system; a phase space of states; external disturbance; a set of attainability; ellipsoidal approximation; the Minkowski sum of sets; measurement interference; “hyperlayer”; intersection of sets; robustness; violation of a

priori assumptions; multidimensional volume of an ellipsoid; trace of matrix of the ellipsoid.

ЗМІСТ

ВСТУП	21
РОЗДІЛ 1 МЕТОДОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ОЦІНЮВАННЯ	
СТАНІВ КЕРОВАНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ	29
1.1. Методи оцінювання в умовах невизначеності – загальний огляд.....	29
1.2. Розвиток еліпсоїдальної апроксимації в теорії оптимізації.....	35
1.3. Розвиток еліпсоїдальної апроксимації в задачах обчислювальної геометрії ..	38
1.4. Застосування еліпсоїдальної апроксимації заданої точкової множини для вибору рішення в інженерних задачах.....	40
1.5. Застосування еліпсоїдальної апроксимації в задачах оцінювання станів динамічних і статичних систем.....	41
1.6. Розробка робастних властивостей в задачах оцінювання.....	44
1.7. Застосування гарантованого підходу для синтезу систем автоматичного керування.....	47
1.8. Передумови для застосування гарантованого або стохастичного підходів до оцінювання станів динамічних систем	49
Висновки до розділу 1 і постановка задачі дисертаційного дослідження	50
РОЗДІЛ 2 ЕЛІПСОЇДАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ	
ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ	52
2.1. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності лінійної керованої системи за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму.....	52
2.2. Субоптимальна еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності лінійної керованої системи.....	61
2.3. Моделювання динаміки оптимальної та субоптимальної оцінок	62
2.4. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності лінійної керованої системи за критерієм мінімуму суми квадратів півосей	64
Висновки до розділу 2.....	65
РОЗДІЛ 3 ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ ЗА	
ВИМІРЮВАННЯМИ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ СТАНУ АБО ДЕЯКОЇ ЛІНІЙНОЇ	
КОМБІНАЦІЇ ЗМІННИХ	68

3.1. Визначення умов «спільності» апіорного еліпсоїду та множини вимірювання стану системи та способів усунення порушення цих умов	69
3.2. Еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду з «гіпершаром» - знаходження загального конструктивного виразу.....	73
3.3. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму апроксимуючого еліпсоїду	77
3.4. Субоптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму апроксимуючого еліпсоїду. Різні випадки перетину	82
3.4.1. Загальний випадок перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару»	82
3.4.2. Випадок «занурення» апіорного еліпсоїду в «гіпершар» до половини... ..	84
3.4.3. Випадок дотикання апіорного еліпсоїду і «гіпершару»	85
3.4.4. Порівняння максимальних припустимих значень завади вимірювання при виборі різних виразів для кроку τ та дослідження поведінки отриманої оцінки E_j в залежності від зміни параметрів χ_j і σ_j	87
3.5. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму суми квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду	90
3.6. Субоптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму суми квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду	92
Висновки до розділу 3.....	94
РОЗДІЛ 4 ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНОГО МЕТОДУ ОЦІНЮВАННЯ НА ПРИКЛАДАХ СТАТИЧНОЇ ТА ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМ	96
4.1. Оцінювання стану статичної системи – пеленгація нерухомого об'єкту	97
4.4. Оцінювання стану динамічної системи – орієнтації штучного супутника Землі при його русі по орбіті.....	99
Висновки до розділу 4.....	107
ВИСНОВКИ.....	110

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	112
ДОДАТОК А. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ОЦІНЮВАННЯ КУРСОВОГО КУТА ШТУЧНОГО СУПУТНИКА В ЙОГО РУСІ ПО ОРБІТІ	133
ДОДАТОК Б. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	141
ДОДАТОК В. АКТ І ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ.....	144

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

Г.О. – гарантоване оцінювання

ДКШ – датчик кутової швидкості

ЗСК – зв'язана система координат

МНК – метод найменших квадратів

ОСК – орбітальна система координат

ПМВ – побудувач місцевої вертикалі

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

Системний аналіз та його головні складові частини – теорія керування і дослідження операцій застосовуються для прийняття рішень і керування складними об'єктами: технічними, промисловими, екологічними, соціально-економічними. Априорна інформація щодо цих об'єктів, яка необхідна для формалізації і наступного рішення задач керування й прийняття рішень, завжди неповна. У результаті одної із проблем системного аналізу, яку він має вирішити, стає прийняття рішення і керування в умовах невизначеності. Тому сучасний етап розвитку теорії керування тісно пов'язаний з розвитком методів спостереження, оцінювання, ідентифікації, а проблема оцінювання змінних стану стає частиною проблем системного аналізу.

Класичним розділом теорії керування, пов'язаним з рішенням проблеми в умовах імовірнісної невизначеності, є стохастична теорія керованих систем. Істотний внесок у створення й розвиток цієї теорії внесли Вінер Н., Скороход А. В., Ширяев А. М., Калман Р., Черноусько Ф. Л., Цыпкин Я. З., Фельдбаум О. А. та інші.

Але на практиці часто імовірнісні характеристики невизначених величин – зовнішніх збурень, діючих на об'єкт, та завади вимірювань – невідомі. Більше того, невідомо, чи мають ці величини стохастичну природу. Тому закономірним з'явилося виникнення й розвиток нестохастичного підходу до рішення задач керування й оцінювання в умовах невизначеності, при якому не робиться припущення щодо стохастичної природи невизначеності. Цей напрямок був розвинений у роботах Красовского М. М., Scheppe F. C., Куржанского О. Б., Лідова М. Л., Черноусько Ф. Л., Кунцевича В. М., Пшеничного Б. М., Кириченко М. Ф., Наконечного О. Г., Бакана Г. М., Лычака М. М., Milanese M., Vicino V., Norton J. P., Favier G. та інших.

Серед методів нестохастичного оцінювання важливе місце займають методи гарантованого множинного оцінювання, а саме гарантованого еліпсоїдального оцінювання. Перевагою таких методів є можливість одержання у кожний момент часу поряд із точковою оцінкою вектора оцінюваних змінних стану ще і множинної

оцінки – деякої області, яка гарантовано містить шуканий вектор і послідовно уточнюється на підставі результатів вимірів поточної інформації про невизначені величини. При еліпсоїдальному оцінюванні ця область є багатовимірним еліпсоїдом. Цей спосіб апроксимації опуклої множини взагалі і множини можливого стану керованих систем зокрема почали розвивати: Красовский М. М., Schweppe F. C., Kahan W., Bertsekas D. P., Rhodes I. B., Schlaepfer F. M., Шор Н.З., Гершович В. І., Стеценко С. І., Куржанський О.Б. та інші; подовжили Черноусько Ф. Л., Овсеєвич О. Й., Гусев М. І., Хонін В. А., Бакан Г. М., Волосов В. В., Куссуль Н. М., Сальніков М. М., Стецюк П. І., Рубльов Б. В., Петунін Ю. І., Рокитянський Д. Я., Поляк Б. Т., Назін О. В., Назін С. О., Жуков А. А., Фурасов В. Д., Шматков А. М. та багато інших; зараз відомі роботи Сальникова М. М., Гусева М. І., Стецюка П. І., Шматкова А. М. та інших.

Одним з недоліків методів гарантованого оцінювання є їх чутливість до порушень прийнятих апріорі припущень, а саме: невірному завданню апріорної області змінних стану, непередбаченої стрибкоподібної зміні оцінюваної змінної стану, збоїв у роботі вимірювальної апаратури – що може привести до так званої «розбіжності» алгоритму оцінювання. Це істотно обмежує практичне застосування алгоритмів гарантованого оцінювання. Тоді особливу актуальність набувають методи оцінювання, здатні зберігати працездатність при вищенаведених випадках.

Ефективним рішенням зазначеної проблеми є введення в процес оцінювання метода адаптації – процедури ідентифікації, що на підставі поточних вимірювань, отриманих в процесі оцінювання, здатна коректувати апріорну інформацію – змінювати припущення щодо зовнішніх збурень та або завади вимірювання.

Слід зауважити, що часто трапляється, що збурення діє переважно по одному з каналів керування або по одній змінній. Тоді доцільно рішення задачі оцінювання множини можливого стану системи і подальшого керування неї у постановці зі скороченою розмірністю. Також економічно доцільно якщо система спостережується через одну якусь змінну стану використовувати вимірювач тільки однієї цієї змінної. В цьому випадку в математичній постановці задачі оцінювання розмірність вектора вимірювання буду дорівнювати одиниці, тобто матимемо скалярні вимірювання.

Для рішення цієї задачі в даній дисертаційній роботі запропоновано новий системний метод еліпсоїдального робастного оцінювання.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» відповідно до планів наступних науково-дослідних тем:

- Розробка інструментарію діагностування гарантованого функціонування складних технічних систем в умовах невизначеностей та дестабілізуючих факторів ризику. Номер державної реєстрації НДР: 0117U004281;
- Побудова інформаційно-аналітичної платформи сценарного аналізу на основі великих обсягів слабкоструктурованої інформації. Номер державної реєстрації НДР: 0118U003779.

Мета і завдання дослідження

Метою є розробка методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем, що функціонують в умовах нестатистично заданої невизначеності, тобто їх стан збурюється обмеженим за величиною зовнішнім збуренням, а вимірювання змінної стану, за якою система є спостережуваною, містить обмежену за величиною похибку вимірювання. Цей метод має забезпечувати робастність процесу оцінювання щодо порушення апріорних припущень відносно зовнішніх збурень і похибки вимірювання стану системи, тобто відновлення оцінювання після декількох обробок вимірювань, «несумісних» з попередньою оцінкою, та збереження керування системою в цьому випадку.

Для досягнення мети дослідження необхідно було вирішити такі завдання:

- проаналізувати наукові першоджерела щодо обґрунтування актуальності теми дослідження: проаналізувати розвиток методів оцінювання; альтернативні та суміжні методи оцінювання; сучасний стан гарантованого оцінювання; умови, за яких застосування гарантованих методів є безальтернативним; переваги і

недоліки саме еліпсоїдального оцінювання порівняно з іншими методами гарантованого оцінювання; практичне застосування еліпсоїдального оцінювання;

- розробити метод еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським двох множин – еліпсоїду початкового стану і відрізка за двома критеріями: за об'ємом і за сумою квадратів півосей еліпсоїду, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи;
- розробити субоптимальний метод еліпсоїдальної апроксимації зазначеної вище суми двох множин;
- формалізувати умови «сумісності» двох множин: множини вимірювання стану системи – «гіпершару» і множини досяжності – еліпсоїду;
- розробити робастну властивість метода еліпсоїдального оцінювання шляхом адаптивного збільшення апріорного обмеження погрешності вимірювання у випадку настання «несумісності»;
- розробити спосіб субоптимальної еліпсоїдальної апроксимації перетину двох множин: досяжності і вимірювання системи, в якому мінімізується або об'єм, або сума квадратів півосей еліпсоїду оцінки;
- дослідити зв'язок між параметрами вимірювача, погрішністю вимірювання, розмірністю простору стану системи і мінімально можливою ступеню невизначеності стану системи, яку можна за таких умов отримати у вигляді мінімального за об'ємом еліпсоїду оцінки;
- застосувати розроблений метод оцінювання для вирішення задачі визначення положення нерухомого об'єкту за декількома його пеленгами і задачі оцінювання параметрів орієнтації штучного супутника Землі.

Об'єкт дослідження – процеси функціонування лінійних керованих систем при їх збуренні по одному каналу, за яким система є керованою, та при вимірюванні тільки однієї змінної стану, за якою система є спостережуваною.

Предмет дослідження – моделі і методи оцінювання станів систем у фазовому просторі станів.

Методи дослідження

Системний аналіз, теорія оцінювання, матрична алгебра, чисельні методи, теорія звичайних диференціальних рівнянь, математичне і комп'ютерне моделювання, теорія прийняття рішень.

Наукова новизна отриманих результатів

На основі проведених у дисертаційній роботі досліджень запропоновано метод робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних систем з обмеженими збуренням та завадою. Наукова новизна роботи визначається наступними теоретичними результатами, отриманими автором:

Уперше:

- розроблено новий спосіб побудови мінімальної еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським двох множин – еліпсоїду і відрізка; цей спосіб відрізняється меншою трудомісткістю обчислень порівняно з відомим способом, але також забезпечує мінімальне значення критерію оптимальності – мінімум об'єму еліпсоїду;
- розроблено субоптимальний спосіб еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським двох множин – еліпсоїду і відрізка, в основу якого покладено нерівність Канторовича. Цей спосіб є набагато простішим порівняно з оптимальним і таким, що в окремому випадку, який часто трапляється на практиці; дає оптимальний еліпсоїд;
- отримано нерівність, яка зв'язує параметри вимірювача, максимальну похибку вимірювання, розмірність фазового простору станів системи і мінімально можливу за об'ємом еліпсоїдальну оцінку стану системи – що забезпечує формування вимог до класу точності вимірювача при прийнятій невизначеності оцінки стану системи.

Удосконалено:

- метод прийняття рішень щодо урахування результатів вимірів стану спостережуваної системи для побудови її еліпсоїдальної оцінки;
- робастні властивості методу еліпсоїдального оцінювання.

Практичне значення одержаних результатів

Розв'язано задачу оцінювання положення нерухомого об'єкту за декількома його пеленгами і задачу оцінювання та керування кутовим положенням штучного супутника Землі за допомогою розробленого методу в умовах нестатистично заданої невизначеності. При цьому показано збереження керування супутником при збої у вимірюваннях. Це рішення дозволяє зекономити на бортовому обладнанні, а саме: використовувати менш точні прилади визначення кутового положення штучного супутника Землі.

Усі теоретичні розробки, отримані автором, втілено у конкретний метод робастного еліпсоїдального оцінювання, на підставі якого розроблено інженерні методики, алгоритми оцінювання та керування технічними об'єктами. Алгоритми реалізовані у програмному забезпеченні, що застосовується у виробництві реальних приладів, що виробляються на Казенному підприємстві спеціального приладобудування «Арсенал» Державного космічного агентства України, а також впроваджено в навчальний процес кафедри математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», що підтверджується довідкою.

Особистий внесок здобувача

Більшість наукових результатів, що складають основний зміст роботи та становлять наукову новизну, отримані здобувачем особисто. Зокрема у праці [1] здобувачем доведено твердження щодо оптимальних значень параметрів, які мінімізують еліпсоїд, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи, яка є сумою за Мінковським початкового еліпсоїду стану і відрізка – множини зовнішнього збурення; розроблено математичну та комп'ютерну моделі цієї апроксимації та проведено комп'ютерне моделювання для порівняння з уже відомим способом апроксимації. У праці [2] здобувачем доведено лему про покриття перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару» – множини вимірювань. В праці [3], написаної особисто, проведено дослідження оператора стискання. В праці [4], також написаної особисто, запропоновано, теоретично обґрунтовано і доведено

спрощений метод еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності лінійної керованої системи на підставі нерівності Канторовича. У праці [5] здобувачем висунута і доведена теорема про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів статичного еліпсоїдального оцінювання. У праці [6] здобувачем вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням: висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апріорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі.

Співавторами наукових праць є наукові керівники здобувача.

Постановка мети та завдань, обговорення результатів проведені разом з науковими керівниками.

Апробація результатів дисертації

Наукові та практичні результати доповідались на семінарах та наукових конференціях: аспірантських семінарах при Навчально-науковому комплексі «Інститут прикладного системного аналізу» в структурі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (м. Київ, 2006, 2008, 2013); школі-семінарі для молодих науковців: «Наукові космічні дослідження». 7-13 вересня 2006р, м. Євпаторія; XXV-ї науково-технічної конференції пам'яті М. М. Острякова. 10-12 жовтня 2006 р, м. Санкт-Петербург, Росія; Міжнародної науково-технічної конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і прикладні аспекти інформаційних технологій» (ISDMIT'2007). 15-18 травня 2007р., м. Євпаторія; науковому семінарі на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2008); 1-ї Всеукраїнської науково-технічної конференції «Актуальні проблеми автоматичної та

приладобудування України», 11-12 грудня 2014р, м. Харків; 15-ї Української конференції з космічних досліджень. 24-28 серпня 2015р, м. Одеса; 2-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 06-07 грудня 2018р., м. Харків.

Публікації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в наукових фахових виданнях: 5 статей (серед них 2 статті у виданнях України, що включено у міжнародну наукометричну базу даних «SCOPUS»); 1 статтю опубліковано у збірнику праць іноземної міжнародної конференції, що включено у міжнародну наукометричну базу даних «SCOPUS»; 5 тез у матеріалах доповідей міжнародних і всеукраїнських конференцій.

Структура та обсяг дисертації

Дисертація складається зі вступу, переліку умовних позначень, чотирьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел і 3-х додатків. Роботу викладено на 145 сторінках і містить 111 сторінок основної частини, 12 рисунків, 2 таблиці і список використаних джерел із 218 найменувань.

РОЗДІЛ 1

МЕТОДОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ КЕРОВАНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

1.1. Методи оцінювання в умовах невизначеності – загальний огляд

Сучасний етап розвитку системного аналізу й теорії керування тісно пов'язаний з розвитком методів уточнення апріорної інформації про об'єкт керування з використанням результатів виміру поточної інформації, а саме з розвитком методів спостереження, оцінювання, ідентифікації й тому подібне.

Задача оцінювання вектора стану лінійних дискретних систем з довільним інтервалом спостереження в стохастичній постановці, уперше була вирішена, очевидно, Р. Калманом [1]. У математичному плані ця задача зводилася до задачі мінімізації квадратичного функціонала при лінійних обмеженнях і вирішувалася методом динамічного програмування. Згодом підхід, запропонований Калманом у цій роботі, був використаний і розвинений у багатьох роботах, присвячених рішенню задач оцінювання, у тому числі нелінійної фільтрації, у стохастичній постановці, серед яких укажемо [2- 12], де можна знайти посилання на інші роботи, включаючи оглядові.

Однак стохастичний підхід не може розглядатися як універсальний підхід при рішенні подібних задач. По-перше, тому, що застосовуване в рамках даного підходу припущення про стохастичну природу невизначеності не завжди відповідає дійсності. Це має місце, наприклад, у тому випадку, коли невизначеність у системі обумовлена відмінністю використовуваної математичної моделі від реальної, тобто, неточністю, неповнотою математичної моделі. По-друге, навіть у випадку імовірнісного характеру невизначеності для обґрунтованого застосування стохастичних методів потрібне одержання статистичних характеристик неоднозначно заданих параметрів, що приводить до значних тимчасових витрат, а найчастіше виявляється неможливим. І, нарешті, по-третє, імовірнісні характеристики в багатьох практичних важливих випадках не можуть служити прийнятними показниками якості як процесів керування, так і процесів оцінювання.

Характеризуючи ці процеси «у середньому» або теоретично по нескінченній множині реалізацій, статистичні показники не можуть гарантувати певний результат.

У зв'язку з розвитком ракетної й авіаційної техніки й появою таких задач, як перехоплення повітряних цілей, здійснення маневрування на орбіті, безпілотна посадка та інше, виникла необхідність у нових постановках задач керування й оцінювання [13-16]. Зокрема, у задачі перехоплення повітряної цілі було потрібно як можна точніше визначити конкретну область знаходження цілі, а не вказувати ймовірність її знаходження в тій або іншій точці всього простору. У задачах керування технологічними процесами було потрібно підтримувати ті або інші показники якості продукції, що виробляється, у жорстко завданих границях [17-19].

Гарантувати певну якість керування (оцінювання) і одночасно зменшити вимоги до математичного опису невизначених параметрів вдається в рамках теоретико-множинного опису невизначеності. Відповідні моделі тут задаються компактними множинами можливих або припустимих реалізацій невизначених факторів. Подібні моделі становлять основу нестохастичного або теоретико-множинного (гарантованого, ігрового або мінімаксного) підходу до задач оцінювання й керування в умовах невизначеності. У даному підході покладають, що процеси функціонування динамічних систем мають нестохастичну природу, для цих процесів існують гарантовані обмежені множинні оцінки. «При цьому конструктор системи керування задовольняється апріорною інформацією про обмеженість невизначених величин або процесів, яку легко одержати, але і яка містить обмаль параметрів. Тому далі у всіх наступних розрахунках для одержання того або іншого гарантованого результату конструктор має приписати природі, що генерує ці величини й процеси, «підступні» прагнення максимізувати, наприклад, той критерій якості, що конструктор системи керування прагне мінімізувати. Необхідно визнати, що при такому підході до проектування системи керування її розробник орієнтується на самий несприятливий випадок («песимістичний» варіант - the worst - case approach). Але така плата за можливість одержання гарантованого результату» [20].

Уперше проблему оцінювання стану динамічної системи в такій постановці поставив і досліджував Б. В. Булгаков і назвав її задачею про нагромадження збурень [21].

Одним з перших методів рішення задачі оцінювання в нестохастичній постановці був метод, запропонований В. А. Якубовичем [22], який, щоправда, дозволяв одержати тільки одну точку із множини можливих рішень. Надалі цей метод став застосовуватися й розвиватися в теорії адаптивного керування – зокрема, для синтезу адаптивних систем [23].

Власне гарантоване множинне оцінювання почалося після виходу в 1968 р. двох робіт. Одна з них – це монографія Н. Н. Красовського [24], у якій був запропонований рішення задачі оцінювання вектора стану лінійної динамічної системи, коли передбачалось, що значення завади вимірювання і збурень у кожний момент часу належить еліпсоїдальній множині. Друга робота – стаття Ф. С. Schwerpe [25], у якій було розглянуте рішення цієї задачі для лінійного об'єкта в дискретному часі й запропоновано відповідний алгоритм рішення. У статті ставилася задача побудови області значень вектора стану, сумісної з вимірюваними вихідним і вхідним сигналами і обмеженнями на значення завади і збурень.

С цих публікацій став розвиватися теоретико-множинний підхід до невизначеності й гарантований підхід до оцінювання станів динамічних систем і процесів. Цей напрямок був розвинений у роботах Красовського М. М., Schwerpe Ф. С., Куржанського О. Б., Черноусько Ф. Л., Бакану Г. М., Волосова В. В., Кунцевича В. М., Личака М. М., Пшеничного Б. М., Кириченко М. Ф., Наконечного О. Г., Куссуль Н. М., Рокитянского Д. Я., Сальникова М. М., Стецюка П. И., Milanese M., Vicino V., Norton J. P., Favier G. та інших [24-98].

Відзначимо основні монографії, в яких систематизоване й проаналізоване досягнутий на той момент часу стан у даних питаннях. У монографії [26] розглядається мінімаксний підхід до оцінювання станів лінійних систем у безперервному часі й керуванню ними, а також отримані диференціальні рівняння мінімаксної фільтрації. У монографії [27] описане еліпсоїдальне оцінювання для лінійних безперервних і дискретних систем. У монографії [20] вирішуються задачі

за умови, що множини значень невизначених величин задачі: вектора початкового стану, перешкоди й збурень, задані за допомогою багатогранників. У монографії [88] наведено опис закордонної бібліографії.

Якщо для гарантованого оцінювання станів використовувати точний опис *інформаційних областей* – множин, які гарантовано містять оцінюваний вектор, то цей опис здійснюється багатогранниками, одержуваними при перетині площин, дотичних до вихідної множини [27]. Очевидно, що з ростом числа вимірів, має місце необмежений ріст числа вершин, граней, ребер багатогранника. Обчислювальна потужність і об'єм пам'яті ЕОМ, що здійснює роботу з такими множинами, наприклад, операції перетину і підсумовування, мають бути необмеженими. Тому для цього багато зручніше використовувати множини канонічної форми з фіксованим числом параметрів, наприклад, еліпсоїди. Результати операцій з еліпсоїдами – теоретико-множинну суму і перетин, що у загальному випадку вже не будуть еліпсоїдами, знову апроксимувати еліпсоїдами, які задаються додатньо-визначеними матрицями й векторами їх центрів. При цьому необхідно одержувати мінімальні за певним критерієм еліпсоїди.

Різні типи алгоритмів еліпсоїдального оцінювання були отримані в силу різних підходів до задачі апроксимації: як з погляду геометричної інтерпретації, так і з погляду вибору критерію якості.

Як критерії якості розглядаються такі геометричні характеристики інформаційної множини й еліпсоїда зокрема, як його багатовимірний об'єм [99], сума четвертих степенів півосей еліпсоїду [100], проекції на заданий підпростір [84] та деякий узагальнений критерій [101], що насправді уявляє собою деякий функціонал, при постанові в який певних параметрів отримують бажаний критерій мінімізації апроксимуючого еліпсоїду: багатовимірний об'єм та сума степенів 2α , $0 < \alpha < \infty$ півосей апроксимуючого еліпсоїду. Але для кожного критерію згідно цього функціоналу необхідно шукати окремі рішення, які не впливають з необхідністю з запису функціоналу і геть не очевидні. В статті наведено лише окремі конкретні рішення. До того ж, кожен критерій має певні обмеження, рівень складності, особливості, зручності та недоліки. Для знаходження еліпсоїду

мінімального об'єму, що апроксимує суму за Мінковським двох не вироджених еліпсоїдів, необхідно розв'язувати рівняння степені $n+1$, де n – розмірність простору можливих станів системи, і шукати єдиний додатній корінь. Ще один недолік цього способу апроксимації полягає у тому, що принаймні один з підсумованих еліпсоїдів має бути не виродженим. У випадку, коли один з підсумованих еліпсоїдів вироджений, для побудови апроксимуючого еліпсоїду необхідно розв'язувати рівняння степені $m+1$, де m – ранг матриці виродженого еліпсоїду. Проте мінімізація багатовимірного об'єму має інваріантну властивість відносно афінних перетворень підсумованих еліпсоїдів і результуючого еліпсоїду, а саме: якщо виконати афінне перетворення початкових еліпсоїдів, далі отримати їх суму за Мінковським, апроксимувати її еліпсоїдом за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму, піддати отриманий еліпсоїд зворотному перетворенню, то отримуємо також оптимальний за об'ємом еліпсоїд, який апроксимує суму двох початкових еліпсоїдів до їх вказаного афінного перетворення [27]. Для мінімізації четвертих степенів півосей апроксимуючого еліпсоїду необхідно розв'язувати кубічне рівняння і шукати його єдиний додатній корінь [100]. Це простіше, ніж у попередньому способі, якщо $n > 2$. Мінімізація суми півосей апроксимуючого еліпсоїда має високу складність і тому пропонується лише її приблизний розв'язок [101]. Але постановка задач, де мінімізується сума парних степенів півосей апроксимуючого еліпсоїду, припускає підсумування вироджених еліпсоїдів, тобто, коли матриці обох підсумованих еліпсоїдів є виродженими.

Ідея еліпсоїдальної апроксимації інформаційних множин знайшла широке застосування й у задачах математичного програмування [102-104]. Наприклад, параметри еліпсоїда мінімального об'єму, описаного навколо півсфери, були знайдені Д. Б. Юдиным і А. С. Немировским [102], для сферичного сегмента і перетину сфери з шаром Н. З. Шором і В. И. Гершовичем [104]. Згодом ці результати були істотно використані при рішенні задач оцінювання. Так, отриманий в [28-30] метод оцінювання, по виду формул найбільш близький до методу мінімізації функцій з розтяганням простору [103, 104], запропонований Н. З. Шором.

В [27] вирішена задача покриття суми еліпсоїдальних областей еліпсоїдом мінімального об'єму, при цьому задача про покриття еліпсоїдом перетину двох еліпсоїдів вирішена оптимальним і субоптимальним шляхами.

Рекурсивний і нерекурсивний алгоритми побудови вписаного еліпсоїда мінімального об'єму було запропоновано в [95] і [96], відповідно.

Особливе місце в задачах керування і оцінювання, що включає елементи як стохастичної, так і теоретико-множинної невизначеності, посідає проблема робастності. Уперше термін «робастність» з'явився в роботі [106]. Робастною називалася статистична процедура, нечутлива до відхилень від припущень, що лежать у її основі.

Спочатку робастні статистичні методи оцінювання розвивалися в напрямку, пов'язаному з оцінкою одновимірного параметра зсуву [107]. Згодом основні результати, отримані в цьому напрямку, були застосовані до побудови робастних оцінок у задачі регресії [108], а потім і в більш об'ємній задачі оптимізації в умовах невизначеності [109].

Великий огляд робастних стохастичних методів оцінювання наведено в [109]. Огляд більш пізніх робіт з даної тематики міститься в [111-113].

Проблема робастності залишається актуальною й для рішення задач оцінювання в рамках нестохастичного підходу. Тут вона пов'язана із проблемою подолання випадків «несумісності» апріорних оцінок і апостеріорної інформації. Зокрема стосовно еліпсоїдальних алгоритмів оцінювання, в основі яких лежить ідея методу послідовних відсікань областей, про які відомо, що вони не містять шукане рішення [30], є надання їм робастної властивості в умовах, коли на черговій ітерації алгоритму виникає «несумісність»: тобто, чергове вимірювання змінної стану системи не має спільних точок з поточною множинною оцінкою стану цієї системи.

Для рішення даної проблеми було запропоновано використовувати в процедурі еліпсоїдальної апроксимації нечіткі множини [35-39, 45] і додатковий кроковий параметр [41-43].

Традиційно проблемі вибору величини кроку алгоритму приділялася особлива увага при рішенні задач математичного програмування. Так, наприклад, залежно від

спосіб вибору кроку можна одержати різні варіанти градієнтного методу [114] і так далі.

У задачах ідентифікації ідея оптимізації величини кроку була запропонована для рекурентного методу найменших квадратів в [115, 116]. В [115] було показано, що оптимальний вибір кроку поліпшує збіжність алгоритму, в [116] було запропоновано метод оптимізації величини кроку на основі мінімізації середньоквадратичної похибки оцінки вектора параметрів.

Величина кроку в рекурентних алгоритмах гарантованого еліпсоїдального оцінювання визначає ступінь «довіри» стосовно вступник вимірювальній інформації й при повній «довірі» приймається рівній одиниці. Подібний варіант алгоритму еліпсоїдального оцінювання, що у цьому випадку можна назвати повнокроковим, виправданий, якщо відповідно до апріорної гіпотези, розв'язувана система сумісна. В протилежному випадку використовують більш «обережну» схему обчислень, вводячи певний коефіцієнт «релаксації» i , тим самим, зменшуючи крок алгоритму. Зменшуючи крок алгоритму, долають випадки «викидів» поточних вимірювань, пов'язаних з короткочасними збоями в роботі вимірювальної апаратури, а також випадки порушення апріорних припущень про відсутність завади у каналі вимірювання, які можуть у значній мірі спотворити результати оцінювання.

Аналізуючи все вищевикладене, можна побачити, що всі ці методи узагальнюються, відповідно до вимог системного підходу, у деяку загальну форму. Це дає можливість певним вибором параметрів одержувати як уже відомі схеми процедур оцінювання, так і синтезувати нові, з потрібними характеристиками якості.

1.2. Розвиток еліпсоїдальної апроксимації в теорії оптимізації

В 60-х роках 20-го століття почався бурхливий розвиток методів оптимізації, зокрема, лінійного програмування. В [117, 118] була доведена поліноміальна складність задач лінійного програмування. У цих роботах для рішення системи лінійних нерівностей (до якої зводиться задача лінійного програмування), був використаний так званий модифікований метод центрів ваги (ММЦВ). Цей метод,

запропонований Д. Б. Юдиним, А. С. Немировським [102] і незалежно розроблений Н. З. Шором [103], є застосовним для рішення загальної задачі опуклого програмування. При рішенні системи лінійних нерівностей відповідною опуклою функцією, яку треба мінімізувати, є «нев'язка» системи. ММЦВ було названо в західній літературі «алгоритмом еліпсоїдів». Після публікації [117] з'явився лавиноподібний потік закордонних робіт, у яких розглядалися питання експериментального порівняння працездатності ММЦВ (методу еліпсоїдів) і симплекс-методу, а також – удосконалення ММЦВ (тому що він явно програвав при порівнянні). Р. Wolfe спеціально випустив по цих роботах велику бібліографію [119]. Слід зазначити, що ще до появи публікації [117] в роботі [105] було розроблене сімейство алгоритмів для рішення задач опуклого програмування, що узагальнюють ММЦВ і здатні значно підвищити його ефективність. При їхній розробці важливим з'явилося розуміння того факту, що вони, так само як і ММЦВ, є алгоритмами градієнтного типу з розтяганням простору, які були розроблені для прискорення збіжності субградієнтних методів. Для недиференційовної оптимізації Н. З. Шор запропонував використовувати в якості елементарних операторів перетворення простору оператори розтягання простору в певних напрямках. В роботі [102] було запропоновано в якості області локалізації мінімуму вибрати центральне-симетричне «тіло» – еліпсоїд, а після відсікання – «спрощувати» отримане «тіло», описуючи навколо нього еліпсоїд мінімального об'єму. Оскільки з допомогою лінійного перетворення простору еліпсоїд може бути перетворений у сферу, те всі операції можна проводити стосовно сфери, переходячи від однієї системи координат до іншої. В [51] було сказано: «...Теорія всього класу алгоритмів з розтяганням простору далека від досконалості. Нам здається досить реалістичною метою побудова такого алгоритму, що по своїй практичній ефективності не уступав би *r*-алгоритму і був настільки ж добре обґрунтований, як метод еліпсоїдів». Тут мова йде про те, що так званий *r*-алгоритм, де *r* означає «різниця», і метод еліпсоїдів, є окремими методами рішення задач оптимізації, які використовують загальний і дуже потужний інструмент – розтягання (стискання) простору. Спроба зблизити ці два алгоритми була почата в роботі [122].

Метод еліпсоїдів дозволив одержати ряд нових результатів. Наприклад, було побудовано поліноміальний алгоритм для рішення задач опуклого програмування з цілими коефіцієнтами; поліноміальні алгоритми для рішення задач аналізу властивостей багатогранних опуклих множин, що задаються системою лінійних нерівностей з раціональними коефіцієнтами, зокрема задачі виділення несуттєвих обмежень, визначення мінімальної системи породжуваних вершин і твірних поверхонь багатогранної множини та інші. В [51] було показано, що методи еліпсоїдів є окремим випадком сімейства алгоритмів градієнтного типу, що використовують операцію розтягання простору. У роботі [123] відзначалося, що «метод еліпсоїдів і отримані на його основі результати про складність задач математичного програмування були центральними на XI Міжнародному симпозіумі по математичному програмуванню (Бонн, ФРН, серпень 1982)».

Розроблені в той час методи виявилися досить ефективними й продовжують використовуватися в теперішній час, як у класичному виді, так і в модифікованому. Наприклад, для рішення спеціальної задачі лінійного програмування – знаходження умовно-оптимального маршруту в орієнтованій мережі використовується двоїстий алгоритм, що відповідає негладкої оптимізації, на основі методу еліпсоїдів [124]. У цій же роботі повідомляється, що «двоїстий алгоритм планується використовувати при формуванні послідовності жестів палубного регулювальника (аватара), що управляє переміщенням літака». Також метод еліпсоїдів було застосовано для рішення задачі про розділення двох опуклих множин або, по-іншому, про знаходження найкращого лінійного класифікатора. Суть задачі полягає в знаходженні гіперплощини, що з максимальним проміжком розділяє дві множини точок в евклідовому просторі. У підсумку, для рішення негладкої безумовної задачі знаходження найкращого лінійного класифікатора при розмірності евклідова простору $n = 2 \dots 10$ виявляється вигідним використовувати метод еліпсоїдів [125, 126]. Також варто вказати на задачі прикладної математики, як то: обробка результатів спостережень, побудова й аналіз різного роду моделей (фізичних, біологічних, економічних, соціальних і інших), при пошуку компромісних рішень у моделях, які можуть бути представлені системою лінійних рівнянь, L_p -рішення якої

шукається методом еліпсоїдів [127]. У роботі [128] метод еліпсоїдів застосовується для знаходження параметрів лінійної регресії для мінімізації заданої функції. Цікаво, що таким же методом шукаються параметри лінійної регресії в роботі [74], задача в якій, представлена, проте, у динамічній постановці – коли еліпсоїдальна оцінка змінюється в міру надходження нових вимірів.

У роботі [129] розглядається задача рішення скінченних або нескінченних (зчислених) систем нерівностей. Однак у порівнянні з вищевикладеними методами в ній не робиться ніяких припущень про опуклість функцій, що входять у задачу. Потрібно лише щоб всі вхідні в задачу функції мали обмежені другі похідні. Запропонований метод рішення заснований на перетворенні системи неопуклих нерівностей, заданих в R^n , в систему опуклих нерівностей, заданих на n -вимірній сфері в R^{n+1} : Для рішення перетвореної системи застосовується модифікація алгоритму еліпсоїдів.

Забігаючи трохи вперед, скажемо, що результати, отримані в математичному програмуванні й викладені в даному підрозділі, є застосовними в задачах еліпсоїдального оцінювання.

1.3. Розвиток еліпсоїдальної апроксимації в задачах обчислювальної геометрії

Коли комп'ютерні й інформаційні технології досягли такого рівня, що дозволили досить просто програмувати обчислювальні задачі й швидко їх вирішувати, стали розвиватися й задачі так званого геометричного моделювання. З розвитком методів їхнього рішення виникла необхідність в узагальненні і систематизації розроблених методів і задач в одну науку. У результаті в 1971-му році з'явився термін «обчислювальна геометрія» [130, 131]. Задачею обчислювальної геометрії є, наприклад, геометричний пошук деякої точки із заданими параметрами, у тому числі з множинними границями цих параметрів. Також до задач обчислювальної геометрії відносять побудову опуклих оболонок навколо деякої області, заданої своїми кутовими точками; визначення близькості заданих точок; побудова перетину геометричних фігур на площині і у тривимірному просторі.

Названі задачі потрібно вирішити за кінцеве число кроків і метою тут є мінімізація цього числа. У своїй постановці ці задачі збігаються з деякими задачами лінійного програмування, перерахованими вище. Наприклад, у роботі [126] вирішується задача математичного програмування про розділення двох опуклих множин – побудова гіперплощини між двома множинами точок, що розділяє ці множини на максимальну відстань. Одна із задач обчислювальної геометрії (задача Сильвестра [132], уявляє собою знаходження кола мінімальної площі, що містить всі точки деякої множини. Оскільки локалізація точки шляхом побудови опуклої оболонки по кутових точках може вирішуватися також як побудова еліпса мінімальної площі на площині або еліпсоїда мінімального об'єму в просторі, що вигідніше для знаходження оптимального центра, то переходять до так званого еліпсоїда Льовнера [133]. Центр побудованого еліпса або еліпсоїда є шукана точка. Геометрично ця задача уявляє собою еліпсоїдальну апроксимацію перетину декількох «смуг» на площині або «шарів» у просторі, відповідно, з наступним знаходженням геометричного центра отриманої фігури. По своїй суті вона збігається із задачею рішення зчисленої системи нерівностей [22, 23, 30]. З українських авторів укажемо роботи [134-143].

Основні інструменти, яки було використано для створення обчислювальної геометрії, і яки є підставами для еліпсоїдальної апроксимації множин досяжності лінійних систем – це метрична геометрія, теорія опуклості й комбінаторна геометрія. Перші два інструменти дозволили розробляти швидкі алгоритми апроксимації декількох точок на площині або в просторі обраною опуклою множиною. Поняття відстані і його узагальнення – «метрика», дали можливість поширити геометричні концепції на математичний аналіз, де ідея «відстані» між функціями привела до появи поняття «функціональний простір». Однак функціональні простори по своїй природі не є обчислюваними об'єктами. Теорія опуклості дозволяє аналітичним шляхом знаходити глобальні властивості геометричних об'єктів. Однак, як відзначається в роботі [131], багато понять і методів метричної геометрії і теорії опуклості приводять до неконструктивних методів. Комбінаторна геометрія заснована на описі своїх об'єктів – множин у

скінченновимірних просторах – у визначеннях властивостей кінцевих підмножин цих множин, і важлива тим, що дозволяє проаналізувати опуклість скінченновимірних множин по опуклості його підмножин. Недолік тут полягає в тому, що з ростом розмірності простору зростає і обчислювальна складність аналізу властивостей, які нас цікавлять. Із цього витікає очевидний збіг обмежень вищенаведеного методу з обмеженнями лінійного програмування [125, 126]. Необхідно вказати на труднощі вибору відповідного алгоритму для рішення задачі апроксимації деякої множини точок її опуклою оболонкою або еліпсоїдом. Часто буває так, що при невеликій розмірності задачі для її рішення виявляється найбільш придатний алгоритм, що асимптотично не оптимальним [131].

1.4. Застосування еліпсоїдальної апроксимації заданої точкової множини для вибору рішення в інженерних задачах

Еліпсоїдальна апроксимація деякої точкової множини методами обчислювальної геометрії й опуклого програмування з використанням лінійних матричних нерівностей у комбінації з методами теорії підтримки прийняття рішень може бути застосовано для обмеження області припустимих значень деякого набору параметрів [143-146]. У роботі [143] еліпсоїдом мінімального об'єму апроксимується так звана «область працездатності» – множина припустимих значень параметрів деякої технічної системи, заданих нерівностями, і при яких вона буде зберігати свою працездатність. У роботах [144-147] будуються оптимальні еліпсоїди за критеріями мінімуму об'єму або мінімуму суми квадратів півосей для відбору профілів крила літака, що задовольняють деякій множині Парето. У роботі [145] вирішується інженерна задача – побудова еліпсоїда навколо вибірки точок (де кожна точка є часткою опису профілю крила літака), вписаного в опуклий багатогранник, утворений лінійними обмеженнями, які відображають умови коректності форми профілів. Множину профілів для рішення задачі було відображено експертами. Ефективність застосування еліпсоїдальної апроксимації виявляється в тому, що знижується розмірність задачі без істотного ускладнення структури й геометричних властивостей припустимої множини. У статті [147] запропоновано алгоритм опису

простору дизайну на основі відомої множини прикладів і при наявності обмежень, яким повинні задовольняти вектори описів об'єктів. Простір дизайну описується у вигляді еліпсоїда і будується в два етапи. На першому етапі будується базовий еліпсоїд без урахування обмежень, тільки по відомих точках. На другому етапі будується еліпсоїд, що задовольняє обмеженням і є найближчим у деякому сенсі до базового еліпсоїда. Дана задача зводиться до рішення серії задач опуклого програмування, сформульованих з допомогою лінійних матричних нерівностей. У вже згаданій роботі [129] коротко описано застосування запропонованого в ній методу еліпсоїдальної апроксимації множини припустимих значень до вирішення задачі самонавчання двоногого робота ходьбі по похилій площині.

1.5. Застосування еліпсоїдальної апроксимації в задачах оцінювання станів динамічних і статичних систем

Розглянемо лінійні системи, які генерують процеси, що містять адитивну перешкоду. Основна властивість таких процесів, використувана для його спостереження й фільтрації від перешкоди – це опуклість множини можливих станів цього процесу в будь-який момент часу, навіть якщо перешкода належить неопуклій множині [27]. Відзначимо, що сучасні засоби вимірювання видають вимірювальну інформацію в дискретному виді; а моделювання спостерігача (фільтра) здійснюється на ЕОМ. Таким чином, будемо розглядати процеси спостереження (фільтрації) у дискретному виді, що не обмежує спільність розробленого далі методу оцінювання.

Загальна постановка такої задачі фільтрації, що опирається на поняття багатозначного процесу з дискретним часом, дана в статтях [28, 31].

Подібна задача поставлена в [25] ще в 1968 р. Там же приведено її рішення, засноване на ідеї покриття (апроксимації, наближення) областей невизначеності багатовимірними еліпсоїдами. Отримане рішення являє собою по суті спосіб або алгоритм побудови послідовності багатовимірних еліпсоїдів, кожний з яких містить вектор змінних стану оцінюваного процесу у відповідний момент часу. Оскільки в процедурі відшукування алгоритму використовувалися апроксимації, то отримане рішення є наближеним: кожний із шуканих багатовимірних еліпсоїдів містить

оцінюваний стан з деяким «запасом». Величина цього «запасу» істотно залежить від способу рішення так званих допоміжних задач, а саме – задач, пов'язаних з побудовою багатовимірних еліпсоїдів, що містять суму й перетин заданих еліпсоїдальних областей відповідно. Від того, як вирішені ці задачі, залежить і вид одержуваного алгоритму фільтрації (спостереження). Так, у роботі [148], наведено алгоритм на основі іншого способу рішення вказаних допоміжних задач, хоча і близький до алгоритму роботи [25]. Як у роботі [25], так і в роботі [148] рішення кожної з допоміжних задач містить скалярний параметр. У результаті алгоритми фільтрації, отримані в цих роботах, залежать від двох подібних параметрів. Ясно, що вибирати ці параметри треба так, щоб мінімізувати «запас» при оцінюванні станів процесу. Щодо того, як це зробити, у згаданих роботах даються тільки досить загальні рекомендації, включаючи підбор цих параметрів по методу Монте-Карло. У результаті не можна заздалегідь (без попередніх розрахунків для конкретних значень параметрів) зробити висновок про властивості послідовності багатовимірних еліпсоїдів, що генеруються цими алгоритмами.

Істотне просування в цьому напрямку було зроблено в [149]. Тут для першої допоміжної задачі (про покриття суми еліпсоїдальних областей) знайдено оптимальне рішення, при цьому друга задача вирішена субоптимальним способом. У результаті було розроблено близький до [25, 148] алгоритм із тією, однак, важливою перевагою, що для нього знята проблема вибору параметрів. Наслідком оптимізації рішення першої допоміжної задачі з'явилося помітне ускладнення алгоритму: для побудови кожного з багатовимірних еліпсоїдів послідовності потрібно в загальному випадку додатково до аналогічних [25,148] векторно-матричних операцій вирішувати ще два алгебраїчних рівняння n -й і $n+1$ -й ступеня, де n – розмірність простору станів процесу).

У пропонованому в [32] способі побудови алгоритму фільтрації для обох допоміжних задач знайдені деякі субоптимальні рішення. У результаті відпадає необхідність рішення алгебраїчних рівнянь і разом з тим не виникає проблеми вибору параметрів. При цьому головна увага була приділена практично дослідженому в [25, 148, 149] питанню про властивості одержуваної послідовності

багатовимірних еліпсоїдів. Зокрема, установлені умови, що забезпечують обмеженість їхніх параметрів, та інше. Стосовно результатів робіт [28, 31], що відносяться до конкретної задачі фільтрації, запропоновані в [32] алгоритми є їхнім подальшим узагальненням і спрощенням.

У роботах [150-153] представлені приклади використання еліпсоїдального оцінювання для потреб хімічної індустрії [17-19]. Як уже згадувалося вище, у хіміко-технологічних процесах вимірюванню доступні не всі параметри, характер протікання процесів залежить від співвідношення параметрів, які, щоб уникнути зростання витрат сировини, витрат енергії на синтез, а також для уникнення можливої аварії, необхідно витримувати в строгих границях. Незважаючи на появу альтернативних джерел електроенергії, від органічного палива, мабуть, ще довго не можна буде відмовитися. Потреба ж у синтезі, наприклад, органічного палива, у зв'язку з вичерпанням світових запасів нафти [154], обмеженого кількості родовищ нафти в Україні [155] і екологічно напруженого використання вугілля у якості палива, стає усе більше актуальною й через кілька десятиліть буде, можливо, безальтернативною [156]. Для України це особливо актуально у зв'язку з непередбаченим розвитком світової політики в частині видобутку й поставку викопних палив в Україну. Додамо, що найбільше становиться актуальним гарантоване оцінювання в процесі синтезу вибухових речовин [157].

У роботі [158] представлено дослідження робастної системи керування. Реальний об'єкт дослідження являє собою гіростабілізовану платформу системи інерціальної навігації, в якій необхідно відкалібрувати високоточні акселерометри [159]. Це, видимо, перша робота, у якій для рішення задач інерціальної навігації [160] застосовано гарантований підхід. Для оцінки параметрів моделі використовуються гарантовані методи, засновані на нестохастичному опису невизначеності. На основі такого опису невизначеності виконується аналіз надійності деяких можливих регуляторів у системах керування платформою з урахуванням таких характеристик, як стабільність, ослаблення завад вимірювання і обмеження потужності команд керування. Розглянуто граничні значення, що визначають надійність залежно від змін параметрів, що розраховані для системи

керування зі зворотним зв'язком. Обговорюється їхній вплив на конструкцію робастного регулятора для розглянутої системи керування. Застосування даного підходу в цьому випадку – це єдина можливість гарантувати працездатність системи із заданою точністю.

У роботі [161] за допомогою еліпсоїдального оцінювання вирішується задача в цієї ж області, але мова йде вже про корекцію показань гіроскопічних датчиків кутової швидкості.

Загальне в цих роботах – це неможливість або вкрай висока вартість визначення необхідних статистичних характеристик для оцінювання потрібних параметрів методами стохастичного оцінювання.

Широке застосування знайшло гарантоване, зокрема, еліпсоїдальне оцінювання в рішенні задач забезпечення космічних польотів [162-169]. Серед них оцінювання поточного положення космічного апарата на орбіті в заданій системі координат, у тому числі й відносне положення декількох космічних апаратів [162]; оцінювання параметрів орієнтації – кутового положення в заданій системі координат [163-168]. Окремо відзначимо роботу [169], у якій еліпсоїдальне оцінювання застосовується для одержання оцінки інерційних характеристик космічного апарата, які використовуються для формування закону керування його кутовим положенням.

1.6. Розробка робастних властивостей в задачах оцінювання

Згідно П. Хьюберу [170] у статистиці слово «робастність» як термін вперше ввів Дж. Е. П. Бокс в 1953 році [171]. У застосуванні до задач математичної статистики П. Хьюбер визначив термін «робастність» в 1964 році як нечутливість процесу або системи до малих відхилень від вихідних припущень, інакше кажучи, забезпечення гарної захищеності результату від погрешностей вихідних даних.

У СРСР поняття «грубості» було введено в теорію динамічних систем А. А. Андроновим і Л. С. Понтрягиним [172]. Цим визначався клас систем, якісні властивості яких, наприклад, стійкість або нестійкість, не змінюються при малій зміні параметрів цих систем. У просторі параметрів грубі системи відділяються від

негрубих бифуркаційними поверхнями, при переході через які відбувається стрибкоподібна зміна властивостей системи. З поняттям «грубості» зв'язані задачі про стійкість класу систем.

В сучасній теорії автоматичного керування термін «робастність» пов'язують з забезпеченням стійкості системи при певному розкиді її параметрів і вперше задача щодо робастності динамічної системи була сформульована в роботі [173], в якій було встановлено достатні умови, щоб усі корені сімейств поліномів з коефіцієнтами, які змінюються у заданих інтервалах, мали б від'ємні дійсні частини. Повне рішення цієї задачі було отримано В. Л. Харитоновим [174] (теорема В. Л. Харитонова, в якій припускалось, що вектор коефіцієнтів характеристичного рівняння системи належить множині в вигляді m -вимірного прямокутника зі сторонами, паралельними координатним осям – інтервальної множині, і доводилось, що для стійкості сімейства інтервальних поліномів необхідно і достатньо, щоб були стійкими лише чотири поліноми, які зараз називаються поліномами Харитонова [175]).

В роботі [175] для всіх видів невизначеності застосовується мінімаксий підхід і ставиться питання – «чи можна гарантувати яку-небудь властивість (динамічної) системи з невизначеністю для усіх припустимих значень цієї невизначеності? Наприклад, чи будуть усі збуджені системи стійкими (робастна стійкість)? Або чи забезпечують всі вони деяке завдане значення обраного показника якості (робастна якість)? Чи можна вибрати такий регулятор, який для усіх систем гарантує стійкість (робастна стабілізація)?»

Однак варіанти визначення «робастности» згідно [172] або [175] відрізняються від власно робастного гарантованого оцінювання станів або параметрів динамічних систем. При гарантованому оцінюванні може мати місце оцінювання змінних стану або параметрів власно робастних систем, які є робастними в сенсі визначень, даних в [172] або [175]. Однак сам процес оцінювання при цьому може й не бути робастним у сенсі, описаному в роботі [170]. У процесі оцінювання може мати місце порушення апріорних припущень, покладених в основу алгоритмів оцінювання, що приведе до «розбіжності» процесу оцінювання. Наочно це можна представити на

площині або в просторі як взаємне розташування еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності спостережуваної системи і інформаційної множини вимірювання. Ознакою порушення апріорних припущень є відсутність перетину цих двох множин. Якщо не будуть вжиті певні заходи для виправлення виниклої ситуації, то конкретний алгоритм, що реалізує метод еліпсоїдального оцінювання, перестане бути працездатним – процес оцінювання зупиниться. Це відбудеться внаслідок того, що матриця еліпсоїда множини можливих станів системи стане від'ємно-визначеною. Це ж має місце й у стохастичному оцінюванні для коваріаційно-дисперсійної матриці [176]. Геометричне уявлення для цього випадку – гіпербола на площині і гіперболоїд у тривимірному просторі. Друге, що може бути при цьому – алгоритм продовжить працювати, але поточна оцінка стану системи буде усе більше віддалятися від її дійсного стану.

Для запобігання подібних випадків Г. М. Баканом і його учнями було розроблено спосіб «розмитой» еліпсоїдальної апроксимації [35-39]. Суть цього способу полягає в тому, що при відсутності перетину вищевказаних множин апріорний еліпсоїд множини досяжності спостережуваної системи «масштабується» – рівномірно збільшується від свого центра до настання перетину із множиною вимірювання.

Трохи пізніше проблема робастності в задачах оцінювання стала розглядатись в роботах В. В. Волосова [50, 177], що вирішувалася схожим з «розмитой» еліпсоїдальною апроксимацією способом.

Згадаємо і так звані інтервальні обчислення, спочатку розроблені для оцінки погрішності при комп'ютерних обчисленнях. Вони почали розвиватися з монографії Р. Е. Мура, написаної в 1966 році [178] на базі його докторської дисертації 1962 року, і кінець кінцем розвилися в інтервальний аналіз [179, 180]. У роботі [180] було розроблено спосіб корекції апріорної множини, аналогічний викладеному вище, а саме: якщо поточне вимірювання не попадає в апріорну множину, то відбувається його розширення – «релаксація».

У монографії [181] для оптимального фільтра Калмана пропонується аналогічний підхід. Коли «нев'язка» між вимірюваним і обчисленим по алгоритму значеннями вихідного сигналу об'єкта перевищує теоретично припустиме, то виконується коректування алгоритму. При цьому матриця рішення різницевого рівняння Рікатті множиться на змінний коефіцієнт, більший одиниці. Цей коефіцієнт є функцією зазначеної «нев'язки» і обчислюється по наведеній в [181] формулі. У підсумку відбувається збільшення коефіцієнта впливу поточних вимірювань, що запобігає «розбіжності» алгоритму оцінювання.

З вищевикладеного випливає подібність способів коректування алгоритмів оцінювання, використовуваних у гарантованому підході (метод еліпсоїдів, інтервальні методи) і в статистичному підході для надання алгоритмам робастної властивості.

1.7. Застосування гарантованого підходу для синтезу систем автоматичного керування

При керуванні динамічними системами по зворотному зв'язку виникає потреба не тільки в оцінці можливих відхилень керуючого сигналу від його бажаного значення, але і у власно формуванні такого керування, яке б деяким чином було робастним щодо таких відхилень і забезпечувало керуючий сигнал найбільш «близький» до його бажаного значення. Або, більш глобально, синтезувати систему керування. Тобто, знаючи можливі відхилення вимірювання доступних для вимірювання змінних стану системи, необхідно сформувати керуючий сигнал або синтезувати систему керування, оптимальну за критерієм гарантованої точності. Спочатку така задача вирішувалася в стохастичному підході. Найбільш повно результати, досягнуті в цій області до кінця 20-го століття, викладено в монографії [182]. Зауважимо, що, незважаючи на вживання в назві слова «гарантування», мова йде саме про гарантування статистичних характеристик. Рішення задачі розбивається на три етапи: аналіз дисперсії помилки керування й максимальної помилки керування; синтез систем керування із заданою гарантованою точністю

функціонування; оптимізація систем керування за критерієм найвищої гарантованої точності.

У міру розвитку теорії гарантованого оцінювання з нестатистично завданою невизначеністю, стали з'являтися роботи, що вирішують вищевикладену задачу й при такому підході. Досить повний і докладний опис методів рішення цієї задачі можна знайти в огляді [182].

Цієї задачі передувала задача про пригамування невикладених обмежених зовнішніх збурень. Мабуть перша робота в цій області була присвячена, так званій проблемі про нагромадження збурень [21], написана Б. В. Булгаковим в 1946-му році. Однак у той час шукали максимальне відхилення, викликуване довільними обмеженими зовнішніми збуреннями, які розглядалися як керування. Пізніше з'явилися роботи з компенсації обмежених збурень, наприклад [184], у яких, втім, не пропонувалися методи синтезу оптимальних регуляторів. Також обмежені збурення вивчалися в роботах, присвячених дослідженню множин досяжності, а також у теорії диференціальних ігор [182]. У цілому пригамування невикладених обмежених збурень традиційно вважається важкою задачею в теорії керування [175, 185].

Вирішувати цю задачу стали на основі методу інваріантних множин [186], що був розроблений для рішення задач гарантованого оцінювання, фільтрації і мінімаксного керування в динамічних системах при наявності невизначеностей [26, 27, 187]. Однак концепція інваріантності також активно застосовується і в інших розділах теорії систем і теорії автоматичного керування. Найбільше повно і з урахуванням недавніх робіт таке застосування викладене в монографії Blanchini F., Miani S. [188].

Серед різних форм інваріантних множин еліпсоїди виділяються через їхню просту структуру й прямий зв'язок із квадратичними функціями Ляпунова [183, 188]. Це дозволяє використовувати лінійні матричні нерівності (Linear Matrix Inequalities, LMI) і напіввизначене програмування (Semidefinite Programming, SDP) для побудови інваріантних еліпсоїдів [190-192].

В англійській літературі ця задача теорії керування називається *peak-to-peak gain minimization*, що означає зменшення максимального значення виходу при

обмежених максимальних значеннях збурень. Застосування інваріантних еліпсоїдів узагальнює цей підхід на багатовимірний випадок і дозволяє звести синтез оптимального регулятора до пошуку найменшого в деякому обраному сенсі інваріантного еліпсоїда замкненої динамічної системи [193, 194].

1.8. Передумови для застосування гарантованого або стохастичного підходів до оцінювання станів динамічних систем

Очевидно, що перед тим, як використовувати відповідний підхід до оцінювання стану реального об'єкта, необхідно переконатися в тому, що обраний підхід до оцінювання забезпечує найкращу в обраному сенсі оцінку або є єдиним можливим у даному випадку. Якщо розглядати гарантуючий підхід у нестохастичній постановці, то, можливо, першою теоретичною публікацією, у якій порівнюються обидва підходи – гарантований і стохастичний, була робота [195]. Потім її положення були розвинені в публікаціях [196-198, 87]. В [197] проводиться аналіз для різного ступеня невизначеності в реальних інженерних задачах – доступність об'єкта для вимірів і попередніх експериментів, наявність досвіду експлуатації однотипних об'єктів, наявність надійних оцінок границь збурення і завади вимірювання параметрів об'єкта. При малій розмірності простору станів і відсутності відомостей про статистичні характеристики збурення і завади вимірювання пропонується використовувати підхід, заснований на розрахунку множини досяжності спостережуваної системи. Оскільки при великій розмірності простору станів системи точна побудова областей досяжності вкрай важка з обчислювальної точки зору, то оцінювати стан динамічних систем ведуть за допомогою множин канонічної форми, наприклад, еліпсоїдів. Якщо ж навіть самі границі припустимих значень збурення і завади вимірювання відомі неточно, то пропонується вибрати оцінку збурення настільки грубою, що б вона охопила всі можливі випадки. Однак такий підхід може привести до невиправдано високої невизначеності в значеннях оцінки вектора стану. У роботі [198], що продовжує роботу [197], здійснюється побудова аналогу фільтра Калмана для гарантованої оцінки стану динамічної системи, однак якого-небудь порівняння не проводиться.

Дане порівняння в якісному описі можна знайти в більш пізній роботі того ж автора [87]. Основне твердження в ній, що «незважаючи на те, що стохастичний і гарантований підходи математично значно розрізняються, обидва методи часто можна використовувати для опису того самого технічного пристрою. Це пояснюється тим, що реальні збурення практично ніколи не задовольняють вимогам ні першого, ні другого способів вичерпним образом. Тому на етапі переходу від інженерної задачі до математичної вносять додаткові припущення, які надзвичайно рідко можуть бути повністю виправдані з формальної точки зору... У всіх випадках ступінь виправданості припущень виміряється, як звичайно, величиною погрішностей, які вносять, прийнявши рішення на користь певного методу». У підсумку автор доходить висновку, що співпадаючий вигляд множин невизначеності стану спостережуваної системи, дає підставу вважати, що оцінки, одержувані з допомогою обох підходів, будуть близькими.

Висновки до розділу 1 і постановка задачі дисертаційного дослідження

В результаті огляду доступних джерел зі стохастичного і гарантованого підходів до оцінювання станів систем; використанню еліпсоїдів для рішення інших задач, пов'язаних з апроксимацією відомих множин або локалізації області рішень, очевидною є актуальність розробки методів оцінювання в гарантованому підході. З теоретичної точки зору можна сказати, що більшість тверджень, способів рішення, більшість поставлених задач, відповідно, доведено, обґрунтоване і вирішено. Проте, при практичній реалізації виникає чимало питань. Навіть автори теоретичних робіт у цій області відзначають два основних недоліки: або обчислювальну складність, або більшу невизначеність одержуваних еліпсоїдальних оцінок. Проблему робастності алгоритмів еліпсоїдального оцінювання навіть у теорії розроблено не повністю. Таким чином, існує потреба в розробці практично вигідного методу робастного еліпсоїдального оцінювання, застосовного до заданого класу лінійних динамічних систем, що забезпечує оцінку їхнього стану, прийнятну для досягнення цілі їхнього керування.

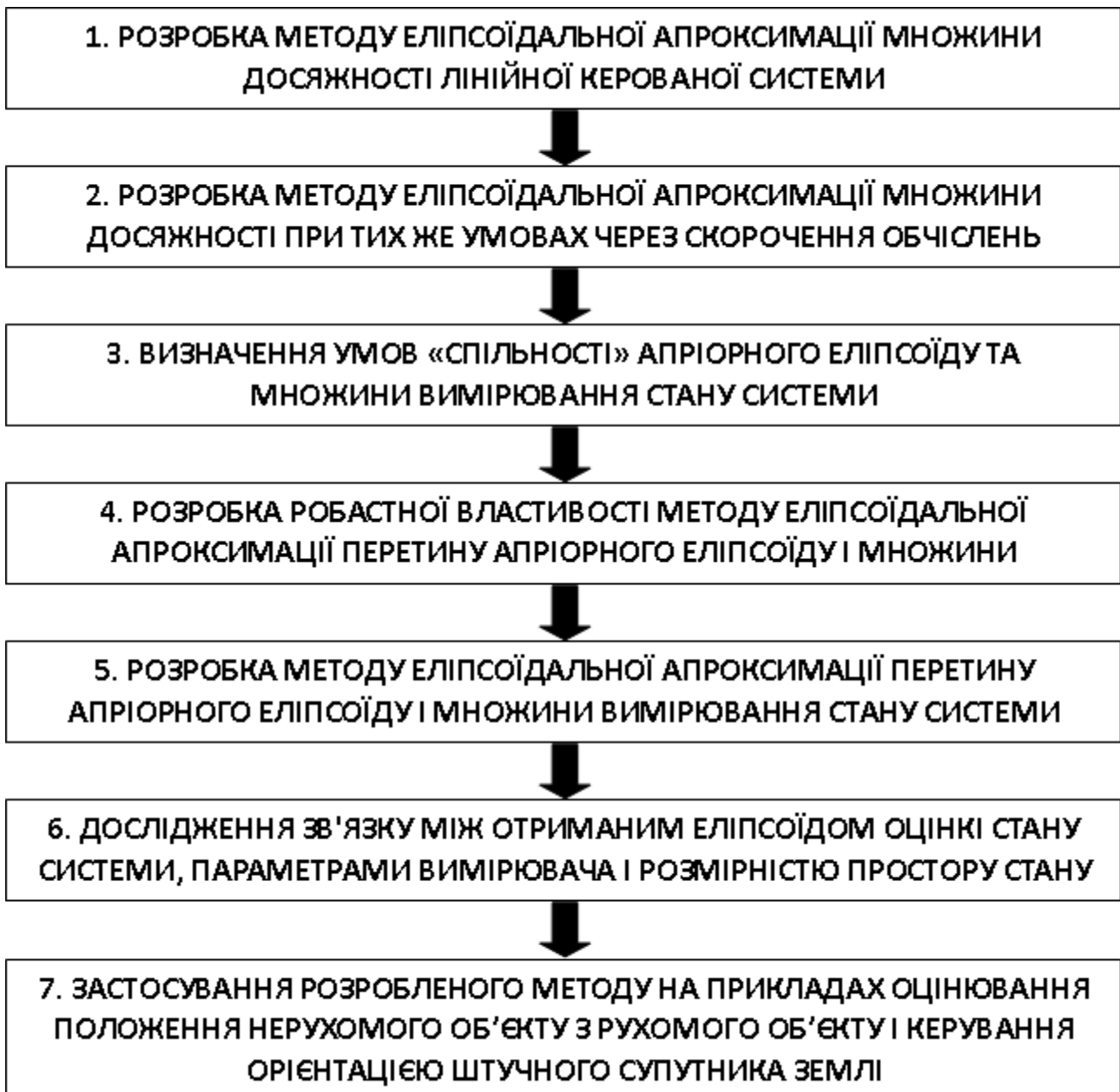


Рис. 1.1 Блок-схема системного підходу до розробки методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем за скалярними вимірюваннями в умовах нестатистично заданої невизначеності.

РОЗДІЛ 2

ЕЛІПСОЇДАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

Згідно блок-схемі на рис. 1 в Розділі 1 початкова частина для оцінювання динамічних систем – це побудова множини досяжності [27] спостережуваної системи, що її може досягнути система під дією можливих програм керування та зовнішнього збурення за певний проміжок часу. Оскільки для подальшого використання отриманої множини зручно мати постійну кількість параметрів цієї множини, якими вона визначається, то для цього треба обрати деяку канонічну множину, що апроксимує або, іншими словами, містить множину досяжності, причому їх центри мають співпадати. Цієї вимозі відповідає така геометрична фігура, наприклад, як еліпсоїд [201, 200, 27]. У порівнянні з багатогранником він завдається меншою кількістю параметрів [20]. До того ж, для подальших операцій з множиною досяжності, а саме – підсумовуванням двох опуклих множин за Мінковським та перетином також двох опуклих множин, та подальшою апроксимацією отриманих у результаті цих двох операцій опуклих множин, еліпсоїд найбільш зручний [27]. Критерієм мінімізації еліпсоїду візьмемо його багатовимірний об'єм та, для порівняння, суму квадратів його півосей. Зауважимо, що багатовимірний об'єм є більш зручним з точки зору математика, тому що еліпсоїдальна апроксимація суми еліпсоїдів залишається інваріантною відносно афінних перетворень [27].

2.1. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності лінійної керованої системи за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму

Постановка задачі

Розглянемо лінійну керовану систему з адитивним збуренням, що діє на її вході, і неточно відомим початковим станом. Рівняння системи у фазовому просторі змінні стани має вигляд

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + w_j, j \in T_0. \quad (2.1)$$

Тут: $j \in T_0 = [0, 1, \dots, k]$ – дискретний час ($k < \infty$); $x_j \in R^n$ – вектор фазового стану (у момент часу j); $u_j \in R^1$ – керування в той же момент; $w_j \in R^n$ – вектор перешкоди; $A_j \in R^{n \times n}$, $B = R^{n \times 1}$ – задані матриці такі, що пара (A, B) керована. Передбачається, що матриці A, B мають канонічну форму, зокрема, без втрати спільності методу побудови множини досяжності та її еліпсоїдальної апроксимації, $B^T = (0 \ 0 \ \dots \ 1)$. Такий запис дає можливість задавати керуючу дію по одному обраному каналу керування і розглядати поведінку системи для випадків керування окремо по кожному каналу.

Керування $u_j \in R^1$ задані на всьому інтервалі T_0 , створюючи програму керування

$$\{u_j \in R^1, j \in T_0\}. \quad (2.2)$$

Зовнішнє збурення w_j адитивне. Воно має вигляд

$$w_j = \zeta_j f_j, \quad (2.3)$$

де: $\zeta_j \in R^1$ – обмежений фактор, що збурює систему, такий, що $\forall j \in T_0$, $|\zeta_j| \leq d, d \geq 0$, $f_j \in R^n, |f_j| = 1$. Пара (A, f_j) керована, зокрема, без втрати спільності, $f_j^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$ і $f_j \equiv f = \text{const}$. Такий запис дає можливість задавати збурення по одному обраному каналу керування, наприклад, в тому же самому каналі, по якому діє керування.

Зауваження 2.1: Надалі розглядаються саме такі лінійні керовані системи, в яких збурення діє переважно по одному каналу, не обов'язково в каналі керування, а збуренням по іншим каналам можна знехтувати. Приклад такої системи буде розглянуто у Розділі 4.

Для множини реалізацій збурення w_j можна записати

$$\{w_j : |l^T w_j| \leq d \sqrt{l^T f_j f_j^T l}, \forall l \in R^n\}. \quad (2.4)$$

Вектор $x_0 \in R^n$ початкового стану точно не заданий. Відомо, що він може приймати значення з обмеженої множини

$$E_0 = \{x_0 : (x_0 - \bar{x}_0)^T \bar{H}_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \leq 1\}, \quad (2.5)$$

де $E_0 \subset R^n$ – багатовимірний еліпсоїд із заданими параметрами $\bar{x}_0 \in R^n$ і $\bar{H}_0 \in R^{n \times n}$, $\bar{H}_0^T = \bar{H}_0 > 0$.

Нехай $\{\tilde{x}_j, j \in T_0\}$ розрахункова траєкторія системи – рішення рівняння

$$\tilde{x}_{j+1} = A\tilde{x}_j + Bu_j, \tilde{x}_j \Big|_{j=0} = \bar{x}_0, \quad (2.6)$$

при керуваннях (2.2).

Величину $\varepsilon_j = x_j - \tilde{x}_j$, де x_j – рішення рівняння (2.1), при чому $x_0 \in E_0$ і умовах (2.2), (2.4), (2.5), назвемо похибкою системи.

Завдання полягає в тому, щоб побудувати таку еліпсоїдальну множину $E_j \subset R^n$ найменшого багатомірного об'єму, щоб

$$\forall j \in T_0 \quad \varepsilon_j \in E_j. \quad (2.7)$$

Множину E_j будемо називати гарантованою оцінкою точності системи (в j -й момент часу) або гарантованою оцінкою точності реалізації програми (2.2)

Рішення задачі

Нехай шукана еліпсоїдальна оцінка в j -й момент часу має вигляд багатомірного еліпсоїда

$$E_j = \{x_j : (x_j - \tilde{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \tilde{x}_j) \leq 1\}, \quad (2.8)$$

де параметри $\tilde{x}_j \in R^n$ і $H_j \in R^{n \times n}, H_j > 0$ – вважаються відомими. Зокрема, для $\tilde{x}_{j|j=0} = \bar{x}_0, H_0 = \bar{H}_0$.

Еліпсоїд (2.8) можна записати в параметричному вигляді

$$E_j = \{x_j : x_j = \tilde{x}_j + \sqrt{H_j} \xi_j, \|\xi\| \leq 1\}, \quad (2.9)$$

де $\xi_j \in R^n$ – допоміжний параметр і $\|\bullet\|$ – евклідова норма вектора.

Для визначення оцінки E_{j+1} на $j+1$ -му такті знайдемо образ еліпсоїда при відображенні його за допомогою лінійного перетворення (2.1). Для цього,

користуючись параметричним поданням (2.9), виключимо вектор x_j з рівняння

$$(2.1). \text{ Тоді одержимо } x_{j+1} = A\tilde{x}_j + A\sqrt{H_j}\xi_j + Bu_j + w_j.$$

Позначимо

$$\tilde{x}_{j+1} = A\tilde{x}_j + Bu_j, \quad (2.10)$$

тоді

$$x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1} = A\sqrt{H_j}\xi_j + w_j. \quad (2.11)$$

З урахуванням цього для похибки $\varepsilon_{j+1} = x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}$ можемо записати

$$E_{j+1}^* = \{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1} = z_j + w_j, z_j = A\sqrt{H_j}\xi_j, \|\xi_j\| \leq 1, w_j = \zeta_j f_j, |\zeta_j| \leq d\}. \quad (2.12)$$

Відповідно до визначення змінної z_j в (2.12) вона приймає значення з

множини

$$\{z_j : l^T z_j \leq \sqrt{l^T A H_j A^T l}, \forall l \in R^n\}. \quad (2.13)$$

Таким чином, похибка ε_{j+1} на $j+1$ -му такті являє собою суму двох змінних, кожна з яких приймає значення з еліпсоїдальних множин (2.4) і (2.13). З огляду на те, що ці множини задані своїми опорними функціями, для множини (2.12) одержимо

$$E_{j+1}^* = \{\varepsilon_{j+1} : l^T \varepsilon_{j+1} \leq \sqrt{l^T H_{j+1|j} l} + \sqrt{l^T f_j f_j^T l} d, \forall l \in R^n\}, H_{j+1|j} = A H_j A^T. \quad (2.14)$$

Тут використано той факт, що сума двох векторів, кожний з яких належить своєму еліпсоїду, належить множині з опорною функцією, рівної сумі опорних функцій відповідних еліпсоїдів.). Наочно це виглядає так:

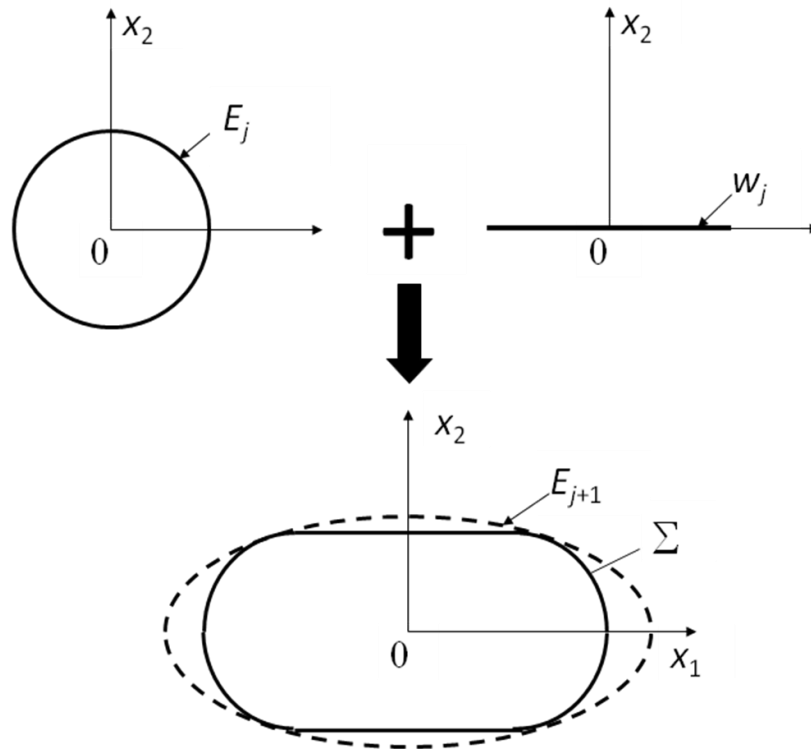


Рис. 2.1 Еліпсоїдальна апроксимація суми за Мінковським двох множин: еліпсоїду початкового стану і відрізка – множини можливих значень зовнішнього збурення.

Поставлена задача тепер звелася до того, щоб апроксимувати множину (2.14) еліпсоїдальною множиною E_{j+1} найменшого об'єму.

Вичерпне рішення даної задачі дано в монографії [27]. Однак це рішення пов'язане з необхідністю одночасного приведення вихідних еліпсоїдів до діагональної форми. Для цього доводиться вирішувати відповідне характеристичне рівняння.

Запропонуємо більш простий спосіб рішення, що враховує специфіку розглянутої задачі. У його основі лежить ідея використання оператора стискання [103-105, 120] в заданому напрямку. Це дозволяє відносно просто обчислювати, а потім і мінімізувати об'єм шуканої еліпсоїдальної оцінки.

Оскільки множина (2.14) не є еліпсоїдальною, знайдемо апроксимуючий її еліпсоїд. Для цього скористаємося лемою, що стосовно до розглянутої тут задачі запишемо у вже прийнятих позначеннях, опускаючи індекси j й $j+1$.

Лема 2.1. Нехай $\gamma_1 > 0$ і $\gamma_2 > 0$ – числові параметри, такі, що

$$\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1. \quad (2.15)$$

Тоді будь-який еліпсоїд з параметричного сімейства

$$E(\gamma_1, \gamma_2) = \{\varepsilon : l^T \varepsilon \leq \sqrt{l^T (\gamma_1 f f^T d^2 + \gamma_2 H) l}, \forall l \in R^n\} \quad (2.16)$$

має властивість

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \quad E^* \subset E(\gamma_1, \gamma_2), \quad (2.17)$$

де $E^* = \{\varepsilon : l^T \varepsilon \leq \sqrt{l^T f f^T l d^2} + \sqrt{l^T H l}\}$.

Доведення лему 2.1: Підставимо $E^* = \{\varepsilon : l^T \varepsilon \leq \sqrt{l^T f f^T l d^2} + \sqrt{l^T H l}\}$ в ліву частину

(2.16): $\sqrt{l^T f f^T l d^2} + \sqrt{l^T H l} \leq \sqrt{l^T (\gamma_1 f f^T d^2 + \gamma_2 H) l}$. Піднесемо обидві частини у квадрат

$l^T H l + 2\sqrt{l^T H l l^T f f^T l d^2} + l^T f f^T l d^2 \leq \gamma_1 l^T f f^T l d^2 + \gamma_2 l^T H l$, зробимо переноси і згрупуємо

наступним чином: $2\sqrt{l^T H l l^T f f^T l d^2} \leq (\gamma_1 - 1) l^T f f^T l d^2 + (\gamma_2 - 1) l^T H l$. З обмеження (2.15)

отримуємо вираз $\gamma_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}$. Підставимо цей вираз в попередню нерівність

$2\sqrt{l^T H l l^T f f^T l d^2} \leq (\gamma_2 - 1)^{-1} l^T f f^T l d^2 + (\gamma_2 - 1) l^T H l$, виконаємо перетворення

$2(\gamma_2 - 1)\sqrt{l^T H l l^T f f^T l d^2} \leq l^T f f^T l d^2 + (\gamma_2 - 1)^2 l^T H l$. Далі

$0 \leq l^T f f^T l d^2 + (\gamma_2 - 1)^2 l^T H l - 2(\gamma_2 - 1)\sqrt{l^T H l l^T f f^T l d^2}$ і $0 \leq \left(\sqrt{l^T f f^T l d^2} + \sqrt{(\gamma_2 - 1)^2 l^T H l}\right)^2$.

Остання нерівність виконується при усіх припустимих значеннях змінних і параметрів, які входять в неї. Отже, лему 2.1 доведено.

На підставі цієї лему для апроксимації множини (2.14) еліпсоїдів використаємо сімейство

$$E(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = \{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1}^T H_{j+1}^{-1} (\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) \varepsilon_{j+1} \leq 1\}, \quad (2.18)$$

де

$$H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = (\gamma_{1,j} f_j f_j^T d^2 + \gamma_{2,j} H_{j+1|j}) \quad (2.19)$$

Тепер завдання полягає в тім, щоб вибрати із сімейства (2.18) апроксимуючий еліпсоїд найменшого об'єму. Для рішення цієї задачі знайдемо вираз для об'єму еліпсоїда (2.18) як функцію від параметрів $\gamma_{1,j}$ і $\gamma_{2,j}$. За визначенням маємо [27]

$$v(E(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})) = v(1)(\det H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}))^{1/2}, \quad (2.20)$$

де $v(1)$ – об'єм одиничної кулі в R^n , $\det H_{j+1}$ – визначник матриці $H_{j+1} \in R^{n \times n}$. З використанням оператора стискання матрицю (2.19) представимо у вигляді

$$H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = \gamma_{2,j} \sqrt{H_{j+1|j}} R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} f_j \right) \sqrt{H_{j+1|j}}, \quad (2.21)$$

де $R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} f_j \right)$ – матриця стискання (розтягання) простору в напрямку $\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} f_j$:

$$R_{\beta_j^{-2}} \left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} f_j \right) = I - (1 - \beta_j^{-2}) \frac{\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}} f_j f_j^T \sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}}{f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j}. \quad (2.22)$$

Тут $I \in R^{n \times n}$ – одинична матриця і $\beta_j^{-2} = 1 + \gamma_{1,j} \gamma_{2,j}^{-1} \kappa_j^2$, де $\kappa_j^2 = f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j d^2$.

Необхідні пояснення щодо дії цього оператора можна побачити рисунках 2.2 і 2.3.

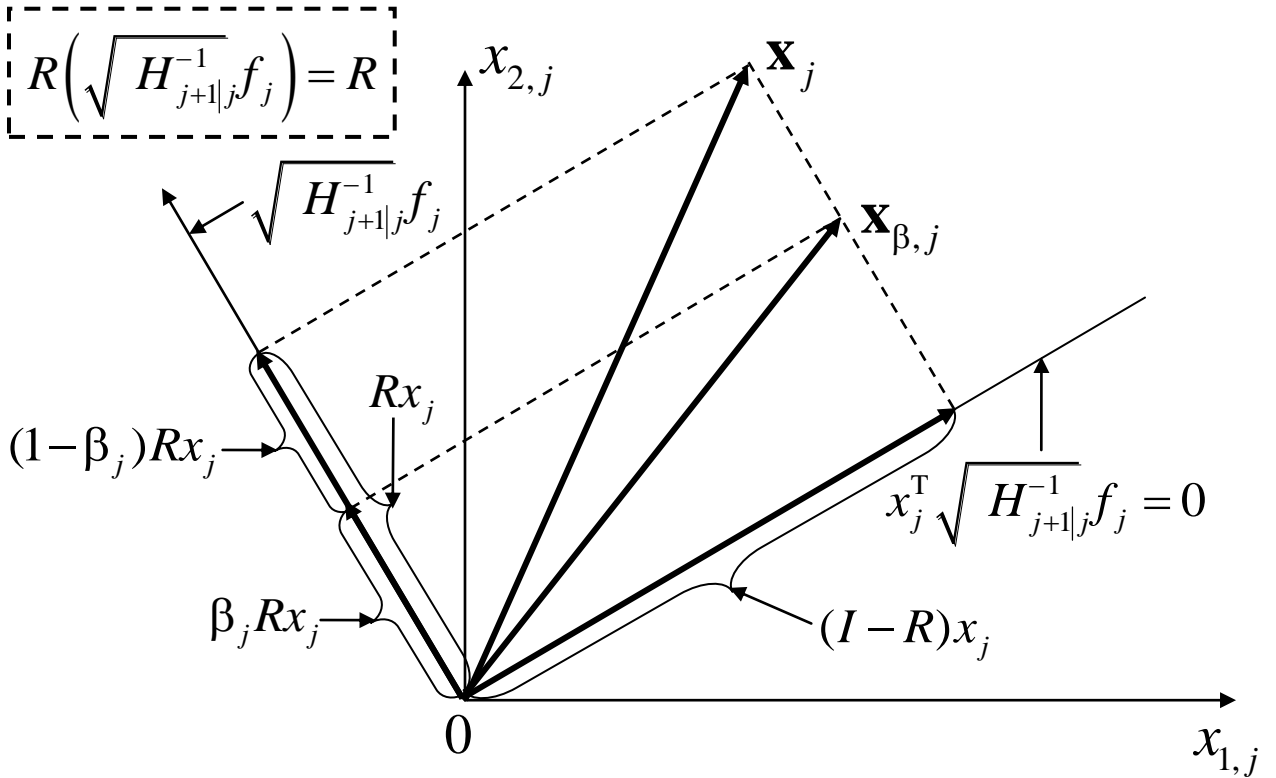
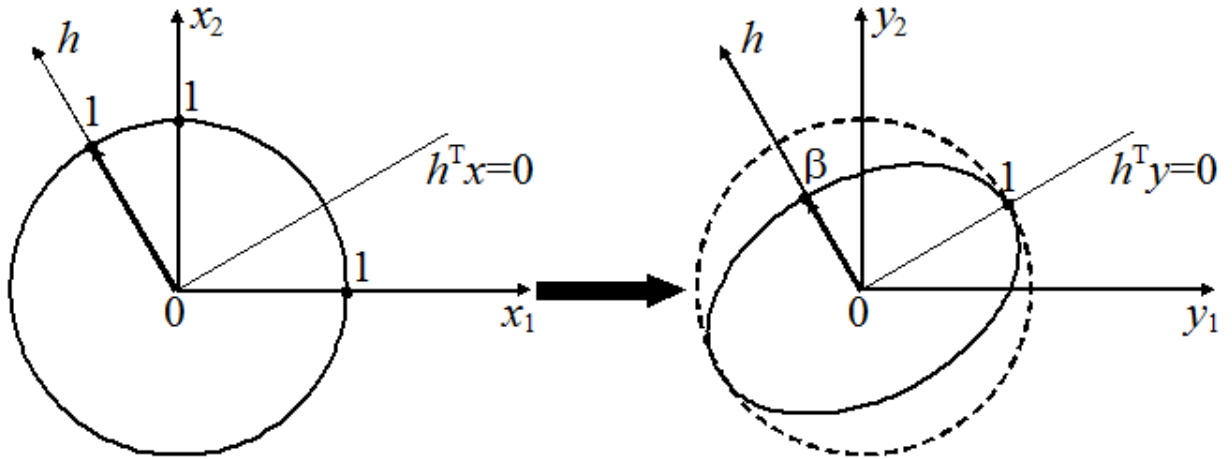


Рис. 2.2 Геометричне уявлення оператора розтягнення-стискання простору (2.22).



$$x^T x \leq 1; y = R_\beta(h)x \Rightarrow R_\beta^{-1}(h)y = x \Rightarrow y^T R_\beta^{-2}(h)y \leq 1$$

Рис. 2.3 Геометричне уявлення дії оператора розтягнення-стискання простору (2.22).

З урахуванням властивості матриці стискання (2.22) $\det R_{\beta_j^{-2}}(\sqrt{H_{j+1j}^{-1} f_j}) = \beta_j^{-2}$,

для об'єму (2.20) знаходимо

$$v(E(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})) = v(1) \gamma_{2,j}^{n/2} \beta_j^{-1} (\det H_{j+1j})^{1/2}. \quad (2.23)$$

Твердження 2.1. Нехай δ_j^+ позитивний корінь рівняння

$$n\delta_j^2 + (n-1)\kappa_j^2 \delta_j - \kappa_j^2 = 0. \quad (2.24)$$

Тоді оптимальні значення $\gamma_{1,j}^*$ і $\gamma_{2,j}^*$ параметрів $\gamma_{1,j}$ і $\gamma_{2,j}$, на яких досягається мінімальне значення об'єму (2.23) апроксимуючого еліпсоїда, зв'язані між собою

співвідношенням $\delta_j^+ = \frac{\gamma_{2,j}^*}{\gamma_{1,j}^*}$, що з урахуванням обмеження (2.15) дає

$$\gamma_{1,j}^* = \frac{1 + \delta_j^+}{\delta_j^+}, \gamma_{2,j}^* = 1 + \delta_j^+. \quad (2.25)$$

Доведення твердження 2.1: Оскільки у виразі (2.23) параметри, які варіюються для досягнення мінімуму об'єму еліпсоїду є γ_2 і β , (тут і далі індекс опускаємо), то далі розглянемо вираз $\gamma_2^{n/2} \beta^{-1}$, піднесемо його у квадрат для зручності подальших викладок і підставимо замість β^{-1} його представлення через параметри

γ_1 , γ_2 та κ^2 . Тоді маємо: $(\gamma_2^{n/2}\beta^{-1})^2 = \gamma_2^n \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \kappa^2\right) = \gamma_2^n \left(1 + \frac{\kappa^2}{\gamma_2 - 1}\right) = \gamma_2^n + \frac{\gamma_2^n \kappa^2}{\gamma_2 - 1}$, де з

(2.15) ураховано, що $\gamma_1 = \gamma_2(\gamma_2 - 1)^{-1}$. Продиференціюємо $\gamma_2^n + \frac{\gamma_2^n \kappa^2}{\gamma_2 - 1}$ по γ_2 і

прирівняємо до нуля: $n\gamma_2^{n-1} + \frac{n\kappa^2\gamma_2^{n-1}}{\gamma_2 - 1} - \frac{\kappa^2\gamma_2^n}{(\gamma_2 - 1)^2} = 0$. Поділімо отриманий вираз на γ_2^{n-1} ,

помножимо на $(\gamma_2 - 1)^2$ і одержимо $n(\gamma_2 - 1)^2 + n\kappa^2(\gamma_2 - 1) - \kappa^2\gamma_2 = 0$. Підставимо в нього $\gamma_2 = 1 + \delta$ і після необхідних перетворень одержимо рівняння (2.24). Запишемо

його рішення: $\delta_{1,2} = \frac{-\kappa^2(n-1) \pm \kappa\sqrt{\kappa^2(n-1)^2 + 4n}}{2n}$. Бачимо, що завжди

$\kappa\sqrt{\kappa^2(n-1)^2 + 4n} > 0$, оскільки $H_{j+1|j}^{-1} > 0$ і звідси $\kappa_j^2 = f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j d^2 > 0$, якщо $d > 0$.

Оскільки $\kappa\sqrt{\kappa^2(n-1)^2 + 4n} = \kappa^2\sqrt{(n-1)^2 + 4n\kappa^{-2}} > \kappa^2(n-1)$, то маємо два кореня з протилежними знаками. З урахуванням (2.25) та (2.15) випливає, що єдиний додатний корінь рівняння (2.24) доставляє оптимальні значення $\gamma_{1,j}^*$ і $\gamma_{2,j}^*$ параметрів $\gamma_{1,j}$ і $\gamma_{2,j}$, на яких досягається мінімальне значення об'єму. Отже, *твердження 2.1 доведено*.

Зауваження 2.2: Рівняння (2.24) з точністю до позначень співпадає з рівнянням, отриманим в [27], але отриманим іншим шляхом.

Вирішуючи рівняння (2.24), для максимального позитивного кореня одержимо

$$\delta_j^+ = d\sqrt{f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j} b_j = \kappa b_j, \quad (2.26)$$

$$\text{де } b_j = \kappa_j \frac{\sqrt{\kappa_j^2(n-1)^2 + 4n} - \kappa_j(n-1)}{2n}$$

Підставив (2.26) в (2.25), отримуємо значення $\gamma_{1,j}^*$ і $\gamma_{2,j}^*$, які далі підставимо у (2.19). Або, більш зручно, тому що не треба виконувати додаткові дії зі знайденим коренем δ_j^+ , можна записати (2.19) в наступному вигляді:

$$H_{j+1} = (1 + \delta_j^+)(H_{j+1|j} + \frac{d^2}{\delta_j^+} f_j f_j^T). \quad (2.27)$$

Формули (2.6) і (2.27) дають шуканий рекурентний алгоритм побудови гарантованої оцінки похибки реалізації програми (2.2). Початковими значеннями тут служать параметри апіорної множини (2.5).

Зауважимо, що рівняння (2.24) збігається з рівнянням, отриманим в [2.27] для випадку, коли матриця $H_{j+1|j} = I$.

2.2. Субоптимальна еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності лінійної керованої системи

Зауважимо, що скорочення обчислень при отриманні оцінки може бути переважним відносно отримання оптимальної оцінки. Це має місце при обмеженій потужності обчислювальних ресурсів, у тому числі і через обмеження енерговитрат з міркувань економії енергії або зменшення тепловиділення на борту об'єкта, стан якого оцінюється. Крім того, якщо подивиться на вирази (2.26) і (2.27), побачимо, що при малих значеннях або границі зовнішнього збурення d або $f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j$, значення δ_j^+ буде також становить малу величину. До того ж, якщо матриця $H_{j+1|j}$ погано обумовлена, то при її оберненні отримаємо значення κ_j і, відповідно, δ_j^+ , з похибкою. Тому запропонуємо субоптимальний спосіб апроксимації множини досяжності лінійної керованої системи, в якому за основу взята апроксимація за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму. Отже, маємо

Твердження 2.2. Нехай в рівнянні (2.24) замість $\kappa_j^2 = f_j^T H_{j+1|j}^{-1} f_j d^2$ використовується $\tilde{\kappa}_j^2 = (f_j^T H_{j+1|j} f_j)^{-1} d^2$, де $\|f_j\| = 1$. Тоді єдиний додатний корінь рівняння (2.24) також забезпечує виконання (2.17) і, у випадку, коли f_j є власним вектором матриці $H_{j+1|j}$, оцінка буде мінімальною в сенсі мінімуму її об'єму.

Доведення *твердження 2.2*: Оскільки перша частина твердження співпадає с твердженням *леми 2.1*, то треба довести тільки другу частину. Отже, власні числа взаємно обернених матриць також взаємно обернені, а набір власних векторів таких

матриць співпадає с точністю до співмножника. Нехай f_j є власним вектором матриці H_{j+1j} і, відповідно, матриці H_{j+1j}^{-1} . Тоді $H_{j+1j}f_j = \lambda_{j+1j}^{(i)}f_j$, де $\lambda_{j+1j}^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ – власне число матриці H_{j+1j} , що відповідає власному вектору f_j . Далі, $f_j^T H_{j+1j} f_j = f_j^T \lambda_{j+1j}^{(i)} f_j = \lambda_{j+1j}^{(i)} \|f_j\|^2 = \lambda_{j+1j}^{(i)}$, оскільки, без втрати спільності, $\|f_j\| = 1$. З іншого боку, для оберненої матриці H_{j+1j}^{-1} маємо $H_{j+1j}^{-1} f_j = (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1} f_j$, і, далі, $f_j^T H_{j+1j}^{-1} f_j = f_j^T (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1} f_j = (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1} \|f_j\|^2 = (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1}$. Підставив $f_j^T H_{j+1j} f_j = \lambda_{j+1j}^{(i)}$ у вираз $\tilde{\kappa}_j^2 = (f_j^T H_{j+1j} f_j)^{-1} d^2$, одержимо $\tilde{\kappa}_j^2 = (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1} d^2$. Підставив $f_j^T H_{j+1j}^{-1} f_j = (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1}$ у вираз $\kappa_j^2 = f_j^T H_{j+1j}^{-1} f_j d^2$, одержимо $\kappa_j^2 = (\lambda_{j+1j}^{(i)})^{-1} d^2$. Тобто, $\tilde{\kappa}_j^2 = \kappa_j^2$. Отже, другу частину твердження 2.2 доведено.

Слід підкреслити, що оптимальна та субоптимальна апроксимації множини досяжності за критерієм мінімуму об'єму у спосіб, описаний вище – через рішення квадратного рівняння, відбувається тільки для випадку, коли один з двох еліпсоїдів, що підсумовуються, вироджений у відрізок. Другий еліпсоїд має бути невиродженим. Якщо підсумовуються два невироджених еліпсоїди, то застосовується оператор розтягнення простору за n напрямками, і тоді треба шукати єдиний додатній корінь алгебраїчного рівняння степені $n+1$. В загальному випадку підсумування двох еліпсоїдів степінь алгебраїчного рівняння, яке необхідно розв'язувати, визначається наступним чином: $\min\{n+1, m+1\}$, де n, m – ранги матриць підсумованих еліпсоїдів і n – повний ранг. Ці рівняння також будуть співпадати з рівняннями, отриманими з допомогою способу, запропонованому в [27] – через одночасне приведення двох квадратичних форм до діагонального вигляду [202].

2.3. Моделювання динаміки оптимальної та субоптимальної оцінок

Виконаємо моделювання динаміки еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності на конкретному прикладі. Візьмемо лінійну систему третього порядку і

задамося стійкими значеннями власних чисел матриці динаміки A : $\lambda_i = 0,75; 0,5; -0,5, i = \overline{1, n}$. По них побудуємо матрицю A в формі Фробеніуса

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1875 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Збурення (2.3) приймемо рівними максимально можливими на всьому інтервалі керування й задамо у вигляді $\zeta_j = d(-1)^j$. Початкове значення

$$H_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 900 \end{bmatrix}.$$

Моделювання зробимо в середовищі MATLAB. Порівняємо апроксимацію множини досяжності трьома способами: оптимальним, субоптимальним, і способом, запропонованим в [27]. Як результат розглянемо три графіки змін квадратного кореня з визначника матриці H_j , отриманої трьома способами, залежно від номера j ітерації. Дані побудови представлені на рисунку 2.4.

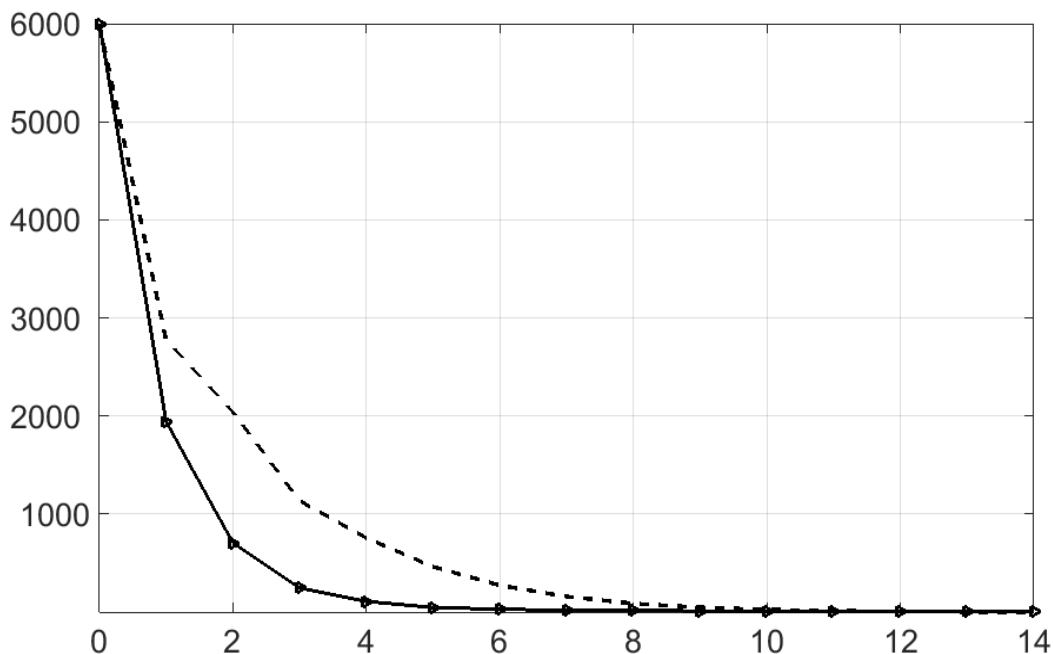


Рис. 2.4 Графіки зміни об'ємів еліпсоїдів, що апроксимують множину досяжності стійкої лінійної системи

З рисунка бачимо, що об'єм еліпсоїдів, побудованих оптимальними способами співпадають. Графік апроксимації через рішення рівняння (2.24) – суцільна лінія. Трикутниками на неї позначена співпадаюча лінія графіку апроксимації згідно [27]. Графік апроксимації в субоптимальний спосіб наведено штриховою лінією. Якщо порівняти оптимальний і субоптимальні графіки, то можна помітити, що на початку апроксимації різниця між значеннями критерію невелика. Надалі розбіжність зростає, але кінець кінцем об'єми еліпсоїдальних оцінок, отримані оптимальним і субоптимальним способами, завдяки «стисканню» еліпсоїдів матрицею динаміки – тобто, система стійка, збігаються і визначаються тільки границею збурення. З цього робимо висновок, що у випадку, коли отримана оцінка уточнюються через наявність вимірювань змінних стану спостережуваної системи, застосовувати субоптимальний спосіб апроксимації цілком доцільно.

2.4. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація множини досяжності лінійної керованої системи за критерієм мінімуму суми квадратів півосей

Як відомо, сумі квадратів півосей еліпсоїда в аналітичному запису відповідає слід матриці квадратичної форми, що його виражає [202]. Тому на підставі леми 2.1 запропонуємо наступне

Твердження 2.3. Матриця еліпсоїду з мінімальним слідом, який апроксимує суму двох еліпсоїдів, один із яких є виродженим у відрізок, запишеться у вигляді

$$H_{j+1}(\gamma_{1,j}^*, \gamma_{2,j}^*) = \bar{k}_j^{-1}(1 + \bar{k}_j) f f^T d^2 + (1 + \bar{k}_j) H_{j+1|j}, \quad \bar{k}_j = \frac{d}{\sqrt{\text{trace} H_{j+1|j}}} \quad (2.27)$$

Доведення твердження 2.3: Виразимо з (2.15) $\gamma_{1,j} = \frac{\gamma_{2,j}}{\gamma_{2,j} - 1}$ і запишемо слід

матриці (2.19) в наступному вигляді:

$$\text{trace} H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = \gamma_{2,j}(\gamma_{2,j} - 1)^{-1} f^T f d^2 + \gamma_{2,j} \text{trace} H_{j+1|j} \quad (2.28)$$

Тут використано властивість: $\text{trace}(AA^T) = \text{trace}(A^T A)$. Перепишемо (2.28) з

урахуванням $\|f\| = 1$

$$\text{trace} H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = \gamma_{2,j}(\gamma_{2,j} - 1)^{-1} d^2 + \gamma_{2,j} \text{trace} H_{j+1|j}. \quad (2.29)$$

Продиференціюємо (2.29) по $\gamma_{2,j}$, прирівняємо до нуля і помножимо на $(\gamma_{2,j} - 1)^2$. Це можна зробити, тому що з (2.15) випливає $\gamma_1, \gamma_2 > 1$ і, таким чином, $(\gamma_{2,j} - 1)^2 \neq 0$.

$$\text{trace}H_{j+1j}\gamma_{2,j}^2 + 2\gamma_{2,j}(d^2 - \text{trace}H_{j+1j}) - d^2 = 0. \quad (2.30)$$

Оскільки за умовою $\text{trace}H_{j+1j} > 0$, то можемо поділити (2.30) на $\text{trace}H_{j+1j}$ і переписати у вигляді $\gamma_{2,j}^2 - 2\gamma_{2,j} + 1 - \bar{k}_j^2 = 0$. Звідки одержимо рішення: $\gamma_{2,j} = 1 \pm \bar{k}_j$. З умови $\gamma_1, \gamma_2 > 1$ беремо верхній знак і запишемо $\gamma_{2,j}^* = 1 + \bar{k}_j$, що після підстановки в (2.19) з урахуванням $\|f\| = 1$ дає (2.27).

Зауваження 3.2. Якщо зовнішнє збурення діє більш ніж по одній фазовій змінній, тоді має обмеження виду

$$Q_j \in R^{n \times n}, Q_j = Q_j^T \geq 0, w_j^T Q_j w_j \leq \rho(Q_j), \forall \|w_j\| = 1, \quad (2.31)$$

тоді вираз для \bar{k}_j має вигляд

$$\bar{k}_j = \sqrt{\frac{\text{trace}Q_j}{\text{trace}H_{j+1j}}}. \quad (2.32)$$

Висновки до розділу 2

У розділі наведено результати досліджень еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності лінійної керованої системи, яка містить вектор її можливого стану, за двома критеріями оптимізації – мінімізації багатовимірного об'єму та суми квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду:

1. Запропоновано лему, на підставі якої можна розробляти конструктивні способи еліпсоїдальної апроксимації суми двох еліпсоїдів за Мінковським за довільними критеріями мінімізації.
2. Розглянуто окремий випадок, що часто має місце на практиці – дія зовнішнього збурення тільки по одному каналу керування, а по іншим каналам збурення мале і їм можна знехтувати.
3. З застосуванням оператора стискання простору розроблено спосіб мінімальної щодо об'єму еліпсоїдальної апроксимації суми за Мінковським

двох еліпсоїдів, один з яких є виродженим у відрізок. Було отримане квадратне рівняння, яке з точністю до позначень співпало з квадратного рівнянням, що було отримано для цього критерію апроксимації в роботі [27] більш складним шляхом – одночасним зведенням двох підсумованих еліпсоїдів до діагонального вигляду.

4. Для зменшення кількості обчислень запропоновано і обґрунтовано субоптимальний спосіб апроксимації – через спрощення способу оптимальної апроксимації за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму. Було показано, що в окремих випадках апроксимуючий еліпсоїд, отриманий субоптимальним способом, співпадає з еліпсоїдом, отриманим оптимальним способом.
5. Вищезгадані способи було порівняно з допомогою комп'ютерного моделювання.
6. Розроблено спосіб еліпсоїдальної апроксимації суми двох еліпсоїдів за критерієм мінімуму суми квадратів його півосей. Він також базується на запропонованій лемі. Цей спосіб дозволяє отримувати рішення при будь-якому виродженні підсумованих еліпсоїдів. Для знаходження рішення треба розв'язувати квадратне рівняння і брати його єдиний додатній корень.

Результати досліджень даного розділу наведено в таких публікаціях:

1. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К задаче гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы, *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2005. № 4. С. 44-51. (Особистий внесок – доведено твердження щодо оптимальних значень параметрів, які мінімізують еліпсоїд, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи, яка є сумою за Мінковським початкового еліпсоїду стану і відрізка – множини зовнішнього збурення. Також розроблено математичну та комп'ютерну моделі цієї апроксимації та проведено комп'ютерне моделювання для порівняння з уже відомим способом апроксимації).

2. Шолохов А. В. Субоптимальная аппроксимация суммы эллипсоидов и пересечения эллипсоида с гиперслоем. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 3. С. 78-87.
3. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. №1. С.96-105. |DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10559-019-00114-x>. (Особистий внесок – висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апріорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки).

РОЗДІЛ 3

ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ ЗА ВИМІРЮВАННЯМИ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ СТАНУ АБО ДЕЯКОЇ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ ЗМІННИХ

При наявності вимірювань всіх або деяких змінних стану динамічної системи з'являється можливість уточнювати її стан. В останньому випадку система має бути спостережуваною. Це, у свою чергу, дає можливість керувати системою. Для цього система має бути керованою [2, 181]. В даній роботі розглядаються, як вже говорилося, лінійні системи. Це не таке вже велике обмеження, тому що багато реальних систем як об'єкти керування припускають їх лінеаризацію при синтезі регуляторів [181, 189]. Питання стійкості замкненої керованої лінійної системи тут не розглядатимемось, але зрозуміло, що для забезпечення стійкості необхідно, щоб відхилення оцінки змінних стану системи від їх справжнього значення було би обмеженим відомою множиною [189], і бажано, було б мінімальним за обраним критерієм. При гарантованому обмеженні цього відхилення стає можливим розробити регулятор, який забезпечує бажану якість керування системою [175, 182, 183, 186, 192-194]. Отже, *постає задача* гарантованого оцінювання стану спостережуваної системи згідно обраного критерію мінімізації за доступними для вимірювання змінними.

Для її розв'язування необхідно винайти спосіб еліпсоїдальної апроксимації перетину апіорного еліпсоїду початкового стану системи і множини вимірювання, що уявляє собою «гіпершар» у просторі станів системи, за певним критерієм мінімізації отримуваної еліпсоїдальної оцінки. «Гіпершар» означає, що вимірюється або одна змінна стану, або деяка лінійна комбінація змінних стану системи. Якщо вимірюються декілька змінних стану окремо, тобто маємо вектор вимірювання, то обробка може вестись або послідовно або одночасно – тоді це вже буде не «гіпершар», а «брус» або «багатогранник» [203].

В методі, яким здійснюється оцінювання, має бути суттєва властивість – це робастність. Як було написано в Розділі 1, під робастністю в оцінюванні мається на увазі подолання випадків «несумісності» апіорних оцінок і апостеріорної

інформації. Для цього необхідно дослідити усі можливі випадки взаємного розташування вищезгаданих еліпсоїду початкового стану та «гіпершару» множини вимірювання. Відповідно, для безперервного оцінювання стану системи з потрібною точністю необхідно розробити конструктивний алгоритм, який враховує усі такі випадки.

Важливе завдання, яке необхідно виконати і яке вже стосується практичного застосування методу оцінювання, це скоротити кількість обчислень при враховуванні оцінки за умови, що це скорочення не призведе до неприйняттого погіршення точності оцінки. Ще одне важливе для практичного застосування завдання, яке необхідно вирішити – це забезпечити відсутність особливих випадків у процесі оцінювання: обчислювальної нестійкості, ділення на нуль і появи від’ємних та уявних значень параметрів у виразах для оцінки.

Після розв’язування всіх цих завдань і головної задачі необхідно дослідити оцінку, що отримується через розроблений метод, на її зв’язок з розміром простору станів системи, параметрами вимірювача і завадою спостереження. Тобто сформулювати певні твердження щодо отриманої оцінки в залежності від перелічених вище факторів. Це дасть змогу формулювати вимоги щодо вимірювача в залежності від потрібної точності оцінки.

3.1. Визначення умов «спільності» апріорного еліпсоїду та множини вимірювання стану системи та способів усунення порушення цих умов

Постановка задачі

Нехай стан системи уточнюється з допомогою рівняння вимірювання

$$y_j = h^T x_j + \eta_j, \quad |\eta_j| \leq c, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

де $y_j \in R^1$ – результат вимірювання стану системи; $h \in R^n$ – параметр вимірювального пристрою такий, що система (2.1), тобто пара (A, h) спостережувана; $\eta_j \in R^1$ – обмежена завада вимірювання; $c \geq 0$ – відома константа. Рівняння (3.1) у просторі R^n визначає «гіпершар»

$$S(y_j, x_j) = \{x_j : (y_j - h^T x_j)^2 \leq c^2\}. \quad (3.2)$$

Завдання полягає в тому, щоб за вимірюваннями входу u_j (2.2) системи (2.1) і виходу y_j побудувати гарантовану еліпсоїдальну оцінку

$$L_j \supset E_j \cap S_j. \quad (3.3)$$

Зауваження 3.1: З математичної точки зору немає різниці, яким чином було отримано вимірювання стану системи – чи вимірювалась саме змінна стану, чи вимірювання уявляє собою деяку лінійну комбінацію змінних стану – усіх або декількох. За необхідності, певним невиродженим перетворенням можна отримати для h вигляд вектору s єдиною одиничною координатою в бажаній позиції в векторі. Проте якщо йдеться про реальні об'єкт та вимірювач, очевидно, необхідно прагнути до вимірювання тільки однієї змінної, тому ще це, за рідкісним винятком, дешевше або зручніше. Головне при цьому, що вимірюватись має змінна, яка забезпечує спостережуваність системи (2.1), оскільки в залежності від вимірюваної змінної система може або бути спостережуваною або ні [204]. Але якщо йдеться про лінійну комбінацію змінних стану, і сигнал, що відтворює вимірювання, має одну фізичну природу і містить інформацію про різні по своїй фізичній суті явища [205]. Це ускладнює оцінювання.

Спочатку поставимо питання – якими можуть бути випадки взаємного розташування апріорного еліпсоїду E_j і «гіпершару» S_j ? Це легко з'ясувати якщо вдасться до геометричних уявлень у двовимірному випадку. Можливі чотири випадки взаємного розташування еліпсоїду E_j множини досяжності і «гіпершару» S_j множини спостереження:

1. «Гіпершар» повністю містить еліпсоїд;
2. «Гіпершар» перетинається з еліпсоїдом обома обмежуючими площинами;
3. «Гіпершар» перетинає еліпсоїд тільки однією обмежуючою площиною;
4. «Гіпершар» і еліпсоїд не перетинаються.

Геометричне уявлення усіх випадків можна побачити на рис. 3.1.

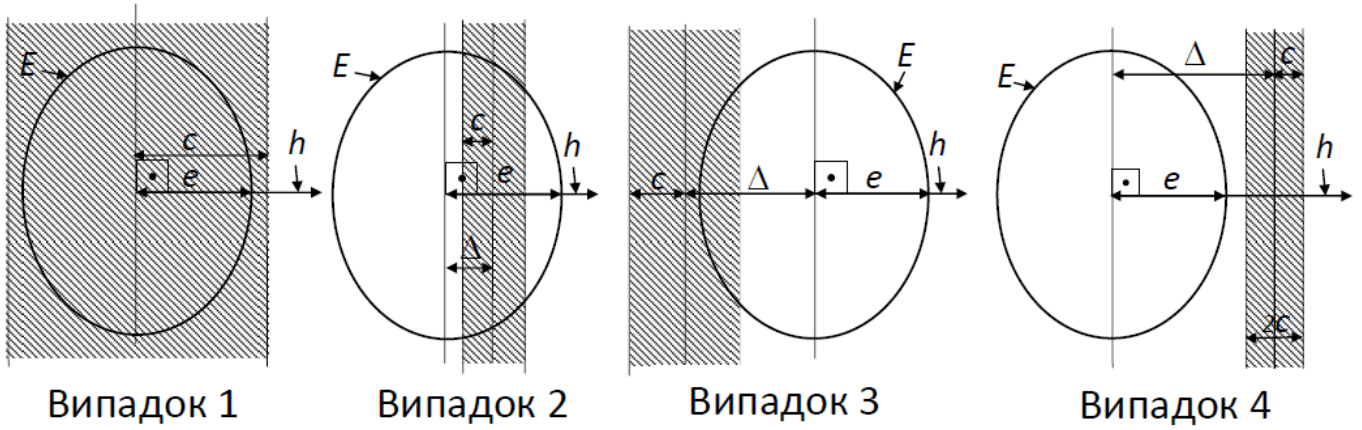


Рис. 3.1 Взаємне розташування апіорного еліпсоїду E і «гіпершару» S .

На рис. 3.1 введено наступні позначення (індекси опущено): $\Delta = y - h^T \bar{x}$, $e = \sqrt{h^T H h}$, де \bar{x} – центр апіорного еліпсоїду E , а H – матриця квадратичної форми, якою визначається еліпсоїд E .

Для використання цієї інформації в подальшому представимо її в наступному вигляді:

- випадок 1: $c - |\Delta_j| \geq e_j \Rightarrow \chi_j - |\sigma_j| \geq 1$;
- випадок 2: $c + |\Delta_j| < e_j \Rightarrow \chi_j + |\sigma_j| < 1$;
- випадок 3: $c - |\Delta_j| < e_j \cup c + |\Delta_j| > e_j \Rightarrow \chi_j - |\sigma_j| < 1 \cup \chi_j + |\sigma_j| > 1$;
- випадок 4: $|\Delta_j| > c + e_j \Rightarrow |\sigma_j| > \chi_j + 1$.

Випадок 1 означає, що подальше уточнення стану спостережуваної системи неможливо і тому залишаємо попередній еліпсоїд; у випадках 2, 3 за вимірюванням (9) – y_j і апіорним еліпсоїдом (5) – E_j будується апостеріорний еліпсоїд E_{j+1} з меншим об'ємом або сумою квадратів півосей, ніж у апіорного еліпсоїду; у випадку 4 маємо «несумісність» вимірювання і апіорного еліпсоїду і тому застосовуємо робастну властивість оцінювання.

Відоме рішення щодо надання робастної властивості методу оцінювання полягає в тому, що апіорний еліпсоїд масштабується таким чином, щоб його границя дотикалась середньої лінії «гіпершару» [35, 36, 41, 42, 49, 50]. Це рішення доцільне якщо вірним є припущення, що зовнішнє збурення перебільшує апіорне

задану границю. Але якщо апріорне задану границю перебільшує завада вимірювання, то таке рішення вже не тільки недоцільне, але і може привести до зриву процесу оцінювання. Звичайно, прийняття рішення щодо того, яке саме апріорне порушення має місце, покладається на спеціальний алгоритм, який аналізує надходження додаткової інформації ззовні та частоту і кількість випадків «несумісності» посліпль. В цій роботі запропоновано збільшувати «гіпершар» до середини апріорного еліпсоїду, припускаючись, що перебільшено апріорно задану границю заваду вимірювання. Доцільність такого підходу обґрунтовується наявністю практичних задач, наприклад, коли у процесі перехвату цілі керованою ракетою, якщо атаку виявлено, з боку цілі організуються завади вимірювання її координат і кутової швидкості у просторі предметів або завади у спектрі випромінювання цілі. Також у процесі переміщення, наприклад, штучного супутника Землі по орбіті, фазові координати якого вимірюються бортовими приладами, змінюються, часто вельми швидко – навіть стрибкоподібно, характеристики фізичних полів, що є вимірювальною інформацією для бортових приладів: вектор індукції магнітного поля Землі, сонячне випромінювання, теплове випромінювання Землі або її альbedo.

Для полегшення уявлення двох підходів до робастності на рисю 3.2 наведено зображення надання робастної властивості вказаними способами.

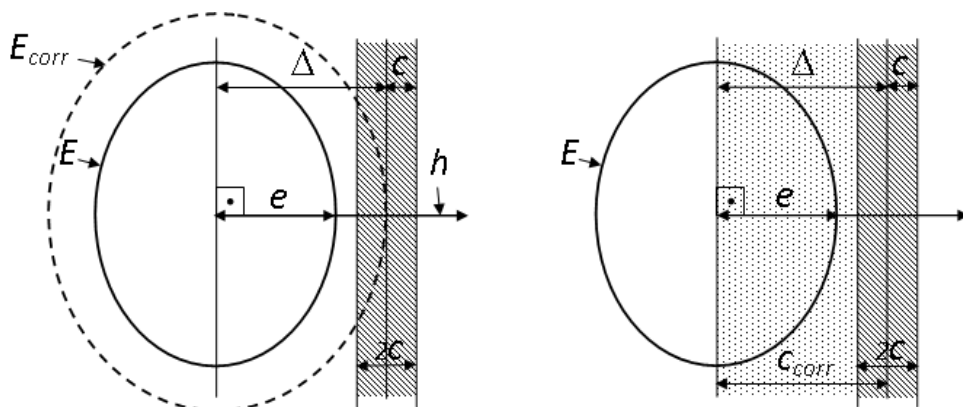


Рис. 3.2 Два підходи до надання методу оцінювання робастності.

Після перетворення параметрів апріорного еліпсоїду або «гіпершару» маємо випадок 3, що дає можливість продовжити оцінювання.

3.2. Еліпсоїдальна апроксимація перетину апріорного еліпсоїду з «гіпершаром» - знаходження загального конструктивного виразу

Рішення рівняння (3.3) будемо шукати у вигляді

$$L_j = \{x_j : (x_j - \hat{x}_j)^T Q_j^{-1} (x_j - \hat{x}_j) \leq r_j^2\}, \quad (3.4)$$

де $\hat{x}_j \in R^n$, r_j^2 , $Q_j \in R^{n \times n}$, $Q_j = Q_j^T > 0$ – шукані параметри оцінки.

Розглянемо перетин еліпсоїда і «гіпершару». Необхідні побудови представлені на рис. 3.3.

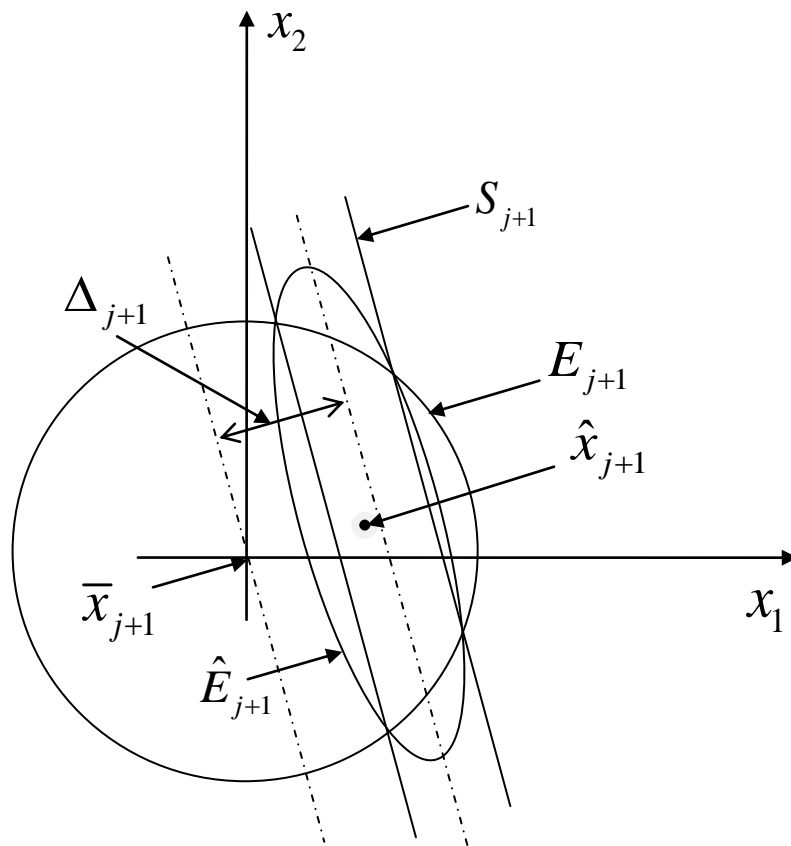


Рис. 3.3 Еліпсоїдальна апроксимація перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару»

Запропонуємо лему про покриття непустого перетину еліпсоїду і «гіпершару» у загальному випадку.

Лема 3.1. (про покриття перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару»).

Нехай еліпсоїд $E_j = \{x_j : (x_j - \tilde{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \tilde{x}_j) \leq 1\}$ і «гіпершар» $S(y_j) = \{x_j : (y_j - h^T x_j)^2 \leq c^2\}$ мають непустий перетин. Тоді еліпсоїд

$$L_j = \{x_j : (x_j - \hat{x}_j)^T Q_j^{-1} (x_j - \hat{x}_j) \leq r_j^2\} \quad (3.5)$$

з параметрами

$$\hat{x}_j = \tilde{x}_j + \frac{H_j h \Delta_j}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad (3.6)$$

$$Q_{j+1} = H_j - \frac{H_j h h^T H_j}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad (3.7)$$

$$r_j^2 = 1 + q_j c^2 - \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad (3.8)$$

де: $\Delta_j = y_j - h^T \tilde{x}_j$, $\tilde{x}_j = A \tilde{x}_{j-1} + B u_{j-1}$, $e_j^2 = h^T H_j h$, має властивість, що $L_j \supset E_j \cap S_j(y_j)$. Тут $q_j > 0$ – параметр для налаштування.

Доведення лема 3.1. Випишемо нерівності, що визначають еліпсоїд E_j і «гіпершар» $S_j(y_j)$. Одержимо систему

$$\begin{aligned} (x_j - \tilde{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \tilde{x}_j) &\leq 1 \\ (y_j - h^T x_j)^2 &\leq c^2 \quad | q_j \end{aligned} \quad (3.9)$$

Друге з нерівностей системи (3.9) помножимо на $q_j > 0$ і складемо з першим. В результаті одержимо нерівність-наслідок: вона виконується щоразу, коли виконуються одночасно обидві нерівності. Нерівність-наслідок перепишемо у вигляді

$$(x_j - \tilde{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \tilde{x}_j) + (y_j - h^T x_j)^2 q_j - 1 - q_j c^2 \leq 0. \quad (3.10)$$

Позначимо

$$F(x_j) = (x_j - \bar{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) + (y_j - h^T x_j)^2 q_j. \quad (3.11)$$

Для того, щоб привести функцію (3.11) до вигляду «квадратична форма плюс константа», розкладемо її в ряд Тейлора в околі точки мінімуму

$$F(x_j) = F(x_j^*) + \frac{1}{2} (x_j - x_j^*)^T \nabla_{x_j}^2 F(x_j) (x_j - x_j^*). \quad (3.12)$$

При цьому градієнт функції $F(x_j)$ дорівнює нулю в точці мінімуму [206]:

$\nabla_{x_j} F(x_j)|_{x_j=x_j^*} = 0$. Представивши його у векторно-матричному вигляді

$$\nabla_{x_j} F(x_j^*) = 2H_j^{-1}(x_j^* - \tilde{x}_j) + 2q_j(y_j - h^T x_j^*)(-h) = 0, \quad (3.13)$$

проведемо необхідні перетворення для одержання x_j^* в явному вигляді:

$$H_j^{-1}(x_j^* - \tilde{x}_j) + q_j(y_j - h^T x_j^*)(-h) \Rightarrow (H_j^{-1} + q_j h h^T) x_j^* = H_j^{-1} \tilde{x}_j + q_j y_j h.$$

Використовуючи формулу обернення суми матриць [207], одержимо

$$(H_j^{-1} + q_j h h^T)^{-1} = H_j - \frac{H_j h h^T H_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h}. \quad (3.14)$$

Помножимо на отриману матрицю зліва обидві частини попереднього вираження:

$$\left(H_j - \frac{H_j h h^T H_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h} \right) (H_j^{-1} + q_j h h^T) x_j^* = \left(H_j - \frac{H_j h h^T H_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h} \right) (H_j^{-1} \tilde{x}_j + q_j y_j h) \quad \text{і виконаємо}$$

перетворення

$$\begin{aligned} x_j^* &= \tilde{x}_j - \frac{H_j h h^T}{q_j^{-1} + h^T H_j h} \tilde{x}_j + q_j y_j H_j h - q_j y_j \frac{H_j h h^T H_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h} h = \tilde{x}_j - \frac{H_j h h^T \tilde{x}_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h} + \\ &+ q_j y_j H_j h - \frac{q_j y_j H_j h h^T H_j h}{q_j^{-1} + h^T H_j h} = \tilde{x}_j + H_j h \left(\frac{q_j y_j (q_j^{-1} + h^T H_j h) - h^T \tilde{x}_j - q_j y_j h^T H_j h}{q_j^{-1} + h^T H_j h} \right) = \\ &= \tilde{x}_j + H_j h \left(\frac{y_j - h^T \tilde{x}_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h} \right) = \tilde{x}_j + \frac{H_j h \Delta_j}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad \Delta_j = y_j - h^T \tilde{x}_j \end{aligned}$$

Отриманий вираз повністю збігається з (3.6), при цьому $x_j^* = \mathfrak{E}_j$. Далі підставляємо

вираження для x_j^* в (3.11) для знаходження значення $F(x_j^*)$. З огляду на те, що

$$x_j^* - \tilde{x}_j = \frac{H_j h \Delta_j}{q_j^{-1} + h^T H_j h} \quad \text{і використовуючи позначення (3.6), запишемо}$$

$$\begin{aligned}
F(x_j^*) &= \frac{\Delta_j^2 e_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} + (y_j - h^T x_j^*)^2 q_j = \frac{\Delta_j^2 e_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} + \left(y_j - h^T \bar{x}_j - \frac{(y_j - h^T \tilde{x}_j) e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2} \right)^2 q_j = \\
&= \frac{\Delta_j^2 e_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} + \left(y_j - h^T \tilde{x}_j - \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2} y_j + \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2} h^T \tilde{x}_j \right)^2 q_j = \frac{\Delta_j^2 e_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} + \\
&+ \left(\frac{(y_j - h^T \tilde{x}_j)(q_j^{-1} + e_j^2)}{q_j^{-1} + e_j^2} - \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2} y_j + \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2} h^T \tilde{x}_j \right)^2 q_j = \frac{\Delta_j^2 e_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} + \frac{q_j^{-1} \Delta_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} = \\
&= \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}.
\end{aligned}$$

Тобто

$$F(x_j^*) = \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}. \quad (3.15)$$

Для знаходження $\nabla_{x_j}^2 F$ продиференціюємо ще раз (3.14)

$$\nabla_{x_j}^2 F = 2H_j^{-1} + 2q_j h h^T. \quad (3.16)$$

Підставивши (3.15), (3.16) в (3.12), одержимо

$$F(x_j) = \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2} + (x_j - x_j^*)^T (H_j^{-1} + q_j h h^T) (x_j - x_j^*). \quad (3.17)$$

Остаточно, з урахуванням того, що (3.12) є розкладання (3.11), підставивши (3.17) в (3.10), одержимо

$$(x_j - x_j^*)^T (H_j^{-1} + q_j h h^T) (x_j - x_j^*) \leq 1 + q_j c^2 - \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad (3.18)$$

де $x_j^* = \hat{x}_j$, в правій частині стоїть вираз (3.8), а матриця квадратичної форми згідно (3.14) дорівнює виразу (3.7). Отже, доведення закінчено.

Якщо рівняння (3.18) переписати в нормованому вигляді (праворуч в нерівності замість $r_j^2 = 1 + q_j c^2 - \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}$ написати 1), то еліпсоїд L_j набуває вигляду

$E_j = \{x_j : (x_j - \hat{x}_j)^T \hat{H}_j^{-1} (x_j - \hat{x}_j) \leq 1\}$, де \hat{x}_j визначається виразом (3.6), а матриця

$$\hat{H}_j = \gamma_j^2 \left(H_j - \frac{H_j h h^T H_j}{q_j^{-1} + e_j^2} \right), \quad (3.19)$$

де

$$\gamma_j^2 = r_j^2 = 1 + q_j c^2 - \frac{\Delta_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}. \quad (3.20)$$

Формально вводячи кроковий параметр

$$\tau_j = \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad (3.21)$$

отримані співвідношення перепишемо у вигляді

$$\hat{x}_j = \tilde{x}_j + \tau_j \frac{H_j h}{e_j} \sigma_j, \quad \text{де } \sigma_j = \frac{\Delta_j}{e_j}, \quad (3.22)$$

$$\hat{H}_j = \gamma_j^2 \left(H_j - \tau_j \frac{H_j h h^T H_j}{e_j^2} \right), \quad (3.23)$$

де

$$\gamma_j^2 = 1 + \tau_j \left(\frac{1}{1 - \tau_j} \chi_j^2 - \sigma_j^2 \right), \quad \chi_j^2 = \frac{c^2}{e_j^2}. \quad (3.24)$$

Задача вибору параметра q_j^{-1} тепер формально зведено до вибору кроку τ_{j+1} .

З виразів (3.23) і (3.24) вбачаємо, що при $\tau_j \rightarrow 1, \gamma_j^2 \rightarrow \infty$ і

$\det \left(H_j - \tau_j \frac{H_j h h^T H_j}{e_j^2} \right) \rightarrow 0$. Таким чином, маємо невизначеність. Отже, $0 \leq \tau_j < 1$.

3.3. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму апроксимуючого еліпсоїду

Нехай $E_j \cap S_j \neq \emptyset$. Представимо матрицю (3.23) отриманого еліпсоїду через оператор стискання

$$\hat{H}_j = \gamma_j^2 \left(H_j - \tau_j \frac{H_j h h^T H_j}{e_j^2} \right) = \gamma_j^2 \sqrt{H_j} \left(I - (1 - \tau_j) \frac{\sqrt{H_j} h h^T \sqrt{H_j}}{h^T H_j h} \right) \sqrt{H_j}, \text{ і на підставі його}$$

властивостей отримаємо для детермінанту \hat{H}_j : $|\hat{H}_j| = \gamma_j^{2n} (1 - \tau_j) |H_j|$. або

$$\frac{|\hat{H}_j|}{|H_j|} = (1 - \tau_j) \gamma_j^{2n} \text{ [39]}. \text{ Отже, якщо } \gamma_j^{2n} (1 - \tau_j) < 1, \text{ то оцінка покращилась або}$$

уточнилась. Тоді вимірювання y_j називається *інформативним*. Нерівність

$$\left(1 + \frac{\tau_j \chi_j^2}{1 - \tau_j} - \tau_j \sigma_j^2 \right)^n (1 - \tau_j) \leq 1 \quad (3.25)$$

назвемо *умовою інформативності* оцінювання станів системи за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму оцінки. Тоді ліва частина (3.25) є *критерієм інформативності* оцінювання.

Для забезпечення монотонного поліпшення якості оцінок обробляються (або враховуються) тільки інформативні спостереження (для неінформативних спостережень покладаємо $\tau_j = 0$).

Якщо продиференціювати ліву частину (3.25) по τ_j , прирівняти отриману похідну до нуля і зробити всі можливі скорочення, то отримуємо квадратне рівняння

$$(n + 1) \sigma_j^2 \tau_j^2 + (\chi_j^2 - (1 + 2n) \sigma_j^2 - 1) \tau_j + 1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2) = 0 \quad (3.26)$$

Запишемо його рішення в явному вигляді:

$$\tau_j = \frac{(1 + 2n) \sigma_j^2 + 1 - \chi_j^2 \pm \sqrt{(\chi_j^2 - (1 + 2n) \sigma_j^2 - 1)^2 - 4(n + 1) \sigma_j^2 (1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2))}}{2(n + 1) \sigma_j^2} \quad (3.27)$$

Взяв знак «плюс» або «мінус» в чисельнику (3.27) так, щоб виконувалось $0 \leq \tau_j < 1$, одержимо шукане значення кроку. З (3.27) вбачаємо, що у випадку, коли $\sigma_j \rightarrow 0$, рішення матиме обчислювальну нестійкість. Для запобігання цього необхідно ввести штучне обмеження $\sigma_j > \delta$, при порушенні якого необхідно прирівняти σ_j до нуля і перейти до рішення лінійного рівняння, яке отримуємо з (3.26) після підстановки в нього $\sigma_j = 0$:

$$(\chi_j^2 - 1)\tau_j + 1 - n\chi_j^2 = 0. \quad (3.28)$$

Звідки отримаємо рішення:

$$\tau_j = \frac{1 - n\chi_j^2}{1 - \chi_j^2}. \quad (3.29)$$

Оскільки $n = 2; 3; \dots$, то чисельник в (3.29) завжди буде менше, ніж знаменник і за умови $n\chi_j^2 \leq 1$ матимемо $0 \leq \tau_j < 1$.

Таке ж оптимальне рішення, але для параметру q_j для випадку 2, що на рисунку 3.1, було отримано в роботі [203] з допомогою функції Лагранжа.

$$q_j = \frac{1 - \sigma_j^2 - (2n - 1)\chi_j^2 \pm \sqrt{((2n - 1)\chi_j^2 - 1 + \sigma_j^2)^2 - 4(n - 1)\chi_j^2(n(\chi_j^2 - \sigma_j^2) - 1)}}{2(n - 1)\chi_j^2 e_j^2}. \quad (3.30)$$

Якщо рішення (3.30) підставити у вираз (3.21), то отримаємо (3.27).

Рішення (3.30) має обчислювальну стійкість у випадку $\sigma_j \rightarrow 0$, але, в свою чергу, нестійке при $\chi_j \rightarrow 0$ на відміну від рішення (3.27). Але обидва рішення – (3.27) і (3.30) досить складні для аналізу щодо впливу параметрів σ_j і χ_j , та вимагають певних обчислювальних ресурсів при практичній реалізації. Крім того, Тому має практичну цінність розробка такого виразу для отримання значення τ_j , який буде простіше, ніж (3.28), проте значення критерію інформативності буде не дуже відрізнятися від значення при його обчисленні з виразом (3.27). Але спочатку дослідимо граничний випадок – рівність в (3.25), що має місце при $\tau_j = 0$. Тобто, коли нове вимірювання y_j вже не уточнює стан системи (2.1).

Підставивши в (3.26) $\tau_j = 0$, одержимо зв'язок між χ_j , σ_j , при якому в (3.25) настає рівність:

$$\chi_j^2 - \sigma_j^2 = n^{-1} \text{ або } \sigma_j = \sqrt{\chi_j^2 - n^{-1}}, \text{ або } \chi_j = \sqrt{n^{-1} + \sigma_j^2}. \quad (3.31)$$

Таким чином, має місце

Теорема 3.1: Нехай $E_j \cap S_j \neq \emptyset$. Тоді для того, щоб вимір y_j був інформативним, тобто, виконувалося (3.25), необхідно і достатньо, щоб виконувалося $\sigma_j \leq \sqrt{\chi_j^2 - n^{-1}}$ або, що теж саме $\chi_j \leq \sqrt{\sigma_j^2 - n^{-1}}$.

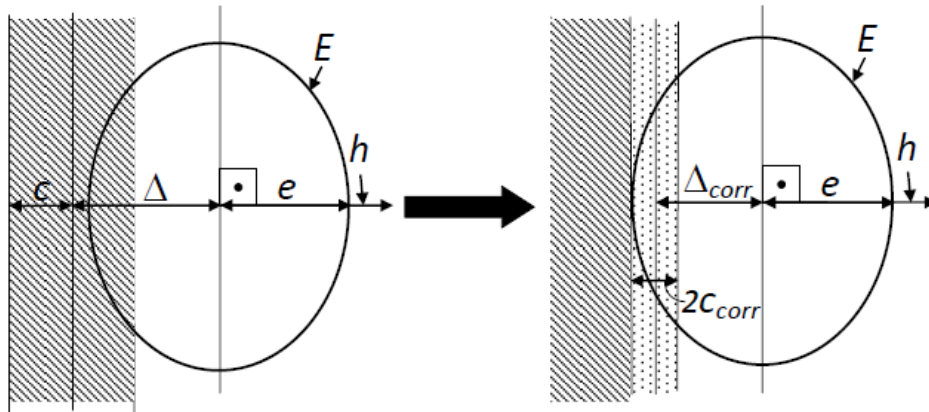
Доведення теореми 3.1: З виразу (3.27) за умови, що $\sigma_j \neq 0$ і $0 \leq \tau_j < 1$, випливає, що знаменник в (3.27) має бути невід'ємним, тобто: $(1 + 2n)\sigma_j^2 + 1 - \chi_j^2 \pm \sqrt{(\chi_j^2 - (1 + 2n)\sigma_j^2 - 1)^2 - 4(n + 1)\sigma_j^2(1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2))} \geq 0$. Перенесемо корінь з детермінанту в праву частину попереднього виразу і піднесемо все у квадрат: $(\chi_j^2 - (1 + 2n)\sigma_j^2 - 1)^2 \geq (\chi_j^2 - (1 + 2n)\sigma_j^2 - 1)^2 - 4(n + 1)\sigma_j^2(1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2))$. Далі віднімемо з отриманого виразу зліва і справа доданок $(\chi_j^2 - (1 + 2n)\sigma_j^2 - 1)^2$ і запишемо $4(n + 1)\sigma_j^2(1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2)) \geq 0$. Оскільки $4(n + 1)\sigma_j^2 > 0$ за умови задачі, то можна скоротити цій співмножник. Тоді отримаємо $1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2) \geq 0$. І далі $\chi_j^2 - \sigma_j^2 \geq \frac{1}{n}$, звідки вже очевидно твердження теореми 3.1.

Висновок: якщо $\sigma_j = 0$, тобто, середина «гіпершару» S_j з нормованою півшириною χ_j проходить через центр апріорного еліпсоїда E_j , то з (3.31) маємо $\chi_j = \frac{c}{\sqrt{h^T H_j h}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Таким чином, залежність між матрицею H_j цього еліпсоїду, розмірністю простору станів n , півшириною χ_j (максимальною величиною погрішності виміру n) і параметрами вимірювального пристрою виражається наступним чином:

$$c \leq \sqrt{\frac{h^T H_j h}{n}}. \quad (3.32)$$

Звідси робимо висновок, що c ростом розмірності простору станів спостережуваної системи зростають і вимоги до точності вимірювань для оцінювання її стану.

Зауважимо, що вираз (3.25) було запропоновано до використання у випадках, коли «гіпершар» перетинав апріорний еліпсоїд обома своїми обмежуючими гіперплощинами – тобто, коли мав місце випадок 2 (див. рис. 3.1). В роботі [34] пропонується, якщо маємо випадок 3 (див. рис. 3.1), перевизначити параметри χ_j та σ_j (c та Δ_j) таким чином, щоб вони задовольняли випадку 2 на рисунку 3.1. Дивись рисунок 3.4 нижче (індекс j на рисунку опущено).



Випадок 3

Рис. 3.4 Коригування параметрів c та Δ_j .

Надалі покажемо, що виразом (3.25) можна користуватись для оцінювання у випадку 3 без коригування параметрів χ_j та σ_j . І хоч оцінка, яку отримуватимуть в такий спосіб, буде субоптимальною, це набагато зручніше для надання робастності методу оцінювання, оскільки навіть точкова оцінка, отримана для випадку $\Delta_{corr,j} \rightarrow e_j$ та $c_{corr} \rightarrow 0$ наступного вимірювання буде або порушувати умову (3.3), а саме – матимемо випадок $S_{j+1} \cap E_{j+1} \equiv \{\hat{x}_{j+1}\} = \emptyset$ ($\hat{x}_{j+1} \notin S_{j+1}$) – «несумісність», або буде мати місце випадок 1, що на рис. 3.1 – повне «занурення». Таким чином буде необхідним вжити заходів для нового коригування параметрів, що нераціонально.

3.4. Субоптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму багатовимірного об'єму апроксимуючого еліпсоїду. Різні випадки перетину

3.4.1. Загальний випадок перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару»

Лема 3.2. (Про вибір кроку τ_j). Нехай $E_j \cap S_j \neq \emptyset$ і має місце випадок 2 (дивись рисунок 3.1). Тоді критерій інформативності (3.25) стає рівністю при однаковому граничному значенні χ_j як при оптимальному виборі кроку згідно

$$(3.27), \text{ так і при виборі } \tau_j = 1 - \frac{n\chi_j^2}{1 + n\sigma_j^2}.$$

Доведення лема 3.2: Прологарифмуємо (3.25) і отримаємо наступну нерівність: $\ln(1 - \tau_j) + n \ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) \leq 0$. Звідки після переносу $\ln(1 - \tau_j)$ в праву частину отримаємо $n \ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) \leq -\ln(1 - \tau_j)$. Оскільки $0 \leq \tau_j < 1$, то на підставі відомої нерівності [208]: $\ln(1 + \tau_j) \leq \tau_j, \forall \tau_j > -1$, маємо $\tau_j \leq \ln \frac{1}{1 - \tau_j}$. Тоді можемо перейти до нерівності: $n \ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) \leq n\tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)$, а потім до $n\tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2) \leq \tau_j$, що прагне до рівності швидше, ніж (3.25). Звідси, взяв рівність в нерівності, отримаємо вираз для кроку

$$\tau_j = 1 - \frac{n\chi_j^2}{1 + n\sigma_j^2}. \quad (3.33)$$

Дорівнявши нерівність (3.33) до нуля, одержимо вирази (3.31). Бачимо, що навіть при $\sigma_j = 0$ маємо $\tau_j = 1 - n\chi_j^2$, тобто, нема ділення на нуль. Окрім того, з урахуванням $0 \leq \tau_j < 1$, бачимо, що $\chi_j^2 \leq \frac{1}{n}$. Це означає, що рівність настає при однакових значеннях параметрів, що входять як в (3.27) так і в (3.33).

Розглянемо два варіанти перетину апріорного еліпсоїду та «гіпершару»: коли середина «гіпершару» проходить через центр апріорного еліпсоїду і коли «гіпершар» перетинає еліпсоїд до його середини так, що $|\sigma_j| + \chi_j = 1$. В обох

варіантах маємо випадок 2 перетину на рисунку 3.1. Підставив $\chi_j = \sqrt{n^{-1} + \sigma_j^2}$ в $|\sigma_j| + \chi_j = 1$ отримаємо: $\sigma_j = (n-1)/(2n)$ і $\chi_j = (n+1)/(2n)$.

На рисунку. 3.5 наведено графіки, що показують значення критерію інформативності, отримані в результаті використання субоптимального виразу для кроку згідно (3.33) і оптимального – згідно (3.27), при зміні ширини «гіпершару» від малого значення до максимального – коли виконується рівність (3.25).

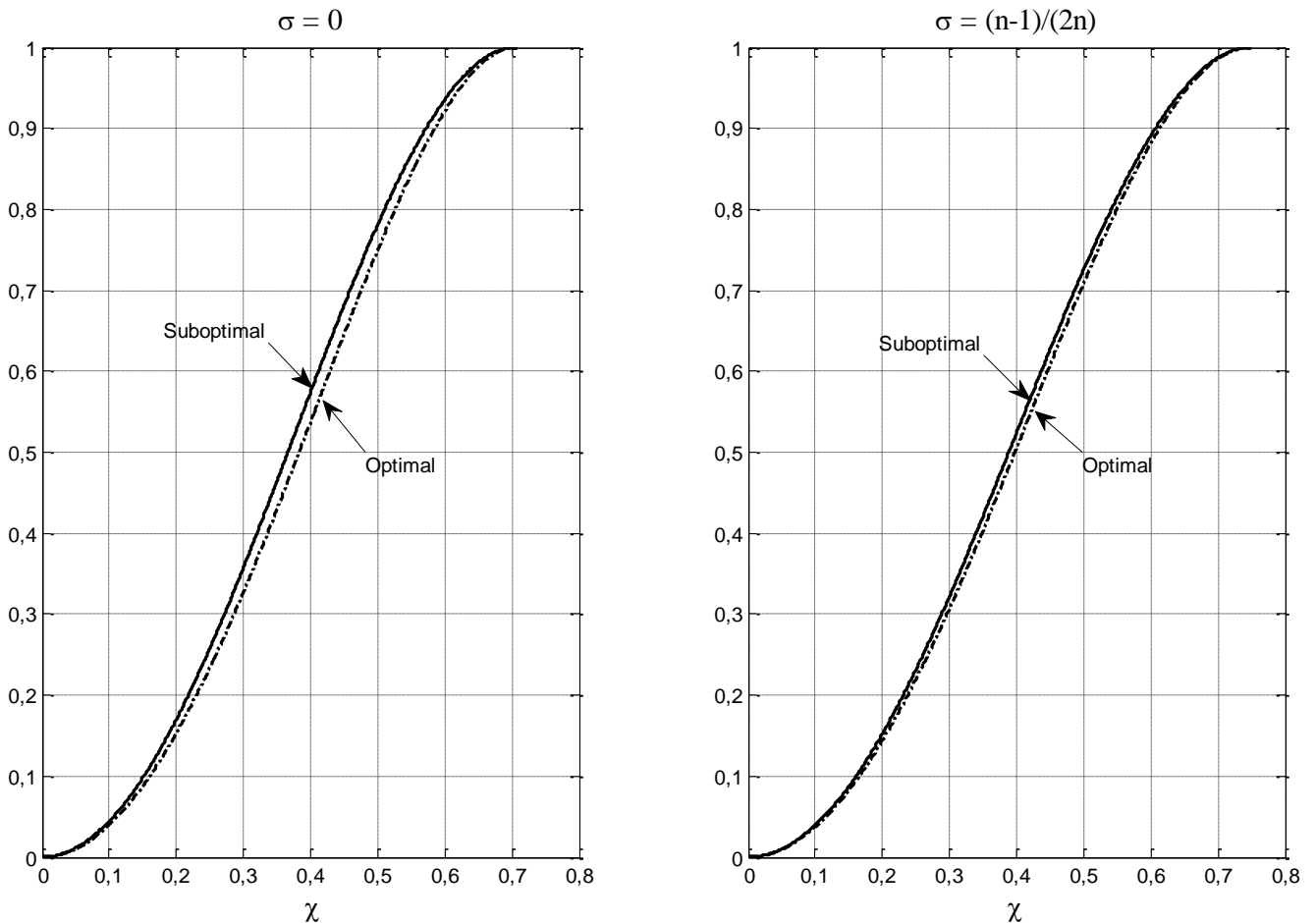


Рис. 3.5 Графіки значень критерію інформативності в залежності від ширини «гіпершару» χ для двох значень σ : $\sigma = 0$ та $\sigma = (n-1)/(2n)$.

По осі ординат відраховуємо значення критерію інформативності, по осі абсцис півширину «гіпершару». Суцільною лінією показано субоптимальний графік (Suboptimal), пунктирною – оптимальний графік (Optimal). Ліворуч показані графіки при проходженні середини «гіпершару» через центр апіорного еліпсоїда: $\sigma = 0$, праворуч – коли середина «гіпершару» знаходиться на відстані за нормаллю $\sigma = (n-1)/(2n)$ від центра апіорного еліпсоїда (індекс j опущено).

Бачимо, що різниця невелика. З ростом розмірності простору станів системи, тобто з ростом n , різниця буде зменшуватись. Це можна перевірити підставив вирази (3.33) і (3.27) в ліву частину критерію інформативності (3.25) і далі, після підстановки, отримавши співвідношення цих підстановок при $\chi_j \neq 0$. Змінюючи n , отримуємо значення вищезазначеного співвідношення. Наприклад, нехай $\chi_j = 0,1$, $\sigma_j = 0$. Тоді при $n = 2; 3; 4$ маємо значення 0,2915; 0,2042; 0,1432 відповідно.

3.4.2. Випадок «занурення» апріорного еліпсоїду в «гіпершар» до половини

Якщо маємо випадок «несумісності» апріорного еліпсоїду і «гіпершару» вимірювання, то, як зазначалось в розділі 3.1, в залежності від того, яке припущення порушено – чи щодо обмеження зовнішнього збурення, чи щодо завади вимірювання, приймається рішення про усунення порушення. Нехай маємо порушення щодо завади вимірювання. Тоді «розширюємо» «гіпершар» вимірювання так, щоб апріорний еліпсоїд «занурився» в «гіпершар» наполовину (див. рис. 3.2 – праву частину). Тоді маємо $\chi_j = \sigma_j \geq 1$. При цьому будемо вимагати, щоб умова інформативності (3.25) виконувалась. Запропонуємо лему про вибір кроку τ_j

Лема 3.3. (Про вибір кроку τ_j) Нехай рівно половина апріорного еліпсоїда E_j належить «гіпершару» S_j так, що $\chi_j = \sigma_j \geq 1$. Тоді для виконання нерівності (3.25) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\tau_j \leq \frac{1}{1 + n\chi_j^2}. \quad (3.34)$$

Доведення: Підставимо в (3.25) $\chi_j = \sigma_j \geq 1$. Тоді (3.25) набуде вигляду

$$(1 - \tau_j) \left(1 + \frac{\tau_j^2 \chi_j^2}{1 - \tau_j} \right)^n < 1. \text{ Перепишемо його у вигляді } \left(1 + \frac{\tau_j^2 \chi_j^2}{1 - \tau_j} \right)^n < \frac{1}{1 - \tau_j},$$

прологарифмуємо і одержимо $n \ln \left(1 + \frac{\tau_j^2 \chi_j^2}{1 - \tau_j} \right) < \ln \frac{1}{1 - \tau_j}$. Маючи умову $0 \leq \tau_j < 1$, на

підставі відомої нерівності $\ln(1 + \tau_j) \leq \tau_j, \forall \tau_j > -1$ [208], прийдемо до наступних

виразів: $n \ln \left(1 + \frac{\tau_j^2 \chi_j^2}{1 - \tau_j} \right) \leq n \frac{\tau_j^2 \chi_j^2}{1 - \tau_j}$, $\ln \left(\frac{1}{1 - \tau_j} \right) = \ln \left((1 - \tau_j)^{-1} \right) = -\ln(1 - \tau_j) \geq \tau_j$, тобто

$\tau_j \leq \ln \left(\frac{1}{1 - \tau_j} \right)$. Тоді обов'язково знайдеться таке значення τ_j , при якому буде

виконуватись рівність $\tau_j = n \frac{\tau_j^2 \chi_j^2}{1 - \tau_j}$. Звідки після перетворень маємо $\tau_j = \frac{1}{1 + n \chi_j^2}$.

Легко побачити, що підставив в вираз (3.33) замість σ_j^2 параметр χ_j^2 , що маємо за умову леми, отримаємо безпосередньо вираз (3.34). Тобто робимо висновок, що (3.34) є окремим випадком (3.33).

3.4.3. Випадок дотикання апіорного еліпсоїду і «гіпершару»

Твердження 3.2. Нехай апіорний еліпсоїд E_j і «гіпершар» S_j тільки дотикаються один одного. Тоді для того, щоб точка дотикання була центром \hat{x}_j апостеріорного еліпсоїду \hat{E}_j необхідно і достатньо, щоб $\tau_j = \frac{1}{1 + \chi_j}$.

Доведення твердження 3.2: Вирішимо систему нерівностей (3.9) у випадку, коли вона перетворюється в рівність. Це відбувається якщо апіорний еліпсоїд і «гіпершар» лише дотикаються один одного. Точка дотикання задовольняє обом рівностям і є центром нового еліпсоїда, тобто вибирається згідно (3.22). Підставивши (3.22) замість x_j в (3.9) одержимо:

$$\frac{e_j^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} \Delta_j^2 = 1, \left(\Delta_j - \frac{e_j^2 \Delta_j}{q_j^{-1} + e_j^2} \right)^2 = c^2 \Rightarrow \Delta_j^2 \left(\frac{q_j^{-1}}{q_j^{-1} + e_j^2} \right)^2 = c^2 \Rightarrow \Delta_j^2 = q_j^2 c^2 (q_j^{-1} + e_j^2)^2,$$

$$\frac{e_j^2 q_j^2 c^2 (q_j^{-1} + e_j^2)^2}{(q_j^{-1} + e_j^2)^2} = 1 \Rightarrow q_j^2 = \frac{1}{e_j^2 c^2} \Rightarrow q_j = \frac{1}{e_j c} \text{ або } q_j^{-1} = c e_j$$

Підставивши $q_j^{-1} = c e_j$ в вираз для кроку (3.21), і враховуючі, що $\frac{c}{e_j} = \chi_j$,

одержимо вираз

$$\tau_j = \frac{1}{1 + \chi_j}. \quad (3.35)$$

Або іншим шляхом, помножив (3.22) зліва на h^T , одержимо $h^T x_j = h^T \bar{x}_j + \tau_j e_j \sigma_j$ і далі $\frac{(\hat{x}_j - \bar{x}_j)^T h h^T (\hat{x}_j - \bar{x}_j)}{e_j^2} = \tau_j^2 \sigma_j^2$, де $e_j^2 = h^T H_j h$. Тобто, якщо \hat{x}_j

належить границі еліпсоїду E_j , або, що теж саме,

$$\frac{(\hat{x}_j - \bar{x}_j)^T h h^T (\hat{x}_j - \bar{x}_j)}{e_j^2} = \frac{h^T (\hat{x}_j - \bar{x}_j) (\hat{x}_j - \bar{x}_j)^T h}{h^T H_j h} = 1 \quad \text{Умова дотикання (дивись рис. 3.1,$$

випадок 4) – це $\Delta_j = e_j + c$ або $\sigma_j = \chi_j + 1$, звідки маємо $\tau_j = \frac{1}{\sigma_j} = \frac{1}{\chi_j + 1}$.

Таким чином, за умови, що завада вимірювання не дорівнює нулю ($c \neq 0$), крок (3.55) не буде дорівнює одиниці, і виродження матриці (3.23) не відбудеться. Для посилення стійкості алгоритму можна ввести так званий параметр регуляризації

$0 < p \ll 1$ так, що $\tau_j = \frac{1}{1 + p + \chi_j}$. При цьому алгоритм буде працювати також у

випадку, якщо $c = 0$.

Зауваження 3.2: Якщо перевага надається інформації, що містить апіорний еліпсоїд, тоді приймаємо $\tau_j < \frac{1}{1 + \chi_j}$. При цьому центр \hat{x}_j апостеріорного еліпсоїду

\hat{E}_j , як це вбачаємо з виразу (3.22), зміщується в напрямку центру \bar{x}_j попереднього – апіорного еліпсоїду E_j . І навпаки, якщо більш довіряємо вимірюванню, то

$\tau_j > \frac{1}{1 + \chi_j}$. Але згідно виразів (3.22-24) при будь-якому значенні кроку в межах

$0 \leq \tau_j < 1$ буде виконуватись рівняння (3.3).

3.4.4. Порівняння максимальних припустимих значень завади вимірювання при виборі різних виразів для кроку τ та дослідження поведінки отриманої оцінки E_j в залежності від зміни параметрів χ_j і σ_j

Перевіримо, яким може бути максимально припустиме значення відносної невизначеності вимірювання χ_j (коли вираз (3.25) набуває рівність), якщо середина «гіпершару» S_j проходить через центр апіорного еліпсоїду E_j , тобто, $\sigma_j = 0$, розмірність простору станів $n = 2$, а крок τ_j вибирається згідно (3.33-3.35). Підставивши ці вирази і значення в ліву частину (3.25), прирівнявши вираз до одиниці та обрахувавши, отримаємо відповідно:

$$\chi_j \approx 0,704; 0,63; 0,19. \quad (3.36)$$

Розглянемо випадок, коли середина «гіпершару» S_j , віддаляється від центра апіорного еліпсоїду таким чином, що одна з обмежуючих «гіпершар» S_j гіперплощин увесь час залишається на місці так, що проходить через середину апіорного еліпсоїду – тобто півширина χ_j збільшується від нуля до декількох одиниць. Таким чином, перетин еліпсоїду і «гіпершару» збільшується, поки еліпсоїд не буде «занурений» у «гіпершар» наполовину й далі, тобто ширина «гіпершару» збільшується, але перетин залишається вже незмінним. Маємо при цьому постійну рівність $\chi_j = \sigma_j$.

Легко бачити з виразу (3.22), що середина апроксимуючого перетин еліпсоїда визначатимемося виразом $\hat{x}_j = \tau_j e_j \sigma_j$. Якщо $\chi_j = \sigma_j$, то крок τ_j згідно (3.33) дорівнює кроку τ_j згідно (3.34). Отже, виконав підстановку в (3.22), маємо для (3.33), (3.34)

$$\hat{x}_j = \frac{e_j \chi_j}{1 + n \chi_j^2}. \quad (3.37)$$

Як вбачаємо з (3.37) центр апроксимуючого еліпсоїду зі збільшенням χ_j спочатку віддаляється від центра апіорного еліпсоїда на відстань $\frac{1}{1+n}$ по

досягненні значення $\chi_j = 1$, а потім, у міру подальшого збільшення σ_j , а значить і збільшення χ_j , знову наближається до центру апіорного еліпсоїда.

Виконаємо підстановку (3.34) при $\chi_j = \sigma_j$ в критерій інформативності (3.25):

$$\frac{n\chi_j^2 \left(\frac{n(\chi_j^2 + 1) + 1}{n(n\chi_j^2 + 1)} \right)^n}{n\chi_j^2 + 1} \leq 1 \quad (3.38)$$

Лімітом лівої частини при $\chi_j \rightarrow \infty$ є одиниця. Тобто об'єм апроксимуючого еліпсоїда увесь час збільшується, але залишається менше, ніж об'єм апіорного еліпсоїду.

Виконаємо підстановку (3.35) в (3.25)

$$\hat{x}_j = \frac{e_j \chi_j}{1 + \chi_j}. \quad (3.39)$$

Отже, поведінка центру апроксимуючого еліпсоїду при користуванні виразом для кроку τ_j (3.35) зі збільшенням χ_j інша у порівнянні з (3.37). Центр апроксимуючого еліпсоїду при такому виборі τ_j прагне переміститись від центру апіорного еліпсоїда до його границі.

Виконаємо підстановку (3.35) при $\chi_j = \sigma_j$ в критерій інформативності (3.25):

$$\frac{\chi_j \left(\frac{2\chi_j + 1}{\chi_j + 1} \right)^n}{\chi_j + 1} \leq 1 \quad (3.40)$$

Лімітом лівої частини при $\chi_j \rightarrow \infty$ є 2^n . Тобто об'єм апроксимуючого еліпсоїда увесь час збільшується, і у випадку $n=2$ вже при $\chi_j = \sigma_j \approx 0,8712$ становиться рівним об'єму апіорного еліпсоїду. Але в випадку дотикання маємо іншу картину – ліва частина (3.25) весь час дорівнює нулю при будь-якому $n \geq 1$ і $0 \leq \chi_j < \infty$ і маємо тільки точкову оцінку \hat{x}_j згідно (3.22).

Якщо маємо «несумісність», тобто випадок 4 на рисунку 3.1, то при виборі для кроку τ_j виразу (3.33) центр апостеріорного (зараз вже неможна казати про

апроксимуючій еліпсоїд, оскільки (3.3) не виконується – перетину немає) еліпсоїду згідно формули (3.22) розташується майже в середині «гіпершару». При виборі для кроку τ_j виразу (3.34) навпаки – майже в центрі апіорного еліпсоїду. Нарешті, при виборі для кроку τ_j виразу (3.35) центр апостеріорного еліпсоїду розташується посередині між центром апіорного еліпсоїду і серединою «гіпершару» в напрямку h . При виборі для кроку τ_j виразу (3.27) – «оптимального» (слово записано в лапках, тому що оптимальність має місце тільки у випадку сумісності, тобто, якщо виконується (3.3)), центр апостеріорного еліпсоїду розташується майже між центром апіорного еліпсоїду і серединою «гіпершару» в напрямку h , але ближче до «гіпершару».

Зауважимо щодо можливості отримання матриці \hat{H}_j апостеріорного еліпсоїду \hat{E}_j у випадку несумісності Тут маємо певні обмеження. Якщо підставляти вирази (3.33-3.35) для кроку τ_j в вираз (3.24), який є співмножником в виразі (3.23) для отримання матриці \hat{H}_j , то при зростанні σ_j (при несумісності маємо $\sigma_j > 1 + \chi_j$), як тільки вона перебільшує певне значення, вираз (3.24) стане від'ємним. Тоді і матриця \hat{H}_j стане від'ємно-визначеною. Це автоматично унеможлиблює подальший процес оцінювання.

Таким чином, для надання методу оцінювання робастної властивості необхідно спочатку зробити вибір щодо порушення апіорних припущень (див. рис. 3.2), а потім використовувати заздалегідь обраний вираз для кроку τ_j , що більш відповідає зробленому вибору щодо порушення апіорних припущень, яке очікується в тих умовах функціонування об'єкту, що описується динамічною системою (2.1).

3.5. Оптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апіорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму суми квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду

Скористуємось виразами (3.22-3.24) для отримання оцінки – параметрів апроксимуючого еліпсоїду. Запишемо умову інформативності вимірювань, тобто, умову зменшення сліду матриці отриманого еліпсоїда в порівнянні з апіорним. З (3.23) згідно властивостей сліду матриці та сліду суми матриць [207] одержимо

$$\text{trace}\hat{H}_j = (\text{trace}H_j - \tau_j e_j^{-2} h^T H_j^2 h) \gamma_j^2. \quad (3.41)$$

Спостереження буде інформативним, якщо

$$(\text{trace}H_j)^{-1} \text{trace}\hat{H}_j = \gamma_j^2 (1 - \tau_j \tilde{e}_j^2) < 1, \text{ де } \tilde{e}_j^2 = e_j^{-2} h^T H_j^2 h (\text{trace}H_j)^{-1}. \quad (3.42)$$

Необхідно знайти $0 \leq \tau_j < 1$, таке, щоб ліва частина (3.42) була якнайменше.

Оптимальне рішення, але для параметру q_j (див. (3.9)) для випадку 2, що на рисунку 3.1, було отримано в роботі [203] з допомогою функції Лагранжа. Для цього необхідно знайти дійсний корінь кубічного рівняння, що задовольняє обмеженню $0 < q_j < \infty$. Якщо перейти до параметру τ_j (див. (3.21)) то маємо обмеження $0 \leq \tau_j < 1$. У позначеннях, прийнятих у даній роботі, це рівняння виглядає так

$$2\tilde{e}_j^2 \sigma_j^2 \tau_j^3 + (\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1) - \sigma_j^2 (4\tilde{e}_j^2 + 1)) \tau_j^2 + 2((\sigma_j^2 - \chi_j^2 + 1)\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2) \tau_j + \chi_j^2 - \sigma_j^2 - \tilde{e}_j^2 = 0. \quad (3.43)$$

Одержати його можна продифференціював по τ_j ліву частину нерівності (3.42) $\gamma_j^2 (1 - \tau_j \tilde{e}_j^2)$ і прирівнявши похідну до нуля.

Відомо, що повне кубічне рівняння має три корені, які можуть бути або дійсними, або один з них буде дійсним, а два – комплексно-поєднаними [209]. Останній випадок порівняно простий: для аналізу рішення на обмеження $0 \leq \tau_j < 1$ перевіряється тільки дійсний корінь. Якщо корінь задовольняє цьому обмеженню, то він використовується для одержання оцінок (3.22), (3.23). Інакше покладаємо $\tau_j = 0$ і, відповідно, $\hat{H}_j = H_j$, $\hat{x}_j = \bar{x}_j$. Якщо дійсних коренів три, то може виявитися, що всі три корені задовольняють $0 \leq \tau_{j(i)} < 1$, $i = 1; 2; 3$. Щоб уникнути цього необхідно

передбачити обмеження на параметри рівняння (3.43): \tilde{e}_j^2 , σ_j^2 , χ_j^2 , та на їхнє співвідношення. Знайдемо, наприклад, рішення (3.43) при $\sigma_j^2 = 1$, $\chi_j^2 \rightarrow 0$. Це означає, що $E_j \cap S_j \rightarrow \{\hat{x}_j\}$, тобто перетином в граничному випадку буде одноточкова множина. Рішення (3.43) дає: $\tau_{j(1;2;3)} = 1,5;1;1$. Вибравши аналітичний запис рішення, що відповідає $\tau_j = 1$, підставивши його в (3.24) і, спрямувавши $\chi_j^2 \rightarrow 0$, одержимо: $\tau_j \rightarrow 1$, $\gamma_j^2 \rightarrow 0$. Тоді, згідно (3.22), (3.23) відповідно, матимемо: $\hat{x}_j = \bar{x}_j + H_j h_j e_j^{-1}$; $\hat{H}_j = 0$. Еліпсоїд \hat{E}_j , матрицю якого отримують виразом (3.23), при цьому виродиться в точку (а його матриця \hat{H}_j матимемо ранг 1), але залишиться придатним для подальших операцій з ним згідно формули (2.27). Це є перевагою критерію мінімізації суми квадрата півосей апроксимуючого еліпсоїду \hat{E}_j (мінімуму сліду матриці \hat{H}_j апроксимуючого еліпсоїду) відносно критерію мінімізації добутку довжин півосей (об'єму) апроксимуючого еліпсоїда. В останньому критерії випадок виродження матриці \hat{H}_j приводить до нульового значення критерію інформативності незалежно від довжин інших його півосей. Крім того, це унеможливорює операцію підсумування двох еліпсоїдів за цим критерієм, оскільки необхідною вимогою для цього є невивроженість хоча б одного з підсумованих еліпсоїдів [202]. Якщо за якимись причинами необхідно одержувати строго невиврожену матрицю (3.23), то при $\chi_j^2 \leq \delta_\chi$, де δ_χ – деяка константа, покладемо $\chi_j^2 = \delta_\chi$ і продовжуємо обчислення по формулі (3.24).

Покладемо $\sigma_j^2 = 0$. Тоді $\hat{x}_j = \bar{x}_j$ й кубічне рівняння (3.43) стане квадратним.

$$\tilde{e}_j^2(\chi_j^2 - 1)\tau_j^2 - 2\tilde{e}_j^2(\chi_j^2 - 1)\tau_j + \chi_j^2 - \tilde{e}_j^2 = 0. \quad (3.44)$$

Записавши рішення (3.44) у явному вигляді, підставимо його в (3.24) і при $\chi_j^2 \rightarrow 0$ одержимо $\tau_j \rightarrow 1$, $\gamma_j^2 \rightarrow 0$. Еліпсоїд, що отримуємо згідно (3.23), при цьому виродиться на одну розмірність.

Для одержання умов, при яких $\tau_j = 0$, запишемо рішення рівняння (3.44):

$$\tau_{j(1,2)} = \frac{2(\chi_j^2 - 1)\tilde{e}_j^2 \pm \sqrt{(2\tilde{e}_j^2(\chi_j^2 - 1))^2 - 4\tilde{e}_j^2(\chi_j^2 - 1)(\chi_j^2 - \tilde{e}_j^2)}}{2\tilde{e}_j^2(\chi_j^2 - 1)}. \quad (3.45)$$

З (3.45) випливає умова: $\chi_j^2 \neq 1$. Якщо $\chi_j^2 \geq 1$, то з виразів: $\chi_j^2 = \frac{c^2}{e_j^2}$, $e_j^2 = h_j^T H_j h_j$,

маємо випадок 1, що на рис. 3.1 – повне «поглинання» апріорного еліпсоїда E_j «гіпершаром» S_j . Тоді покладаємо $\hat{E}_j = E_j$ і $\hat{H}_j = H_j$, $\hat{x}_j = \bar{x}_j$. Прирівнявши чисельник (3.25) до нуля, одержимо умову, за якої $\tau_j = 0$, $\gamma_j^2 = 1$: $\chi_j^2 = \tilde{e}_j^2$, тобто уточнити стан системи вже неможна.

3.6. Субоптимальна еліпсоїдальна апроксимація перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершару» множини вимірювання за критерієм мінімуму суми квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду

Вище згадувалося про труднощі рішення кубічного рівняння. Для його рішення застосовують досить складні алгоритми [210]. Крім того, необхідно стежити за виконанням умов $\sigma_j^2 > \delta_\sigma$ і $\delta_\chi < \chi_j^2 < 1$ для своєчасного переходу від рівняння (3.43) до рівняння (3.44), і, відповідно, уникнення ділення на нуль в виразах (3.24) і (16). Якщо $\sigma_j^2 \rightarrow 0$, $\chi_j^2 \rightarrow 0$, то корінь рівнянь (3.43) або (3.44), а також значення (3.24) (для випадку $\chi_j^2 \rightarrow 0$) будуть обчислюватися з великою погрішністю, що віддалить знайдене значення τ_j від його оптимального значення. Щоб цього уникнути, будемо шукати наближене, але і більше просте для програмування рішення.

Лема 3.4 (Про вибір кроку τ_j). Одержимо вираз для кроку τ_j в такий спосіб.

Підставивши вираз (3.24) у вираз $\gamma_j^2(1 - \tau_j \tilde{e}_j^2) < 1$ з (3.42), прологарифмуємо

отриману нерівність: $\ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) < -\ln(1 - \tau_j\tilde{e}_j^2)$. Скориставшись нерівністю [208] $\ln(1 + \tau_j) \leq \tau_j, \forall \tau_j > -1$, одержимо $\tau_j((1 - \tau_j)^{-1}\chi_j^2 - \sigma_j^2) \leq \tau_j\tilde{e}_j^2$. Звідки

$\frac{1}{1 - \tau_j} \leq \frac{\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2}{\chi_j^2}$. Далі $1 - \tau_j \geq \frac{\chi_j^2}{\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2}$. Звідки, обираючи рівність, одержимо

$$\tau_j = 1 - \chi_j^2(\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2)^{-1}. \quad (3.46)$$

При проходженні середини «гіпершару» S_j через середину апріорного еліпсоїду E_j відмова від використання множини виміру S_j відбудеться за умови $\chi_j^2 = \tilde{e}_j^2$ як при обчисленні τ_j згідно (3.45), так і при обчисленні згідно (3.46), що доводиться прирівнюванням (3.45) і (3.46) до нуля. Вираз (3.46) можна відразу підставити в (3.24).

$$\gamma_j^2 = 1 + \tilde{e}_j^2 - \chi_j^2\tilde{e}_j^2(\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2)^{-1}. \quad (3.47)$$

Звідси видно, що за умови $\text{trace}H_j \neq 0$ (рівність в останньому означає, що $E_j \rightarrow \{x_j\}$, що на практиці неможливо, оскільки погрішність вимірювання має місце завжди), вираження (3.46), (3.47) завжди мають сенс. Нехай $\sigma_j^2 = 0, \chi_j^2 = 0$. Тоді в (3.46) буде $\tau_j = 1$, а в (3.47) $\gamma_j^2 = 1 + \tilde{e}_j^2$. З ростом розмірності простору станів n параметр \tilde{e}_j^2 зменшується і $\gamma_j^2 \rightarrow 1$.

Якщо підставити в явному вигляді рішення рівнянь (3.43) або (3.44) в вираз (3.24), то при $\chi_j^2 \rightarrow 0$ одержимо в граничному випадку невизначеність $\frac{0}{0}$. Таким чином, вирази (3.46), (3.47) набагато зручніше для практичного використання, ніж оптимальне рішення.

Висновки до розділу 3

У розділі наведено результати досліджень еліпсоїдальної апроксимації перетину апріорного еліпсоїду множини досяжності лінійної керованої системи, яка містить вектор її можливого стану, і «гіпершару» множини вимірювання, за двома критеріями оптимізації – мінімізації багатовимірного об'єму та суми квадратів півосей апроксимуючого еліпсоїду:

1. Досліджено усі можливі випадки перетину апріорного еліпсоїду і множини вимірювань скалярного параметру, що характеризує стан спостережуваної системи – «гіпершару» і знайдено спосіб з'ясування – якій саме випадок має місце. На підставі цього надається робастність методу оцінювання стану системи.
2. Запропоновано декілька способів апроксимації перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершар» вимірювань. Запропоновані способи при незначному погіршенні точності апроксимації порівняно з оптимальними способами значно простіше їх щодо кількості обчислень і в них виключено настання випадку, коли рішення не має сенсу.
3. Сформульовано і доведено теорему, яка зв'язує еліпсоїд оцінки стану системи за критерієм мінімуму його об'єму, підпростір, якому належить множина вимірювань, і міру невизначеності цієї множини. Висновки з теореми дають конструктивну можливість визначити вимоги до вимірювача в залежності від припустимої міри невизначеності стану спостережуваної системи і розмірністю її простору станів, а саме: вимірювану змінну і припустиму похибку вимірювання.

Розроблений метод дозволяє застосовувати різні критерії мінімізації оцінки стану системи, що було перевірено використанням у цьому методі критерію мінімізації сліду матриці еліпсоїду оцінки і критерію мінімізації багатовимірного об'єму. Також запропоновано спрощення, яке дає субоптимальну оцінку, проте дозволяє уникнути рішення, яке не має сенсу, що трапляється при оптимальному рішенні.

Результати досліджень даного розділу наведено в таких публікаціях:

2. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 1. С. 16-25. (Особистий внесок – доведено лему про покриття перетину еліпсоїду і «гіпершару»).
3. Шолохов А. В. Субоптимальная аппроксимация суммы эллипсоидов и пересечения эллипсоида с гиперслоем. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 3. С. 78-87.
4. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. О связи параметров множества возможных состояний наблюдаемой системы с параметрами измерительного устройства и размерностью пространства состояний системы. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. № 4. С. 96-103. (Особистий внесок – висунуто і доведено теорему про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів статичного еліпсоїдального оцінювання).
5. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. №1. С.96-105. |DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10559-019-00114-x>. (Особистий внесок – вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням: висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апріорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі).

РОЗДІЛ 4

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНОГО МЕТОДУ ОЦІНЮВАННЯ НА ПРИКЛАДАХ СТАТИЧНОЇ ТА ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМ

Як вже зазначалось, розроблений метод призначено для оцінювання станів спостережуваних динамічних лінійних керованих систем. Але в випадку оцінювання стану статичної системи або її параметрів, його, звичайно, також можна застосовувати. При цьому буде відбуватись уточнення стану системи або значень її параметрів. Отже, маємо статичну задачу оскільки стан (або параметри) об'єкту не змінюється. Зауважимо, що часто трапляються випадки, коли можливість багатьох вимірювань виключено або внаслідок обмеженого часу для спостереження об'єкту, або обмежень на зміну відносних положень вимірювача і об'єкта, стан або параметри якого уточнюються. При відомому положенні об'єкту (зазвичай не менше двох об'єктів), що пеленгується, маємо задачу навігації об'єкту, який пеленгує [209], а при невідомому положенні об'єкту, що пеленгується, маємо задачу наведення на цій об'єкт [210]. Якщо йдеться про оцінювання параметрів статичного об'єкту, то прикладом є виставка на нерухомій основі гіростабілізованої платформи в потрібне положення, або оцінювання її параметрів протягом запуску [205]. Далі в якості прикладу статичного оцінювання розглянемо приклад пеленгації нерухомого об'єкту з борту рухомого об'єкту.

В якості динамічної системи буде зручним і наочним розглянути відому задачу керування орієнтацію штучного супутника Землі при його русі по орбіті. Мова йде про моделювання такого доволі складного приладу як гіроорбіта. З допомогою вже існуючих методів ця задача вирішена в статистичній постановці. Оскільки найчастіше відомості про умови функціонування супутників на орбіті обмежені, щоб використовувати статистичну постановку задачі, застосування гарантованого оцінювання буде доцільним. До того ж, робастна властивість методу оцінювання є необхідною, оскільки цілком можливе зміна або характеристик зовнішнього збурення, що діє на об'єкт, стан якого оцінюється, або характеристик приладів-вимірювачів. Це також буде показано подалі на прикладі.

4.1. Оцінювання стану статичної системи – пеленгація нерухомого об'єкту

Постановка задачі

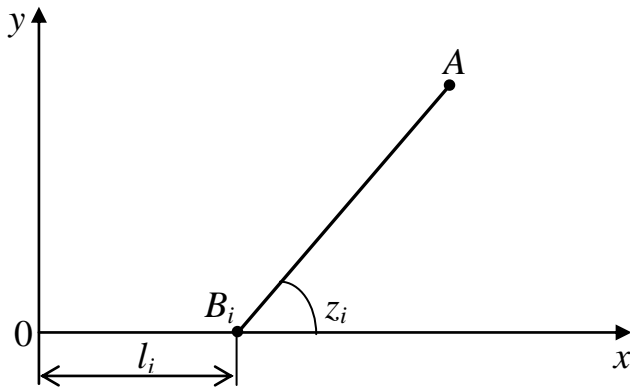


Рис. 4.1 Пеленгація нерухомого об'єкту

Нехай маємо об'єкт на поверхні землі, положення якого необхідно визначити в деякій прийнятній системі координат. Математично це сформулюємо наступним чином. Потрібно оцінити положення (x, y) точки A , що лежить на площині, за вимірами кутів z_i , зробленим з

декількох точок B_i , $(i = 1, 2, \dots, k)$, які розташовані на лінії відліку Ox на відстані l_i від початку координат [211] (див. рис.4.1). З положенням крапок A і B_i куткових вимірів z_i зв'язані *нелінійними* рівняннями

$$z_i = \arctg \frac{y}{x - l_i} + v_i, \quad (4.1)$$

де v_i – випадкова похибка, зроблена при вимірі кута z_i .

Припустимо, що $|z_i| \leq c$, де c – відома константа. Лінеарізуємо (4.1) в околі апріорної оцінки положення (x, y) , що позначимо (\bar{x}, \bar{y}) : $dz = h_i[x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y}]^T + v_i$,

$dz = z_i - \bar{z}_i$, $h_i = [h_{1,i}, h_{2,i}]$, $\bar{z}_i = \arctg \frac{\bar{y}}{\bar{x} - l_i}$, $h_{1,i} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x} \right)_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$, $h_{2,i} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y} \right)_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$. Нехай $k = 3$ і

задані наступні дані: $l_1 = 0$, $l_2 = 152,5 \text{ м}$, $l_3 = 305 \text{ м}$; $z_1 = 30,1^\circ$, $z_2 = 45,0^\circ$, $z_3 = 73,6^\circ$;

$R = E[v_i v_j] = \text{diag}(r_{ii})$: $r_{11} = 0,01$, $r_{22} = 0,01$, $r_{33} = 0,04$, де розмірність r_{ii} – $[\text{градус}^2]$;

початкова точкова оцінка $\bar{x}_0 = 369 \text{ м}$, $\bar{y}_0 = 213,5 \text{ м}$; матриця гарантованого еліпсу

початкового стану $H_0 = 9 \begin{bmatrix} 1,045 & 0,967 \\ 0,967 & 1,183 \end{bmatrix}$ і максимальне значення погрішності

вимірювання $v_i^2 = r_{33} = 0,04$. Одержимо оцінку МНК по трьох вимірах як у роботі [211], і методами гарантованого оцінювання. Наочне уявлення дає рисунок 4.2.

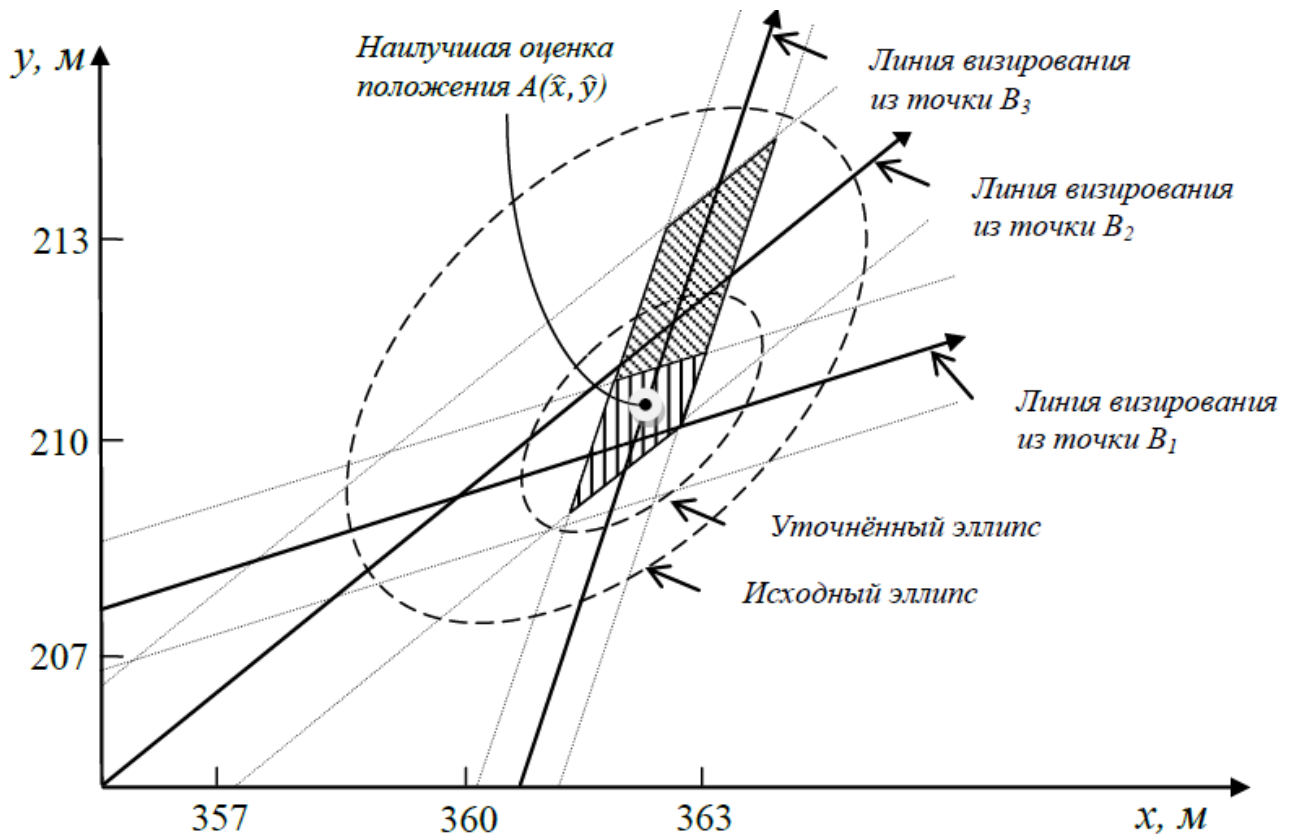


Рис. 4.2. Отримання еліпсоїдальної оцінки

Використовуємо вираз для кроку τ_j (3.33) і вираз (3.30) для параметру q_j з роботи [203] з перетворенням в вираз для кроку (3.27) шляхом підстановки (3.30) в (3.21). Результати представимо в таблиці 4.1, де Г.О. – гарантоване оцінювання:

Таблиця 4.1

Результати оцінювання координат положення нерухомого об'єкту різними методами при початковому еліпсі згідно [211]

Параметри	\hat{x}_3	\hat{y}_3	Корінь із власних чисел матриці (півосі еліпса) H_3
МНК [211]	370,5м	214,1м	$1\sigma = 39\% : 1,451м; 0,392м$
Г.О. (3.33)	368,7м	213,2м	3,999м; 0,744м
Г.О. [203]	368,8м	214,0м	2,236м; 0,726м

Повернувши початковий еліпсоїд на 90° проти годинникової стрілки (на рис. 4.2 непоказано), знову проведемо обчислення, результати яких представимо в таблиці 4.2:

Таблиця 4.2

Результати оцінювання координат положення нерухомого об'єкту різними методами при початковому еліпсі, поверненому на 90° проти годинникової стрілки

Параметри Метод	\hat{x}_3	\hat{y}_3	Корінь із власних чисел матриці (півосі еліпса) H_3
МНК [211]	354 m	227,44 m	$1\sigma = 39\% : 0,38m ; 1,443m$
Г.О. (3.33)	368,7 m	213,66 m	0,777 m ; 2,559 m
Г.О. [203]	368,34 m	214,0 m	1,007 m ; 1,545 m

4.4. Оцінювання стану динамічної системи – орієнтації штучного супутника Землі при його русі по орбіті

Постановка задачі

Отже, нехай штучний супутник Землі обертається навколо Землі по круговій орбіті радіусом $R_{orb} = 6878 \text{ км}$. Прецесія орбіти вважається відсутньою [212]. Інші параметри орбіти для задачі оцінювання при моделюванні неважливі.

Рівняння кутового (сферичного) руху супутника запишімо в наступному вигляді [209]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \vec{\omega} - \vec{\omega}_{ORS} \circ \Lambda, \quad (4.2)$$

$$J\dot{\omega} + [\omega \times]J\omega = M_u + M_p. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.2), (4.3) описують кутовий (сферичний) рух супутника: системи координат (СК), зв'язаної с супутником (ЗСК) $Oxyz$ відносно орбітальної системи координат (ОСК – ORS) $Ox_0y_0z_0$. Обидві СК праві, і їх центри співпадають та з центром мас супутника. Вісь Ox_0 спрямована в напрямку руху супутника по орбіті. Вісь Oy_0 спрямована вдовж прямої, що проходить скрізь центри мас Землі та супутника, та спрямована в зеніт. Вісь Oz_0 спрямована так, щоб утворити праву СК.

Положення ЗСК відносно ОСК задається кватерніоном: $\Lambda^T = [\lambda_0, \lambda^T]$, $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda^T \lambda \equiv 1$, компоненти якого є параметрами Родріга-Гамільтона [213]: $\lambda_0(t) = \cos \frac{\vartheta(t)}{2}$, $\lambda_i(t) = v_i(t) \sin \frac{\vartheta(t)}{2}$, $v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t) \equiv 1$, де $v_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ – напрямні косинуси осі повороту ЗСК відносно ОСК, $\vartheta(t)$ – кут повороту супутника відносно осі повороту. Тоді збігу ЗСК з ОСК відповідають кватерніони $\Lambda^T = [1, 0, 0, 0]$ або $\Lambda^T = [-1, 0, 0, 0]$.

Тут і далі точка над змінної, у тому числі над вектором, позначає похідну за часом.

$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ – вектор абсолютної кутової швидкості супутника, заданий в проекціях на вісі ЗСК. $\vec{\omega}_{\text{ors}} = [0, 0, \omega_{\text{ors}}]^T$ – вектор кутової швидкості орбітального руху супутника, заданий в проекціях на вісі ОСК, а саме – спрямований уздовж тієї осі ОСК, що є нормальною до площини орбіти. Довільний вектор $a^T = [a_1, a_2, a_3]$ для запису векторного добутку представимо в вигляді

$$[a \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}[a \times] = 2, \quad \forall \|a\| \neq 0.$$

Запис $\vec{c} = [a \times] \vec{b}$ уявляє собою векторний добуток $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ в обраній СК (надалі стрілку над змінної, що позначає вектор, опускаємо всюди, де це не тягне за собою невизначеність), де $a = [a_1, a_2, a_3]^T$, $b = [b_1, b_2, b_3]^T$ и $c = [c_1, c_2, c_3]^T$. Запис $\vec{c} = [a \times] \vec{b}$ зручніше для написання програми на мові програмування, а також для подання деяких операцій над кватерніонами, які будуть потрібні в подальшому.

$J = J^T > 0$ – матриця, що задає тензор інерції (ТІ) супутника в ЗСК. Далі вважаємо матрицю J незмінною:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & -0,2 & 0,2 \\ -0,2 & 60 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 90 \end{bmatrix} \text{кг} \cdot \text{м}^2. \quad (4.4)$$

$M_u = [M_1, M_2, M_3]^T$ – вектор керуючого моменту, який задано проєкціями на вісі ЗСК. Керуючий момент має структуру $M_u = f(\Lambda, \omega)$, де $f(\bullet)$ – задана 3×1 -вектор-функція змінних Λ и ω . Було взято два варіанти керуючих моментів – $M_{u,1}$ і $M_{u,2}$. Перший варіант керуючого моменту [169]:

$$M_{u,1} = a_{u,1} B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign}(\Lambda_S^T \Lambda) - K[\omega - \omega_{\text{ORS}}] + m_{u,1}^{\text{comp}} [\omega \times] J \omega, \quad (4.5)$$

В керуючому моменті $M_{u,1}$ (4.5) введено наступні позначення та їх значення [169]: матриця $B(\Lambda)$ – це 4×3 -матриця наступного вигляду:

$$B(\Lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^T \\ \lambda_0 I_3 + [\lambda \times] \end{bmatrix}, \text{ де } I_3 - \text{одинична } 3 \times 3\text{-матриця; } \bar{\omega}_{\text{ORS}} = [0, 0, \omega_{\text{ORS}}]^T - \text{вектор}$$

кутової швидкості ОСК, заданий проєкціями на її ж осі; $\omega_{\text{ORS}} = -\sqrt{\mu / R_{\text{orb}}^3}$, $\mu = 398600,4 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравітаційна постійна Землі [212], $R_{\text{orb}} = 6878 \text{ км}$ – радіус орбіти супутника; коефіцієнт $a_{u,1} = 5$; $K = 10I_3$ – діагональна 3×3 -матриця; $m_{u,1}^{\text{comp}} = 1$ – коефіцієнт, що визначає ступінь компенсації гіроскопічного моменту, прикладеного до супутника з боку силових керуючих гіроскопів; Λ_Z – кватерніон, що відповідає заданій сталій орієнтації КА. Зокрема, кватерніонам $\Lambda_Z^T = [1, 0, 0, 0]$ або $\Lambda_Z^T = [-1, 0, 0, 0]$ відповідає збіг ЗСК з ОСК.

Другий варіант керуючого моменту [169]:

$$M_{u,2} = J \dot{\omega}_{u,2} + [\omega \times] J \omega - a_{u,2} J (\omega - \omega_{u,2}) - m_{u,2}^{\text{comp}} a_{u,2} J \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\omega - \omega_{u,2}) dT. \quad (4.6)$$

В (4.6) маємо наступні позначення і вирази:

$$\dot{\omega}_{u,2} = -[\omega \times] Z(\Lambda) \omega_{\text{ORS}} - 0,5 B^T B(\Lambda) [\omega - Z(\Lambda) \omega_{\text{ORS}}], \quad (4.7)$$

де $Z(\Lambda)$ – 3×3 -матриця наступного вигляду: $Z(\Lambda) = I_3 - 2\lambda_0 [\lambda \times] + 2[\lambda \times]^2$;

$$\omega_{u,2} = Z(\Lambda) \omega_{\text{ORS}} + B^T(\Lambda) \Lambda_Z; \quad (4.8)$$

$m_{u,2}^{\text{comp}} = 0,11$; $a_{u,2} = 0,05$.

Оскільки далі вимірювання і оцінювання змінних стану, що входять в вирази

для керування, надходять дискретно, то в (4.6) застосовуємо замість $\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\omega - \omega_{u,2}) dT$

вже готовий вираз: $0,5(\omega(t_j) - \omega_{u,2}(t_j))(t_{j+1} - t_j)$, де t_j – значення часу на момент початку керування, а t_{j+1} – на момент отримання нових значень змінних, що входять в (4.6).

Підставив (4.7), (4.8), значення $m_{u,2}^{comp}$, $a_{u,2}$, $0,5(\omega_j - \omega_{u,2,j})(t_{j+1} - t_j)$ в (4.6) отримаємо повний вираз для $M_{u,2}$.

В вирази для керуючих моментів (4.5), (4.6) при моделюванні виконувалась підстановка не дійсних, а розрахункових і «вимірних» даних, що містять похибку «вимірювання». Наприклад, замість фактичного ТІ (4.4) підставлявся розрахований:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (4.9)$$

Забігаючи наперед зауважимо, що комп'ютерне моделювання показало, що при застосованому методі оцінювання стійкість керування і точність кутової орієнтації супутника при прийнятих класах точності бортових вимірювальних приладів, моделі зовнішнього збурення, яке діє на супутник, порушенні апріорних припущень щодо компонентів тензору інерції супутника, не залежить від закону керування супутником – чи то було керування згідно (4.5), чи (4.6).

На супутник в його кутовому русі навколо власного центра мас діє невідомий, але обмежений за величиною збурюючий момент, заданий наступними компонентами [169]:

$$\rho_i = b_i \sin(\varpi_0 t + \iota_i), \text{ де: } b_i = 10^{-4}; i = 1, 2, 3, \varpi_0 = 6; \iota_1 = 0; \iota_2 = \frac{\pi}{4}, \iota_3 = \frac{\pi}{2}. \quad (4.10).$$

На борту супутника є побудувач місцевої вертикалі (ПМВ), що вимірює кути крену φ і тангажу θ відповідно, і один з двох варіантів комплексу датчиків кутової швидкості (ДКШ): або один грубий 3-степеневий, що вимірює проекцію абсолютної

кутової швидкості на дві ортогональні осі; або два прецизійних 2-ступеневих ДКШ, кожний з яких вимірює проекцію кутової швидкості на свою вимірювальну вісь. Тоді можливо моделювати так звану гіроорбіту, з допомогою якої супутник стабілізується в ОСК [204]:

Запишемо диференціальні рівняння гіроорбіти:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega_x - w_{\text{ors}} \psi \\ \dot{\psi} &= \omega_y + w_{\text{ors}} \phi\end{aligned}\quad (4.11)$$

Тут: ϕ , ψ – відповідно кути крену та курсу супутника, відраховані від осей ОСК як кути Ейлера-Крилова; ω_x , ω_y – складові абсолютної кутової швидкості супутника, пов'язаних з супутником осях Ox , Oy відповідно.

Система рівнянь (4.11) є лінеаризованою системою збурених кінематичних параметрів сферичного руху супутника [214]. Нею можна користуватись, якщо кутові відхилення осей ЗСК відносно осей ОСК невеликі. Тому завданням буде підтримувати положення робоче положення супутника незмінним відносно осей ССК. Такий режим функціонування звичайний для проведення зйомки земної поверхні [215].

Вимірювання ω_x , ω_y здійснюється ДКШ з погрішністю, тому запишімо:

$$\omega_{x,\text{gyro}} = \omega_x + w_x, \quad \omega_{y,\text{gyro}} = \omega_y + w_y. \quad (4.12)$$

Отже, з рівнянь (4.1) і (4.12) зробимо векторно-матричний запис

$$\dot{x} = \Omega x + Bu + w, \quad (4.13)$$

де: $x^T = [\phi, \psi]$; $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -w_{\text{ors}} \\ w_{\text{ors}} & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $u^T = [\omega_{x,\text{gyro}}, \omega_{y,\text{gyro}}]$; $w^T = [w_x, w_y]$,

$|w_x| \leq d$, $|w_y| \leq d$ або $w^T Q^{-1} w$, де $Q = Q^T > 0$ і $Q = (3d)^2 I_2$. Тут I_2 – одинична 2×2 -матриця згідно зауваженню 2.3 в розділі 2 і, відповідно, виразу (2.31).

Оскільки обробка вимірювань і формування керуючого моменту здійснюється дискретно, то від запису (4.13) перейдемо до запису в дискретному вигляді, що співпадає з записом (2.1)

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + w_j, \quad j \in T_0, \quad (4.14)$$

де: $x_j^T = [\phi(t_j), \psi(t_j)] = [\phi_j, \psi_j]$; $A = \exp(\Omega \Delta t)$; $u_j = [\omega_{x,gyro,j}, \omega_{y,gyro,j}]^T \Delta t$; $w_j = w \Delta t$.
 $\Delta t = t_{j+1} - t_j = \text{const}$ – інтервал часу, через який надходить нове вимірювання з ПМВ і на якому керуючий момент залишається сталим. Інтервал може бути більшим, якщо це прийнятне з точки зору стійкості керування. Для моделювання було прийнято два значення $\Delta t = 1\text{с}$ і $\Delta t = 2\text{с}$. Як показало моделювання, система залишилась стійкою.

Спрощена модель ПМВ взята з роботи [216]. Було враховане запізнювання показань ПМВ і прийнята частота видачі інформації про кути крену ϕ і тангажу θ – 1Гц. Точність моделювалася у двох варіантах: до інструментальної погрішності $\pm 4'$; і з урахуванням алгоритмічної компенсації до $1'$. Погрішність виміру v задавалася у вигляді «шуму», рівномірно розподіленого в діапазонах $\pm 4'$ і $\pm 1'$ відповідно. Характеристики точності ДКШ були взяті від 3-степеневого ИУС-2М и від 2-степеневого ДУС-Л-9Д [217]. Погрішність їхніх показань моделювалася постійним «зсувом» нульового сигналу $0,02^\circ / \text{с} \approx 3,5 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$ для ИУС-2М и $0,0001^\circ / \text{с} \approx 1,75 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}$ для ДУС-Л-9Д. Моделювалася стабілізація супутника в орбітальній системі координат [209, 212] за один оберт супутника по орбіті навколо Землі. Час одного оберту – 5677с. Рівняння вимірювання (3.1) має наступні параметри: $y_j = \phi_j$, $h^T = [0, 1]$, $|\eta_j| \leq c$ – погрішність ПМВ в вимірюванні кута крену. Маємо два варіанти: $c = 4' \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{rad}$ і алгоритмічно уточнений $c = 1' \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{rad}$ [214].

Отже, маємо можливість скористуватись методом оцінювання стану лінійної системи (4.13), а саме – розробленому в розділах 2 і 3. Візьмімо вираз (2.27), де $\bar{k}_j = \sqrt{\text{trace} Q_j} / \sqrt{\text{trace} H_{j+1|j}}$, оскільки зовнішнє збурення діє одночасно по двом каналам і обмежено еліпсом, а не відрізком, та вирази (3.23), (3.24), (3.46) для матриці H_j , параметру γ_j^2 і кроку τ_j відповідно. Після отримання оцінки $\psi_j - \psi_j$, з неї, а також з вимірювань ϕ_j і θ_j створюється кватерніон $\hat{\Lambda}_j$ [213], який підставляється в керування (4.5) або (4.6).

Початкові значення: $H_0 = Q_0 = (3d\Delta t)^2 I_2$, $\bar{x}_0^T = [0, 0]$; $d = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{c}^{-1}$ і $d = 1,75 \cdot 10^{-6} \text{c}^{-1}$ – максимальне значення погрішності ДКШ [217]; для кутів крену і тангажа ПМВ: $c = 1'$ і $c = 4'$ [216] відповідно. Моделювання велося в середовищі MATLAB. Для інтегрування рівнянь (4.2), (4.3) було обрано метод Рунге-Кутта 4 і 5 порядків з постійним кроком – ode45 [218].

На рисунку 4.3 представлений результат моделювання при постійній «невідомій» погрішності ДКШ $0,02^\circ/\text{c}$ і погрішності визначення кута крену $1'$.

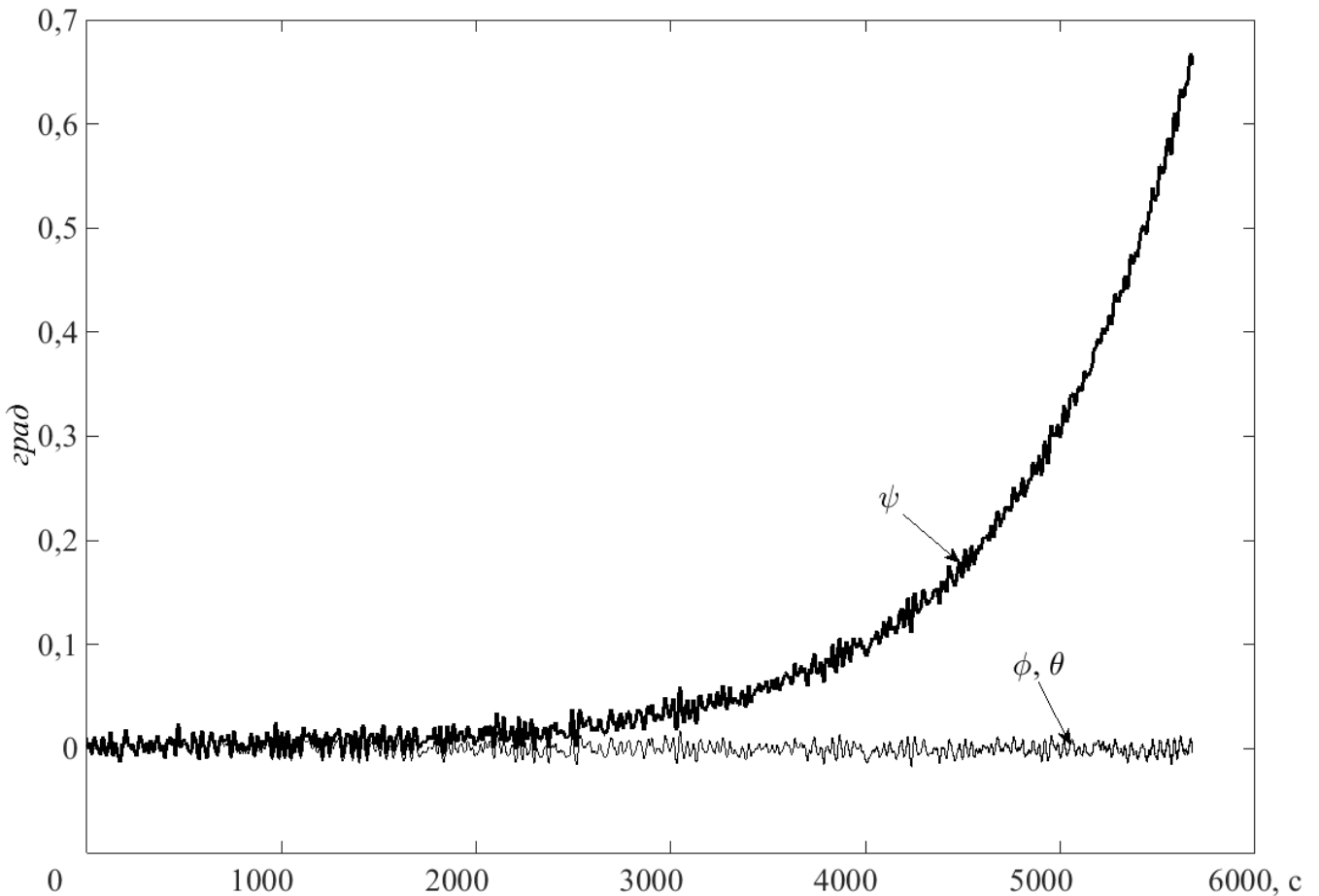


Рис. 4.3. Оцінювання відхилення курсового кута ψ за один виток супутника. $c = 1'$.

Показано один виток супутника по орбіті за 5678с. Як бачимо, наприкінці вітку дійсне значення курсового кута ψ менш ніж $0,7^\circ$. Множення $0,02^\circ/\text{c}$ на 5678с дає 114° , що показує ефективну роботу спостерігача.

На рисунку 4.4 представлений результат моделювання за тих самих умов, але при погрішності виміру кута крену – $4'$.

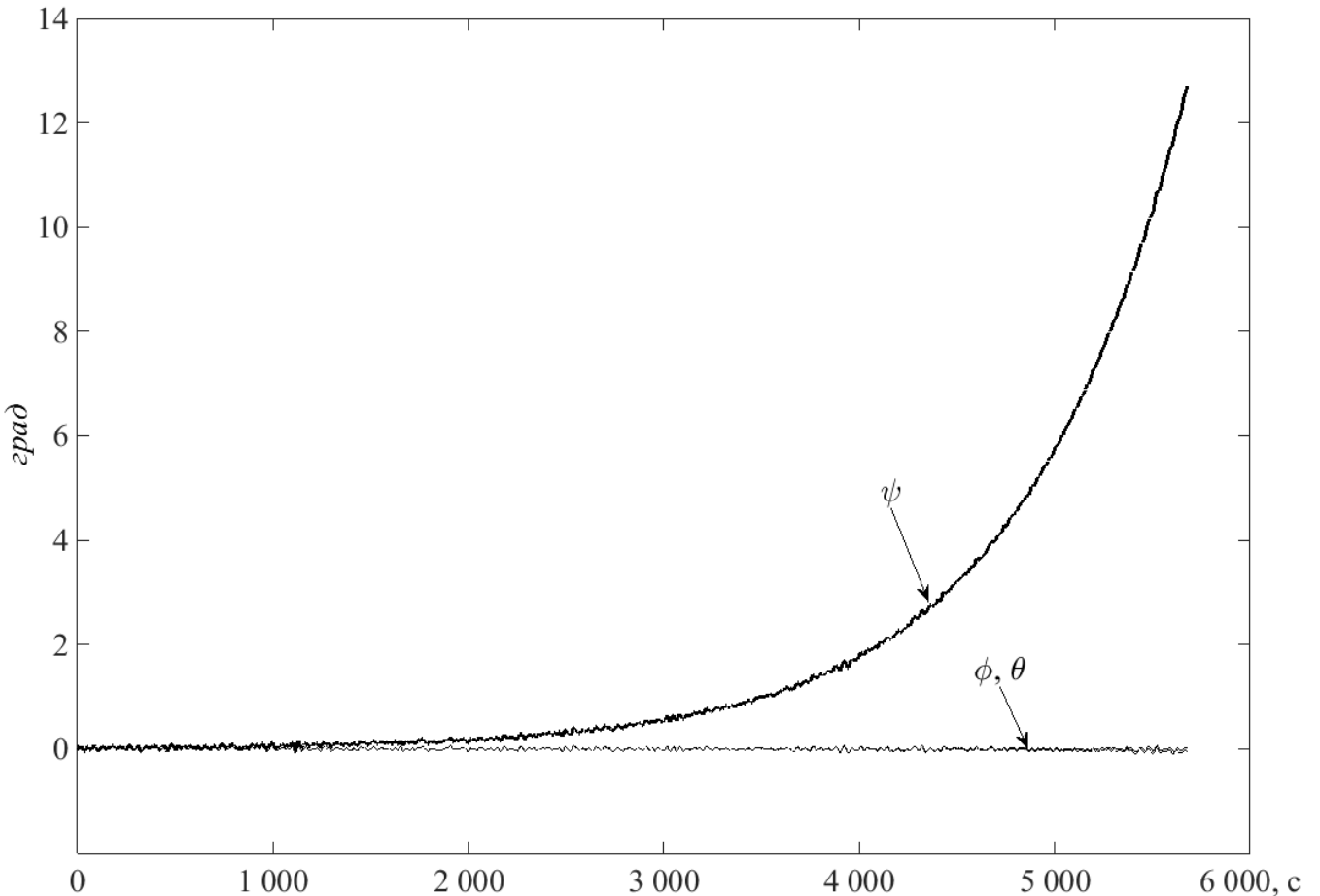


Рис. 4.4. Оцінювання відхилення курсового кута ψ за один віток супутника. $c = 4'$.

Бачимо, що наприкінці вітка курсовий кут ψ вже дорівнює майже 13° . Це свідчить про те, що точність вимірювання відіграє основну роль в оцінюванні. Збільшення обмеження на зовнішнє збурення, тобто погіршення точності ДКШ не привело до помітних змін точності оцінювання і тут не показано.

Потім моделювалася наступна ситуація – перехід супутника в його русі по орбіті з тіньової на освітлену сторону Землі. Це привело до збільшення погрішності вимірювання кутів ϕ_j і θ_j ПМВ: з $\pm 1'$ до $\pm 4'$. Це відбулося на 2000-й секунді. Внаслідок цього послі декількох циклів оцінювання наступила «несумісність» – $E_j \cap S_j = \emptyset$ (див. рис. 3.1, випадок 4). У даному методі оцінювання передбачена перевірка: $1 + \chi_j \geq \sigma_j$. Якщо ця умова порушується, то має місце «несумісність» і здійснюється перевизначення параметра χ_j (див. рис. 3.2) так, що масштабується величина c – прийнятого максимального значення завади вимірювання. Результат моделювання показав, що спостереження за станом відновилося (див. рис. 4.5).

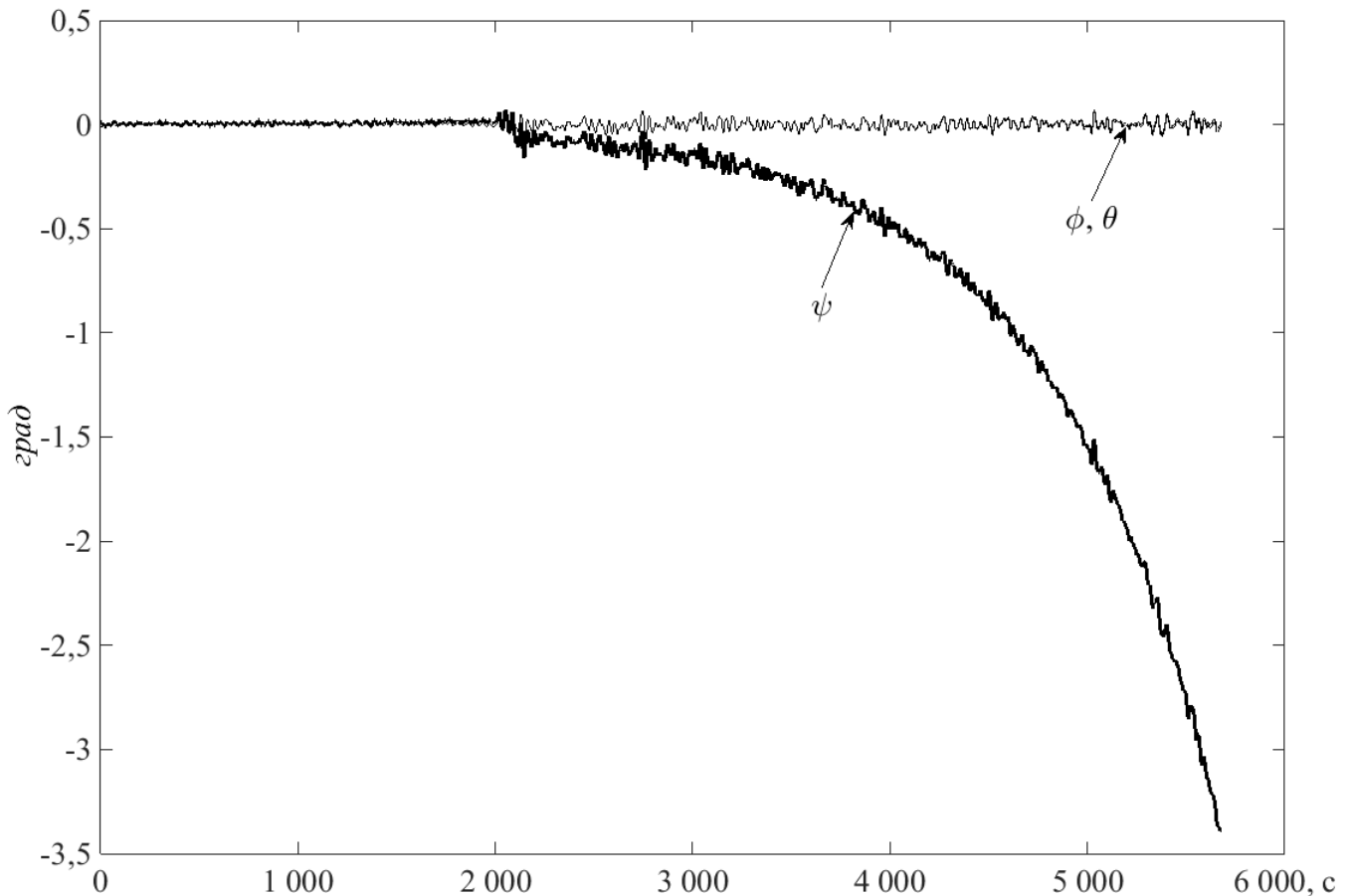


Рис. 4.5. Оцінювання відхилення курсового кута ψ за один віток супутника при «невідомій» зміні величини з $c = 1'$ до $c = 4'$.

Висновки до розділу 4

У розділі наведено приклади застосування розробленого методу оцінювання для розв'язання практичних задач – пеленгації нерухомого об'єкту з рухомого об'єкту та оцінювання курсового кута штучного супутника Землі протягом одного його вітка по орбіті.

Щодо першого прикладу, зауважимо, що незважаючи на менші значення еліпсоїдів МНК (точніше кажучи, їх півосей) відносно гарантованих еліпсоїдів, оцінка МНК істотно залежить від вихідного припущення про оцінювані параметри. Гарантоване оцінювання такої залежності оцінки від вихідних припущень не показало. Також зауважимо, що застосування запропонованого в статті виразу (3.33) для субоптимального кроку в алгоритмі еліпсоїдального оцінювання не тягне помітного погіршення якості оцінювання, але виявляється простіше, ніж вираження для оптимального кроку.

В другому прикладі застосовувався спосіб модельної реалізації так званої гіроорбити на борту супутника, коли самої гіроорбити як окремого приладу немає, але її можна імітувати на підставі вимірювань, що надходять з більш простих бортових приладів – в розглянутому прикладі це ПМВ і ДКШ. Результати моделювання свідчать про практичну цінність розробленого методу і його стійкість до порушення апріорних припущень.

Зауважимо, що в цьому конкретному прикладі, наявна чутливість до початкової оцінки курсового кута і нелінійне нагромадження погрішностей оцінювання на кожному кроці. Це обумовлено звичайно не методом оцінювання, а припущеннями щодо рівнянь, яки описують кутовий рух твердого тіла, а саме – їх лінеаризацією. Можливо, дослідження властивостей цих рівнянь або додавання додаткового рівняння с відповідною зміною розмірності стану спостережуваної системи дозволять змінити характер накопичування погрішності оцінювання на більш лінійний. Крім того, очевидно, що зі збільшенням радіуса орбіти супутника ростуть вимоги до точності вимірювання кутів крену ϕ і тангажу θ ПМВ. З іншого боку, збільшення радіуса орбіти (вважаємо її як і раніше – круговий) приводить до зменшення дії зовнішніх факторів, що збурюють, рух супутника навколо його центру мас: магнітне і гравітаційне поля Землі слабшають, вплив залишків атмосферних газів практично не відчувається. Тоді виникає можливість застосувати нелінійні моделі руху і методи оцінювання їх стану або параметрів, але це є предметом подальших досліджень.

Результати досліджень даного розділу наведено в таких публікаціях:

6. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. О связи параметров множества возможных состояний наблюдаемой системы с параметрами измерительного устройства и размерностью пространства состояний системы. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. № 4. С. 96-103. (Особистий внесок – висунуто і доведено теорему про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів статичного еліпсоїдального оцінювання).

7. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. №1. С.96-105. |DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10559-019-00114-x>. (Особистий внесок – вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням: висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апріорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена одна проблема оцінювання станів лінійних керованих систем шляхом розробки методу робастного еліпсоїдального оцінювання станів лінійних керованих систем в умовах невизначеності за скалярними вимірюваннями на підставі системного підходу. Для цього:

1. Розроблено конструктивний спосіб визначення множини можливих станів системи:
 - Проведено системний аналіз лінійних керованих систем щодо їх можливого стану, який вони приймають під дією статистично невизначеного, але обмеженого зовнішнього збурення, та знайдено аналітичне рішення задачі еліпсоїдальної апроксимації суми двох еліпсоїдів: апріорного еліпсоїду, яким апроксимоване множини початкового стану такої системи, і еліпсоїду, виродженого у відрізок – множини можливих значень зовнішнього збурення. Для цього було застосовано оператор стискання та висунуто і доведено твердження щодо рішення цієї задачі. Рішення є оптимальним щодо мінімуму багатовимірною об'єму отриманого еліпсоїду.
 - Запропоновано спрощення цього рішення шляхом усунення операції обернення матриці апріорного еліпсоїду, що незначно сказалося на значенні критерію оптимізації.
2. Досліджено усі можливі випадки перетину апріорного еліпсоїду і множини вимірювань скалярного параметру, що характеризує стан спостережуваної системи – «гіпершару» і знайдено спосіб з'ясування – якій саме випадок має місце. На підставі цього надається робастність методу оцінювання стану системи.
3. Запропоновано декілька способів апроксимації перетину апріорного еліпсоїду і «гіпершар» вимірювань. Запропоновані способи при незначному погіршенні точності апроксимації порівняно з оптимальними способами значно простіше їх щодо кількості обчислень і в них виключено настання випадку, коли рішення не має сенсу.

4. Сформульовано і доведено теорему, яка зв'язує еліпсоїд оцінки стану системи за критерієм мінімуму його об'єму, підпростір, якому належить множина вимірювань, і міру невизначеності цієї множини. Висновки з теореми дають конструктивну можливість визначити вимоги до вимірювача в залежності від припустимої міри невизначеності стану спостережуваної системи і розмірністю її простору станів, а саме: вимірювану змінну і припустиму похибку вимірювання.
5. Розроблений метод дозволяє застосовувати різні критерії мінімізації оцінки стану системи, що було перевірено використанням у цьому методі критерію мінімізації сліду матриці еліпсоїду оцінки і також запропоновано спрощення, яке дає субоптимальну оцінку, проте дозволяє уникнути рішення, яке не має сенсу, що трапляється при оптимальному рішенні.
6. Розробленим методом вирішено дві практичні задачі: оцінювання положення нерухомого об'єкту за декількома його пеленгами і оцінювання стану лінійної керованої системи – оцінювання курсового куту орієнтації штучного супутника Землі і керування його кутовим рухом в умовах невизначеності.
7. На підставі розробленого методу робастного еліпсоїдального оцінювання побудовано комп'ютерні моделі та запропоновано інженерні методики оцінювання станів конкретних технічних систем, які застосовано у виробництві складних технічних виробів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kalman R. New approach to linear filtering and prediction problems // *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers – Journal of Basic Engineering*, 82 (Series D): 35-45. 1960.
2. Медич Д. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.- Москва: Энергия, 1973. 440 с.
3. Липцер А. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. Москва: Наука, 1974. 696 с.
4. Лифшиц И. А., Олевская Е. А., Абрамович В. И. Статистическая теория оценивания. Ленинград: Наука, 1976. 188 с.
5. Диденко В. П., Цитрицкий О. Е. Фильтрация и регуляризация. Киев: Вища школа, 1977. 52 с.
6. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / под ред. К. Т. Леондеса. Москва: Мир, 1980. 408 с.
7. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюсси. Москва: Наука, 1982. 200 с.
8. Богуславский И. А. Прикладные задачи фильтрации и управления. Москва: Наука, 1983. 400 с.
9. Калман Р. Идентификация систем с шумами. *Успехи математических наук*. 1985. Т. 40. Вып. 4. С. 28-41.
10. Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана. Москва: Мир, 1988. 168 с.
11. Згуровский М. З., Подладчиков В. Н. Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. Киев: Наукова думка, 1995. 289 с.
12. Степанов О. А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 3-е изд. 370 с.
13. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Москва: Мир, 480 с.
14. Кротов В. И., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. Москва: Наука, 1973. 448 с.

15. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1992. 260 с.
16. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
17. Соколов Р. С. Химическая технология: учебное пособие. Т.1. Москва: ВЛАДОС, 2000. 368 с.
18. Смидович Е. В. Технология переработки нефти и газа. Ч. 2. Москва: Химия, 1980. 328с.
19. Справочник азотчика: Физико-химические свойства газов и жидкостей. Производство технологических газов. Синтез аммиака. Москва: Химия, 1986. 512 с.
20. Кунцевич В. М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев: Наукова думка, 2006. 261 с.
21. Булгаков Б. В. Колебания. Москва: ГИТТЛ, 1954. 892 с.
22. Якубович В. А. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств. *Доклады АН СССР*. 1966. Т. 166. № 6. С. 1308-1311.
23. Якубович В. А. Конечно-сходящиеся алгоритмы решения счетных систем неравенств и их применения в задачах синтеза адаптивных систем. *Доклады АН СССР*. 1969. Т. 189. № 3. С. 495-498.
24. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. Москва: Наука, 1968. 475 с.
25. Schweppe F. C. Recursive State Estimation; Unknown but Bounded Errors and System Inputs. *IEEE Transaction Automation Control*. 1968. V. AC-13. № 1. P. 22-28.
26. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва: Наука, 1977. 392 с.
27. Черноузько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Москва: Наука, 1988. 320 с.

28. Бакан Г. М. Фильтрация в условиях нестатистически заданной неопределенности. *Автоматика*. 1980. № 2. С. 13-21.
29. Бакан Г. М., Васильев М. Ю., Сальников Н. Н. О сходимости алгоритмов эллипсоидального оценивания. *Автоматика*. 1980. № 2. С. 10-18.
30. Бакан Г. М., Нижниченко Е. А. Алгоритм решения счетной системы линейных алгебраических уравнений с использованием операции растяжения пространства. *Кибернетика*. 1980. № 5. С. 42-48.
31. Бакан Г. М. Фильтрация многозначного процесса в ограниченном шуме. *Кибернетика и вычислительная техника*. 1980. Вып. 49. С. 22-29.
32. Бакан Г. М. Нестатистическая постановка и решение одной задачи фильтрации. *Автоматика и телемеханика*. 1983. № 9. С. 32-44.
33. Бакан Г. М., Одинцова Е. А. Наблюдатель для одного класса линейных систем, обеспечивающий получение точечной и множественной оценок состояния. *Автоматика и телемеханика*. 1986. № 5. С. 162-165.
34. Ахметжанова З. Ж., Бакан Г. М. Конечно сходящийся алгоритм решения совместной системы линейных уравнений и неравенств. *Автоматика*. 1989. № 2. С. 34-42.
35. Бакан Г. М., Куссуль Н. Н. Размытые эллипсоидальные множества в задачах нестатистического оценивания. *Автоматика*. 1989. № 5. С. 11-17.
36. Бакан Г. М., Куссуль Н. Н. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств. *Автоматика*. 1990. № 3. С. 29-40.
37. Бакан Г. М., Куссуль Н. Н. О необходимом условии сходимости алгоритма идентификации на основе семейств эллипсоидальных оценок. *Автоматика*. 1990. № 4. С. 72-74.
38. Бакан Г. М., Куссуль Н. Н. Параметрическая идентификация нестационарных систем с использованием метода размытых эллипсоидальных множеств. *Автоматика*. 1993. № 3. С. 29-40.

39. Бакан Г. М., Куссуль Н. Н., Шелестов А. Ю. Размытая эллипсоидальная идентификация параметров многомерных статических объектов. *Автоматика*. 1993. № 5. С. 50-60.
40. Бакан Г. М., Нижниченко Е. А. Синтез наблюдателя с заданными динамическими свойствами в классе эллипсоидальных оценок. *Кибернетика и вычислительная техника*. 1994. Вып. 101. С. 58-62.
41. Бакан Г. М., Сальникова Н. Г. Решение задачи наблюдения дискретных систем методом эллипсоидов с неполным шагом. *Проблемы управления и информатики*. 1994. № 3-4. С. 3-13.
42. Бакан Г. М., Сальникова Н. Г. Размытые эллипсоидальные оценки в алгоритмах оценивания с неполным шагом. *Проблемы управления и информатики*. 1994. № 5-6. С. 30-41.
43. Бакан Г. М., Сальникова Н. Г. К задаче рациональной параметризации эллипсоидальных алгоритмов наблюдения. *Проблемы управления и информатики*. 1995. № 6. С. 70-79.
44. Бакан Г. М., Волосов В. В. Оценивание состояния процесса по линейным наблюдениям в непрерывном времени методом эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 1995. № 4. С. 108-118.
45. Бакан Г. М. Нечеткий эллипсоидальный наблюдатель состояний многомерного статического объекта. *Проблемы управления и информатики*. 1996. № 1-2. С. 133-144.
46. Бакан Г. М., Волосов В. В., Куссуль Н. Н. Оценивание состояния непрерывных динамических систем методом эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 6. С. 72-91.
47. Волосов В. В., Одинцова Е. А. К задаче восстановления вектора фазового состояния и идентификации параметров линейных стационарных систем. *Автоматика*. 1986. № 6. С. 22-29.
48. Волосов В. В., Нижниченко Е. А. Разработка и исследование алгоритмов наблюдения состояний и идентификации параметров линейных стационарных дискретных динамических систем. *Автоматика*. 1992.- № 3. С. 34-41.

49. Волосов В. В., Одинцова Е. А., Храмов С. А. Алгоритм эллипсоидального оценивания матрицы параметров линейного дискретного динамического объекта управления. *Проблемы управления и информатики*. 1995. № 1. С. 63-77.
50. Волосов В. В., Тютюнник Л. И. Разработка и исследование робастных алгоритмов гарантированного эллипсоидального оценивания состояния многомерных динамических систем. - Ч. I, Ч. II. *Проблемы управления и информатики*. 1997. № 4. С. 31-43, № 6. -С. 52-65.
51. Гершович В. И., Шор Н. З. Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения. *Кибернетика*. 1982. № 5. С. 61-69.
52. Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г. Минимаксный подход к рекуррентному оцениванию состояний линейных динамических систем. *Кибернетика*. 1977. № 4. С. 52-56.
53. Кириченко Н. Ф., Клименко В. Г. О сходимости оптимального оценивания в системах с неполной информацией. *Кибернетика*. 1978. № 6. С. 131-133.
54. Кириченко Н. Ф. Минимаксное управление и оценивание в динамических системах. *Автоматика*. 1982. № 1. С. 32-39.
55. Кириченко Н. Ф., Слабоспицкий А. С. Минимаксные фильтры в задачах оценивания состояний, идентификации параметров и распознавания образов. *Кибернетика и вычислительная техника*. 1985. Вып. 65. С. 23-33.
56. Куссуль Н. Н. Оценивание фазового состояния линейных динамических объектов с использованием семейств эллипсоидальных множеств. *Автоматика*. 1991. № 2. С. 22-28.
57. Кунцевич А.В., Кунцевич В.М. Робастная устойчивость стационарных и нестационарных линейных дискретных систем. *Автоматика*. 1992. № 3. С. 3-10.
58. Кунцевич В. М., Пшеничный Б. Н. Решение одного класса задач сближения в условиях неопределенности. *Кибернетика и системный анализ*. 1995. № 3. С. 63-70.

59. Кунцевич В. М. О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений. *Автоматика и телемеханика*. 2005. № 5. С. 125-133.
60. Кунцевич В. М., Поляк Б. Т. Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями. *Проблемы управления и информатики*. 2009. № 6. С. 6-21.
61. Кунцевич В. М. Синтез управления линейными и нелинейными динамическими системами при ограниченных погрешностях измерения вектора состояния. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 1, С. 6-17.
62. Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок. *Автоматика и телемеханика*. 1991. № 4. С. 3-26.
63. Куржанский А. Б., Фурасов В. Д. Идентификация нелинейных процессов – гарантированные оценки. *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 6. С. 70-87.
64. Куржанский А.Б., Фурасов В.Д. Идентификация билинейных систем. Гарантированные псевдоэллипсоидальные оценки. *Автоматика и телемеханика*. 2000. № 1. С. 41-53.
65. Наконечный А. Г. Минимаксные оценки параметров. *Вычислительная и прикладная математика*. 1979. Вып. 39. С. 17-24.
66. Наконечный А. Г., Демиденко С. В. Гарантированные оценки параметров линейных алгебраических уравнений при нестационарных наблюдениях. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 1, С. 23-31.
67. Овсеевич А. И. Области достижимости управляемых систем, их свойства, аппроксимации и применения // Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика. Москва. 1996. 177 с.
68. Овсеевич А. И., Черноусько Ф. Л. Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости систем с неопределенностями. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2004. № 4. С. 8-18.

69. Гончарова Е. В., Овсеевич А. И. Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2007. № 1. С. 51-59.
70. Овсеевич А. И., Тарабанько Ю. В. Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2007. № 2. С.33-44.
71. Пшеничный Б. Н., Покотило В. Г. Минимаксный подход к оценке параметров линейной регрессии. *Известия АН СССР. Серия: Техническая кибернетика*. 1983. № 2. С. 94-102.
72. Пшеничный Б. Н., Покотило В. Г. О задачах наблюдения в дискретных системах. *Прикладная математика и механика*. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 3-11.
73. Сальников Н. Н. Решение задачи оценивания состояния статического объекта с использованием алгоритма построения эллипсоидальных оценок. *Автоматика*. 1986. № 3. С. 42-48.
74. Сальников Н. Н. Об одной модификации алгоритма оценивания параметров линейной регрессии с помощью эллипсоидов. *Проблемы управления и информатики*. 2012. № 2. С.65-81.
75. Сальников Н. Н. Эллипсоидальное оценивание состояния и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации об оцениваемых величинах. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 2. С. 144-156.
76. Сальникова А. Н., Сальников Н. Н. Эллипсоидальная фильтрация процессов с распределенными параметрами с использованием конечномерных моделей и локальных измерений. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 3, С. 75-90.
77. Сальников Н. Н., Губарев В. Ф., Мельничук С. В. Применение модифицированного эллипсоидального фильтра в комплексированной бесплатформенной инерциальной навигационной системе. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 2. С. 87-102.

78. Рокитянский Д. Я. Точное решение уравнений эллипсоидов, аппроксимирующих область достижимости одного класса линейных систем неопределенностями. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 1996. № 1. С. 16-21.
79. Рокитянский Д. Я. Уравнения эволюции оптимальных оценок множества достижимости линейных систем с неопределенной матрицей. *Доклады РАН*. 1999. Т. 364. № 5. С. 608-610.
80. Стецюк П. И. g -алгоритмы и эллипсоиды. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 1. С. 113-134.
81. Стецюк П. И. Ортогонализирующие линейные операторы в выпуклом программировании. Ч. I. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 3. С. 97-119.
82. Стецюк П. И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 141-146.
83. Стецюк П. И., Фесюк А. В., Хомяк О. Н. Обобщенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 4, С. 70-80.
84. Черноузько Ф. Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей. *Прикладная математика и механика*. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 940-950.
85. Черноузько Ф. Л. Об оптимальном эллипсоидальном оценивании для динамических систем, подверженных неопределенным возмущениям. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 2. С. 85-95.
86. Черноузько Ф. Л., Овсеевич А. И. Некоторые свойства оптимальных эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости. *Доклады РАН*. 2003. Т. 388. № 4. С. 462-465.
87. Шматков А. М. Сглаживающий фильтр на основе аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамических систем. *Прикладная механика и математика*. 2015. Т. 79. № 4. С. 498-508.

88. Максимов В. И. Об одной задаче управления линейной системой при неполной информации о фазовых координатах. *Автоматика и Телемеханика*. 2016. Вып. 6. С. 3-21.
89. Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E. Ellipsoidal Estimation under Model Uncertainty. *15th Triennial World Congress IFAC*. 2002. Barcelona, Spain.
90. Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E. Guaranteed Ellipsoidal State Estimation for Uncertain MIMO Models. 2003. *13th IFAC Symposium on System Identification*. 2003. P. 1054-1059.
91. Polyak B., Nazin S., Durieu C., Walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*. 2004. Vol. 40. P. 1171-1179.
92. Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A. Rejection of Bounded Disturbances via Invariant Ellipsoids Technique. *Proceeding of the 45th Conference on Decision and Control*. San Diego. CA. USA. December 13-15. 2006. P. 1429-1434.
93. Chernousko F. Optimal ellipsoidal estimates of uncertain systems: an overview and new results. *IFIP/IIASA/GAMM/ Workshop on Copying with Uncertainty (CwU): Robust Decisions*. IIASA, Laxenburg, Austria, December 10 - 12, 2007. 25p.
94. Norton J. P. Identification and application of bounded-parameter models *Automatica*. 1987. Vol. 23. Issue 4. P. 497-507.
95. Norton J. P. Recursive computation of inner bounds for the parameters of linear models. *International Journal of Control*. 1989. Vol. 50. Issue 6. P. 2623-2630.
96. Vicino A., Milaneze M. Optimal inner bounds of feasible parameter set in linear estimation with bounded noise. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 1989. AC-36. P. 759-763.
97. Vicino A, Milanese M. Optimal Inner Bounds of Feasible Parameter Set in Linear Estimation with Bounded Noise. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 1991. V. AC-36. № 6. P. 759-763.
98. Milanese M., Vicino A. (1996) Optimal Estimation Theory for Dynamic Systems with Set Membership Uncertainty: An Overview. In: Milanese M., Norton J.,

- Piet-Lahanier H., Walter É. (eds) *Bounding Approaches to System Identification*. Springer. Boston. MA.
99. Загускин В. Л. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема. *Успехи математических наук*. 1958. Т. 13. Вып. 6(84). С. 89-93.
100. Хонин В. А. Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов. В книге: *Эволюционные системы в задачах оценивания*. Свердловск: Уральский научный центр АН СССР, 1985. С. 104-123.
101. Киселев О. Н., Поляк Б. Т. Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию. *Автоматика и телемеханика*. 1991. № 9. С. 133-145.
102. Юдин Д. Б., Немировский А. С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. *Экономика и математические методы*. 1976. Т. 12. Вып. 2. С. 357-369.
103. Шор Н. З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94-95.
104. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 200 с.
105. Шор Н. З., Гершович В. И. Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1979. № 4. С. 62-67.
106. Vox G. E. P. Non-normality and test of variances. *Biometrika*. 1953. Vol. 40, No. 3/4. P. 318-335.
107. Huber P. J. Robust estimation of location parameter. *The Annals of Mathematical Statistic*. 1964. Vol. 35. P. 73-101.
108. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Помехоустойчивая идентификация. *Труды IV-го Симпозиума ИФАК*. Ч. I. Тбилиси. 1976. С. 190-213.
109. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации. *Автоматика и телемеханика*. 1980. № 10. С. 91-97.
110. Ершов А. А. Стабильные методы оценки параметров (обзор). *Автоматика и телемеханика*. 1978 № 8. С. 66-100.

111. Смоляк С. А., Титаренко Б. П. Устойчивые методы оценивания. Москва: Статистика, 1980. 267 с.
112. Launer R. L., Wilkinson G. N., editors. Robustness in Statistics. New York: Academic Press, 1979. 312 p.
113. Хьюбер П. Робастность в статистике. Москва: Мир, 1984. 304 с.
114. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1980. 518 с.
115. Diniz P. S. R., Biscainho L. W. P. Optimal variable step size for the LMS/Newton algorithm with application to subband adaptive filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1992. V. 40. No. 11. P. 2825-2829.
116. Kwong C. P. Robust design of the LMS algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1992. V. 40. No. 10. P. 2613-2616
117. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. *Доклады АН СССР*. 1979. Т. 244. № 5. С. 1093-1096.
118. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1980. 20. № 1. С. 51-68.
119. Wolfe P. A Bibliography for the Ellipsoid Algorithm. IBM Research Center. Report RC 8237. Yorktown Heights – New York. 1980b.
120. Шор Н. З., Журбенко Н. Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1971. № 3. С. 51-59.
121. Козлов М. К., Тарасов С. П., Хачиян Л. Г. Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования. *Доклады АН СССР*. 248. № 5. 1979. С. 1049-1051.
122. Stetsyuk Petro. Circumscribed 2d-ellipsoid and Shor's r -algorithm. *OPTIMA 2014. Petrovac, Montenegro. September 28 – Oktober 4*. Режим доступа: <http://incyb.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/07/stetsyuk-03-10-2014.pdf>
123. Канторович Л. В., Михалевич В. С., Рубинштейн Г. Ш., Третьяков Н. В., Шор Н. З., Якимец В. Н. XI Международный симпозиум по математическому

- программированию. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1983. №1. С. 197-201.
124. Стецюк П. И., Петрухин В. А., Бугров Н. В., Хрипко К. Ю. Метод эллипсоидов и условно-оптимальный маршрут. *Міжнародна конференція «Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку»*. 12-13 вересня. м. Київ. Інститут кібернетики. Режим доступу: <http://incyb.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/07/stetsyukpetrukhin-13-09-2013.pdf>
125. Стецюк П.И., Березовський О. А., Журбенко М. Г., Кропотов Д. О. Методи негладкої оптимізації в спеціальних задачах класифікації. *Препринт*. НАН України. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова; 2009-1. 29с.
126. Березовский О. А., Стецюк П. И. Задачи безусловной негладкой оптимизации для линейного и квадратичного классификаторов с максимальным зазором. *V-а Міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень»*. Ужгород. 27 вересня – 1 жовтня 2010. Праці школи-семінару. С. 15-16.
127. Стецюк П. И., Биля Г. Д., Стовба В. А. Метод эллипсоидов для нахождения L_p -решения системы линейных уравнений. *VIII Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки»*. 16-18 березня 2016р. Полтава. Режим доступу: <http://incyb.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/07/stetsyuk-15-03-2017.pdf>
128. Стецюк П. И., Стовба В. О. Метод еліпсоїдів для лінійної регресії. *IV Міжнародна науково-практична конференція «Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи) –2017»*. м. Київ, 16–18 травня 2017 року). Режим доступу: <http://incyb.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/07/stovba-17-05-2017.pdf>
129. Гусев С. В., Шишкин С. Л., Алгоритм делящихся эллипсоидов – метод решения систем невыпуклых неравенств. *Автоматика и телемеханика*. 1999. Вып. 7. С. 25–33.
130. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Москва: Мир, 1982. 304 с.

131. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. Москва: Мир, 1989. 478 с.
132. Рубльов Б. В., Петунін Ю. І., Милейко Ю. Ю. Геометричні властивості еліпса мінімальної площі та деякі суміжні питання. Київ: Київський університет. 2000. 74с.
133. Danzer L., Laugwitz D., Hanfried L. Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. Archiv der Mathematik (Basel). 1957. Vol. 8. Nr. 3. S. 214-219.
134. Рубльов Б. В. Алгоритм побудови еліпсоїда мінімального об'єму. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 1998. № 1(83). С. 105-107.
135. Рубльов Б. В. Алгоритм побудови еліпсоїда мінімального об'єму *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 1998. № 1(83). С. 105-107.
136. Петунін Ю. І., Рубльов Б. В., Милейко Ю. Ю. Оптимальний алгоритм побудови еліпса мінімальної площі за скінчену кількість кроків. *Вісник Київського університету*. 1998. Вип. 3. С. 87-95.
137. Рублев Б. В., Петунин Ю. И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное число точек. I. Украинский математический журнал. 1998. 50. № 7. С. 980-988.
138. Рублев Б. В., Петунин Ю. И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное число точек. II. Украинский математический журнал. 1998. 50. № 8. С. 1098-1105.
139. Рубльов Б. В. Різні модифікації оптимального алгоритму побудови еліпса мінімальної площі за скінчену кількість кроків *Вісник Київського університету*. 1999. Вип. 1. С. 223-228.
140. Милейко Ю. Ю., Рубльов Б. В. Побудова еліпсоїда мінімального об'єму для елементарних многогранників. *Вісник Київського університету*. 1999. Вип. 3. С. 236-242.

141. Ляшко І. І., Рубльов Б. В. Геометричні властивості еліпсоїда найменшого об'єму в m -вимірному евклідовому просторі. *ДАН України*. 1999. № 9. С. 17-19.
142. Рубльов Б. В., Петунін Ю. І., Милейко Ю. Ю. *Геометричні властивості еліпса мінімальної площі та деякі суміжні питання*. Київ: Київський університет, 2000. 74с.
143. Ляшко С.И., Рублев Б.В. Минимальные эллипсоиды и максимальные симплексы в трехмерном евклидовом пространстве. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 6. С. 65-70.
144. Диго Г. Б., Диго Н. Б. Анализ области работоспособности методом эллипсоидов. *Труды VI Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'07*. Москва. 29 января – 1 февраля 2007г. С. 565-569.
145. Бедринцев А. А., Чепыжов В. В., Описание пространства дизайна с помощью экстремальных эллипсоидов в задачах представления данных. *Информационные процессы*. 2015. Т. 15. № 4. С. 402–413.
146. Бедринцев А. А., Чепыжов В. В., Чернова С. С. Экстремальные эллипсоиды как аппроксиматоры пространства дизайна в задачах предсказательного метамоделирования. *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2015. № 2. С. 35–44.
147. Бедринцев А. А., Чепыжов В. В. Выпуклая оптимизация пространства дизайна в задаче оптимизации крыла самолета. *Информационные процессы*. 2016. Т. 16. № 2. С. 91–102.
148. Schlaepfer F. M., Schweppe F. C. Continuous-time state estimation under disturbances bounded by convex sets. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 1972. V. AC-17. № 2. P. 197-205.
149. Черноусько Ф. Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей при помощи эллипсоидов. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1980. № 3. С. 3-11, № 4. С. 3-11, № 5. С 5-11.

150. Бакан Г. М., Волосов В. В., Калита А. С. Улучшение качества функционирования локальных систем стабилизации АСУ непрерывными технологическими процессами. *Автоматика*. 1986. № 1. С. 76-79.
151. Бакан Г. М., Волосов В. В., Сальников Н. Н. Синтез адаптивной системы управления процессом переработки нефти. К.: Институт кибернетики им. В. М. Глушкова. Препринт АН УССР. 86-16. 1986. 30 с.
152. Бакан Г. М., Волосов В. В., Васильев М. Ю., Сальников Н. Н. Метод проектирования адаптивных систем управления непрерывными технологическими процессами. Препринт АН УССР. 90-45. К.: Институт кибернетики им. В. М. Глушкова. 1990. 29 с.
153. Бакан Г. М., Волосов В. В., Казеев Д. А., Калифкин М. Г., Нижниченко Е. А., Одинцова Е. А., Сальников Н. Н., Сергиенко Н. Д., Сомов В. Е. Способ управления процессом первичной переработки нефти в сложной ректификационной колонне. *Патент РФ № 2040294. Приоритет от 30.07.90. Зарегистрирован в Государственном реестре 25.07.95.*
154. Старосельский Є. М., Рудько Г.І. Закономірності формування та розподіл родовищ вуглеводнів (на прикладі вуглеводневого потенціалу палеозойських басейнів світу). Київ – Чернівці: Букрек, 2012. 328 с.
155. Нафтогазоносність імпактних структур України / І. Д. Багрій та ін.; за ред. І. Д. Багрія. Київ – Чернівці: Букрек, 2018. 504 с.
156. Миргаязов И.И., Абдуллин А. И. Современные методы получения синтез-газа и процесс Фишера-Тропша. *Вестник Казанского технологического университета*. 2014. Т. 17. № 9. С. 258-261.
157. Беркман Б. Е. Промышленный синтез ароматических нитросоединений и аминов. Москва: Химия, 1964. 344 с.
158. Fiorio G., Malan S., Milanese M., Vicino A. Guaranteed specification control design of inertial platforms for a high accuracy calibration device. *Proceeding of the 29-th Conference on Decision and Control*. Honolulu. Hawaii. December. 1990. TP-2 – 5:30. P. 2062-2066.

159. Мелешко В.В. Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка. Киев: Корнійчук, 1999. 126 с.
160. Инерциальная навигация. Анализ и проектирование / К. Ф. О'Доннел и др.; под ред. К. Ф. О'Доннела. Москва: Наука, 1969. 592с.
161. Сальников Н. Н., Губарев В. Ф., Мельничук С. В. Применение модифицированного эллипсоидального фильтра в комплексированной бесплатформенной инерциальной навигационной системе. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 2. С. 87-102.
162. Veres S. M., Rokitianski D. Ya., Gabriel S. B. Ellipsoid method for formation flying control of two nano-sattelites. *Proceeding of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*. September 18-20. 2002. Glasgow. Scotland. U.K. P. 298-303.
163. Волосов В. В. Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния. *Проблемы управления и информатики*. 1998. № 5. С. 31-41.
164. Ефименко Н. В., Новиков А. К. Регуляризованные эллипсоидальные наблюдатели и их применение в задаче определения ориентации космического аппарата. *Проблемы управления и информатики*. 1998. № 6. С. 145-155.
165. Волосов В. В., Куценко И. А., Попадинец В. И. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Ч. I. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 1. С. 101-116.
166. Волосов В. В., Куценко И. А., Попадинец В. И. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Ч. II. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 3. С. 109-116.
167. Ефименко Н. В. Магнитная система ориентации и стабилизации космического аппарата «Egypatsat-1». *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 6. С. 91-96.

168. Волосов В. В., Хлебников М. В., Шевченко В. Н. Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения. *Проблемы управления и информатики*. 2011. № 2. С. 114-121.
169. Волосов В. В., Куценко И. А., Селиванов Ю. А. Разработка и исследование робастных алгоритмов эллипсоидального оценивания инерционных характеристик космического аппарата, управляемого силовыми гироскопами. *Проблемы управления и информатики*. 2005. № 4. С. 124-139.
170. Хьюбер П. Робастность в статистике. 1984. М.: Мир. 304с.
171. Vox G. E. P. Non-normality and test of variances. *Biometrika*. 1953. Vol. 40. № 3-4. P. 318-355.
172. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы. Доклады АН СССР. 1937. Т. 34. № 5. С. 247-250.
173. Faedo S. Un nuovo problema di stabilita per le equazioni algebriche a coefficienti reali. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e serie*. Tome 7, n^o 1-2 (1953), p. 53-63.
174. Харитонов В. Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086-2088.
175. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука. 2002. 303с.
176. Ларин В. Б., Науменко К. И. О субоптимальной фильтрации в задачах определения ориентации твердого тела. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1987. № 1. С. 32-41.
177. Волосов В. В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления. *Проблемы управления и информатики*. 1996. № 4. С. 37-53.
178. Moore R. E. Interval analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966. 159 pp.

179. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360с.
180. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 468с.
181. Кузовков Н. Т., Карабанов С. В., Салычев О. С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
182. Небылов А. В. Гарантирование точности управления. М.: Наука. Физматлит, 1998. 304 с.
183. Хлебников М. В., Поляк Б. Т., Кунцевич В. М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов). *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 11. С. 9-59.
184. Уланов Г. М. Регулирование по возмущению (компенсация возмущений и инвариантность). М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960. 110 с.
185. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению. *Автоматика и телемеханика*. 2005. № 5. С. 7-46.
186. Кунцевич В. М., Пшеничный Б. Н. Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 1. С. 74–81.
187. Bertsekas D. P., Rhodes I. B. Recursive State Estimation for a Set-Membership. Description of Uncertainty. *IEEE Transaction Automation Control*. 1971. V. AC-16. № 2. P. 117-128.
188. Blanchini F., Miani S. Set-Theoretic Methods in Control. Birkhauser. 2008. 494p.
189. Воронов А. А., Матросов В. А., ред. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М.: Наука, 1987. 312 с.
190. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM. 1994. 193p.

191. Ben-Tal A., Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization. Philadelphia: SIAM. 2001. 504p.
192. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 281 с.
193. Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов, Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 106–125.
194. Железнов К. О., Хлебников М. В. Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения. Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 4. С. 115-121.
195. Ким Ю. В., Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н. Сравнение стохастического и гарантированного подходов к оцениванию состояния динамических систем. *Известия РАН. Серия: Техническая кибернетика*. 1992. № 2. С. 87-94.
196. Овсеевич А. И., Шматков А. М. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 1997. № 4. С. 11-16.
197. Шматков А. М. Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределённости для динамической системы с возмущениями, ограниченными по величине. *Доклады РАН*. 2006. Т. 411. № 4. С. 460-463.
198. Шматков А. М. Оценивание фазового состояния динамической системы при неточно заданных границах возмущений. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2011. № 4. С. 66-72.
199. Шматков А. М. Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2011. № 5. С. 33-40.
200. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука. 1971. 97 с.
201. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.
202. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 558 с.

203. Волосов В. В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем. *Автоматика*. 1991. № 3. С. 24-32.
204. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение. 1976. 184 с.
205. Мелешко В. В. Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка. К.: Корнейчук. 1999. 126 с.
206. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I. М.: Наука, 1982. Изд. 4-е, перер. и доп.. 616 с.
207. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
208. Абрамович М., Стиган И., ред. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
209. Лебедев Д. В., Ткаченко А. И. Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов. К.: Наукова думка, 2006. 300 с.
210. Мубаракшин Р. В. Комплексное наведение летательных аппаратов и отделяемых средств. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
211. Брайсон А., Ю-ши Х. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
212. Справочное пособие по небесной механике и астродинамике / В. К. Абалкин и др.; под. ред. В. К. Абалкина. Изд. 2-е. М.: Наука, 1971. 600 с.
213. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
214. Егоров С. Н. Об использовании уравнений динамики при синтезе алгоритмов определения ориентации. *Космические исследования*. 1992. Т.30. Вып. 1. С. 38-44.
215. Беленький А. Д., Васильев В. Н., Семенов М. Е. Исследование динамики ориентации и стабилизации по курсу космического аппарата «Метеор-М» при использовании информации инфракрасной вертикали и датчиков угловой скорости. *Вопросы электромеханики*. Т.107. 2008. С. 38-45.

216. Гандлевский Ю. М., Михайлов Е. Н., Мосолова Ю. С., Рабовский А. Е. Оценка точности инфракрасных построителей местной вертикали по результатам лётных испытаний. *Вопросы электромеханики*. 2014. Т.141. С. 31-38.
217. Розрахунок і проектування гіростабілізаторів. Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Гіроскопічні системи стабілізації та орієнтації»/ Укладачі: О. І. Нестеренко, А. В. Шевчук. К. КПІ, 2003. 76 с.
218. Лазарев Ю. Ф. MATLAB 6.5. Математическое моделирование физических процессов и технических систем: Учебный курс. К.: Политехника, 2004. 474 с.

ДОДАТОК А.

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ОЦІНЮВАННЯ КУРСОВОГО КУТА ШТУЧНОГО СУПУТНИКА В ЙОГО РУСІ ПО ОРБІТІ

```
clear all;clc;

p=[90;60;90;0;0;0];
J_p=[p(1),0,0;0,p(2),0;0,0,p(3)];
x_real=[0;0;0;-0.2;0.2;0.1];
J_real=[p(1)+x_real(1),p(4)+x_real(4),p(5)+x_real(5);
p(4)+x_real(4),p(2)+x_real(2),p(6)+x_real(6);
p(5)+x_real(5),p(6)+x_real(6),p(3)+x_real(3)];
mju=398600.4;
R=6878;
w_earth=-sqrt(mju/R^3);
W_ors=[0;0;w_earth];

%Dля керування (4.5):
alfa=5;
K=10*eye(3);
mju_W=1;

% Для керування (4.6):
%-----
% alfa=0.05;
% K=1*eye(3);
% mju_W=0.11;

inv_tau=0.18;
L_S=[1;0;0;0];

f0=6;
```

```

b(1)=10^(-4);b(2)=10^(-4);b(3)=10^(-4);
b=[b(1);b(2);b(3)];
bet(1)=0;bet(2)=pi/4;bet(3)=pi/2;
bet=[bet(1);bet(2);bet(3)];
r2d=360/(2*pi);
r2m=r2d*60;
r2s=r2m*60;
s2r=1/r2s;
d2r=(2*pi)/360;
t0=0;
t_end=round(2*pi/-w_earth)+1;
dt_Control=2;
N=t_end/dt_Control;

drift_PIG=s2r*72;% 11;0.36;2.2;
Err_IRV=s2r*60;% 60;
c=Err_IRV;
dt_Control_DUS_Z_Y=round(abs(20*Err_IRV/w_earth));
Eulers_Angles_0_XYZ=d2r*[0;0;0];
phi_0=Eulers_Angles_0_XYZ(1)+unifrnd(-Err_IRV,Err_IRV);
psi_0=Eulers_Angles_0_XYZ(2)+unifrnd(-Err_IRV,Err_IRV);
teta_0=Eulers_Angles_0_XYZ(3)+unifrnd(-Err_IRV,Err_IRV);
L_0_true=angle2quat(phi_0,psi_0,teta_0,'XYZ');
L_0_GO_IRV=angle2quat(0,0,0,'XYZ');
n=2;
h=[1;0];
H=[(3*Err_IRV)^2 0;0 (3*Err_IRV)^2];
x0=[phi_0;psi_0];
d=drift_PIG*dt_Control;
Q=2*d^2*eye(n);

```

```

L=[1 0;0 1];%][0;1];
Delta_W_DUS=s2r*drift_PIG*[1;1;1];%unifrnd(-drift_PIG,drift_PIG,[3,1]);
W_0_DUS=[0;0;w_earth];
W_0_true=W_0_DUS+Delta_W_DUS;
G_0=0.1*[1;1;1];
LWG_sensor=[L_0_GO_IRV;W_0_DUS;G_0];
LWG_0_true=[L_0_true;W_0_true;G_0];
T_all(1)=t0;
Relev_Error=odeset('RelTol',(2e-12));
j=1;
while j<=N
    Time=[dt_Control*(j-1) dt_Control*j];
[T,LWG]=ode15s(@All_Data_Sattelite_GO_IRV_Orientation,Time,LWG_0_true,Relev_
Error,...
    LWG_sensor,alfa,J_real,J_p,W_ors,K,mju_W,inv_tau,L_S,dt_Control,f0,b,bet);
    Interval_bevor=length(T_all);
    Interval_after=length(T);
    T_all(Interval_bevor:(Interval_bevor+Interval_after-1))=T;
LWG_true_all(Interval_bevor:(Interval_bevor+Interval_after-1),:)=LWG;

LWG_sensor_all(Interval_bevor:(Interval_bevor+Interval_after-
1),:)=repmat(LWG_sensor',length(T),1);

[phi,psi,teta]=quat2angle(LWG(end,1:4),'XYZ');%Эйлеровы углы крена, рысканья и
тангажа
    x=[phi;psi];
    Err_IRV_rand=unifrnd(-Err_IRV,Err_IRV);
    y=h'*x+Err_IRV_rand;
    A=[0 -W_0_DUS(3);W_0_DUS(3) 0];
    Hsys=exp(A*dt_Control)*H*exp(A*dt_Control)';

```

```

k2=trace(Q)/trace(Hsys);
% k2=d^2/trace(Hsys);
k=abs(sqrt(k2));
Hattset=(1+k)/k*Q+(1+k)*Hsys;
% Hattset=(1+k)/k*L*L'*d^2+(1+k)*Hsys;
H=Hattset;
e2=h'*H*h;
e=sqrt(e2);
ev2=h'*H*H*h/(e2*trace(H));
X2=c^2/e2;
X=sqrt(X2);
x_est=exp(A*dt_Control)*x0;
delta=y-h'*x_est;
s2=delta^2/e2;
s=sqrt(s2);
tau=1-X2/(ev2+s2);
if tau<0
tau=0;
end
gamma2=1+tau*(X2/(1-tau)-s2);
if gamma2*(1-tau*ev2)>=1
x_est_next=x_est;
H_est=H;
else
x_est_next=x_est+tau*H*h*delta/e2;
H_est=gamma2*(H-tau*H*h*h'*H/e2);
end
H=H_est;

x0=x_est_next;%

```

```

L_GO_IRV=(angle2quat(phi+Err_IRV_rand,x0(2),teta+Err_IRV_rand,'XYZ'))';
W_0_DUS=LWG(end,5:7)+Delta_W_DUS;
LWG_sensor=[L_GO_IRV;W_0_DUS;LWG(end,8:10)'];
LWG_0_true=LWG(end,:);

```

```

j=j+1;
end

```

```

All_Discrete=length(T_all);
KM_J_real(1:3,:)=J_real*(LWG_true_all(:,5:7))';
KM_G(:,:)=LWG_true_all(:,8:10);
KM_Sum=KM_J_real'+KM_G;
N_KM=zeros(All_Discrete,1);
for i=1:All_Discrete;
    N_KM(i)=sqrt((KM_Sum(i,1))^2+(KM_Sum(i,2))^2+(KM_Sum(i,3))^2);
end

```

```

Quaternion_true_all=LWG_true_all(:,1:4);
[Phi_all,Psi_all,Tetta_all]=quat2angle(Quaternion_true_all,'XYZ');
Quaternion_sensor_all=LWG_sensor_all(:,1:4);
[Phi_sens_all,Psi_sens_all,Tetta_sens_all]=quat2angle(Quaternion_sensor_all,'XYZ');

```

```

figure(1);
plot(T_all,Phi_all,T_all,Psi_all,T_all,Tetta_all);grid on

```

```

figure(2);
plot(T_all,LWG_true_all(:,5),T_all,LWG_true_all(:,6),T_all,LWG_true_all(:,7));grid on

```

```

figure(3);

```

```
plot(T_all,KM_G(:,1),T_all,KM_G(:,2),T_all,KM_G(:,3),T_all,N_KM);grid on
```

```
function F1=All_Data_Sattelite_GO_IRV_Orientation(T,LWG,LWG_sensor,...
alfa,J_real,J_p,. W_ors,K,mju_W,inv_tau,L_S,dt_Control,f0,b,bet)
```

```
inv_Jreal=inv(J_real);
```

```
inv_Jp=inv(J_p);
```

```
L0=LWG(1);
```

```
L1=LWG(2);
```

```
L2=LWG(3);
```

```
L3=LWG(4);
```

```
L_im=[L1;L2;L3];
```

```
L=[L0;L_im];
```

```
L_alt=[0 -L(4) L(3);L(4) 0 -L(2);-L(3) L(2) 0];
```

```
L_S_alt=[0 -L_S(4) L_S(3);L_S(4) 0 -L_S(2);-L_S(3) L_S(2) 0];
```

```
B_L=[-L_im';L0*eye(3)+L_alt];
```

```
B_L_S=[-L_S(2:4)';L_S(1)*eye(3)+L_S_alt];
```

```
C_L=[-L_im';L0*eye(3)-L_alt];
```

```
S_L=eye(3)-2*(L0*L_alt+L_alt^2);
```

```
W_S=S_L*W_ors;
```

```
W1=LWG(5);W2=LWG(6);W3=LWG(7);
```

```
=[W1;W2;W3];
```

```
W_alt=[0 -W3 W2;W3 0 -W1;-W2 W1 0];
```

```
G1=LWG(8);G2=LWG(9);G3=LWG(10);
```

```
G=[G1;G2;G3];
```

LWG=[L;W;G];

L_GO_IRV_0=LWG_sensor(1);

L_GO_IRV_1=LWG_sensor(2);L_GO_IRV_2=LWG_sensor(3);...

L_GO_IRV_3=LWG_sensor(4);

L_GO_IRV_im=[L_GO_IRV_1;L_GO_IRV_2;L_GO_IRV_3];

L_GO_IRV=[L_GO_IRV_0;L_GO_IRV_im];

L_GO_IRV_alt=[0 -L_GO_IRV(4) L_GO_IRV(3);...

L_GO_IRV(4) 0 -L_GO_IRV(2);-L_GO_IRV(3) L_GO_IRV(2) 0];

B_L_GO_IRV=[-L_GO_IRV_im';L_GO_IRV_0*eye(3)+L_GO_IRV_alt];

B_L_S_GO_IRV=B_L_S;

C_L_GO_IRV=[-L_GO_IRV_im';L_GO_IRV_0*eye(3)-L_GO_IRV_alt];

S_L_GO_IRV=eye(3)-2*(L_GO_IRV_0*L_GO_IRV_alt+L_GO_IRV_alt^2);

W_S_GO_IRV=S_L_GO_IRV*W_ors;

W1_DUS=LWG_sensor(5);W2_DUS=LWG_sensor(6);W3_DUS=LWG_sensor(7);

W_DUS=[W1_DUS;W2_DUS;W3_DUS];

W_DUS_alt=[0 -W3_DUS W2_DUS;W3_DUS 0 -W1_DUS;-W2_DUS W1_DUS 0];

% Керування (4.5) по справжньому стану

% $M_c = \alpha * B_L * L_S * \text{sign}(L_S * L) - K * (W - W_S) + mju_W * W_alt * J_p * W$;

% Керування (4.6) по справжньому стану

% $W_c = W_S + B_L * L_S$;

% $M_c = -inv_tau * J_real * ((W - W_c) + mju_W * 0.5 * (W - W_c) * dt_Control) + ...$

% $J_real * (-W_alt * W_S - 0.5 * B_L * S' * B_L * (W - W_S))$;

% Керування (4.5) за вимірюваннями і оцінюванням

```
M_c=alfa*B_L_GO_IRV*L_S*sign(L_S*L_GO_IRV)-K*(W_DUS-...
W_S_GO_IRV)+mju_W*W_DUS_alt*J_p*W_DUS;
```

% Керування (4.6) за вимірюваннями і оцінюванням

```
% W_c_sensor=W_S_GO_IRV+B_L_GO_IRV*L_S;
%M_c=-inv_tau*J_p*((W_DUS-W_c_sensor)+mju_W*0.5*(W_DUS-
% W_c_sensor)*dt_Control)+ J_p*(-W_DUS_alt*W_S_GO_IRV...
% -0.5*B_L_S_GO_IRV*B_L_GO_IRV*(W_DUS-W_S_GO_IRV));
```

```
M_p=b.*sin(f0*T+bet);
```

```
F1=[0.5*(B_L*W-C_L*W_ors);inv_Jreal*((-W_alt)*J_real*W+M_c+M_p);...
-M_c-W_alt*G];
```

ДОДАТОК Б.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К задаче гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы, *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2005. № 4. С. 44-51. (Особистий внесок – доведено твердження щодо оптимальних значень параметрів, які мінімізують еліпсоїд, що апроксимує множину досяжності лінійної керованої системи, яка є сумою за Мінковським початкового еліпсоїду стану і відрізка – множини зовнішнього збурення. Також здобувачем розроблено математичну та комп'ютерну моделі цієї апроксимації та проведено комп'ютерне моделювання для порівняння з уже відомим способом апроксимації).
2. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 1. С. 16-25. (журнал індексується наукометричною базою SCOPUS). (Особистий внесок – доведено лему про покриття перетину еліпсоїду і «гіпершару»).
3. Шолохов А. В. Субоптимальная аппроксимация суммы эллипсоидов и пересечения эллипсоида с гиперслоем. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 3. С. 78-87.
4. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. О связи параметров множества возможных состояний наблюдаемой системы с параметрами измерительного устройства и размерностью пространства состояний системы. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. № 4. С. 96-103. (журнал індексується наукометричними базами DOAJ, Index Copernicus, EBSCO, Google Scholar, РІНЦ, ВІНІТІ, українським реферативним журналом «Джерело», українською реферативною базою даних «Україніка наукова», науковою періодикою України). (Особистий внесок – висунуто і доведено теорему про інформативність вимірювань; проведено порівняння різних методів статичного еліпсоїдального оцінювання).

5. Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. №1. С.96-105. (журнал індексується наукометричною базою SCOPUS) |DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10559-019-00114-x> (Особистий внесок – вирішено задачу оцінювання за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду множинної оцінки по скалярним вимірюванням: висунуто та доведено твердження про еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів апріорного еліпсоїду стану системи та множини зовнішнього збурення, – за критерієм мінімуму сліду матриці еліпсоїду оцінки; запропоновано та доведено лему про апроксимацію перетину еліпсоїду множини досяжності системи і множини вимірювання стану системи; проведено моделювання розробленого методу оцінювання на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі).
6. Oleksii V. Sholokhov. Investigation and simulating of algorithm of building of set of attainability of linear controlled system. 2007. *4th IEEE Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. IDAACS 2007* | conference-paper | (труди конференції індексуються наукометричною базою SCOPUS) DOI: [10.1109/IDAACS.2007.4488439](https://doi.org/10.1109/IDAACS.2007.4488439) EID: 2-s2.0-50149093918.
7. Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы: Школа-семинар для молодых ученых: «Научные космические исследования». 7-13 вересня 2006р., м. Євпаторія.
8. Бакан Г. М., Шолохов А. В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы: XXV научно-техническая конференция памяти Н.Н.Острякова. 10-12 октября 2006г, г. Санкт-Петербург, Россия.

9. Шолохов А. В. Исследование эллипсоидальной аппроксимации пересечения эллипсоида с гиперслоем по критерию минимума объема: Міжнародна науково-технічна конференція: «Інтелектуальні системи прийняття рішень і прикладні аспекти інформаційних технологій» (ISDMIT'2007). 15-18 травня 2007р., м. Євпаторія.

10. Шолохов А. В. Оценивание параметров ориентации космического аппарата и погрешностей датчиков системы ориентации алгоритмом эллипсоидального гарантированного оценивания: 1-а Всеукраїнська науково-технічна конференція «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 11-12 грудня 2014р., м. Харків.

11. Шолохов А. В. Ориентация микроспутника с помощью робастного алгоритма эллипсоидального оценивания: 15-та Українська конференція з космічних досліджень. 24-28 серпня 2015р., м. Одеса.

Панкратова Н. Д., Шолохов А. В. Разработка робастного алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания и его применение для ориентации искусственного спутника Земли: 2-а Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування України», 06-07 грудня 2018р., м. Харків.

ДОДАТОК В.

АКТ І ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ



ДЕРЖАВНЕ КОСМІЧНЕ АГЕНТСТВО УКРАЇНИ
КАЗЕННЕ ПІДПРИЄМСТВО
СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЛАДОБУДУВАННЯ «АРСЕНАЛ»
КП СПБ «АРСЕНАЛ»

вул. Московська, 8, м. Київ, Україна, 01010; тел./факс (044) 288-94-29, тел. 253-00-62

E-mail: info@arsenalcdb.com.ua

Код ЄДРПОУ 14307357

25.04.2018 № 717/70-12/2

на № _____ від _____

Акт впровадження результатів дисертаційної роботи Шолохова О.В.

Даним актом підтверджується, що науково-технічні результати за дослідженнями начальника групи 222 НТК-2 Казенного підприємства спеціального приладобудування «Арсенал» (КП СПБ «Арсенал») Державного космічного агентства України Шолохова Олексія Вікторовича, які увійшли до його дисертаційної роботи: «Робастне гарантоване еліпсоїдальне оцінювання станів лінійних керованих систем за скалярним спостерігачем», представлені до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, впроваджені у розробці виробів КП СПБ «Арсенал» та сприяють підвищенню технічних і експлуатаційних характеристик цих виробів. До таких результатів слід віднести методику оцінювання стану технічних виробів в процесі їх налаштування, яке здійснюється з допомогою робастного алгоритму гарантованого еліпсоїдального оцінювання при умові, що деякі змінні стану цих виробів безпосередньо не можуть вимірюватися,

Цей акт не є документом для фінансових розрахунків

Директор-Головний конструктор КП СПБ «Арсенал»,
д.т.н., член-кор. НАНУ



М.І. Лихоліт
М.І. Лихоліт

Начальник НТК-2 - Головний конструктор напрямку,
д.т.н.

С.І. Черняк
С.І. Черняк



Д о в і д к а

про впровадження результатів
виконання кандидатської дисертаційної роботи
Шолохова Олексія Вікторовича

Довідка видана Шолохову Олексію Вікторовичу у тому, що результати виконання його дисертаційної роботи, а саме:

- метод оцінювання станів лінійних систем в умовах нестатистично заданої невизначеності;

- метод короткострокового прогнозування нестационарних процесів;
використовуються на кафедрі математичних методів системного аналізу (ММСА) Інституту прикладного системного аналізу (ІПСА) Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» в навчальному процесі при викладанні навчальних дисциплін «Аналіз часових рядів», «Прогнозування в економічній та фінансовій сферах», а також при виконанні магістерських робіт студентів спеціальностей 8.04030301 «Системний аналіз і управління» та 8.04030302 «Системи і методи прийняття рішень».

Заст. директора ІПСА,
д.т.н., професор

професор кафедри ММСА ІПСА
д.т.н., професор



В. Д. Романенко

П. І. Бідюк