МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. Л. Селіванов, О. А. Верба, М. Д. Васильєва

МЕТОДИКА ТА ОПТИМІЗАЦІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Комп'ютерні системи та мережі»
спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія»,

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 519.23, 004.67

С

Автори: *Селіванов Віктор Левович*, канд. техн. наук, доц.
Верба Олександр Андрійович, канд. техн. наук
Васильєва Марія Давидівна

Рецензент *Дичка І. А.*, д-р техн. наук, проф., декан факультету прикладної математики, науковий керівник кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Кулаков Ю. О.,* д-р. техн. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол ***№ 6 від 28.03.2024 р****.)*
за поданням Вченої ради факультету інформатики та обчислювальної техніки
(протокол ***№ 9 від 25.03.2024 р****.)*

Селіванов В. Л.
Методика та оптимізація наукових досліджень. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. освітньої програми «Комп'ютерні системи та мережі» за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія» / В. Л. Селіванов, О. А Верба, М. Д. Васильєва; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 155 с.

Навчальний посібник призначено для вивчення методики та оптимізації наукових досліджень, що є частиною дисципліни «Методика та організація наукових досліджень», та використання для підготовки студентів за освітньою програмою «Комп'ютерні системи та мережі» спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія» та для інших спеціальностей і освітніх програм з галузей знань 11 «Математика та статистика» та 12 «Інформаційні технології». Розглядаються методи наукових досліджень та методи перетворення та відображення в комп'ютерних системах. Список літератури.

УДК 519.23, 004.67

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг 6,4 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056 https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. Л. Селіванов, О. А. Верба, М. Д. Васильєва, 2024
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

ЗМІСТ

ВСТУП……5
ГЛАВА 1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ……...6
І. Методи емпіричного рівня наукових досліджень…….6
ІІ. Методи, що використовуються на емпіричному і на теоретичному рівні наукового дослідження……..9
Факторне моделювання..... 10
Апріорне моделювання 11
Фізичне моделювання……...13
Математичне моделювання..... 14
Математичне моделювання на основі аналогій……..16
Електромеханічна аналогія……..16
Електрогідродинамічна аналогія……26
Електротеплова аналогія……..27
Електродифузійна аналогія……..27
Математичне моделювання з використанням операційних блоків……...28
Імітаційне моделювання……34
ІІІ. Методи теоретичного рівня наукових досліджень……...35
ГЛАВА 2 ВИНАХІДНИЦЬКА ТА ТВОРЧА ДІЯЛЬНІСТЬ ……..39
І. Системний підхід до творчості……39
ІІ. Винахідницька та творча діяльність дослідників…….....41
ГЛАВА 3 КРИТЕРІЇ ВИБОРУ ТЕМИ ТА ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ …….....48
І. Розподіл науково-дослідної роботи на окремі етапи……48
ІІ. Створення резервів часу……..65
ІІІ. Фіксація ходу дослідження та забезпечення реєстрації отриманої інформації…….....65
ГЛАВА 4 МЕТОДИ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В КОМПЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ……...66
1.Методи підбору……66
1.1. Метод ручного підбору……..66
1.2. Метод примусового опитування дійсної осі……..67
1.3. Метод примусового опитування часової осі……..69
1.4. Метод примусового опитування комплексної площини……70
1.5. Метод порозрядного зрівноваження……...72
1.6. Метод мінімізації……...74
1.7. Метод простої ітерації……....77
1.8. Метод ітерації по Гаусу-Зейделю……...78
1.9. Метод неявних функцій (автоматичного підбору)……..78

1.10. Метод штучної оборотності……....83
2.Методи еквівалентних перетворень……...85
2.1. Метод тотожних перетворень……..86
2.2. Метод еквівалентного переходу до іншої системи координат……86
2.3. Метод зміщення нуля з наступним корегуванням……...87
2.4. Метод еквівалентного перетворення систем лінійних алгебраїчних рівнянь……..88
2.5. Методи еквівалентних перетвореннь диференційних рівнянь……..89
3. Приблизні методи……100
Методи апроксимації функцій……..100
Кусково-лінійна апроксимація……...103
Виконання кусково-лінійної апроксимації……104
Аналітична форма запису ламаної лінії……109
Геометричне трактування аналітичної форми запису ламаної лінії……113
4. Квазіаналогові методи……115
4*.1. Метод рішення визначаючого рівняння*……...115
4.2. Метод дослідження визначаючого рівняння……...120
4.3. Метод дослідження еквівалентного рівняння……123
ДОДАТОК А
Кодування та декодування інформації в комп'ютерних системах……125
Системи числення……....125
Кодування біполярної інформації в комп'ютерних системах…….....132
ДОДАТОК В
Контрольна робота №1 …….....138
ДОДАТОК С
Контрольна робота №2 …….....143
ДОДАТОК D
Домашня контрольна робота ……148
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА……..155

ВСТУП

Дисципліна «Методика та організація наукових досліджень» є вибірковою дисципліною підготовки фахівців ступеня бакалавр за освітньою програмою «Комп'ютерні системи та мережі» спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія» та для інших спеціальностей і освітніх програм з галузей знань 11«Математика та статистик» та 12 «Інформаційні технології». Розділ «Методика та оптимізація наукових досліджень» призначений для вивчення методів наукових досліджень і методів перетворення та відображення, що використовуються в комп'ютерній інженерії, інженерії програмного забезпеченні, інформаційних системах і технологіях. Дисципліна вивчається на четвертому курсі, тому вважається, що студенти засвоїли курси «Вища математика», «Алгоритми та методи обчислень», «Програмування», «Теорія ймовірності та математична статистика».

ГЛАВА 1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

В кожному науковому дослідженні можемо виділити два рівня дослідження:

1. **Емпіричний рівень**, на якому йде процес отримання і накопичення інформації.
2. **Теоретичний рівень**, на якому йде обробка інформації та досягається сінтез знань у вигляді наукових припущень, формування гіпотез та наукової теорії.

Згідно з цими рівнями усі загальні методи наукових досліджень (методи пізнання) можемо умовно розділити на три групи:

1. Методи, що використовуються виключно на емпіричному рівні наукового дослідження.
2. Методи, що використовуються і на емпіричному і на теоретичному рівні наукового дослідження (універсальні методи).
3. Методи, що використовуються тільки на теоретичному рівні наукового дослідження.

I. Методи емпіричного рівня наукових досліджень

Методи, що використовуються виключно на емпіричному рівні наукового дослідження:

1.**Спостереження.**
2.**Порівняння**.
3.**Вимірювання**.
4.**Експеримент**.

Спостереження – це систематичне цілеспрямоване сприйняття об’єкту (схеми, системи, процесу, явища тощо).

Щоб бути плідним, спостереження повинно задовольняти наступним вимогам:

а) умисності, тобто спостереження проводиться для визначеної, чітко поставленої задачі;

b) планомірності (плановості), тобто виконуватися по плану, який укладено згідно завдань спостереження;
c) цілеспрямованості, тобто спостереження ведеться тільки стосовно тих сторін (властивостей) об'єкту (схеми, системи, процесу тощо), які цікавлять дослідника;
d) активності, тобто дослідник активно шукає необхідні об'єкту (схемі, системі, процесу, явищу тощо) сторін (властивості);
e) систематичність, тобто спостереження проводиться безперервно, або по визначеній системі.

Спостереження, як метод пізнання, дозволяє отримати первісну інформацію у вигляді сукупності емпіричних тверджень, що дозволяє зробити первісну схематизацію об'єктів дійсності (схем, систем, процесів, явищ тощо).

Порівняння – це процес встановлення схожості (подібності) або різниці (відмінності) у предметів або явищ дійсності, а також знаходження (виявлення) спільного для двох або для більшої кількості об'єктів дійсності (схем, систем, процесів, явищ тощо).

Щоб бути плідним, порівняння повинно задовольняти наступним вимогам:

a) порівнянню підлягають лише ті об'єкти (схеми, системи, процеси, явища тощо) дійсності, між якими може існувати певна об'єктивна спільність;
b) порівняння повинно здійснюватися по найбільш суттєвим та важливим ознакам з точки зору конкретного дослідження.

Слід зазначити, що порівняння об'єктів (схем, систем, процесів, явищ тощо) може здійснюватися безпосередньо або опосередковано, шляхом порівняння їх з якимось третім об'єктом (схемою, системою, процесом, явищем тощо), який вважається еталоном.

В першому випадку (при безпосередньому порівнянні) отримують якісні показники (вище або нижче; більше або менше тощо), а коли здійснюється порів-

няння з еталоном (чи з еталонами) є можливість отримати кількісні показники (тоді це вже узивається **вимірюванням**)

Вимірювання – це процес визначення чисельного значення деякої величини за допомогою одиниці вимірювання.

Вимірювання передбачає наявність наступних основних елементів:

a) об'єкт вимірювання;
b) еталон (набір еталонів);
c) вимірювальний прилад;
d) метод вимірювання.

На практиці використовується або пряме вимірювання, або компенсаційне вимірювання з використанням зовнішнього еталону.

Експеримент – це такий метод вивчення об'єкту (схеми, системи, процесу, явища тощо), коли дослідник активно та цілеспрямовано впливає на нього шляхом створення роблених умов або шляхом використання природних умов, які є необхідними для виявлення шуканих властивостей.

Експерименти проводять в наступних випадках:

a) для виявлення у об'єкта (схеми, системи, процесу, явища тощо) раніш невідомих властивостей;
b) для визначення математичного опису об'єкту (схеми, системи, процесу, явища тощо);
c) для перевірки гіпотези;
d) для демонстрування процесів, явищ, властивостей тощо.

II. Методи, що використовуються і на емпіричному і на теоретичному рівні наукового дослідження

Методи, що використовуються і на емпіричному і на теоретичному рівні наукового дослідження:

1. **Абстрагування**.
2. **Аналіз і синтез**.
3. **Індукція і дедукція**.
4. **Моделювання**.

Абстрагування – це метод наукового пізнання, що полягає в ***мисленому абстрагуванні*** від несуттєвих рис, властивостей, зв'язків, відношень і сторін предмету дослідження, з одного боку, і ***в мисленому виділенні*** декількох суттєвих, найістотніших рис, властивостей, зв'язків, відношень і сторін предмету дослідження, що цікавлять дослідника, з іншого боку.

По суті, метод абстрагування полягає в тому, що один об'єкт замінюється іншим об'єктом, більш простим, який практично є моделлю початкового об'єкту.

Абстрагування може застосовуватися як до реальних об'єктів, так і до абстрактних об'єктів, тобто до результатів попереднього абстрагування.

Абстрагування доволі часто використовується, як окремий специфічний метод, а також застосовується, як складова частина більш складних методів – аналізу, ідеалізації та моделювання.

Аналіз – це метод наукового пізнання, що дозволяє зробити розчленування предмету дослідження на складові частини (природні елементи, сторони, ознаки чи його властивості або відношення).

Приклад аналізу по властивостям: ***реальний ОП розглядається як об'єкт, що складається з трьох частин – ідеальний ОП (абсолютно стабільний) плюс два джерела дрейфу нуля, що приведені до входу.***

Синтез – це метод, протилежний аналізу, і змістом якого є об'єднання окремих частин предмету дослідження в єдине ціле.

Індукція – це такий умовивід, коли висновок стосовно властивостей множини робиться на підставі знань властивостей окремих елементів (або підмножин) множини.

Дедукція – це це такий умовивід, коли висновок стосовно властивостей окремих елементів (або підмножин) множини робиться на підставі знань властивостей усієї множини.

Моделювання - це науковий метод вивчення досліджуємого об'єкту (схеми, системи, процесу, явища тощо), який грунтується на використанні моделі в якості засобу для з'ясування його властивостей.

Модель – це інший об'єкт (схема, система, процес, явище тощо), яка є замісником досліджуємого об'єкту, який узивається оригіналом.

Різновиди моделювання:

1. Факторне моделювання.
2. Апріорне моделювання (методи експертних оцінок, мозковий штурм тощо).
3. Фізичне моделювання (найпростіший приклад – геометрична подібність.
4. Математичне моделювання.

Факторне моделювання

Факторна модель – це первинна модель, що використовується на перших (базисних) етапах вивчення об'єкту (схеми, системи, процесу, явища тощо), і яка показує зв'язки вхідних та вихідної залежних змінних об'єкту.

Факторне моделювання – перший етап моделювання, який може бути виконаний на основі апріорної інформації. Факторне моделювання здебільше застосо-

вується в теорії автоматичного керування для вивчення і аналізу об'єкту керування і використовує прийом типу «чорний ящик».

Апріорне моделювання

В баєсовому статистичному висновуванні апріорний розподіл ймовірності, що частіше називають «апріорне», деяка невизначена кількість - це розподіл ймовірності, що виражатиме чиєсь переконання про цю кількість перед врахуванням якогось свідчення. Теорема Баєса (чи формула Баєса) – одна з основних теорем елементарної теорії ймовірності, яка дозволяє визначити ймовірність при умові, що трапилась інша, статистично залежна від нього подія. Кажучи по іншому, формула Баєса дозволяє точніше перерахувати ймовірність, узявши до розрахунку як раніш відому ймовірність, так і нові данні спостережень. Теорема Баєса застосовується шляхом множення апріорного на функцію правдоподібності з наступним нормуванням для отримання апостеріорного розподілу ймовірності, що є умовним розподілом цієї невизначеної кількості з урахуванням отриманих даних.

Апріорне моделювання – один з основних методів науково-технічного прогнозування, який базується на припущенні, що на основі думки експертів можливо збудувати адекватну модель майбутнього розвитку об'єкту прогнозування або обрати оптимальне рішення проблеми.

Експертні оцінки – це якісні оцінки, засновані на інформації некількісного характеру, які можуть бути отримані від експертів. Експертні оцінки повинні бути незалежними, транзистивними та адаптивними.

Експерт – це особа (група осіб, науковий підрозділ, наукова лабораторія тощо), яку долучають для отримання деяких свідчень чи оцінок стосовно проблеми (об'єкту, схеми, системи, процесу, явища тощо), що розглядається. Це висококваліфікований фахівець (спільнота висококваліфікованих фахівців), що покладається (покладаються) на свої знання, досвід, інтуїцію і вміння оцінюва-

ти складні явища (проблеми тощо) і здатний (здатні) створити власну обгрунтовану інтуїтивну модель явища (проблеми тощо), шо розглядається, і стосовно якої є уся необхідна інформація.

Експертне оцінювання відноситься до інструментарію оцінки якості альтернатив в умовах слабоформалізованої проблемної ситуації, суть якого – в логіко-інтуїтивному аналізі та розробці альтернатив і кількісному оцінюванні їх якості. Узагальнена оцінка експертів і є підставою для здійснення вибору. При цьому експерти виступають як «вимірювальні прилади», що дозволяють визначити їх відносну похибку (розкид суджень) та оцінювання, обробка яких дозволяє отримати необхідний результат.

Апріорне моделювання застосовується тоді, коли відсутні кількісні оцінки для визначення та обрання оптимальних рішень. Одним із таких методів апріор-ного моделювання є **метод експертних оцінок** та його різновиди, одним із яких є метод комісії.

Метод комісії передбачає проведення групою експертів дискусії для вироблення загальної думки щодо проблеми, що розглядається.

Метод групової експертизи передбачає попереднє колективне обговорення, після чого кожен експерт заповнює анкету зі своєю експертною оцінкою.

Метод Делфі (дельфійський метод) – це модифікація методу групової експертизи, в якому не передбачено колективних обговорень, а застосовується послідовно здійснювані індивідуальн**і** анкетні опитування у вигляді таблиць кількісної експертної оцінки. Після першого опитування здійснюється статистична обробка результатів опитування і до відома експертів доводяться ці результати: медіана та розмах інтервалу між крайніми квартилями (інтервал, що вміщує 50% усіх відповідей і розташований між 25% найвищих оцінок та 25% найнижчих оцінок). Після цього експертам пропонується переглянути (уточнити) свої оцінки, а тим експертам, чиї оцінки знаходяться за межами зазначеного інтервалу між крайніми квартилями, пропонується надати додаткові обгрунтування для своїх оцінок. Цю процедуру повторюють кілька разів, поки не досягнуть збіжності всіх висловлених думок.

Існує ще **метод мозкового штурму (мозкової атаки)**. Для реалізації цього методу обирається група експертів в кількості 6-10 осіб (груп осіб), серед яких повинно бути одна чи дві, які не знайомі з проблемою, що розглядається. Метод мозкового штурму передбачає проведення двох попередніх етапів. На першому етапі здійснюється вільне висловлювання усіх ідей (без обмежень і чим більше, - тим краще). На другому етапі усі запропоновані ідеї вивчаються і оцінюються висококваліфікованими експертами, після чого обирається найкраща.

Також використовуються і інші різновиди методу експертних оцінок: метод прогнозованого графу, метод Паттерн тощо.

Фізичне моделювання

Фізичне моделювання – це метод моделювання, при якому модель має таку ж саму фізичну природу, як і оригінал, тобто базується на подібності моделі оригіналу. При цьому забезпечується геометрична, фізична та часова подібність. Фізичне моделювання найчастіше застосовується у випадках, коли математичний опис оригіналу (об'єкта, явища, процесу тощо) відсутній, або надскладний і вимагає використання великої кількості даних, отримання яких ускладнено або взагалі неможливо.

Здебільшого фізична модель – це оригінал в іншому масштабі (частіше на все - в зменшеному масштабі). Експериментальні дані, отримані при дослідженні фізичної моделі, розповсюджуються на оригінал з врахуванням критеріїв подібності та певних коефіцієнтів.

Деякі приклади застосування методу фізичного моделювання:

1.Гідродинамічні дослідження гідротехнічних споруд (наприклад фізична модель Асуанської греблі).

2.Гідродинамічні дослідження кораблів.

3.Дослідження обтікання автомобілів та літаків в аеродинамічній трубі.

4.Дослідження сейсмостійкості різноманітних будівельних споруд.

5.Дослідження стійкості складних конструкцій та будівельних споруд під впливом складних силових навантажень.

6.Дослідження теплових потоків і розповсюдження тепла в різних системах.

7.Дослідження течій газів.

8.Вивчення стихійних або пороблених явищ та їх наслідків.

Переваги та позитивна якість фізичного моделювання:

- фізичне моделювання відтворює всі сторони та властивості оригіналу;
- фізичного моделювання надає можливість вивчення оригіналу без складання його математичного опису.
-

Недоліки фізичного моделювання:

- неможливість змінювати параметри моделі (дуже часто доводиться кожного разу виготовляти нову модель);
- іноді дуже велика вартість моделі;
- неможливість застосування методу для дослідження більшості хімічних процесів.

Математичне моделювання

Моделювання – це, як відомо, метод дослідження систем (процесів, явищ або об’єктів) шляхом створення моделей і дослідження цих моделей.

Математичне моделювання є різновидом моделювання, в основу якого покладено ідентичність (співпадіння за формою) математичних описів оригіналу (системи, що досліджується) та обраної моделі і однозначність та сталість співвідношень між змінними оригіналу і моделі. Отже, при математичному моделюванні фізичні процеси в оригіналі відбуваються згідно законам математичного

ізоморфізму, тобто по однаковим фізичним законам, хоча фізична природа процесів може бути різною.

Приклади таких однакових законів:

1.Закон Ома для струму (електрика): **i=G{dψ(t)/dt}**, де **i** - струм, **G** - провідність резистора, **ψ** – потокозчеплення.

2.Перший закон Фіке (дифузія): **J=-D{dC(t)/dx}**, де **J** - дифузійний потік речовини, **D** - коефіцієнт дифузії, **C** – концентрація речовини, що дифундують, **x** – напрямок дифузійного потоку.

3.Закон Фур'є для перенесення тепла: **q=-λ{dT(t)/dx}**, де **q** – тепловий потік, **λ** – коефіцієнт теплопровідності, **T** - температура, **x**- напрямок теплового потоку.

4.Закон Ньютона для руху в'язкої рідини: **F=μS{dW(t)/dx}**, де **F** - сила внутрішнього тертя, **μ** – коефіцієнт в'язкості, **S** - площина, **W** - відносна швидкість, **x**- напрямок руху.

Найчастіше при застосуванні методу математичного моделювання в якості моделі використовуються різноманітні електричні схеми, які побудовані з елементів, двополюсників, чотириполюсників, восьмиполюсників, багатополюсників та навіть з операційних блоків.

Існують три варіанти математичного моделювання:

1. Математичне моделювання на основі аналогій між явищами різної фізичної природи (скорочена назва - **Математичне моделювання на основі аналогій**).

P.S.: Якщо явища однієї фізичної природи - це так звані дуальні явища або дуальні системи.

2. **Математичне моделювання з використанням операційних блоків (ОБ).**

3. Імітаційне моделювання.

Математичне моделювання на основі аналогій

Таким чином досліджуються різноманітні механічні системи (електромеханічні аналогії), акустичні системи (електроакустичні аналогії), теплові процеси (електротеплові аналогії), гідродинамічні системи (електрогідродинамічні аналогії), гідравлічні системи (електрогідравлічні аналогії) тощо.

P.S.: Інколи замість терміну «електромеханічні аналогії» використовується термін «електродинамічні аналогії в механічних системах».

P.P.S.: Критерій гідродинамічної подібності – це критерій Рейнольдса, а критерій теплової подібності – це критерій Нуссельта.

Електромеханічна аналогія

Для розуміння методу математичного моделювання на основі аналогій розглянемо два найпростіших варіанта електромеханічної аналогії, коли механічні системи мають лише одну ступінь вільності (лінійне та кутове переміщення тіла).

Спочатку розглянемо лінійне переміщення тіла, маса якого **m**, є пружина **Пр**, коефіцієнт податливості (еластичності) якої **e**, а коефіцієнт жорсткості **к**, та поверхня **Пв** з коефіцієнтом лінійного опору (коефіцієнтом тертя) **r** (Рис.1). На систему діє узагаль-нена сила **F(t)**, де **t –** незалежна змінна (реальний час).

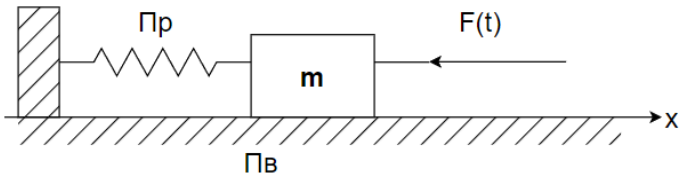

Рис.1

У відповідності з принципом Даламбера (д'Аламбера) рівняння, яке описує динаміку послідовного руху (переміщення) тіла механічної системи з однією ступеню вільності, має вигляд:

$\mathbf{F_m(t)+F_r(t)+F_e(t)-F(t)=0}$, де

$\mathbf{F(t)}$ – сила зовнішнього збудження, що діє в протилежному напрямку; $\mathbf{F_m(t)}$ – сила інерції; $\mathbf{F_r(t)}$ – сила сухого тертя та $\mathbf{F_e(t)}$ – сила жорсткості.

Сила інерції $\mathbf{F_m(t)}$, згідно другому закону Ньютона, змінюється пропорційно похідній від лінійної швидкості руху $\mathbf{\{V(t)\}}$ і дорівнює $\mathbf{m\{dV(t)/dt\}}$, тобто {з врахуванням того, що $\mathbf{V(t)=dx(t)/dt}$} маємо:

$$\mathbf{F_m(t)=m\{d^2x(t)/dt^2\}}.$$

Сила сухого тертя $\mathbf{F_r(t)}$, згідно закону Кулона, змінюється пропорційно лінійній швидкості руху $\mathbf{\{V(t)\}}$ і дорівнює $\mathbf{r\{V(t)\}}$, тобто {з врахуванням формули для $\mathbf{V(t)}$} маємо:

$$\mathbf{F_r(t)=r\{dx(t)/dt\}}.$$

Сила жорсткості $\mathbf{F_e(t)}$, згідно закону Гука, змінюється пропорційно переміщенню $\mathbf{x(t)}$ і дорівнює $\mathbf{\kappa x(t)}$ або $\mathbf{\{1/e\}x(t)}$, тобто

$$\mathbf{F_e(t)=\{1/e\}x(t).}$$

P.S.:

В електромеханічній аналогії завжди використовується друга формула (з $\mathbf{1/e}$).

Таким чином, рівняння $\mathbf{F_m(t)+F_r(t)+F_e(t)-F(t)=0}$, з врахуванням отриманих формул для $\mathbf{F_m(t)}$, $\mathbf{F_r(t)}$ та $\mathbf{F_e(t)}$, має форму неоднорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку:

$$\mathbf{m\{d^2x(t)/dt^2\}+r\{dx(t)/dt\}+\{1/e\}x(t)=F(t)},$$

або спрощено:

$$\mathbf{m\{d^2x/dt^2\}+r\{dx/dt\}+\{1/e\}x=F(t).}$$

Аналогічно, у відповідності з принципом Даламбера (д'Аламбера) рівняння, яке описує динаміку обертального руху тіла механічної системи з однією ступеню вільності, має вигляд:

$\mathbf{M_i(t)+M_r(t)+M_e(t)-M(t)=0}$, де

$\mathbf{M(t)}$ – момент сили зовнішнього збудження, що діє в протилежному напрямку; $\mathbf{M_i(t)}$ – момент сили інерції; $\mathbf{M_r(t)}$ – момент сухого тертя та $\mathbf{M_e(t)}$ – момент жорст-кості.

Момент сили інерції $\mathbf{M_i(t)}$, який, згідно другому закону Ньютона, змінюється пропорційно похідній від кутової швидкості руху і дорівнює $\mathbf{I_\varphi\{d\omega(t)/dt\}}$, тобто {з врахуванням того, що $\mathbf{\omega(t)=d\varphi(t)/dt}$} маємо:

$$\mathbf{M_i(t)=I_\varphi\{d^2\varphi(t)/dt^2\}}.$$

Момент сухого тертя $\mathbf{M_r(t)}$, який, згідно закону Кулона, змінюється пропорційно кутовій швидкості руху $\mathbf{\{\omega(t)\}}$ і дорівнює $\mathbf{r_\varphi\{\omega(t)\}}$ {$\mathbf{r_\varphi}$-коефіцієнт кутового опору}, тобто {з врахуванням формули для $\mathbf{\omega(t)}$} маємо:

$$\mathbf{M_r(t)=r_\varphi\{d\varphi(t)/dt\}}.$$

Момент жорсткості $\mathbf{M_e(t)}$, який, згідно закону Гука, змінюється пропорційно кутовому переміщенню $\mathbf{\varphi(t)}$ і дорівнює $\mathbf{(1/e_\varphi)\varphi(t)}$, тобто

$$\mathbf{M_e(t)=(1/e_\varphi)\varphi(t)}.$$

Таким чином, рівняння $\mathbf{M_i(t)+M_r(t)+M_e(t)-M(t)=0}$, з врахуванням отриманих формул для $\mathbf{M_i(t)}$, $\mathbf{M_r(t)}$ та $\mathbf{M_e(t)}$, теж має форму неоднорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку:

$$\mathbf{I_\varphi\{d^2\varphi(t)/dt^2\}+r_\varphi\{d\varphi\ (t)/dt+(1/e_\varphi)\varphi(t)=M(t)},$$

або спрощено:

$$\mathbf{I_\varphi\{d^2\varphi/dt^2\}+r_\varphi\{d\varphi/dt\}+(1/e_\varphi)\varphi=M(t).}$$

Якщо порівняти математичні описи (в даному випадку це тільки по одному диференційному рівнянню) розглянутих двох механічних систем, тобто диференційне рівняння для послідовного руху $\mathbf{m\{d^2x/dt^2\}+r\{dx/dt\}+\{1/e)x=F(t)}$ та диференційне рівняння для обертального руху

$\mathbf{I_\varphi\{d^2\varphi/dt^2\}+r_\varphi\{d\varphi/dt\}.+(1/e_\varphi)\varphi=M(t)}$, можемо констатувати, що ці математичні описи повністю ідентичні і мають однозначні співвідношення не тільки

між змінними, але і між зовнішніми збудженнями та сталими коефіцієнтами рівнянь.

Таким чином, залежній змінній **x{x(t)}** першого рівняння відповідає залежна змінна **ψ{ψ(t)}** другого рівняння (лінійному переміщенню відповідає кутове переміщення); зовнішньому збудженню **F(t)** першого рівняння також відповідає зовнішнє збудження **M(t)** другого рівняння (діючій силі відповідає діючий момент сили); сталому коефіцієнту **m** (масі) першого рівняння відповідає коефіцієнт **J** (момент інерції) другого рівняння; сталому коефіцієнту **r** першого рівняння відповідає коефіцієнт $\mathbf{r_\psi}$ другого рівняння; сталому коефіцієнту **e** першого рівняння відповідає коефіцієнт $\mathbf{e_\psi}$ другого рівняння. Слід зазначити, що незалежна змінна **t** (реальний час) одна. Отже можемо умовно вважати, що перша система є оригіналом, а друга – моделлю при математичному моделюванні; однак, враховуючи що обидві системи однієї фізичної природи, ці системи є дуальними.

Математичне моделювання передбачає сталість співвідношень між змінними і зовнішніми збудженнями оригіналу, з одного боку, та відповідними змінними і зовнішніми збудженнями моделі, з другого боку. Сталість співвідношень забезпечується сталістю масштабних коефіцієнтів (масштабів), які пов'язують між собою змінні та сталі збудження оригіналу зі змінними та сталими збудженнями моделі. Таким чином, для цих двох механічних систем маємо наступні масштабні співвідношення:

$$\mathbf{x=M_x\psi}\ (\mathbf{M_x=const}),\ \text{а}\ \mathbf{F(t)=M_F M(t)}\ (\mathbf{M_F=const}).$$

Значення параметрів моделі необхідно розрахувати таким чином, щоб була забезпечена тотожність обох математичних описів (оригіналу та моделі). Для цього необхідно спочатку обидва математичних описи привести до спільних змінних та спільних зовнішніх збуджень шляхом заміни змінних та зовнішніх збуджень оригіналу на відповідні змінні та зовнішні збудження моделі з врахуванням масштабів (або навпаки), а потім дорівняти відповідні коефіцієнти.

Для прикладу, що розглядається, після замін **x** на $\mathbf{M_x\varphi}$ та **F(t)** на $\mathbf{M_F M(t)}$ в першому рівнянні $\mathbf{m\{d^2x/dt^2\}+r\{dx/dt\}+(1/e)x=F(t)}$ та деяких перетворень (винесення сталих значень з під знаку диференціалу та перенесення $\mathbf{M_F}$ з правої частини рівняння до лівої), отримаємо:

$$\mathbf{\{(M_x/M_F)m\}\{d^2\varphi/dt^2\}+\{(M_x/M_F)r\}\{d\varphi/dt\}+\{(M_x/M_F)(1/e)\}\varphi=M(t)}.$$

Якщо дорівняти коефіцієнти рівняння

$\mathbf{I_\varphi\{d^2\varphi/dt^2\}+r_\varphi\{d\varphi/dt\}+(1/e_\varphi)\varphi=M(t)}$ до відповідних коефіцієнтів щойно отриманого рівняння, одержимо наступні формули для розрахунку $\mathbf{I_\varphi}$, $\mathbf{r_\varphi}$ та $\mathbf{e_\varphi}$:

$$\mathbf{I_\varphi=(M_x/M_F)m},\ \mathbf{r_\varphi=(M_x/M_F)r} \text{ та } \mathbf{e_\varphi=(M_F/M_x)e}.$$

Обравши значення масштабів $\mathbf{M_x}$ та $\mathbf{M_F}$ можемо для відомих значень **m**, **r** та **e** вирахувати такі значення $\mathbf{I_\varphi}$, $\mathbf{r_\varphi}$ та $\mathbf{e_\varphi}$, при яких забезпечується тотожність оригіналу та моделі.

P.S.: Наведений приклад розрахунку параметрів моделі суто теоретичний, тому що на практиці не використовуються моделі, які мають однакову фізичну природу з оригіналом.

Тепер розглянемо дві пасивні електричні схеми з паралельним з'єднанням елементів: конденсатора, ємність якого **C**, елемент «провідність», провідність якого **G** та котушка індуктивності, індуктивність якої **L** (Рис.2а); та послідовним з'єднанням елементів: котушка індуктивності, індуктивність якої **L**, резистор, опір якого **R** та конденсатор, ємність якого **C** (Рис.2б).

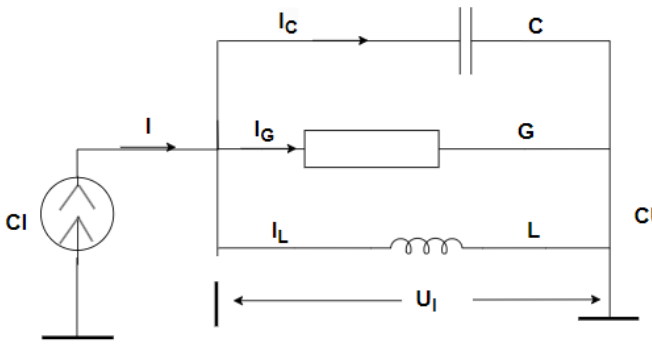

Рис.2а

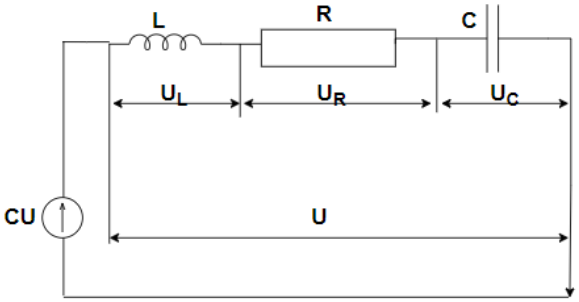

Рис.2б

Позначення на схемах: **CI** – джерело струму, **I** – вихідний струм джерела струму, $\mathbf{I_C}$ – струм, що проходить крізь конденсатор, $\mathbf{I_G}$ – струм, що прохо-дить крізь провідність, $\mathbf{I_L}$ – струм, що проходить крізь котушку індуктивності, $\mathbf{U_I}$ - вихідна напруга джерела струму; **CU** – джерело напруги, **U** – вихідна на-пруга джерела напруги, $\mathbf{U_L}$ – спал напруги на індуктивному опорі **L**, $\mathbf{U_R}$ – спал напруги на активному опорі **R**, $\mathbf{U_C}$ – спал напруги на ємносному опорі **C**, $\mathbf{I_U}$ - вихідний струм джерела напруги.

Згідно з першим правилом Кирхгофа (алгебраїчна сума усіх струмів у вузлі дорівнює нулю) для схеми рис.1а маємо наступне рівняння:

$$\mathbf{I(t)+\{-I_C(t)\}+\{-I_G(t)\}+\{-I_L(t)\}=0}.$$

P.S.: В науковій літературі правила Кірхгофа інколи помилково називають законами Кірхгофа.

Відповідно до закона ємності Вольта $\mathbf{q(t)=CU_C(t)}$, де **q** – заряд конденсатора, і враховуючи, що $\mathbf{I(t)=dq(t)/dt}$ {для будь-якого струму, у тому числі і для $\mathbf{I_C(t)}$ і для $\mathbf{I_G(t)}$}, а $\mathbf{U(t)=d\psi(t)/dt}$, де **ψ**- потокозчеплення, {для будь-якої напруги, у тому числі для $\mathbf{U_L(t)}$ і для $\mathbf{U_R(t)}$}, отримуємо наступну формулу для струму $\mathbf{I_C(t)}$:

$$\underline{\mathbf{I_C}}\mathbf{(t)=dq(t)/dt=CdU_C(t)/dt=}\underline{\mathbf{Cd^2\psi(t)/dt^2}}.$$

Відповідно до закона Ома $\mathbf{I(t)=U_R(t)/R}$, а $\mathbf{G=1/R}$, $\mathbf{I(t)=I_G(t)}$ і $\mathbf{U_R(t)=d\psi(t)/dt}$, отримуємо наступну формулу для струму $\mathbf{I_G(t)}$:

$$\underline{\mathbf{I_G=Gd\psi(t)/dt}}.$$

Відповідно до закона Фарадея $\mathbf{U_L(t)=LdI_L(t)/dt}$, тобто $\mathbf{I_L(t)=\{1/L\}\int U_L(t)dt}$ а для $\mathbf{U_L(t)=d\psi(t)/dt}$, отримуємо наступну формулу для струму $\mathbf{I_L(t)}$:

$$\mathbf{I_L(t)=}\underline{\mathbf{\{1/L\}\psi(t)}}.$$

Таким чином, рівняння $\mathbf{I(t)+\{-I_C(t)\}+\{-I_G(t)\}+\{-I_L(t)\}=0}$, з врахуванням отриманих формул для $\underline{\mathbf{I_C}}\mathbf{(t)}$, $\mathbf{I_G(t)}$ та $\mathbf{I_L(t)}$, має форму неоднорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку:

$$\mathbf{C\{d^2\psi(t)/dt^2\}+G\{d\psi(t)/dt\}+\{1/L\}\psi(t)=I(t)},$$

або спрощено: $$C\{d^2\psi/dt^2\}+G\{d\psi/dt\}+\{1/L\}\psi=I(t).$$

Увага: Практично у всій науковій та методичній літературі при розгляді моделювання на основі аналогій між явищами різної фізичної природи чомусь вважається що незалежною змінною в моделі (електричній системі) також є реальний час t, а не машинний час τ, тобто моделювання нібито обов'язково повинно виконуватися в реальному часі: $M_\tau=1$ і $\tau=t$ ($t=M_\tau\tau$). Але обрання будь-якого іншого масштабу часу ніяк не впливає на схему моделі, а лише позначається на розрахунку параметрів моделі, що дозоляє прискорити моделювання, обравши $M_\tau>1$ ($\tau<t$), або сповільнити, обравши $M_\tau<1$ ($\tau>t$).

Враховуючи вищезазначене, в моделях будемо використовувати в якості незалежної змінної машинний час **τ**. При цьому рівняння для вже розглянутої моделі має наступний вигляд:

$$C\{d^2\psi/d\tau^2\}+G\{d\psi/d\tau\}+\{1/L\}\psi=I(\tau).$$

Як ми зазначали раніше, значення параметрів моделі необхідно розраховувати таким чином, щоб була забезпечена тотожність обох математичних описів (оригіналу та моделі). В якості оригіналу візьмемо першу механічну систему, а в якості моделі – розглянуту схему рис.2а.

P.S.: Цей варіант електромеханічної аналогії, яку вперше запропонували вчені Хенле і Файерстоун, має назву «вузлова електромеханічна аналогія».

В цьому варіанті рівняння оригіналу

$$m\{d^2x/dt^2\}+ r\{dx/dt\}+\{1/e\}x=F(t),$$

а рівняння моделі

$$C\{d^2\psi/d\tau^2\}+G\{d\psi/d\tau\}+\{1/L\}\psi=I(\tau).$$

Після проведення замін в рівнянні оригіналу змінних та зовнішнього збудження оригіналу на відповідні змінні та зовнішнє збудження моделі з врахуван-

ням масштабів [x замінюємо на $M_x\psi$, t - на $M_\tau\tau$ та $F(t)$ - на $M_F I(\tau)$] та деяких перетворень цього рівняння отримаємо наступне рівняння оригіналу в машинних змінних:

$$\{[M_x/(M_F M_\tau^2)]m\}\{d^2\psi/d\tau^2\}+\{[M_x/(M_F M_\tau)]r\}\{d\psi/d\tau\}+\{(M_x/M_F)(1/e)\}\psi=I(\tau).$$

Якщо дорівняти коефіцієнти рівняння моделі до відповідних коефіцієнтів цього отриманого рівняння, одержимо наступні формули для розрахунку значень C, G та L:

$$C=[M_x/(M_F M_\tau^2)]m,\quad G=[M_x/(M_F M_\tau)]r \text{ та } L=(M_F/M_x)e,$$

а зовнішнє збудження моделі розраховується по формулі $I(\tau)=F(t)/M_F$ з врахуванням того, що $t=M_\tau\tau$. Обравши значення масштабів M_x, M_F та M_τ, можемо для відомих значень m, r та e розрахувати такі значення C, G, L та $I(\tau)$, при яких забезпечується тотожність рівнянь оригіналу та моделі.

P.S.: Якщо $M_\tau=1$, тоді $C=(M_x/(M_F)m$, $G=(M_x/M_F)r$, $L=(M_F/M_x)e$ та $I(\tau)=F(t)/M_F$.

P.P.S.: Аналогічно можемо обрати в якості оригіналу і другу механічну систему.

Згідно з другим правилом Кирхгофа (сума падінь напруг на окремих ділянках кола дорівнює ЕРС джерела напруги) для схеми рис.2б маємо наступне рівняння:

$$U_L(t)+U_R(t)+U_C(t)=U(t).$$

Відповідно до закона Фарадея $U_L(t)=LdI_L(t)/dt$, а $I_L(t)=dq(t)/dt$, і отримуємо наступну формулу для напруги $U_L(t)$:

$$U_L(t)=\underline{L(d^2q(t)/dt^2)}.$$

Відповідно до закона Ома $U_R(t)=RI(t)$, а $I(t)=dq(t)/dt$, і отримуємо наступну формулу для напруги $U_R(t)$:

$$U_R(t)=\underline{R(dq(t)/dt)}.$$

Відповідно до закона ємності Вольта $q(t)=CU_C(t)$, і отримуємо наступну формулу для напруги $U_C(t)$:

$$U_C(t)=\underline{\{1/C\}q(t).}$$

Отже, рівняння $U_L(t)+U_R(t)+U_C(t)=U(t)$, з врахуванням формул для напруг, теж має форму неоднорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку:

$$L\{d^2q(t)/dt^2\}+R\{dq(t)/dt\}+\{1/C\}q(t)=U(t),$$

чи $$L\{d^2q\ /dt^2\}+R\{dq/dt\}+\{1/C\}q=U(t).$$

Як і в попередній моделі, будемо використовувати в якості незалежної змін-ної машинний час τ. Тоді рівняння для вже розглянутої моделі має наступний вигляд: $$L\{d^2q\ /d\tau^2\}+R\{dq/d\tau\}+\{1/C\}q=U(\tau).$$

Дві розглянуті електричні схеми мають ідентичні математичні описи, але залежні змінні $\underline{\{}\psi$ та $q\}$ та зовнішні збудження $\underline{\{}I(t)$ та $U(\tau)\}$ різні. Оскільки ці схеми однієї фізичної природи – це дуальні кола. Слід зазначити, що існує розроблена методика побудови для однієї електричної схеми будь-якої складності відповідної дуальної схеми.

Як ми зазначали раніше, значення параметрів моделі необхідно розраховувати таким чином, щоб була забезпечена тотожність обох математичних описів (оригіналу та моделі). В якості оригіналу візьмемо першу механічну систему, а в якості моделі – розглянуту схему рис.2б. В цьому варіанті рівняння оригіналу

$$m\{d^2x/dt^2\}+r\{dx/dt\}+\{1/e\}x=F(t),$$

а рівняння моделі

$$L\{d^2q\ /d\tau^2\}+R\{dq/d\tau\}+\{1/C\}q=U(\tau).$$

Після замін в рівнянні оригіналу $m\{d^2x/dt^2\}+r\{dx/dt\}+(1/e)x=F(t)$ змінних та зовнішнього збудження оригіналу на відповідні змінні та зовнішнє збудження моделі з врахуванням масштабів $[x$ замінюємо на M_xq, t - на $M_\tau\tau$ та $F(t)$ - на $M_FU(\tau)]$ та деяких перетворень цього рівняння маємо наступне рівняння оригіналу в машинних змінних:

$$\{[M_x/(M_FM_\tau^2)]m\}\{d^2q/d\tau^2\}+\{[M_x/(M_FM_\tau)]r\}\{dq/d\tau\}+$$
$$+\{(M_x/M_F)(1/e)\}q=U(\tau)$$

Якщо дорівняти коефіцієнти рівняння моделі до відповідних коефіцієнтів цього отриманого рівняння, одержимо наступні формули для розрахунку значень **L**, **R** та **C**: $L=[M_x/(M_F M_\tau^2)]m$, $R=[M_x/(M_F M_\tau)]r$ та $C=(M_F/M_x)e$ з врахуванням того, що $t=M_\tau\tau$, а зовнішнє збудження моделі розраховується за формулою: $U(\tau)=F(t)/M_F$.

Обравши значення масштабів M_x, M_F та M_τ можемо для відомих значень **m**, **r** та **e** вирахувати по наданим формулам такі значення **L**, **R**, **C** та $U(\tau)$, при яких забезпечується тотожність оригіналу та моделі.

P.S.: Якщо $M_\tau=1$, тоді $L=(M_x/(M_F)m$, $R=(M_x/(M_F)r$, $C=(M_F/M_x)e$ та $U(\tau)=F(t)/M_F$.

В таблиці 1 наведено електромеханічну аналогію для двох варіантів оригіналу (механічних систем) та для двох можливих моделей (електричні системи). В цій таблиці представлені усі залежні змінні, параметри та характеристики систем.

P.S.: Для змінної прискорення a (або a_φ) аналог в електричних системах відсутній, бо це швидкість зміни струму (напруги).

Таблиця 1. **Електромеханічна аналогія**

Механічні системи (оригінали)				Електричні системи (моделі)			
Лінійне переміщення		*Кутове переміщення*		*Контурна аналогія*		Вузлова аналогія	
Сила	F	Момент сили	M	Напруга	U	Струм	I
Лінійне переміщення	x	Кутову переміщення	φ	Заряд	q	Потокозчеплення	ψ
Реальний час t				Машинний час τ			
Маса тіла	m	Момент інерції	J	Індуктивність	L	Ємність	C
Коефіцієнт еластичності пружини	e	Момент еластичності пружини	M_e	Ємність	C	Індуктивність	L
Коефіцієнт тертя	r	Момент сухого тертя	M_r	Опір	R	Провідність	G
Лінійна швидкість руху	$v=\frac{dx}{dt}$	Кутова швидкість руху	$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$	Струм	$I=\frac{dq}{d\tau}$	Напруга	$U=\frac{d\psi}{d\tau}$
Прискорення	$a=\frac{dv}{dt}$	Кутове прискорення	$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$	----		----	
Потужність	P=Fv	Потужність	P=Mω	Потужність, шо розсіюється на резисторі	P=UI	Потужність, що розсіюється на провідності	P=IU
Робота	A=Pt	Робота	A=Pt	Витрати електроенергії	$W_p=P\tau$	Витрати електроенергії	$W_p=P\tau$
Кінетична енергія	$E_k=0.5mv^2$	Кінетична енергія	$E_k=0.5J\omega^2$	Енергія магнітного поля	$W=0.5LI^2$	Енергія електричного поля	$W_e=0.5CU^2$
Потенціальна енергія	$E_p=xe/2$	Потенціальна енергія	$E_p=\varphi^2/2M_e$	Енергія електричного поля	$W_e=q^2/2C$	Енергія магнітного поля	$W=\psi^2/2L$
Період вільних коливань	$T=2\pi\sqrt{me}$	Період вільних коливань	$T=2\pi\sqrt{JMe}$	Період вільних електромагнітних коливань	$T=2\pi\sqrt{LC}$	Період вільних електромагнітних коливань	$T=2\pi\sqrt{CL}$
Хвильовий опір	$\rho=\sqrt{\frac{m}{e}}$	Хвильовий опір	$\rho=\sqrt{\frac{J}{Me}}$	Хвильовий опір кола	$\rho=\sqrt{\frac{L}{c}}$	Хвильовий опір кола	$\rho=\sqrt{\frac{c}{L}}$

Для більш складних механічних систем з однією степеню вільності розроблено електричні аналоги механічних вузлів, які є чотириполюсниками.

Електромеханічна аналогія є найбільш поширеною серед інших аналогій і найбільш науково розробленою, оскільки існує велика кількість різноманітних складних механічних систем з кількістю степенів вільності від двох до шести, що досліджуються.

Так, для більш складних механічних систем з однією степеню вільності розроблено електричні аналоги механічних вузлів, які є пасивними чотириполюсниками, або чотириполюсниками з використанням операційних підсилювачів.

Для дослідження вигіну стержневих механічних систем з різними граничними умовами розроблено електричні аналоги механічних вузлів, які є восьмиполюсниками.

Електрогідродинамічна аналогія

При використанні електрогідродинамічної аналогії оригіналом може бути напірна течія нестисливої чи стисливої рідини або кровообіг, а в якості моделі використовується злектрична система. В таблиці 2 наведено електрогідродинамічну аналогію для двох можливих моделей – контурна та вузлова аналогії.

Таблиця 2. **Електрогідродинамічна аналогія**

Гідродинамічна система (оригінал)	**Електричні системи** (моделі)	
	Контурна аналогія	***Вузлова аналогія***
Тиск (Напруга стиску) **P**	Напруга **U**	Струм **i**
Об'єм рідини **Q**	Заряд **q**	Потокозчеплення **ψ**
Реальний час **t**	Машинний час **τ**	Машинний час **τ**
Інерційність **M**	Індуктивність **L=ψ/i**	Ємність **C=q/U**
Гідравлічна ємність $\mathbf{C_г=Q/P}$	Ємність **C=q/U**	Індуктивність **L=ψ/i**
Гідравлічний опір $\mathbf{R_г=P/G}$	Опір **R=U/i**	Провідність **G=i/U**
Витрата рідини **G=dQ/dt**	Струм **i=dq/dτ**	Напруга **U=dψ/dτ**

Електротеплова аналогія

При використанні електротеплової аналогії оригіналом є теплова система, а в якості моделі використовується електрична система. В таблиці 3 наведено електротеплову аналогію для двох можливих моделей – контурна та вузлова аналогії.

Таблиця 3. **Електротеплова аналогія**

Теплова система (оригінал)	**Електричні системи** (моделі)	
	Контурна аналогія	***Вузлова аналогія***
Температура **T**	Напруга **U**	Струм **i**
Кількість тепла **Q**	Заряд **q**	Потокозчеплення **ψ**
Реальний час **t**	Машинний час **τ**	Машинний час **τ**
Теплоємність $C_T=Q/T$	Ємність $C=q/U$	Індуктивність $L=\psi/i$
Теплопровідність $k_{T12}=G/T_{12}$ ($T_{12}=T_1-T_2$)	Провідність $G_{12}=i/U_{12}$ ($U_{12}=U_1-U_2$)	Опір $R_{12}= U/i_{12}$ ($i_{12}=i_1-i_2$)
Витрата тепла $G=dQ/dt$	Струм $i=dq/d\tau$	Напруга $U=d\psi/d\tau$

Електродифузійна аналогія

При використанні електродифузійної аналогії оригіналом є дифузійна система, а в якості моделі використовується злектрична система. В таблиці 4 наведено електродифузійну аналогію для двох можливих моделей – контурна та вузлова аналогії.

Таблиця 4. **Електродифузійна аналогія**

Дифузійна система (оригінал)	**Електричні системи** (моделі)	
	Контурна аналогія	***Вузлова аналогія***
Концентрація дифундованої речовини **P**	Напруга **U**	Струм **i**
Кількість дифундованої речовини **Q**	Заряд **q**	Потокозчеплення **ψ**
Реальний час **t**	Машинний час **τ**	Машинний час **τ**
Об'єм речовини **V=Q/P**	Ємність **C=q/U**	Індуктивність **L=ψ/i**
Дифузійна проникність $k_{Д12}=G/T_{12}$ ($T_{12}=T_1-T_2$)	Провідність $G_{12}=i/U_{12}$ ($U_{12}=U_1-U_2$)	Опір $R_{12}= U/i_{12}$ ($i_{12}=i_1-i_2$)
Гідравлічний опір $R_г=P/G$	Опір **R=U/i**	Провідність **G=i/U**
Перенесення дифундованої речовини **G=dQ/dt**	Струм **i=dq/dτ**	Напруга **U=dψ/dτ**

Математичне моделювання з використанням операційних блоків

Перш ніж розглядати математичне моделювання з використанням операційних блоків, необхідно з'ясувати, що таке операційний блок (ОБ).

Операційний блок – це блок, який виконує (моделює) окремі математичні операції або набір математичних операцій схемно (апаратно).

В залежності від типу вхідної (вхідних) та вихідної машинних змінних розрізняють:

1. **Аналогові операційні блоки** (АОБ), в яких усі змінні (вхідні та вихідні) – аналогові.

2. **Цифрові операційні блоки** (ЦОБ), в яких усі змінні (вхідні та вихідні) – цифрові.

3. **Гібридні операційні блоки** (ГОБ), в яких є змінні і аналогові і цифрові.

На рис.3 представлені приклади ЦОБ - арифметичний цифровий суматор та цифровий матричний помножувач, де: символ ∑ - ідентифікатор математичної

операції арифметичного підсумовування; символ **xy** - ідентифікатор математичної операції множення двох змінних; символ **n** означає кількість цифрових розрядів шини; символ # означає «інформація цифрова» або «вхід (вихід) цифровий».

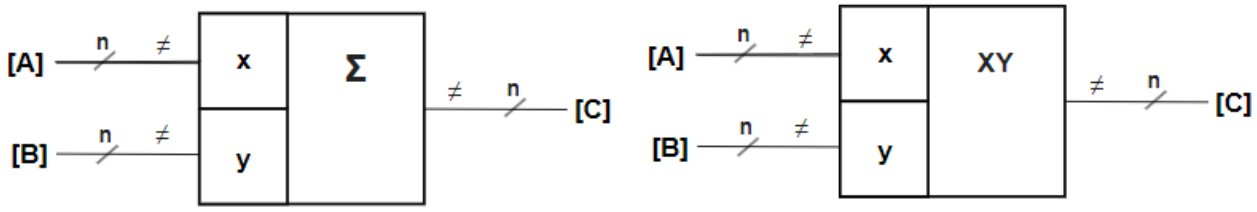

Рис.3

На рис.4 представлені приклади лінійних АОБ – інвертор, аналоговий підсумовуючий ОБ та інтегропідсумовуючий ОБ, де: символ ∑ - ідентифікатор математичної операції алгебричного підсумовування; символ ∫ - ідентифікатор математичної операції інтегрування; символ **I>** означає, що ОБ виконано з використанням операційного підсилювача; символ **Λ** означає «інформація аналогова» або «вхід (вихід) аналоговий»; символ ⊥ означає вхід для встановлення початкової умови; $\mathbf{k_i}$ **(i=1,2)** – коефіцієнт передачі за напругою по **i**-му входу ОБ.

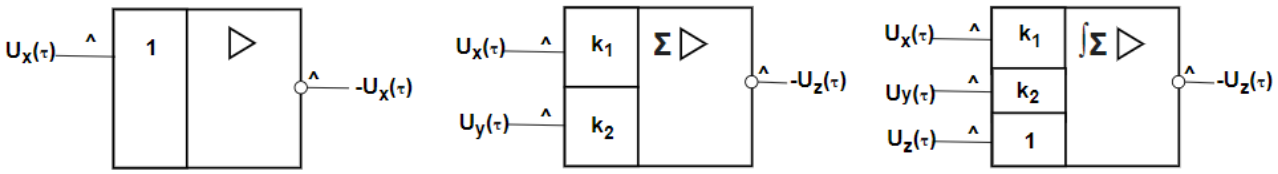

Рис.4

На рис.5 представлені приклади нелінійних АОБ – аналоговий функціональний пе-ретворювач однієї залежної змінної, аналоговий квадратор та аналого-вий помножувач двох залежних змінних, де: символ **φ(x)** - ідентифікатор математичної операції нелінійного (функціонального) перетворення однієї залежної

змінної; символ $\mathbf{x^2}$ – ідентифікатор математичної операції піднесення в квадрат; $\mathbf{k_m}$ – коефіцієнт передачі за напругою помножувача та квадратора.

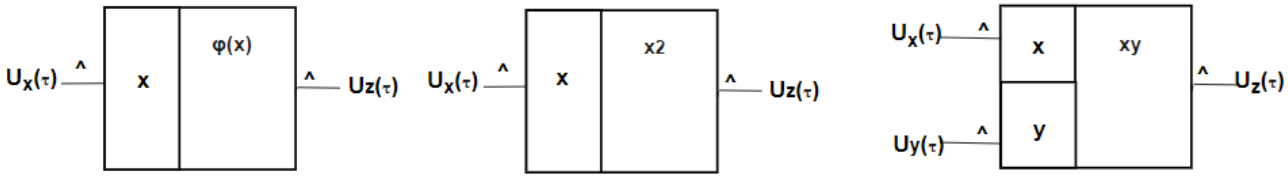

Рис. 5

На рис.6 представлені приклади ГОБ – цифро-аналоговий перетворювач ЦАП (в закордонній літературі – DAC), аналого-цифровий перетворювач та гібридний помножувач двох змінних (множильний ЦАП), де: **#/Λ** (**D/A**) – ідентифікатор математичної операції цифро-аналогового перетворення; **Λ/#** (**A/D**) – ідентифікатор математичної операції аналого-цифрового перетворення.

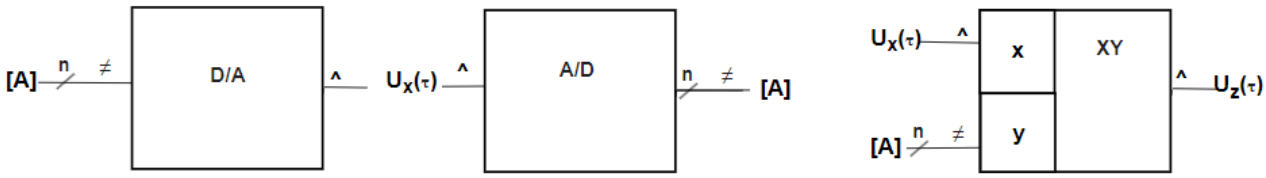

Рис. 6

Математичне моделювання з використанням ОБ – це таке математичне моделювання, при якому в якості моделі використовується схема з операційних блоків.

Розглянемо приклад побудови математичної моделі для випадку, коли деякий оригінал має такий математичний опис: $\mathbf{p^3y+2e^{-t}p^2y-4(py)^2+3siny=f(t)}$ з початковими умовами: $\mathbf{y(0)=C_0}$, $\mathbf{py(0)=C_1}$ та $\mathbf{p^2y(0)=C_2}$.

При будуванні схеми моделі будемо використовувати метод зменшування порядку похідної, згідно з яким рівняння необхідно записати відносно похідної найвищого порядку (для нашого випадку – відносно $\mathbf{p^3y}$):

$$p^3y=--2e^{-t}p^2y+4(py)^2--3siny+f(t).$$

P.S.: При використанні методу збільшення порядку похідної – необхідно рівняння записати відносно y.

Припустимо, що в якійсь точці схеми моделі (*) вже є машинна змінна, яка відповідає математичній змінній (змінній оригіналу) $\mathbf{p^3y}$. Якщо до цієї точки підключити інтегруючий ОБ (ОБ3), забезпечивши відповідні початкові умови $\mathbf{[C_2]}$, на виході цього ОБ3 отримаємо машинну змінну, яка відповідає змінній $\mathbf{p^2y}$. Підключивши до виходу ОБ3 ще один інтегруючий ОБ (ОБ2) і забезпечивши початкові умови $\mathbf{[C_1]}$, на виході цього ОБ2 отримаємо машинну змінну, яка відповідає змінній **py.** Підключивши до виходу ОБ2 ще один інтегруючий ОБ (ОБ1) і забезпечивши початкові умови $\mathbf{[C_0]}$, на виході цього ОБ1 отримаємо машинну змінну, яка відповідає змінній **y**. Відповідний послідовний ланцюг з інтегруючих ОБ представлено на рис.7.

P.S.: Нагадую, що якщо на схемі зазначено математичну змінну, яка знаходиться в квадратних дужках ([ ]), це означає, що в цій точці схеми існує не зазначена математична змінна, а машинна змінна, яка їй відповідає.

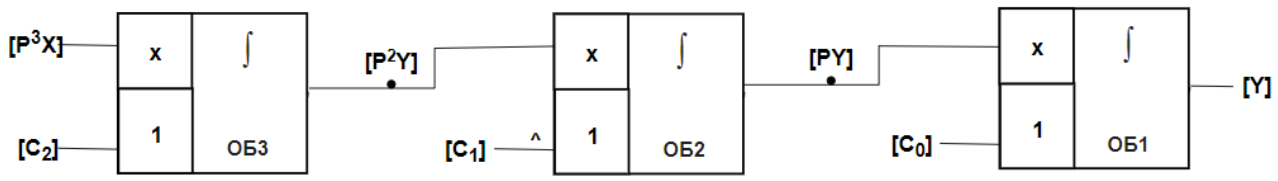

Рис.7

Таким чином, якщо забезпечимо на вході ланцюга (в точці * схеми) дійсне існування машинної змінної, яка відповідає математичній змінній (змінній оригіналу) $\mathbf{p^3y}$**,** то в кінці ланцюга (на виході ОБ1) отримаємо машинну змінну, яка відповідає змінній **y**, тобто отримаємо рішення диференційного рівняння.

Забезпечувати дійсне існування необхідної машинної змінної будемо відповідно до рівняння $\mathbf{p^3y=-2e^{-t}p^2y+4(py)^2-3siny+f(t)}$, використовуючи зворотні зв'язки.

Згідно цього рівняння, остання необхідна операція для отримання $\mathbf{p^3y}$ – це підсумовування чотирьох доданків: **{f(t)}**, **{-3siny}**, **{4(py)²}** та $\mathbf{\{-2e^{-t}p^2y\}}$, тому перед ОБ3 необхідно підключити підсумовуючий ОБ на 4 входи (ОБ4) (Рис.8). Для отримання другого доданку **{-3siny}** використовуємо функціо-нальний перетворювач (ОБ5) (Рис.9). Для отримання третього доданку необ-хідно використати два ОБ: квадратор (ОБ6) та масштабний ОБ (ОБ7) (Рис.10). Для отримання четвертого доданку $\mathbf{\{-2e^{-t}p^2y\}}$, знадобляться три блоки: помно-жувач двох змінних (ОБ8), масштабний ОБ (ОБ9) та інвертор (ОБ10) (Рис.11). Загальна схема моделі - на рис.12.

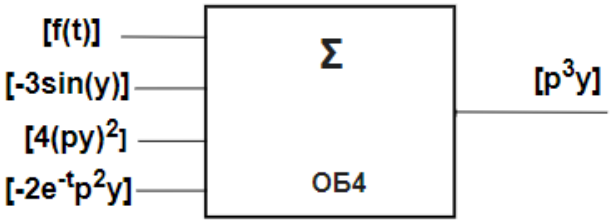

Рис.8

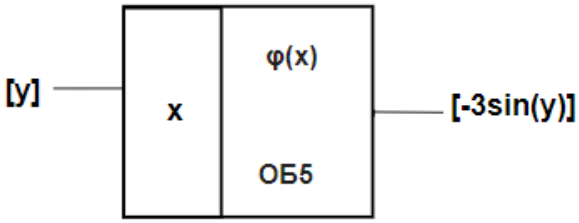

Рис.9

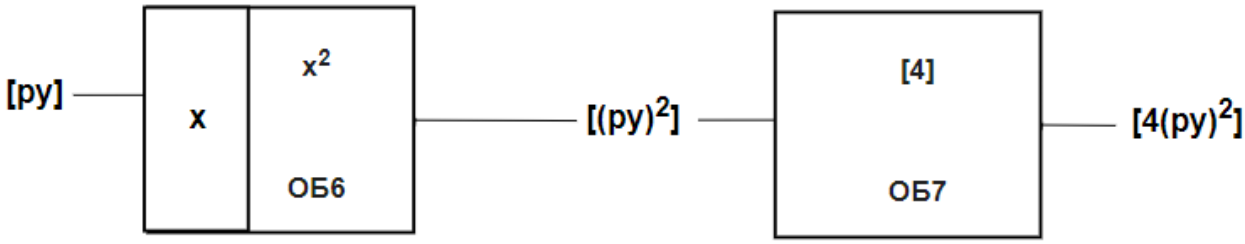

Рис.10

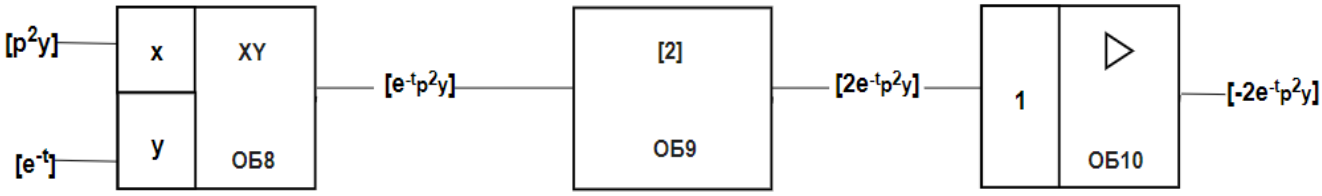

Рис.11

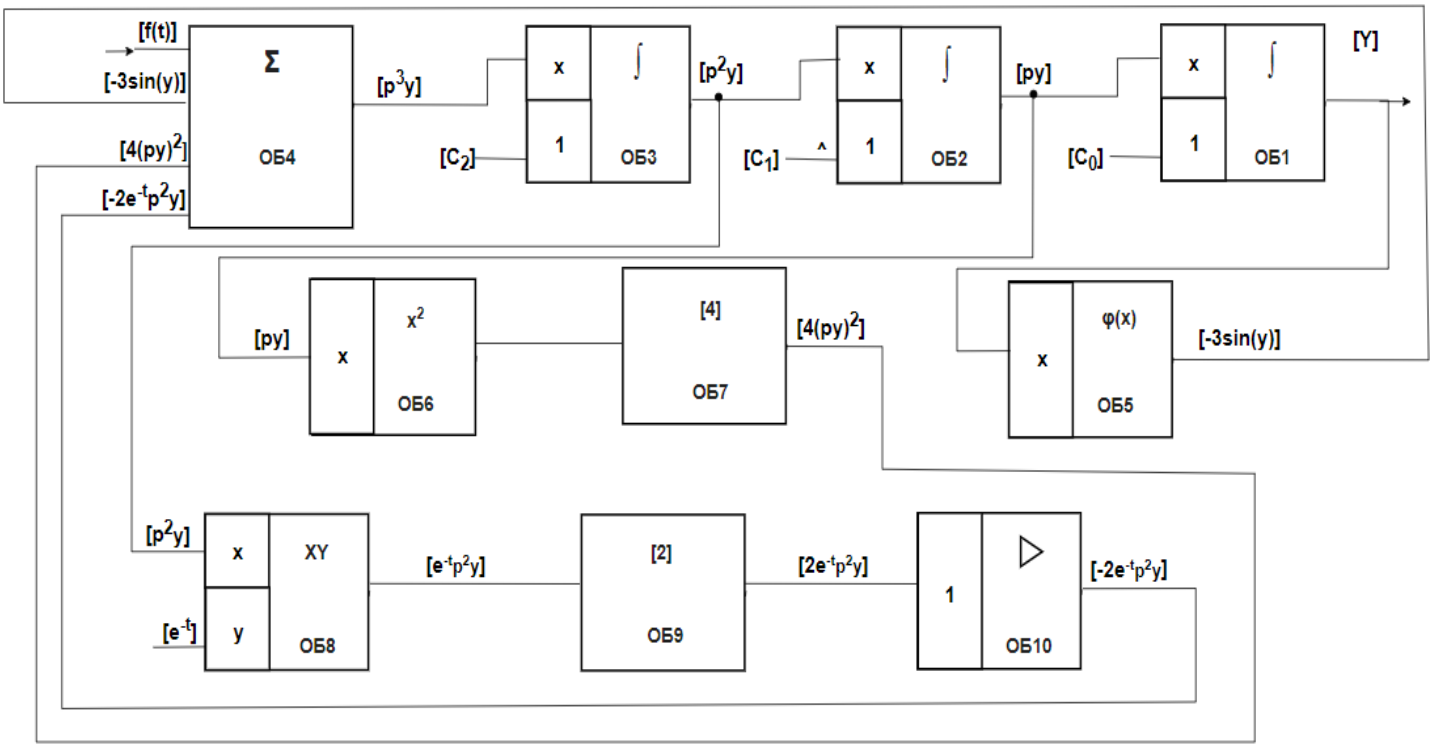

Рис 12

Схема (рис.12), яка побудована з десяти ОБ, має математичний опис, ідентичний математичному опису оригіналу $\mathbf{p^3y+2e^{-t}p^2y-4(py)^2+3siny=f(t)}$, тобто і є математичною моделлю.

Якщо в момент часу $\boldsymbol{\tau=0}$ виконати одночасну комутацію усіх ОБ, *які беруть участь в схемі моделі*, згідно зі схемою, забезпечивши початкові умови, зовнішні збудження та інші функції часу, то з цього моменту часу почнеться процес моделювання (процес інтегрування диференційного рівняння). При цьому на усіх ОБ, які беруть участь в моделюванні, одночасно виконуються потрібні математичні операції, а на виході отримаємо рішення у вигляді залежної машинної змінної, яка відповідає за-лежній змінній оригіналу **y(t)** {для аналого-вих ОБ - це $\mathbf{U_y(\tau)}$}.

Слід зазначити, що при використання методу зменшування порядку похідної основу схеми моделі складають інтегруючі ОБ, тому цей метод і використовується для аналогових обчислювальних систем з аналоговими інтегруючими ОБ.

P.S.: При використанні методу збільшення порядку похідної основу схеми моделі складатимуть диференціюючі ОБ, тому цей метод не використовується для аналогових обчислювальних систем внаслідок відсутності аналогових диференціюючих ОБ.

В цифрових обчислювальних системах використовуються обидва методи, оскільки є і інтегруючі і диференціюючі цифрові ОБ. Такі спеціалізовані цифрові обчислювальні системи мають назви: ЦДА (цифровий диференціальний аналізатор) та ЦІМ (цифрова інтегрувальна машина).

Імітаційне моделювання

Імітаційне моделювання (англ. **Imitate** – копіювати) – це метод наукового дослідження, заснований на тому, що об’єкт (процес, явище, схема або систе-ма), що вивчається, замінюється імітатором і з ним проводяться експерименти з метою отримання інформації про цей об’єкт. Експериментування з імітатором і узивають імітацією. **Імітація** – це збагнення суті явища, не вдаючись до експериментів на реальному об’єкті, і є окремим випадком математичного моделювання.

Існує клас об’єктів, для яких з різних причин не розроблені аналітичні форми математичного опису або не розроблені методи розв’язування задач про такі описи. Саме в такому випадку математична модель замінюється імітатором або імітаційною моделлю. **Імітаційна модель** – це логіко-математичний опис об’єкту, який може використовуватися для експериментування на комп’ютері з метою аналізу та оцінки функціювання об’єкта.

Різновиди імітаційного моделювання:

- імітаційне моделювання з використанням методу статистичних випробувань (метод Монте-Карло);

- імітаційне моделювання з використанням методу статистичного моделювання;
- імітаційне ігрове моделювання.

III. Методи теоретичного рівня наукових досліджень

Методи, що використовуються виключно на теоретичному рівні наукового дослід-ження:

1. **Ідеалізація**.
2. **Формалізація**.
3. **Аксіоматичний метод**.
4. **Методи системного аналізу**.
5. **Наукове припущення, гипотеза і наукова теорія**.

Ідеалізація – це метод наукового пізнання, що полягає в ***мисленому конструюванні* об'єктів** (схем, систем, процесів, явищ тощо), що не існують в дійсності, або практично є недосяжними. Приклади: абсолютно тверде тіло, ідеальний ОП, ідеальний конденсатор тощо.

Мета методу ідеалізації: позбавити реальний об'єкт (схему, систему, процес, явище тощо) деяких притаманних їм властивостей та наділити (мислено) цей об'єкт (схему, систему, процес, явище тощо) нереальними і гіпотетичними властивостями.

Досягнення цієї мети здійснюється:

a) простим абстрагуванням;
b) багатоступеневим абстрагуванням;
c) мисленим переходом до граничного випадку в розвитку якої-небуть властивості (наприклад: ідеальний ОП з нескінченною смугою пропускання частот тощо).

Формалізація -- це метод наукового пізнання, що полягає у вивченні об'єктів (схем, систем, процесів, явище тощо) шляхом відображення їх змісту, структу-

ри, властивостей тощо в знаковій, цифровій або символьній формі з допомогою різноманітних роблених мов (математики, математичної логіки, хімії, алгоритмічних мов, хімії, радіотехніки тощо). Практично це є різновид моделювання, за допомогою якого об'єкт (схема, систем, процес, явище тощо), що досліджується, замінюється знаковою (символьною) моделлю, яку і досліджують. До речі, перший вияв формалізації – поява письменності і цифрових символів майя.

Позитивні якості формалізації:

a) символіка надає короткість та чіткість фіксації значень;
b) забезпечується однозначність символіки;
c) забезпечується узагальненість підходу до вирішення проблеми.

Аксіоматичний метод – це один з методів, що використовуються при побудові на-укової теорії, в якому деякі твердження (основа теорії) приймаються без доказів, бо істиність їх уявляється наочно очевидною (це і є **аксіоми**), а усе інше випливає з аксі-ом як логічні, або математичні наслідки.

Методи системного аналізу – це специфічні методи наукового пізнання, що вико-ристовуються для дослідження, проектування і сінтезу складних систем.

Найбільш поширенними методами системного аналізу є:

a) методи та процедури теорії дослідження операцій;
b) методи аналізу і синтезу систем;
c) метод сценаріїв;
d) метод дерева цілей.

Наукове припущення, гипотеза і наукова теорія.

Наукове припущення – це судження чи вислолювання, яке робиться на підставі обробки зібраної та отриманої в результаті проведення досліджень інформації. Кіль-кість наукових припущень не обмежується.

Гипотеза – це твердження, яке робиться на основі аналізу наукових припущень і здається досліднику правилним з високою ймовірністю. Отже, гипотеза теж є своєрідним узагальнюючим обгрунтованим науковим припущенням, яке пов'язане з теоретичним поясненням дослідження, і намагається пояснити явище, (процес тощо), що досліджується. Таки чином, гипотеза є формою ймовірного знання або гаданою теорією і потребує перевірки на практиці.

Якщо в процесі перевірки гіпотези дослідження підтвердять усі виведені з гіпотези наслідки і не виникнуть суперечності, тоді цю гіпотезу перетворюють у достовірні знання - в наукову теорію. Якщо гіпотеза спростовується, тобто дослідження не підтверджують виведені з гіпотези наслідки, то висунута гіпотеза стає хібним припущенням і виникає необхідністьв формуванні іншої гіпотези. Якщо ж гіпотеза не може бути перевірена – вона залишається лише гіпотезою.

Наукова теорія – це система знаннь, що описує та пояснює сукупність явищ певної галузі дійсності і яка зводить усі закони, що відкрито в цій галузі, до єдиної поєднуючої основи. Теорія базується на результатах, отриманих на емпіричному рівні дослідження, і випливає з гіпотези. В теорії усі отримані результати упорядковуються, зво-дяться до злагоджженої системи, яка об'єднана спільною ідеєю, та уточнюются з урахуванням запроваджених в теорію абстракцій, ідеалізацій, формалізацій та принципів.

Вимоги до нової теорії:

a) наукова теорія повинна бути адекватною по відношенню до об'єкту, що дозволяє в деяких випадках замінювати експериментальні дослідження теоретичними;
b) наукова теорія повинна задовольняти вимозі повноти опису певної галузі дійсності;
c) наукова теорія повинна пояснювати взаємозв'язки між різними компонентами в межах самої теорії; повинні існувати зв'язки між різними

положеннями теорії, які забезпечу-ють перехід від одних тверджень до інших;

d) в науковій теорії повинні виконуватися вимоги внутрішньої несуперечливості та відповідності її усім експериментальним даним;

e) наукова теорія повинна бути евристичною, конструктивною та достатньо простою.

ГЛАВА 2 ВИНАХІДНИЦЬКА ТА ТВОРЧА ДІЯЛЬНІСТЬ ДОСЛІДНИКІВ

І. Системний підхід до творчості

Світ навколо нас являє собою ієрархічно організовану сукупність систем різного ступеню складності, тому, природньо, для технічної творчості об'єктом вивчення є конкретна система з цієї сукупності. Тому найважливіший сучасний підхід до технічної творчої діяльності – це системний підхід.

Системи можуть бути описаними з допомогою математичних, графічних або абстрактних моделей на різних рівнях опису:

- символічному (лінгвістичному);
- теоретико-множенному;
- абстракно-алгебраїчному;
- топологічному;
- логіко-математичному;
- інформаційному;
- динамічному;
- еврістичному.

Система визначається завданням системних об'єктів та звязків між ними.

Системні об'єкти:

- вхід (матеріальні об'єкти, енергія, інформація);
- процес (різнвид діяльності, перетворення, входи та виходи);
- зворотні зв'язки;
- обмеження.

В сучасній літературі використовуються різні разголужені кваліфікації типів систем, перша з яких пропонує поділяти усі системи на стабільні; функціональні, що працюють в режимі повторення циклів; та динамічні, в яких змінюється не тільки склад, відносини і типи вєаємодій, а і кількісно та якісно змінюються

елементи. Інша запропонована кваліфікація передбачає поділ систем лише на природні та роблені.

Методологія системного підходу, особливо в технічній творчості, ще недостатньо розроблена.

Системний підхід зводять до:

- системно- структурного підходу;
- структурно-функціональному підходу;
- функціонально-організаційному підходу;
- підсистемам (системно-компонентний підхід, системно-структурний підхід,
  системно-функціональний підхід, системно-історичний підхід, системно-комунікаційний підхід);
- компонентам (предметна площина досліджень, функціональна площина дос-ліджень, історична площина досліджень).

Кожен з цих підходів накопичів декілька прийомів, які можливо використовувати на будь-якому етапі творчості. Це метод «чорного ящика», системи функціональних блоків тощо.

Для наочного показування суті технічних задач засобами системного підходу, мо- жемо зобразити компоненти технічної задачі як системні об'єкти задачі:

- початковий стан -- вхід;
- кінцевий результат – вихід;
- алгоритм перетворення – процес.

Сучасна логічна класифікація:

- «Проходження крізь відчинені двері» (вхід, вихід та процес відомі).
- «Пошук нового місця праці» (вхід невідомий).
- «Рукавички з павутиння» (процес невідомий).
- «Краплі Гофмана» (вихід невідомий).
- «Чудовисько Франкенштейна» (вхід та процес невідомі).
- «Фіговий листок» (процес та вихід невідомі).

- «Ефект беззношення» (вхід та вихід невідомі).
- Задача не існує (вхід, вихід та процес невідомі).

Сучасні евристичні прийоми:

- Стратегія семикратного пошуку.

P.S.: Ще у першому сторіччі до н.е. римський рітор Квінтилліан сформулював сім питань для повноти інформації: - хто? – що? – де? – чим? – навіщо? – як (яким чином)? – коли?

- Графи технічних ідей.
- Матриці винахідницьких ідей.
- Гірлянди асоціацій.

II. Винахідницька та творча діяльність дослідників

В процесі пізнання та наукової діяльності також застосовується моделювання, з допомогою якого намагаються виявити евристичні прийоми висування нових ідей та механізми творчого процесу.

Найпростіші моделі процесу винахідницької та творчої діяльності наступні:

- модель «Трансформатор»;
- модель «Шлюзи»;
- модель «Посудина»;
- модель «Насіння»;
- модель «Ракета»;
- модель «Трамплін-бар'єр»;
- модель «Призма»;
- модель «Сухі дрова»;
- модель «Рівноплечі важільні терези»;
- модель «Некомічна дотепність»;
- модель «Знак якості»;

- символьна модель «ДРГМЗП» (дійсність-розум-гумор-мрія-забава-почуття);
- модель «Колесо технічного прогресу».

Модель «Трансформатор»

Задача винахідництва не є такою в готовому вигляді та сталою. Вирішення такої задачі може бути досягнуто лише шляхом її **трансформації**, багаторазового перефор-матування, перетворення умов та вимог, повторного скерованого аналізу крізь синтез на конкретних стадіях рішення, відозмінення досягаємої мети. За думками дея-ких вчених трансформатор містить у собы п'ять основних процесів, що реалізуються в технічних приладах та обладнанні. Це наступні властивості: пропускати, зберігати, накопичувати, видозмінювати та виробляти, з яких комбінуються усі технічні прила-ди: механічні, оптичні, електронні тощо. Серед найпростіших моделей технічної творчості ця модель є однією з самих цікавих. ЇЇ вивчення може привести до отримання нових корисних практичних ідей.

Модель «Шлюзи»

Творчість притаманна людині і є його специфічною характеристикою. Кожна нормальна людина здатна до творчості. Творча потенційна енергія знаходиться в кожній людині ніби то в дрімаючому стані, чекає на можливість виходу, як вода крізь **шлюзи**. Необхідно лише вміло та можливо повно відкрити «шлюзи». Цього можливо досягти двома засобами: посиленням мотивації чи посиленням стимулювання; але, краще за все, оптимальним поєднанням одного та другого.

Важливо також вміти поєднувати моральне та матеріальне стимулювання.

Модель «Посудина»

Людина –це **посудина**, що зберігає досвід та знання людства. По мірі проходження процесу накопичення знань кількість переходить в якість, знання замість статичного характеру набуває динамічного, активного характеру. Посудина починає вирувати, пінитися, переливатися через вінця.

Склад змісту посудини неоднорідний: частина змісту звичайно інертна, друга частина за своєю природою активна, а третя частина являє собою каталізатори чи нейтралізатори. Кількісне накопичення знань - передумова творчого процесу. Ще більш важливішим є накопичення активних знань про перетворення дійсності, методи та правила цього перетворення.

Модель «Насіння»

Творчі задатки людини є біологічно обгрунтованими, тобто здібності людини є соціально обумовленими. Розвиток творчих задатків залежить від навчання, виховання та праці. За здібностями потрібен постійний догляд, їх, так само, як і **насіння**, необхідно поливати, вирощувати в сонячному теплі та в благодатному грунті. Творчості можливо і необхідно навчати; виховувати треба шляхом опанування методики творчості.

Модель «Ракета»

Внутрішню енергію людини необхідно активізувати, запалити, як **ракету**, щоб потенційна енергія перетворилася в кінетичну. Творчість – це реактивне відштовхування ракети самої від себе. Головне в творчості – стимулювання творчого процесу, активізація мислення. Великі можливості активізації мислення необхідно використовувати, не турбуючись стосовно резервів творчої енергії. В цьому відношенні усі засоби, що ведуть до мети, є прийнятними.

Модель «Трамплін-бар'єр»

Якщо людина поклала собі за мету розв'язати якусь задачу, то ця людина вже володіє деякою інформацією по цій задачі. На підставі закону єдності світу, ця людина може знайти аналогії, асоціації та інші зв'язки між предметами та явищами, осмислення яких може привести до розв'язання задачі. Людина частенько не може розв'язати задачу не тому, що недостатньо інформації, а тому що звичний спосіб мислення діє, як гносіологічний чи психологічний бар'єр, що гальмує досягнення мети – вироблення правильного рішення. Цей **бар'єр** можливо здолати лише з допомогою **трампліну**, що являє собою підказку у вигляді

евристичних правил та рекомендацій. Одночасно з подоланням бар'єру іноді доцільно встановити бар'єри в інших напрямках. Здолання бар'єрів знаходиться в діалектичному зв'язку з їх встановленням. Разом з подоланням психологічних бар'єрів дуже важливо подолати ще і інформаційні бар'єри задля кращого розуміння проблемної ситуації

Модель «Призма»

Наш світ частково віддзеркалюється від поверхні **призми**, частково заломлюються усередині неї, частково проходить крізь призму, утворюючи та трансформуючи спектри. Творчість – складний процес подібного відображення дійсності, що залежить від багатьох факторів: складу світлових хвиль, кута їх падіння, кута заломлення та матеріалу призми. І хоча внутрішні процеси заломлення, відображеннч, змін та взаємодії не завжди чітко видно, вони спливають по єдиним загальним закономірностям та є такими, що пізнаються. Результати цього пізнання можуть використовуватися для оптимізації проходження творчого процесу.

Модель «Сухі дрова»

Цю модель запропонував ще у вісімнадцятому сторіччі І.-В.Гете. На його думку, творчість залежить від натхнення, яке з'являється, як нагорода за наполегливу працю. Тому наше завдання – працювати, **«колоти та добре сушити дрова»**, відчуття, зображення, уявлення, умовиводи. Для цього потрібно багато і наполегливо працювати. Коли прийде час, кількість перейде в якість, розпалиться вогонь, дрова будуть горіти настільки ярко, що ми самі будемо цьому здивовані. Цю модель побудовано на припущенні, що накопичення знань автоматично приведе до творчості. Модель, на жаль, не враховує вплив методології та можливостей спрямованої активації мислення.

Модель «Рівноплечі важільні терези»

Модель творчості являє собою **рівноплечі важільні терези**, які повинні бути в рівновазі для забезпечення творчого процесу з суспільною значущістю. На од-

ній чаші терезів – знання та досвід творця, а на другій – методологія творчості, цілеспрямована праця, мотиви та воля. Згідно з цією моделлю знання та досвід знаходяться в діалектичній єдності з вмінням їх використовувати в конкретній проблемній ситуації. Знання без методики застосування – мертвий вантаж, використовувати методику без знань – будувати надхмарний замок.

Модель «Некомічна дотепність»

Винахідництво - це **некомічна дотепність**. Між прийомами дотепності та прийомами винахідництва є схожість, яка не є випадковою чи лише зовнішньою. Вона обумовлена загальними закономірностями творчого мислення. Процес створення дотепу включає ознаки наявності початкових знань, генерування асоціацій між віддаленими поняттями і уявленнями та включає оцінку отриманих результатів. Основні прийоми комічного: перебільшення, пародіювання (імітація оригіналу з одночасним перебільшенням притаманних йому рис), применшення, незвичайний темп, неочікуване зближення явищ та процесів, виявлення схожості, виявлення контрасту, використання протиріч між формою та змістом, звичайним та несподіваним використанням речей, повторення явищ, порушення логічних норм (логічна інверсія), переставлення, подвійне трактування, зіставлення по окремій або по випадковій ознаці – є одночасно і ефективними прийомами пошуку та вирішення винахідницьких задач.

Модель «Знак якості»

Модель «Знак якості» створено, використовуючи припущення того, що головними факторами творчого мислення є: наукові знання, методика винахідництва, мотиви, воля та творча уява. Оптимальний вплив та діалектична єдність забезпечують найкраще проходження творчого процесу та народжують нову якість. При взаємодії зазначених факторів мислення здатне зважити та на-дати оцінку проміжним і остаточним результатам творчості. Зазначені фактори розуміють у широкому сенсі. Отже, під терміном «знання» розуміють сукупність понять стосовно закономірностей природи, суспільства та мислення, що

накопичені людством. Методика – це сукупність методологічних рекомендацій усіх рівнів: філософської методології, загальнонаукових методів пізнання і творчості, конкретних наукових методів технічної творчості, що застосовуються в творчому процесі. Під терміном «уява» розуміють психічну діяльність, яка створює нові уявлення, образи та їх сполуки. Виходячи з цієї моделі, стимулювання, оптимізація та активізація творчості винахідника здійснюються цілеспрямованим впливом на зазначені п’ять факторів.

Символьна модель «ДРГМЗП»

(дійсність-розум-гумор-мрія-забава-почуття)

Цю модель створено, використовуючи припущення того, що головними факторами творчого процесу є зв'язок з реальною **дійсністю (Д), розумом (Р), гумором (Г), мрією, уявленням (М), забавою, грою (З) та почуттями, відчуттями і емоціями (П).**

Творчий потенціал особи визначається інтенсивністю виявлення, рівнем розвитку зазначених факторів. Сутність моделі можемо зрозуміти, лише вивчаючи її, усвідомлюючи її структуру, можливі варіанти якісної характеристики, її складові та їх взаємодію. Вже схематичний поелементний розгляд зазначених компонентів надає можливість виявити те, що комінування елементів спрощено, але досить влучно розкриває сутність багатьох понять (дивись наступні приклади).

Д+М=наукова фантастика; Д-М=тваринне існування; Д+Г=реалізм; Д-Г=догматизм; Д+П=натхнення; Д-П=скептицизм; Д+Р=прагматизм; Д-Р=інтуїтивізм; Р-Д=схоластика; Р+М=прогнозування; Р-М=утілітаризм; М-Д=містицизм, сюрреалізм; М-Р=утопізм; М-Г=фанатизм; М+П=марення, ілюзії, галюцинації; П-Д=соліпсизм; П-Г=сентименталізм; П-Р=сенсуалізм; З-Д=софізм; З-Г=ілюзіонизм.

З допомогою цих позначень є можливість також спрощено, але достатньо чітко для практичних цілей відобразити низку складних понять, наприклад **Д+Р+М+Г=мудрість.**

Позначення, що розглядаються, можливо використовувати також для характеристики осіб, якщо в позначеннях враховувати індекси, що враховують вагмість таким чином: **1 - незначний; 2 - абиякий; 3 - сильний; 4 - надзвичайно сильний**. В такому разі можемо надати своєрідні характеристики відомим особам. Наприклад:

$Д_4Р_3Г_3М_4З_4П_4$ – Шекспір; $Д_4Р_4Г_3М_4З_4П_4$ – Леонардо да Вінчи;

$Д_4Р_3Г_2М_3З_4П_2$ – Едісон.

Для успішного працюючого винахідника оптимальною, мабуть, можно вважати наступну характеристику: **$Д_4Р_3Г_4М_4З_4П_2$**, тому що крайнощі розвитку властивостей особи в винахідництві не призводять до ефективних результатів.

Розвиток уявлення, здібность мріяти, відчуття комічного, здібность до гри ідеями є передумовами оригінальності мислення. Розум, та почуття реальності виконують роль регуляторатворчої діяльності, комбінують та здійснюють оцінювання матеріалів уявлення. Інтуіція є продуктом досвіду і вона дозволяє передбачити ціле раніш, ніж в наявності опиняться всі частки цілого. Окрім того, інтуіція дозволяє осягти в уяві сутність відносин раніш, ніж ці відносини будуть з'ясовані. Поява інтуіції пояснюється тим, що в творчості величезну роль відіграють підсвідомі процеси. Інтуіція ніколи не з'являється без попередньої праці розуму по вивченню ситуації.

Модель «Колесо технічного прогресу»

Модель створено, використовуючи припущення того, що одні фактори технічного прогресу змінюються в явному циклічному процесі, а інші фактори змінюються рівномірно або стрибкувато без створення закономірних періодичних коливань. Такий процес в цілому можемо зобразити з допомогою моделі колеса, обертальні частини якого означають фактори, що змінюються циклічно. Опори колеса символізують суспільні відносини. Слабкі опори або їх перекіс негативно впливають на обертання колеса. Вісь колеса – економіка винахідництва. Міцність та стабільність осі забезпечує рівномірне обертання колеса. Маточина колеса, що символізує науку, жорстко поєднана з віссю. Від маточини колеса

виходять три шпиці: наукові факти, гіпотези та предвіщання, що слугують опорою обода колеса, що символізує винахіди. Винахіди можуть базуватися на будь-якій з цих трьох шпиць, взаємопов'язаних наукою. Аналіз наукових фактів породжує гіпотези та дедукції, які, в свою чергу, породжують предвіщання. Спостерігання за предвіщеннями знову приводить до наукових фактів. Шина колеса захищає обод від ушкоджень і оберегає його від зовнішних впливів, символізуючи управління винахідництвом в звичайному розумінні: планування, організація, активізація (також і евристичними методами), контроль і регулювання (також і правове). Системі колеса надає рух вантаж, що символізує суспільні потреби. Канат, що з'єднує колесо з вантажем, є моделлю взаємозв'язку між потребами та винахідництвом: зростання суспільних потреб тягне за собою пришвидчення розвитку винахідництва. Вивчення ролі елементів системи колеса та їх взаємодії дозволяють створити оптимальні умови для технічного прогресу.

Окрім розглянутих найпростіших моделей творческої діяльності винахідника, відома також низка багатьох, більш складних моделей творчості.

Слід зазначити, що усі без винятку існуючі моделі творчості – це абстракції, що дозволяють більш-менш вдало надати пояснення деяким сторонам творчої діяльності, відволікаючись від розгляду інших сторін.

ГЛАВА 3 КРИТЕРІЇ ВИБОРУ ТЕМИ ТА ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ

При виборі теми НДР необхідно враховувати наступні критерії:

- актуальність обраної теми;
- припущення стосовно можливої ефективності;
- новизна;
- перспективність;
- можливість підведення теоретичної бази;
- відповідність профілю спеціальності;
- можливість її розробки в конкретних умовах (в конкретній науковій лабораторії, в конкретному науковому середовищі тощо;
- ступінь відповідності обраної теми НДР тематиці наукової лабораторії;
- врахування спеціалізації конкретної наукової лабораторії;
- ступінь рентабельності.

Для правильної організації праці при виконанні науково-дослідної роботи рекомендовано виконати наступні технічні заходи:

I. Виконати розподіл усієї науково-дослідної роботи на окремі етапи.

II. Створити резерви часу.

III. Здійснити фіксацію ходу дослідження та забезпечити реєстрацію отриманої інформації.

I. Розподіл науково-дослідної роботи на окремі етапи

Складність і комлексність сучасних наукових досліджень та тривалість їх виконання обумоввлюють необхідність чіткого розподілення дослідження на наступні взаємообумовлені та взаємопов’язані етапи:

1. Конкретізація наукової теми

1.1. Призначення дослідження (в т.ч. перспективна ціль або ланцюг цілей).

1.2. Зміст дослідження (в т.ч. встановлення обмежень, що відокремлять тему дослідження від межуючих тем).

1.3. Методи дослідження.

1.4. Поодинокі терміни виконання етапів та окремих стадій усередині етапів.

В процесі конкретизації теми необхідно чітко визначити її формулювання.

Ступінь конкретизації теми визначить:

- якість дослідницької роботи;
- своєчасність її виконання;
- економні витрати ресурсів та праці.

Слід зазначити, що для великих за обсягом науково-дослідних робіт після конкретизації теми доречно розробити попередній план наукових досліджень, що є проміжною ланкою між програмою досліджень та робочим планом.

2. Попередня розробка теоретичних передумов (визначення теоретичних основ дослідження)

До теоретичних основ дослідження заведено відносити:

- основні категорії та поняття цього наукового дослідження;
- закономірності розвитку явища, що вивчається;
- методику дослідження:
- систему термінів, що використовуються.

Доведено, що відмова від теоретичних основ дослідження та використання виключно емпіричного шляху часто-густо спричиняє отримання хибних результатів. Якщо теоретичні основи дослідження відсутні, - тоді дослідник повинен розробити їх самотужки.

Опанування основних наукових категорій та понять – найважливіша передумова ефективності наукового дослідження. Категорійний апарат – це основа,

без якої наукове дослідження може піти хибним шляхом. Зазначимо, що для отримання досто-вірних висновків необхідно спочатку визначити загальні закономірності. В методиці наукового дослідження необхідно також визначити конкретні методи, процедури та прийоми, що базуються на загальнометодичних принципах. З'ясування теоретичних основтеми надає можливість усвідомити її зв'язок з загальними тенденціями розвитку предмету, що досліджується, зв'я-зок з загальними закономірностями науки, що її вивчає, та зв'язок з ще більш загальними законами розвитку природи.

3. Вивчення історії та сучасного стану проблеми

Вивчення історії та сучасного стану проблеми необхідно заради

- страхування від дублювання;
- визначення місця наукового дослідження в відповідному напрямку науки;
- полегшення використання результатів досліджень;
- з'ясування загальних тенденцій розвитку напрямку наукового дослідження;
- передбачення подальшого розвитку напрямку наукового дослідження.

Історію проблеми бажано вивчати, використовуючи не лише друковані джерела, а також використовуючи різні рукописні праці (депоновані рукописи, дисертації, звіти по НДР тощо). Крім того, необхідно з'ясувати, чи розглядалася раніше ця проблема або суміжні проблеми і ознайомитись з відповідними матеріалами, навіть якщо там не було закінчення досліджень. На завершення цього етапу необхідно провести аналіз сучасного стану питання.

Вивчаючи зміст праць попередників, необхідно

* позначити їх вклад;

* вивчити помилки, які було допущено;

* об'єктивно оцінити методику, що застосовувалась, оцінити значущісь висновків та ефективність запропонованих рішень та пропозицій.

4. Підготовка до дослідження

4.1. Підготовка умов, які необхідні для проведення досліджень.

4.1.1. Матеріально-технічне підготування:

* перевірка постачання прийдешньої роботи матеріалами, приладами, устаткуванням та необхідним програмним забезпеченням;

* своєчасне надання заявок на матеріали, прилади, устаткування та програмне забезпечення, що відсутні;

* забезпечення можливості використання додаткових засобів для автоматизації допоміжних операцій при науково-дослідній роботі;

* попереднє подання заявки на бібліографію.

4.1.2. Організаційне підготування:

* розставлення наукових кадрів;

* розподіл функцій та об'єктів наукового дослідження;

* узгодження термінів виконання окремих етапів науково-дослідної роботи.

4.1.3. Підготовка учасників науково-дослідної роботи:

* забезпечення своєчасних консультацій;

* забезпечення попередніх тренувань в проведенні досліджень, розрахун-ків тощо;

* самопідготовка (підвищення теоретичної підготовки, знайомство з літературою, знайомство з різноманітними методиками тощо).

4.2. Складання бібліографії.

Рекомендації, що дозволяють краще оволодіти процесом складання бібліографії:

- визначити параметри необхідної бібліографії (коло країн і мов, хронологічні межи, види літератури, зв'язок з темою тощо);
- вивчити методику складання бібліографічного покажчика, ступінь охоплення питання, розташування інформації, скорочення, що використовуються, посилання тощо;

- оволодіти методикою використання предметних вказівників.

За звичай радять починати з бібліографій, що є в переліку літератури до статей та до інших публікацій, а вже після цього звернутися безпосередньо до реферативних журналів, статей, рукописних видань тощо. При цьому одночасно слід вилучати те, що не може стати у пригоді.

5. Збір, відбирання та вивчення необхідної інформації

Інформаційне забезпечення – це не тільки обов'язкова умова ефективного проведення досліджень, але і невід'ємний основний етап процесу наукових досліджень. Слід зазначити, від 30 до 70 відсотків робочого часу (а іноді і більше) витрачається на сбір та обробку наукової інформації.

Коли здійснюється збирання інформації, то не слід уподібнуватися лахмітнику, збираючи усіякий матеріал, сподіваючись, що він знадобиться; збирання матеріалу повинно супроводжуватись його відбором, тобто необхідно аналізувати та систематизувати джерела інформації, враховуючи задачі наукового дослідження. Початківці частенько збирають більше інформації, ніж необхідно для дослідження, що планується, та в кількості, яку вони не в змозі опрацювати. Причина надмірного обсягу інформації, що зібрано, криється у хибній техниці її відбору: дослідник знайомиться з інформацією не в зворотньо-хронологічно-му, а в прямому хронологічному порядку.

Після завершення збирання та відбирання інформації дослідник повинен розпочати її вивчення. В умовах «інформаційного вибуху» опанування літературною інформацією навіть по вузькому питанню являє собою нелегку і дуже трудомістку задачу.

Загальні рекомендації по вивченню літератури, що мають зекономити роботу і час, наступні:

- літературу краще вивчати, переходячи від більш простого матеріалу до більш складного, від загального – до спеціального, від вітчизняного – до

закордонного, від теоретичного – до прикладного, від книжок – до статей, від нових робіт – до старих;

- ознайомлення, перш за все, необхідно починати з першоджерел;
- при вивченні літератури робити короткі нотатки (бажано на картках);
- не обмежуватись ознайомленням лише по реферативним журналам.

Для полегшення та прискорення опанування особливо тяжких текстів рекомендовано використовувати наступні прийоми:

- переказ ходу думок автора іншій особі;
- розподіл окремих фрагментів чи уривків на логічні частки;
- зводити текст або окремі найважливіші його частини до тезисної форми.

Найпростіші правила по вивченню літератури для початківця:

- відділяти основне від дрібниць;
- порозумітися в незнайомих термінах;
- фіксувати питання, що виникають;
- після вивчення матеріалу розділу ставити собі контрольні питання типу «яка головна думка?». «які аргументи?», «які є заперечення?», «які висновки можу зробити?», «як узгодити роботу з іншими джерелами інформації?» тощо.

Окрім отримання інформації з літературних джерел, існує ще два шляхи її отримання – це безпосереднє ознайомлення дослідника з практикою (вивчення і особисті відвідування виробництв) та особисті контакти з іншими дослідниками, розробниками і інженерами. Слід зазначити, що дослідники отримують від спілкування з колегами щонайменше 25% необхідної інформації і чим ширше коло спілкування, тим ефективнішим воно буде.

Після збору та відбирання інформаційного матеріалу дослідник розпочинає його опрацьовувати, використовуючи послідовно наступні стадії обробки:

- отриманий інформаційний матеріал систематизується;

- вилучаються зайві інформаційні матеріали (дублюючі, застарілі та ті, що не відповідають темі;
- проводиться оцінювання придатності інформаційного матеріалу для дослідження і якщо якийсь матеріал виявиться непридатним – його вилучають;
- складаються додаткові покажчики до інформаційного матеріалу, що залишився;
- проводиться аналіз з метою виявлення нового та оцінки його значущості;
- проводиться оцінювання достовірності інформаційного матеріалу (вибіркова перевірка методик, формул, висновків тощо);
- проводиться зіставлення інформаційного матеріалу, отриманого з різних джерел з метою виявлення, пояснення та усунення розбіжностей і протиріч;
- виконується узагальнення усього інформаційного матеріалу, що зібрано, відібрано та оброблено.

Збір, відбирання та вивчення необхідної інформації доречно поєднувати, роблячи чергування в межах кожного робочого періоду.

6. Розробка гіпотези

Гіпотеза – це наукова ідея, що скеровує і потребує подальшої перевірки практикою, тобто ще чекає підтвердження. Гіпотеза – це не просте наукове припущення, але, в той же час, ще не є істиною, тому що істина – це наукове припущення, що підтверджене дослідами, фактами та аргументами.

Гіпотеза є головним методологічним інструментом, що організує процес дослідження та визначає його логіку та шлях розроблення. Цінність гіпотези визначається її непередбачуваністю, несподіваністю, невідповідністю існуючи догмам, розривом із традиційними підходами та традиційними методами мислення. Від мети дослідження та розробленої гіпотези залежить обрання методів дослідження, прийомів та об’єктів, що досліджуються.

З того моменту, коли виникає ідея дослідження, дослідник обмірковує її, зіставляє її з інформаційними матеріалами, які було вивчено, та поступово підіймає цю ідею до рівня гіпотези. Іноді буває так, що дослідник формує для себе гіпотезу ще до початку досліджень; інколи гіпотезу вже закладено безпосередньо у постановці задачі; а іноді гіпотеза може бути позичена з роботи іншого дослідника. Буває і таке, що інформаційні матеріали, що зібрані та вивчені, підказують не одну гіпотезу, а декілька конкуруючих гіпотез. В такому випадку слід обрати найвирогіднішу або проводити дослідження паралельно на базі декількох гіпотез. Якщо будь-яка гіпотеза взагалі відсутня, тоді дослідник, враховуючи проведений аналіз зібраного, відібраного та вивченого інформаційного матеріалу, повинен самотужки розробити одну гіпотезу або дві (основну та контргіпотезу). Розробка паралельних гіпотез зазвичай потребує більше часу, але при цьому збільшується достовірність отриманих результатів. Часто-густо вірна гіпотеза виникає сама собою в процесі аналізу та перевірки невірних гіпотез і її необхідно чітко сформулювати (бажано в письмовому вигляді).

7. Визначення методики дослідження

Науковий рівень дослідження визначається не його предметом, а обраним методом дослідження. Метод наукового дослідження зумовлює цінність дослідження, тому що вірний метод підвищує ефективність, а використання застарілого або необміркованого методу знецінює наукове дослідження. Саме тому науковому досліднику необхідно ретельно визначити або обрати (чи самостійно розробити) методику дослідження, тобто сукупність методів та прийомів, котрі необхідні для проведення визначеного наукового дослідження. Якщо дослідник вирішить скористатися раніш відомою методикою, йому необхідно, перш за все, переконатися в тому, що ця методика відповідає сучасному рівню науки та умовам і задачам наукового дослідження. Методику, що обрана або розроблена, необхідно постійно вдосконалювати, застосовуючи критичний аналіз попередніх робіт та їх практичних реалізацій. Доречно перевірити можливість використання методів із суміжних наукових досліджень, використовуючи пряме перей-

мання методу або запозичення ідеї методу. Слід пам'ятати, що окрім ефективності та надійності методу, велике значення також мають простота, ясність та доступність обраного методу. Зазначимо, що усі методичні рішення, що приймаються, бажано зафіксувати та періодично переглядати.

8. Складання робочого плану

Добре обміркований та ретельно складаний робочий план – обов'язкова умова раціональної організації наукової праці. Складання робочого плану являє собою тяжку, відповідальну, тривалу, але дуже необхідну працю. Якщо ж план складено поспіхом,- тоді знадобляться багаторазові уточнення, виправлення та переробки і може привести до порушення запланованих термінів виконання дослідження або до погіршення якості наукового дослідження.

Робочий план – це докладно розроблений проект виконання наукового дослідження, це кістяк усього наукового дослідження і він повинен відрізнятися конкретністю організаційних моментів (термінів, трудомісткості, розподілу функцій та обов'язків тощо). Перш за все, в робочому плані уточнюється формулювання теми.

Також в робочому плані визначаються:

- загальні та поодинокі задачі наукового дослідження;
- ступінь комплексності;
- етапи дослідження із зазначенням об'єму, методики, обладнання, програмного забезпечення, трудоміскості та термінів виконання для кожного етапу;
- виконавці, із зазначенням для кожного видів робіт, їх змісту та обсягів;
- форма надання результатів;
- кошторис витрат по темі.

Для складних тем радять складати план трьома частками:

- основне поділення плану на частки (своєрідний «Проект роботи»);
- поділення кожної частки на розділи;

- поділення кожного розділу на підрозділи.

Коли дослідник складає нотатки плану, він більш ретельно обмірковує тему, уточнює її зміст, вилучає повторення та відхилення від теми.

Існують дві протилежні точки зору на складання робочого плану:

- застосовується принцип самообмеження (зменшення кількості досліджень тощо, але без ушкодження достовірності отриманих результатів; при цьому залишається деякий резерв часу;
- не треба попередньо звужувати межи теми,- краще запланувати її в максимальному обсязі, а вже потім відкидати непотрібне та менш ефективні дані, що дозволяє виділяти та обирати найбільш цінне.

В дослідженнях експериментального типу однією з найбільш відповідальних частин є планування експерименту, яке доречно виконувати відповідно до теорії планування експерименту.

Одночасно зі складанням робочого плану доречно складати і пояснювальну записку до нього, в якій необхідно зазначити:

- обгрунтовування теми;
- інформацію стосовно сучасного стану проблеми (у т.ч. огляд існуючих рішень);
- характеристику задач і цілей наукового дослідження;
- робочу гіпотезу (чи гіпотези) за їїнаявності;
- обгрунтовування вибору методів та об’єктів наукового дослідження.

В процесі виконання робочого плану до нього вносяться необхідні уточнення.

9. Створення та обробка нової інформації (проведення спостережень, експериментів та вимірювань, і їх наступна математична і логічна обробка)

На цьому етапі провідною стає творча праця, яка практично не піддається організації, і тому організаційні питання стають другорядними.

При створенні нової інформації та при її обробці дослідник виконує лише три елементарні організаційні функції:

- контроль за дотриманням порядку проведення наукового дослідження, що був затверджений;
- вибір оптимального варіанту в разі відхилення від цього порядку;
- внесення раціональних поправлень до організації праці, що була прийнята.

Нова інформація створюється дослідником за допомогою методів, шо їм обрано: спостереженням, вимірюваннями, експериментами, опитуваннями, проведенням аналізу, синтезу, абстрагуванням, ідеалізацією, моделюванням тощо.

Найважливіший момент досліджень – це фіксація ходу наукових досліджень та усіх супроводжуючих його моментів. Фіксація потрібна для виключення непотрібного повторювання експериментів. Для фіксації ходу досліджень рекомендовано розробити табличну форму, в якій для кожного показника слід відвести окрему графу (або стовбчик) та залишити ще місце для непередбачених відмічань (графа «Примітка»). В такій формі опис кожного окремого досліду займатиме лише один рядок. Слід зазначити, що таблична форма суттєво пришвидшує фіксацію, полегшує контроль та наступне зведення і обробку отриманих даних експериментів. При цьому також полегшується встановлення закономірностей.

Після завершення деякої заздалегідь визначеної частини дослідів інформація, яку отримано, аналізується та узагальнюється для подальшого внесення корегувань в методику, що була попередньо визначена.

Дослідник може вважати створення нової інформації виконаним, якщо ця інформація задовольняє наступним вимогам:

- новизна;
- достовірність;
- доведеність;
- повнота.

Обробку нової інформації слід робити одразу за її створенням, але якщо створення інформації поділено на декілька стадій, недоречно відкладати обробку до останньої стадії. Одночасна обробка може надати деяке заощадження часу, але поступова обробка, пов'язана з надходженням інформації, має більш суттєві переваги, а саме:

- дозволяє скоріш завершити конкретну стадію дослідження;
- дозволяє своєчасно виявити помилки та унести необхідні корективи в методику і організацію збирання інформації;
- в разі необхідності провести повторне збирання інформації.

Новітня інформація, що створена, підлягає перевірці **на повноту** (чи усі аспекти і сторони проблеми висвітлено; чи забезпечує уся інформація, що отримана, повну картину явища тощо), **на відповідність попередній інформації і робочій гіпотезі**, а також потребує перевірки її доведеності, тобто логічної відповідності висновків усій отриманій інформації.

Після завершення усіх етапів отримання і обробки інформації дослідник приймає одне з наступних рішень:

- визнати основну частину дослідницької роботи завершеною;
- провести додатковий збір та відбирання інформаційного матеріалу;
- визнати дослідницьку роботу такою, що не вдалась.

10. Побудова висновків та пропозицій

Перш, ніж робити висновки, дослідник повинен ще раз перевірити завершеність кожної окремої частини роботи та перевірити доказовість аргументації для усієї роботи в цілому.

Висновки – це скорочене висловлювання отриманих результатів.

Іноді початківець, що накопичив великий обсяг інформаційного матеріалу, не розуміє, яким чином його можливо використати та які висновки він може зробити. Це трапляється тому, що зібрана інформація взагалі не може бути використана, або початківець не вміє її використовувати, тобто він ще не здатен робити теоретичні узагальнення та формулювати висновки. В такому випадку почат-

ківцю потрібні консультації тому що, можливо, додавання невеликої кількості інформаційного матеріалу надасть зібраній інформації новий сенс та нове значення. При побудові висновків та пропозицій необхідно формулювання робити ретельно, дбайливо та достоменно, не перевантажуючи зайвою цифровою інформацією та частковостями.

Пропозиції та рекомендації стосовно подальшого практичного їх застосування для вирішення конкретних задач має сенс лише у випадку, якщо вони перспективні. Якщо ж не враховувати загальну перспективу розвитку відповідного наукового напрямку, то це може привести до того, що результати дослідження залишаться взагалі нереалізованими.

Слід зазначити, що висновки та пропозиції чи рекомендації можуть мати як позитивний, так і негативний характер, як, наприклад, така рекомендація: відмовитись від застосування якогось прийому чи від якогось методу.

Якщо дослідник щось пропонує чи рекомендує, йому потрібно визначити її ефективність. Якщо ж надаються декілька, можливо навіть конкуруючих рекомендацій, тоді необхідно провести порівняльний аналіз з врахуванням не лише економічної ефективності, а врахувати також позаекономічні показники (підвищення безпеки, відповідність вимогам гігієни, естетичний ефект тощо).

Справа дослідника - з повною об’єктивністю зазначити як переваги пропозиції, що пропонується, так і її недоліки та слабкості.

11. Літературне викладення матеріалів наукового дослідження, його ходу та отриманих результатів

Літературне викладення матеріалів наукового дослідження потребує особливої уваги дослідника, тому що ККД неякісного по методиці та змісту дослідження суттєво знижується. Основні недоліки літературного викладення, яких слід позбутися:

- відсутність логічної системи;
- однобічність та неповнота викладення;
- висока кількість невиправданих відступів від теми;

- недостатність аргументації;
- неясність висловлення думки;
- тяжкий стиль.

Однією з основних причин невисокої якості літературного викладення є недооцінка її значущості. Слід розуміти, що в процесі літературного оформлення та завдяки йому положення та висновки, що запропоновані, в змозі породжувати нові ідеї та приводити таким чином до нових висновків. Науковцю слід навчатися не лише мислити, а також навчитись чітко висловлювати свої думки, турбуватись про відточеність формулювань. Доречно також перечитувати те, що вже написано, вникаючи не тільки в зміст, а звертаючи увагу на мову та стиль висловлювання.

Бажано здійснити деякі наступні підготовчі операції:

- скласти план викладення (глави, розділи, підрозділи, параграфи) ;
- визначити обсяг кожної частини;
- привести до ладу увесь зібраний матеріал, вилучити зайве та розподілити по частинам.

Рекомендовано після закінчення кожного розділу уважно його перечитати, а після завершення усієї роботи перечитати її усю наново, звертаючи особливу увагу на взаємозв'язок частин. При цьому досить часто виявляються довгісті, помилки, що раніш не було виявлено, повторення, протиріччя, невдалі звороти тощо.

Додаткова праця, що вкладена в літературну обробку, з лихвою окупається підвищенням якості та доступності матеріалу.

12. Колективне обговорення, консультування, рецензування та оформлення звіту по виконаній науково-дослідній роботі

Це чотири стадії завершального етапу наукового дослідження.

Колективне обговорення проходитиме в науковому колективі з залученням науковців суміжних наукових підрозділів і, бажано, із залученням науковців су-

міжних наукових підрозділів НДІ та ВУЗів. Для підвищення ефективності обговорення доцільно заздалегідь ознайомити усіх запрошених з робочим планом дослідження, з висновками, пропозиціями та з результатами досліджень. В тезисах відображати лише головні питання, не вдаючись до дрібниць.

Консультування та **рецензування** доречно проводити з провідними науковцям в відповідному науковому напрямку (або в суміжних). Кількість рецензентів повинна бути не менш двох.

Після обговорення, отримання консультацій і рецензій необхідно здійснити дороблення матеріалів з врахуванням усіх зауважень та пропозицій, та **оформити звіт по виконаній науково-дослідній роботі.**

13. Впровадження результатів науково-дослідної роботи

Результативність наукового дослідження визначається ступеню його реалізації. Впровадження результатів науково-дослідної роботи – це останній і дуже складний та трудомісткий етап науково-дослідної роботи, що вимагає від дослідника організаційних здібностей, контактності, гнучкості, наполегливості та ініціативності.

Найпростіша і перша форма впровадження – опублікування, тобто наукова дослідження повинно стати суспільним надбанням.

Слід зазначити, що для невеликих за обсягом науково-дослідних робіт етапи 1,6 та 8 можуть бути об’єднані з суміжними етапами.

Наведена послідовність етапів обумовлена логікою процесу дослідження.

При проведенні деяких науково-дослідних робіт можливо виникнення і інших етапів, таких як

- виконання попередніх досліджень;
- впровадження результатів в дослідне виробництво (перед етапом 10);
- польові дослідження тощо.

Усі зазначені етапи щільно пов’язані між собою і тому важко домогтися чіткого розмежування між ними. Наприклад, розробка робочої гіпотези в якійсь мірі

здійснюється практично з першого дня роботи; виявлення на будь-якому етапі несподіваних аспектів чи елементів проблеми призведе до необхідності повторного звернення до літератури тощо.

Один із раціональних варіантів виконання дослідів – розділення експериментальної роботи на чотири частини:

- орієнтувальні дослідження;
- проведення частини дослідів (20-30%);
- вивчення літератури;
- проведення дослідів, що залишилися.

Існують різні, навіть протилежні, рекомендації стосовно послідовності планування і виконання етапів.

Думка 1: спочатку дослідження, а вже потім знайомство з літературою; при цьому дослідник ніби то зберігає повну самостійність міркувань та висновків, але існує загроза дублювання.

Думка 2: неможливо починати дослідження доти, поки не буде вивчена уся необхідна література; але це може викликати небажану затримку експериментальної частини дослідження.

Здається більш раціональним проводити експерименти, не припиняючи знайомство з літературою.

Наукові прийоми, що використовуються при виконанні науково-дослідних робіт:

- ознайомлення з оглядами досягнень науки та техніки;
- ознайомлення з найновішими результатами дослідженнями, що проводилися в суміжних галузях науки та техніки;
- розробка нових, більш ефективних методів дослідження, нових алгоритмів, нових принципів конструювання та нових технологічних прийомів на основі найновіших досягнень науки та техніки;
- перегляд колишніх винаходів з нових позицій, використовуючи нові методи

та нові фактичні матервали;

- всебічний аналіз та узагальнення матеріалів;
- консультації з вченими;
- перегляд каталогів (також і захищених дисертацій
-

II. Створення резервів часу

Будь-яка науково-дослідна робота має ризик отримання негативного результату. Саме тому дослідник повинен таким чином організувати виконання науко-во-дослідної роботи, щоб передбачити можливість переробити частину роботи, використовуючи метод спроб і помилок, чи передбачити час для виконання ще декількох додаткових варіантів.

III. Фіксація ходу дослідження та забезпечення реєстрації отриманої інформації

Фіксація та реєстрація забезпечуються усіма доступними засобами, починаючи з найпростішого – ведення щоденника.

ГЛАВА 4 МЕТОДИ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В КОМПЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ

Усі методи відображення та перетворення, які використовуються в комп'ютерних системах, можемо поділити на такі групи:

1. **Методи підбору.**
2. **Методи еквівалентних перетворень.**
3. **Квазіаналогові методи.**
4. **Приблизні методи.**

1.Методи підбору

1.1. Метод ручного підбору.

1.2. Метод примусового опитування дійсної осі.

1.3. Метод примусового опитування часової осі.

1.4. Метод примусового опитування комплексної площини.

1.5. Метод порозрядного зрівноваження.

1.6. Метод мінімізації.

1.7. Метод простої ітерації.

1.8. Метод ітерації по Гаусу-Зейделю.

1.9. Метод неявних функцій (автоматичного підбору).

1.10. Метод штучної оборотності.

1.1. Метод ручного підбору

Нехай маємо будь-яке рівняння $\mathbf{F(x)=0}$ (наприклад, поліном **n**-го порядку $\mathbf{P_n(x)=0}$) і необхідно знайти усі дійсні значення **x**, тобто знайти $\mathbf{x_i^*}$ ($\mathbf{i=\overline{1,n}}$), які задовольняють цьому рівнянню. Тоді припускаємо, що змінна **x** є відомою змінною, і вводимо нову невідому змінну **ε**, яка дорівнює **F(x)**, тобто $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{=F(x)}$. Якщо виконати моделювання цього рівняння, отримаємо деяку обчислювальну систему (Рис.13), на вхід якої необхідно подавати машинну змінну, яка відображає

математичну змінну **x**, і тоді на виході отримаємо машинну змінну, яка відображає математичну змінну **ε.**

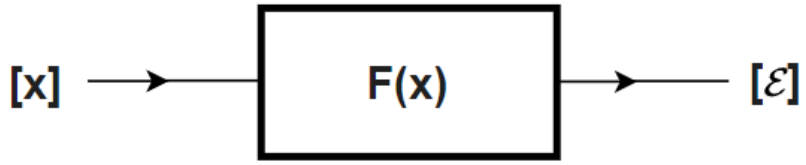

Рис.13

P.S.: Якщо на будь-якому рисунку маємо зображення будь-якої математичної змінної, яка має обрамлення у вигляді квадратних дужкок, -- це означає, що там існує не зазначена математична змінна, а машинна змінна, яка її відображає.

P.P.S.: Реалізація може бути програмною, або апаратною (з використанням операційних блоків).

Якщо підібрати таке значення **x**, при якому **ε** буде дорівнювати нулю (**ε=0**), то це значення є одним з коренів рівняння $\mathbf{F(x)=0}$, тобто $\mathbf{x=x_i^*}$. Далі необхідно виключити знайдений корінь, отримати нове рівняння $\mathbf{F_1(x)=0}$ $\mathbf{[P_{n-1}(x)=0]}$ та повторювати зазначену дію, аж поки не будуть знайдені усі корені.

1.2. Метод примусового опитування дійсної осі.

Метод примусового опитування дійсної осі використовує алгоритм послідовного перебору усіх можливих дійсних значень **x** при знаходженні дійсних коренів рівняння $\mathbf{F(x)=0}$. Отже необхідно послідовно змінювати значення **x** від **-∞** до **+∞**, тобто зробити послідовне опитування усіх точок дійсної осі. Опитування діапазону **-∞÷+∞** здійснюється за два етапи: на першому етапі здійснюється опитування діапазону **-1÷+1** дійсної осі і знаходяться значення коренів, які розташовані в цьому діапазоні, тобто $\mathbf{-1 \le x_i^* \le +1}$. На другому вводиться заміна **x=1/z**, отримується нове рівняння $\mathbf{F_1(z)=0}$ та нова змінна $\mathbf{\varepsilon_1=F_1(z)}$. Знову виконується моделювання рівняння $\mathbf{\varepsilon_1=F_1(z)}$ (Рис.14) та знову здійснюється

опитування діапазону **-1÷+1** дійсної осі і знахо-дяться значення коренів, які розташовані в цьому діапазоні, тобто $-1 \le z_i^* \le +1$.

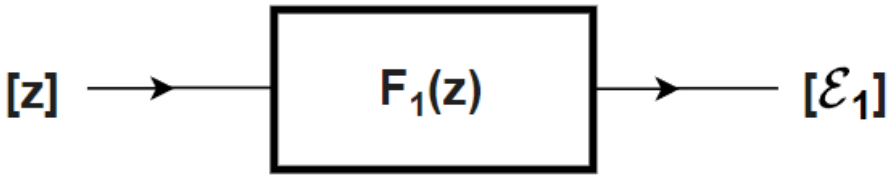

Рис.14

Відповідні значення x_i^* можемо знайти, використовуючи формулу $x^*=1/z^*$. Слід зазначити, що діапазону $0< z_i^* \le +1$ відповідає діапазон $+\infty > x_i^* \ge +1$, а діапазону $-1 \le z_i^* \le 0$ відповідає діапазон $+\infty > x_i^* \ge +1$.Таким чином , за два етапи здійснюється опитування усіх точок дійсної осі. Слід зазначити, що цей метод не дозволяє одразу встановити кратність дійсних коренів.

В якості прикладу використання метода примусового опитування дійсної осі розглянемо аналого-цифровий перетворювач (АЦП) послідовного рахування, який перетворює напругу $U_x(\tau)$ (вхідна аналогова машинна змінна АЦП) в **n**-розрядний цифровий код двійкової (або двійково-десяткової) системи обчислень числа **A** (вихідна цифрова машинна змінна АЦП). Схему такого АЦП представлено на рис.15, де **n /** означає: **n**-розрядна групова лінія зв'язку; **#** - означає «цифрова інформація»; **^** - означає «аналогова інформація»; **==** - схема порівняння; **CT** – лічильник; **D/A** – цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП); **RG** – регістр; **CU** - схема управління. Лічильник послідовно змінює цифровий код, починаючи з мінімального значення $[0$ або $-(1-2^{-n})]$ і закінчуючи максимальним значенням $(1-2^{-n})$. Відповідно, ЦАП формує послідовність напруг з послідовності кодів, тобто формує 2^n значень $E_i=2^{-i}U_{max}$ $(i=\overline{0,2^n-1})$. В той момент часу τ, коли ΔU буде дорівнювати нулю $[\Delta U=U_x-E_i=0]$, тобто значення E_i зрівняється з значенням U_x, схема управління дозволяє це значення записати в регістр **RG**, в якому і формується вихідний код числа **A**. Час одного перетворення в такому АЦП складає $\tau_1=2^n\Delta\tau$, де 2^n – кількість тактів, а $\Delta\tau$ - час такту.

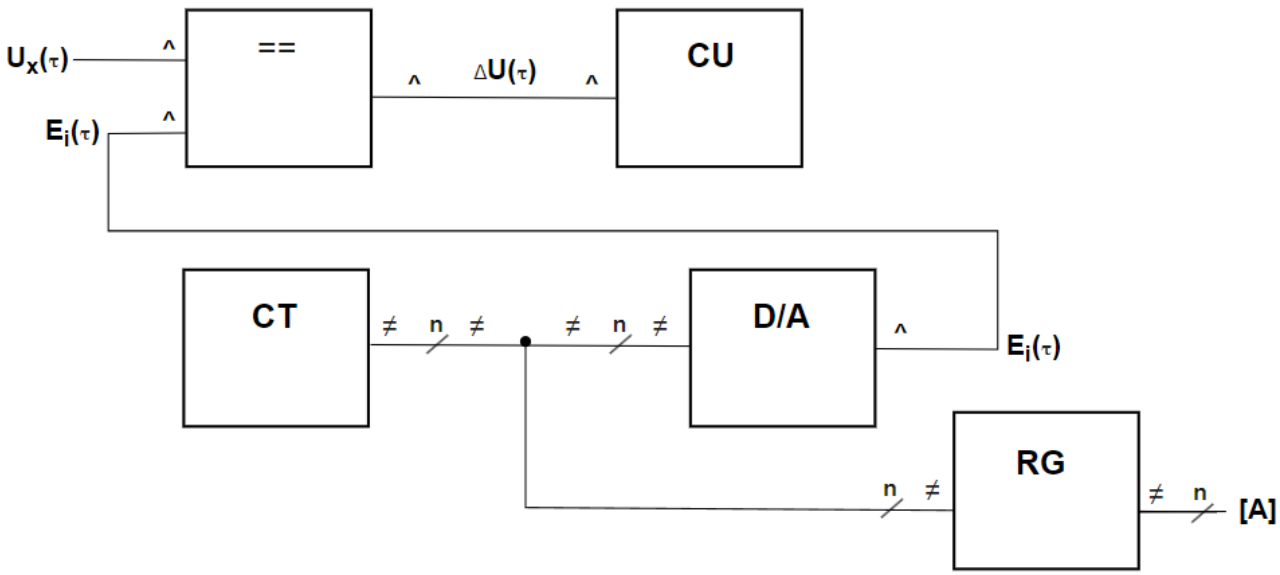

Рис.15

1.3. Метод примусового опитування часової осі

Метод примусового опитування часової осі також використовує алгоритм послідовного перебору усіх можливих дійсних значень **x** при знаходженні дійсних коренів рівняння $\mathbf{F(x)=0}$, але опитування діапазону $-\infty \div +\infty$ здійснюється за чотири етапи: на першому етапі вводиться заміна $\mathbf{x=t}$, отримується нове рівняння $\mathbf{F_1(t)=0}$ та нова змінна $\boldsymbol{\varepsilon_1=F_1(t)}$, здійснюється опитування діапазону $\mathbf{0 \div +1}$ і знаходяться значення коренів $\mathbf{t_i^*}$, які розташовані в цьому діапазоні, тобто $\mathbf{0 \le t_i^* \le +1}$; перерахунок по формулі $\mathbf{x^*=t^*}$. На другому етапі вводиться заміна $\mathbf{x=-t}$, отримується нове рівняння $\mathbf{F_2(t)=0}$ та нова змінна $\boldsymbol{\varepsilon_2=F_2(t)}$, знову здійснюється опитування діапазону $\mathbf{0 \div +1}$ і знаходяться значення коренів $\mathbf{t_i^*}$, які розташовані в цьому діапазоні, тобто $\mathbf{0 \le t_i^* \le +1}$; перерахунок по формулі $\mathbf{x^*=-t^*}$. На третьому етапі вводиться заміна $\mathbf{x=1/t}$, отримується нове рівняння $\mathbf{F_3(t)=0}$ та нова змінна $\boldsymbol{\varepsilon_3=F_3(t)}$, здійснюється опитування діапазону $\mathbf{0 \div +1}$ і знаходяться значення коренів $\mathbf{t_i^*}$, які розташовані в цьому діапазоні, тобто $\mathbf{0 \le t_i^* \le +1}$; перерахунок по формулі $\mathbf{x^*=1/t^*}$. На четвертому етапі вводиться заміна $\mathbf{x=-1/t}$, отри-

мується нове рівняння $F_4(t)=0$ та нова змінна $\varepsilon_4=F_4(t)$, здійснюється опитування діапазону $0\div+1$ і знаходяться значення коренів t_i^*, які розташовані в цьому діапазоні, тобто $0\le t_i^*\le+1$; перерахунок по формулі $x^*=-1/t^*$. Таким чином, дослідивши чотири функції часу, отримаємо значення усіх дійсних коренів, але не можемо встановити кратність дійсних коренів.

1.4. Метод примусового опитування комплексної площини

Нехай маємо будь-яке рівняння $F(z)=0$ і необхідно знайти усі комплексні значення z, тобто знайти $z_i^*(i=1,n)$, які задовольняють цьому рівнянню. Комплексну змінну z можемо зобразити в показниковій формі наступним чином: $z=re^{j\varphi}$, а комплексне значення кореня z_i^* можемо замінити двома дійсними значеннями r_i^* та φ_i^*. В такому випадку, зробивши в рівнянні $F(z)=0$ заміну $z=re^{j\varphi}$, можемо, замість одного рівняння в комплексній площині, розглядати два дійсних рівняння $F_1(r,\varphi)=0$ та $F_2(r,\varphi)=0$ з дійсними змінними r та φ.

Тоді припускаємо, що змінні r та φ є відомими змінними, і вводимо нові невідомі змінні ε_1 та ε_2, які дорівнюють $F_1(r,\varphi)$ та $F_2(r,\varphi)$ відповідно, тобто $\varepsilon_1=F_1(r,\varphi)$ та $\varepsilon_2=F_2(r,\varphi)$. Якщо виконати моделювання цих рівнянь, отримаємо деяку обчислювальну систему (Рис16), на входи якої необхідно подавати машинні змінні, які відображають математичні змінні r та φ, і тоді на виходах отримаємо машинні змінні, які відображають математичні змінні ε_1 та ε_2.

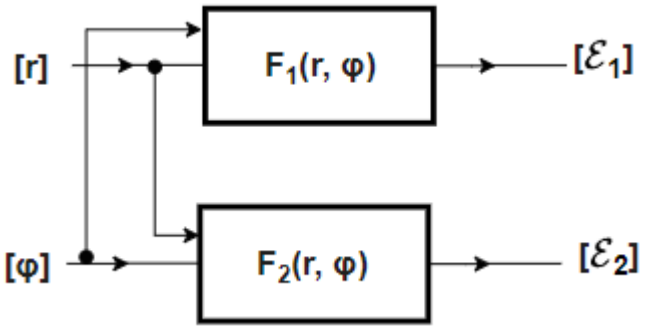

Рис.16

Якщо підібрати такі значення $\mathbf{r}$ та φ, при яких ε_1 та ε_2 одночасно будуть дорівнювати нулю ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$), то ці дійсні значення (r_i^* та φ_i^*) формують один з комплексних коренів рівняння $F(z)=0$, тобто $z=z_i^*=r_i^* e^{j\varphi_i^*}$. Метод примусового опитування комплексної площини використовує алгоритм послідовного перебору усіх можливих комплексних значень z при знаходженні комплексних коренів рівняння $F(z)=0$, тобто шляхом послідовного перебору усіх можливих комбінацій двох дійсних значень r та φ. Кожна комбінація двох дійсних значень r та φ відповідає одному значенню комплексного числа z, тобто одній точці комплексної площини. Таким чином, послідовний перебір усіх можливих комбінацій двох дійсних значень r та φ -- це послідовне опитування усіх точок комплексної площини. При цьому $0\le r\le\infty$, а $0\le\varphi\le 2\pi$.

Опитування усіх точок комплексної площини здійснюється за два етапи: на першому етапі здійснюється опитування частини комплексної площини, обмеженої колом, радіус якого R дорівнює одиниці ($R=1$), тобто усі точки круга одиничного радіусу ($0\le r\le 1$, а $0\le\varphi\le 2\pi$). Послідовне опитування може виконуватися різними методами (розгортка по горизонтальним лініям, як у телебаченні; по вертикальним, як у більд-телеграфії; по колам; по радіусам тощо), але найчастіше - по архімедовій спіралі. На цьому етапі знаходяться значення комплексних коренів z_i^*, які розташовані всередині зазначеного круга, тобто значення r_i^* та φ_i^*, які знаходяться в наступних діапазонах: $0\le r_i^*\le 1$, а $0\le\varphi_i^*\le 2\pi$. На другому етапі вводиться заміна $z=1/y$ та отримується нове рівняння $F_1(y)=0$. Комплексну змінну y можемо зобразити в показниковій формі наступним чином: $y=re^{j\varphi}$, а комплексне значення кореня y_i^* можемо замінити двома дійсними значеннями r_i^* та φ_i^*. Далі робимо в рівнянні $F(y)=0$ заміну $y=re^{j\varphi}$, і замість одного рівняння в комплексній площині отримаємо два дійсних рівняння $F_1(r,\varphi)=0$ та $F_2(r,\varphi)=0$ з дійсними змінними r та φ. Після цього повторюємо усі дії першого етапу, але вже з y (замість z), з $r, r_i, r_i^*, \varphi, \varphi_i$ та φ_i^* (замість $r, r_i, r_i^*, \varphi, \varphi_i$ та φ_i^*).

Таким чином знаходимо значення комплексних коренів $\mathbf{y_i^*}$, які розташовані всередині зазначеного круга, тобто значення $\boldsymbol{r_i^*}$та $\boldsymbol{\varphi_i^*}$, які знаходяться в наступних діапазонах: $\mathbf{0 \le r_i^* \le 1}$, а $\mathbf{0 \le \varphi_i^* \le 2\pi}$. Відповідні значення $\mathbf{z_i^*}$ можемо знайти, використовуючи формулу $\mathbf{z_i^* = 1/y_i^*}$, тобто значення $\mathbf{r_i^*}$та $\boldsymbol{\varphi}_i^*$ за формулами: $\mathbf{r_i^* = 1/}\boldsymbol{r_i^*}$, $\boldsymbol{\varphi}_i^* = -\boldsymbol{\varphi_i^*}$. Таким чином, двічі дослідивши функції $\mathbf{F_1}$ та $\mathbf{F_2}$, отримаємо значення усіх комплексних коренів $\mathbf{z_i^*}$, але не можемо встановити кратність знайдених комплексних коренів.

1.5. Метод порозрядного зрівноваження

Для розуміння методу порозрядного зрівноваження розглянемо процес зважування товару, вага якого, наприклад, не перевищує 15кг. Маємо вагові гирі 1кг, 2кг, 4кг та 8кг (**n=4**). Якщо використовувати метод примусового опитування дійсної осі, тобто використовувати алгоритм послідовного перебору усіх можливих значень (ваги): 1кг,2кг,3кг,4кг……15кг, тоді може знадобитися до 15 зважувань ($\mathbf{2^n-1=15}$ для **n=4**). Але є можливість суттєво зменшити кількість зважувань, якщо використати інший алгоритм: беремо вагову гирю 8кг (максимальної ваги) та перевіряємо, товар важить більше 8 кг чи менше: якщо більше – гирю 8кг залишаємо (якщо менше – знімаємо) і додаємо наступну гирю 4кг. Знову перевіряємо, товар важить більше чи менше гирі 4кг (чи двох гирь 8кг та 4кг): якщо більше – гирю 4кг залишаємо (якщо менше – знімаємо) і додаємо наступну гирю 2кг. Знову перевіряємо, товар важить більше чи менше гирі (чи двох чи трьох гирь): якщо більше – гирю 2кг залишаємо (якщо менше – знімаємо) і додаємо наступну гирю 1кг. Знову перевіряємо, товар важить більше чи менше гирі (чи двох, чи трьох, чи чотирьох гирь): якщо більше – гирю 1кг залишаємо (якщо менше – знімаємо). Процес зважування завершено за 4 рази (для **n=4**). Такий алгоритм має назву «з поділом навпіл», метод має назву «метод порозрядного зрівноваження», а АЦП, який це використовує, має назву «АЦП порозрядного зрівноваження». Схему такого АЦП представлено на рис.17, де **SARG** – регістр послідовних наближень.

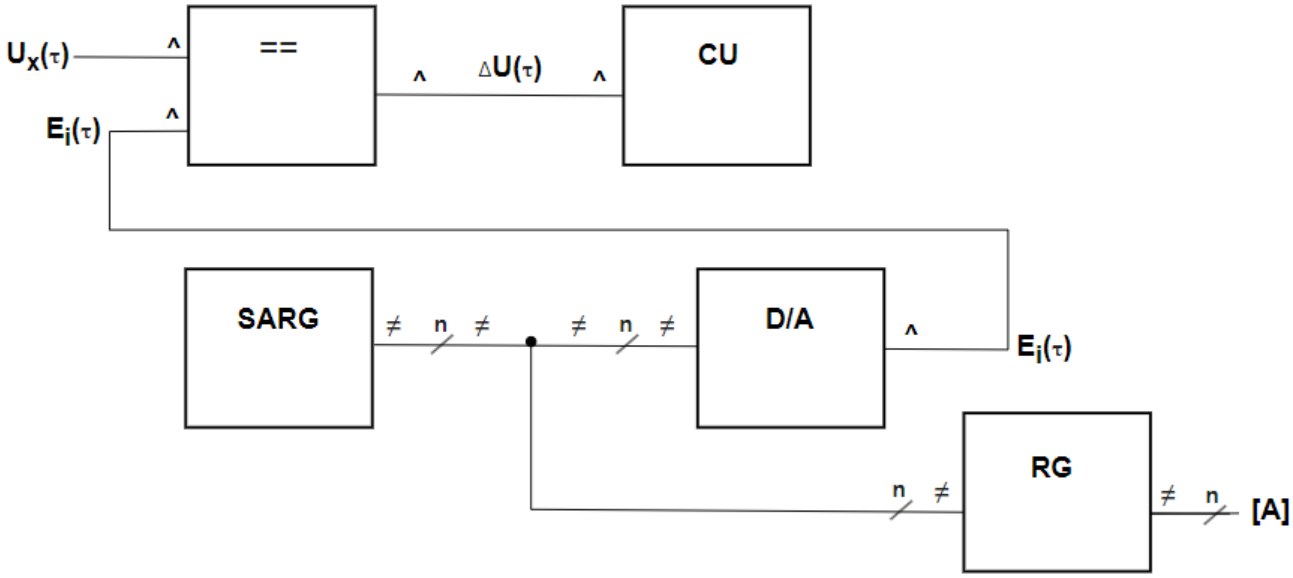

Рис.17

Регістр послідовних наближень **SARG** – це різновид зсувного регістру з зсувом в правий бік (до молодших розрядів); при цьому в розряд, що звільнюється, вноситься **1**. Відмінність SARG у тому, що є можливість управління інформацією в розряді, що зміщується (**1** може зсуватись, або перетворюватися в **0** і зсуватись).

Початковий стан **SARG** – $a_i=0$, $i=(\overline{1,n})$, де a_i $(i=\overline{1,n})$ – значення **i**-го розряду цифрового коду числа **A**, **n** – старший розряд. Перший такт такий: $a_n=1$, $a_i=0$ $(i=\overline{1,n-1})$, тобто ЦАП формує значення $E_1= 2^{-1}U_{max}$, а схема управління здійснює зсув інформації в правий бік і, в залежності від полярності $\Delta U=U_x-E_1$, перетворює **1**, що зсувається, в **0**, якщо $\Delta U<0$ $(U_x<E_1)$, або не перетворює, якщо $\Delta U>0$ $(U_x>E_1)$. Отже після першого такту і зсуву $a_n=1$, a_{n-1} дорівнює **0** або **1**, $a_i=0$, $(i=\overline{1,n-2})$. Така процедура повторюється **n** разів (**n** тактів роботи АЦП); кожного разу визначається значення наступного розряду, починаючи зі старшого.

Час одного перетворення в АЦП порозрядного зрівноваження складає $\tau_1=n\Delta\tau$, де **n** – кількість тактів, а $\Delta\tau$ - час такту. Таким чином, швидкодія АЦП порозрядного зрівноваження суттєво більша, ніж швидкодія АЦП послідовного рахування, тому що кількість тактів **n** замість 2^n (для **n=16 --- 16** тактів замість **65 536**).

Слід зазначити, що існують сучасні АЦП (АЦП паралельної дії), які дозволяють здійснити перетворення за **1** такт. В таких АЦП формування усіх 2^n значень напруги $E_i=2^{-i}U_{max}$ $(i=\overline{0,2^n-1})$ здійснюється одночасно в просторі з допомогою формувача напруг, на відміну від АЦП послідовного рахування, в якому формування усіх 2^n значень здійснюється послідовно в часі. Це дає можливість одночасно зрівнювати вхідну напругу U_x з усіма значеннями $E_i=2^{-i}U_{max}$ $i=(\overline{0,2^n-1})$, для чого використовуються 2^n схем порівняння. На виходах схем порівняння з'являється 2^n-розрядний унарний код, який перетворюється в **n**-розрядний двійковий код числа **A** з допомогою перетворювача кодів $2^n/n$. Виграли в швидкодії – програли в обладнанні.

1.6. Метод мінімізації (мінімізаційного спускання)

Нехай маємо систему **n** лінійних рівнянь з **n** невідомими x_i $(i=\overline{1,n})$:

$$\sum_1^n a_{ik}x_k=b_i \ (i=\overline{1,n}),$$

яку умовно представимо наступним чином:

$$F_i(x_1, x_2 \dots x_n)=0 \ (i=\overline{1,n}),$$

де $F_i(x_1, x_2 \dots x_n)=\sum_1^n a_{ik}x_k-b_i$.

Необхідно знайти значення коренів x_i^* $(i=\overline{1,n})$, які задовольняють заданій системі. Тоді припускаємо, що змінні x_i, $i=(1,n)$ є відомими змінними, і вводимо нові невідомі змінні $\varepsilon_i=F_i(x_1, x_2 \dots x_n)$ $(i=\overline{1,n})$. Якщо виконати моделювання цієї системи, отримаємо деяку обчислювальну систему (Рис.18), на входи якої необхідно подавати машинні змінні, які відображають математичні змінні x_i $(i=\overline{1,n})$, і тоді на виходах отримаємо машинні змінні, які відображають математичні змінні ε_i $(i=\overline{1,n})$.

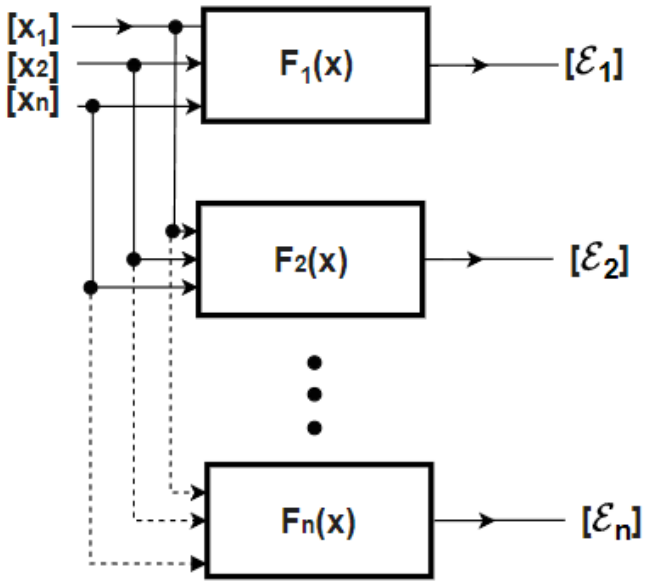

Рис.18

P.S.: На схемі рис.18 $\mathbf{F_i(x_1, x_2 \ldots x_n)}$, $\mathbf{i=(\overline{1,n})}$ умовно позначено, як $\mathbf{F_i(X)}$, $\mathbf{i=(\overline{1,n})}$.

Якщо підібрати такі значення $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{i=(\overline{1,n})}$, при яких усі $\boldsymbol{\varepsilon_i}$, $\mathbf{i=(\overline{1,n})}$ одночасно будуть дорівнювати нулю $\mathbf{[\varepsilon_i=0,\ i=(\overline{1,n})]}$, то ці значення і є коренями $\mathbf{x_i^*}$ розглядуваної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\sum_1^n \mathbf{a_{ik}x_k=b_i}$, $\mathbf{i=(\overline{1,n})}$. Але не існує алгоритму для такого підбору, оскільки маємо **n** вхідних змінних та **n** вихідних змінних. Для здійснення підбору необхідно мати один критерій підбору, який і пропонується в методі мінімізації, а саме: $\boldsymbol{\mu}=\sum_1^n \boldsymbol{\varepsilon_i}^2$, тобто $\boldsymbol{\mu}$ дорівнює сумі квадратів відхилень ($\boldsymbol{\varepsilon_i}$). Таким чином, для реалізації метода мінімізації треба змінити схему обчислювальної системи, додавши до схеми рис.18 функціональні перетворювачі та суматор (Рис. 19).

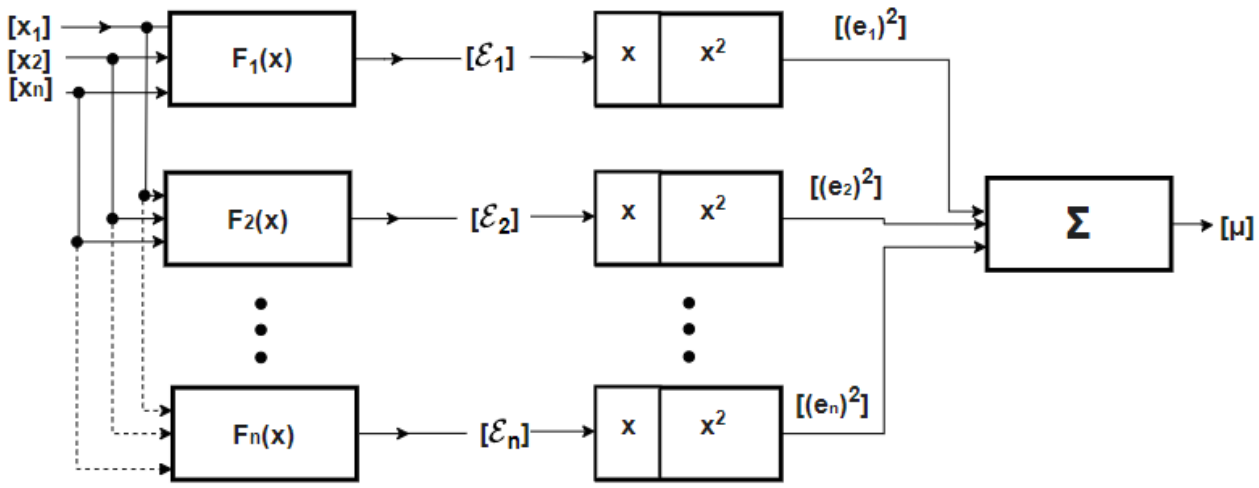

Рис.19

P.S.: *Рреалізація може бути як програмною, так і апаратною (з використанням операційних блоків).*

Слід зазначити, шо залежність будь-якої змінної ε_i від будь-якої змінної x_k, тобто $\varepsilon_i(x_k)$, - лінійна; залежність змінної ε_i^2 від будь-якої змінної x_k, тобто $\varepsilon_i^2(x_k)$, - квадратична; залежність змінної μ від будь-якої змінної x_k, тобто $\mu\ (x_k)$ також квадратична (сума квадратичних залеж-ностей також квадратична залежність). Отже, залежність $\mu\ (x_1, x_2 \ldots x_n)$ – фігура в **(n+1)**-ному просторі, а саме **(n+1)**-ний параболоїд (для **n=2 –** тривимірний параболоїд), який має в кожному перерізі **n**-мірною площиною параболу $\mu(x_k)$. Цей **(n+1)**-ний параболоїд позитивно визначений ($\mu \geq 0$) і має єдину точку мінімуму $\mu=0$ (для **n=2 -** форма **чаші**). Координати цієї точки мінімуму по осях координат x_i, $i=(1,n)$ мають значення коренів $[x_i=x_i^*,\ i=(1,n)]$. Якщо змінювати значення будь-якої вхідної змінної (x_k), то точка на графіку $\mu(x_k)$ переміщується по параболі (по стінці чаші). Оскільки кінцева мета підбору – досягти значення $\mu=0$, необхідно поступово спускаючись по стінкам чаші, потрапити на дно чаші. Таким чином, алгоритм методу мінімізації такий: послідовно змінювати вхідні змінні (спочатку x_1, потім $x_2 \ldots x_n$, потім знову x_1, $x_2 \ldots x_n \ldots$), кожного разу добиваючись мінімуму

μ, аж поки не отримаємо $\mu=0$, що буде свідчити про закінчення процесу мінімізації, і отримані значення вхідних змінних є коренями системи.

Слід зазначити, що значно частіше використовується інший (більш простіший в реалізації) критерій: $\mu=\sum_1^n |\varepsilon_i|$.

1.7. Метод простої ітерації

Нехай маємо систему **n** лінійних рівнянь **з n** невідомими x_i $i=(1,n)$:

$$\sum_1^n a_{ik}x_k=b_i \ (i=\overline{1,n}),$$

яку перетворимо наступним чином:

$$x_i=f_i(x_1, x_2 \dots x_n) \ (i=\overline{1,n}),$$

де $f_i(x_1, x_2 \dots x_n)=\sum_1^n a_{ik}x_k-b_i+x_i$.

Необхідно знайти значення коренів $x_i^*(i=\overline{1,n})$, які задовольняють заданій системі.

Метод простої ітерації полягає в наступному:

0бираємо деякий початковий набір значень для невідомих, який позначаємо як x_i^0 $(i=\overline{1,n})$; цей набір підставляємо замість x_i $(i=\overline{1,n})$ в праву частину першо-го рівняння і отримаємо нове значення x_1, яке позначимо як x_1^1 (це перший такт першого циклу ітерації). Той самий початковий набір підставляємо за-мість x_i, $(i=\overline{1,n})$ в праву частину другого рівняння і отримаємо нове значення x_2, яке позначимо як x_2^1 (це другий такт першого циклу) і т.д.. Виконавши **n** тактів першого циклу, отримаємо новий набір x_i^1 $(i=\overline{1,n})$.

При виконанні першого такту другого циклу новий набір x_i^1 $(i=\overline{1,n})$ підставляємо замість x_i $(i=\overline{1,n})$ в праву частину першого рівняння і отримаємо нове значення x_1, яке позначимо як x_1^2; аналогічно після другого такту отримаємо x_2^2 і т.д., поки, виконавши **n** тактів другого циклу, не отримаємо повний набір x_i^2, $(i=\overline{1,n})$.

Цикли повторюються до тих пір, поки усі значення набору після виконання **m**-го циклу, тобто значення x_i^m ($i=\overline{1,n}$), не будуть дорівнювати усім значенням набору після виконання попереднього (**m-1**)-го циклу, тобто значенням x_i^{m-1} ($i=\overline{1,n}$) $[x_i^m \approx x_i^{m-1}$ ($i=\overline{1,n}$)$]$ з наперед заданою точністю.

Слід зазначити, що, при використанні методу простої ітерації, необхідне порівняння наборів може виконуватись послідовно (по одному значенню після кожного такту циклу) або одночасно (усі значення, отримані в **n** тактах циклу, порівнюються після закінчення циклу).

Але, перш ніж використовувати метод простої ітерації, необхідно пересвідчитись в тому, що процес ітерації буде збігатися, перевіривши математичні умови збіжності простої ітерації. Якщо при перевірці з'ясується, що процес ітерації для системи рівнянь, що розглядається, не збігається, - необхідно попередньо виконати тотожні перетворення системи і отримати еквівалентну систему рівнянь, для якої процес ітерації збігається.

P.S.: Реалізація методу простої ітерації вимагає використання **2n** елементів пам'яті для двох наборів (наступного і попереднього).

1.8. Метод ітерації по Гаусу-Зейделю

Метод ітерації по Гаусу-Зейделю відрізняється від методу простої ітерації тим, що заміни усіх значень x_i^s на x_i^{s+1} в будь-якому наборі $\{x_i^s$ ($i=\overline{1,n}$), ($s=\overline{1,m}$)$\}$ здійснюється не одночасно після закінчення циклу (після виконання усіх тактів циклу), а послідовно після кожного такту циклу. При цьому необхідно робити порівняння наборів обов'язково після кожного такту циклу, тобто виключно послідовно, а не одночасно по закінченню циклу.

P.S.: Реалізація методу ітерації по Гаусу-Зейделю вимагає використання лише (**n+1**)-го елемента пам'яті для зберігання набору, який складається з **n** значень, плюс одне нове значення, яке обчислюється при виконанні такту.

1.9. Метод неявних функцій (автоматичного підбору)

Нехай маємо будь-яке рівняння $F(y,x_1,x_2,\ldots x_m,t)=0$, де $y(t)$ – деяка невідома залежна змінна, $x_i(t)$ ($i=\overline{1,m}$) - відомі залежні змінні, а **t -** незалежна змінна

(реальний час). Необхідно знайти таку функцію часу $\mathbf{y^*(t)}$, яка задовольняє цьому рівнянню. Тоді припускаємо, що невідома залежна змінна **y(t)** також є відомою змінною, і вводимо нову невідому змінну $\boldsymbol{\varepsilon(t)=F(y,x_1,x_2,\ldots x_m,t)}$. Якщо виконати моделювання цього рівняння, отримаємо деяку обчислювальну систему (Рис.20), на один вхід якої необхідно подавати машинну змінну, яка відображає математичну змінну **y(t)**, а на інші **m** входів подавати машинні змінні, які відображають математичні змінні $\mathbf{x_i(t)}$ (i=1,m), і тоді на виході отримаємо машинну змінну, яка відображає математичну змінну **ε(t).**

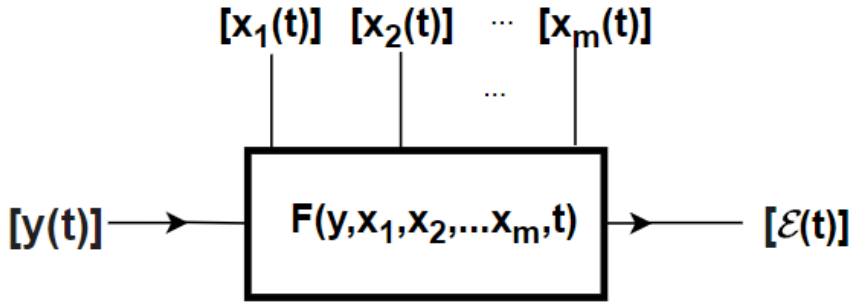

Рис.20

P.S.: Реалізація може бути програмною, або апаратною (з використанням операційних блоків).

Необхідно безперервно (в кожну мить часу) підбирати таке значення вхідної змінної **y**, при якому значення вихідної змінної **ε** буде дорівнювати нулю, тобто необхідно безперервно підтримувати **ε(t)=0**. Ніякої проблеми не було б, якщо б не змінювались значення відомих залежних змінних $\mathbf{x_i(t)}$ ($i=\overline{1,m}$), тому що час підбору в цьому випадку практично не обмежений. Але значення змінних $\mathbf{x_i(t)}$ ($i=\overline{1,m}$) постійно змінюються і тому необхідно встигнути зробити підбір значення вхідної змінної, поки значення відомих залежних змінних ще не встигли змінитись. Це може зробити лише швидкодіюча слідкуюча система (**ШСС**), яка має дуже великий коефіцієнт посилення $\mathbf{k_a}$ ($\mathbf{k_a} \to \infty$) (Рис.21).

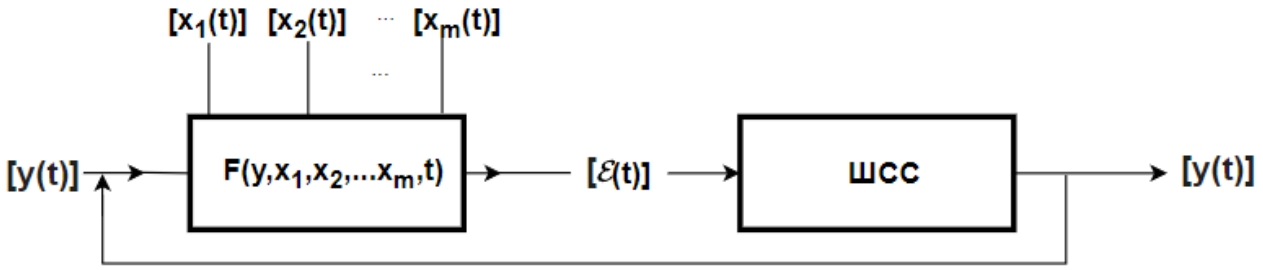

Рис.21

P.S.: При апаратній реалізації $[y(t)]=U_y(\tau)$, а $[\varepsilon(t)]=U_\varepsilon(\tau)$, де τ - незалежна машинна змінна (машинний час).

ШСС відпрацьовує таке значення $[y(t)]\approx[y(t)^*]$, при якому значення $[\varepsilon(t)]=[y(t)]/k_a$ наближається до нуля, оскільки $k_a \to \infty$, а $\varepsilon(t) \to 0$. При цьому, швидкість відпрацьовування повинна бути що найменш на порядок більша, ніж швидкість зміни значень відомих залежних змінних $x_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$. Для забезпечення усталеного режиму в схемі обов'язково повинен існувати негативний зворотний зв'язок. Значення абсолютної похибки $\Delta y(t)=y(t)-y(t)^*$ буде тим менше, чим більше буде значення k_a. В якості ШСС майже завжди використовується операційний підсилювач (Рис.22).

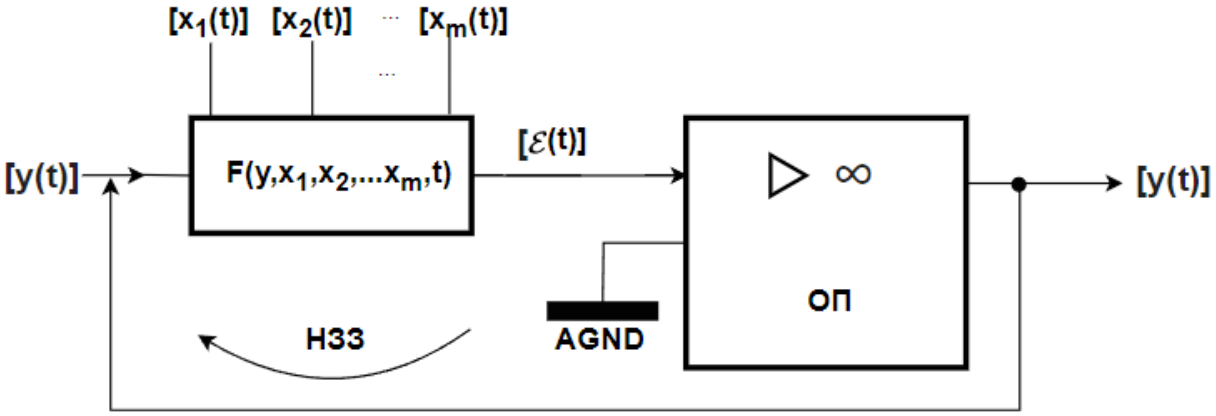

Рис.22

На схемі зображено два входи операційного підсилювача (ОП) – інверсний та прямий, однак вихід обчислювальної системи (ОС) підключено до інверсного входу для забезпечення в схемі негативного зворотного зв'язку (припустили, що

похідна $\mathbf{dF(y,x_1,x_2, ...x_m,t)/dy}$ має невід'ємне значення). Якщо похідна має від'ємне значення – необхідно використовувати прямий вхід.

Метод неявних функцій може використовуватись також і для систем **n** рівнянь з **n** невідомими залежними змінними $\mathbf{y_i(t)}$ $(i=\overline{1,n})$.

Нехай маємо будь-яку систему двох рівнянь з двома невідомими залежними змінними

$\mathbf{y_1(t)}$ та $\mathbf{y_2(t)}$: $\mathbf{F_1(y_1,y_2, x_1,x_2, ...x_m,t)=0}$ і $\mathbf{F_2(y_1,y_2, x_1,x_2, ...x_m,t)=0}$,

де $\mathbf{x_i(t)}$ $(i=\overline{1,m})$ - відомі залежні змінні, а **t -** незалежна змінна.

Необхідно знайти такі функції часу $\mathbf{y_1^*(t)}$ та $\mathbf{y_2^*(t)}$, які задовольняють рівнянням цій системі.

Тоді припускаємо, що невідомі залежні змінні $\mathbf{y_1(t)}$ та $\mathbf{y_2(t)}$ також є відомими змінними, і вводимо нові невідомі змінні $\boldsymbol{\varepsilon_1(t)}$ та $\boldsymbol{\varepsilon_2(t)}$, які дорівнюють відповідно

$\mathbf{F_1(y_1,y_2, x_1,x_2, ...x_m,t)}$ та $\mathbf{F_2(y_1,y_2, x_1,x_2, ...x_m,t)}$,

тобто маємо:

$$\boldsymbol{\varepsilon_1(t)=F_1(y_1,y_2, x_1,x_2, ...x_m,t)} \text{ та } \boldsymbol{\varepsilon_2(t)=F_2(y_1,y_2, x_1,x_2, ...x_m,t)}.$$

Якщо виконати моделювання цієї системи, можемо отримати два варіанти обчислювальної системи ОС1 та ОС2 (Рис.23 та Рис.24) з двома швидкодіючими слідкуючими системами, в якості яких використовуються операційні підсилювачі ОП1 та ОП2.

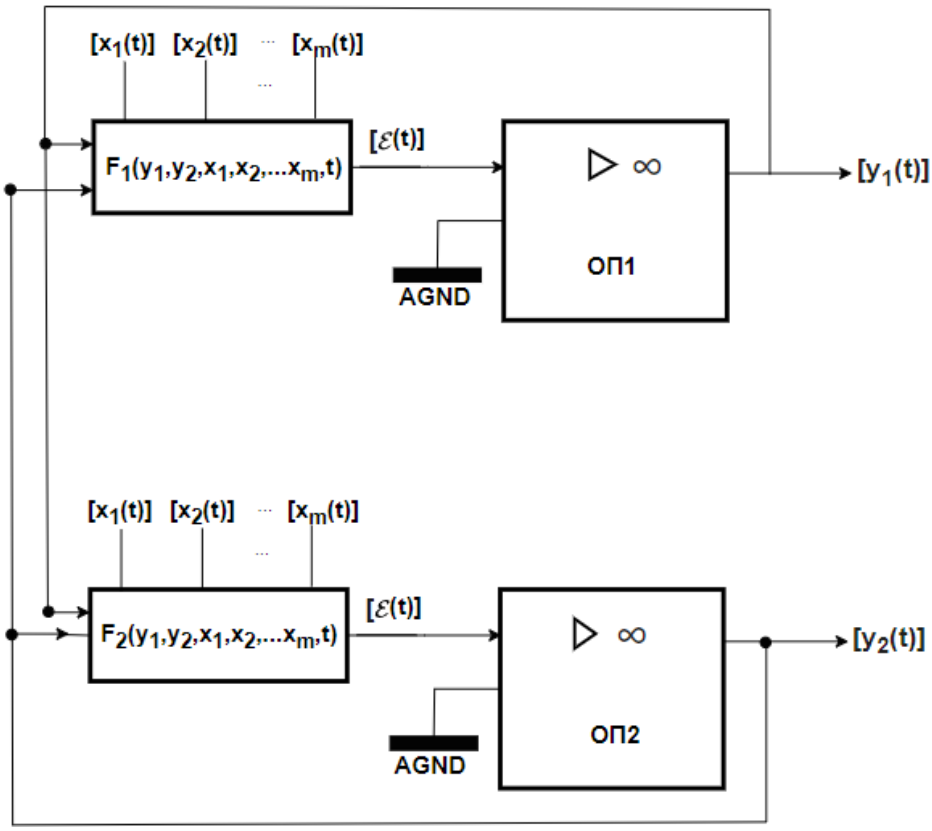
[x1(t)] [x2(t)] ... [xm(t)]
F1(y1,y2,x1,x2,...xm,t)
[ℰ(t)]
∞
ОП1
AGND
[y1(t)]
[x1(t)] [x2(t)] ... [xm(t)]
F2(y1,y2,x1,x2,...xm,t)
[ℰ(t)]
∞
ОП2
AGND
[y2(t)]

Рис.23

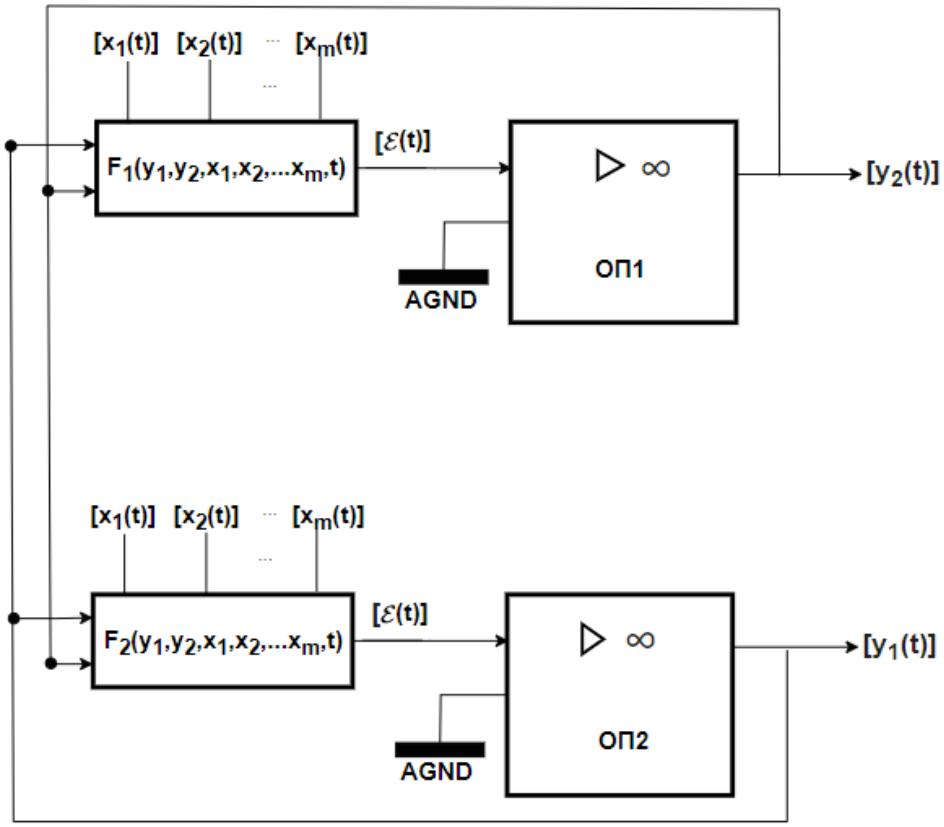
[x1(t)] [x2(t)] ... [xm(t)]
F1(y1,y2,x1,x2,...xm,t)
[ℰ(t)]
∞
ОП1
AGND
[y2(t)]
[x1(t)] [x2(t)] ... [xm(t)]
F2(y1,y2,x1,x2,...xm,t)
[ℰ(t)]
∞
ОП2
AGND
[y1(t)]

Рис.24

В першому варіанті перша слідкуюча система відпрацьовує таке значення $[y_1(t)]\approx[y_1(t)^*]$ для обох ОС, при якому значення $[\varepsilon_1(t)]=[y_1(t)]/k_{a1}$ наближається до нуля, оскільки $k_{a1}\to\infty$, а $\varepsilon_1(t)\to 0$, а друга слідкуюча система відпрацьовує таке значення $[y_2(t)]\approx[y_2(t)^*]$ для обох ОС при якому значення $[\varepsilon_2(t)]=[y_2(t)]/k_{a2}$ наближається до нуля, оскільки $k_{a2}\to\infty$, а $\varepsilon_2(t)\to 0$. В цих схемах використані інверсні входи, що відповідає невід'ємним значенням похідних; в інших випадках необхідно використовувати прямий вхід.

В другому - перша слідкуюча система відпрацьовує значення $[y_2(t)]\approx[y_2(t)^*]$ для обох ОС, а друга слідкуюча система відпрацьовує значення $[y_1(t)]\approx[y_1(t)^*]$ для обох ОС. Перший варіант має назву «система з паралельними зв'язками», а другий -«система з перехресними зв'язками». Слід зазначити, що для системи **n** рівнянь з **n** невідомими залежними змінними існує лише один варіант системи з паралельними зв'язками $\{[\varepsilon_i(t)]=[y_i(t)]/k_{ai}\ (i=\overline{1,n})\}$, а кількість варіантів з перехресними зв'язками дорівнює кількості можливих переставлень. Обрання варіанту залежить від результатів аналізу конкретних функцій: треба забезпечити в усіх контурах обчислювальної системи, яка має складну систему взаємозв'язаних контурів, наявність від'ємних зворотних зв'язкв.

P.S.: Для **n** =2 та для **n** =3 такий аналіз було зроблено для будь-яких функцій.

P.P.S.: Інколи в літературі для цього методу використовується назва «Метод слідкуючих систем», що некоректно, тому що назва методу базується на його суті, а не на його реалізації.

1.10. Метод штучної оборотності

Розглянемо спочатку поняття «природня оборотність». Взагалі, термін «оборотність» характеризує можливість зміни напрямку обробки інформації в операційному блоці ОБ (чи в операційному вузлі ОВ), який моделює якусь математичну операцію. Таким чином, якщо ОБ (ОВ) моделює будь-яку математичну операцію $\{f(x)\}$ і має природня оборотність, тоді, при зміні напрямку обробки інформації, ОБ (ОВ) буде моделювати обернену операцію $\{f^{-1}(x)\}$.

Але практично усі ОБ є необоротними, тобто неможливо змінити напрямок обробки інформації в ОБ. Метод штучної оборотності дозволяє отримати обернену операцію без зміни напрямку обробки інформації в ОВ, використовуючи при цьому ОВ (чи елемент ОЕ), який моделює відповідну пряму операцію. Нехай необхідно виконати математичну операцію $\mathbf{y=f^{-1}(x)}$, а маємо необоротний ОВ (чи ОЕ), який може виконувати відповідну пряму математичну операцію $\mathbf{f(z)}$. Рівняння $\mathbf{y=f^{-1}(x)}$ можемо зобразити в неявній формі наступним чином: $\mathbf{f(y)=x}$, або $\mathbf{f(y)+(-x)=0}$. Як і у методі неявних функцій вводимо нову змінну $\boldsymbol{\varepsilon}$, яка дорівнює $\mathbf{f(y)+(-x)}$, тобто $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{=f(y)+(-x)=F(y,x)}$, та виконаємо моделювання з використанням ОП (рис.25 та рис.26).

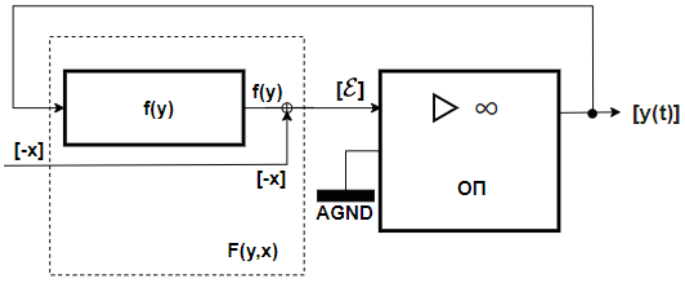

Рис.25

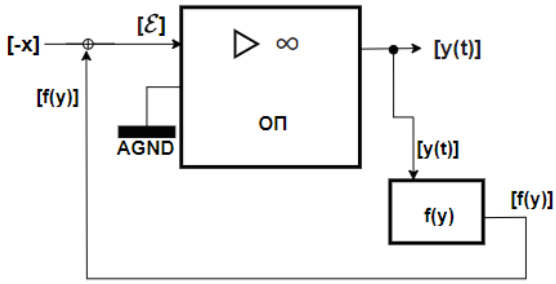

Рис26

В наведених схемах використано інверсний вхід ОП, що відповідає невід'ємному значенню похідної для функції $\mathbf{f}$, тобто для $\mathbf{df/dy\geq 0}$, та забезпечує необхідний негативний зворотний зв'язок. Якщо значення похідної від'ємне – необхідно використовувати прямий вхід ОП.

Слід зазначити, що практично усі ОБ, які побудовані на основі одного ОП, використовують пасивні ОВ (або ОЕ) та інверсний вхід ОП для забезпечення негативного зворотного зв'язку. Таким чином, для моделювання будь-якої оберненої операції, необхідно підключити в коло негативного зворотного зв'язку ОП вузол (або елемент), який моделює відповідну пряму операцію; при цьому характеристика цього вузла (чи елемента) повинна мати виключно невід'ємні значення кутових коефіцієнтів.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Звичайний конденсатор ємністю **C** може розглядатися, як ОЕ, який моделює математичну операцію диференціювання по незалежній змінній (по машинному часу **τ**), якщо вхідна машинна змінна – напруга **U(τ)**, а вихідна - струм **i(τ)**, тому що $\mathbf{i(\tau)=C[dU(\tau)/d\tau]}$. Якщо підключити цей конденсатор в коло негативного зворотного зв'язку ОП, отримаємо ОБ, який моделює обернену (до операції диференціювання) математичну операцію, а саме операцію інтегрування по незалежній змінній (по машинному часу **τ**).

2.Для отримання математичної операції **y=sinx** необхідно підключити в коло негативного зворотного зв'язку ОП оперативний вузол, який моделює операцію **y=arcsinx,** тому, що $\mathbf{arcsinx=sin^{-1}x}$.

3.Для отримання математичної операції $\mathbf{y=antilog_a x}$ необхідно підключити в коло негативного зворотного зв'язку ОП оперативний вузол, який моделює операцію $\mathbf{y=log_a x}$, тому, що $\mathbf{log_a x=antilog_a^{-1} x}$.

Слід зазначити, що в разі використання ОВ, який має **n** входів, тобто моделює функцію **n** змінних $\mathbf{y=f(x_1,x_2, ...x_n)}$, існує **n** варіантів отримання оберненої функції. Наприклад, для математичної операції $\mathbf{y=x_1x_2}$ існує дві обернені операції: $\mathbf{y=x_1/x_2}$ та $\mathbf{y=x_2/x_1}$. Таким чином, для моделювання математичної операції поділу $\mathbf{y=x_1/x_2}$ необхідно підключити в коло негативного зворотного зв'язку ОП операцыйний вузол, який моделює операцію множення $\mathbf{y=x_1x_2}$, задіявши для зворотного зв'язку другий співмножник $\mathbf{x_2}$.

2. Методи еквівалентних перетворень

2.1. Метод тотожних перетворень.

2.2. Метод еквівалентного переходу до іншої системи координат.

2.3. Метод зміщення нуля з наступним корегуванням.

2.4. Метод еквівалентного перетворення систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.5. Метод еквівалентного перетворення диференційних рівнянь.

2.1. Метод тотожних перетворень

Суть методу тотожних перетворень полягає в тому, що одна якась математична операція замінюється тотожним набором інших математичних операцій. Метод дозволяє одну складну математичну операцію замінити тотожним набором більш простих математичних операцій.

Приклади: $\mathbf{xy \equiv 0.25[(x+y)^2-(x-y)^2]}$; $\mathbf{xy \equiv antilog_a[log_a x+log_a y]}$ тощо. В цих прикладах поодинокий випадок нелінійного перетворення двох залежних змінних (множення двох змінних) замінюється двома (або трьома) нелінійними перетвореннями однієї залежної змінної та лінійними перетвореннями однієї (масштабування) та двох залежних змінних (підсумовування та віднімання).

Операційний блок, побудований з використанням методу тотожних перетворень, має назву «Операційний блок непрямої дії».

2.2. Метод еквівалентного переходу до іншої системи координат

На площині відомі лише дві системи координат: прямокутна (Декартова) та полярна, а в просторі із багатьох можливих (прямокутна, циліндрична, сферична, біполярна тощо) практично використовується вісім систем координат. Існує дуже багато наукових досліджень, пов’язаних з рухом усіяких об’єктів (літаки, супутники, керовані снаряди тощо) в тривімірному просторі. Математичний опис у таких випадках різний і залежить від обраної системи координат. В залежності від заданого критерію (точність, швидкодія, кількість обладнання тощо) необхідно в кожному випадку обирати оптимальну систему координат. Слід зазначити, що прямокутна система координат ще ніколи не була оптимальною для будь-якого критерію.

2.3. Метод зміщення нуля з наступним корегуванням

Будь-яка математична змінна $\mathbf{x}$ відображається в обчислювальній системі машинною змінною $\boldsymbol{\theta}$; ці змінні пов'язані масштабним рівнянням $\mathbf{x=M_x\theta}$, де $\mathbf{M_x=const}$ – масштабний коефіцієнт (або масштаб). Диапазону $\mathbf{x_{min}\leq x\leq x_{max}}$, в якому змінюються значення математичної змінної $\mathbf{x}$, відповідає діапазон $\boldsymbol{\theta_{min}\leq\theta\leq\theta_{max}}$, в якому змінюються значення машинної змінної $\boldsymbol{\theta}$. Слід зазначити, що, майже завжди, математична змінна $\mathbf{x}$ біполярна, тобто $\mathbf{x_{min}<0}$, а $\mathbf{x_{max}>0}$ і $\mathbf{x_{min}=-x_{max}}$. Отже, незалежно від значення масштабу $\mathbf{M_x}$, машинна змінна $\boldsymbol{\theta}$ також має буде біполярною, тобто $\boldsymbol{\theta_{min}<0}$, а $\boldsymbol{\theta_{max}>0}$ і $\boldsymbol{\theta_{min}=-\theta_{max}}$.

Але в більшості випадків, в обчислювальних системах машинна змінна уніполярна: в цифрових системах завжди, тому що використовуються системи числення з невід'ємними значеннями вагів розрядів та невід'ємні значеннями цифр; в деяких аналогових ОБ іноді (наприклад в множильному ОБ непрямої дії з логарифмічними перетвореннями $\mathbf{\{xy\equiv antilog_a[log_a x+log_a y]\}}$).

Якщо необхідно виконувати в обчислювальній системі будь-яку математичну операцію над біполярними змінними, але біполярні змінні не можуть існувати, тоді необхідно перетворити біполярні змінні в уніполярні, виконати необхідну математичну операцію над уніполярними змінними, а потім виконати корегування отриманого результату. Скорегований результат повинен дорівнювати результату операції над біполярними змінними.

Перетворення біполярних змінних в уніполярні здійснюється за допомогою методу зміщення нуля. Для такого перетворення використовуються лише лінійні операції: зміщення змінної на сталу величину: $\mathbf{x+C\geq 0,\ C=const}$, або зміщення інвертованої змінної на сталу величину: $\mathbf{x+D\geq 0,\ D=const}$. При використанні методу зміщення нуля треба враховувати, що для виконання зазначених нерівностей значення $\mathbf{C}$ і $\mathbf{D}$ повинні обиратись наступним чином: $\mathbf{C\geq x_{min}}$, а $\mathbf{D\geq -x_{min}}$.

Треба брати до уваги, що усі без винятку коди, які застосовуються в обчислювальних системах для зображення від'ємних чисел, побудовані з використанням методу зміщення нуля. Також зазначаємо, що в наведених прикладах кодування здійснюється для мантиси, тобто для $\mathbf{-1<x<+1}$.

Для двійкової системи числення (**ДСЧ**):

1. Прямий код (**ПК**): для $\mathbf{x\geq 0\ C=0}$; для $\mathbf{x\leq 0\ \ D=1}$.
2. Модифікований прямий код: для $\mathbf{x\geq 0\ \ C=0}$; для $\mathbf{x\leq 0\ \ D=3}$.
3. Зворотний код (**ЗК**): для $\mathbf{x\geq 0\ C=0}$; для $\mathbf{x\leq 0\ C=2-2^{-n}}$.
4. Модифікований зворотний код: для $\mathbf{x\geq 0\ C=0}$; для $\mathbf{x\leq 0\ C=4-2^{-n}}$.
5. Доповняльний код (**ДК**): для $\mathbf{x\geq 0\ C=0}$; для $\mathbf{x\leq 0\ C=2}$.
6. Модифікований доповняльний код: для $\mathbf{x\geq 0\ C=0}$; для $\mathbf{x\leq 0\ C=4}$.
7. Зсунений код (**ЗК**): для $\mathbf{x\geq 0\ C=1}$; для $\mathbf{x\leq 0\ C=1}$.
8. Модифікований зсунений код: для $\mathbf{x\geq 0\ C=3}$; для $\mathbf{x\leq 0\ C=1}$.

Для модифікованого зворотного коду **8421+3** двійково-десяткової системи числення (**ДДСЧ**) **8421**:

для $\mathbf{x\geq 0}$ **C=00.0011 0011 …. …. 0011,** а для $\mathbf{x\leq 0}$ **C=11.1100 1100 …. …. 1100**.

P.S.: Замість терміну «зворотний код» для **ДСЧ** використовується термін «інверсний код».

P.P.S.: В закордонній літературі використовуються інші терміни: замість терміну «зворотний код» використовується термін «код з доповненням до одиниць» (мається на увазі доповнення до коду, який складається з одиниць, тобто до коду **1,11…1**), а замість терміну «доповняльний код» використовується термін «код з доповненням до **2**» (мається на увазі доповнення до коду **10,0…0**).

Для пояснення корегування наведемо приклад для множення двох зсунених кодів двох змінних: $\mathbf{xy\equiv(x+1)(y+1)+(\underline{-x--y-1})}$, де ($\mathbf{\underline{-x--y-1}}$) – корекція результату множення двох зсунених кодів.

2.4. Метод еквівалентного перетворення систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Маємо систему **n** лінійних алгебраїчних рівнянь з **n** невідомими $\mathbf{x_i}$ $(i=\overline{1,n})$:

$$\sum_1^n a_{кi}x_i=b_к \ (к=\overline{1,n}).$$

Припускаємо, що змінні x_i $(i=\overline{1,n})$ є відомими змінними і вводимо нові невідомі змінні $\varepsilon_к$ $(к=\overline{1,n})$, які дорівнюють $\sum_1^n a_{кi}x_i-b_к$, тобто $\varepsilon_к=\sum_1^n a_{кi}x_i-b_к$ $(к=\overline{1,n})$. Помножимо $\varepsilon_к$, тобто $\sum_1^n a_{кi}x_i-b_к$, на $a_{кs}$ і сформуємо суму по індексу $к$ $(к=\overline{1,n})$:

$$\sum_1^n \varepsilon_к a_{кs}=\sum_1^n(\sum_1^n a_{кi}x_i-b_к)a_{кs}=\sum_1^n\{\sum_1^n(a_{кi}a_{кs})x_i-a_{кs}b_к=$$

$$=\sum_1^n\{\sum_1^n(a_{кi}a_{кs})x_i-\sum_1^n\{a_{кs}b_к=0.$$

Якщо позначимо $\sum_1^n a_{кi}a_{кs}$, як c_{si} $(s,i=\overline{1,n})$, тобто $c_{si}=\sum_1^n a_{кi}a_{кs}$ $(s,i=\overline{1,n})$, а $\sum_1^n\{a_{кs}b_к\}$ позначимо як d_s $(s=\overline{1,n})$, тобто $d_s=\sum_1^n\{a_{кs}b_к\}$ $(s=\overline{1,n})$, і тоді отримаємо нову систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_i $(i=\overline{1,n})$:

$$\sum_1^n c_{si}x_i=d_s \ (s=\overline{1,n}).$$

Ця нова система $\left[\sum_1^n c_{si}x_i=d_s \ (s=\overline{1,n})\right]$ еквівалентна початковій системі рівнянь $\left[\sum_1^n a_{кi}x_i=b_к \ (к=\overline{1,n})\right]$, оскільки обидві системи мають однакові значення коренів, але нова система має симетричну матрицю коефіцієнтів

$$c_{si}=c_{is} \ (s=\overline{1,n}),(i=\overline{1,n}),$$

тому що $\sum_1^n a_{кi}a_{кs}=\sum_1^n a_{кs}a_{кi}$ $(s=\overline{1,n})$, $(i=\overline{1,n})$.

Крім того, матриця коефіцієнтів нової системи позитивно визначена, тому що подвійна сума добутків завжди має невід'ємне значення, тобто $\mu=\sum_1^n \varepsilon_к^2 \geq 0$:

$$\mu=\sum_1^n\{\sum_1^n c_{si}x_i\}x_s=\sum_1^n\{\sum_1^n[\sum_1^n a_{кi}a_{кs}]x_i\}x_s=\sum_1^n\{\sum_1^n a_{кi}x_i\}\{\sum_1^n a_{кs}x_s\}=$$

$$=\sum_1^n\{\sum_1^n a_{кi}x_i\}^2=\sum_1^n \varepsilon_к^2.$$

Таким чином, для нової системи виконуються необхідні та достатні умови збіжності процесу ітерації (як простої, так і по Гаусу-Зейделю).

2.5. Методи еквівалентних перетворень диференційних рівнянь

Математичний опис будь-якого об'єкту може мати різні форми: одне диференційне рівняння **n**-го порядку, який має похідні **N** змінних, з **Nn** початковими

умовами (**ДРnN**); система **n** диференційних рівнянь першого порядку з **n** початковими умовами (**СДРn1**) або система диференційних рівнянь різних порядків з відповідною кількістю початкових умов.

Але програми існують лише для задач Коши, тобто для СДРn1, а при математичному моделюванні з використанням операційних блоків в наявності є інтегруючі (або інтегропідсумовуючі) ОБ лише першого порядку.Тому завжди виникає необхідність перетворювати будь-яку форму математичного опису в форму **СДРn1**, яку в подальшому будемо називати універсальним видом **УВ**. Слід зазначити, що будь-яка форма УВ для диференційного рівняння **n**-го порядку, який має похідні **N** змінних (**N>1**), з **Nn** початковими умовами складається з **n** диференційних рівнянь першого порядку з **n** новими початковими умовами та одного лінійного алгебричного рівняння першого порядку з (**n+1**)-єю змінною (**n** нових змінних плюс одна змінна, що залишається). Таку форму УВ для ДРnN будемо позначати, як УВN. Для **N=1** будь-яка форма УВ1 для диференційного рівняння **n**-го порядку являє собою систему **n** диференційних рівнянь першого порядку з **n** новими початковими умовами та з **n** змінними, з яких (**n-1**)-на змінна є новими. Нові початкові умови для будь-якої форми УВN отримуються з рівнянь заміни для **t=0**.

Форма УВN залежить від рівнянь заміни, тобто від того, як нові змінні пов'язані з початковою змінною та її похідними. Рівняння заміни завжди мають вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь $\mathbf{y_i=\sum_1^n a_{i-1,k}p^k y}$ $(i=\overline{1,n})$ і тому форма УВN залежить від матриці коефіцієнтів {**n**x**n** для N=1 або (**n+1**)x(**n+1**) для будь-якого N>1}.

Спочатку розглянемо **еквівалентні перетворення диференційного рівняння n-го порядку, яке містить похідні однієї змінної**, тобто розглянемо різні форми УВ1.

Маємо диференційне рівняння **n**-го порядку, яке містить похідні однієї змінної, тобто ДРn1: $\mathbf{F(p^n y, p^{n-1}y, \ldots py, y, t)=0}$ з початковими умовами $\mathbf{p^k y(0)=C_{k+1}}$

($k=\overline{0,n-1}$), яке необхідно записати відносно похідної найвищого порядку $\mathbf{p^n y}$: $\mathbf{p^n y=f(p^{n-1}y,p^{n-2}y,\ldots py,y,t)}$.

Слід зазначити, що найпростіший варіант матриці коефіцієнтів - діагональна матриця з коефіцієнтами $\mathbf{a_{kk}=1}$($k=\overline{0,n-1}$). Отриману таким чином систему рівнянь УВ1 будемо називати нормальною формою і позначати, як НФ1. Зазначаємо, що (**n-1**)-не рівняння НФ1 отримуємо з рівнянь заміни, починаючи з другого рівняння заміни (тотожність $\mathbf{y_1=y}$ не враховується), а останнє рівняння НФ1 – з перетвореного початкового рівняння $\mathbf{p^n y=f(p^{n-1}y,p^{n-2}y,\ldots py,y,t)}$.

Рівняння заміни при діагональній матриці такі: $\mathbf{y_i=p^{i-1}y}$ ($i=\overline{1,n}$), тобто

$\mathbf{y_1=y}$,

$\mathbf{y_2=py}$

,…

$\mathbf{y_n=p^{n-1}y}$,

а останнє рівняння НФ1 отримаємо з рівняння $\mathbf{p^n y=f(p^{n-1}y,p^{n-2}y,\ldots py,y,t)}$, використовуючи наступні заміни: $\mathbf{p^i y=y_{i+1}}$ ($i=\overline{0,n-1}$), а $\mathbf{p^n y=p(p^{n-1}y)=py_n}$.

Система рівнянь НФ1 має такий вигляд:

$\mathbf{py_i=y_{i+1}}$ ($i=\overline{1,n-1}$);

$\mathbf{py_n=f(y_n,y_{n-1},\ldots y_2,y_1,t)}$,

а нові початкові умови такий: $\mathbf{y_i(0)=C_i}$ ($i=\overline{1,n}$).

Якщо диференційне рівняння лінійне, тобто

$$\mathbf{p^n y+a_{n-1}p^{n-1}y+a_{n-2}p^{n-2}y+\ldots +a_1py+a_0y=f(t)},$$

тоді система рівнянь НФ1 має такий вигляд:

$\mathbf{py_i=y_{i+1}}$ ($i=\overline{1,n-1}$);

$\mathbf{py_n=-a_{n-1}y_n-a_{n-2}y_{n-1}-\ldots -a_1y_2-a_0y_1+f(t)}$.

Слід зазначити, що зазначеній лінійній формі диференційного рівняння відповідає дробово-раціональна передаткова функція

$$\mathbf{W(p)=1/(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+\ldots +a_1p+a_0)},$$

якщо $y=W(p)f(t)$.

Окрім нормальної форми (особливо для лінійної форми диференційного рівняння) використовується і так звана канонічна форма, яку позначамо, як КФ1.

Для отримання системи рівнянь КФ1 з системи рівнянь НФ1 необхідно в кожному з перших ($n-1$)-их диференційних рівнянь додати доданок, пропорційний y.

Таким чином, система перших рівнянь КФ1, окрім останнього рівняння, має такий вигляд:

$$py_i=y_{i+1}+A_{n-I}y;\ A_{n-I}=const\ (i=\overline{1,n-1}).$$

Останнє рівняння, яке умовно позначимо, як $py_n=f^*(y_n,y_{n-1},\dots\ y_2,y_1,t)$, повинно бути таким, щоб забезпечити тотожність системи КФ1 початковому рівнянню $p^ny=f(p^{n-1}y,p^{n-2}y,\dots\ py,y,t)$.

Рівняння заміни КФ1 відповідають трикутній формі матриці коефіцієнтів:

$$y_1=y;$$

$$y_2=py-A_{n-1}y;$$

$$y_3=p^2y-A_{n-1}py-A_{n-2}y;$$

$$\dots$$

$$y_n=p^{n-1}y-A_{n-1}p^{n-2}y-A_{n-2}p^{n-3}y-\dots-A_2py-A_1y,$$

а нові початкові умови необхідно визначати, використовуючи формули, які отримані з рівнянь заміни для $t=0$:

$$y_1(0)=C_1;$$

$$y_2(0)=C_2-A_{n-1}C_1;$$

$$y_3(0)=C_3-A_{n-1}C_2-A_{n-2}C_1;$$

$$\dots$$

$$y_n(0)=C_n-A_{n-1}C_{n-1}-A_{n-2}C_{n-2}-\dots-A_2C_2-A_1C_1.$$

Для лінійної форми диференційного рівняння дуже цікавий оптимальний варіант системи КФ1 можемо отримати, якщо обрати значення сталих коефіцієнтів

$\mathbf{A_{n-I}}$ ($i=\overline{1,n}$) наступним чином: $\mathbf{A_i=-a_i}$ ($i=\overline{0,n-1}$). Для цього поодинокого випадку рівняння заміни КФ1 мають такий вигляд:

$$\mathbf{y_1=y;}$$

$$\mathbf{y_2=py+a_{n-1}y;}$$

$$\mathbf{y_3=p^2y+a_{n-1}py+a_{n-2}y;}$$

$$\mathbf{\ldots}$$

$$\mathbf{y_n=p^{n-1}y+a_{n-1}p^{n-2}y+a_{n-2}p^{n-3}y+\ldots+a_2py+a_1y},$$

а похідна $\mathbf{py_n}$ – такий вигляд: $\mathbf{py_n=p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+a_{n-2}p^{n-2}y+\ldots+a_2p^2y+a_1py}$. Якщо праву і ліву частини останнього рівняння поміняти місцями

$$\mathbf{p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+a_{n-2}p^{n-2}y+\ \ldots\ +a_2p^2y+a_1py=py_n}$$

і порівняти з початковим рівнянням

$$\mathbf{p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+a_{n-2}p^{n-2}y}+\ldots\ \mathbf{+a_1py+a_0y=f(t)},$$

можемо зробити висновок, що ці рівняння будуть тотожні, якщо $\mathbf{py_n}$ буде дорівнювати $\mathbf{-a_0y+f(t)}$.

Таким чином, система рівнянь КФ1 в цьому випадку має вигляд:

$$\mathbf{py_i=y_{i+1}-a_{n-I}y}\ (i=\overline{1,n-1});$$

$$\mathbf{py_n=f(t)-a_0y},$$

тобто усі рівняння КФ1 мають однакову форму (права частина усіх рівнянь має по два доданки).

Можуть використовуватись також і інші форми УВ1.Такі форми УВ1 використовуються, наприклад, для одночасного моделювання схемою з операційних блоків декількох функцій часу при використанні методу рішення визначаючого рівняння. При цьому матриця коефіцієнтів залежитиме від лінійного співвідношення цих функцій часу.

Наразі розглянемо еквівалентні перетворення лінійного диференційного рівняння **n** порядку, яке містить похідні двох змінних, тобто розглянемо різні форми

УВ2. Слід зазначити, що будь-яка форма УВ2 для диференційного рівняння **n**-го порядку, який має похідні двох змінних, з **2n** початковими умовами складається з **n** диференційних рівнянь пер-шого порядку з **n** новими початковими умовами та одного лінійного алгебричного рівняння першого порядку з (**n+1**)-єю змінною (**n** нових змінних плюс одна змінна **y**, що залишається).

Маємо лінійне диференційне рівняння **n**-го порядку, яке містить похідні двох змінних, тобто ДРn2:

$$p^n y+a_{n-1}p^{n-1}y+\ldots+a_1 py+a_0 y=b_n p^n x+b_{n-1}p^{n-1}x+\ldots+b_1 px+b_0 x$$

з початковими умовами $p^k y(0)=C_{k+1}$ $(k=\overline{0,n-1})$ та $p^k x(0)=D_{k+1}$ $(k=\overline{0,n-1})$.

Слід зазначити, що зазначеній лінійній формі диференційного рівняння відповідає дробово-раціональна передаткова функція

$$W(p)=(b_n p^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1 p+b_0)/(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0).$$

Для отримання різних форм УВ2 будемо використовувати метод, який був запропонований Ленінгом та Беттіним для НФ2. Суть методу Ленінга-Беттіна полягає в тому, що вони запропонували для отримання системи лінійних рівнянь НФ2 з системи лінійних рівнянь НФ1 додавати в кожне (**n+1**)-е рівняння НФ1 доданок, пропорційний змінній **x**, і визначили умови, при яких отримана таким чином система лінійних рівнянь НФ2 буде тотожна початковому рівнянню ДРn2. Отже, система рівнянь НФ2, отримана з системи лінійних рівнянь НФ1 при $f(t)=0$ має наступний вигляд:

$$y=y_1+\alpha_n x;$$

$$py_i=y_{i+1}+\alpha_{n-i}x \ (i=\overline{1,n-1});$$

$$py_n=-a_{n-1}y_n-a_{n-2}y_{n-1}-\ldots-a_1 y_2-a_0 y_1+\alpha_0 x,$$ де $\alpha_i=const$ $(i=\overline{0,n})$.

Для визначення умов, при яких система лінійних рівнянь НФ2 буде тотожна початковому рівнянню ДРn2, тобто для розрахунку значень сталих коефіцієнтів α_i $(i=\overline{0,n})$, при яких зазначена система лінійних рівнянь НФ2 буде тотожною початковому лінійному рівнянню ДРn2

$$p^n y+a_{n-1}p^{n-1}y+\ldots+a_1 py+a_0 y=b_n p^n x+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1 px+b_0 x.$$

Рівняння заміни, які отримаємо з перших **n** рівнянь системи рівнянь НФ2, такі:

$y_1=y-\alpha_n x;$

$y_2=py-\alpha_n px-\alpha_{n-1}x;$

$y_3=p^2y-\alpha_n p^2x-\alpha_{n-1}px-\alpha_{n-2}x;$

…

$y_{n-1}=p^{n-2}y-\alpha_n p^{n-2}x-\alpha_{n-1}p^{n-3}x-\alpha_{n-2}p^{n-4}x-\ldots-\alpha_4p^4x-\alpha_3px-\alpha_2x;$

$y_n=p^{n-1}y-\alpha_n p^{n-1}x-\alpha_{n-1}p^{n-2}x-\alpha_{n-2}p^{n-3}x-\ldots-\alpha_4p^3x-\alpha_3p^2x-\alpha_2px-\alpha_1x.$

Формулу для p^ny можемо отримати з рівняння для y_n:

$py_n=p^ny-\alpha_n p^nx-\alpha_{n-1}p^{n-1}x-\alpha_{n-2}p^{n-2}x-\ldots-\alpha_4p^4x-\alpha_3p^3x-\alpha_2p^2x-\alpha_1px.$

Для забезпечення тотожності системи рівнянь НФ2 з початковим лінійним рівнянням ДРn2 необхідно спочатку привести обидва математичних описи до однієї форми, а потім зрівняти між собою коефіцієнти при однакових змінних.

В нашому випадку простіше систему рівнянь НФ2 перетворити в одне диференційне рівняння. Для цього потрібно в (**n+1**)-му рівнянні НФ2

$$py_n=-a_{n-1}y_n-a_{n-2}y_{n-1}-\ldots-a_1y_2-a_0y_1+\alpha_0x$$

зробити зворотні заміни, тобто

y_1 замінити на $y-\alpha_n x$;

y_2 замінити на $py-\alpha_n px-\alpha_{n-1}x$;

…

y_{n-1} замінити на $p^{n-2}y-\alpha_n p^{n-2}x-\alpha_{n-1}p^{n-3}x-\alpha_{n-2}p^{n-4}x-\ldots-\alpha_4p^2x-\alpha_3px-\alpha_2x$;

y_n замінити на $p^{n-1}y-\alpha_n p^{n-1}x-\alpha_{n-1}p^{n-2}x--\alpha_{n-2}p^{n-3}x-\ldots-\alpha_4p^3x-\alpha_3p^2x-\alpha_2px-\alpha_1x;$

py_n замінити на $p^ny-\alpha_n p^nx-\alpha_{n-1}p^{n-1}x-\alpha_{n-2}p^{n-2}x-\ldots-\alpha_4p^4x-\alpha_3p^3x-\alpha_2p^2x-\alpha_1px$.

Якщо після виконання вказаних замін об’єднати подібні члени, усі доданки зі змінною **y** та її похідними перенести до лівої частини, а усі доданки з змінною **x** та її похідними перенести до правої частини цього рівняння, отримаємо наступне рівняння:

$p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+a_{n-2}p^{n-2}y+\ldots+a_1py+a_0y=$

$$=\alpha_n p^n x+$$

$$+(\alpha_{n-1}+a_{n-1}\alpha_n)p^{n-1}x+$$

$$+(\alpha_{n-2}+a_{n-1}\alpha_{n-1}+a_{n-2}\alpha_n)p^{n-2}x+\ldots+$$

$$+(\alpha_1+a_{n-1}\alpha_2+a_{n-2}\alpha_3+\ldots+a_2\alpha_{n-1}+a_1\alpha_n)px+$$

$$+(\alpha_0+a_{n-1}\alpha_1+a_{n-2}\alpha_2+\ldots+a_2\alpha_{n-2}+a_1\alpha_{n-1}+a_0\alpha_n)x.$$

Отже, порівнявши отримане рівняння з початковим лінійним рівнянням ДРn2, можемо зробити висновок, що ліві частини рівнянь повністю співпадають, а праві частини співпадають по формі. Для забезпечення тотожності цих двох рівнянь зрівняємо коефіцієнти при однакових змінних, тобто відповідні коефіцієнти при змінній **x** та при її похідних, і отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) {(**n+1**)-не рівняння з (**n+1**)-ми невідомими α_i ($i=\overline{0,n}$)}:

$$\alpha_n=b_n;$$

$$\alpha_{n-1}+a_{n-1}\alpha_n=b_{n-1};$$

$$\alpha_{n-2}+a_{n-1}\alpha_{n-1}+a_{n-2}\alpha_n=b_{n-2};$$

$$\ldots$$

$$\alpha_1+a_{n-1}\alpha_2+a_{n-2}\alpha_3+\ldots+a_2\alpha_{n-1}+a_1\alpha_n=b_1;$$

$$\alpha_0+a_{n-1}\alpha_1+a_{n-2}\alpha_2+\ldots+a_2\alpha_{n-2}+a_1\alpha_{n-1}+a_0\alpha_n=b_0.$$

СЛАР має трикутну матрицю коефіцієнтів, що суттєво полегшує знаходження значень невідомих α_i ($i=\overline{0,n}$): з першого рівняння одразу знаходимо значення α_n, потім з другого – значення α_n і т.д. до знаходження значення α_0.

Нові початкові умови для НФ2 отримаємо з рівнянь заміни для **t=0:**

$$y_1(0)=C_1-\alpha_n D_1;$$

$$y_2(0)=C_2-\alpha_n D_2-\alpha_{n-1}D_1;$$

$$y_3(0)=C_3-\alpha_n D_3-\alpha_{n-1}D_2-\alpha_{n-2}D_1;$$

$$\ldots$$

$$y_{n-1}(0)=C_{n-1}-\alpha_n D_{n-1}-\alpha_{n-1}D_{n-2}-\alpha_{n-2}D_{n-3}-\ldots-\alpha_4 D_3-\alpha_3 D_2-\alpha_2 D_1;$$

$$y_n(0)=C_n-\alpha_n D_n-\alpha_{n-1}D_{n-1}-\alpha_{n-2}D_{n-2}-\ldots-\alpha_4 D_4-\alpha_3 D_3-\alpha_2 D_2-\alpha_1 D_1.$$

Систему рівнянь КФ2 також маємо можливість отримати з системи лінійних рівнянь КФ1 при $\mathbf{f(t)=0}$, використовуючи ідею методу Ленінга-Беттіна, і ця система матиме наступний вигляд:

$$\mathbf{y=y_1+\alpha_n x;}$$

$$\mathbf{py_i=y_{i+1}-a_{n-I}y+\alpha_{n-i}x}\ (i=\overline{1,n-1});$$

$$\mathbf{py_n=-a_0y+\alpha_0x.}$$

Для визначення умов, при яких система лінійних рівнянь КФ2 буде тотожна початковому рівнянню ДРn2, тобто для розрахунку значень сталих коефіцієнтів $\boldsymbol{\alpha_i}$ $(i=\overline{0,n})$, при яких зазначена система лінійних рівнянь КФ2 буде тотожною рівнянню ДРn2 ($\mathbf{p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+\ldots+a_1py+a_0y=b_np^nx+b_{n-1}p^{n-1}x+\ldots+b_1px+b_0x}$).

Рівняння заміни, які отримаємо з перших **n** рівнянь системи рівнянь КФ2, такі:

$$\mathbf{y_1=y-\alpha_n x;}$$

$$\mathbf{y_2=py+a_{n-1}y-\alpha_n px-\alpha_{n-1}x;}$$

$$\mathbf{y_3=p^2y+a_{n-1}py+a_{n-2}y-\alpha_n p^2x-\alpha_{n-1}px-\alpha_{n-2}x;}$$

$$\mathbf{\ldots}$$

$$\mathbf{y_{n-1}=p^{n-2}y+a_{n-1}p^{n-3}y+\ldots+a_3py+a_2y-\alpha_n p^{n-2}x-\alpha_{n-1}p^{n-3}x-\ldots-\alpha_4p^2x-\alpha_3px-\alpha_2x;}$$

$$\mathbf{y_n=p^{n-1}y+a_{n-1}p^{n-2}y+\ldots+a_3p^2y+a_2py+a_1y-\alpha_n p^{n-1}x-\alpha_{n-1}p^{n-2}x-\alpha_{n-2}p^{n-3}x-\ldots-}$$
$$\mathbf{-\alpha_3p^2x-\alpha_2px-\alpha_1x.}$$

Формулу для $\mathbf{p^ny}$ можемо отримати з рівняння для $\mathbf{y_n}$:

$$\mathbf{py_n=p^ny+a_{n-1}p^{n-1}y+\ \ldots\ +a_3p^2y+a_2py+a_1y-\alpha_n p^nx-\alpha_{n-1}p^{n-1}x-\alpha_{n-2}p^{n-2}x-\ldots-}$$
$$\mathbf{-\alpha_3p^3x-\alpha_2p^2x-\alpha_1px.}$$

Для забезпечення тотожності системи рівнянь КФ2 з початковим лінійним рівнянням ДРn2 необхідно спочатку привести обидва математичних описи до однієї форми, а потім зрівняти між собою коефіцієнти при однакових змінних. В на-шому випадку простіше систему рівнянь КФ2 перетворити в одне диференційне рівняння. Для цього потрібно в (**n+1**)-му рівнянні КФ2 $\mathbf{py_n=-a_0y+\alpha_0x}$ зробити заміну: $\mathbf{py_n}$ замінити на

$$p^n y+a_{n-1}p^{n-1}y+a_{n-2}p^{n-2}y+\ldots+a_3p^2y+a_2py+a_1y-\alpha_n p^n x-$$
$$-\alpha_{n-1}p^{n-1}x-\alpha_{n-2}p^{n-2}x- \ldots -\alpha_3p^3x-\alpha_2p^2x-\alpha_1px.$$

Якщо після виконання заміни усі доданки зі змінною **x** та її похідними перенести до правої частини цього рівнян-ня, а доданок $-a_0y$ перенести до правої частини отримаємо наступне рівняня:

$$p^n y+a_{n-1}p^{n-1}y+\ldots+a_1py+a_0y=\alpha_n p^n x+\alpha_{n-1}p^{n-1}x+\ldots +\alpha_1px+\alpha_0x.$$

Отже, порівнявши отримане з КФ2 рівняння з початковим лінійним рівнянням ДРn2, можемо зробити висновок, що ліві частини рівнянь повністю співпадають, а праві частини співпадають по формі. Для забезпечення тотожності цих двох рівнянь зрівняємо коефіцієнти при однакових змінних, тобто відповідні коефіцієнти при змінній **x** та при її похідних, і отримаємо прості формули для розрахунку невідомих коефіцієнтів α_i ($i=\overline{0,n}$): $\alpha_i=b_i$ ($i=\overline{0,n}$).

Таким чином, система КФ2 має такий вигляд:

$$y=y_1+b_nx;$$
$$py_i=y_{i+1}-a_{n-I}y+b_{n-i}x \ (i=1,n-1);$$
$$py_n= -a_0y+b_0x;$$

а формули для розрахунку нових початкових умов:

$$y_1(0)=C_1-\alpha_nD_1;$$
$$y_2(0)=C_2+a_{n-1}C_1-\alpha_nD_2-\alpha_{n-1}D_1;$$
$$y_3(0)=C_3+a_{n-1}C_2+a_{n-2}C_1-b_nD_3-b_{n-1}D_2-b_{n-2}D_1;$$
$$\ldots$$
$$y_{n-1}(0)=C_{n-1}+a_{n-1}C_{n-2}+a_{n-2}C_{n-3}+\ldots+a_4C_3+a_3C_2 +a_2C_1 -b_nD_{n-1}-b_{n-1}D_{n-2}-$$
$$-b_{n-2}D_{n-3}-\ldots-b_4D_3-b_3D_2-b_2D_1;$$
$$y_n(0)=C_n+a_{n-1}C_{n-1}+a_{n-2}C_{n-2}+ \ldots +a_3C_3+a_2C_2 +a_1C_1 -b_nD_n-b_{n-1}D_{n-1}-$$
$$-b_{n-2}D_{n-2}- \ldots - b_3D_3-b_2D_2-b_1D_1.$$

Можуть використовуватись також і інші форми УВ2, які отримуються зміною перших **n** рівнянь системи НФ2 з відповідним корегуванням (**n+1**)-го рівняння.

Такі форми УВ2 використовуються, наприклад, для моделювання схемою з операційних блоків дробово-раціонального ряду Паде при знакозмінному ступеневому поліномі чисельника цього ряду.

Наразі розглянемо еквівалентні перетворення лінійного диференційного рівняння **n** порядку, яке містить похідні трьох змінних, тобто розглянемо різні форми УВ3.

Слід зазначити, що будь-яка форма УВ2 для диференційного рівняння **n**-го порядку, який має похідні трьох змінних, з **3n** початковими умовами складається з **n** диференційних рівнянь першого порядку з **n** новими початковими умовами та одного лінійного алгебричного рівняння першого порядку з (**n+1**)-єю змінною (**n** нових змінних плюс одна змінна **y**, що залишається).

Маємо лінійне диференційне рівняння **n**-го порядку, яке містить похідні трьох змінних:

$$p^n y+a_{n-1}p^{n-1}y+\ldots+a_1 py+a_0 y=b_n p^n x+b_{n-1}p^{n-1}x+b_{n-2}p^{n-2}x+\ldots+b_1 px+b_0 x+$$
$$+c_n p^n z+c_{n-1}p^{n-1}z+\ldots+c_1 pz+c_0 z$$

з початковими умовами $p^k y(0)=C_{k+1}$ $(k=\overline{0,n-1})$, $p^k x(0)=D_{k+1}$ $(k=\overline{0,n-1})$ та $p^k z(0)=E_{k+1}$ $(k=\overline{0,n-1})$.

Для отримання різних форм УВ3 також використовується метод, який був запропонований Ленінгом та Беттіним для НФ2. Отже, система рівнянь НФ3, отримана з системи лінійних рівнянь НФ2 має наступний вигляд:

$$y=y_1+\alpha_n x+\beta_n z;$$

$$py_i=y_{i+1}+\alpha_{n-I}\, x+\beta_{n-I} z \quad (i=\overline{1,n-1});$$

$$py_n=-a_{n-1}y_n-a_{n-2}y_{n-1}-\ldots-a_1 y_2-a_0 y_1+\alpha_0 x+\beta_0 z,$$

де $\alpha_i=const$ $(i=\overline{0,n})$, $\beta_i=const$ $(i=\overline{0,n})$.

Розрахунок значень α_i $(i=\overline{0,n})$ здійснюється таким же чином, як і розрахунок α_i $(i=\overline{0,n})$ для НФ2, а для розрахунку значень використовується така ж сама система рівнянь, як і для α_i $(i=\overline{0,n})$, тільки α_i $(i=\overline{0,n})$ необхідно замінити на β_i $(i=\overline{0,n})$, а b_i $(i=\overline{0,n})$ – на c_i $(i=\overline{0,n})$.

Нові початкові умови для НФ3:

$$y_1(0)=C_1-\alpha_n D_1-\beta_n E_1;$$

$$y_2(0)=C_2-\alpha_n D_2-\alpha_{n-1} D_1-\beta_n E_2-\beta_{n-1} E_1;$$

$$y_3(0)=C_3-\alpha_n D_3-\alpha_{n-1} D_2-\alpha_{n-2} D_1-\beta_n E_3-\beta_{n-1} E_2-\beta_{n-2} E_1;$$

…

$$y_{n-1}(0)=C_{n-1}-\alpha_n D_{n-1}-\alpha_{n-1} D_{n-2}-\alpha_{n-2} D_{n-3}-\ldots-\alpha_4 D_3-\alpha_3 D_2-\alpha_2 D_1-\beta_n E_{n-1}-\beta_{n-1} E_{n-2}-$$
$$-\beta_{n-2} E_{n-3}-\ldots-\beta_4 E_3-\beta_3 E_2-\beta_2 E_1;$$

$$y_n(0)=C_n-\alpha_n D_n-\alpha_{n-1} D_{n-1}-\alpha_{n-2} D_{n-2}-\ldots-\alpha_4 D_4-\alpha_3 D_3-\alpha_2 D_2-\alpha_1 D_1-\beta_n E_n-\beta_{n-1} E_{n-1}-$$
$$-\beta_{n-2} E_{n-2}-\ldots-\beta_4 E_4-\beta_3 E_3-\beta_2 E_2-\beta_1 E_1.$$

Аналогічно можемо отримати системи рівнянь, рівняння замін тощо для НФ3, а також будь-які форми для УВ4, УВ5 тощо.

3. Приблизні методи

3.1. Методи наближеного розв'язування задач математичного аналізу («чистої» математики).

3.2. Методи наближеного розв'язування задач прикладної математики.

3.3. Методи дискретної математики.

Ми будемо розглядати лише деякі з методів першої групи, які використовуються для побудови нелінійних операційних блоків, а саме різні методи апроксимації функцій.

Методи апроксимації функцій

Апроксимація або **наближення** – це науковий метод, який полягає в заміні одного об'єкту іншим об'єктом, достатньо близьким, але більш простим в якомусь сенсі.

Апроксимація функції – це заміна початкової функції (апроксимовуваної або апроксумованої) іншою функцією (апроксимуючою), яка суттєво наближена до початкової, тобто апроксимує її з потрібною, наперед заданою точністю.

Початкова функція може бути функцією однієї змінної $\mathbf{y=f(x)}$, або функцією $\mathbf{k}$ змінних $\mathbf{y=f(x_1,x_2,\dots x_k)}$.

Апроксимуючу функцію будемо позначати, як $\mathbf{y=\varphi(x)}$ або $\mathbf{y=\varphi(x_1,x_2,\dots x_k)}$.

Критеріями точності наближення апроксимуючої функції до апроксимованої функції є або різниця між ними, або сума квадратів відхилень однієї функції від іншої для всього діапазону зміни аргументу, тобто для $\mathbf{x_{min}\le x\le x_{max}}$.

Якщо критерієм точності є сума квадратів відхилень, - це має назву «**метод найменших ккквадратів**». Це метод знаходження найближчої до апроксимованої функції апроксимуючої функції з декількох обраних, тобто та з $\mathbf{m}$ апроксимуючих функції є найближчою, для якої значення $\mathbf{\Phi_s}$ $(s=\overline{1,m})$ є мінімальним.

Значення $\mathbf{\Phi_s}$ $(s=\overline{1,m})$ обчислюються наступним чином:

1.Для функцій, що задано аналітично**:**

$$\mathbf{\Phi_s=\int_{x_{min}}^{x_{max}}[f(x)-\varphi_s(x)]^2dx}\ (s=\overline{1,m}).$$

2.Для функцій, що задано дискретно для $\mathbf{n}$ значень змінної $\mathbf{x_i}$ $(i=\overline{1,n})$**:**

$$\mathbf{\Phi_s=\sum_1^n[f(x_i)-\varphi_s(x_i)]^2};$$

або для функцій з $\mathbf{k}$ аргументами $(\mathbf{x_1, x_2,\dots x_k})$ при $\mathbf{n}$ значеннях змінних:

$$\mathbf{\Phi_s=\sum_1^n\{f(x_{1i},x_{2i},\dots x_{ki})-\varphi_s(x_{1i},x_{2i},\dots x_{ki})\}^2}$$

P.S.: Якщо одну з функцій задано аналітично (частіше це апроксимуюча функція), а іншу – дискретно ($\mathbf{n}$ значеннями), необхідно зайти $\mathbf{n}$ значень першої функції, а потім користуватися другою формулою для $\mathbf{\Phi_s}$.

Якщо критерієм точності апроксимації є різниця між апроксимуючої та апроксимованою функціями, тоді ця різниця може надаватись:

в абсолютних значеннях $\mathbf{\{\Delta f(x)=f(x)-\varphi(x)}$ для $\mathbf{x_{min}\le x\le x_{max}\}}$,

або у відносних одиницях $\mathbf{\{\delta f(x)=\Delta f(x)/f(x)}$ для $\mathbf{x_{min}\le x\le x_{max}\}}$,

або у приведених (до шкали) одиницях $\mathbf{\{\gamma f(x)=\Delta f(x)/[f_{max}(x)-f_{min}(x)]}$ для $\mathbf{x_{min}\le x\le x_{max}\}}$.

P.S.: Інколи використовується похибка, яка має назву: «приведена до півшкали». Вона використовується у випадку симетричної біполярної шкали, тобто коли $f_{min}(x)=-f_{max}(x)$; тоді похибка, яка приведена до півшка-ли, позначається як $\gamma' f(x$ і її значення розраховується за формулою: $\gamma' f(x)=\Delta f(x)/f_{max}(x)$.

Найчастіше в якості апроксимуючої функції використовується скінченна кількість членів ряду розкладання апроксимованої функції, тобто відрізок ряду, який апроксимує функцію $\mathbf{f(x)}$.

В цьому випадку абсолютна похибка (так звана «похибка зрізання») дорівнює залишковому члену ряду $\mathbf{R(x)}$. Теоретично можуть використовуватись будь-які ряди, але практично, особливо для побудови нелінійних операційних блоків, використовуються степеневі ряди. Для функції однієї змінної звичайний степеневий ряд має такий вигляд: $y=\sum_1^n a_i x^i$, де $a_i=const$ $(i=\overline{0,n})$, тобто апроксимуюча функція має наступний вигляд: $\varphi(x)=\sum_1^n a_i x^i$, де $a_i=const$ $(i=\overline{0,n})$.

Якщо використовується лише один член степеневого ряду, тобто $y=a_0=const$, маємо сталу інтерполяцію, тобто графік апроксимуючої функції в цьому випадку $\varphi(x)=a_0=const$ є пряма, яка розташована паралельно горизонтальної осі ординат на відстані a_0 від неї. Якщо використовуються два члени степеневого ряду, тобто $y=a_1x+a_0$, де $a_1=const$ та $a_0=const$, - маємо лінійну інтерполяцію, тобто графік апроксимуючої функції в цьому випадку $\varphi(x)=a_1x+a_0$ - це пряма, яка розташована під кутом до горизонтальної осі абсцис (кутовий коефіцієнт κ_1 дорівнює a_1) та проходить через точку на осі абсцис з координатою a_0.

P.S.: В математичному аналізі та в аналітичній геометрії використовується інші форми запису лінійної характеристики: $y=\kappa_i x+b_i$, або $y=\kappa_i(x-x_i)$, які ми і будемо в подальшо-му використовувати.

Якщо використовуються три члени степеневого ряду, тобто $y=a_2x^2+a_1x+a_0$, де $a_2=const$, $a_1=const$ та $a_0=const$, маємо квадратичну інтерполяцію, тобто графік апроксимуючої функції в цьому випадку $\varphi(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ - це парабола; тому

інколи використовується термін «**апроксимація параболою**». Для $\mathbf{n>2}$, тобто якщо кількість членів ряду більша, ніж три, - використовується термін «**апроксимація поліномом**».

Для зменшення похибки апроксимації використовуються два способи: збільшення кількості членів ряду або поділ усього діапазону зміни аргументу на окремі частини, на яких використовуються інтерполяції більш низького рівня, тобто з використанням меншої кількості членів степеневого ряду. При використанні другого способу в назві апроксимації додається частка «**кусково**»; наприклад, при сталій інтерполяції – **кусково-стала апроксимація**.

Слід зазначити, що при використанні другого способу на кожній частині діапазону теоретично можуть використовуватися різні інтерполяції, однак на практиці використовується однакова інтерполяція для всіх частин, що суттєво спрощує реалізацію методу апроксимації.

Кусково-лінійна апроксимація

Найбільш поширеною є кусково-лінійна апроксимація, при якій апроксимована функція $\mathbf{f(x)}$ замінюється ламаною лінією з кінцевою кількістю прямолінійних відрізків ($\mathbf{n}$) та декількома точками зламу ($\mathbf{n-2}$), тобто на кожному інтервалі використовується лінійна інтерполяція.

Розглянемо лінійну інтерполяцію на інтервалі $[x_i,x_{i+1}]$ (Рис.27), де x_i – абсциса початкової точки $\mathbf{i}$-ої лінійної ділянки апроксимуючої функції, а $\mathbf{f(x_i)}$ **-** її ордината $\{f(x_i)=\psi^i(x_i)$, де $\psi^i(x)$ – лінійна ділянка апроксимуючої функції $\psi(x)\}$; x_{i+1} – абсциса кінцевої точки цієї ділянки, $f(x_{i+1})=\psi^i(x_{i+1})$ - її ордината; K_i – кутовий коефіцієнт інтерполяційної формули Ньютона для лінійної інтерполяції; $\mathbf{f(x)}$ - апроксимовувана функція; $h_i=x_{i+1}-x_i$ - довжина $\mathbf{i}$-го інтервалу.

Значення кутового коефіцієнту K_i обчислюється за формулою

$$K_i=\{f(x_{i+1})- f(x_i)\}/\{x_{i+1}-x_i\},$$

а значення апроксимуючої функції для будь-якого значення **x**, що знаходиться в **i**-му інтервалі $\{x_i \le x \le x_{i+1}\}$, обчислюється за наступною формулою:

$$\varphi(x)=\varphi^i(x)=f(x_i)+ \qquad K_i(x-x_i).$$

P.S.: Це і є інтерполяційна формула Ньютона для лінійної інтерполяції.

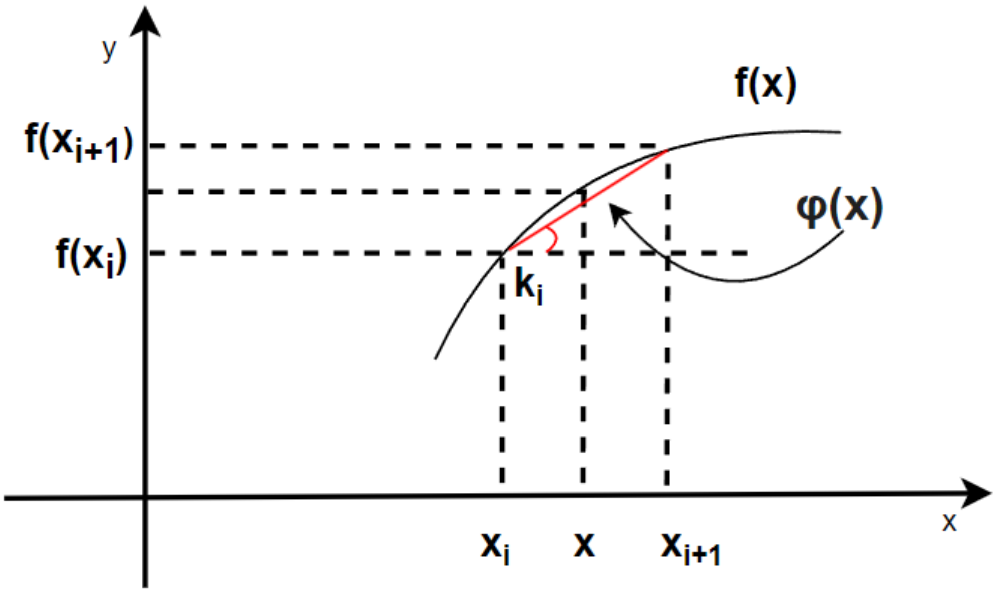

Рис.27

Виконання кусково-лінійної апроксимації

Якщо здійснити аналіз на максимум залишкового члену ряду **R(x)** для лінійної інтерполяції, отримаємо дуже просту формулу для розрахунку довжини інтервалу $h_i=x_{i+1}-x_i$ в залежності від заданого максимального значення абсолютної похибки апроксимації $\Delta_{max}f$ $\{\Delta_{max}f=R_{max}\}$:

$$h_i \le h_i^* = \sqrt{8\Delta_{max}f/A_i},$$

де $A_i=\max|d^2f(x)/dx^2|$ для **i**-го інтервалу, тобто A_i - це максимальне по модулю значення другої похідної для $x_i \le x \le x_{i+1}$. **P.S.:**

Значення h_i^* - це таке оптимальне значення довжини h_i, при якому $\max|\Delta f(x)|=\Delta_{max}f$.

Отже, якщо обирати $\mathbf{h_i}$ згідно зазначеної нерівності, тобто якщо обране значення $\mathbf{h_i}$ не буде перевищувати значення $\mathbf{h_i^*=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_i}}$, то в такому випадку абсолютна похибка апроксимації $\Delta\mathbf{f(x)}$ не буде перевищувати значення $\Delta_{\mathbf{max}}\mathbf{f}$, тобто завжди $\Delta\mathbf{f(x)}\leq\Delta_{\mathbf{max}}\mathbf{f}$.

Виконання кусково-лінійної апроксимації необхідно здійснювати таким чином, щоб отримати мінімальну кількість ділянок ламаної лінії для заданого максимального значення абсолютної похибки $\Delta_{\mathbf{max}}\mathbf{f}$. Може існувати, так би мовити, «зворотня» задача: здійснити апроксимацію таким чином, щоб отримати мінімально можливу похибку апроксимації для заданої кількості ділянок ламаної лінії. Слід зазначити, що перший варіант використовується при розробці спеціалізованих нелінійних операційних блоків (спеціалізованих функціональних перетворювачах СФП), а другий – при використанні універсальних нелінійних операційних блоків.

Розглянемо перший варіант, коли задане максимальне значення абсолютної похибки $\Delta_{\mathbf{max}}\mathbf{f}$ і необхідно отримати ламану лінію з мінімальною кількістю ділянок (лінійних відрізків). Для отримання такої «мінімальної» апроксимуючої функції припустимо, що, по перше, вибір початкового вузла (з абсцисою $\mathbf{x_0}$) несуттєво впливає на оптимальність ламаної лінії, і, по друге, кількість ділянок ламаної лінії буде тим менша, чим більшою буде кожна з них. Саме тому, при розрахунках довжини кожного інтервалу $\mathbf{h_i}$, необхідно обирати максимально можливе його значення, тобто обирати значення $\mathbf{h_i}$, використовуючи формулу

$$\mathbf{h_i=h_i^*=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_i}},$$

P.S.: Заокруглювати значення h_i припустимо лише у менший бік.

Наведена формула використовується для розрахунку довжини будь-якого інтервалу і у будь-який бік, тобто значення $\mathbf{x_{i+1}=x_i+h_i}$, або $\mathbf{x_{i+1}=x_i-h_i}$.

Щодо обрання початкового вузла з абсцисою $\mathbf{x_0}$ слід враховувати наступне. Якщо значення $\mathbf{A_1}$ на інтервалі $[\mathbf{x_0, x_1}]$ при розрахунку $\mathbf{h_1}$ залежить від довжини

інтервалу $\mathbf{h_1}$, тобто $\mathbf{A_1(h_1)=var}$, - тоді необхідно спочатку визначити цю залежність, а вже потім знаходити значення $\mathbf{h_1}$ як рішення нелінійного рівняння

$$\mathbf{h_1=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_1(h_1)}}.$$

Але, якщо обрати значення $\mathbf{x_0}$ таким чином, щоб значення $\mathbf{A_1}$ не залежало б від довжини інтервалу $\mathbf{h_1}$, тобто $\mathbf{A_1=const}$, тоді прямо здійснюємо розрахунок за формулою $\mathbf{h_1^*=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_1}}$, що значно простіше. Це стосується не лише розрахунку значення довжини першого інтервалу $\mathbf{h_1}$, а і подальших розрахунків значень довжин наступних інтервалів. Для цього необхідно для початкової функції $\mathbf{y=f(x)}$ знайти похідну другого порядку, тобто $\mathbf{d^2y/dx^2}$, побудувати графік її модуля $\mathbf{\{|d^2y/dx^2|\}}$, проаналізувати цей графік, обравши значення $\mathbf{x_0}$ та напрямок розрахунків значень $\mathbf{h_i}$, при яких будуть виконуватися розрахунки та-ким чином, щоб забезпечити прості розрахунки, використовуючи для розра-хунків формулу $\mathbf{h_i^*=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_i}}$, а не знаходити рішення нелінійних рівнянь.

Приклади вибору значення $\mathbf{x_0}$ та напрямків розрахунків значень $\mathbf{h_i}$ для деяких графіків $\mathbf{|d^2y/dx^2|}$ - на рис.28,29 та 30.

Інколи доводиться обирати два початкових вузла $\mathbf{x_0^1}$ та $\mathbf{x_0^2}$ (рис.31) і виконувати розрахунки таким чином, щоб не довелось збільшувати будь-яке значення довжини останньої ділянки (або двох ділянок з трьох). Слід пам'я-тати, що значення $\mathbf{h_i}$ можемо лише зменшувати.

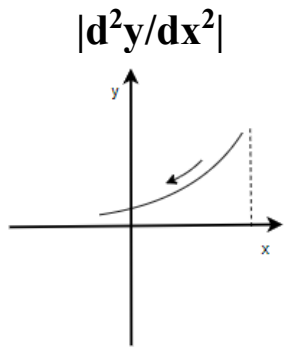

Рис.28

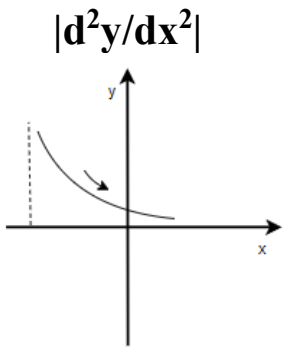

Рис.29

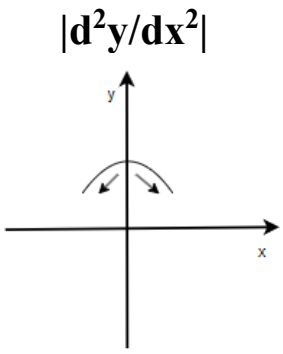

Рис.30

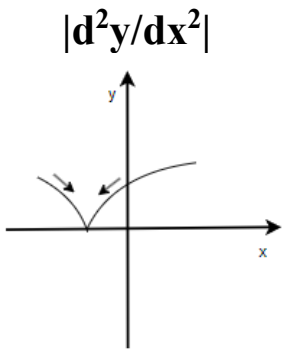

Рис.31

Якщо друга похідна функції має точку розриву першого роду, тобто для початкового вузла з абсцисою x_0 значення $A_1(x_0)=\infty$, то тоді розрахунок значення h_1 для перших частин ломаної лінії з правого та з лівого боків від x_0 неможливо виконати, використовуючи формулу $h_1^*=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_1}$, оскільки для значення $A_1(x_0)=\infty$ h_1 дорівнює 0. В даному випадку треба використовувати зовсім іншу методику розрахунку першого значення h_1:

1. Необхідно між точкою $[x_0, f(x_0)]$ та точкою $[x_0+h_1, f(x_0+h_1)]$ провести пряму лінію та записати рівняння для цієї лінії: $y=F(x)=f(x_0)+K_1(x-x_0)$, де $K_1=\{f(x_0+h_1)-f(x_0)\}/h_1$.

2. Абсолютна похибка інтерполяції розраховується по наступній формулі $\Delta f(x)=f(x)-F(x)$, а для зазначеної частини ламаної лінії ця формула буде такою $\Delta f(x)=f(x)-\{f(x_0)+K_1(x-x_0)\}$. Слід зазначити, що на границях зазначеного інтервалу абсолютна похибка дорівнює нулю, тобто $\Delta f(x_0)=\Delta f(x_0+h_1)=0$, а для якогось проміжного значення x_k $\{x_0<x_k<x_0+h_1\}$ абсолютна похибка інтерполяції має екстремум.

3. Визначити першу похідну для $\Delta f(x)$, тобто $d[\Delta f(x)]/dx$, та знайти залежність $x_k(h_1)$ з рівняння $d[\Delta f(x_k)]/dx=0$. Враховуючи, що в нашому випадку $\Delta f(x)=f(x)-\{f(x_0)+K_1(x-x_0)\}$, отримуємо рівняння $d[\Delta f(x)]/dx=(df/dx)-K_1=0$ або $df/dx=K_1=\{f(x_0+h_1)-f(x_0)\}/h_1$. Таким чином, рівняння для визначення залежності $x_k(h_1)$ має наступний вигляд: $\frac{df}{dx}(x_k)=\{f(x_0+h_1)-f(x_0)\}/h_1$.

4. Знайти максимальне значення похибки $\Delta_{max}f=|\Delta f(x_k)|=|f(x_k)-F(x_k)|$ та отримати залежність $\Delta_{max}f=\Psi(h_1)$, з якої необхідно отримати обернену залежність $h_1=\Psi^{-1}(\Delta_{max}f)$.

P.S.: Визначення оберненої залежності $h_m=\Psi^{-1}(\Delta_{max}f)$ може бути достатньо складним, або навіть неможливим. Але, враховуючи те, що в «зворотньому» варіанті виконання апроксимації значення $\Delta_{max}f$ при розрахунках підбирається, то при розрахунку першо-

го інтервалу найпростіше вибрати значення h_1, потім знайти значення x_k та визначити значення Δ_{max} f, яке в подальшому використовувати для розрахунків інших h_i.

При використанні зазначеної методики точки зламу апроксимуючої ламаної лінії належать апроксимованій функції, тобто $\mathbf{\wp(x_j)= f(x_j)}$, де $\mathbf{x_j}$ $(j=\overline{1,m})$ – абсциси **m** точок зламу цієї ламаної, включно з двома крайніми вершинами ламаної $\mathbf{x_{min}}$ та $\mathbf{x_{max}}$. Таким чином, в цих точках значення апроксимованої та апроксимуючої функцій співпадають і похибка дорівнює нулю. Якщо на якомусь інтервалі відсутня точка перегину, в такому випадку на цьому інтервалі маємо так звану односторонню пульсацію похибки, тобто похибка приймає або тільки додатні значення ($\mathbf{0\leq\Delta f\leq+\Delta_{max}f}$) або тільки від'ємні значення ($\mathbf{-\Delta_{max}f\leq\Delta f\leq 0}$). А якщо на всьому діапазоні зміни аргументу відсутні точки перегину, тоді на всьому діапазоні маємо однобічну пульсацію похи-бки, тобто похибка апроксимації має або тільки невід'ємні значення ($\mathbf{0\leq\Delta f\leq+\Delta_{max}f}$) або тільки від'ємні значення ($\mathbf{-\Delta_{max}f\leq\Delta f\leq 0}$). При цьому ламана лінія $\mathbf{\wp(x)}$ розташована або під апроксимованою функцією $\mathbf{f(x)}$, або над нею.

Слід зазначити, що в таких випадках (при відсутності точок перегину) маємо можливість вдвічі зменшити похибку апроксимації, якщо будемо використовувати іншу апроксимуючу ламану лінію $\mathbf{\wp^s(x)}$: її отримаємо зсувом отриманої апроксимуючої ламаної лінії $\mathbf{\wp(x)}$ по осі ординат на половину максимального значення абсолютної похибки ($\mathbf{\Delta_{max}f/2}$) в бік опуклості функції, тобто

$$\mathbf{\wp^s(x)=\wp(x)-\{sign(d^2y/dx^2)\}\{\Delta_{max}f/2\}}.$$

При цьому отримаємо двобічну пульсацію похибки:

$$\mathbf{\{(-\Delta_{max}f/2)\leq\Delta f\leq(+\Delta_{max}f/2)\}},$$

тобто похибка зменшилася вдвічі. Але наше завдання полягає не в зменшенні похибки, а в зменшенні кількості відрізків (ділянок) ламаної лінії. Тому пропонується при розрахунку значень $\mathbf{h_i}$ для ламаної лінії $\mathbf{\wp(x)}$ використовувати вдвічі

більше значення похибки (не $\Delta_{max}f$, а $2\Delta_{max}f$), тобто розрахунки значеннь h_i виконувати за формулою:

$$h_i=\sqrt{16\Delta_{max}f/A_i}=4\sqrt{\Delta_{max}f/A_i},$$

а після цього отримати іншу апроксимуючу ламану лінію

$$\psi^s(x):\ \psi^s(x)=\psi(x)-\{sign(d^2y/dx^2)\}\{\Delta_{max}f\},$$

тобто зробити корегування ламаної лінії $\psi(x)$. При цьому отримаємо двобічну симетричну пульсацію похибки: $(-\Delta_{max}f\leq\Delta f\leq+\Delta_{max}f)$.

P.S.: Якщо апроксимована функція має одну точку перегину, тоді розрахунки перших ділянок з правого та лівого боків відносно точки перегину необхідно робити, використовуючи формулу $h_i=\sqrt{8\Delta_{max}f/A_i}$, а усі інші – за формулою $h_i=4\sqrt{\Delta_{max}f/A_i}$.При корегуванні ордината точки перетину не змінюється, а координати інших вузлів ламаної лінії змінюються на значення $+\Delta_{max}f$ або на значення $-\Delta_{max}f$ в залежності від $\{-sign(d^2y/dx^2)\}$.

Аналітична форма запису ламаної лінії

Якщо узагальнити наведену інтерполяційну формулу Ньютона для усіх **n** ділянок ламаної лінії, починаючи з точки, яка має абсцису x_0, спочатку для правої частини ламаної лінії $\{x\geq x_0\}$, а потім для лівої частини $\{x\leq x_0\}$, отримаємо таку аналітичну форму запису для цієї ламаної лінії:

$$\psi(x)=f(x_0)+\sum_0^{n-1}\psi_i(x),$$

де $\psi_i(x)$ $(i=\overline{0,n-1})$ - так звана «елементарна нелінійна характеристика», або лінійна характеристика з обмеженням по осі ординат.

Функція $\psi_i(x)$ по формі є лінійною, тому що $\psi_i(x)=b_i(x-x_i)$, де $x_i=const$ $(i=\overline{0,n-1})$, але на кутові коефіцієнти b_i $(i=\overline{0,n-1})$ накладаються наступні обмеження:

обмеження **П** для правої частини ламаної лінії $\{x\geq x_0\}$, яка має **j** ділянок –

$b_0=B_0=K_0=const$, $b_i=B_i=K_i-K_{i-1}=const$ $(i=\overline{1,j-1})$, якщо $x\geq x_i$,

та $b_i=0$ $(i=\overline{0,j-1})$, якщо $x\leq x_i$;

обмеження **Л** для лівої частини ламаної лінії $\{x \le x_0\}$, яка має **s** ділянок –

$b_j=B_j=K_i-K_0=const$, $b_i=B_i=K_i-K_{i-1}=const$ $(i=\overline{j+1,n-1})$, якщо $x \le x_i$,

та $b_i=0$ $(i=\overline{j,n-1})$, якщо $x \ge x_i$. **P.S.:**

Нумерація ділянок починається спочатку в правий бік від x_0 до x_{j-1}, а потім – в лівий від x_0 (з x_j до x_{n-1}).

Якщо розглянути варіанти лінійної характеристики без обмежень на кутові коефіцієнти, тобто характеристику $y= B_i(x-x_i)$, де $x_i=const$ та $B_i=const$, отримаємо 4 варіанти такої характеристики в залежності від полярності констант x_i та B_i (Рис.32).

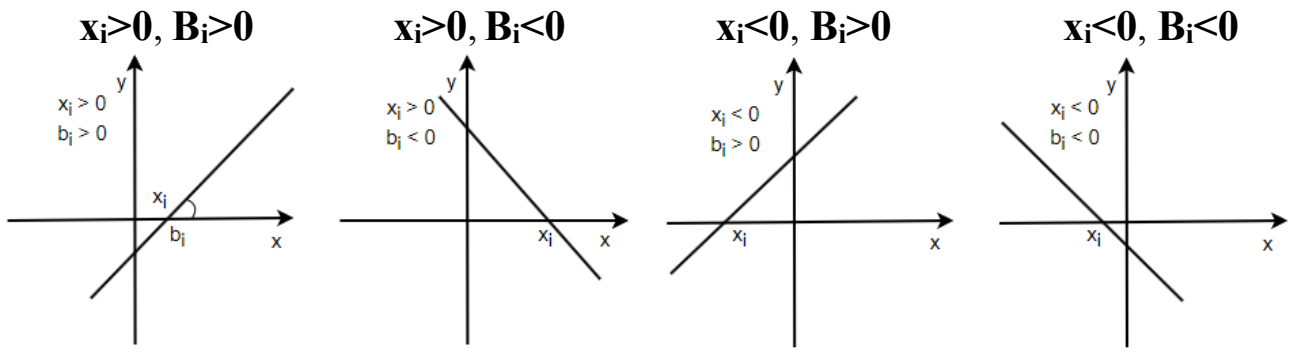

Рис.32

Розглянемо відповідні варіанти характеристики $\psi_i(x)=b_i(x-x_i)$ з обмеженням **Л** (Рис.33). При побудові характеристик $\psi_i(x)$ слід врахувати, що при $b_i=0$ $\psi_i(x)$ також дорівнює **0** $\{\psi_i(x)=0\}$.

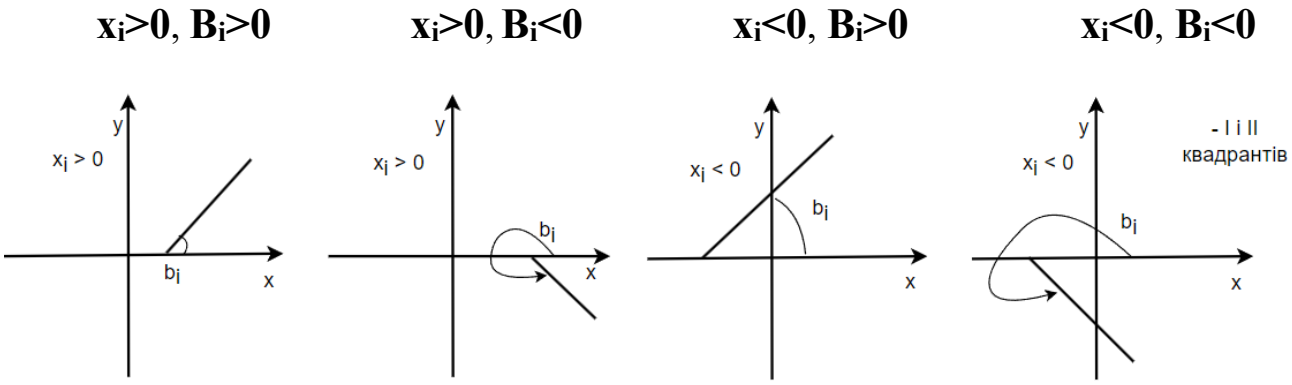

Рис.33

Розглянемо відповідні варіанти характеристики $\psi_i(x)=b_i(x-x_i)$ з обмеженням **П** (Рис.34). При побудові характеристик $\psi_i(x)$ слід також врахувати, що при $b_i=0$ $\psi_i(x)=0$.

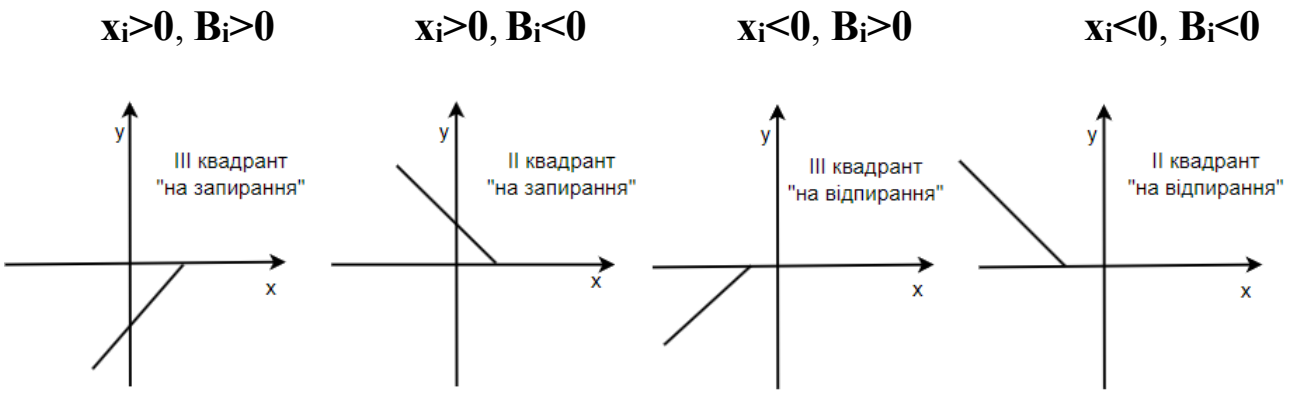

Рис.34

Таким чином маємо 8 варіантів лінійної характеристики з обмеженням по осі ординат (елементарної нелінійної характеристики). Для того, щоб мати можливість розрізняти між собою ці варіанти, введено два поняття: квадрант характеристики та її режим.

Квадрант характеристики залежить від кута β_i ($B_i=tg\beta_i$) між додатним напрямком осі абсцис та напрямком лінійної частини характеристики.

Якщо $0<\beta_i<90^o$, то квадрант перший (**I**), якщо $90^o<\beta_i<180^o$ – другий квадрант (**II**), якщо $180^o<\beta_i<270^o$– третій квадрант (**III**), а якщо $270^o<\beta_i<360^o$– то четвертий квадрант (**IV**).

Коли розглядається режим характеристики, то мається на увазі режим роботи нелінійного елемента, який має таку характеристику. Якщо вхідний сигнал нелінійного елемента відсутній, тобто вхідна машинна змінна, яка відображає початкову змінну **x**, дорівнює нулю ($[x]=0$), і при цьому вихідна машинна змінна, яка відображає початкову змінну $y=\psi_i(x)$, також дорівнює нулю ($[y]=0$), вважається, що нелінійний елемент в початковому стані закритий і працює на відкривання. Отже, якщо при $x=0$ значення **y** {згідно характеристики $y=\psi_i(x)$} також дорівнює нулю $y(0)=\psi_i(0)=0$, і режим характеристики «**на відкривання**».

Але, якщо вхідний сигнал нелінійного елемента відсутній, тобто вхідна машинна змінна, яка відображає початкову змінну **x**, дорівнює нулю (**[x]=0**), а при цьому вихідна машинна змінна, яка відображає початкову змінну $\mathbf{y=\psi_i(x)}$, не дорівнює нулю ($\mathbf{[y]\neq 0}$), вважається, що нелінійний елемент в початковому стані відкритий і працює на закривання. Отже, якщо при **x=0** значення **y** {згідно характеристики $\mathbf{y=\psi_i(x)}$} не дорівнює нулю $\mathbf{y(0)=\psi_i(0)\neq 0}$, тоді режим характеристики «**на закривання**».

Найчастіше використовуються три наступні поодинокі випадки: $\mathbf{x_0=0}$, $\mathbf{x_0=x_{min}}$ та $\mathbf{x_0=x_{max}}$.

Для $\mathbf{x_0=0}$ аналітична форма запису ламаної лінії може бути отримана із загальної форми з врахуванням того, що $\mathbf{\psi_0(x)=b_0x}$, а $\mathbf{b_0=B_0}$, якщо $\mathbf{x\geq x_0}$, та $\mathbf{b_0=0}$, якщо $\mathbf{x\leq x_0}$; $\mathbf{x_j=x_0}$ і $\mathbf{B_j=B_0}$; і тому $\mathbf{\psi_j(x)=b_jx}$ а $\mathbf{b_j=B_0}$, якщо $\mathbf{x\leq x_0}$,та $\mathbf{b_j=0}$, якщо $\mathbf{x\geq x_0}$, і має такий вигляд, оскільки $\mathbf{\psi_0(x)+\psi_j(x)=B_0x}$:

$$\psi(x)=f(0)+B_0x+\sum_{1,i\neq j}^{n-1}\psi_i(x).$$

В цьому поодинокому випадку характеристики $\mathbf{\psi_i(x)}$ ($i=\overline{1,j-1}$) лише квадрантів **I** та/або **IV**, а характеристики $\mathbf{\psi_i(x)}$ ($\mathbf{i=}\overline{j+1,n-1}$) лише квадрантів **II** та/або **III** і всі ці характеристики мають режим «**на відкривання**».

Для $\mathbf{x_0=x_{min}}$ форма запису ламаної лінії

$$\psi(x)=f(x_{min})+\sum_{0}^{n-1}\psi_i(x).$$

А в цьому поодинокому випадку всі характеристики $\mathbf{\psi_i(x)}$ ($i=\overline{0,n-1}$) лише квадрантів **I** та/або **IV,** але мають режими як «**на закривання**» (для лівої півплощини) так і «**на відкривання**» (для правої півплощини).

Для $\mathbf{x_0=x_{max}}$ форма запису ламаної лінії

$$\psi(x)=f(x_{max})+\sum_{0}^{n-1}\psi_i(x).$$

А в цьому поодинокому випадку всі характеристики $\varphi_i(x)$ ($i=\overline{0,n-1}$) лише квадрантів **II** та/або **III,** але мають режими як «**на закривання**» (для правої півплощини) так і «**на відкривання**» (для лівої півплощини).

P.S.: Для будь-якого $x_0 \neq 0$ замість першої нелінійної характеристики $\varphi_0(x)=b_0(x-x_0)$ може використовуватися лінійна характеристика $y=B_0(x-x_0)$.

Геометричне трактування аналітичної форми запису ламаної лінії

Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 дорівнює нулю. Для $x_0=0$ аналітична форма запису ламаної лінії має такий вигляд:

$$\varphi(x)=f(0)+B_0x+\sum_{1,i\neq j}^{n-1}\varphi_i(x),$$

тобто ламану лінію $\varphi(x)$ можемо розглядати, як суму, що складається з **n** доданків (характеристик), з яких два - лінійні характеристики $\{y=f(0)$ та $y=B_0x\}$, а решта {(**n-2**)-ва доданки} - нелінійні характеристики $\varphi_i(x)$, з яких (**j-1**)-на нелінійна характеристика $\varphi_i(x)$ з обмеженнями **П** для правої частини ламаної лінії $\{x\geq x_0\}$ та (**n-j-1**)-на нелінійна характеристика $\varphi_i(x)$ з обмеженнями **Л** для лівої частини ламаної лінії $\{x\leq x_0\}$. Як ми вже зазначали, характеристики $\varphi_i(x)$ ($i=\overline{1,j-1}$), які використовуються для правої частині ламаної лінії можуть бути лише в **I** та/або **IV** квадрантах, а характеристики $\varphi_i(x)$ ($i=\overline{j+1,n-1}$), які використовуються для лівої частині ламаної лінії можуть бути лише в **II** та/або **III** квадрантах, і всі ці характеристики мають режим «**на відкривання**». Крім того, слід пам'ятати, що при складанні двох лінійних характеристик складаються не кути, а кутові коефіцієнти цих характеристик, тобто $K_{\Sigma}= K_1+ K_2$, і отримана вислідна характеристика теж лінійна.

Розглянемо один з прикладів розкладання ламаної лінії на доданки для $x_0=0$.

Початкова точка не є вузлом (вершиною) ламаної лінії, тобто знаходиться усередині лінійного відрізку. На рис.35 надано відповідне розкладання ламаної лінії на доданки, де K_0, K_1, K_2, K_3 та K_4 - значення кутових коефіцієнтів лінійних відрізків ламаної лінії.

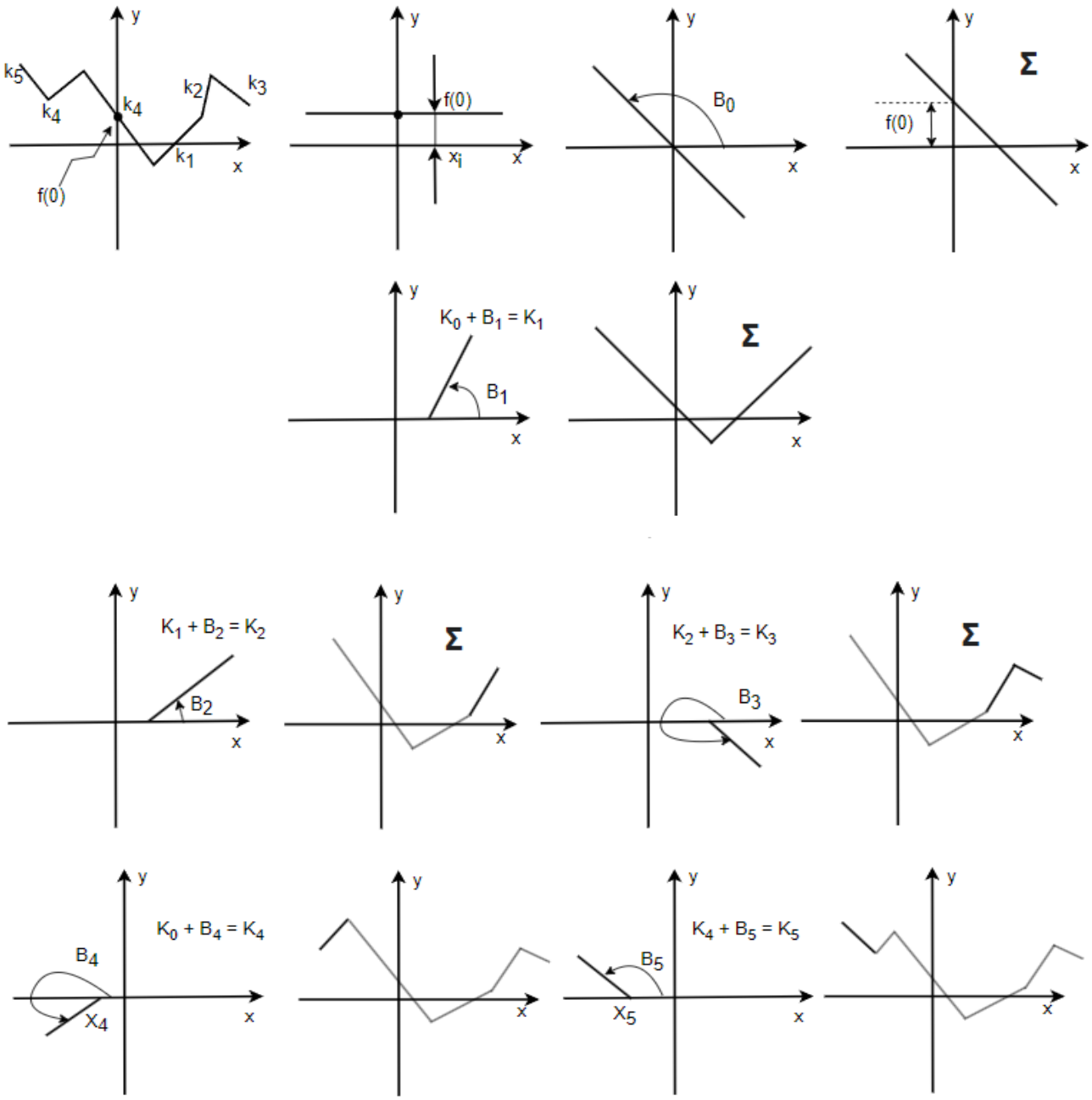

Рис.35

Зазначимо, що для рис.35: $\mathbf{B_0=K_0}$; $\mathbf{B_1=K_1-K_0}$ оскільки $\mathbf{K_0+B_1=K_1}$ тому що до лінійної характеристики з кутовим коефіцієнтом $\mathbf{K_0}$ {відрізок $\mathbf{y=\psi(x)}$}, додається лінійна частина характеристики $\mathbf{\psi_1(x)}$, яка має кутовий коефіцієнт $\mathbf{B_1}$ для отримання кутового коефіцієнту $\mathbf{K_1}$ наступного відрізку ламаної лінії; аналогічно $\mathbf{B_2=K_2-K_1}$, $\mathbf{B_3=K_3-K_0}$ та $\mathbf{B_4=K_4-K_3}$.

4. Квазіаналогові методи

Розглянемо три методи:

- ***Метод рішення визначаючого рівняння;***
- ***Метод дослідження визначаючого рівняння;***
- ***Метод дослідження еквівалентного рівняння.***

4.1 Метод рішення визначаючого рівняння

Визначаюче рівняння (відносно функції часу $\mathbf{y=f(t)}$) - це диференційне рівняння **n**-го порядку $\mathbf{p^n y=F(p^{n-1}y,p^{n-2}y\ldots py,y,t)}$ з **n** початковими умовами $\mathbf{p^S y(0)=C_s}$ $(s=\overline{0,n-1})$, рішенням якого є зазначена функція часу (принципово точно або приблизно, з заздалегідь обумовленою точністю).

P.S.: $\mathbf{p=d/dt}$.

Слід зазначити, що майже завжди використовуються, як визначаючі, тільки лінійні диференційні рівняння (однорідні або з сталим зовнішнім збудженням); якщо інколи використовуються нелінійні визначаючі диференційні рівняння використовуються, то виключно з нелінійностями типу множильно–ділільних математичних операцій.

Для з'ясування питання, які функції часу $\mathbf{y=f(t)}$ можемо отримати принципово точно, використовуючи лінійні визначаючі диференційні рівняння, згадаємо, як залежить рішення в загальному вигляді від значень коренів характеристичного рівняння:

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні - маємо суму показникових функцій.
2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні, але є і кратні - маємо суму показникових функцій, деякі з яких помножено на ступеневий поліном.
3. Якщо корені характеристичного рівняння уявні та різні - маємо суму синус-косинусних тригонометричних функцій.

4. Якщо корені характеристичного рівняння уявні, але є і кратні - маємо суму синус-косинусних тригонометричних функцій, деякі з яких помножено на ступеневий поліном.

5. Якщо корені характеристичного рівняння комплексні та різні - маємо суму показникових функцій, які помножено на синус-косинусні тригонометричні функції.

6. Якщо корені характеристичного рівняння комплексні, але є і кратні -- маємо суму синус-косинусних тригонометричних функцій, які помножено на синус-косинусні тригонометричні функції, а деякі з добутків ще помножено на ступеневий поліном.

Таким чином, принципово точно, використовуючи метод рішення визначаючого рівняння, маємо можливість отримувати наступні функції часу:

1. Показникові функції.
2. Синус-косинусні тригонометричні функції.
3. Ступеневі поліноми.
4. Суми та добутки зазначених функцій, окрім добутків однотипних функцій.

Якщо ж задана функція часу **y=f(t)** інша, тоді неможливо отримати **її** принципово точно, використовуючи лінійне визначаюче диференційне рівняння. В такому випадку необхідно знайти нелінійне визначаюче диференційне рівняння або, використовуючи метод апроксимації, знайти апроксимовуючу функцію **y=ψ(t)**, яка апроксимує функцію **y=f(t)** зі заздалегідь обумовленою точністю; а потім отримати функцію **y=ψ(t)** принципово точно. Слід зазначити, що апроксимуюча функція **y=ψ(t)** - це скінченна кількість членів ряду розкладання функції **y=f(t)** в ряд, а абсолютна похибка апроксимації Δ**f(t)=f(t)-ψ(t)** (так звана похибка зрізання) дорівнює залишковому члену ряду **R(t)**, тобто Δ**f(t)=R(t)** і $\Delta f_{max}=R_{max}$. Хоча в цьому випадку можуть використовуватись різні ряди, але практично найчастіше використовується ступеневий ряд.

Нагадую, яким чином знаходять рішення лінійного однорідного диференційного рівняння:

1. Знаходиться відповідне характеристичне рівняння (ступеневий поліном $\mathbf{Q_n(p)}$).
2. Знаходиться значення коренів цього ступеневого поліному $\mathbf{p_i}$ ($\mathbf{i}=\overline{1,n}$).
3. Знаходиться рішення в загальному вигляді.
4. Знаходиться поодиноке рішення з урахуванням початкових умов.

Враховуючи зазначену послідовність операцій по знаходженню рішення лінійного однорідного диференційного рівняння (ЛОДР), рекомендується наступна методика відновлення визначаючого ЛОДР та початкових умов (ПУ) для заданої функції часу $\mathbf{y=f(t)}$:

1. Відновлюється рішення в загальному вигляді по поодинокому рішенню (***П.1 не є обов'язковим***).
2. Відновлюються значення коренів характеристичного рівняння $\mathbf{p_i}$ ($i=\overline{1,n}$).
3. Відновлюється характеристичне рівняння $\mathbf{Q_n(p)=\prod(p-p_i)=0}$.
4. Відновлюється лінійне однорідне диференційне рівняння заміною $\mathbf{p^s}$ на $\mathbf{p^s y}$ ($s=\overline{0,n}$), $\{\mathbf{p^0 y=y}\}$.
5. Відновлюються **n** значень початкових умов $\mathbf{p^s y\ (0)}$ ($s=\overline{0,n-1}$) по відомій функції часу $\mathbf{y=f(t)}$.

P.S.: Спочатку необхідно знайти (**n-1**)-дну похідну функції часу (п.5а), а вже потім – початкові умови (п.5б).

Розглянемо декілька прикладів.

Маємо наступну функцію часу: $\mathbf{y=f(t)=5e^{-3t}-2te^{t}+4}$. Необхідно знайти визначаюче рівняння, тобто ЛОДР, рішенням якого є задана функція часу.

Відновлення визначаючого рівняння будемо робити по зазначеній рекомендованій методиці.

1. Відновлюємо рішення в загальному вигляді по поодинокому рішенню

$\mathbf{y=5e^{-3t}-2te^{t}+4}$:

$$y=C_1e^{at}+C_2e^{bt}+C_3te^{ct}+C_4e^{dt},$$

де $C_1=5$, $C_2=0$, $C_3=-2$, $C_4=4$, $p_1=a=-3$, $p_2=b=1$, $p_3=c=1$, $p_4=d=0$.

2. Відновлюємо значення коренів характеристичного рівняння p_i ($i=1,n$):

   $p_1=-3$, $p_2= p_3=1$, $p_4=0$.

3. Відновлюємо характеристичне рівняння $Q_4(p)=\prod(p-p_i)=0$:

$$Q_4(p)=\prod(p-p_i)=(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)=(p+3)(p-1)(p-1)(p-0)=p^4+p^3-7p^2+3p=0.$$

4. Відновлюємо ЛОДР заміною p^s на p^sy ($s=0,3$), $\{p^0y=y\}$:

   $p^4y + p^3y -7p^2 y +3py =0$.

5. Відновлюємо **4** значення початкових умов $p^sy(0)$ ($s=\overline{0,3}$) по відомій функції часу $y=f(t)$. 5а.Знаходимо похідні py,p^2y та p^3y: $py=-15e^{-3t}-2e^t -2te^t$, $p^2y=45e^{-3t}-4e^t -2te^t$ та $p^3y=-135e^{-3t}-6e^t -2te^t$ 5б. Відновлюємо **4** значення ПУ: $y(0)=9$; $py(0)=-17$; $p^2y(0)=41$ та $p^3y(0)=-141$.

Маємо наступну функцію часу: $y=A\sin\omega t+B\cos\omega t=C\sin(\omega t+\varphi)$, де $C=\sqrt{A^2+B^2}$; $\varphi=\mathrm{arctg}(B/A)$.

Необхідно знайти визначаюче рівняння, тобто ЛОДР, рішенням якого є задана функція часу.

1. Відновлюємо рішення в загальному вигляді по відомому поодинокому рішен-ню $y=A\sin\omega t+B\cos\omega t$:

$$y=C_1\sin at+ C_2\cos at,$$

де $C_1=A$, $C_2=B$, $p_1=ja=j\omega$, $p_2=-ja=-j\omega$.

2. Відновлюємо значення коренів характеристичного рівняння p_i ($\overline{i=1,2}$):

$$p_1=j\omega,\ p_2=-j\omega.$$

3. Відновлюємо характеристичне рівняння $Q_2(p)=\prod(p-p_i)=0$:

$$Q_2(p)=(p-j\omega)(p+j\omega)=p^2+\omega^2=0.$$

4. Відновлюємо ЛОДР:

$$p^2y+\omega^2y =0.$$

5. Відновлюємо значення початкових умов $\mathbf{p^s y(0)}$ ($s=\overline{0,1}$) по відомій функції часу $\mathbf{y=f(t)}$: Знаходимо похідну: $\mathbf{py=\omega A\cos\omega t-\omega B\sin\omega t}$ та відновлюємо значення ПУ: $\mathbf{y(0)=B}$; $\mathbf{py(0)=\omega A}$.

Побудова низькочастотних генераторів синусоїдальних коливань амплітудою **C**, частотою **ω** та фазою **φ** здійснюється, згідно визначаючого ЛОДР $\mathbf{p^2y+\omega^2y=0}$ для $\mathbf{y=C\sin(\omega t+\varphi)}$, на основі двох інтегруючих ОБ.

Маємо наступну функцію часу: $\mathbf{y=f(t)=2t^2+3t-8.}$ Необхідно знайти визначаюче рівняння, тобто ЛОДР, рішенням якого є задана функція часу.

1. Відновлюємо рішення в загальному вигляді по поодинокому рішенню $\mathbf{y=2t^2+3t+8}$:

$$\mathbf{y=C_1e^{at}+C_2\,te^{at}+C_3t^2e^{at}},$$

де $\mathbf{C_1=-8}$, $\mathbf{C_2=3}$, $\mathbf{C_3=2}$, $\mathbf{p_1=p_2=p_3=a=0}$.

2. Відновлюємо значення коренів характеристичного рівняння $\mathbf{p_i}$ ($\mathbf{i=1,n}$):

$$\mathbf{p_1=p_2=p_3=a=0}.$$

3. Відновлюємо характеристичне рівняння $\mathbf{Q_3(p)=\prod(p-p_i)=0}$:

$$\mathbf{Q_3(p)=(p-0)(p-0)(p-0)=p^3=0}.$$

4. Відновлюємо ЛОДР:

$$\mathbf{p^3y=0}.$$

5. Відновлюємо значення початкових умов $\mathbf{p^s y(0)}$ ($\mathbf{s=0,2}$) по відомій функції часу $\mathbf{y=f(t)}$: Знаходимо похідні:$\mathbf{py=4t+3}$; $\mathbf{p^2y=4}$ та відновлюємо значення ПУ: $\mathbf{y(0)=-8}$; $\mathbf{py(0)=3}$; $\mathbf{p^2y(0)=4}$.

Якщо маємо наступну функцію часу у вигляді поліному **n**-го ступеню: $\mathbf{y=f(t)=\sum_0^n a_it^i}$, то для такої функції часу визначаюче ЛОДР буде (**n+1**)-го порядку $\mathbf{\{p^{n+1}y=0\}}$ з (**n+1**)-ю ПУ $\mathbf{p^s y(0)=a_s s!}$ ($s=\overline{0,n}$).

Але для ступеневих поліномів існує і інше визначаюче диференційне рівняння -- лінійне неоднорідне диференційні рівняння зі сталим зовнішнім збудженням ЛНДР. Отримати таке ЛНДР зі сталим зовнішнім збудженням дуже просто:

достатньо знайти **n**-ну похідну, тобто $\mathbf{p^n y}$, для функції часу, яка має вигляд поліному **n**-го ступеню, та знайти значення **n** початкових умов. Отже, для функції часу $\mathbf{y=f(t)=\sum_0^n a_i t^i}$ визначаюче ЛНДР зі сталим зовнішнім збудженням таке: $\mathbf{p^n y=a_n n!}$ з початковими умовами $\mathbf{p^s y(0)= a_s s!}$ ($s=\overline{0,n-1}$).

Таким чином, використовуючи ЛНДР зі сталим зовнішнім збудженням замість ЛОДР, маємо при математичному моделюванні з допомогою ОБ на один інтегруючий ОБ менше.

P.S.: Для наступного прикладу будемо обмежуватись виконанням лише п.1 методики.

Маємо наступну функцію часу: $\mathbf{y=f(t)=2sint+5e^{-3t}sint-3t^2cos2t}$. Необхідно знайти визначаюче рівняння, тобто ЛОДР, рішенням якого є задана функція часу. Відновлюємо рішення в загальному вигляді по поодинокому рішенню $\mathbf{y=f(t)}$:

$$\mathbf{y=C_1sinat+C_2cosat+C_3e^{bt}sinct+C_4e^{dt}cosct+C_5sindt+}$$
$$\mathbf{+C_6cosdt+C_7tsindt+C_8tcosdt+C_9t^2sindt+C_{10}t^2cosdt}$$

де $\mathbf{C_1=2}$, $\mathbf{C_2=0}$, $\mathbf{C_3=5}$, $\mathbf{C_4=C_5=C_6=C_7=C_8=C_9=0}$, $\mathbf{C_{10}=3}$;

а $\mathbf{p_1=ja=j}$; $\mathbf{p_2=-ja=-j}$ $\mathbf{p_3=d+ja=-3+j}$; $\mathbf{p_4=d-ja=-3-j}$; $\mathbf{p_5= p_7= p_9=jd=j2}$; $\mathbf{p_6= p_8= p_{10}=-jd=-j2}$.

4.2 Метод дослідження визначаючого рівняння

Метод дослідження визначаючого рівняння використовується в поєднанні з методом примусового опитування часової осі для визначення кратності кожного з дійсних коренів $\mathbf{t_i^*}$ поліному **n**-го ступеню $\mathbf{P_n(t)=\sum_0^n a_i t^i =\prod_1^n (t-t_i^*)=0}$ одночасно з визначенням значень цих коренів.

Розглянемо поліном другого ступеню $\mathbf{P_2(t)=a_2t^2+a_1t+a_0=(t-t_1^*)(t-t_2^*)=0}$, який має два різних дійсних кореня $\mathbf{t_1^*}$ та $\mathbf{t_2^*}$. Перша похідна для цього поліному - $\mathbf{d\{P_2(t)\}/dt=(t-t_1^*)+(t-t_2^*)}$. Якщо **t** дорівнює значенню $\mathbf{t_1^*}$ або значенню $\mathbf{t_2^*}$, тоді значення $\mathbf{P_2(t_1^*)=0}$ і значення $\mathbf{P_2(t_2^*)=0}$, а обидва значення першої похідної відрізняються від нуля і дорівнюють $\mathbf{(t_1^*-t_2^*)}$ або $\mathbf{(t_2^*-t_1^*)}$. Але якщо поліном другого ступеню $\mathbf{P_2(t)=0}$ має один дійсний корінь $\mathbf{t_1^*}$, кратність якого 2, тобто

$P_2(t)=(t-t_1^*)^2=0$, а $d\{P_2(t)\}/dt=2(t-t_1^*)$, -- тоді для $t=t_1^*$ і значення $P_2(t_1^*)$ дорівнює нулю, і значення першої похідної для $t=t_1^*$ також дорівнює нулю. Для поліному третього ступеню $P_3(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0=(t-t_1^*)(t-t_2^*)(t-t_3^*)=0$, який має три різних дійсних кореня t_1^*, t_2^* та t_3^*, значення першої похідної знаходимо по формулі $d\{P_3(t)\}/dt=(t-t_2^*)(t-t_3^*)+(t-t_1^*)(t-t_3^*)+(t-t_1^*)(t-t_2^*)$, а значення другої похідної - по формулі $d^2\{P_3(t)\}/dt^2=2(t-t_1^*)+2(t-t_2^*)+2(t-t_3^*)$.Якщо t дорівнює значенню t_1^*, або значенню t_2^*, або значенню t_3^* тоді значення $P_3(t_1^*)=0$, $P_3(t_2^*)=0$ та $P_3(t_3^*)=0$, а значення першої похідної відрізняються від нуля і дорівнюють значенням $(t_1^*-t_2^*)(t_1^*-t_3^*)$, чи $(t_2^*-t_1^*)(t_2^*-t_3^*)$,чи $(t_3^*-t_1^*)(t_3^*-t_2^*)$.

Але якщо поліном третього ступеню $P_3(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0=0$, має один дійсний корінь t_1^*, кратність якого 2, та ще дійсний корінь t_2^*, тоді значення першої похідної дорівнює $d\{P_3(t)\}/dt=(t-t_1^*)^2+2(t-t_1^*)(t-t_2^*)$, а значення другої похідної - $d^2\{P_3(t)\}/dt^2=4(t-t_1^*)+2(t-t_2^*)$. В цьому випадку для $t=t_1^*$ не тільки значення $P_3(t_1^*)$ дорівнює нулю, а і значення першої похідної для $t=t_1^*$ також дорівнює нулю, але значення другої похідної для $t=t_1^*$ не дорівнює нулю, а має значення $2(t_1^*-t_2^*)$. Якщо ж цей поліном $P_3(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0=0$, має один дійсний корінь t_1^*, кратність якого 3, тобто $P_3(t)=(t-t_1^*)^3=0$, тоді значення першої похідної може бути знайдено по формулі $d\{P_3(t)\}/dt=3(t-t_1^*)^2$, а значення другої похідної -- по формулі $d^2\{P_3(t)\}/dt^2=6(t-t_1^*)$. В цьому випадку для $t=t_1^*$ не тільки значення $P_3(t_1^*)$ дорівнює нулю, а і значення першої та другої похідних для $t=t_1^*$ також дорівнює нулю, а значення третьої похідної для $t=t_1^*$ не дорівнює нулю, а має значення **6**.

Можемо довести, що для поліному n-го ступеню $P_n(t)=\sum_0^n a_it^i=\prod(t-t_i^*)=0$, якщо будь-який корінь t_i^* має кратність m, тоді для $t=t_1^*$ не тільки значення $P_n(t_1^*)$ дорівнює нулю, а і значення усіх похідних з першої похідної до (m-1)-ої похідної для $t=t_1^*$ також дорівнюють нулю, а значення m-ої похідної для $t=t_1^*$ не дорівнює

нулю. Це дозволяє одразу визначати не тільки значення дійсного кореня, а і встановлювати його кратність.

Згідно з методом примусового опитування часової осі, для знаходження значень усіх дійсних коренів поліному **n**-го ступеню $\mathbf{P_n(t)=\sum a_i t^i=\prod(t-t_i^*)=0}$ необхідно дослідити чотири функції часу $\boldsymbol{\varepsilon_s=F_s(t)=\sum_0^n a_i t^i}$ (**s=1,4**), де кожна з чотирьох функцій часу є поліномом **n**-го ступеню.

Для кожної функції часу визначаюче рівняння має такий вигляд:

$$\mathbf{d^n\varepsilon_s/dt^n=a_{sn}n!} \text{ або } \mathbf{p^n\varepsilon_s=a_{sn}n!},$$

де $\mathbf{p=d/dt}$ – оператор диференціювання,

з початковими умовами $\mathbf{p^к\varepsilon_s(0)=a_{sк}к!}$ ($\overline{к=0,n-1}$).

При використанні для дослідження зазначених визначаючих рівнянь математичного моделювання з допомогою операційних блоків схема моделювання складається з **n** інтегруючих операційних блоків першого порядку. Це надає можливість визначати не тільки значення кореня $\mathbf{t_k^*}$, при якому значення $\boldsymbol{\varepsilon_s(t_k^*)}$ дорівнює нулю, але і перевірити, скільки похідних (починаючи з першої похідної) при $\mathbf{t=t_k^*}$ також дорівнюють нулю {визначити значення (**m**-1)}, тобто одразу визначити кратність **m** кореня $\mathbf{t_k^*}$.

Таким чином, якщо при якомусь $\mathbf{t=t_k^*}$ значення $\boldsymbol{\varepsilon_s(t_k^*)}$ дорівнює нулю, але значення $\mathbf{p\varepsilon_s(t_k^*)}$ не дорівнює нулю, - це означає, що корінь $\mathbf{t_k^*}$має кратність **1** (**m-1=0**, тобто **m=1**).

Якщо при якомусь $\mathbf{t=t_k^*}$ значення $\boldsymbol{\varepsilon_s(t_k^*)}$ дорівнює нулю, значення $\mathbf{p\varepsilon_s(t_k^*)}$ також дорівнює нулю, але значення $\mathbf{p^2\varepsilon_s(t_k^*)}$ не дорівнює нулю, - це означає, що корінь $\mathbf{t_k^*}$має кратність **2**, тому що **m-1=1**, тобто **m=2**.

Аналогічно, якщо при якомусь $\mathbf{t=t_k^*}$ значення $\boldsymbol{\varepsilon_s(t_k^*)}$ дорівнює нулю та значення похідних $\mathbf{p^j\varepsilon_s(t_k^*)}$ ($j=\overline{1,m-1}$) також дорівнюють нулю, але значення $\mathbf{p^m\varepsilon_s(t_k^*)}$ не дорівнює нулю,-- це означає, що корінь $\mathbf{t_k^*}$має кратність **m**.

4.3 Метод дослідження еквівалентного рівняння

Нехай маємо будь-яке рівняння $\mathbf{F(y)=0}$ і необхідно знайти значення $\mathbf{y=y^*}$, яке задовольняє цьому рівнянню. Для цього рівняння еквівалентним рівнянням будемо вважати таке диференційне рівняння першого порядку $\mathbf{dy/dt=py=f(y)}$ з початковою умовою $\mathbf{y(0)=C_0}$, усталене значення рішення якого $\mathbf{y(t)I_{t\to\infty}}$ дорівнює значенню $\mathbf{y^*}$рівняння $\mathbf{F(y)=0}$, тобто $\mathbf{y(t)I_{t\to\infty}=y^*}$. Один з найпростіших варіантів еквівалентного рівняння – це коли обрати $\mathbf{f(y)=cF(y)}$, де $\mathbf{c=const}$, а полярність $\mathbf{c}$ необхідно обирати таким чином, щоб забезпечити негативний зворотній зв'язок в схемі моделювання диференційного рівняння першого порядку $\mathbf{py=cF(y)}$ з метою отримання усталеного режиму. При цьому усталене значення похідної $\mathbf{py(t)I_{t\to\infty}=0}$, тому що усталене значення $\mathbf{y(t)I_{t\to\infty}=y^*=const}$ і диференційне рівняння $\mathbf{py=cF(y)}$ в усталеного режиму еквівалентно рівняння $\mathbf{F(y)=0}$ незалежно від значень $\mathbf{c}$ та $\mathbf{C_0}$.

P.S.: Від значень c та C_0 залежіть лише час встановлення усталеного режиму.

Таким чином, необхідно для рівняння $\mathbf{F(y)=0}$ отримати еквівалентне диференційне рівняння, обравши необхідну полярність $\mathbf{c}$ та значення $\mathbf{c}$ та $\mathbf{C_0}$, виконати математичне моделювання з допомогою операційних блоків цього диференційного рівняння, дочекатись усталеного режиму і отримати значення $\mathbf{y=y^*}$.

Аналогічно, для системи рівнянь $\mathbf{F_i(y_1,y_2\ldots\ y_n)=0}$ $(i=\overline{1,n})$ з коренями $\mathbf{y_i=y_i^*}(i=\overline{1,n})$ система еквівалентних диференційних рівнянь першого порядку матиме такий вигляд:

$\mathbf{\{dy_i/dt=c_iF_i(y_1,y_2\ldots\ y_n)}$ $(i=\overline{1,n})$ **[**або $\mathbf{\{py_i=c_iF_i(y_1,y_2\ldots\ y_n)}$ $(i=\overline{1,n})$**]**

з початковими умовами $\mathbf{y_i(0)=C_i}$ $(i=\overline{1,n})$.

Полярності $\mathbf{c_i}$ $(i=\overline{1,n})$ необхідно обирати таким чином, щоб забезпечити негативні зворотні зв'язки в кожній схемі моделювання **i**-го $(i=\overline{1,n})$ диференційного рівняння першого порядку $\mathbf{py_i=c_iF_i(y_1,y_2\ldots\ y_n)}$ $(i=\overline{1,n})$ з метою отримання усталеного режиму.

ДОДАТОК А

Кодування та декодування інформації в комп'ютерних системах

Якщо будь-яке значення числа **A** позначається послідовністю деяких симво-лів $\mathbf{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, то така операція має назву **«кодування»**, а послідовність символів має назву **«код»** або «**код системи числення».** Слід зазначити, що в комп'ютерних системах використовуються дві основні форми зображення інформації: аналогова та цифрова. Таким чином, з точки зору перетворення інформації, **операція кодування є операцією аналого-цифрового перетворення**, тому що число **A** – це аналогова змінна, а послідовність цифрових символів – це цифрова змінна. Операційні блоки ОБ комп'ютерних систем, які моделюють (виконують) математичну операцію аналого-цифрового перетворення мають назву **«аналого-цифрові перетворювачі»** або, скорочено, - **«АЦП».**

P.S.: В закордонній літературі – ADC (Analog to Digital Convertor).

Зворотня операція, тобто знаходження значення числа **A** по коду системи числення $\mathbf{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, має назву **«декодування»**, а математична **операція цифро-аналогового перетворення** - це поєднання операції декодування з операцією масштабування, - знаходиться значення числа **X**, яке пропорційне значенню числа **A**, тобто $\mathbf{X = m_d A}$, де $\mathbf{m_d = const}$ **- масштаб декодування.** Операційні блоки ОБ комп'ютерних систем, які моделюють (виконують) математичну операцію цифро-аналогового перетворення мають назву **«цифро-аналогові перетворювачі»** або, скорочено, - **«ЦАП».**

P.S.: В закордонній літературі – DAC (Digital to Analog Convertor).

Розглянемо спочатку основні системи числення, які використовуються в комп'ютерних системах.

Системи числення

Система числення – це сукупність правил і знаків, за допомогою яких можна відобразити (кодувати) будь-яке невід'ємне число, тобто це символьний метод

запису невід'ємних чисел з допомогою письмових знаків (символів). Кількість символів залежить від системи числення і може складати від двох до 20 символів. Якщо кількість символів до 10, то в більшості систем числення в якості символів використовуються арабські цифри (**0,1,…9**); якщо кількість символів 16, то додатково використовуються перші шість великих літер латинської абетки (**A,B,C,D,E** та **F**).

В комп'ютерних системах практично завжди використовуються так звані позиційні системи числення, в яких одна і та ж цифра (числовий знак чи символ) у записі числа набуває різних значень в залежності від своєї позиції, тобто позиція (розряд числа) має свою вагу в числі. Позиційні системи бувають однорідні або неоднорідні (змішані).

Майже в усіх позиційних системах числення значення числа **A**, яке представлено у вигляді коду $\mathbf{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, обчислюється по наступній формулі:

$$\mathbf{A=\sum_0^n a_i g_i},$$

де (**n+1**) - це кількість розрядів числа; $\mathbf{i=\overline{0,n}}$ - позиційна нумерація символу (порядковий номер розряду); $\mathbf{a_i}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$) - цифрове значення **i**-го розряду числа; а $\mathbf{g_i}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$) – вага (ваговий коефіцієнт) значення **i**-го розряду числа.

Основа (база) однорідної позиційної системи числення, яка позначається як **p**, - це кількість цифр та/або символів, які використовуються для зображення числа. Слід зазначити, що в будь-якій однорідній позиційній системі числення вага **i**-го розряду числа $\mathbf{g_i}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$) завжди дорівнює відповідному ступеню **p**, тобто $\mathbf{g_i=p^i}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$). Назва такої однорідної позиційної системи числення відпо-відає значенню **p**.

Якщо **p=2**, така однорідна позиційна система числення має назву **«двійкова система числення» (ДСЧ)**; для запису чисел використовуються лише два символи (дві цифри) – **0** та **1**; $\mathbf{g_i=2^i}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$). Числа, представлені в цій системі, часто називають **двійковими**, або **бінарними числами**. Слід зазначити, що в ком-

п'ютерних системах використовуються і дробові числа, тобто для будь-якого числа $\mathbf{0 \le A < 1}$ код позначається, як $\mathbf{0,a_1a_2... a_n}$, і $\mathbf{g_i=2^{-i}}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$.

Якщо $\mathbf{p=3}$, така однорідна позиційна система числення має назву **«трійкова система числення» (ТСЧ)**; для запису чисел використовуються три символи (три цифри) – **0**,**1** та **2**; при цьому $\mathbf{g_i=3^i}$ $(\mathbf{i=\overline{0,n}})$. Числа, представлені в цій системі, часто називають **трійковими числами**. Слід зазначити, що в комп'ютерних системах використовується і інша трійкова система числення – так звана **«симетрична трійкова система числення»**; для запису чисел теж використовуються три символи (три цифри), але інші : **-1**,**0** та **1**, ($\mathbf{\overline{1}}$,**0** та **1**); при цьому залишається формула для $\mathbf{g_i=3^i}$ $(\mathbf{i=\overline{0,n}})$. Слід зазначити, що в комп'ютерних систе-мах часто використовуються дробові числа, тобто для будь-якого числа $\mathbf{0 \le A < 1}$ код позначається, як $\mathbf{0,a_1a_2... a_n}$. В цьому випадку $\mathbf{g_i=3^{-i}}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$.

P.S.: Існують і інші однорідні позиційні системи числення: «четвертна система числення» (p=4), «шісткова система числення» (p=6), «вісімкова система числення» (p=8) і навіть «дванадцяткова (дуодецімальна) система числення» (p=12) (рахування дюжинами), але в комп'ютерних системах такі системи числення не використовується.

Якщо $\mathbf{p=10}$, така однорідна позиційна система числення має назву **«десят-кова система числення» (ДСЧ)**; для запису чисел використовуються десять символів (десять цифр) – **0**,**1…9**; при цьому $\mathbf{g_i=10^i}$ $(i=\overline{0,n})$. Числа, представлені в цій системі, часто називають **десятковими числами**. Якщо використовують-ся дробові числа, тобто для будь-якого числа $\mathbf{0 \le A < 1}$ код позначається, як $\mathbf{0,a_1a_2... a_n}$, і $\mathbf{g_i=10^{-i}}$ $(i=\overline{1,n})$.

Якщо $\mathbf{p=16}$, така однорідна позиційна система числення має назву **«шістнадцяткова система числення» (ШСЧ)**; для запису чисел використовуються вже шістнадцять символів: десять арабських цифр – **0**,**1…9** та перші шість великих літер латинської абетки **A,B,C,D,E** та **F**, які мають наступні еквівалентні зна-

чення від десяти (**A**) до п'ятнадцяти (**F**); при цьому $\mathbf{g_i=16^i}$ ($i=\overline{1,n}$). Якщо використовуються дробові числа, тобто для будь-якого числа $\mathbf{0 \le A < 1}$ код позначається, як $\mathbf{0,a_1a_2... a_n}$, і $\mathbf{g_i=16^{-i}}$ ($i=\overline{1,n}$). Цю систему називають також **«Hex»** (**He**-**x**ade-cimal - шістнадцятковий). Для перетворення із шістнадцяткової системи числення в двійкову систему достатньо виконати наступну заміну: кожну шістнадцяткову цифру – на чотири бінарних цифри (тетраду) двійкової системи числення. Так, **0** замінюється на **0000**, **1** замінюється на **0001,** …, **9** замінюється на **1001**, **A** замінюється на **1010**, **B** замінюється на **1011**, …, **F** замінюється на **1111**. Для зворотного перетворення (із двійкової системи числення в шістнадцяткову систему) необхідно кожну тетраду двійкової системи числення замінити однією шістнадцятковою цифрою.

В неоднорідних (змішаних) позиційних системах числення в кожному розряді використовуються свої значення основ $\mathbf{p_i}$ ($i=\overline{1,n}$) та свої значення $\mathbf{g_i}$ ($i=\overline{0,n}$); для розрахунку значень $\mathbf{g_i}$ ($\mathbf{i=1,n}$) використовуються інші формули, які можуть використовувати значення $\mathbf{p_i}$($i=\overline{1,n}$). Першою такою системою числення вважається **система числень Майя:** для перших трьох розрядів $\mathbf{a_2a_1a_0}$ маємо наступні значення $\mathbf{p_0=20}$, $\mathbf{p_1=18}$, $\mathbf{p_2=20}$, $\mathbf{g_0=1}$, $\mathbf{g_1=20}$, $\mathbf{g_2=p_1p_2=360}$.

P.S.: Змішана позиційна система числення використовуються в системі визначення часу: наприклад, для n=3, - в секундах s (a_0), хвилинах m (a_1), годинах h (a_2), кількості діб d (a_3): $a_3a_2a_1a_0$, де $p_0=60$, $p_1=60$, $p_2=24$ $p_3=28$, або $p_3=29$, або $p_3=30$, або $p_3=31$, або $p_3=365$, або $p_3=366$, $g_0=1$, $g_1=60$, $g_2=p_1p_2=360$, $g_3=p_1p_2p_3=8640$. Змішана пози-ційна система числення також використовуються в системі визначення географічних координат об'єктів: $a_2a_1a_0$, де $p_0=1$, $p_1=60$, $p_2=90$ або $p_2=180$, $g_0=1$, $g_1=60$, $g_2=p_1p_2=360$ (a_2 – градуси; a_1 – мінути; a_0 – секунди).

До неоднорідних (змішаних) позиційних системах числення також необхідно віднести і **систему залишкових класів** (**СЗК**) **{числову систему залишків** (**ЧСЗ**), або **R**esidue **n**umber **s**ystem (**Rns**)**}**, тому що в цих системах одна і та ж

цифра (числовий знак чи символ) у записі числа набуває різних значень в залежності від своєї позиції.

P.S.: В літературі систему залишкових класів інколи відносять до непозиційних систем числення, але це протирічить великій китайській теоремі (китайській теоремі про залишки), згідно з якою обчислення значення числа А в СЗК виконується з врахуванням ваг, але з зі зменшенням отриманого результату на значення, пропорційне добутку ваг.

В комп'ютерних системах використовуються неоднорідні (змішані) позиційні системи числення на основі **системи залишкових класів** (**СЗК**) **-** це **двійково-кодована СЗК** (**binary-coded Rns)**, в якій кожній цифрі СЗК відповідає необхідна кількість двійкових розрядів з обраними значеннями ваг. Наприклад, для $\mathbf{0 \leq p_i \leq 7}$ **СЗК** використовують двійковий триплет $\mathbf{a_2a_1a_0}$ **ДСЧ**; для $\mathbf{11 \leq p_i \leq 13}$ **СЗК** використовують двійкову тетраду $\mathbf{a_3a_2a_1a_0}$, але значення ваг тетради $\mathbf{G_3}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{G_1}$ та $\mathbf{G_0}$ не обов'язково відповідають вагам $\mathbf{g_3}$, $\mathbf{g_2}$, $\mathbf{g_1}$ та $\mathbf{g_0}$ двійкової системи числень; для $\mathbf{17 \leq p_i \leq 29}$ **СЗК –** двійкову пентаду $\mathbf{a_4a_3a_2a_1a_0}$ тощо.

P.S.: Значення G_3, G_2, G_1 та G_0 – це значення ваг для тетади (ваги цифр усередині кожної тетради).

Але частіше за все в комп'ютерних системах використовуються неоднорідні (змішані) позиційні системи числення на основі **десяткової система числення –** це різні **двійково-десяткові системи числення** (**ДДСЧ**), в якій кожній цифрі ДСЧ відповідає двійкова тетрада $\mathbf{a_3\, a_2a_1a_0}$. Теоретично для обрання значень ваг $\mathbf{G_3,G_2,G_1,G_0}$ двійкової тетради кількість можливих комбінацій дорівнює $\mathbf{16!(16-10)! \approx 2.6x10^{10}}$, але практично використовуються лише 18 комбінацій. Ці комбінації записуються у вигляді послідовності з чотирьох десяткових цифр: перша – значення ваги $\mathbf{G_3}$, друга – значення ваги $\mathbf{G_2}$, третя – значення ваги $\mathbf{G_1}$ та четверта – значення ваги $\mathbf{G_0}$. Перелік 17 комбінацій, для яких $\mathbf{G_3 \geq G_2 \geq G_1 \geq G_0}$, наступний: **8421,7421,6421,5421,4421,7321,6321,5321,4321,3321,6221,5221,4221,8421, 7421,6421,5421,4421,7321,6321,5321,4321,3321,6221,5221,4221,6311,5311,4311,**

5211 Зазначимо, що є лише одна комбінація (**8421**), для якої ваги відповідають вагам двійкової системи числення. Крім того, в комп'ютерних системах іноді використовується ще одна комбінація (так званий **код Айкена**) - **2421**, для якої $G_3<G_2$ та $G_3+G_2+G_1+G_0=9$. До речі, лише чотири комбінації із зазначених 17-ти комбінацій мають суму ваг 9: **5211**,**4311**,**4221** та **3321**. Необхідно пам'ятати, що в майже усіх зазначених ДДСЧ (окрім ДДСЧ 8421) присутня неоднозначність кодування. Так, наприклад, для кода Айкена використовується таке коду-вання: **0→0000**, **1→0001**, **2→0010** (а не **1000**), **3→0011** (а не **1001**), **4→0100** (а не **1010**), **5→0101** (а не **1011**), **6→0110** (а не **1100**), **7→0111** (а не **1101**), **8→1110**, **9→1111**.

P.S.: В літературі такі двійково-десяткові системи числення мають назву «двійково-десяткові коди» (ДДК), а в закордонній літературі будь-який ДДК - «Binary-Coded Decimal» або BCD.

Для перетворення із десяткової системи числення в двійково-десяткову систему достатньо виконати наступну заміну: кожну десяткову цифру - на чотири бінарних цифри (тетраду) відповідно до значень ваг G_3,G_2,G_1,G_0 двійкової тетради . Наприклад, для ДДСЧ 8421: **0** замінюється на **0000**, **1** замінюється на **0001**, **2** замінюється на **0010**, …, **8** замінюється на **1000** та **9** замінюється на **1001**; для ДДСЧ 5211: **0** замінюється на **0000**, **1** замінюється на **0001**, **2** заміню-ється на **0011**, …, **8** замінюється на **1101** та **9** замінюється на **1111**; тощо. Для зворотного перетворення (із двійково-десяткової системи числення в десяткову систему) необхідно кожну тетраду двійково-десяткової системи числення замі-нити однією десятковою цифрою у відповідності до значень ваг G_3,G_2,G_1,G_0 тетради.

Таким чином, якщо маємо (**m+1**)-ин розряд числа в десятковій системі числення (код $a_m a_{m-1}\ldots a_1 a_0$), то в двійково-десятковій системі числення будемо мати в чотири рази більше розрядів, тобто маємо код $a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0$, де $(n+1)=4(m+1)$.

Якщо позначимо вагу **s**-го розряду числа в десятковій системі числення як $q_s(s=\overline{0,m})$, де $q_s=10^s$ $(s=\overline{0,m})$, а вагу **i**-го розряду числа в двійково-десятковій

числення як $\mathbf{g_i}$ ($i=\overline{0,n}$), то, з врахуванням ваг $\mathbf{G_3,G_2,G_1,G_0}$ тетрад, значення $\mathbf{g_i}$ ($i=\overline{0,n}$) розраховується в межах кожної тетради, як добуток $\mathbf{q_s}$ ($\mathbf{s}=\overline{0,m}$) розглядаємої тетради та відповідного $\mathbf{G_к}$ ($к=\overline{0,3}$) тетради.

Наприклад, для **m=2** (три десяткових цифри) і використанні ДДСЧ 8421, отримаємо такі значення ваг:

$\mathbf{g_i}$ ($i=\overline{0,11}$): $\mathbf{g_{11}=q_2G_3=800}$, $\mathbf{g_{10}=q_2G_2=400}$, $\mathbf{g_9=q_2G_1=200}$, $\mathbf{g_8=q_2G_0=100}$;

$\mathbf{g_7=q_1G_3=80}$, $\mathbf{g_6=q_1G_2=40}$, $\mathbf{g_5=q_1G_1=20}$, $\mathbf{g_4=q_1G_0=10}$; $\mathbf{g_3=q_0G_3=8}$, $\mathbf{g_2=q_0G_2=4}$,

$\mathbf{g_1=q_0G_1=2}$ та $\mathbf{g_0=q_0G_0=1}$.

Для **m=2** і використанні ДДСЧ 2421, отримаємо такі значення ваг:

$\mathbf{g_i}$ ($i=\overline{0,11}$): $\mathbf{g_{11}=q_2G_3=200}$, $\mathbf{g_{10}=q_2G_2=400}$, $\mathbf{g_9=q_2G_1=200}$, $\mathbf{g_8=q_2G_0=100}$; $\mathbf{g_7=q_1G_3=20}$, $\mathbf{g_6=q_1G_2=40}$, $\mathbf{g_5=q_1G_1=20}$, $\mathbf{g_4=q_1G_0=10}$; $\mathbf{g_3=q_0G_3=2}$, $\mathbf{g_2=q_0G_2=4}$,

$\mathbf{g_1=q_0G_1=2}$ та $\mathbf{g_0=q_0G_0=1}$ тощо.

Якщо використовуються дробові числа, то будь-яке число $\mathbf{0\leq A<1}$ в десятковій системі позначається, як $\mathbf{0,a_1a_2...\ a_{m-1}a_m}$, і $\mathbf{q_s=10^{-s}}$ ($s=\overline{1,m}$). В такому випадку вага **i**-го розряду чи-сла в двійково-десятковій числення $\mathbf{g_i}$ ($i=\overline{1,n}$), з врахуванням ваг $\mathbf{G_3,G_2,G_1,G_0}$ тетрад, розраховується в межах кожної тетради, як добуток $\mathbf{q_s}$($s=\overline{1,m}$) розглядаємої тетради та відповідного $\mathbf{G_к}$($\mathbf{к=\overline{0,3}}$) тетради.

Наприклад, для **m=1** і при використанні ДДСЧ 7421, отримаємо такі значення ваг розрядів $\mathbf{g_i}$ ($\mathbf{i=\overline{1,8}}$): $\mathbf{g_1=q_1G_3=0,7}$, $\mathbf{g_2=q_1G_2=0,4}$, $\mathbf{g_3=q_1G_1=0,2}$, $\mathbf{g_4=q_1G_0=0,1}$; $\mathbf{g_5=q_2G_3=0,07}$, $\mathbf{g_6=q_2G_2=0,04}$, $\mathbf{g_7=q_2G_1=0,02}$, $\mathbf{g_8=q_2G_0=0,01}$; для **m=1** і при використанні ДДСЧ 4421, отримаємо такі значення ваг $\mathbf{g_i}$ ($\mathbf{i=\overline{1,8}}$): $\mathbf{g_1=q_1G_3=0,4}$, $\mathbf{g_2=q_1G_2=0,4}$, $\mathbf{g_3=q_1G_1=0,2}$, $\mathbf{g_4=q_1G_0=0,1}$; $\mathbf{g_5=q_2G_3=0,04}$, $\mathbf{g_6=q_2G_2=0,04}$, $\mathbf{g_7=q_2G_1=0,02}$, $\mathbf{g_8=q_2G_0=0,01}$ тощо.

Інформація стосовно значень ваг розрядів для будь-якої позиційної системи числення необхідна для аналізу або синтезу відповідних уніполярних чи біполярних цифро-аналогових перетворювачів ЦАП (перетворювачів цифрового коду обраної системи числення в аналоговий сигнал).

Кодування біполярної інформації в комп'ютерних системах

Для кодування біполярної інформації використовується метод зміщення нуля з наступним корегуванням. Розглянемо більш детально найбільш поширені ко-ди різноманітних систем числення, які застосовуються в комп'ютерних систе-мах для кодування біполярної інформації. При цьому будемо розглядати коду-вання біполярної інформації для дробових чисел, тобто для діапазону $\mathbf{-1<A<1}$. Зазначимо, що це відповідає представленню в комп'ютерних системах мантиси числа.

Як відомо, невід'ємне дробове число ($\mathbf{0\leq A<1}$) в будь-якій позиційній системі числення має наступний вигляд: $\mathbf{0,a_1a_2... a_{n-1}a_n}$, де $\mathbf{a_i}$ ($\mathbf{i=\overline{1,n}}$) - цифрове значення **i**-го розряду числа (числові чи цифрові розряди). Для кодування біполярного дробового числа ($\mathbf{-1<A<1}$) викорисовується в «нульовому» (так званому **знаковому**) розряді замість **0** ще одна бінарна цифра $\mathbf{a_0}$.

Таким чином, біполярне дробове число, значення якого може відповідати або запису невід'ємного дробового числа $\mathbf{+0,a_1a_2... a_{n-1}a_n}$, або запису від'ємного дробового числа $\mathbf{-0,a_1a_2... a_{n-1}a_n}$, має наступну форму запису:

$$\mathbf{a_0^b,a_1^b\, a_2^b... a_{n-1}^b\, a_n^b},$$

де субіндекс **b** означає код, який використовується, а значення $\mathbf{a_i^b}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$) залежать від обраного коду.

P.S.: Для виявлення переповнення розрядної сітки в комп'ютерних системах використовуються так звані модифіковані коди, які відрізняються від звичайних наявністю не одного, а двох, з однаковими значеннями, знакових розрядів.

Перший і найпростіший код, який почали використовувати в комп'ютерних системах для кодування біполярних чисел – це так званий **«прямий код»**.

Для прямого коду використовуємо субіндекс **p** замість **b**. В прямому коді для невід'ємних дробових чисел $\mathbf{a_0^p=0}$, а для від'ємних дробових чисел $\mathbf{a_0^p=1}$; при цьому значення числових розрядів не змінюються, тобто завжди $\mathbf{a_i^p=a_i}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$.

Отже, для коду $\mathbf{0,a_1^p\ a_2^p\ldots\ a_{n-1}^p\ a_n^p}$ значення числа $\mathbf{A^p}$ обчислюється по такій формулі: $\mathbf{A^p=\sum_1^n a_i^p g_i=\sum_1^n a_i g_i}$; а для коду $\mathbf{1,a_1^p\ a_2^p\ldots\ a_{n-1}^p\ a_n^p}$ значення числа обчислюється по формулі $\mathbf{A= -\sum_1^n a_i^p g_i= -\sum_1^n a_i g_i}$.

Другий код, який почали використовувати, - це так званий **«інверсний код»**, для якого будемо використовувати субіндекс **i** замість **b**. В інверсному коді для невід'ємних дробових чисел $\mathbf{a_0^i=0}$, а для від'ємних дробових чисел $\mathbf{a_0^i=1}$; при цьому значення числових розрядів залежать від значення знакового розряду: для $\mathbf{a_0^i=0}$, $\mathbf{a_i^i=a_i=a_i^p}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$ і значення невід'ємного числа $\mathbf{A^i}$ обчислюється по формулі $\mathbf{A^i=\sum_1^n a_i^i g_i}$, або, що теж саме, по формулі $\mathbf{A^i=\sum_1^n a_i g_i}$; а якщо $\mathbf{a_0^i=1}$ і $\mathbf{a_i^i=a_i}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$ і $\mathbf{A^i= -\sum_1^n \overline{a_i^i} g_i}$, або, з врахуванням того, що $\mathbf{\overline{a_i^i}=1-a_i^i}$, для отримання значення від'ємного числа $\mathbf{A^i}$ отримаємо формулу $\mathbf{A^i=(-\sum_1^n g_i)+\sum_1^n a_i^i g_i}$.

Таким чином, можемо отримати для інверсного коду першу єдину формулу (замість двох окремих формул для невід'ємного числа та для від'ємного числа) для визначення значення біполярного числа

$$\mathbf{A_1^i=a_0^i(-\sum_1^n g_i)+\sum_1^n a_i^i g_i=a_0^i(-g_0^{-n})+\sum_1^n a_i^i g_i}, \text{ де } \mathbf{g_0^{-n}=\sum_1^n g_i}.$$

Таку заміну ($\mathbf{g_0^{-n}}$ замість $\mathbf{\sum_1^n g_i}$) доречно зробити, тому що для ДСЧ, а також для ДДСЧ **5211**,**4311**,**4221** і **3321** маємо**:**

$$\mathbf{\sum_1^n g_i=g_0-g_n=1-g_n\ \{g_0=1,\ g_n=0{,}00\ldots01} \text{ і } \mathbf{\sum_1^n g_i=0{,}11\ldots11\}}.$$

Для інших ДДСЧ значення $\mathbf{g_0^{-n}=\sum_1^n g_i}$ інше, але його значення визначається з врахуванням суми ваг тетради $\mathbf{G_T= G_3+G_2+G_1+G_o}$. Крім формули $\mathbf{A_1^i}$ для сінтезу та аналізу біполярних ЦАП інверсного коду досить часто використовуються і інші формули: $\mathbf{A_2^i}$, $\mathbf{A_3^i}$ або $\mathbf{A_4^i}$.

Формулу для $\mathbf{A_2^i}$ легко отримати з формули для $\mathbf{A_1^i}$, використавши заміну $\mathbf{a_0^i=1-\overline{a_i^i}}$ Тоді формула для $\mathbf{A_2^i}$ має такий вигляд:

$$\mathbf{A_2^i=(-g_0^{-n}) + \overline{a_i^i}\,(g_0^{-n}) + \sum_1^n a_i^i g_i},$$

а якщо $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$, тоді формула для $\mathbf{A_2^i}$ буде мати такий:

$$\mathbf{A_2^i= -1+\overline{a_i^i}+\sum_1^n a_i^i g_i +a_0^i g_n=1+\overline{a_i^i}+\sum_1^n a_i^i g_i +a_0^i g_n}$$

Формулу для $\mathbf{A_3^i}$ отримаємо з формули для $\mathbf{A_1^i}$, використавши заміну:

$$\mathbf{a_i^i=0.5\{1+(a_i^i-\overline{a_i^i})\}\ (i=\overline{0,n})}.$$

Тоді формула для $\mathbf{A_3^i}$ має наступний вигляд:

$$\mathbf{A_3^i=0.5\{(\overline{a_0^i}-a_0^i)g_0^{-n}+\sum_1^n(a_i^i-\overline{a_i^i})g_i\}},$$

а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$ - такий:

$$\mathbf{A_3^i=0.5\{(\overline{a_0^i}-a_0^i)+\sum_1^n(a_i^i-\overline{a_i^i})g_i+(a_0^i-\overline{a_0^i})g_n\}}.$$

Формулу для $\mathbf{A_4^i}$ отримаємо з формули для $\mathbf{A_3^i}$, якщо звільнитися від дужок та згрупувати окремо невід'ємні доданки і окремо згрупуємо від'ємні доданки, використавши інверсію замість цих від'ємних доданків:

$$\mathbf{A_4^i=0.5\{(\overline{a_0^i}g_0^{-n}+\sum_1^n a_i^i g_i) +(-1)(a_0^i g_0^{-n}+\sum_1^n \overline{a_i^i} g_i)\}},$$

а для $\mathbf{g_0^n=1-g_n}$ отримаємо

$$\mathbf{A_4^i=0.5\{(\overline{a_0^i}+\sum_1^n a_i^i g_i +a_0^i g_n)+(-1)(a_0^i+\sum_1^n \overline{a_i^i} g_i +\overline{a_0^i} g_n)\}.}$$

Слід зазначити, що для двійкової системи числення частіше використовується інший термін **«зворотній код»**, тому що для ДСЧ, на відміну від деяких ДДСЧ, це теж саме.

P.S.: В закордонній літературі інверсний (зворотній) код має назву: «код з доповненням до одиниць», тому що $1,a_1^i a_2^i \ldots a_{n-1}^i a_n^i + 0,a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n=1.11\ldots11$, тобто для $A<0$ значення $a_i^i=1-a_i$ $(i=\overline{0,n})$.

Зворотній код для ДДСЧ – це код з доповненням в тетрадах до 1001 (до дев'яток десяткової системи числення) на відміну від інверсного коду з доповненням в тетрадах до 1111.

Для двійково-десяткової системи числення 8421 використовується крім звичайного інверсного коду інколи використовується **«інверсний код 8421+3».** В цьому інверсному коді 8421+3 для невід'ємних дробових чисел також $\mathbf{a_0^i=0}$, а для від'ємних дробових чисел $\mathbf{a_0^i=1}$; при цьому значення числових розрядів залежать від значення знакового розряду: якщо $\mathbf{a_0^i=0}$, тоді в кожну тетраду невід'ємного числа $\mathbf{A^i}$ додається **0011 (+3 в десятковій системі числення**),тобто використовується таке кодування: **0→0011**, **1→0100**, **2→0101**, **3→0110**, **4→0111**, **5→1000**, **6→ 1001**, **7→1010**, **8→1011**, **9→1100**; а якщо $\mathbf{a_0^i=1}$, тоді $\mathbf{a_i^i=a_i^i}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$. При цьому суттєво спрощується зміна знаку числа – інверсією значень бінарних цифр в усіх розрядах, на відміну від звичайного інверсного коду ДДСЧ 8421.

P.S.: Замість інверсного коду ДДСЧ 8421 використовується зворотній код ДДСЧ 8421, в якому також спрощується така ж зміна знаку числа за рахунок інверсії значень усіх бінарних цифр коду.

Для двійково-десяткових систем числення 2421 і для ДДСЧ **5211**,**4311**,**4221** і **3321**, використовується звичайний інверсний код.

Ще один код, який використовують в комп'ютерних системах, - це так званий **«доповняльний код»**, для якого будемо використовувати субіндекс **d** замість **b**. Доповняльний код відрізняється від інверсного тим, що для від'ємних дробо-вих чисел значення інверсного коду збільшено на одиницю молодшого розряду ($\mathbf{g_n=0{,}00\ldots01}$), тобто для $\mathbf{a_0^d=1}$, маємо

$$\mathbf{1{,}a_1^d\, a_2^d \ldots a_{n-1}^d\, a_n^d = 1{,}a_1^i\, a_2^i \ldots a_{n-1}^i\, a_n^i + 0{,}00\ldots01};$$

тож для від'ємних дробових чисел ($\mathbf{A<0}$) значення числа

$$\mathbf{A^d=(-\sum_1^n g_i)+\sum_1^n a_i^d g_i - g_n = -(g_0^{-n}+g_n)+\sum_1^n a_i^d g_i},$$

а значення невід'ємних дробових чисел такі ж, як і для прямого і інверсного кодів, тобто для $\mathbf{a_0^d=0}$ маємо $\mathbf{a_i^d=a_i}$ ($\mathbf{i=\overline{1,n}}$) і значення невід'ємного числа обчислюється по формулі $\mathbf{A^d=\sum_1^n a_i^d g_i}$, або, що теж саме, по формулі $\mathbf{A^d=\sum_1^n a_i g_i}$.. Отже, можемо отримати для доповняльного коду першу єдину формулу (за-мість двох окремих формул для невід'ємного числа та для відємного числа) для визначення значення біполярного числа

$$\mathbf{A_1^d= -a_0^d(\sum_1^n g_i+g_n)+\sum_1^n a_i^d g_i}, \text{ або } \mathbf{A_1^d= -a_0^d(g_0^{-n}+g_n)+\sum_1^n a_i^d g_i},$$

а якщо $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$, тоді $\mathbf{A_1^d= - a_0^d+\sum_1^n a_i^d g_i}$.

P.S.: В закордонній літературі доповняльний код має назву: «код з доповненням до 2», тому що для A<0 маємо:

$$\mathbf{1,a_1^d a_2^d \ldots a_{n-1}^d a_n^d+0,a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n=1.11\ldots11+0,00\ldots01=10,00\ldots00=2.}$$

Крім формули $\mathbf{A_1^d}$ для сінтезу та аналізу біполярних ЦАП доповняльного коду досить часто використовуються і інші формули: $\mathbf{A_2^d}$, $\mathbf{A_3^d}$ або $\mathbf{A_4^d}$.

Формулу для $\mathbf{A_2^d}$ легко отримати з формули для $\mathbf{A_1^d}$, використавши таку заміну $\mathbf{a_0^d=1-\overline{a_0^d}}$. Тоді формула для $\mathbf{A_2^d}$ буде мати такий вигляд:

$$\mathbf{A_2^d=-(g_0^{-n}+g_n)+ \overline{a_0^d}(g_0^{-n}+g_n)+\sum_1^n a_i^d g_i},$$

а для $\mathbf{g_0^n=1-g_n}$,- такий: $\mathbf{A_2^d =-1+\overline{a_0^d}+\sum_1^n a_i^d g_i}$.

Формулу для $\mathbf{A_3^d}$ отримаємо з формули для $\mathbf{A_1^d}$ заміною: $\mathbf{a_i^d =0.5\{1+(a_i^d-\overline{a_0^d})\}}$ ($\mathbf{i=\overline{0,n}}$).Тоді формула для $\mathbf{A_3^d}$ має такий вигляд:

$$\mathbf{A_3^d=0.5\{(\overline{a_0^d} -a_0^d)+\sum_1^n(a_i^d-\overline{a_i^d})g_i - (1-g_0^{-n})\}},$$

а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$ -- такий: $\mathbf{A_3^d =0.5\{(\overline{a_0^d} -a_0^d)+ \sum_1^n(a_i^d-\overline{a_i^d})g_i - g_n\}}$.

Формулу для $\mathbf{A_4^d}$ отримаємо з формули для $\mathbf{A_3^d}$, якщо звільнитися від дужок та згрупувати окремо невід'ємні доданки і окремо згрупуємо від'ємні доданки, використавши інверсію замість від'ємних доданків:

$$\mathbf{A_4^d=0.5\{(\overline{a_0^d} +\sum_1^n a_i^d g_i)+(-1)(a_0^d+\sum_1^n \overline{a_i^d} g_i -(1-g_0^{-n})\}},$$

а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$ отримаємо $\mathbf{A_4^d=0.5\{(\overline{a_0^d}+\sum_1^n a_i^d g_i+g_n)+(-1)(a_0^d+\sum_1^n \overline{a_i^d} g_i)\}}$.

Ще один код, який використовують в комп'ютерних системах, - це так званий **«зсунений код»**, для якого будемо використовувати субіндекс **s** замість **b**. Зсунений код відрізняється від доповняльного коду лише інверсією знакового розряду, тобто $\mathbf{a_0^s=\overline{a_0}^d}$, а значення числових розрядів зсуненого і доповняльного кодів співпадають, тобто $\mathbf{a_i^s=a_i^d}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$.

Таким чином, можемо легко отримати усі формули для зсуненого коду з відповідних формул для доповняльного коду заміною значення знакового розряду на протилежне:

$\mathbf{A_1^s= -\overline{a_0^s}(g_0^{-n}+g_n)+\sum_1^n a_i^s g_i}$, а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$, - такий: $\mathbf{A_1^s= -\overline{a_0^s} +\sum_1^n a_i^s g_i}$;

$$\mathbf{A_2^s= -(g_0^{-n}+g_n)+a_0^s(g_0^{-n}+g_n)+\sum_1^n a_i^s g_i},$$

а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$ - такий: $\mathbf{A_2^s= -1+\sum_0^n a_i^s g_i}$;

$$\mathbf{A_3^s=0.5\{(a_0^s-\overline{a_0^s})+\sum_1^n(a_i^s-\overline{a_i^s})g_i -(1-g_0^{-n})\}},$$

а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$ - такий: $\mathbf{A_3^s=0.5\{(a_0^s-\overline{a_0^s})+\sum_1^n(a_i^s-\overline{a_i^s})g_i -g_n\}}$;

$$\mathbf{A_4^s=0.5\{(\sum_0^n a_i^s g_i)+(-1)(\sum_0^n \overline{a_i^s} g_i -(1-g_0^{-n})\}},$$

а для $\mathbf{g_0^{-n}=1-g_n}$ - такий: $\mathbf{A_4^s=0.5\{(\sum_0^n a_i^s g_i+g_n)+(-1)(\sum_0^n \overline{a_i^s} g_i\}}$.

ДОДАТОК В

Контрольна робота №1

Тема контрольної роботи №1 - Еквівалентні перетворення диференційного рівняння, яке містить похідні трьох змінних.

Завдання для контрольної роботи №1:

Для диференційного рівняння другого порядку

$$\mathbf{p^2y + a_1py + a_0y = b_2p^2x + b_1px + b_0x = c_2p^2z + c_1pz + c_0z},$$

що містить похідні трьох змінних і має наступні початкові умови:

$$\mathbf{y(0)=C_1,\ py(0)= C_2,\ x(0)=D_1,\ px(0)= D_2,\ z(0)=E_1} \text{ та } \mathbf{pz(0)= E_2}:$$

1) зробити запис еквівалентної форми універсального виду **УВ3** (системи рівнянь першого порядку), що мають відомі коефіцієнти $\mathbf{a_1, a_0, b_2, b_1, b_0, c_2, c_1}$ і $\mathbf{c_0}$ та невідомі коефіцієнти $\boldsymbol{\alpha_i}$ **(i=0,2)** і $\boldsymbol{\beta_i}$ **(i=0,2)**;
2) отримати системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення значень коефіцієнтів $\boldsymbol{\alpha_i}$ **(i=0,2)** і $\boldsymbol{\beta_i}$ **(i=0,2)**;
3) здійснити розрахунок значень невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{\alpha_i}$ **(i=0,2)** і $\boldsymbol{\beta_i}$ **(i=0,2)**;
4) отримати рівняння заміни, тобто залежності нових змінних $\mathbf{y_i}$ **(i=1,2)** від початкових змінних **y, py, x, px, z** та **pz**;
5) здійснити розрахунок значень нових початкових умов $\mathbf{y_1(0)}$ та $\mathbf{y_2(0)}$.

Значення $\mathbf{a_1, a_0, b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2}$ та форму універсального виду **УВ3 (НФ3 або КФ3)** узяти з таблиці варіантів.

Таблиця варіантів завдань для контрольної роботи №1:

№ п/п	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0	c_2	c_1	c_0	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2	Форма УВ2
01	-1	-2	0	-4	-5	0	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФ3
02	-3	-1	-2	-9	+6	0	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФ3
03	-7	-4	0	+1	-8	+3	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФ3
04	-2	-6	-3	+5	+1	0	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФ3
05	-4	+2	0	-1	-5	-2	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФ3
06	-5	+3	+4	-6	+3	0	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФ3
07	-9	+7	0	+3	-2	-5	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФ3
08	-6	+5	-4	+7	+9	0	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФ3
09	+8	-9	0	-2	-4	-1	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФ3

10	+3	-8	-7	-4	+5	-4	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
11	+7	-3	+5	+8	-7	+1	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
12	+9	-2	0	+4	+3	0	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
13	+1	+2	+2	-2	-6	0	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
14	+2	+4	0	-9	+7	+3	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
15	+4	+6	-3	+2	-9	0	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
16	+5	+1	0	+9	+2	-2	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
17	-1	-2	+4	-4	-5	0	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
18	-3	-1	0	-9	+6	-5	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
19	-7	-4	-4	+1	-8	0	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
20	-2	-6	0	+5	+1	+6	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
21	-4	+2	-7	-1	-5	-4	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
22	-5	+3	+5	-6	+3	+1	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
23	-9	+7	0	+3	-2	0	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
24	-6	+5	+2	+7	+9	0	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
25	+8	-9	0	-2	-4	+3	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
26	+3	-8	-3	-4	+5	0	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
27	+7	-3	0	+8	-7	-2	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
28	+9	-2	+4	+4	+3	0	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
29	+1	+2	0	-2	-6	-5	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
30	+2	+4	-4	-9	+7	0	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
31	+4	+6	0	+2	-9	+6	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
32	+5	+1	-7	+9	+2	-4	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
33	-1	-2	+5	-4	-5	+1	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
34	-3	-1	0	-9	+6	0	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
35	-7	-4	+2	+1	-8	0	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
36	-2	-6	0	+5	+1	+3	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
37	-4	+2	-3	-1	-5	0	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
38	-5	+3	0	-6	+3	-2	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
39	-9	+7	+4	+3	-2	0	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
40	-6	+5	0	+7	+9	-5	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
41	+8	-9	-4	-2	-4	0	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
42	+3	-8	0	-4	+5	+6	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
43	+7	-3	-7	+8	-7	-4	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
44	+9	-2	+5	+4	+3	+1	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
45	+1	+2	0	-2	-6	0	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
46	+2	+4	+2	-9	+7	0	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
47	+4	+6	0	+2	-9	+3	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
48	+5	+1	-3	+9	+2	0	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
49	-1	-2	0	-4	-5	-2	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
50	-3	-1	+4	-9	+6	0	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
51	-7	-4	0	+1	-8	-5	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
52	-2	-6	-4	+5	+1	0	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ

53	-4	+2	0	-1	-5	+6	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
54	-5	+3	-7	-6	+3	-4	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
55	-9	+7	+5	+3	-2	+1	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
56	-6	+5	0	+7	+9	0	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
57	+8	-9	+2	-2	-4	0	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
58	+3	-8	0	-4	+5	+3	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
59	+7	-3	-3	+8	-7	0	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
60	+9	-2	0	+4	+3	-2	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
61	+1	+2	+4	-2	-6	0	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
62	+2	+4	0	-9	+7	-5	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
63	+4	+6	-4	+2	-9	0	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
64	+5	+1	0	+9	+2	+6	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
65	-1	-2	-7	-4	-5	-4	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
66	-3	-1	+5	-9	+6	+1	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
67	-7	-4	0	+1	-8	0	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
68	-2	-6	+2	+5	+1	0	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
69	-4	+2	0	-1	-5	+3	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
70	-5	+3	-3	-6	+3	0	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
71	-9	+7	0	+3	-2	-2	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
72	-6	+5	+4	+7	+9	0	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
73	+8	-9	0	-2	-4	-5	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
74	+3	-8	-4	-4	+5	0	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
75	+7	-3	0	+8	-7	+6	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
76	+9	-2	-7	+4	+3	-4	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
77	+1	+2	+5	-2	-6	+1	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
78	+2	+4	0	-9	+7	0	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
79	+4	+6	+2	+2	-9	0	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
80	+5	+1	0	+9	+2	+3	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
81	-1	-2	-3	-4	-5	0	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
82	-3	-1	0	-9	+6	-2	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
83	-7	-4	+4	+1	-8	0	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
84	-2	-6	0	+5	+1	-5	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
85	-4	+2	-4	-1	-5	0	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
86	-5	+3	0	-6	+3	+6	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
87	-9	+7	-7	+3	-2	-4	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
88	-6	+5	+5	+7	+9	+1	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
89	+8	-9	0	-2	-4	0	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
90	+3	-8	+2	-4	+5	0	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
91	+7	-3	0	+8	-7	+3	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
92	+9	-2	-3	+4	+3	0	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
93	+1	+2	0	-2	-6	-2	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
94	+2	+4	+4	-9	+7	0	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
95	+4	+6	0	+2	-9	-5	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ

96	+5	+1	-4	+9	+2	0	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
97	-1	-2	0	-4	-5	+6	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
98	-3	-1	-7	-9	+6	-4	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
99	-7	-4	+5	+1	-8	+1	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
100	-2	-6	0	+5	+1	0	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
101	-4	+2	+2	-1	-5	0	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
102	-5	+3	0	-6	+3	+3	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
103	-9	+7	-3	+3	-2	0	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
104	-6	+5	0	+7	+9	-2	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
105	+8	-9	+4	-2	-4	0	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
106	+3	-8	0	-4	+5	-5	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
107	+7	-3	-4	+8	-7	0	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
108	+9	-2	0	+4	+3	+6	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
109	+1	+2	-7	-2	-6	-4	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
110	+2	+4	+5	-9	+7	+1	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
111	+4	+6	0	+2	-9	0	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
112	+5	+1	+2	+9	+2	0	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
113	-1	-2	0	-4	-5	+3	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
114	-3	-1	-3	-9	+6	0	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
115	-7	-4	0	+1	-8	-2	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
116	-2	-6	+4	+5	+1	0	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
117	-4	+2	0	-1	-5	-5	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
118	-5	+3	-4	-6	+3	0	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
119	-9	+7	0	+3	-2	+6	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
120	-6	+5	-7	+7	+9	-4	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
121	+8	-9	+5	-2	-4	+1	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
122	+3	-8	0	-4	+5	0	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
123	+7	-3	+2	+8	-7	0	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
124	+9	-2	0	+4	+3	+3	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
125	+1	+2	-3	-2	-6	0	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
126	+2	+4	0	-9	+7	-2	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
127	+4	+6	+4	+2	-9	0	-2	+6	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
128	+5	+1	0	+9	+2	-5	-4	-7	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
129	-1	-2	-4	-4	-5	0	+7	+8	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
130	-3	-1	0	-9	+6	+6	+5	-4	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
131	-7	-4	-7	+1	-8	-4	-2	+6	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
132	-2	-6	+5	+5	+1	+1	-4	-7	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ
133	-4	+2	0	-1	-5	0	+7	+8	0	+6	+2	+3	+9	+1	НФЗ
134	-5	+3	+2	-6	+3	0	+5	-4	+1	0	+7	+3	+8	-5	КФЗ
135	-9	+7	0	+3	-2	+3	-2	+6	+5	+7	0	+2	-3	+4	НФЗ
136	-6	+5	-3	+7	+9	0	-4	-7	+2	+8	+1	0	-2	-5	КФЗ
137	+8	-9	0	-2	-4	-2	+7	+8	+3	+4	+9	-6	0	+1	НФЗ
138	+3	-8	+4	-4	+5	0	+5	-4	+2	+6	+7	-2	+1	0	КФЗ

139	**+7**	**-3**	**0**	**+8**	**-7**	**-5**	**-2**	**+6**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
140	**+9**	**-2**	**-4**	**+4**	**+3**	**0**	**-4**	**-7**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
141	**+1**	**+2**	**0**	**-2**	**-6**	**+6**	**+7**	**+8**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
142	**+2**	**+4**	**-7**	**-9**	**+7**	**-4**	**+5**	**-4**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
143	**+4**	**+6**	**+5**	**+2**	**-9**	**+1**	**-2**	**+6**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
144	**+5**	**+1**	**0**	**+9**	**+2**	**0**	**-4**	**-7**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**
145	**-1**	**-2**	**+2**	**-4**	**-5**	**0**	**+7**	**+8**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
146	**-3**	**-1**	**0**	**-9**	**+6**	**+3**	**+5**	**-4**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
147	**-7**	**-4**	**-3**	**+1**	**-8**	**0**	**-2**	**+6**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
148	**-2**	**-6**	**0**	**+5**	**+1**	**-2**	**-4**	**-7**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
149	**-4**	**+2**	**+4**	**-1**	**-5**	**0**	**+7**	**+8**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
150	**-5**	**+3**	**0**	**-6**	**+3**	**-5**	**+5**	**-4**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**
151	**-9**	**+7**	**-4**	**+3**	**-2**	**0**	**-2**	**+6**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
152	**-6**	**+5**	**0**	**+7**	**+9**	**+6**	**-4**	**-7**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
153	**+8**	**-9**	**-7**	**-2**	**-4**	**-4**	**+7**	**+8**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
154	**+3**	**-8**	**+5**	**-4**	**+5**	**+1**	**+5**	**-4**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
155	**+7**	**-3**	**0**	**+8**	**-7**	**0**	**-2**	**+6**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
156	**+9**	**-2**	**+2**	**+4**	**+3**	**0**	**-4**	**-7**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**
157	**+1**	**+2**	**0**	**-2**	**-6**	**+3**	**+7**	**+8**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
158	**+2**	**+4**	**-3**	**-9**	**+7**	**0**	**+5**	**-4**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
159	**+4**	**+6**	**0**	**+2**	**-9**	**-2**	**-2**	**+6**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
160	**+5**	**+1**	**+4**	**+9**	**+2**	**0**	**-4**	**-7**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
161	**-1**	**-2**	**0**	**-4**	**-5**	**-5**	**+7**	**+8**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
162	**-3**	**-1**	**-4**	**-9**	**+6**	**0**	**+5**	**-4**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**
163	**-7**	**-4**	**0**	**+1**	**-8**	**+6**	**-2**	**+6**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
164	**-2**	**-6**	**-7**	**+5**	**+1**	**-4**	**-4**	**-7**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
165	**-4**	**+2**	**+5**	**-1**	**-5**	**+1**	**+7**	**+8**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
166	**-5**	**+3**	**0**	**-6**	**+3**	**0**	**+5**	**-4**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
167	**-9**	**+7**	**+2**	**+3**	**-2**	**0**	**-2**	**+6**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
168	**-6**	**+5**	**0**	**+7**	**+9**	**+3**	**-4**	**-7**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**
169	**+8**	**-9**	**-3**	**-2**	**-4**	**0**	**+7**	**+8**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
170	**+3**	**-8**	**0**	**-4**	**+5**	**-2**	**+5**	**-4**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
171	**+7**	**-3**	**+4**	**+8**	**-7**	**0**	**-2**	**+6**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
172	**+9**	**-2**	**0**	**+4**	**+3**	**-5**	**-4**	**-7**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
173	**+1**	**+2**	**-4**	**-2**	**-6**	**0**	**+7**	**+8**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
174	**+2**	**+4**	**0**	**-9**	**+7**	**+6**	**+5**	**-4**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**
175	**+4**	**+6**	**-7**	**+2**	**-9**	**-4**	**-2**	**+6**	**0**	**+6**	**+2**	**+3**	**+9**	**+1**	**НФЗ**
176	**+5**	**+1**	**+5**	**+9**	**+2**	**+1**	**-4**	**-7**	**+1**	**0**	**+7**	**+3**	**+8**	**-5**	**КФЗ**
177	**-1**	**-2**	**0**	**-4**	**-5**	**0**	**+7**	**+8**	**+5**	**+7**	**0**	**+2**	**-3**	**+4**	**НФЗ**
178	**-3**	**-1**	**+2**	**-9**	**+6**	**0**	**+5**	**-4**	**+2**	**+8**	**+1**	**0**	**-2**	**-5**	**КФЗ**
179	**-7**	**-4**	**0**	**+1**	**-8**	**+3**	**-2**	**+6**	**+3**	**+4**	**+9**	**-6**	**0**	**+1**	**НФЗ**
180	**-2**	**-6**	**-3**	**+5**	**+1**	**0**	**-4**	**-7**	**+2**	**+6**	**+7**	**-2**	**+1**	**0**	**КФЗ**

ДОДАТОК С

Контрольна робота №2

Тема контрольної роботи №2 - Знаходження для заданої функції часу {y=f(t)} визначаючого лінійного однорідного диференційного рівняння.

Завдання для контрольної роботи №2:

Для заданої функції часу {y=f(t)}, *що є частинним рішенням лінійного однорідного диференційного рівняння*:

1) відновити загальне рішення лінійного однорідного диференційного рівняння;
2) по загальному рішенню лінійного однорідного диференційного рівняння відновити значення коренів характеристичного рівняння $\mathbf{p_i}$ **(i=1,m)**.

P.S.: Дозволяється п.1 опустити та одразу переходити до виконання п.2.

Вид функції часу **{y=f(t)}** узяти з таблиці варіантів.

Таблиця варіантів завдань для контрольної роботи №2

№ п/п	y=f(t)
01	$t^2e^{-2t}\sin t - 2\sin t + 3\cos t - 4te^{-t} + 5$
02	$2te^{-t}\sin 2t + t^2\cos t + 3e^{-2t} - 4t$
03	$-3e^{-2t}\cos t + t^2\sin 3t - 2t\sin 3t + 4t\cos 3t + 3\sin 3t - 4\cos t + 5te^{-t} - 6$
04	$4t^2e^{-t}\cos 2t - 2t\sin t + t\cos t + 3\sin t + \cos t - 5e^{-2t} + 7t^2$
05	$3te^{-2t}\cos t + t^2\sin 2t - 4t\sin 2t + 3t\cos 2t - 5\cos 2t + 6e^{-2t} - 2$
06	$5e^{-t}\sin 3t + t\sin t + 2t\cos t - 4\sin t - 7t^2e^{-3t} + 1$
07	$8t^2e^{-2t}\sin t - 4\sin 2t + 2t^2e^{-3t} + 3e^{-2t} - t$
08	$-7t^2e^{-4t}\cos 2t + 5\cos 5t - 3te^{-2t} - t^2 - 3$
09	$6te^{-3t}\sin 4t + \cos 2t - 3t^2e^{-t} + 2te^{-2t} + 5t$
10	$9te^{-2t}\cos 6t - t^2\cos 5t + 4\sin 5t + 3e^{-3t} + 2t$
11	$e^{-t}\sin 5t - 2t\sin 2t + 4t\cos 2t - 5\cos t + 3te^{-2t} - t^2 + 7$
12	$-2e^{-2t}\cos 3t + t\sin t + 3\sin t - 4\cos t + 5t^2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} + 7t$
13	$3te^{-t}\sin 4t + t^2\sin 7t - 2t\sin 7t + 4t\cos 7t + 3\sin 7t + 5te^{-4t} - 8$
14	$-4t^2e^{-3t}\sin t - 2t\cos 4t + \sin 4t + 3\cos t - te^{-3t} + 5t$
15	$3e^{-5t}\cos 7t + t^2\cos 8t - 4t\sin 8t + 3t\cos 8t - 3\sin 4t + 5\cos 4t - 6e^{-3t} + 2t^2 - 7t$
16	$5te^{-2t}\sin 9t + t\sin 5t + 2t\cos 5t - 4\sin t - 7\cos 5t + 3t^2e^{-2t} + 6$
17	$-8t^2e^{-t}\sin 6t - 4e^{-t}\cos 7t + 2t\sin t + 3\sin t - \cos t + 6te^{-4t} + 1$
18	$7te^{-2t}\sin 5t + 5t^2\cos t + 3t\sin t + t\cos t + 3\cos 2t + 4e^{-3t} + 2t$
19	$6e^{-4t}\cos t + t^2\sin t - 3t\cos t + 2\sin 2t + 5\cos t - 7te^{-2t} + 4$
20	$9t^2e^{-4t}\cos 4t - e^{-4t}\sin 4t + 4e^{-2t}\cos 4t + 3t\cos 4t + 2e^{-t} - 8t^2 + 6t + 7$

21	$-te^{-t}\cos 3t + 2t^2\sin 3t - 4t\sin t + 5\sin 3t - 3\cos 3t + e^{-4t} - 3$
22	$2e^{-3t}\sin 2t + t\sin 2t + 3t\cos t - 4\sin 2t + 5\cos t - 2t^2e^{-5t} - e^{-5t} + 2$
23	$-3t^2e^{-2t}\sin 9t + e^{-2t}\sin 9t + 2\sin 4t - 4\cos t + 3t^2e^{-2t} + 5te^{-2t} - 8t$
24	$-4t^2e^{-6t}\cos 6t - 2te^{-6t}\cos 5t + \cos 4t + 3te^{-t} + t^2$
25	$3te^{-7t}\sin 8t + \cos t - 4t^2e^{-2t} + 3te^{-2t} - 3e^{-t} + 5t$
26	$5te^{-4t}\cos t + t^2\sin 2t + 2t^2\cos 2t - 3t\sin t - 4t\cos t + 6\sin 2t + 3e^{-7t} - 6t$
27	$-8e^{-t}\sin 5t - 4t\sin 5t + 3t\cos 4t + 2\cos 5t - te^{-2t} + 6t^2 + 1$
28	$7e^{-2t}\cos 4t + 5t\sin 4t + 3t\cos 6t + \sin 4t + 4t^2e^{-3t} + 2t$
29	$6te^{-8t}\sin 3t + t^2\sin 3t - 3t^2\cos 3t + 2t\cos 4t + 5\sin 3t - 4\cos 4t + 7te^{-5t} + 3$
30	$9t^2e^{-t}\sin 7t - 4te^{-t}\cos 7t + e^{-2t}\cos t + 2t\sin 5t + 3t\cos 5t - 6te^{-6t} + 8t$
31	$-e^{-3t}\cos 5t - 2t^2\sin 5t + 4t^2\cos 5t - 5t\sin 5t + 3t\cos 5t - \sin 4t + 3e^{-9t} - 7t^2 + 9t$
32	$2te^{-5t}\sin t + t\sin 2t + 3t\cos 2t - 5\sin 4t + 4\cos 2t - 2t^2e^{-t} - e^{-t} + 2$
33	$-3t^2e^{-2t}\sin 2t + te^{-2t}\cos 2t + 2e^{-2t}\sin t - 4t\sin t + 3t\cos t + 8te^{-2t} - 5$
34	$-4te^{-4t}\sin 8t + 2t^2\sin 9t + t^2\cos t + 3t\sin 9t + \cos 9t + 5e^{-4t} + 6t$
35	$3e^{-7t}\cos 6t + t^2\sin 8t - 4t^2\cos 8t + 3t\sin 4t - 3t\cos 8t + 5\cos 4t - 2te^{-3t} + 4$
36	$5t^2e^{-6t}\cos 3t + 2te^{-6t}\cos 3t + e^{-6t}\sin 4t - 3e^{-6t}\cos 4t - 4t\cos 3t + 8e^{-7t} + 6t^2 + t - 7$
37	$-8te^{-5t}\cos 5t - 4t^2\sin 5t + 2t^2\cos 5t + 3t\sin 2t - t\cos 5t - 7e^{-5t} + 1$
38	$7e^{-t}\sin 4t + 5t\cos 4t + \sin t + 3\cos 4t + 4t^2e^{-2t} + 2te^{-2t} - 3$
39	$6t^2e^{-2t}\sin 3t + te^{-2t}\sin 3t - 2\sin 3t + 3t^2e^{-9t} + 5te^{-9t} - 4e^{-8t} + 9t$
40	$4t^2e^{t}\cos t - 9te^{t}\sin t + te^{-t}\cos t + 2\cos t + 3te^{-2t} - 6t^2$
41	$-te^{2t}\sin 7t - 2\sin 7t + 4\cos 7t - 5t^2e^{-7t} + 3t$
42	$2te^{3t}\cos 6t + 3t^2\sin 6t + t^2\cos 4t - 5\sin 6t + 4\cos 6t - 9e^{2t} + 2t$
43	$-3e^{-8t}\sin 2t + t\cos 2t + 2\sin 4t - 4\cos 2t + 3te^{8t} + 8t^2 - 5$
44	$-4e^{7t}\cos 9t + 2t\sin 9t + t\cos 4t + 3\sin 9t + t^2e^{7t} + 5e^{-7t} - 6t$
45	$3te^{4t}\sin 4t + 4t^2\sin 4t - t^2\cos 4t + 5t\sin t - 2\sin 4t + 3te^{6t} - 1$
46	$5t^2e^{-t}\sin 5t + 2te^{-2t}\sin 5t + 3te^{-2t}\cos 5t - 4e^{-t}\cos 5t - \cos 5t + 7te^{-2t} + 4t$
47	$-8e^{5t}\cos t - 4t^2\sin t + 2t^2\cos t + 7t\sin 4t - 3\cos t - e^{-3t} + 6t^2 + 3t$
48	$7te^{-6t}\sin 3t + 5t\sin 3t + 3t\cos 3t + \cos 4t + 4t^2e^{-8t} - 2te^{-8t} + 7$
49	$6t^2e^{-2t}\sin 4t + te^{-2t}\sin 4t - 2te^{-2t}\cos 4t + 3e^{-2t}\sin 4t + 5\cos 4t - 4te^{-2t} + 9$
50	$4te^{-9t}\sin 7t - 9t^2\sin 7t + t^2\cos 7t + 2t\cos 4t + 3\cos 7t - 6e^{-9t} + 2t$
51	$-e^{-3t}\cos 6t - 2t^2\sin 6t + 4t^2\cos 4t - 3t\cos 6t + 5\sin 4t - 7te^{7t} + 8$
52	$2t^2e^{-7t}\cos 2t + 3te^{-7t}\sin 2t + te^{-2t}\cos 2t - 4e^{-7t}\sin 2t + 5t\cos 2t - e^{t} + 7t^2 - 2t + 6$
53	$-3te^{-t}\cos t + t^2\sin t + 2t^2\cos t - 4t\cos 2t + 6e^{-3t} + 5$
54	$4e^{-5t}\sin 5t + 2t\sin 5t + \sin 4t + 3\cos 5t + 5t^2e^{t} + te^{-2t} + 6e^{-2t} + 3$
55	$3t^2e^{-2t}\sin 8t + t^2e^{-2t}\cos 8t - 5\sin 8t + 3\cos 4t - 2t^2e^{-9t} + t$
56	$5t^2e^{-8t}\cos 4t + 2te^{-8t}\sin 4t + 3e^{-8t}\cos 8t - 4\cos 4t - te^{-4t} + 7t^2$
57	$8te^{-4t}\sin 3t + 4\sin 3t + 2\cos 4t + 7t^2e^{-6t} + 3e^{-2t} + 5t$
58	$7te^{6t}\cos 9t + 5t^2\sin 9t + 3t^2\cos 9t + t\sin t + 4e^{-5t} - 2t$
59	$6e^{-3t}\sin 6t + t\cos 6t - 2\sin 4t + 5\cos 6t + 3te^{5t} - 9t^2 + 4$
60	$4e^{-9t}\cos 7t - 9t\sin 7t + t\cos 7t + 2\sin 4t + 3\cos 7t - 6t^2e^{-7t} - 7te^{-7t} + 6t$
61	$-te^{-7t}\sin 2t - 2t^2\sin 2t + 3t^2\cos 4t - 4\cos 2t - 5te^{6t} + 3$
62	$2t^2e^{-t}\sin t + 3t^2e^{-t}\cos t + e^{-2t}\cos t + 4\cos t - 5te^{-t} + 9t$
63	$-3e^{-2t}\cos 3t + t^2\sin 3t + 2t^2\cos 4t - 4\sin 4t + 6e^{-2t} + 5t^2 - 8t$
64	$4te^{-2t}\sin 4t + 2t\sin 4t + t\cos 4t + 3\sin 3t + 5t^2e^{t} + te^{-t} - 3e^{t} + 7$
65	$3t^2e^{-4t}\sin 5t + t^2e^{-4t}\cos 5t - 2e^{-2t}\sin 5t + 3\cos 5t - te^{2t} + 5$
66	$5te^{-5t}\sin 8t + 2t^2\sin 8t + 3t^2\cos 8t - 4e^{-3t} - t$
67	$8e^{t}\cos 9t + 4t^2\cos 9t + 2t\sin 9t + 7t\cos 8t + 3\sin 9t + 5te^{-6t} + 4$
68	$7t^2e^{2t}\cos 6t + 5t^2e^{2t}\sin 6t + 3te^{2t}\sin 6t + te^{2t}\cos 6t - 4t\cos 6t - 2e^{5t} + 3t^2$
69	$6te^{-8t}\cos 7t + t^2\cos 7t - 2t\cos 7t + 5\sin 7t + 3\cos t - 4e^{-5t} + 6$
70	$4e^{-3t}\sin t - 9t\sin t + t\cos 4t + 2\cos t + 3t^2e^{-7t} - 9$

71	$-2t^2e^{-2t}\sin t - 3t^2e^{-2t}\cos t + 4te^{-2t}\cos t - 5te^{-2t}\sin t - e^{-2t}\sin t - 9\sin 4t - 8t^2e^{-2t} + 7t$
72	$t^2e^{-t}\cos t - 2t^2e^{-t}\sin t - te^{-t}\sin t + 7te^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t + 4e^{-t}\cos t + 9\cos 2t + 3te^{-t} + 5t^2 + 6t + 3$
73	$-3te^{-7t}\sin 5t - \cos 5t + 2t^2e^{-2t} - 4e^{2t} - 5t$
74	$4te^{-3t}\cos 3t + 2t^2\cos 3t + t\sin 4t + 3\sin 3t + 5\cos 4t - e^{t} + 8t$
75	$3e^{-6t}\sin 4t + t\sin 4t - 2\sin 6t + 3\cos 4t - te^{-6t} + 5t^2$
76	$5e^{-5t}\cos 9t + 2t\sin 9t + 3t^2e^{-9t} - 4te^{9t} - t$
77	$8te^{-9t}\sin 2t + 4t^2\sin 2t + 2t\sin 4t + 7t\cos 2t + 3te^{-9t} + 4$
78	$7t^2e^{-5t}\sin 6t + 5te^{-5t}\sin 6t + 3te^{-5t}\cos 6t + e^{-2t}\sin 6t - 4e^{-5t}\cos 6t - 2\cos 6t - 3te^{-5t} + 6t$
79	$6e^{-8t}\cos 8t + t^2\cos 8t - 2t\sin 4t + 5t\cos 8t + 3e^{2t} - 4t^2$
80	$4te^{-4t}\sin t - 9t\cos t + 2\sin 4t + \cos t + 3t^2e^{-3t} + 5te^{-3t} - 7e^{-t} + 2$
81	$-2t^2e^{t}\sin 7t - 3te^{t}\sin 7t + 5te^{-t}\cos 7t - 4\cos 7t - te^{-7t} + 3$
82	$te^{t}\sin 3t - 2t^2\sin 3t - 7t\cos 3t + 4\cos 4t + 9e^{-4t} + 5t$
83	$-3e^{2t}\cos 4t - t^2\cos 4t + 2t\cos 3t - 5\cos 4t - 4te^{-2t} + 7$
84	$3t^2e^{-t}\cos 5t - te^{-t}\sin 5t + 4te^{-t}\cos 5t + 2e^{-t}\sin 5t + 5e^{-t}\cos 5t + t\cos 5t + 8e^{-6t} - 6t^2 - 9$
85	$3te^{-3t}\cos 2t + t^2\sin 2t - 3t\cos 2t + 2\sin 4t + e^{-3t} - 4$
86	$5e^{-7t}\sin t + 2t\sin t + 3t\cos t - 4\sin 4t - \cos t + 7t^2e^{-7t} + 8$
87	$8t^2e^{-6t}\sin 9t + 4te^{-2t}\sin 9t + 2te^{-2t}\cos 9t + 7e^{-2t}\sin 4t + 3\sin 9t - t^2e^{-9t} + 5t$
88	$7t^2e^{-5t}\cos 6t + 5te^{-5t}\sin 6t + 3te^{-5t}\cos 6t + e^{-5t}\cos 6t - 4\cos 6t - 2te^{-5t} - 3t^2 - t$
89	$6te^{2t}\sin 8t + \cos 8t - 2t^2e^{-t} + 5e^{-2t} + 3t$
90	$4te^{-8t}\cos 3t - 9t^2\sin 3t + 2e^{-3t} + 7t$
91	$-2e^{-2t}\sin 4t - 3t\sin 4t + 5t\cos t - 4\sin 4t - te^{-7t} + 6t^2 - 7t - 8$
92	$e^{-4t}\cos 2t - 2t\sin 2t - 7t\cos 2t + 9\cos 3t + 4t^2e^{-4t} - 3te^{-4t} + 5t$
93	$-3te^{3t}\sin t - t^2\cos t + 2t\cos 3t - 5\sin t - 7te^{-8t} - 4$
94	$3t^2e^{-9t}\sin 5t - 4te^{-9t}\sin 5t + e^{-9t}\sin 5t + 2e^{-9t}\cos 4t - 5\cos 5t - 9te^{-6t} + 6t$
95	$3e^{t}\cos 7t + t^2\sin 7t - 4t\cos 4t + 2e^{t} + 7t^2$
96	$5te^{-7t}\sin 6t + 2t\cos 6t + 3\sin 6t - 4\cos 4t - t^2e^{-2t} + 8te^{-2t} + 9e^{-t} - 1$
97	$8t^2e^{-3t}\sin 9t + 4te^{-3t}\sin 9t + 2te^{-3t}\cos 9t + 7e^{-4t}\sin 9t + 3e^{-3t}\cos 9t + \cos 9t - 5te^{-3t} + 3$
98	$7te^{-5t}\sin 3t - 5t^2\cos 3t + 3t\cos 5t + e^{-5t} - 4t$
99	$6e^{-2t}\cos 2t + t^2\sin 2t + 2t\sin 4t + 5\cos 2t + 3te^{-t} + 2$
100	$4t^2e^{-6t}\cos t - 9te^{-6t}\sin t + 7e^{-6t}\sin 2t + 2e^{-6t}\cos t - t\sin t + 6e^{-4t} + 8t^2 - 5$
101	$-2te^{-t}\cos 4t - 3t^2\cos 4t + 5t\sin 4t - 4\cos t - e^{-7t} + 6$
102	$e^{-4t}\sin 5t - 2t\cos 5t - 7\sin t + 9\cos 5t + 4t^2e^{-9t} - 8$
103	$-3t^2e^{-6t}\sin 8t - te^{-6t}\cos 8t + 2\sin 8t - 5t^2e^{-3t} - 7e^{-2t} - 4t$
104	$3t^2e^{-8t}\cos 7t - 4te^{-8t}\sin 7t + e^{-2t}\sin 7t + 2t\sin 7t - 5\cos 7t - 9te^{-8t} + 6t^2 + 7t$
105	$4te^{-9t}\sin 6t + 3\cos 6t - t^2e^{-9t} + 2t$
106	$5te^{-2t}\cos 9t + 2t^2\sin 9t + 3t\sin 9t - 4\sin 4t - e^{-2t} - 9t$
107	$8e^{-3t}\sin 4t + 4t\cos 4t + 2\cos 4t + 7te^{-3t} + 3t^2 - t + 5$
108	$7e^{-5t}\cos 3t - 5t\sin 3t + 3\sin 4t + t^2e^{-5t} - 4te^{-5t} - 6t$
109	$6te^{t}\sin 2t + t^2\cos 2t + 2t\sin t + 5\sin 2t + 3te^{-6t} + 4$
110	$4t^2e^{-4t}\sin t - 7te^{-4t}\sin t + 9te^{-4t}\cos t + 6e^{-t}\sin t - e^{-4t}\cos t + 8\cos t + 2te^{-4t} - 3t$
111	$-2e^{-t}\cos 5t - 3t^2\sin 5t + 4t\sin 5t - 5e^{-t} - t^2$
112	$te^{-6t}\sin 6t - 2t\cos 6t - 7\sin 6t + 9t^2e^{-6t} + 3te^{-2t} - 4e^{-6t} + 8$
113	$-3t^2e^{-2t}\sin 4t - te^{-2t}\sin 4t + 2te^{-2t}\cos 4t - 5e^{-t}\sin 4t - 7e^{-2t}\cos 4t - 4\cos 4t + 9te^{-t} - 6$
114	$4te^{-8t}\sin 7t - 3t^2\cos 7t + 5\sin 4t + \cos 7t - 2e^{-8t} + 7t$
115	$2e^{2t}\cos 9t + 4t^2\sin 9t - 3\sin 9t + 6\cos 2t + 9te^{2t} - 2$
116	$5t^2e^{-3t}\cos 5t + 2e^{-3t}\cos 5t + t\cos 5t - 4\cos 5t - 3e^{-3t} - 7t^2 + 9$
117	$8te^{-7t}\cos t + 4t^2\cos t + 2t\sin 7t + 7e^{-7t} - 5$

118	$7e^{-4t}\sin 2t - 5t\cos 2t + 3\sin 4t + t^2e^{-4t} - 1$
119	$6t^2e^{-5t}\sin 8t + te^{-5t}\cos 8t + 2e^{-2t}\cos 8t + 5\sin 8t + 3t^2e^{-5t} + 4t$
120	$4t^2e^{-9t}\sin 4t - 7te^{-9t}\sin 4t + 9te^{-9t}\cos 4t + 6e^{-9t}\sin 4t - \cos 4t + 2te^{-9t} + 2t^2 - 5t + 3$
121	$-2te^{-6t}\sin 3t - 3\cos 3t + 4t^2e^{-6t} - 5e^{-2t} - 6t$
122	$te^{-2t}\cos 7t - 2t^2\sin 7t - 7\sin 7t + 9e^{-6t} + 8t$
123	$-3e^{-3t}\sin 5t - t\sin 5t + 2\sin 4t - 5te^{-3t} - 7t^2$
124	$4e^{-8t}\cos 6t - 3t\sin 6t + 5\cos 5t + 7t^2e^{-7t} - 2te^{-t} + 2t$
125	$2te^{-7t}\sin 2t + 4t^2\sin 2t - 3\sin t + 6te^{-8t} + 9$
126	$5t^2e^{-4t}\sin t + 2te^{-4t}\sin t + te^{-2t}\cos t - 4\cos t - 3te^{-4t} - 5t$
127	$8e^{-5t}\cos 9t + 4t^2\cos 9t + 2\cos 4t + 7e^{-5t} - 5t^2 + 1$
128	$7te^{-t}\sin 8t - 5t\sin 8t + 3t^2e^{-2t} + te^{-t} + 2e^{-2t} - 4$
129	$6t^2e^{-2t}\sin 4t + t^2e^{-2t}\cos 4t + 2te^{-2t}\cos 4t + 5e^{-2t}\sin 4t + 3e^{-2t}\cos 7t + 4\cos 4t - 8te^{-2t} + 7$
130	$4te^{t}\sin 3t - 7t^2\cos 3t + 9e^{t} - 6t$
131	$-2e^{-9t}\cos 7t - 3t^2\sin 7t + 4t\sin 7t - 5t\cos 7t - 6\sin 4t + \cos 7t - 8te^{-9t} + 9$
132	$t^2e^{-6t}\cos t - 2t^2e^{-6t}\sin t - 7te^{-6t}\sin t + 9te^{-6t}\cos t + 8e^{-6t}\sin 2t - 4t\sin 4t + 5e^{-2t} + 6t^2 - 3t$
133	$-3te^{-3t}\cos 5t - t^2\sin 5t + 2t\sin 5t - 5t\cos 5t - 7\sin 6t + 6e^{-3t} + 2$
134	$4e^{2t}\sin 6t - 3t\sin 6t + 5\sin 4t + 7t^2e^{2t} - 1$
135	$2t^2e^{3t}\sin 2t + 4t^2e^{3t}\cos 2t - 3te^{3t}\sin 3t + 6\sin 2t - 9t^2e^{3t} + 5t$
136	$5t^2e^{-5t}\sin 9t + 2t^2e^{-5t}\cos 9t + e^{-5t}\sin 9t - 4e^{-2t}\cos 9t - 3\cos 9t - 5te^{-5t} + t^2 + 7t + 8$
137	$8te^{-7t}\sin 3t + 4\cos 7t + 2t^2e^{-7t} + 7e^{-2t} - 4t$
138	$7te^{-4t}\cos 4t - 5t^2\cos 4t + 3\sin 4t - e^{-4t} + 6t$
139	$6e^{-8t}\sin t + t\sin t + 2\cos 7t + 5te^{-8t} - 3t^2$
140	$4e^{t}\cos 6t - 7t\sin 6t + 9t\cos 6t - 6t^2e^{-2t} + 2te^{t} - t$
141	$-2te^{-2t}\sin 5t - 3t^2\sin 5t + 4t\sin 5t - 5\sin 4t - 6\cos 5t + 7te^{-2t} + 9$
142	$t^2e^{-3t}\sin 8t - 2t^2e^{-3t}\cos 8t - 7te^{-3t}\sin 8t + 9e^{-t}\cos 8t + 8\cos 8t - 4te^{-3t} - 2t$
143	$-3e^{-6t}\cos 6t - t^2\sin 6t + 2t\sin 6t - 5t\cos 4t - 7\cos 6t + 6e^{-6t} - 2t^2 + 5$
144	$4te^{-t}\sin 7t - 3t\cos 7t + 5\cos t + 7t^2e^{-t} - te^{-2t} + 2e^{-t} + 7$
145	$2t^2e^{-5t}\sin 2t + 4t^2e^{-5t}\cos 2t - 3te^{-5t}\sin 2t + 6e^{-t}\sin 2t - 9e^{-5t}\cos 2t + 5\cos 2t - te^{-5t} + 8$
146	$5te^{2t}\sin 3t + 2t^2\cos 3t + t\sin 3t - 4t\cos 4t - 3\cos 3t - 7e^{2t} - 6t$
147	$8e^{-6t}\cos 9t + 4t^2\cos 9t + 2t\sin 9t + 7t\cos 9t + 5\sin 6t - 3\cos 9t + 9te^{-6t} + 1$
148	$7t^2e^{-7t}\sin t - 5t^2e^{-7t}\cos t + 3te^{-7t}\cos t - t\cos 4t + 6\sin t - 4e^{-7t} + 8t^2 - 9t$
149	$6te^{-8t}\cos 4t + t^2\sin 4t + 2t^2\cos 4t + 5t\sin 4t - 3t\cos 4t + 7\sin 4t - 4e^{-8t} + 2$
150	$4e^{-4t}\sin 5t - 7t\sin 5t + 9t\cos t - 6t^2e^{-4t} + 3$
151	$-2t^2e^{-3t}\sin 8t - 3t^2e^{-3t}\cos 8t + 4te^{-3t}\sin 8t - 5e^{-3t}\sin 7t - 6\sin 8t + 7t^2e^{-3t} - 4t$
152	$t^2e^{-2t}\sin 6t - 2t^2e^{-2t}\cos 6t - 7te^{-2t}\cos 6t + 9e^{-2t}\cos 7t + 8\cos 6t - 3te^{-2t} - 5t^2 + 6t + 6$
153	$-3te^{4t}\sin 7t - \cos 7t + 2t^2e^{4t} - 5e^{-2t} - 7t$
154	$4te^{-5t}\cos 2t - 3t^2\sin 2t + 5t^2\cos 2t + 7t\cos 2t - \sin 3t + 2\cos 2t + 8e^{-5t} - 9t$
155	$2e^{-t}\sin 4t + 4t\cos 8t - 3\cos 2t + 6te^{-t} - 5t^2$
156	$5e^{-6t}\cos 3t + 2t\cos 3t + \sin 4t - 4t^2e^{-3t} - 3te^{-6t} - 8t$
157	$8te^{-9t}\sin t + 4t^2\sin t + 2t^2\cos t + 7t\sin 2t + 5\sin t - 3\cos t - 9te^{-9t} + 1$
158	$7t^2e^{-7t}\sin 5t - 3t^2e^{-7t}\cos 5t + 5te^{-7t}\cos 5t - 6e^{-7t}\sin 7t + \cos 5t - 4te^{-7t} + 2t$
159	$6e^{-8t}\cos 9t + t^2\sin 9t + 2t^2\cos 9t + 5\sin 8t - 3\cos 9t + 4e^{-8t} + 7t^2 - 3$
160	$4te^{3t}\sin 4t - 9t\cos 4t + 7\cos 4t - 6t^2e^{-2t} + 3te^{3t} - 2e^{-2t} + 4$
161	$3t^2e^{-3t}\sin 6t + 4t^2e^{-3t}\cos 7t + 5\cos 6t + 7te^{-3t} + 6$
162	$te^{-2t}\sin 8t - 2t^2\sin 8t - 7t^2\cos 8t + 9t\sin t + 8t\cos 8t - 3e^{-2t} - 5t$
163	$-2e^{-5t}\cos 7t - t^2\sin 7t + 3t^2\cos 7t - 5t\sin 2t - 7t\cos 7t + 6\cos 2t - 4te^{-5t} + 7$

164	$5t^2e^{-t}\sin 3t - 4t^2e^{-t}\cos 2t + 7e^{-2t}\cos 2t + 3t\cos 3t - 2e^{-t} + t^2 + 9t$
165	$6te^{-4t}\cos 2t + 2t^2\sin 2t -- 4t^2\cos 2t + 5t\sin t - 7\sin 2t + 8e^{-4t} - 1$
166	$5e^{-6t}\sin t + 2t\sin t + t\cos 6t - 4t^2e^{-6t} - 8$
167	$8t^2e^{-7t}\sin 4t + 4t^2e^{-7t}\cos 4t + 2e^{-t}\sin 4t + 7\sin 4t + 5t^2e^{-7t} + 3t$
168	$7t^2e^{-9t}\sin 5t - 3t^2e^{-9t}\cos 5t + 5te^{-9t}\sin 5t - 6te^{-8t}\cos 5t + \cos 5t - 2te^{-8t} + 4t^2 - 8t + 2$
169	$6te^{-8t}\sin 9t + t\sin 9t + 2\sin 8t + 5t^2e^{-8t} - 4t$
170	$4te^{-2t}\cos 6t - 7t^2\sin 6t + 9t^2\cos 6t - 6t\sin 4t + 3\cos 6t - e^{-2t} + 5t$
171	$3e^{-3t}\sin 8t + 4t\sin 8t + 5\cos 3t + 7te^{-3t} + 6t^2$
172	$e^{-5t}\cos 3t - 2t\sin 3t - 7t^2e^{-2t} + 9e^{-5t} - 8t$
173	$-2te^{t}\sin 7t - t^2\sin 7t + 3t^2\cos 4t - 5t\cos 4t - 7\cos 7t - 4te^{t} + 9$
174	$5t^2e^{2t}\sin t - 4t^2e^{2t}\cos t + 2te^{2t}\sin t + 7te^{-2t}\cos t - e^{2t}\cos t + 3\cos t + 6te^{-2t} - t$
175	$6e^{-6t}\cos 4t + 2t^2\sin 4t - 4t^2\cos 4t + 5t\cos 4t - e^{-6t} - 9t^2 + 2$
176	$4te^{3t}\sin 2t + 5t\sin 2t + 2t^2e^{-2t} - te^{3t} - 3$
177	$t^2e^{-7t}\sin t + 8t^2e^{-t}\cos t + 4te^{-t}\sin t + 2te^{-7t}\cos t + 7e^{-t}\sin t + 5e^{-t}\cos t + 3\cos t - te^{-t} + 4$
178	$7te^{-4t}\sin 5t - 3t^2\sin 5t + 5t^2\cos 5t - 6t\cos t + \sin 5t - 8e^{-4t} + 7t$
179	$6e^{-9t}\cos 9t + t^2\sin 9t + 2te^{-9t} - 5$
180	$3t^2e^{-8t}\cos 6t + 4e^{-8t}\sin 6t + 7t^2\sin 6t + 9t^2\cos 6t + 6t\sin 6t + t^2e^{-8t} + 5te^{-2t} + 2e^{-8t} + 6t^2$

ДОДАТОК D

Домашня контрольна робота

Тема : - Виконання кусочно-лінійної апроксимації.

Завдання:

1. Побудувати графік функції **y=f(x)** для діапазону зміни аргументу

$$x_{min} \le x \le x_{max}.$$

Значення **y=f(x),** x_{min} та x_{max} узяти з таблиці варіантів.

2. Визначити другу похідну функції d^2y/dx^2 та побудувати її графік для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$.

3. Побудувати графік модулю другої похідної функції $|d^2y/dx^2|$ для діапазону зміни аргументу $x_{min} \le x \le x_{max}$.

4. Проаналізувати графік нелінійної залежності функції **y=f(x)**, з'ясувавши характер опуклості та вгнутості функції по частинам, наявність точок перегинання та наявність точок розриву першого роду другої похідної функції.

5. Обрати початкову точку (або початкові точки) апроксимації для подальших розрахунків, зазначивши її (або їх) на графіках **y=f(x)** та $|d^2y/dx^2|$, визначити абсцису цієї початкової точки x_0^1 (або абсциси початкових точок x_0^1, x_0^2 тощо).

6. По графіку $|d^2y/dx^2|$ обрати напрямок (або напрямки) розрахунків значень $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=\overline{1,n})$ від початкової точки (або від початкових точок) та зазначити його (або їх) на цьому графіку у вигляді стрілок над графіком $|d^2y/dx^2|$.

P.S.: Значення x_{i-1} - це значення абсциси початкової точки i-ой $(i=\overline{0,n-1})$ **лінійної части-ни ломаної лінії, що обчислюється, а значення x_i - це значення абсциси кінцевої точки лінійної частини ломаної лінії, що обчислюється.**

7. Визначити методику розрахунків значень h_i $(i=\overline{1,n})$ та обрати формули для розрахунку значень: $h = \sqrt{8}\Delta_{max}f/A_i$ або $h_i = \sqrt{16}\Delta_{max}f/A_i$, де A_i - максимальне по модулю значення другої похідної на **i-** ій частині ломаної лінії, що розраховується.

P.S.: Якщо друга похідна функції має точку розриву першого роду, тобто при деякому значенні x_m значення $A_j(x_m)=\infty$, то тоді розрахунок перших значень h_m для перших частин ламаної з правого та з лівого боків від x_m неможливо виконати, використовуючи

одну з наведених формул, оскільки при $A_j(x_m)=\infty$ h_m дорівнює 0. В даному випадку треба використовувати зовсім іншу методику розрахунку перших значень h_m (дивись дода-ток 1).

8. Підібрати таке значення похибки $\Delta_{max}f$ **,** при якому в результаті розрахунків h_i $(i=\overline{1,n})$ отримаємо **n=8** або **n=9,** тобто отримаємо апроксимуючу ломану лінію з 8 або з 9 частин. Виконати розрахунок усіх значень h_i $(i=\overline{1,n})$ та здійснити нумерацію вузлів (вершин ломаної лінії), починаючи з номера **0.**

P.S.: Значення h_i $(i=\overline{1,n})$ потрібно округлити до четвертого знаку після коми в менший бік; значення h_i для останньої частини, тобто значення h_n , дозволяється зменшити не більш, ніж на 0.002.

9. Здійснити розрахунок абсцис x_i $(i=\overline{1,n})$ починаючи з x_0 **,** початкових ординат y_i^p $(i=\overline{0,n})$ вузлів апроксимації (вершин ламаної лінії), що належать функції **y=f(x),** та кінцевих ординат y_i^k $(i=\overline{0,n})$**,** вузлів апроксимації з урахуванням корекції, яку здійснюють для отримання знакозмінної похибки апроксимації.

P.S.: Значення y_i^p $(i=\overline{0,n})$ та y_i^k $(i=\overline{0,n})$ потрібно округлити до четвертого знаку після коми (округлення здійснюється згідно загальних правил округлення).

10. Побудувати графік апроксимуючої функції (ломаної лінії) **y=φ(x),** використовуючи отримані значення x_i $(i=\overline{0,n})$ та y_i^k $(i=\overline{0,n})$

11. Здійснити розрахунок значень кутових коефіцієнтів (значень тангенсів кутів нахилу) k_i $(i=\overline{1,n})$ лінійних частин ломаної лінії.

12. Виконати розкладання апроксимуючої функції (ломаної лінії) **y=φ(x)** на окремі доданки {лінійні та елементарні нелінійні (лінійні з обмеженням на нульовому рівні)}, починаючи з точки, яка має абсцису x_0^a. Значення x_0^a узяти з таблиці варіантів.

13. Над кожним елементарним нелінійним доданком зазначити його квадрант (**I, II, III** чи **IV**) та режим {на відкривання **(на В)** чи на закривання **(на З)**}.

14. Здійснити розрахунок наступних значень:

- значення $\varphi(x_0^a)$ для першого лінійного доданку;
- значення $b_0 = k_0$ та x_0 для другого лінійного доданку;

- значень $\mathbf{b_i=k_i-k_{i-1}}$ та $\mathbf{x_{REFi}}$ для кожного елементарного нелініного доданку.

P.S.: Значення k_i - це значення кутового коефіцієнту лінійної частини ломаної лінії, що розглядається, а значення k_{i-1} – це значення кутового коефіцієнту попередньої лінійної частини відносно тієї, що розглядається.

Методика розрахунку перших значень h_j в разі, якщо $A_j(x_j)=\infty$.

1) Необхідно між точкою $[x_m, f(x_m)]$ та точкою $[x_m+h_m, f(x_m+h_m)]$ провести пряму лінію та записати рівняння для цієї лінії:

$$y=F(x)=f(x_m)+b_m(x-x_m),$$

де $b_m=\{f(x_m+h_m)-f(x_m)\}/h_m$.

2) Абсолютна похибка інтерполяції розраховується по формулі

$$\Delta f(x)=f(x)-F(x),$$

а для зазначеної частини ломаної лінії ця формула має наступний вигляд

$$\Delta f(x)=f(x)-\{f(x_m)+b_m(x-x_m)\}.$$

Слід зазначити, що на границях зазначеного інтервалу абсолютна похибка дорівнює нулю, тобто $\Delta f(x_m)=\Delta f(x_m+h_m)=0$, а для якогось проміжного значення x_k $\{x_m< x_k< x_m+ h_m\}$ абсолютна похибка інтерполяції має екстремум.

a. Визначити першу похідну для $\Delta f(x)$, тобто $d[\Delta f(x)]/dx$, та знайти залежність $x_k(h_m)$ з рівняння $d[\Delta f(x)]/dx=0$. Враховуючи, що в нашому випадку абсолютна похибка $\Delta f(x)=f(x)-\{f(x_m)+b_m(x-x_m)\}$, отримуємо рівняння

$$d[\Delta f(x)]/dx=df/dx-b_m= 0 \text{ або } df/dx = \{f(x_m+h_m) - f(x_m)\} / h_m.$$

Тобто рівняння для визначення залежності $x_k(h_m)$ має наступний вигляд:

$$df/dx\ (x_k)=\{f(x_m+h_m)-f(x_m)\}/h_m\ .$$

b. Знайти максимальне значення абсолютної похибки

$$\Delta_{max}f= \left| \Delta f(x_k)= \right| f(x_k)- F(x_k) \left|\right.$$

та отримати залежність $\Delta_{max}f=\Psi(h_m)$, з якої необхідно отримати обернену залежність $h_m=\Psi^{-1}(\Delta_{max}f)$.

P.S.: Визначення оберненої залежності $h_m = \Psi^{-1}(\Delta_{max} f)$ може бути достатньо складним, або навіть неможливим. Але, враховуючи те, що значення $\Delta_{max} f$ при розрахунках підбирається, то при розрахунку першого інтервалу найпростіше вибрати значення h_m, потім знайти значення x_k та визначити значення $\Delta_{max} f$, яке в подальшому використовувати для розрахунків інших значень h_i.

Таблиця варіантів завдань:

№ п/п	y=f(x) для x ≤ 0	y=f(x) для x ≥ 0	x_{min}	x_{max}	x_0[a]
01	$e^{-x}+x-2$	$-(e^{-x}+x)$	-1	+1	x_{max}
02	$-\lg(x+3)$	$-\lg(x+3)$	-2	+2	x_0
03	$\sqrt{-x}$	$-\sqrt{x}$	-1	+1	x_1
04	$\sqrt{(1-\cos x)}$	$-\sqrt{(1-\cos x)}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_2
05	$1/(3+x)$	$1/(3+x)$	-2	+2	x_3
06	$\sqrt{-\sin x}$	$-\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_4
07	$-\sin(x+\pi/4)$	$-\sin(x+\pi/4)$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_5
08	$\cos(x+\pi/4)$	$\cos(x+\pi/4)$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_6
09	$-x-\arcsin x$	$-x-\arcsin x$	-0.2	+0.2	x_{min}
10	$-x^2+\sin x$	$-x^2+\sin x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_{max}
11	$\sec x-2$	$-\sec x$	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_0
12	$-1/(2+x^2)$	$-1+1/(2+x^2)$	-1	+1	x_1
13	$-(x^2+2x)$	$-(x^2+2x)$	-0.5	+0.5	x_2
14	$\cos(x+\pi/3)$	$\cos(x+\pi/3)$	$-\pi/6$	$+\pi/6$	x_3
15	$-x^2-x^3$	$-x^2-x^3$	-0.5	+0.5	x_4
16	$\arcsin x^2$	$-\arcsin x^2$	-0.5	+0.5	x_5
17	$-(x^2+3x+5)$	$-(x^2+3x+5)$	-1	+1	x_6
18	$\lg(1-x)$	$-\lg(1+x)$	-2	+2	x_{min}
19	x^2	$-x^2$	-1	+1	x_{max}
20	$-\sin x$	$-\sin x$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_0
21	$-(x+3)^2$	$-(x+3)^2$	-1	+1	x_1
22	$\sqrt[3]{x^2}$	$-\sqrt[3]{x^2}$	-1	+1	x_2
23	e^{-x}	e^{-x}	-2	+2	x_3
24	$\sin x-x$	$\sin x-x$	-1	+1	x_4
25	$\sqrt{\{1-(1+x)^2\}}$	$-\sqrt{\{1-(1-x)^2\}}$	-1	+1	x_5
26	$\ln(x^2+2)$	$-\ln(x^2+2)+2\ln 2$	-1	+1	x_6
27	$-\lvert 2-x^3\rvert$	$-\lvert 2-x^3\rvert$	-1	+1	x_{min}
28	$-\arcsin x$	$-\arcsin x$	-0.5	+0.5	x_{max}
29	$-\mathrm{arctg}\,x$	$-\mathrm{arctg}\,x$	-1	+1	x_0
30	$-x\cos x$	$-x\cos x$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_1
31	$-\sqrt{\cos x}$	$\sqrt{\cos x}-2$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_2
32	$-xe^{-x}$	$-xe^{-x}$	-0.5	+0.5	x_3
33	$x\sin x$	$-x\sin x$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_4
34	$-\ln(x+3)$	$-\ln(x+3)$	-1	+1	x_5
35	$\sin^2 x$	$-\sin^2 x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_6
36	$-x\sqrt{(-x)}$	$-x\sqrt{x}$	-1	+1	x_{min}
37	$1-e^x$	$-1+e^x$	-0.5	+0.5	x_{max}

38	$(x-1)\ln(x+2)$	$-(x+1)\ln(x+2)$	-0.5	+0.5	x_0
39	$-x^3+0.5$	$-x^3+0.5$	-0.5	+0.5	x_1
40	$-\sqrt[3]{x}$	$-\sqrt[3]{x}$	-1	+1	x_2
41	$\sqrt{(x\sin x)}$	$-\sqrt{(x\sin x)}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_3
42	$-x(\sec x-2)$	$-x\sec x$	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_4
43	$-x\lg(1-x)$	$-x\lg(1+x)$	-2	+2	x_5
44	$-x^5$	$-x^5$	-1	+1	x_6
45	$-e^{-x}\sin x$	$-e^{-x}\sin x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_{min}
46	$x\arcsin x$	$-x\arcsin x$	-0.5	+0.5	x_{max}
47	$e^{-x}\sqrt{-x}$	$-e^{-x}\sqrt{x}$	-1	+1	x_0
48	$-\mathrm{tg}x$	$-\mathrm{tg}x$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_1
49	$-\mathrm{sh}x$	$-\mathrm{sh}x$	-1	+1	x_2
50	$x^3\sin x$	$-x^3\sin x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_3
51	$-x\arcsin x^2$	$-x\arcsin x^2$	-1	+1	x_4
52	$-\cos^2 x$	$\cos^2 x-2$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_5
53	$-x(1-e^x)$	$-x(1-e^{-x})$	-0.5	+0.5	x_6
54	$-\mathrm{arcsh}x$	$-\mathrm{arcsh}x$	-1	+1	x_{min}
55	$-(x^2+2)$	(x^2-2x)	-1	+1	0
56	$\ln(-x+1)$	$\ln(x+1)$	-2	+2	x_0
57	$-(x^2+2x)$	$-2\ln(x+1)$	-1	+1	x_1
58	$2-\cos^2 x$	$\cos^2 x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_2
59	$2-\sqrt{\cos x}$	$\sqrt{\cos x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_3
60	$1/(1+e^x)$	$1/(1+e^x)$	-1	+1	x_4
61	$-\sin x-x$	$-\sin x-x$	-1	+1	x_5
62	-2^x	-2^x	-1	+1	x_6
63	$-x\sqrt{(-\sin x)}$	$-x\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_{min}
64	$(1-x)^{-x}$	$(1+x)^{-x}$	-0.5	+0.5	x_{max}
65	$-x^3$	$-x^3$	-1	+1	x_0
66	$x^3\arcsin x$	$-x^3\arcsin x$	-0.5	+0.5	x_1
67	$\lg(x^2+2)-2\lg 2$	$-\lg(x^2+2)$	-0.5	+0.5	x_2
68	$-e^x$	$-e^x$	-1	+1	x_3
69	$e^{-x+1}-x$	$e^{-x+1}-x$	-1	+1	x_4
70	$-x^2\sin x$	$-x^2\sin x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_5
71	$x\mathrm{tg}x$	$-x\mathrm{tg}x$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	x_6
72	$x^2\cos x$	$-x^2\cos x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_{min}
73	$x^2(e^{-x}-1)$	$x^2(e^{-x}-1)$	-1	+1	x_{max}
74	$e^{-x}+x-1$	$-(e^{-x}+x-1)$	-1	+1	x_0
75	$-\log_2(x+3)$	$-\log_2(x+3)$	-1	+1	x_1
76	$1+\sqrt{-x}$	$1-\sqrt{x}$	-1	+1	x_2
77	$1/(2+x)$	$1/(2+x)$	-1	+1	x_3
78	$-\sin(x+\pi/3)$	$-\sin(x+\pi/3)$	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_4
79	$\cos(x+\pi/3)$	$\cos(x+\pi/3)$	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_5
80	$-x^3-\arcsin x$	$-x^3-\arcsin x$	-0.2	+0.2	x_6
81	$e^{-x}+x-2$	$-1-\sqrt{x}$	-1	+1	x_{min}
82	$1/(4+x)$	$1/(4+x)$	-3	+3	x_{max}
83	$\sqrt{(1-\cos x)}$	$-\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_0
84	$\cos(x+\pi/4)$	$\sin(x+\pi/4)$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	0

85	$1/(2+x)$	$-1+1/(2+x^2)$	-1	+1	x_2
86	$\sqrt{-\sin x}$	$-\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_3
87	$-x-\arcsin x$	$-x^2-\arcsin x$	-0.2	+0.2	x_4
88	$\sec x-1$	$-\sec x+1$	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_5
89	$\cos(x+\pi/3)+1$	$\cos(x+\pi/3)+1$	$-\pi/6$	$+\pi/6$	x_6
90	$-\sqrt{\cos x}$	$-x^2+\sin x-1$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_{min}
91	$-(x^2+3x+0.5)$	$-1+1/(2+x^2)$	-1	+1	x_{max}
92	$-x^2-x^3$	$-(x^2+2x)$	-0.5	+0.5	x_0
93	$-(x^2+2x)$	$-\arcsin x^2$	-0.5	+0.5	x_1
94	$\lg(1-x)+2$	$-(x^2+3x+2)$	-1	+1	0
95	$e^{-x}-1$	$-x^2$	-1	+1	x_3
96	x^2+e^{-x}	$\sqrt[3]{\{x^2+1\}}$	-1	+1	x_4
97	e^{-x}	e^x	-2	+2	x_5
98	$\sqrt{\{1-(1+x)^2\}}$	$\sin x-x$	-1	+1	x_6
99	$-\lvert 2-x^3\rvert-\ln 3$	$-\ln(x+3)-2$	-1	+1	x_{min}
100	$-xe^{-x}$	$-\arcsin x$	-0.5	+0.5	x_{max}
101	$-\sqrt{\cos x}$	$-x\sqrt{\{(-\sin x)+1\}}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	0
102	$\sin^2 x$	$\sqrt{(x\sin x)}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_1
103	$-x^5$	$-x\sqrt{x}$	-1	+1	x_2
104	$-e^x$	$-\mathrm{arctg}x-1$	-1	+1	x_3
105	$x\arcsin x$	$-x\arcsin x$	-0.5	+0.5	x_4
106	$x^3\mathrm{sh}x$	$-x^3\mathrm{sh}x$	-1	+1	x_5
107	$-x(1-e^x)$	$x^3\arcsin x$	-0.5	+0.5	x_6
108	-2^x	-2^x	-1	+1	x_{min}
109	$(1-x)^x$	$1+x(1+x)^{-x}$	-0.5	+0.5	x_{max}
110	$-x\sqrt{(-\sin x)}$	$-x\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_0
111	$-1+\sqrt{-x}$	$-(e^{-x}+x)$	-1	+1	x_1
112	$\sqrt{-\sin x}$	$-\sqrt{(1-\cos x)}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_2
113	$-\sin(x+\pi/4)$	$-\cos(x+\pi/4)$	$-\pi/4$	$+\pi/4$	0
114	$1/(2+x^2)$	$1/(2+x)$	-2	+2	x_4
115	$x-\lg(x+3)$	$x-\lg(x+3)$	-2	+2	x_5
116	$x^3\sqrt{-\sin x}$	$-x\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_6
117	$x^2-\arcsin x$	$-x-\arcsin x$	-0.2	+0.2	x_{min}
118	$\sec x-3$	$-\sec x-1$	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_{max}
119	$\cos(x+\pi/3)-1$	$\cos(x+\pi/3)-1$	$-\pi/6$	$+\pi/6$	x_0
120	$-x^2+\sin x-1$	$\sqrt{\{\cos x\}}-2$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_1
121	$-(x^2+3x)$	$-0.5+1/(2+x^2)$	-1	+1	x_2
122	$-(x^2+2x)$	$-x^2-x^3$	-0.5	+0.5	x_3
123	$-\arcsin x^2$	$-x^2-x^3$	-0.5	+0.5	x_4
124	$-(x^2+3x+2)$	$-\lg(1+x)-2$	-2	+2	x_5
125	$\sqrt[3]{\{x^2+1\}}$	x^2+e^{-x}	-1	+1	x_6
126	$2+e^x$	$2+e^{-x}$	-1	+1	x_{min}
127	$\sin x-x$	$-\sqrt{\{1-(1-x)^2\}}$	-1	+1	x_{max}
128	$-\ln(x+3)+1$	$\lvert 1-x^3\rvert-\ln 3$	-1	+1	x_0
129	$-\arcsin x$	$-xe^{-x}$	-0.5	+0.5	x_1
130	$-x\sqrt{\{(-\sin x)+1\}}$	$-\sqrt{\cos x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	0
131	$\sqrt{(x\sin x)}$	$\sin^2 x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_3

132	$1/(1+e^x)$	$-x\sqrt{x} + 0.5$	-1	+1	x_4
133	-arctgx-1	$- e^x$	-1	+1	x_5
134	xarcsinx	-xarcsinx	-0.5	+0.5	x_6
135	1-shx	1-shx	-1	+1	x_{min}
136	x^3arcsinx	$-x(1- e^{-x})$	-0.5	+0.5	x_{max}
137	$-x2^x$	$-x2^{-x}$	-1	+1	x_0
138	$(1-x)^x$	$(1+x^2)^{-x}$	-0.5	+0.5	x_1
139	$-x\sqrt{(-\sin x)}$	$-x^2\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_2
140	-3^x	-2^{-x}	-1	+1	x_3
141	$-2+\sqrt{-x}$	$-(e^{-x} +x+1)$	-1	+1	0
142	$1+\sqrt{-\sin x}$	$1-\sqrt{(1-\cos x)}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_5
143	x^2-lg(x+3)	x-lg(x+3)	-2	+2	x_6
144	$-1/(2+x^2)$	-1/(2+x)	-1	+1	x_{min}
145	x-lg(x^2+3)	x-lg(x^3+3)	-2	+2	x_{max}
146	$\sqrt{x\sin x}$	$-\sqrt{\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_0
147	$-x^3$-arcsinx	-x-arcsinx	-0.2	+0.2	x_1
148	secx–1.5	-secx+0.5	$-\pi/3$	$+\pi/3$	x_2
149	cos(x+π/3)-0.5x	cos(x+π/3)+0.5x	$-\pi/6$	$+\pi/6$	x_3
150	$-x^2$+sinx	$\sqrt{\cos x} -1$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_4
151	$-(x^2+3x+1)$	$-1.5+1/(2+x^2)$	-1	+1	x_5
152	$-(x^2+2x-1)$	$-x^2-x^3+1$	-0.5	+0.5	x_6
153	$-x^2-x^3$	$-\arcsin x^2$	-0.5	+0.5	x_{min}
154	lg (1-x)-3	$-(x^2+3x+3)$	-1	+1	x_{max}
155	e^{-x}	$1-x^2$	-1	+1	x_0
156	x^2+e^x	$-\sqrt[3]{\{x^2+1\}}$	-1	+1	0
157	$-\sqrt{\{1-(1-x)^2\}}$	sinx-x	-1	+1	x_2
158	$\sqrt[3]{x^2-1}$	$-\lvert 1-x^5 \rvert$	-1	+1	x_3
159	$e^x\sqrt{-x}$	-arcsinx	-0.5	+0.5	x_4
160	$-\sqrt{\cos x}$	$\cos^2 x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_5
161	$\sqrt{(x\sin x)}$	$\sin^2 x$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_6
162	$e^x\sqrt{-x}$	-arctgx	-1	+1	x_{min}
163	xarcsinx	-xarcsinx	-0.5	+0.5	x_{max}
164	x^2shx	x^2shx	-1	+1	x_0
165	$-x^3(1-e^x)$	$-x(1-e^{-x})$	-0.5	+0.5	x_1
166	$-x2^{-x}$	$-x2^x$	-1	+1	x_2
167	$(1+x^2)^{-x}$	$(1+x)^{-x}$	-0.5	+0.5	x_3
168	$-x\sqrt{(-\sin x)}$	$-x\sqrt{\sin^2 x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_4
169	-4^x	-3^{-x}	-1	+1	x_5
170	-chx	-chx	-1	+1	x_6
171	$-3+\sqrt{-x}$	$-(e^{-x} +x+2)$	-1	+1	0
172	$x+\sqrt{-\sin x}$	$x-\sqrt{(1-\cos x)}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_{max}
173	x-lg (x+3)	x^2-lg (x+3)	-1	+1	x_0
174	$x-1/(2+x^2)$	x-1/(2+x)	-1	+1	x_1
175	$-x^2–x$	$-\arcsin x^2$	-0.5	+0.5	x_2
176	$\sqrt{-\sin x}$	$-\sqrt{x\sin x}$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	x_3
177	-x-arcsinx	$-x^3$-arcsinx	-0.2	+0.2	x_4
178	-x+secx–2	x-secx	$-\pi/3$	$+\pi/3$	0

179	**-xcos(x+π/3)**	**xcos(x+π/3)**	**-π/6**	**+π/6**	**x_6**
180	**$-x^2$+sinx+2**	**√cosx +1**	**-π/2**	**+π/2**	**x_{min}**

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Ю.С.Грищук. Основи наукових досліджень Навчальний посібник. Харків. НТУ «ХПІ», 2008.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень. Навч. Посібник. К. Кондор, 2003.
3. Основи наукових досліджень. Навчальний посібник. Марцин В.С., Міщенко Н.Г., Даніленко О.А., Львів, Рамус-Поліграф, 2002.
4. Г.О.Бірга, Ю.Г. Бургу. Методологія і організація наукових досліджень. Навчальний посібник. К. 2014;
5. С.Е. Важинський, Т.І.Щербак. Методика та організація наукових досліджень. Суми. 2016;
6. Основи наукових досліджень. Маршин В.С. Львів. 2002;
7. О. Галяк. Методологія та організація наукових досліджень, Луцьк. Вежаа-Друк. 2021;
8. А.І. Грабченко, В.О. Федорович, Я.М. Геращенко. Методи наукових досліджень. Харків. 2009.

Допоміжна

9. Григор'єв Ю.Д. Методи оптимального планування експерименту: Лінійні моделі. Навчальний посібник. Видавництво "Лань", 2015.

Інформаційні ресурси

10. http://wiki.kpi.ua/index.php/Теорія_планування_експерименту_(20402040)