

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО”

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

КАФЕДРА ФІЗИКИ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

А. А. Халатов

(підпис)

(ініціали, прізвище)

“ ”

2018 р.

**Дипломна робота**

освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”

за спеціальністю 6.040204 «Прикладна фізика»

на тему «Гравітаційне мікролінзування еліптичного джерела»

Виконав студент 4 курсу групи ФФ-42

Куйбаров Андрій Вячеславович

Керівник д.ф.м.н., професор, Жданов В.І.

Рецензент Rank, Name

\_\_\_\_\_

(підпис)

\_\_\_\_\_

(підпис)

\_\_\_\_\_

(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авторів  
без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО”**

Факультет (інститут) Фізико-технічний інститут  
Кафедра Фізики енергетичних систем  
Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр  
Напрямок підготовки 6.040204 Прикладна фізика  
Спеціальність 6.040204 Прикладна фізика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

А. А. Халатов

(підпис)

(ініціали, прізвище)

« \_\_\_\_\_ »

2018 р.

**ЗАВДАННЯ**

**на тему дипломної роботи**

Куйбаров Андрій Вячеславович

- 1) Тема роботи Гравітаційне мікролінзування еліптичного джерела  
керівник Жданов Валерій Іванович, д.ф.м.н., проф.  
затверджено наказом по університету від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 р. № \_\_\_\_\_
- 2) Термін подання студентом роботи  

---
- 3) Вихідні дані до роботи Тут потрібно щось написати про вихідні данні
- 4) Зміст роботи Вивести коефіцієнт підсилення для протяжного джерела,  
яке має еліптичний гаусівський розподіл яскравості використовуючи  
наближення каустики яке виходить з другого порядку малості;  
використовуючи конкретну модель ГЛС дослідити цей коефіцієнт

## ABSTRACT

The diploma work explanatory note includes N pages, N tables and N figures. N references were used in it.

Gravitational microlensing of an extended elliptic source is the main theme of this diploma project.

Effects of microlensing with caustic intersected by the elliptical source is the object of the work.

The amplification factor for the luminosity of an extended source with gaussian elliptic surface brightness distribution is the subject of the work.

To derive analytic formula of amplification factor of an elliptic source, that takes into account the second approximation in the parameter of proximity to the caustic, to apply obtained formula to Chang-Refsdal lens model is the aim of the work.

GRAVITATION MICROLENSING, FOLD-CAUSTIC, AMPLIFICATION  
FACTOR

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить  $N$  сторінок, містить  $N$  таблиць та  $N$  рисунків. Використано  $N$  бібліографічних джерел.

Темою роботи є гравітаційне мікролінзування еліптичного джерела

Об'єктом дослідження є ефекти мікролінзування при перетині каустики протяжним еліптичним джерелом

Предметом дослідження є сумарний коефіцієнт підсилення протяжного еліптичного джерела - зміна яскравості зображення з часом.

Метою дослідження є вивести формулу для коефіцієнта підсилення еліптичного джерела, використовуючи більш високі наближення для каустики, використати виведену формулу для конкретної моделі гравітаційно лінзової системи, а саме моделі лінзи Чанга-Рефсдала та встановити закономірності.

ГРАВІТАЦІЙНЕ МІКРОЛІНЗУВАННЯ, КАУСТИКА СКЛАДКА, КОЕФІЦІЄНТ ПІДСИЛЕННЯ

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	7
1 Розділ 1. Літературний огляд . . . . .	12
1.1 Зведення до звичайної оптики . . . . .	12
1.2 Історична довідка. . . . .	14
1.2.1 Застосування гравітаційного лінзування . . . . .	16
1.2.2 Гравітаційне мікролінзування . . . . .	18
2 Розділ 2. Методи та матеріали. . . . .	21
2.1 Математичний опис. . . . .	21
2.1.1 Лінза Шварцшильда . . . . .	21
2.1.2 Загальне рівняння лінзи . . . . .	24
2.1.3 Кут відхилення . . . . .	26
2.1.4 Безрозмірне рівняння . . . . .	27
2.1.5 Потенціал відхилення . . . . .	28
2.1.6 Коефіцієнт підсилення . . . . .	28
2.1.7 Критичні криві, каустики . . . . .	30
2.1.8 Особливість типу складка . . . . .	31
2.1.9 Особливість типу касп . . . . .	32
2.2 Коефіцієнт підсилення точкового джерела в більш високих наближе- ннях . . . . .	33
2.2.1 Уточнення асимптотичних формул поблизу складки . . . . .	37
2.3 Лінза Чанга-Рефсдала. . . . .	42
2.3.1 Критичні криві та каустики лінзи Чанга-Рефсдала . . . . .	44
3 Розділ 3. Результати та висновки . . . . .	47
3.1 Виведення формули для коефіцієнту підсилення . . . . .	47
3.2 Виведення інтегралів типу $\tilde{J}_{k,\alpha}$ . . . . .	50
3.2.1 Формула для коефіцієнта підсилення еліптичного джерелааа. . . . .	56

3.3 Приклади . . . . .	58
3.3.1 Приклад 1 . . . . .	58
3.3.2 Приклад 2 . . . . .	60
Висновки . . . . .	63
Перелік посилань . . . . .	64

## ВСТУП

Гравітаційне лінзування - це сучасна потужна теорія, що базується на загальній теорії відносності, яка описує поширення електромагнітних хвиль у викривленому просторі-часу. Взаємодія між гравітацією та електромагнітним випромінюванням дуже мала, побачити її неозброєним оком неможливо, проте вона існує.

Ефект гравітаційного лінзування полягає у відхиленні променя світла віддаленого джерела під дією гравітаційного поля масивного об'єкта-лінзи : зорі, галактики, чорні діри та нейтронні зорі, тощо. Із-за того, що гравітаційне поле скупчення мас діє схоже зі звичайною оптичною лінзою, масивні об'єкти, які відхиляють промені почали називати лінзами також. Розрахунок ефектів гравітаційного лінзування базується на відомій формулі Ейнштейна, яка пов'язує кут відхилення променя  $\alpha$  та прицільний параметр  $r$ :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{r},$$

де  $G$  - гравітаційна стала,  $M$  - маса лінзи,  $c$  - швидкість світла. Детальний вивід цієї формули можна знайти в такій класичній роботі як [1]

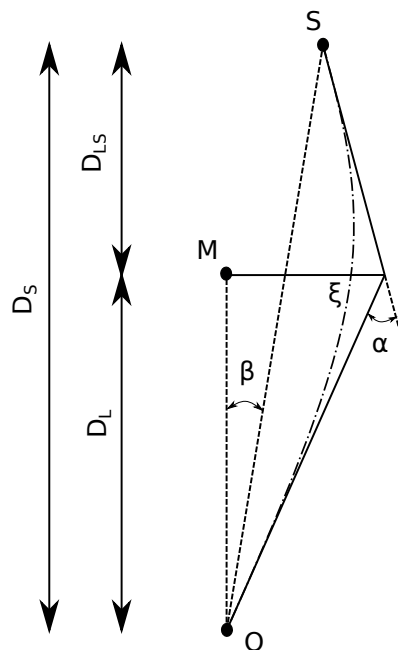


Рисунок 1 — Модель найпростішої гравітаційної лінзи. В точці  $M$  розташована точкова маса,  $O$  - спостерігач,  $S$  - джерело.  $D_s$  - відстань від спостерігача до джерела випромінювання,  $D_L$  - відстань від спостерігача до лінзуючої маси,  $D_{LS}$  - відстань від лінзи до джерела. Кут  $\alpha$  - кут відхилення променя під дією гравітації.

На рис. 1 зображена принципова схема гравітаційного лінзування.

Гравітаційне лінзування поділяють на: сильне, слабе та мікролінзування. Сильне лінзування пов'язане із сильним відхиленням променів джерела масивним об'єктом. У позагалактичних системах зазвичай лінзуючий об'єкт це галактика або скупчення галактик. У цьому випадку кут відхилення доволі великий, тому з'являється більше одного зображення джерела, можливе утворення дуг, серповидних зображень, або навіть кільця Ейнштейна навколо лінзуючого об'єкта. Слабе лінзування проявляється у деформації зображення досліджуваного об'єкта. Ефект слабого лінзування можна помітити лише статистичною обробкою великої кількості спостережуваних даних. Мікролінзування — ефект пов'язаний зі впливом однієї або декількох мікро-лінз, порівняно невеликої маси відносно сильного лінзування, наприклад зоряної. Мікролінзування

можна розділити на галактичне та позагалактичне. В галактичному лінзування джерелом зазвичай є зорі або сусідні балджу нашої Галактики, а міролінзами є зорі нашої галактики. В позагалактичному мікролінзуванні розглядають вплив окремих мікролінз-зірв лінзуючій галактиці. Завдяки тому, що зорі рухаються, потік випромінювання може сильно змінюватися у часі. Саме цю зміну спостерігають як зміну яскравості джерела від часу та називають кривою блиску. Ці криві утворюються за рахунок накладання декількох зображень, так як в мікролінзуванні кут відхилення досить мал, тому неможливо відрізнити декілька окремих зображень. Характерний час зміни яскравості в мікролінзуванні сягає від неділь до місяців, тобто доволі реальні часи для спостереження.

На сьогодні накопичено важливі дані спостережень за програмами MACHO [2] (MAssive Compact Halo Object), EROS (Experience de Recherche d'Objets Sombres), OGLE (Optical Gravitational Lens Experiment), що мають велике значення для визначення розподілу маси в Галактиці. На сьогодні відомо більш ніж 100 ГЛС, і це число постійно збільшується [3].

Наведемо декілька прикладів існуючих гравітаційних лінз.

**Найперша лінза** із всіх відкритих ГЛС - **Q0957 + 561** (The First Lens). Не дивлячись на теоретичне підґрунтя і наявність ідей щодо спостереження таких об'єктів, рівень технологій спостереження і недосконалість тогочасних приладів відкинули відкриття реальних гравітаційно-лінзованих систем майже на 40 років: лише у 1979 році було виявлено і підтверджено гравітаційно-лінзову природу двох зображень об'єкта 0957 + 561. В цій ГЛС спостерігається два зображення квазара. Щоб виділити ефекти гравітаційного мікролінзування в цьому об'єкті потрібен статистичний підхід до аналізу ряду даних за доволі довгий період часу. Такі масиви даних були отримані, що дозволило підтвердити присутність мікролінзування в цій системі. Проводилися дискусії про малі зміни яскравості ( близько 5%); щось схоже було виявлено й в інших ГЛС. Можливо вони спричинені мало-масивними зорями, які створюють саму велику популяцію зорь в нашій галактиці.

**Найближча із всіх відкритих ГЛС - Q2237 +0305 "Хрест Ейнштейна"** була знайдена в 1985 році. Ця ГЛС має чотири зображення квазара, разом вони нагадують хрест. Висока концентрація зірок на траєкторії зору, та відносна близькість робить цю лінзу унікальним об'єктом для вивчення ефектів пов'язаних з ГЛС. Саме тому ця лінза так часто згадується у літературі.

**Cloverleaf Quasar (Лист конюшини) H1413 + 117** Чотири зображення квазару були знайдені в 1988 р. Маса центрального об'єкта становить близько  $7.5 \cdot 10^8 M_{\odot}$ . В цій системі ефекти мікролінзування проходять відносно повільно, тому їх важко знайти.

Останнім часом велику увагу привертає астрометричне гравітаційне мікролінзування. Тут йдеться про ті самі об'єкти і навіть про ті самі ефекти ЗТВ, але основний акцент робиться не на фотометричні прояви мікролінзування, а на рухи зображень мікролінзованих об'єктів. Інтерес до цієї тематики пов'язаний як з перспективами мікросекундної астрометрії, так і з тим, що астрометричні вимірювання забезпечать додаткову незалежну інформацію про мікролінзуючі об'єкти, яка здатна компенсувати невизначеності, що залишаються після суто фотометричних спостережень. Є надія, що майбутні космічні проекти SIM (Space Interferometry Mission, та GAIA дадуть змогу вимірювати не тільки криві яскравості мікролінзованих об'єктів, але й положення центру яскравості зображень. У літературі докладно розглядалися питання астрометричного гравітаційного мікролінзування галактичних об'єктів [3]

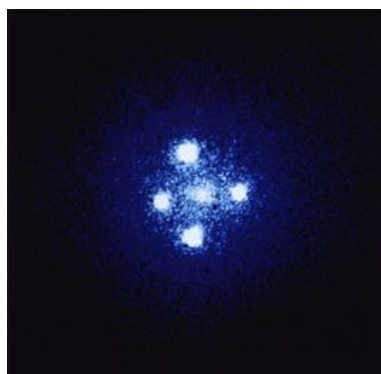


Рисунок 2 — Хрест Ейнштейна

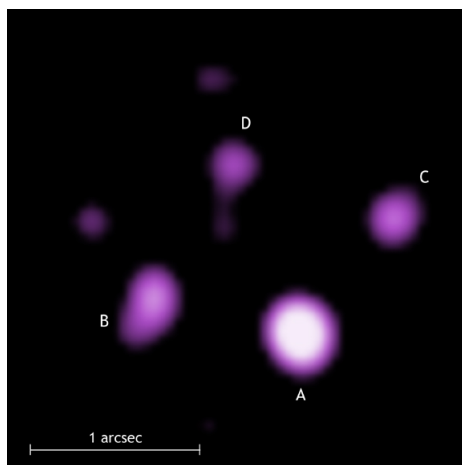


Рисунок 3 — Лист конюшины

## 1 РОЗДІЛ 1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

### 1.1 Зведення до звичайної оптики

Цікаво показати, що рівняння гравітаційного лінзування можна звести до звичайних рівнянь геометричної оптики. Роздивимося рівняння Ейконала [4]

$$\frac{d}{dl} \left( n \frac{dx_i}{dl} \right) = \frac{\partial n}{\partial x_i},$$

де  $n$  - це коефіцієнт заломлення,  $l$  - це траєкторія променя. Роздивимося випадок, коли  $n = 1 - \frac{R_s}{r}$ , та  $\frac{R_s}{r} \ll 1$ . Зрозуміло, що у першому наближенні, якщо

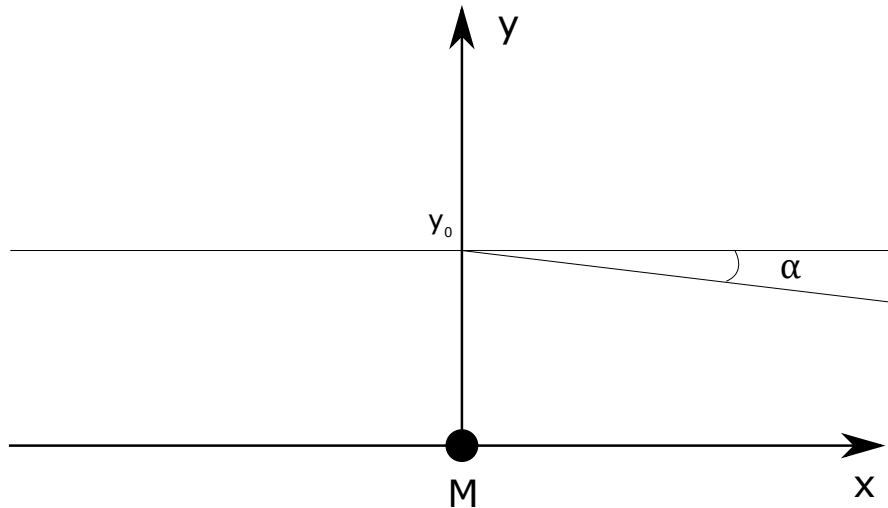


Рисунок 1.1 — Схематично зображено розповсюдження променя.  $y_0$  початкове положення променя,  $M$  - точка, в якій знаходиться точкова маса.

взяти що  $n = 1$ , то траєкторією променя буде пряма  $y = y_0$ . Насправді ж траєкторією променя буде гіпербола, але так як відстані доволі великі, цю гіперболу

можна апроксимувати ломаною, з кутом між асимптотами  $\alpha$ . Знайдемо цей кут, наступним чином: перепишемо рівняння Ейконалу підставляючи замість  $x_i$  координату  $y$

$$d \left( n \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dl} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dl}{dx} dx,$$

та якщо проінтегрувати отримуємо:

$$n \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dl} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dl}{dx} dx.$$

Зліва величина  $\frac{dy}{dx}$  є ні що інше як  $\tan \alpha$ , або ж якщо кути малі, то  $\tan \alpha \approx \alpha$ . Так як  $\alpha$  вже сама по собі мала величина, то зліва рівняння можна обмежитись першим порядком малості і вважати що  $n = 1$  та  $\frac{dx}{dl} = 1$ . З правої частини рівняння ми використаємо метод послідовних ітерацій, тобто будемо вважати, що  $y(x) = y_0$ , та підставимо вираз для  $n$  та продиференціюємо його. В результаті отримуємо рівняння:

$$\alpha = R_s y_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y_0^2)^{3/2}}.$$

Інтегруючи цей вираз частинами, знаходимо що

$$\alpha = \frac{2R_s}{y_0}. \quad (1.1)$$

Формула 1.1 є ніщо інше, як кут відхилення променя точковою масою в гравітаційному полі з радіусом Шварцшильда  $R_s$ . Цей приклад показує те, що формально, обравши правильним чином коефіцієнт заломлення можливо звести задачу гравітаційного лінзування до випадку звичайної геометричної оптики.

## 1.2 Історична довідка

Сьогодні, для опису електромагнітних променів в гравітаційному полі потрібно використовувати загальну теорію відносності Альберта Ейнштейна. Але за багато часу до відкриття цієї теорії вчені вже підозрювали, що гравітація впливає якимось чином на поведінку світла. В першому виданні "Opticks" 1702р Ісаак Ньютон формулював "Чи не тіла діють на світло на відстані, і своєю взаємодією викривляють їх траєкторії, і чи не найсильніша ця взаємодія на короткій відстані?". Майже 300 років знадобилося, щоб відповісти на це питання. У 1783 Британський астроном Джон Мічел писав у листі до Генрі Кавендіша "... якщо б радіус сфери с такою самою щільністю як у сонця був більший за сонячний у 500 разів, то тіло яке падає з нескінченості на цю сферу б мало швидкість, більшу за швидкість світла на поверхні цієї сфери і відповідно якщо представити, що світло притягується з силою пропорційною його "інерції"(vis inerieae), то все світло випромінене цим тілом, повернулося б назад до нього, за допомогою його ж гравітації "Він навіть запропонував як шукати такі "чорні тіла" за допомогою спостереження зірок, які коливаються навколо цих невидимих об'єктів. Вражений розмовою зі своїм товаришем, Генрі Кавендіш, близько 1784 р. поразував кут відхилення променя світла тілом, припускаючи корпускулярну теорію світла та Ньютоновський закон тяжіння тіл. Він не опублікував цей результат.

Мабуть, незалежно від Мічела, Пітер Сімон Лаплас зазначив у 1796 "Сила тяжіння важких тіл може бути настільки великою, що навіть світло не зможе подолати її". Саме так, пробна частинка може покинути гравітаційне поле сферичної маси  $M$  радіусу  $R$ , вилітаючи з його поверхні, лише якщо її початкова швидкість  $v_0$  більша за  $v_e$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Ця критична швидкість збільшується, зі зменшенням розмірів тіла, що при-

тягую, і досягає швидкості світла коли радіус стає меншим за

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 2,95 \frac{M}{M_\odot},$$

де  $M_\odot$  - маса Сонця. Як і Мічел, Лаплас зробив висновок, що тіло маси з радіусом меншим за  $R_S$  є таким компактним, що навіть світло не може покинути його поверхні. Об'єкт буде здаватися повністю чорним. Чорна діра має горизонт подій площа якого в статичному випадку задається як  $4\pi R_S^2$ , за межі якого ніякий сигнал не може потрапити і зокрема світло не може покинути горизонт подій. Радіус  $R_S$  називають радіусом Шварцшильда на честь того, хто відкрив сферично симетричне рішення рівняння Ейнштейна в вакуумі.

В 1801 астроном Джохан Солднер опублікував працю, в якій він досліджував похибку в вимірюванні кутової відстані зірок із-за відхилення світла. Мотивований роботами Лапласа він обчислив орбіту тіла з постійною швидкістю  $v$  що пролітає близько до сферичної маси з прицільним параметром  $r$ . Виявилось, що ця орбіта буде гіперболою. Відповідно до класичної механіки кут між двома асимптотами в цій гіперболі дорівнює:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{GM}{v^2 r}.$$

Якщо розглянути лише випадок малих кутів, то зліва в рівнянні можна тангенс замінити на сам аргумент, тому

$$\alpha \approx \frac{2GM}{v^2 r}$$

Цей результат переходить в результат Ньютона, якщо замість  $v$  підставити  $c$ , та є в узгодженості з результатом Кавендіша та Солднера. Згідно цієї формули, кут на який відхиляє Сонце промені становить 0,85 кутових секунди.

В 1911 Ейнштейн незалежно від Солднера отримав такий самий результат використовуючи принцип еквівалентності в припущенні, що метрика простору часу є евклідовою, без впливу гравітації.

Лише маючи всі рівняння загальної теорії відносності Ейнштейн вивів формулу, яка в двічі більша за попередню

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 r} = \frac{2R_S}{r}$$

Ця формула, та виміри, зроблені під час сонячного затемнення співпали з великою точністю і цей результат зробив Ейнштейна відомим, та зокрема, доводив правдивість загальної теорії відносності. Для сонця  $\alpha = 1.74$  кутових секунди та це значення підтверджено на даний момент з точністю 0.02%.

### 1.2.1 Застосування гравітаційного лінзування

З одного боку, гравітаційне лінзування є теоретичним феноменом для дослідження, а з іншого є потужним методом, за допомоги якого можна досліджувати всесвіт. Із-за великих відстаней між об'єктом спостереження та скупченням мас, ефекти гравітаційного лінзування підходять для вивчення як джерела так і гравітатора. Гравітаційне лінзування дає змогу вивчати розподіл темної матерії у Всесвіті, знаходити планети в інших зоряних системах, робити оцінку маси та інших характеристик галактик, зірок, тощо.

У позагалактичних гравітаційно-лінзових системах є цікаве сполучення двох незалежних областей релятивістських досліджень. З одного боку, ефект гравітаційної лінзи – це прояв релятивістського викривлення променів, передбачуваного ЗТВ, з іншого, – основним елементом квазара є надмасивна чорна діра – суто релятивістський об'єкт. У позагалактичних ГЛС спостерігають декілька зображень одного й того ж квазара. Завдяки наявності цих декількох

зображень можна відділити ефекти мікролінзування в ГЛС від власних змін яскравості квазара і використати цю інформацію для вивчення центральної малої області квазара (що містить, зокрема, акреційний диск). Ця область наразі недосяжна для прямих спостережень і одним з непрямих шляхів її дослідження є використання ефектів гравітаційного мікролінзування [3].

Також у випадку позагалактичного лінзування, із-за часових затримок між двома зображеннями можна спостерігати одну й ту саму подію декілька разів, та можна отримувати космологічні параметри, наприклад сталу Хаббла [5]. Вперше це було запропоновано Сьюром Рефсладом у 1964 році. Так як феномен гравітаційного лінзування залежить визначається розподілом матерії (в тому числі і темної), це дає унікальну змогу як і визначити сталу Хаббла так і дізнатися щось про темну матерію, яка знаходиться недалеко від променя зору на спостерігача на квазар. На сьогодні часова затримка була виміряна більше ніж в 20 гравітаційно лінзових системах з квазаром та виміряно постійну Хаббла, яка, як правило, помітно менше, ніж найточніша оцінка на сьогодні, та складає приблизно  $72 \pm 8$ (км/с)/Мпк.

Ефекти саме гравітаційного мікролінзування найбільш помітні, коли джерело випромінювання проходить через каустику мікролінзи – його яскравість може збільшуватися вдвічі й більше. Це явище називають подією мікролінзування з великим підсиленням (ПВП). Такі події є особливо цінними. Вони дають можливість визначити деякі параметри ГЛС, виходячи з даних, накопичених за відносно невеликий проміжок часу, тоді як менш інтенсивні події мікролінзування, хоча й більш доступні, стають інформативними тільки після накопичення статистичного матеріалу протягом десятиріч. Тому великої уваги заслуговують ПВП, виявлені в ГЛС Q2237+0305 спостережними групами OGLE та GLITP.

У випадку сильного та слабого лінзування можливо визначити масу самої лінзи, яка найчастіше є галактикою, котра лежить біля променя зору.

Ефекти мікролінзування, або статистичний аналіз кривих блиску дає можливість встановити відношення між мас компактного об'єкту та неперервно

розподіленої матерії, можливо навіть темної. Ідея використання мікролінзування знаходження темної матерії вперше була запропонована в 1991 році і опублікована дещо пізніше в роботі присвяченій статистичному аналізу кривих блиску [6] . У 2002-2004 був запропонований метод оцінити відносний внесок в загальну поверхневу щільність розподілу маси, який базується на аналізі щільності ймовірності підсилення міролінз, так званий метод гістограм. За допомогою комп'ютерної симуляції вони показали, що попри інтуїтивних очікувань, заміна деякої частини гравітаючої маси в компактному об'єкті на неперервно розподілену матерію в деяких випадках призводить до збільшення флуктуацій яскравості у мікролінзуванні в іншій частині компактного об'єкту. Флуктуації збільшуються більше на особливих точках "сідлах" потенціалу Ферма, порівняно з мінімумом цього потенціалу.

### 1.2.2 Гравітаційне мікролінзування

Так як ця бакалаврська робота присвячена саме гравітаційному мікролінзуванню, то хотілося б приділити йому більше уваги. На відміну гравітаційного мікролінзування, в якому зазвичай картина джерел не змінюється з часом, ефекти мікролінзування спричиняє динамічні зміни яскравості зображень із часовими масштабами від тижнів до місяців. У першому випадку роль лінз відіграють галактики, у другому – об'єкти зоряних мас.

У гравітаційному макролінзуванні неперервний розподіл мас створює гладкий потенціал відображення, який помітно змінюється тільки на відносно великих відстанях, але поодинокі зорі, або інші компактні об'єкти вносять збурення до цього потенціалу, і це призводить що кожне зображення джерела, створене гладким потенціалом неперервної маси має в свою чергу ще декілька зображень, які розділені дуже маленьким кутом, порядку декільком мікросекунд дуги. Такі кути на сучасному рівні астрономічного обладнання розділити немо-

жливо, тому носієм інформації про такі системи є саме дослідження змін потоків випромінювання за рахунок власне руху самого джерела. Зміна коефіцієнту підсилення з часом залежить від того, як саме розташовані компактні об'єкти, які вносять збурення, та відповідно їх каустики.

Лінзуюча галактика що знаходиться між ГЛС та спостерігачем створює декілька зображень джерела, та змінює їх яскравість. Порівняння змін яскравості у різних зображень дає змогу розрізнити власні коливання яскравості у джерела, та ефекти мікролінзування за рахунок відносного руху зір. Це дає змогу аналізувати структуру джерела. Для такого потрібна була б ГЛС в якій доволі часто спостерігаються події з великим підсиленням. Одною з таких галактик є "Хрест Ейнштейна" яку було виявлено і вперше описано у 1984.

В даній роботі зроблено акцент на те, щоб описати криву блиску, у випадку коли джерело перетинає саме одну каустику саме для еліптичного розподілу яскравості. У роботі [7] авторами було розглянуто мікролінзування протяжного еліптичного джерела та джерела з показником розподілом яскравості, виведено відповідні формули які описують криві блиску. Так як ефекти мікролінзування пов'язані з каустиками, які в свою чергу пов'язані з стійкими особливостями диференційних відображень, слід сказати, що опис ефектів мікролінзування відрізняється для цих ефектів. Як відомо, існує лише 2 стійки особливості, складка та збірка, складка відповідає регулярним точкам на каустиці, коли збірка відповідає ввістряам, так званим каспам. В роботах [8, 9] були знайдені коефіцієнти підсилення для точкового джерела у випадку у високих порядках наближення, коли об'єкт перетинає і складку і збірку. Також в цих роботах описан регулярний метод знаходження коефіцієнту підсилення, тобто його можна знайти і навіть з більш високими поправками. Хочеться сказати, що у випадку збірки результат є дещо більш складкам, та менше використовуваним, тому ця робота зосереджена саме на перетину каустики в точках далеких від каспів.

## Висновки до розділу 1. Мета та основні задачі дослідження

Гравітаційне лінзування, а зокрема мікролінзування є не тільки теоретичним явищем, цікавим вивчення саме по собі, але й потужним, прикладним методом для астрономії та астрофізики для отримання унікальних даних про джерело та лінзу. В мікролінзуванні важливо правильно аналізувати криві блиску, адже вони несуть інформацію про розмір, розподіл яскравості джерела, тощо. Хоча й повністю визначити всі параметри, скоріш за все буде неможливо, так як це буде некоректною задачею математичної фізики, при деяких припущеннях можна отримати цінну інформацію. Для того, щоб наприклад, робити повне статистичне моделювання, з багатьма лінзами та відповідно багатьма каустиками, потрібно знати реакцію системи на проходження протяжного джерела через каустику. Так як багато космічних тіл не мають сферичну форму, а деякі, наприклад балджі є дуже витягнутими, корисно вивчити реакцію системи на перетин каустики саме еліптичним джерелом.

Таким чином далі можна сформулювати головну ціль дослідження як:

- 1) Вивести формулу для кривої блиску протяжного еліптичного джерела, в якій, зокрема, можна змінювати кут нахилу еліпса відносно каустику, та кут, під яким еліпс буде проходити через каустику.
- 2) Застосувати вище виведену формулу для конкретної моделі ГЛС, а саме моделі лінзи Чанга-Рефсдала.
- 3) Отримати криві блиску, та проаналізувати їх поведінку в залежності від кутів.

## 2 РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ТА МАТЕРІАЛИ

### 2.1 Математичний опис

#### 2.1.1 Лінза Шварцшильда

Для того щоб зрозуміти як працює гравітаційна лінза, розглянемо найпростіший випадок, а саме відхилення променя світла точковою масою (в літературі такий випадок називається лінзою Шварцшильда). Так як промінь світла проходить дуже великі відстані, а його траєкторією наближено є гіпербола (в цьому ми надалі впевнимось), та можна розглядати не саму траєкторію, а безпосередньо тільки її асимптоти, що спрощує дуже саму модель. Саме тому ця модель дуже нагадує звичайну оптичну лінзу, але з більш складним законом заломлення світла. Як надалі буде видно, ця лінза може давати декілька уявних зображень реального об'єкта. Це пов'язано з тим що рівняння, яке пов'язує зображення в площині лінзи та площині джерела, є не біективним.

Площина лінзи - це геометричне місце точок, зосереджених в площині, в якій знаходиться лінза, та перпендикулярна до лінії зору спостерігача. Площина джерела - це теж саме, але там, де знаходиться джерело. Авжеж, те що лінза та джерело знаходяться в площині - це математичне припущення, але дуже гарне, так як розміри лінзи і джерела яке набагато меншими за відстані між лінзою та джерелом. Одним із самих важливих ефектів гравітаційного лінзування є відхилення променів світла під дією масивних джерел, яке описує знаменита формула Ейнштейна:

$$\alpha = \frac{4GM}{\xi c^2} = 2\frac{R_s}{\xi}, \quad (2.1)$$

де  $\alpha$  - кут відхилення променя світла,  $G$  - гравітаційна стала,  $c$  - швидкість поширення світла в вакуумі,  $\xi$  - прицільний параметр. Всю траєкторію фотона

від джерела до спостерігача можна апроксимувати ломаною лінією, яка відхиляється саме на кут  $\alpha$ . Вважається що прицільний параметр  $\xi$  значно більший за відповідний радіус Шварцшильда. Виходячи з цього, рівняння гравітаційної лінзи запишеться наступним чином:

$$\mathbf{y} = \frac{D_s}{D_L} \mathbf{x} - D_{LS} \alpha(\mathbf{x})^1 \quad (2.2)$$

де  $D_s$ - відстань від спостережувача до джерела випромінювання,  $D_L$  - відстань від спостережувача до лінзуючої маси,  $D_{LS}$  - відстань від лінзи до джерела. Те ж саме рівняння але переписане через кутові розміри до джерела:

$$\beta D_s = \frac{D_s}{D_L} \xi - \alpha(\xi) D_{LS} \quad (2.3)$$

Зробимо заміну :

$$\theta = \frac{\xi}{D_L} \quad (2.4)$$

В цій заміні  $\theta$  має сенс кута між напрямком на гравітуючу масу, та на промінь, який приходить до спостерігача. Підставляючи 2.4 у 2.3 , отримуємо:

$$\beta = \theta - 2R_S \frac{D_{LS}}{D_L D_s} \frac{1}{\theta}$$

Допускається, щоб  $\theta$  та  $\beta$  мали як додатній, так і в від'ємний знак, це просто буде означати, що вони знаходяться по різні сторони від лінзи. Поки що ми будемо розглядати випадок, коли  $\theta \neq 0$ , тобто коли джерело не лежить на одній прямій з лінзою. Цей випадок буде розглянуто пізніше. Зведемо це рівняння до вигляду:

$$\theta^2 - \beta\theta - \alpha_0^2 = 0, \quad (2.5)$$

---

<sup>1)</sup>Слід зауважити, що в наслідок неевклідовості геометрії простору-часу  $D_s \neq D_L + D_{LS}$ .

де  $\alpha_0$  визначається такою рівністю:

$$\alpha_0 = \sqrt{2R_S \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}.$$

Рівняння 2.5 є звичайним квадратним рівнянням і розв'язком для нього буде:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2}(\beta \pm \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2})$$

Тобто було отримано, що навіть в самій простій моделі точкової маси, лінза показує 2 уявних зображення одного реального предмета. Як видно, рівняння має 2 розв'язки різного знака, що каже про те, що завжди отримується 2 уявних зображення по обидва боки від лінзи. Тому різниця між ними складає:

$$\theta_1 - \theta_2 = \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2},$$

а "справжня" різниця:

$$\theta_1 + \theta_2 = \beta. \quad (2.6)$$

**Кільця Ейнштейна** - спеціальний розв'язок рівняння 2.3, у випадку, коли джерело, лінзуюча маса, та спостерігач знаходяться на одній прямій, тобто  $\beta = 0$ , тому очевидно розв'язок рівняння 2.5

$$\theta_{1,2} = \pm\alpha_0.$$

Із симетрії задачі зрозуміло, що цей розв'язок означає що існує лише один кут  $\theta = \alpha_0$ , тобто розв'язок - це коло радіуса  $\alpha_0$ . Тому точкова маса, виходячи з геометричної оптики, прямо за лінзою здається колом радіуса  $\alpha_0$  навколо лінзи. Але в цьому ідеалізованому випадку нескінченність променів від джерела прохо-

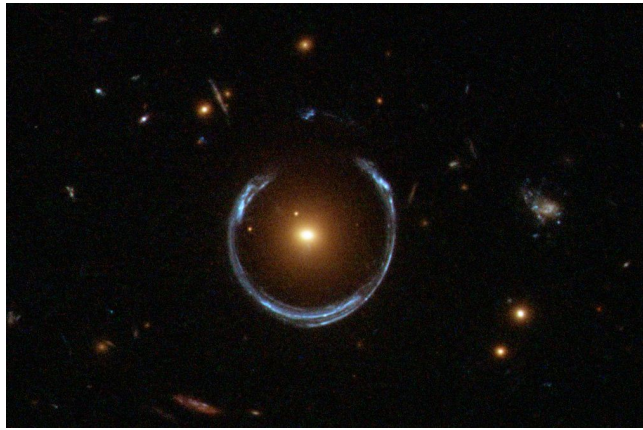


Рисунок 2.1 — ”Cosmic horseshoe (Космічна підкова)” Приклад гравітаційно лінзової системи типу ”Кільце Ейнштейна”

дять однакову відстань до спостерігача, тому здавалося, інтерференція повинна зруйнувати гіпотези, які передбачає геометрична оптика. Але на практиці джерело ніколи не буде точковим, а також не буде монохроматичним, та не буде розташовано точно одній прямій між спостерігачем та лінзою.

В більш загальному випадку схожі на коло зображення точкового джерела можуть з’явитися лише в тому випадку, коли лінза має аксіальну симетрію в розподілі мас. З іншої сторони, коли джерело є реальним, тобто має розміри, зображення у вигляді кола можна отримати не лише тоді, коли лінза має аксіальну симетрію в розподілі мас. Такі зображення теж називають ”Кільцями Ейнштейна”

**Висновок:** Як видно основні рівня ГЛС формально прості. Складності виникають у прикладних задачах та чисельному моделюванні. Створено багато чисельних моделей, та вони постійно удосконалюються, але питання ”гарного вирішення” рівнянь досі є відкритим.

### 2.1.2 Загальне рівняння лінзи

Випадок, коли лінза представляє собою точкову масу, потрібен лише для теоретичних розглядів на ГЛС. На практиці навіть якщо лінза є зіркою, її гра-

вітаційне поле деформоване тим, що зірка є частиною галактики, та там є інші маси, або тим, що зірка зноходиться на одній лінії між спостерігачем та джерелом, що вносить також деформації. Тому лінза Шварцшильда це сильна ідеалізація. Але це гарна модель, не лише тому що вона легка, а й тому, що вона описує закономірності між масою лінзи, відстанню між лінзою та спостерігачем, та спостерігачем та джерелом, а також кутовим відхиленням променя. Також у моделі лінзи Шварцшильда є і свої недоліки, наприклад в моделі Шварцшильда лінза може створити зображення кільця як завгодно малого джерела, але на практиці, у справжньої лінзи немає такої можливості. У всіх випадках, які найбільше цікавлять астрофізику, кути відхилення дуже малі. Наприклад для всіх вже знайдених лінз, кут відхилення становить близько  $30''$ . Також навіть інтуїтивно зрозуміло що прицільний параметр, повинен бути набагато більшим за радіус Шварцшильда. Промінь світла, що проходить через площину лінзи буде описуватись двовимірним вектором  $\xi$ . З малюнку легко отримати співвідношення між кутами в площині лінзи та площині джерела

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s} \alpha(\xi) \quad (2.7)$$

де,  $\alpha(\xi)$  відповідає саме за відхилення променя та залежить якось від координати променя в площині лінзи,  $\theta = \frac{\xi}{D_d}$

Також це рівняння можна переписати на в кутових позначенням, а в позначенням довжин наступним чином

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - D_{ds} \alpha(\xi) \quad (2.8)$$

Очевидно ще це рівняння в загальному випадку може мати більше одного розв'язку, тобто конкретна координата  $\eta$  джерела може мати більше одного конкретного розв'язку  $\xi$ . Це означає що одне й те саме джерело буде здаватися різними то-

чками. Можна показати, що будь який прозорий розподіл мас, з скінченою загальною масою, у наближенні слабого гравітаційного поля буде створювати непарну кількість зображень. В цьому наближенні не розглядались такі промені, в яких прицільний параметр порядку радіусу Шварцшильда, в такому випадку, зрозуміло, рівняння працювати не буде. Але в наближенні Лінзи Шварцшильда, наприклад, кожне зображення буде створювати 2 уявні зображення.

Видно, що рівняння лінзи, дає змоги встановити координату справжнього зображення  $\eta$ , якщо задані координати  $\xi$  і якщо відомий закон заломлення променя  $\alpha(\xi)$ . Але, загальними проблемами гравітаційного лінзування є: знайти обернене рівняння до рівняння лінзи, тобто знайти всі координати  $\xi$  по заданому розподілу маси лінзи, чи по даним координатам  $\eta$  та  $\xi$  знайти розподіл мас самої лінзи.

### 2.1.3 Кут відхилення

У найпростішому випадку, справжню гравітаційну лінзу можна уявити як скупчення мас  $m_i$  кожна з яких знаходиться в координатах  $\xi_i$ . Можна уявити, що кожна елементарна маса  $m_i$  дає свій вклад у відхилення променя незалежно від інших, тому загальний кут відхилення, буде суперпозицією кутів відхилення кожної маси, тобто

$$\alpha(\xi) = \sum_i \frac{4Gm_i}{c^2} \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|^2} \quad (2.9)$$

де  $\xi$  описує координату, променя у площині лінзи. Також у випадку, коли маси розподілені неперервно, то суму можна замінити на інтеграл, та ввести  $\Sigma(\xi_i)$  - функцію розподілу маси по координатам в площині лінзи.

$$\alpha(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int_{R^2} d\xi^2 \Sigma(\xi_i) \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|^2} \quad (2.10)$$

### 2.1.4 Безрозмірне рівняння

Для подальшого розгляду зручно перейти від рівняння 2.8 до безрозмірного рівняння. Нехай  $\xi_0$  це відносний лінзовий масштаб, тоді  $\eta_0 = \frac{D_s}{D_d}\xi_0$  буде відносним розміром в площині джерела. тоді нехай

$$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0}$$

$$\mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta_0}$$

Тоді безрозмірний розподіл мас буде задаватися

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\Sigma(\mathbf{x}\xi_0)}{\Sigma_c r} \quad (2.11)$$

де  $\Sigma_c r$  визначається з рівняння

$$\Sigma_c r = \frac{c^2 D_s}{4\pi G D_d D_{ds}} \quad (2.12)$$

Згідно з всього вище сказаного рівняння лінзи можна переписати у вигляді

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

де  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  визначається рівністю

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{R^2} d^2 \mathbf{x}' \kappa(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (2.14)$$

### 2.1.5 Потенціал відхилення

Рівність  $\nabla \ln(|\mathbf{x}|) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$  дає змогу переписати рівняння гравітаційної лінзи у скалярному вигляді, вводячи скалярний потенціал відображення.

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla\psi \quad (2.15)$$

де

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{R^2} d^2\mathbf{x}' \kappa(\mathbf{x}') \ln(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.16)$$

тоді і саме рівняння лінзи можна переписати в градієнтному вигляді

$$\mathbf{y} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^2 - \psi(\mathbf{x})\right) \quad (2.17)$$

що також може бути представлене неявним рівнянням

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 - \psi(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

$$\nabla\phi = 0 \quad (2.19)$$

### 2.1.6 Коефіцієнт підсилення

Гравітаційна лінза не тільки змінює напрям, по якому йде світловий промінь, а також змінює щільність пучка променів. Так як ефект гравітаційного лінзування не пов'язаний з емісією, або поглинанням, можна стверджувати, що у більшості випадків гравітаційного лінзування довжина хвилі світла змінюватися не буде. Тому й енергія фотона впродовж його траєкторії змінюватися

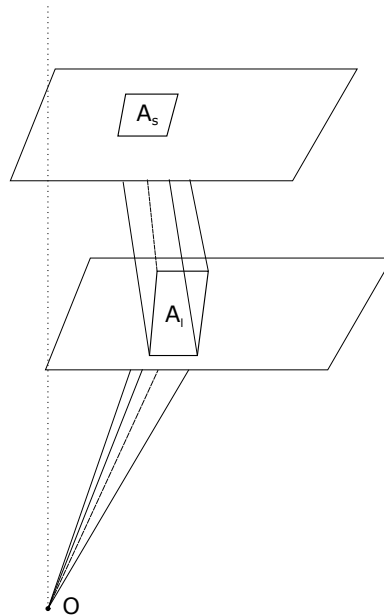


Рисунок 2.2 — Схематичне зображення дії гравітаційного лінзування на пучок променів.  $s$  - це площа джерела,  $A_l$  - це площа зображення,  $O$  - спостерігач

також не буде. Тому, можна стверджувати, що яскравість джерела у випадку присутності лінзи, та без неї буде така сама. В той час, світловий потік нескінченно малого джерела є добутком його яскравості на тілесний кут  $\Delta\omega$  через який його видно у небі. Так як яскравість не змінюється під дію гравітаційного лінзування, то відношення світових потоків буде

$$\mu = \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \quad (2.20)$$

де  $\Delta\omega_0$  - це такий тілесний кут, з якого було б видно джерело за відсутності лінзи. Для протяжного джерела, коефіцієнт підсилення знайдеться як інтеграл виразу 2.20 по поверхні джерела, знормовано на його власну яскравість. Згідно з рівняння 2.7

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} = \det \frac{\partial\beta}{\partial\theta} \quad (2.21)$$

Тобто коефіцієнт підсилення задається якобіаном відображення  $\theta \Rightarrow \beta$

$$\mu = \left[ \det \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right]^{-1} \quad (2.22)$$

### 2.1.7 Критичні криви, каустики

Нехай  $\mathbf{A} = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$  - матриця Якобі відображення  $\mathbf{x}$  в  $\mathbf{y}$ . Тоді  $D = \det \mathbf{A}$  буде якобіаном цього відображення. Крива, в просторі лінзи, на якій  $\det \mathbf{A} = 0$  називається *критичною кривою*. Формально на цій кривій коефіцієнт підсилення - нескінчений. Але на практиці це не означає, що яскравість джерела буде нескінченною. По-перше тому, що модель описує нескінченно мале джерело, а для протяжного джерела, цей вираз ще потрібно проінтегрувати по області джерела, по-друге навіть якщо б існувало нескінченно мале джерело, то в силу вступали б хвильові ефекти світла, як дифракція та інтерференція, тому б і тоді ця модель не працювала. Критична крива, в площині лінзи називається *каустикою*. Кількість зображень, яке бачить спостерігач залежить від положення джерела та каустики. Можна показати, що *коли джерело перетинає каустику, з'являється або зникає 2 додаткових зображення*

Згідно з рівняння 2.18 та 2.19 можна написати

$$D = \det \mathbf{A} = \delta_{ij} - \psi_{ij} = 0 \quad (2.23)$$

де  $\psi_{ij}$  - це частинні похідні від  $\psi$  по  $x_1$  та  $x_2$  або інший запис

$$D = \det \phi_{ij} = 0 \quad (2.24)$$

Як відомо з теореми Сарда, якщо відображення  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  неперевне, то критична

крива в площині  $y$  або каустика, буде множиною з Лебеговою мірою нуль. Тобто іншими словами, каустика буде не більше ніж кривою, наприклад не може бути площиною.

На критичних точках, де виконується рівняння  $D = 0$  матриця  $A$  може мати ранг 1 або 0. Розглянемо випадок коли  $rank(\mathbf{A}) = 1$  та  $\nabla D \neq 0$ . Ці дві умови та рівняння 2.24 формують гладку замкнуту криву.

### 2.1.8 Особливість типу складка

В залежності від того, чи буде похідна  $\phi_{222}$  дорівнювати нулеві або ні, в околі критичної точки буде реалізовуватись різна особливість. У випадку коли,  $\phi_{222} \neq 0$  особливість буде складкою. В цьому випадку розкладаючи рівняння лінзи в околі якоїсь критичної точки  $x\mathbf{x}^{(0)}$  можна отримати вираз

$$y_1 = \phi_{11}^{(0)} x_1 + \phi_{112}^{(0)} x_1 x_2 + \frac{1}{2} \phi_{122}^{(0)} x_2^2 \quad (2.25)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \phi_{112}^{(0)} x_1^2 + \phi_{122}^{(0)} x_1 x_2 + \frac{1}{2} \phi_{222}^{(0)} x_2^2 \quad (2.26)$$

Якщо для цього відображення написати матрицю  $\mathbf{A}$  та вирішити рівняння  $\det \mathbf{A} = 0$ , можна отримати наступне рівняння

$$\phi_{112} x_1 + \phi_{222} x_2 = 0 \quad (2.27)$$

Якщо ж тепер це рівняння перевести в площину джерела, виходить рівняння

$$Q(\mathbf{y}) \equiv 2(\phi_{11}^{(0)})^2 \phi_{222}^{(0)} y_2 - [\phi_{112}^{(0)} \phi_{222}^{(0)} - (\phi_{122}^{(0)})^2] y_1^2 = 0 \quad (2.28)$$

Можна також порахувати коефіцієнт підсилення. Для особливості типу складки він буде

$$\mu = \frac{1}{\phi_{11}^{(0)}} \sqrt{\frac{1}{\phi_{222}^{(0)} \Delta y_2}} \quad (2.29)$$

де  $\Delta y_2$  - це відстань від каустики до джерела

При наближенні джерела до каустики коефіцієнт підсилення формально стає нескінченим, але як вже було обговорено, це є лише наслідком прийнятої моделі, тобто геометричної оптики та нескінченно малого джерела.

### 2.1.9 Особливість типу касп

Цю особливість іноді також називають збіркою. Вона реалізовується коли  $\phi_{222} = 0$

$$y_1 = cx_1 - \frac{1}{2}bx_2^2 + dx_1x_2 \quad (2.30)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}dx_1^2 - x_1x_2 - x_2^3 \quad (2.31)$$

рівняння каустики в цьому випадку набуває вигляду

$$y_1^3 = \frac{27c^2(2ac + b^2)}{8b^3}y_2^2 \quad (2.32)$$

Як видно рівняння каустики - є напівкубічна парабола В залежності від того, по яку сторону від каустики знаходиться джерело, кількість рішень може бути 1 або 3. Якщо джерело знаходиться всередині каустики, то рішення буде 3, якщо ззовні то 1.

В частковому випадку, коли  $y_2 = 0$ , тобто коли джерело лежить на осі

симетрії каспу маємо

$$x^{(1)} = \left( \frac{y_1}{c} \right) \quad (2.33)$$

$$x^{(2,3)} = \left( \frac{2ay_1}{2ac + b^2}, \pm \sqrt{-\frac{2by_1}{2ac + b^2}} \right) \quad (2.34)$$

Останні 2 кореня відповідають випадку коли число під коренем додатне, а фізично це означає що джерело знаходиться всередині каспу. Відповідно коефіцієнт підсилення

$$\mu^{(1)} = -\frac{1}{by_1} \quad (2.35)$$

$$\mu^{(2,3)} = -\frac{1}{2by_1} \quad (2.36)$$

У випадку, коли точка  $y_1$  наближується до збірки зсередини збірки, то  $x^{(1)}$  наближується до критичної кривої перпендикулярно, а  $x^{(2,3)}$  тангенціально та зливається воєдино, формально роблячи коефіцієнт підсилення нескінченним. У випадку коли ж  $y_1$  наближується ззовні, існує лише одне зображення.

## 2.2 Коефіцієнт підсилення точкового джерела в більш високих наближеннях

У дослідженнях гравітаційного мікролінзування важливу роль відіграє аналіз подій великого підсилення блиску спостережуваних джерел. Ці події пов'язані з пересіканням джерелам каустики, тобто області, де якобіан лінзового відображення дорівнює. З теорії диференційованих відображень відомо, що стійкими особливостями двовимірних відображень є лише складки та збірки. Це дозволяє застосувати для аналізу подій великого підсилення прості моделі, з невеликою кількістю параметрів. Ефекти лінзування поблизу складки та збірки можна

отримати, розкладаючи лінзовий потенціал в ряд Тейлора поблизу критичної кривої, також це допомагає знайти обернене відображення. Надалі будуть показані методи знаходження оберненого лінзового відображення поблизу критичної кривої, а також якобіан відображення та відповідно коефіцієнт підсилення.

Як вже казалось раніше, нормоване рівняння гравітаційного лінзування записується наступним чином:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + F_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= x_2 + F_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

де  $-F_i(x_1, x_2)$  - це похідні від лінзового потенціалу  $\psi(x_1, x_2)$ ,  $F_i(x_1, x_2) = \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_i}$ . Також виконується рівність  $\Delta \psi(x_1, x_2) = 2k$ , де  $k$  - нормована поверхнева густина гравітаційної лінзи. Зручно перейти до комплексного формалізму, це скорочує рівняння та спрощує запис. Якщо представити що  $v = y_1 + iy_2$ , а  $u = x_1 + ix_2$  рівняння гравітаційного лінзування можна записати наступним чином:

$$v(u, \bar{u}) = u + F(u, \bar{u}), \quad (2.37)$$

де  $F = F_1 + iF_2$ .

Як відомо, критична крива знаходиться як розв'язок рівняння

$$J(u_{cr}, \bar{u}_{cr}) = 0,$$

де  $J(u, \bar{u}) = \left| \frac{D(v, \bar{v})}{D(v, \bar{u})} \right|$  якобіан лінзового відображення. В загальному випадку якобіан  $J_f$  якогось комплексного відображення  $g = f(z, \bar{z})$  знаходиться за формулою:

$$J_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

Ми розглянемо випадок, коли нормована поверхнева густина гравітаційної лін-

зи дорівнює нулю  $k = 0$ . Це означає що присутністю матерії на полі зору спостерігача можна знехтувати. Враховуючи, що  $\Delta\psi(x_1, x_2) = \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial\bar{u}}$ , можна сказати що в такому випадку функція  $F(u, \bar{u})$  не залежить від змінної  $u$ , тобто є аналітичною функцією  $\bar{u}$ . Саме тому дуже зручно використовувати саме комплексний формалізм, так як якобін приймає значення:

$$J(\bar{u}) = 1 - \left| \frac{\partial F(\bar{u})}{\partial \bar{u}} \right|^2. \quad (2.38)$$

Отже рівняння критичної кривої можна представити у вигляді:

$$\left| \frac{dF(\bar{u})}{d\bar{u}} \right|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} = 1, \quad (2.39)$$

або, якщо переписати через параметризацію Вітта [10]:

$$\frac{dF(\bar{u})}{d\bar{u}} \Big|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} = e^{i\phi} \quad (2.40)$$

Каустика - це прообраз критичної кривої за допомогою лінзового відображення, тому рівняння каустики  $v_c$  знаходиться як:

$$v_c(\phi) = u_{cr}(\phi) + F(\bar{u}_{cr}(\phi)). \quad (2.41)$$

Як відомо з теорії диференційованих відображень, існує лише 2 типи стійких критичних особливостей, а саме складки та збірки. На каустиці складкам відповідають регулярні точки, а збіркам - вістря, так звані каспи. Ця робота зосереджується саме на розгляді складок, для збірок можна вивести все також, але це більш складна задача.

В загальному випадку одному положенню джерела  $v$  відповідає декілька зображень  $u_i$ , тому для кожного зображення коефіцієнт підсилення буде дорів-

нювати:

$$K_i(v) = \frac{1}{|J_i(\bar{u})|}. \quad (2.42)$$

Зазвичай при мікролінзуванні кут відхилення настільки маленький, що неможливо розділити декілька зображень, тому загальний коефіцієнт підсилення буде сумою

$$K(v) = \sum_i K_i(v) \quad (2.43)$$

Найбільш цікавими для розгляду є околиці каустик. Каустики - це області в площині джерела, які відокремлюють різну кількість зображень. Коли точкове джерело наближується до каустики зсередини, два зображення наближаються до критичної кривої, коефіцієнт підсилення формально прямує до нескінченності, а в момент перетину каустики, ці зображення зливаються та зникають. Надалі ці зображення називатимуться критичними зображеннями.

Один із підходів у вивченні околиці каустик полягає в тому, щоб перенести систему координат в окіл критичної кривої  $u_{cr}$ , та розкласти функцію в ряд Тейлора  $F(\bar{u})$ . Також систему координат можна зорієнтувати так, щоб вісь абсцис була дотичною до каустики, та відповідно вісь ординат перпендикулярною у точці  $v_c = u_{cr} + F(\bar{u}_{cr})$ . Якщо розкласти рівняння 2.37 в околиці критичної точки з точністю до квадратичних доданків то отримуємо:

$$v(u, \bar{u}) = u + F(\bar{u}_{cr}) + \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{u}} \right|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} (\bar{u} - \bar{u}_{cr}) + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}^2} \right|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} (\bar{u} - \bar{u}_{cr})^2.$$

Якщо тепер врахувати рівняння 2.40 та домножити все рівняння на  $e^{-i\frac{\phi}{2}}$  виходить наступний вираз:

$$(v - v_c)e^{-i\frac{\phi}{2}} = (u - u_{cr})e^{-i\frac{\phi}{2}} + (\bar{u} - \bar{u}_{cr})e^{i\frac{\phi}{2}} + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}^2} \right|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} (\bar{u} - \bar{u}_{cr})^2 e^{-i\frac{\phi}{2}}.$$

Тому зручно ввести заміни:  $\xi = (v - v_c)e^{-i\frac{\phi}{2}}$ ,  $z = (u - u_{cr})e^{-i\frac{\phi}{2}}$ , та нову функцію  $\Phi(\bar{z}) = e^{-i\frac{\phi}{2}} [F(\bar{u}_{cr} + \bar{z}e^{-i\frac{\phi}{2}}) - F(\bar{u}_{cr})]$ . В цих позначеннях лінзове відображення

2.37 приймає вигляд:

$$\xi = z + \Phi(\bar{z}), \quad (2.44)$$

та розклад в ряд Тейлора функції  $\Phi(\bar{z})$ :

$$\Phi(\bar{z}) = \bar{z} + A\bar{z}^2 + C\bar{z}^3 + E\bar{z}^4 + \dots \quad (2.45)$$

де

$$A = a + ib = \frac{1}{2!} e^{-\frac{3}{2}i\phi} F''(\bar{u}) \Big|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} \quad (2.46)$$

$$C = c + id = \frac{1}{3!} e^{-2i\phi} F'''(\bar{u}) \Big|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}} \quad (2.47)$$

$$E = e + if = \frac{1}{4!} e^{-\frac{5}{2}i\phi} F''''(\bar{u}) \Big|_{\bar{u}=\bar{u}_{cr}}. \quad (2.48)$$

Зрозуміло, що просто при трансляції та повороті системи координат якобіан не повинен змінюватися, тому він залишається:

$$J = 1 - |\Phi'(\bar{z})|. \quad (2.49)$$

Координати  $z$  та  $\xi$  називаються адаптованими координатами до точки на каустиці, а напрямок осей зазвичай вибирають так, щоб додатній напрямок осі  $y_2$  був напрямлений у випуклу сторону каустиці, це означає  $b < 0$ .

### 2.2.1 Уточнення асимптотичних формул поблизу складки

Визначення коефіцієнту підсилення за допомогою формули 2.42 потребує мати змогу обернути лінзове відображення 2.37, тобто для кожної координати зображення мати змогу вказати координату джерела, а особливо нас цікавить область, де якобіан обертається в нуль. Це обернення не є тривіальною задачею,

так як лінзове зображення є суттєво не бієктивною функцією, тобто для одного джерела може існувати декілька зображень. У роботі [11] було продемонстровано, що найпоширеніше "нульове"наближення не дає дає чисельно недостовірний результат вже в околі  $0.1R_E$ .

Проблема полягає не в тому, щоб отримати формулу, яка б асимптотично прямувала до точного результату, а в отриманні регулярної процедури, за допомогою якої можна було б отримати розв'язок з наперед заданою точністю [8].

Основу для застосування методу складають теореми, які сформульовані в роботі [12], які зокрема кажуть, що параметризації в площині джерела

$$y_1 = \beta t^2 \quad y_2 = \alpha t^2 \quad (2.50)$$

відповідають критичні розв'язки в площині зображень  $x_i(t)$ , які зокрема при при прямуванні до нуля ведуть себе як

$$x_1 \sim O(t^2) \quad x_2 \sim O(t). \quad (2.51)$$

Слід зазначити, що це далеко не єдиний можливий спосіб отримання цих формул.

Якщо виділити дійсну та уявну частину рівняння 2.44 та використати розклад 2.45 то можна отримати наступні вирази:

$$y_1 = 2x_1 + a(x_1^2 - x_2^2) + 2bx_1x_2 + c(x_1^3 - 3x_1x_2^2) - d(x_2^3 - 3x_2x_1^2) + gx_2^4 + \dots \quad (2.52)$$

$$y_2 = -b(x_1^2 - x_2^2) - 2ax_1x_2 + d(x_1^3 - 3x_1x_2^2) + c(x_2^3 - 3x_2x_1^2) + fx_2^4 + \dots \quad (2.53)$$

Для врахування малості окремих змінних потрібно формально зробити заміну:

$$y_1 \rightarrow y_1 t^2 \quad y_2 \rightarrow y_2 t^2 \quad (2.54)$$

$$x_1 \rightarrow x_1 t^2 \quad x_2 \rightarrow x_2 t. \quad (2.55)$$

Після скорочення на  $t^2$ , та обмежившись лише другою степінню по  $t$  отримується вираз:

$$y_1 = 2x_1 - ax_2^2 + t(2bx_1x_2 - dx_2^3) + t^2(ax_1^2 - 3cx_1x_2^2 + gx_2^4) \quad (2.56)$$

$$y_2 = -bx_2^2 + t(-2ax_1x_2 + cx_2^3) + t(bx_1^2 - 3dx_1x_2^2 + fx_2^4) \quad (2.57)$$

Наближений розв'язок буде шукатися підстановкою:

$$x_1 = x_{10} + x_{11}t + x_{12}t^2 \quad x_2 = x_{20} + x_{21}t + x_{22}t^2. \quad (2.58)$$

Підставляючи цей розклад у рівняння 2.57, та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $t$ , виходить:

$$x_{20} = \epsilon \sqrt{-\frac{y_2}{b}}. \quad (2.59)$$

Тут  $\epsilon$  множник що приймає 2 значення  $+1$  та  $-1$ , відповідно для двох різних критичних зображень. Ці розв'язки існують лише для області  $y_2 > 0$ , так як  $b < 0$ . Цей розв'язок є нульовим наближенням, тобто виконується тоді, коли каустика апроксимується прямою. Далі

$$x_{10} = \frac{1}{2} \left( y_1 - \frac{a}{b} y_2 \right)$$

У першому наближенні виходить:

$$x_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - c}{b^2} y_2 - \frac{a}{b} y_1 \right)$$

та

$$x_{11} = -\epsilon \sqrt{\frac{y_2}{b}} \frac{(ac - aR^2 + bd)y_2 + bR^2 y_1}{2b^2},$$

де введено позначення  $R^2 = a^2 + b^2$ .

У другому наближенні:

$$x_{22} = \epsilon \sqrt{-\frac{y_2}{b}} \left[ \frac{10a^2c - 5c^2 - 5a^2R^2 + 10abd + 4bf}{8b^3} y_2 - \frac{3ac + bd - aR^2}{4b^2} y_1 - \frac{R^2 y_1^2}{8by_2} \right].$$

Цікаво зазначити, що останній доданок прямує до нескінченності при  $y_2 \rightarrow 0$

$$x_{12} = \frac{3a^5 + 5a^3b^2 + 2ab^4 - 2b^3d - 2b^2g + 3ac^2 - 6a^3c + 3bcd - 8a^2bd + 2bf}{4b^4} y_2^2 + \frac{2a^2c - b^2c + 3abd - 2a^2R^2 - b^2R^2}{2b^3} y_1 y_2 + \frac{aR^2}{4b^2} y_1^2$$

Тепер для якобіана в координатах площини джерела  $J(z_i(\xi), \bar{z}_i(\xi))$  з точністю до  $t^3$ :

$$J_\epsilon = 4t^2 \frac{(R^2 - c)}{b} y_2 + \epsilon 4t \sqrt{-by_2} \left\{ 1 + \frac{t^2}{8b} \left[ \frac{7a^2R^2 - 8cR^2 + 7c^2 - 6a^2c - 30abd + 25b^2c}{b^2} - 6 \frac{a(R^2 - c) - bd}{b} y_1 - R^2 \frac{y_1^2}{y_2} \right] \right\} \quad (2.60)$$

Для знаходження коефіцієнту підсилення потрібно обернути якобіан для кожного  $\epsilon$  та додати, тобто

$$K = \frac{1}{|J_{+1}|} + \frac{1}{|J_{-1}|}$$

Обертати кожний якобіан потрібно розкладанням в ряд функції  $\frac{1}{1-x}$ , тобто:

$$\frac{1}{|J|} = \frac{1}{|J_0 + \Delta J|} = \frac{1}{J_0 |1 + \frac{\Delta J}{J_0}|} = \frac{1}{J_0} \left( 1 - \frac{\Delta J}{J_0} + \left( \frac{\Delta J}{J_0} \right)^2 - \left( \frac{\Delta J}{J_0} \right)^3 + \dots \right).$$

Фінально, використовуючи цей розклад отримуємо:

$$K = \frac{1}{2} \frac{\Theta(y_2)}{\sqrt{|b|y_2}} \left\{ 1 - \frac{1}{8b} \left[ \frac{15a^4 + 23a^2b^2 + 8b^4 - 30ac + 15c^2 - 30abd + 12bf}{b^2} y_2 - 6 \frac{a(R^2 - c) - bd}{b} y_1 - R^2 \frac{y_1^2}{y_2} \right] \right\}.$$

Тут  $\Theta(y_2)$  введена функція Хевісайда, для того щоб формально поширити формулу на випадок від'ємних значень  $y_2$ . Ця формула може буде переписана більш компактно, якщо побачити, що можна виділити лише декілька незалежних констант біля змінних:

$$K_{cr} = \frac{1}{2} \frac{\Theta(y)}{\sqrt{|b|y_2}} [1 + Py_2 + Qy_1] - \frac{\kappa}{8} \frac{y_1^2}{\sqrt{|b|}} (y_2)_+^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.61)$$

Підсумовуючи скажемо, що наведена формула описує коефіцієнт підсилення критичних зображень для точкового джерела. На каустиці ця формула формально обертається в нескінченість, але слід розуміти, що в природі не існує точкового джерела і це лише математичне наближення. Для реального, протяжного джерела цю формулу слід декілька змінити, що буде описано потім.

### 2.3 Лінза Чанга-Рефсдала

Лінза Чанга-Рефсдала є однією з багатьох існуючих моделей, які описують поведінку ГЛС, тобто описує потенціал  $\psi(x_1, x_2)$  у рівнянні гравітаційного лінзування. Лінза Чанга-Рефсдала була запропонована для опису лінзового ефекту зірок в оточуючій їх галактиці. Зірка поводить себе як точкова маса, а зовнішня галактика вважається збуренням до гравітаційного поля зірки. Лінза Чанга Рафсдала знайшла широке застосування в астрономії, так як окрім вражаючих фізичних властивостей, вона володіє досить елегантними математичними співвідношеннями [13].

Можна легко отримати рівняння лінзи Чанга-Рефсдала з наступних міркувань. Будемо вважати що в нас 2 лінзи, одна "маленька"зірка, а друга "велика"галактика, яка в свою чергу знаходиться на якийсь відстані  $\xi'$  від початку координат. Тоді кут відхилення променя можна записати наступним чином:

$$\alpha(\xi) = \frac{4Gm}{c^2} \frac{\xi}{|\xi|^2} + \frac{4GM}{c^2} \frac{\xi - \xi'}{|\xi - \xi'|^2}$$

Теперь, якщо вважати, що  $\xi' \gg \xi$  можна розкласти цей вираз в ряд по малому параметру  $\frac{\xi}{\xi'}$  використовуючи наступну формулу:

$$f(\xi' - \xi) = f(\xi') - (\xi \cdot \nabla f(\xi')).$$

В результаті отримуємо розкладений в ряд кут відхилення:

$$\alpha(\xi) = \frac{2R_s \xi}{\xi^2} - \mu \frac{2R_s \xi'}{(\xi')^2} + \mu \frac{2R_s \xi}{(\xi')^2} - \mu \frac{4R_s \xi' (\xi' \cdot \xi)}{(\xi')^4}$$

Та рівняння гравітаційного лінзування:

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - D_{ds} \frac{2R_s \xi}{\xi^2} + D_{ds} \mu \frac{2R_s \xi'}{(\xi')^2} + D_{ds} \mu \frac{2R_s \xi}{(\xi')^2} - D_{ds} \mu \frac{4R_s \xi' (\xi' \cdot \xi)}{(\xi')^4}. \quad (2.62)$$

Не дивлячись на те, що було додано лише 1 додаткову масу, саме рівняння значно ускладнилось, з'явився постійний член  $D_{ds}\mu\frac{2R_s\xi'}{(\xi')^2}$  та вектор  $\xi'$ . Тепер, якщо представити що  $\eta$  - це реальне положення джерела, зображення  $\xi$  не лежить на одній прямій яка з'єднує центри гравітаційної лінзи та джерела.

Нормується це рівняння наступним чином:

$$\mathbf{y} = \frac{\eta}{R_E} \frac{D_d}{D_s} + \mu \frac{D_{ds} D_D}{R_E D_s} \frac{2R_s \xi'}{(\xi')^2}; \quad \mathbf{x} = \frac{\xi}{R_E},$$

де нормований радіус Ейнштейна-Хвольсона  $R_E^2 = 4GM D_{ds} D_d / (c^2 D_s)$ . І відповідно нормоване рівняння гравітаційного лінзування для лінзи Чанга-Рефсдала записується наступним чином:

$$y_1 = (1 - \gamma)x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (2.63)$$

$$y_2 = (1 + \gamma)x_2 - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.64)$$

Тут  $\gamma = \mu(R_E/|\xi'|^2)$  - параметр, який характеризує вплив другої маси на гравітаційне поле зірки, та називається шир (*shear*). Але більш компактно використовувати комплексний запис  $w = y_1 + iy_2$  та  $u = x_1 + ix_2$  тоді рівняння можна записати так:

$$w = u - \gamma \bar{u} - \frac{1}{\bar{u}}. \quad (2.65)$$

Потрібно відмітити, що в цьому рівнянні виконується вимога, щоб не було маси на полі зору зору спостерігача, тобто щоб функція  $F(u, \bar{u})$  із рівняння 2.37 залежала лише від  $\bar{u}$ .

Якобіан цього відображення подається співвідношенням[14] :

$$J = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} - \frac{\partial w}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial u} = 1 - \left| \frac{1}{u^2} - \gamma \right| \quad (2.66)$$

### 2.3.1 Критичні криві та каустики лінзи Чанга-Рефсдала

Критична крива та каустика, це області де якобіан обертається в нуль, відповідно в площині лінзи та площині джерела. Якщо використати параметризацію Віта, якобіан знайдений у 2.66, то рівняння  $J = 0$  запишеться наступним чином:

$$\frac{1}{u_c^2} - \gamma = e^{2i\phi} \quad \rightarrow \quad u_c^2 = \frac{e^{2i\phi}}{1 + \gamma e^{2i\phi}}. \quad (2.67)$$

Для того щоб отримати рівняння критичної кривої потрібно взяти квадратний корінь з цього виразу, але діяти потрібно обережно, так як очевидно, результат буде залежати від величини  $\gamma$ . Так для  $0 < \gamma < 1$  маємо параметричне представлення критичної кривої:

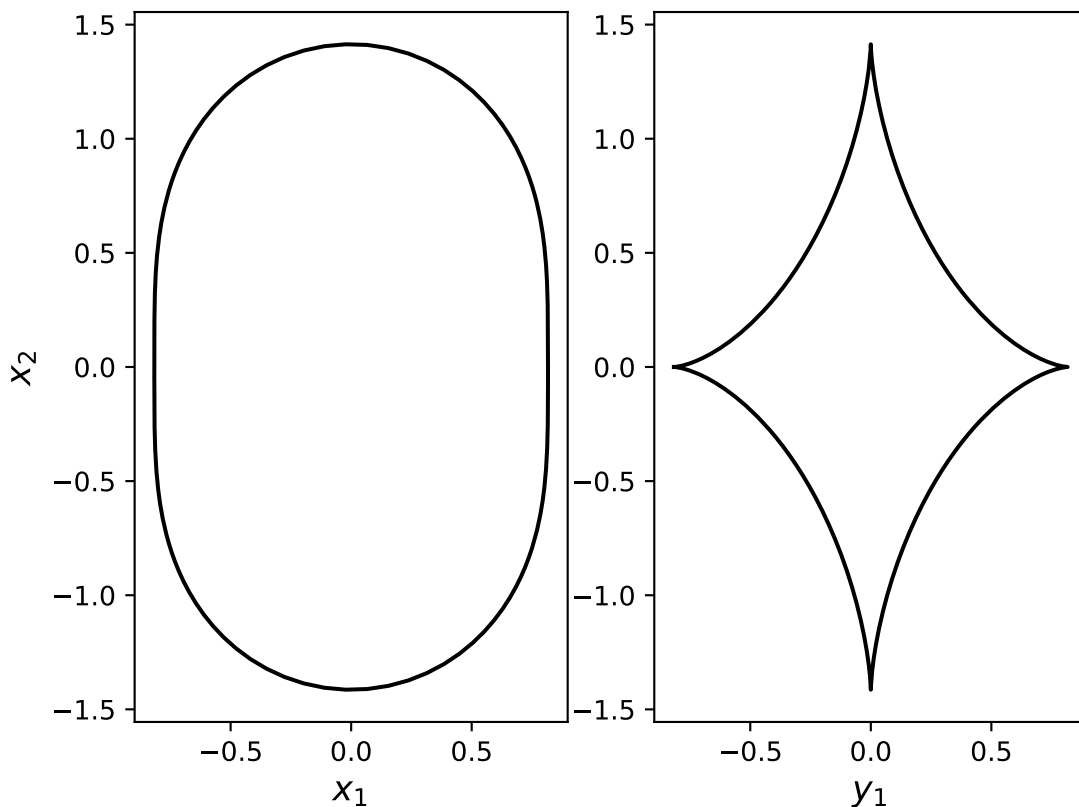


Рисунок 2.3 — Зліва критична крива, справа каустика для  $\gamma = 0.5$

$$u_c = \frac{e^{i\phi}}{(1 + \gamma e^{2i\phi})^{1/2}}, \quad (2.68)$$

і для  $\gamma > 1$ :

$$u_c = \pm \frac{e^{i\phi}}{(\gamma + e^{-2i\phi})^{1/2}}. \quad (2.69)$$

Рівняння каустики буде знаходитись відображенням критичної кривої за допомогою лінзового відображення 2.65.

$$w_c(\phi) = u_c(\phi) - \frac{1}{\bar{u}_c(\phi)} - \gamma \bar{u}_c(\phi). \quad (2.70)$$

Якщо ж підставити параметричне рівняння критичної кривої 2.68 та 2.69 то отримуємо:

$$w_c(\phi) = e^{i\phi} \left[ \frac{1}{(1 + \gamma e^{2i\phi})^{1/2}} - \frac{1 + 2\gamma e^{-2i\phi}}{(1 + \gamma e^{-2i\phi})^{1/2}} \right] \quad (2.71)$$

для  $0 < \gamma < 1$ , та

$$w_c(\phi) = \pm \left[ \frac{1}{(\gamma + e^{-2i\phi})^{1/2}} - \frac{2\gamma + e^{2i\phi}}{(\gamma + e^{2i\phi})^{1/2}} \right] \quad (2.72)$$

для  $\gamma > 1$ . Слід сказати, що критичні криві та каустики це параметричні само-замкнуті криві, в яких  $\phi \in [0, 2\pi)$  для випадку  $0 < \gamma < 1$ , в той час як для  $\gamma > 1$  є 2 симетричні відзеркалені криві в з параметром  $\phi \in [0, \pi)$ .

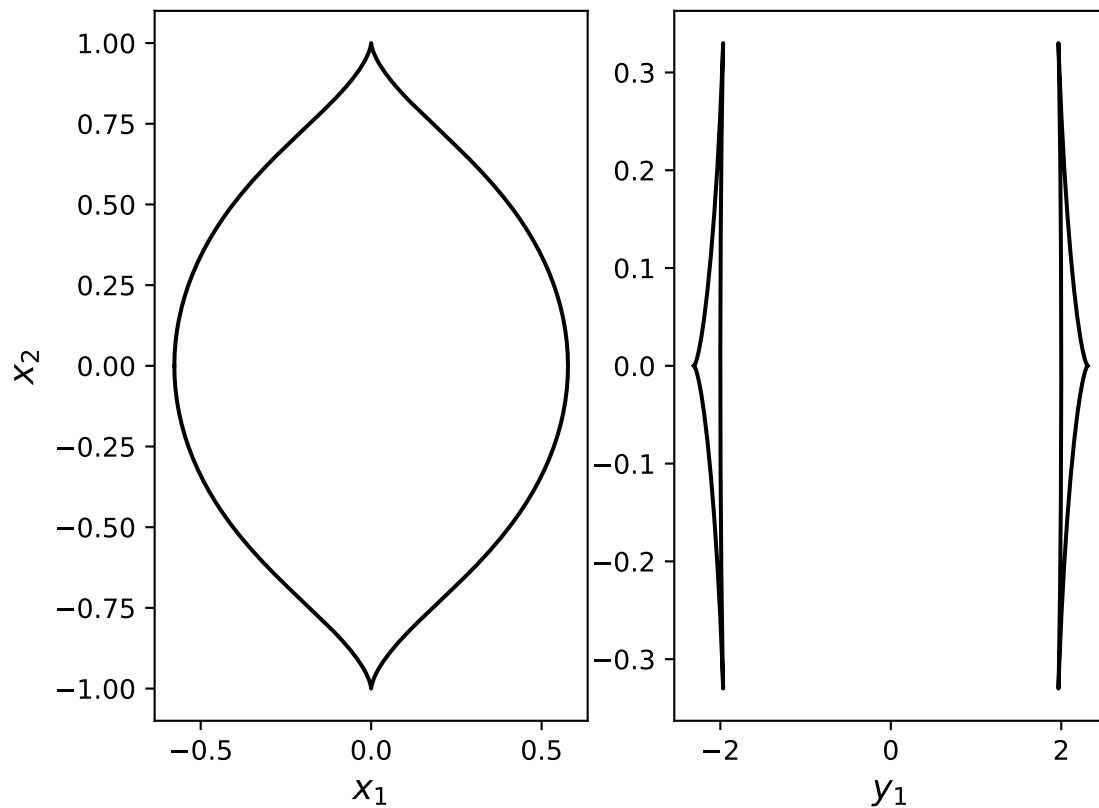


Рисунок 2.4 — Зліва критична крива, справа каустика для  $\gamma = 2$

На рисунках 2.3 та 2.4 зображені критичні криві та каустики які відповідають наведеним вище рівнянням. Цікаво, що 2 у випадку, коли  $\gamma > 1$  каустика розділилася на 2 половинки. Критична крива у випадку  $0 < \gamma < 1$  називається овалами Касіні, а якщо наприклад  $\gamma \ll 1$  невелике, то можна для критичної кривої запропонувати більш простий параметричний вигляд, а саме:

$$y_1 = \frac{2\gamma}{1+\gamma} \cos^3 \phi \quad y_2 = -\frac{2\gamma}{1+\gamma} \sin^3 \phi.$$

### 3 РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

#### 3.1 Виведення формули для коефіцієнту підсилення

Виходячи с задачі дипломної роботи, потрібно аналітично порахувати сумарний критичний коефіцієнт підсилення  $K_{cr,tot}$  для джерела, яке має еліптичний гаусівський розподіл яскравості. Згідно з формули [ тут посилання] потрібно порахувати інтеграл

$$K_{cr,tot}(Y_c) = \frac{\iint K_{cr}(\mathbf{y})B(\mathbf{y},Y_c)dy_1dy_2}{\iint B(\mathbf{y},Y_c)dy_1dy_2}. \quad (3.1)$$

Тут  $B(y,Y_c)$  - еліптичний гаусівський розподіл яскравості джерела. Коефіцієнт підсилення точкового джерела  $K_{cr}(\mathbf{y})$  згідно з [8] задається наступною формулою:

$$K_{cr} = \frac{1}{2\sqrt{|b|y_2}} \Theta(y) [1 + Py_2 + Qy_1] - \frac{\kappa}{8\sqrt{|b|}} (y_2)_+^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.2)$$

де  $y_1$  та  $y_2$  відповідно паралельна та перпендикулярна координата відносно каустики,  $\Theta(y)$  – функція Хевісайда,  $P$ ,  $Q$ ,  $\kappa$ ,  $b$  коефіцієнти, які виражаються через члени тейлорівського розкладу потенціалу відображення в околі каустики;  $(y_2)_+^{-\frac{3}{2}}$  – є узагальненою функцією яка визначається наступною рівністю:

$$\int (y)_+^{-\frac{3}{2}} f(y) dy = 2 \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial f(y)}{\partial y} dy .$$

У власній системі координат, тобто у такій системи, де еліпс лежить у початку координат, та декартові осі паралельні півосям еліпса, розподіл яскравості запишеться як:

$$B(\mathbf{u}) = \exp \left\{ - \left[ \frac{u_1^2}{\tilde{a}^2} + \frac{u_2^2}{\tilde{b}^2} \right] \right\} . \quad (3.3)$$

Тут  $\tilde{a}$  та  $\tilde{b}$  відповідно велика та мала півосі еліпсу.

Осі координат  $\mathbf{y}$ , початок яких лежить на каустиці пов'язані з власними координатами еліпса так, що осі  $\mathbf{z}$  повернуті на кут  $\theta$  та зміщені у точку  $Y_c$ . Тоді у координатах  $\mathbf{y}$  розподіл яскравості запишеться наступним чином:

$$B(\mathbf{y}) = \exp \left\{ - \left[ A(\Delta y_1)^2 + 2B\Delta y_1\Delta y_2 + C(\Delta y_2)^2 \right] \right\}, \quad (3.4)$$

де  $\Delta y_i = y_i - Y_{ci}$ ;  $A, B, C$  - параметри нового повернутого еліпса, які легко перерахувати з маленької та великої півосей еліпса, та його кута нахилу і відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 \theta}{\tilde{a}^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\tilde{b}^2}, \\ B &= \cos \theta \sin \theta \left( \frac{1}{\tilde{a}^2} - \frac{1}{\tilde{b}^2} \right), \\ C &= \frac{\sin^2 \theta}{\tilde{a}^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\tilde{b}^2}, \end{aligned}$$

Внаслідок інваріантності сліду і визначника матриці, що утворена коефіцієнтами квадратичної форми, маємо:

$$A + C = \frac{1}{\tilde{a}^2} + \frac{1}{\tilde{b}^2}; \quad AC - B^2 = \frac{1}{\tilde{a}^2\tilde{b}^2}$$

Очевидно, що нелінзований потік від джерела, тобто інтеграл у знаменнику формули 3.1 не залежить ні від розташування  $Y_c$ , ні від заміни координат  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}$ , тому може буде обрахований у власній системі координат,

$$F_0 = \iint_{R^2} B(\mathbf{y}, Y_c) dy_1 dy_2 = \iint_{R^2} B(\mathbf{z}) dz_1 dz_2.$$

Підставляючи розподіл яскравості 3.3, бачимо що це двовимірний гаусів інте-

грал і отримуємо:

$$F_0 = \iint_{R^2} \exp \left\{ - \left[ \frac{u_1^2}{\tilde{a}^2} + \frac{u_2^2}{\tilde{b}^2} \right] \right\} = \pi \tilde{a} \tilde{b}. \quad (3.5)$$

Вирішення задачі зводиться до підрахунку інтеграла у чисельнику формулу 3.1.

Цей вираз можна дещо спростити записавши у вигляді

$$K_{cr} = \frac{1}{2\pi \tilde{a} \tilde{b}} \frac{1}{\sqrt{|b|}} \left[ J_{0,-1/2} + PJ_{0,1/2} + QJ_{1,-1/2} + \right. \\ \left. + \kappa \left[ BJ_{3,-1/2} + CJ_{2,1/2} - (By_{c1} + Cy_{c2}) J_{2,-1/2} \right] \right]. \quad (3.6)$$

Тут

$$\tilde{J}_{k,\alpha} = A^{-\frac{k+1}{2}} C^{-\frac{\alpha+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} z_1^k dz_1 \int_0^{\infty} z_2^\alpha e^{-[(\Delta z_1)^2 + 2\frac{B}{\sqrt{AC}}(\Delta z_1)(\Delta z_2) + (\Delta z_2)^2]} dz_2. \quad (3.7)$$

Тобто задачу звелась до підрахунку декількох інтегралів типу  $\tilde{J}_{k,\alpha}$

### 3.2 Виведення інтегралів типу $\tilde{J}_{k,\alpha}$

По-перше слід привести список усіх допоміжних інтегралів які будуть використовуватися у виводі  $\tilde{J}_{k,\alpha}$ , а саме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+\alpha x} dx = \sqrt{\pi} \exp \frac{\alpha^2}{4} \quad (3.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2+\alpha x} dx = \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{2} \exp \frac{\alpha^2}{4} \quad (3.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2+\alpha x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2 + \alpha^2) \exp \frac{\alpha^2}{4} \quad (3.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2+\alpha x} dx = \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{8} (6 + \alpha^2) \exp \frac{\alpha^2}{4} \quad (3.11)$$

Також, лінзований потік буде виражений через спеціальні невласні інтеграли  $I_k(h)$ , які визначаються як:

$$I_k(h) = e^{-h^2} \int_0^{\infty} u^{k-1/2} \exp(-u^2 + 2uh) du. \quad (3.12)$$

Функції  $I_k(h)$  не є незалежними для всіх  $k$ . Інтегруючи частинами, Можна виразити усі функції  $I_k(h)$ ,  $k > 2$  тільки через  $I_0(h)$  та  $I_1(h)$  наступним чином:

$$I_2(H) = \frac{1}{4} I_0(H) + H I_1(H) \quad (3.13)$$

$$I_3(H) = \left(\frac{3}{4} + H^2\right) I_1(H) + \frac{1}{4} H I_0(H) \quad (3.14)$$

В свою чергу  $I_k(h)$  можна виразити через функції парабалічного циліндра [15].

Перші 3 найпростіші інтеграли,  $J_{0,-1/2}$ ,  $J_{0,1/2}$ ,  $J_{1,-1/2}$ , не потребують виводу та отримуються одразу із означення:

$$J_{0,1/2} = A^{-1/2} C^{-3/4} \sqrt{\pi} \frac{e^{-H^2}}{D^{3/4}} I_1(H) \quad (3.15)$$

$$J_{0,-1/2} = A^{-1/2}C^{-1/4}\sqrt{\pi}\frac{e^{-H^2}}{D^{1/4}}I_0(H) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} J_{1,-1/2} &= A^{-1}C^{-1/4}\sqrt{\pi}\frac{e^{-H^2}}{D^{3/4}}\{I_0(H)(S + \Lambda H) - I_1(H)\Lambda\} = \\ &= A^{-1}C^{-1/4}\sqrt{\pi}\frac{e^{-H^2}}{D^{3/4}}\{SI_0(H) + \Lambda I_2(H)\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

З іншими буде трохи складніше.

**Вивід інтегралу  $J_{2,-1/2}$ .**

За означенням:

$$J_{2,-1/2} = A^{-3/2}C^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} z_1^2 dz_1 \int_0^{\infty} \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-[\Delta z_1^2 + 2\Lambda\Delta z_1\Delta z_2 + \Delta z_2^2]} \quad (3.18)$$

змінимо порядок інтегрування, та зробимо заміну  $\Delta z_1 \equiv z_1 - s = x$ , тоді  $z_1 = x + s$

$$J_{2,-1/2} = A^{-3/2}C^{-1/4} \int_0^{\infty} \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x + s)^2 e^{-x^2 - 2\Lambda\Delta z_2 x} \quad (3.19)$$

Розкриваючи дужки отримуємо вираз

$$J_{2,-1/2} = A^{-3/2}C^{-1/4} \int_0^{\infty} \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x^2 + 2xs + s^2) e^{-x^2 - 2\Lambda\Delta z_2 x} \quad (3.20)$$

Далі потрібно використати відповідні допоміжні інтеграли 3.11

В нашому випадку  $\alpha = -2\Lambda\Delta z_2$

$$J_{2,-1/2} = A^{-3/2}C^{-1/4} \int_0^{\infty} \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x^2 + 2xs + s^2) e^{-x^2 - 2\Lambda\Delta z_2 x}$$

$$J_{2,-1/2} = A^{-3/2}C^{-1/4}\sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2(1-\Lambda^2)} \left\{ \frac{1}{4}(2 + 4\Lambda^2\Delta z_2^2) - \frac{2s}{2}2\Lambda\Delta z_2 + s^2 \right\}$$

Тепер треба згадати що  $\Delta z_2 = z_2 - h$  та сгрупувати доданки у фігурних дужках по степенях  $z_2$  випишемо їх окремо

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{4}(2 + 4\Lambda^2\Delta z_2^2) - \frac{2s}{2}2\Lambda\Delta z_2 + s^2 \right\} &= \frac{1}{2} + \Lambda^2(z_2^2 - 2z_2h + h^2) - 2s\Lambda(z_2 - h) + s^2 = \\ &= z_2^2\Lambda^2 - 2z_2\Lambda(h\Lambda + s) + \left(\frac{1}{2} + (s + h\Lambda)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{2,-1/2} &= A^{-3/2}C^{-1/4}\sqrt{\pi}e^{-h^2D} \left\{ \Lambda^2 \int_0^\infty dz_2 z_2^{3/2} e^{(-z_2^2+2z_2h)D} - \right. \\ &\quad \left. - 2\Lambda(h\Lambda + s) \int_0^\infty dz_2 z_2^{1/2} e^{(-z_2^2+2z_2h)D} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + (h\Lambda + s)^2\right) \int_0^\infty dz_2 z_2^{-1/2} e^{(-z_2^2+2z_2h)D} \right\} \end{aligned}$$

Тепер, щоб перейти до інтегралів виду

$$I_k(h) = \int_0^\infty u^{k-1/2} \exp(-u^2 + 2uh) du$$

потрібно зробити заміну змінних  $z_2\sqrt{D} = x$ ,  $h\sqrt{D} = H$ ,  $s\sqrt{D} = S$

$$J_{2,-1/2} = \frac{A^{-3/2}C^{-1/4}}{D^{5/4}} \sqrt{\pi} e^{-h^2D} \left\{ I_2(H)\Lambda^2 - I_1(H)2\Lambda(H\Lambda + S) + I_0(H)\left(\frac{1}{2}D + (H\Lambda + S)^2\right) \right\}$$

потрібно виразити функцію  $I_2(H)$  через  $I_0(H)$  та  $I_1(H)$  використовуюч 3.13

В результаті запишемо

$$J_{2,-1/2} = \frac{A^{-3/2}C^{-1/4}}{D^{5/4}}\sqrt{\pi}e^{-H^2}\left\{I_0(H)\left[\frac{1}{2}D + (H\Lambda + S)^2 + \frac{1}{4}\Lambda^2\right] + I_1(H)[H\Lambda^2 - 2\Lambda(H\Lambda + S)]\right\}$$

Та остаточно

$$J_{2,-1/2} = \frac{A^{-3/2}C^{-1/4}}{D^{5/4}}\sqrt{\pi}e^{-H^2}\left\{I_0(H)\left[\frac{1}{2} + (S + H\Lambda)^2 - \frac{1}{4}\Lambda^2\right] - I_1(H)\Lambda[H\Lambda + 2S]\right\}.$$

**Вивід інтегралу  $J_{3,-1/2}$ .**

$$J_{3,-1/2} = A^{-2}C^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty}z_1^3dz_1\int_0^{\infty}\frac{dz_2}{\sqrt{z_2}}e^{-[\Delta z_1^2+2\Lambda\Delta z_1\Delta z_2+\Delta z_2^2]}$$

змінюючи порядок інтегрування, та роблячи заміну  $\Delta z_1 \equiv z_1 - s = x$ , тоді  $z_1 = x + s$

$$J_{3,-1/2} = A^{-2}C^{-1/4}\int_0^{\infty}\frac{dz_2}{\sqrt{z_2}}e^{-\Delta z_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx(x+s)^3e^{-x^2-2\Lambda\Delta z_2x}$$

Використовуючи усі формули 3.11 обчислимо інтеграл всередині

$$J_{3,-1/2} = A^{-2}C^{-1/4}\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dz_2}{\sqrt{z_2}}e^{-\Delta z_2^2D}\left\{-\Lambda\Delta z_2\left(\frac{12}{8}+\frac{8}{8}\Lambda^2\Delta z_2^2\right)+3s\left(\frac{1}{2}+\Lambda^2\Delta z_2^2\right)-3s^2\Lambda\Delta z_2+s^3\right\}$$

Сгрупуємо по степеням  $\Delta z_2$

$$J_{3,-1/2} = A^{-2}C^{-1/4}\sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2 D} \left\{ -\Lambda^3 \Delta z_2^3 + 3s\Lambda^2 \Delta z_2^2 - 3\Lambda\left(\frac{1}{2} + s^2\right)\Delta z_2 + \frac{3}{2}s + s^3 \right\}$$

розкриваючи, що  $\Delta z_2 = (z_2 - h)$

$$J_{3,-1/2} = A^{-2}C^{-1/4}\sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2 D} \left\{ -\Lambda^3(z_2^3 - 3z_2^2 h + 3z_2 h^2 - h^3) + \right. \\ \left. + 3s\Lambda^2(z_2^2 - 2z_2 h + h^2) - 3\Lambda\left(\frac{1}{2} + s^2\right)(z_2 - h) + \frac{3}{2}s + s^3 \right\}$$

групуємо по степеням  $z_2$

$$J_{3,-1/2} = A^{-2}C^{-1/4}\sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{dz_2}{\sqrt{z_2}} e^{-\Delta z_2^2 D} \left\{ -\Lambda^3 z_2^3 + z_2^2 [3\Lambda^3 h + 3s\Lambda^2] - \right. \\ \left. - z_2 \left[ 3\Lambda^3 h^2 + 6s\Lambda^2 h + 3\Lambda\left(\frac{1}{2} + s^2\right) \right] + \Lambda^3 h^3 + 3s\Lambda^2 h^2 + 3\Lambda\left(\frac{1}{2} + s^2\right)h + \frac{3}{2}s + s^3 \right\}$$

Перетворюючи вираз через інтеграли  $I_k(H)$

$$J_{3,-1/2} = \frac{A^{-2}C^{-1/4}}{D^{7/4}} \sqrt{\pi} e^{-H^2} \left\{ -\Lambda^3 I_3(H) + I_2(H)3\Lambda^2 [\Lambda H + S] - \right. \\ \left. - I_1(H)3\Lambda \left[ (\Lambda H + S)^2 + \frac{1}{2}D \right] + \right. \\ \left. + I_0(H) \left[ (\Lambda H)^3 + 3S(\Lambda H)^2 + 3\Lambda\left(\frac{1}{2}D + S^2\right)H + \frac{3}{2}SD + S^3 \right] \right\}$$

можна трішки спростили вираз і виділити куб суми у множнику біля  $I_0(H)$

$$J_{3,-1/2} = \frac{A^{-2}C^{-1/4}}{D^{7/4}} \sqrt{\pi} e^{-H^2} \left\{ -\Lambda^3 I_3(H) + I_2(H)3\Lambda^2 [\Lambda H + S] - \right. \\ \left. - I_1(H)3\Lambda \left[ (\Lambda H + S)^2 + \frac{1}{2}D \right] + I_0(H) \left[ (\Lambda H + S)^3 + \frac{3}{2}D(\Lambda H + S) \right] \right\}$$

Замінивши  $I_3(H)$  та  $I_2(H)$  через  $I_1(H)$  та  $I_0(H)$  використовуючи формули 3.13, 3.14

$$J_{3,-1/2} = \frac{A^{-2}C^{-1/4}}{D^{7/4}} \sqrt{\pi} e^{-H^2} \left\{ -\Lambda^3 \left[ \left( \frac{3}{4} + H^2 \right) I_1(H) + \frac{H}{4} I_0(H) \right] + \right. \\ \left. + 3\Lambda^2 (\Lambda H + S) \left[ \frac{1}{4} I_0(H) + H I_1(H) \right] - \right. \\ \left. - I_1(H) 3\Lambda \left[ (\Lambda H + S)^2 + \frac{1}{2} D \right] + I_0(H) \left[ (\Lambda H + S)^3 + \frac{3}{2} D (\Lambda H + S) \right] \right\}$$

Групуємо доданки біля  $I_0, I_1$

$$J_{3,-1/2} = \frac{A^{-2}C^{-1/4}}{D^{7/4}} \sqrt{\pi} e^{-H^2} \left\{ I_1(H) \left[ -\Lambda^3 \left( \frac{3}{4} + H^2 \right) + 3\Lambda^2 H (\Lambda H + S) - \right. \right. \\ \left. \left. - 3\Lambda \left( [\Lambda H + S]^2 + \frac{1}{2} D \right) \right] + \right. \\ \left. + I_0(H) \left[ (\Lambda H + S)^3 + \frac{3}{2} D (\Lambda H + S) - \Lambda^3 \frac{H}{4} + \frac{1}{4} 3\Lambda^2 (\Lambda H + S) \right] \right\}$$

Фінально розкриваючи дужки та приводячі подібні доданки:

$$J_{3,-1/2} = \frac{A^{-2}C^{-1/4}}{D^{7/4}} \sqrt{\pi} e^{-H^2} \left\{ I_1(H) \left[ \frac{3}{4} \Lambda^3 - \frac{3}{2} \Lambda - \Lambda^3 H^2 - 3\Lambda S (\Lambda H + S) \right] + \right. \\ \left. + I_0(H) \left[ (\Lambda H + S)^3 + (\Lambda H + S) \frac{3}{4} (2 - \Lambda^2) - \frac{\Lambda^3 H}{4} \right] \right\} \quad (3.21)$$

### 3.2.1 Формула для коефіцієнта підсилення еліптичного джерела

Якщо звести всі отримані доданки, та підставити у формулу (3.6) отримуємо остаточну формулу для коефіцієнту підсилення еліптичного джерела.

$$K_{cr} = \frac{(CD)^{1/4}}{2\sqrt{\pi|b|}} \left[ \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{CD}} \left( P\Phi_1 + Q\sqrt{\frac{C}{A}} \{s\Phi_0 + \Lambda\Phi_2\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa \frac{C}{A} \left\{ \Phi_2 \left[ \frac{3}{4}\Lambda^2 - (h\Lambda + s)^2 - \frac{1}{2} \right] + \Phi_0 \left[ \frac{h}{4}\Lambda^2 + \frac{1}{2}s\Lambda \right] \right\} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Тут  $\Phi_{0,1}(h) = e^{-h^2} I_{0,1}(h)$ ,  $\Phi_2(h) = h\Phi_0(h) - \Phi_1(h)$ .

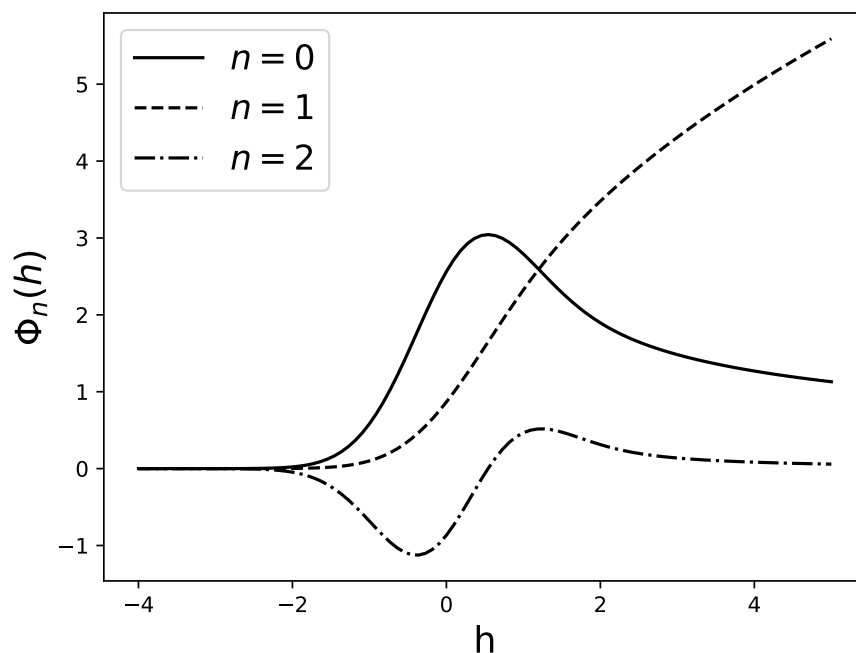


Рисунок 3.1 — Окремі складові рівняння 3.22

Ця формула переходить у формулу, отриману у статі [7], якщо із еліпса утворити коло радіусу  $L$  такої ж загальної світності як і еліпс, тобто  $\tilde{a} = \tilde{b} = L$ ,  $A = C = \frac{1}{L^2}$ ,  $B = \Lambda = 0$ .

Перший доданок формули (3.22) відповідає нульовому наближенню, яке не враховує поправок у розкладі для коефіцієнта підсилення точкового джере-

ла, але вже навіть воно відрізняється від аналогічного для колового джерела. Вся формула (3.22) містить незалежно множники які характеризують велику та маленьку піввісь еліпса.

Поведінку окремих компонент формули (3.22) подано на (рис. 3.1).

Зазначимо, що при  $h < -2$  всі функції швидко прямують до нуля, а при  $h > 3$  виходять на асимптоти [7]:

$$\begin{aligned}\Phi_0(h) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{h}}, \\ \Phi_1(h) &\rightarrow \sqrt{\pi h}, \\ \Phi_2(h) &\rightarrow \frac{1}{4h} \sqrt{\frac{\pi}{h}}.\end{aligned}$$

Якщо вважати що джерело рухається прямолінійно та рівномірно, тобто  $s = v_1 t$ ,  $h = v_2 t$  виходить що  $s = \frac{v_2}{v_1} h$ . Якщо підставити у формулу (3.22), то коефіцієнт підсилення стає лише функцією від  $h$  та є змога його записати у наступному вигляді:

$$K_{cr,tot}(h) = M [K_0 \Phi_0 + K_1 \Phi_1 + K_2 h \Phi_0 + K_3 h^2 \Phi_2]. \quad (3.23)$$

Тут

$$\begin{aligned}M &= \frac{(C\Omega)^{-1/4}}{2\sqrt{\pi|b|}}, \quad K_0 = \sqrt{C\Omega}, \\ K_1 &= P - \Lambda Q \sqrt{\frac{C}{A}} + \kappa \frac{C}{A} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \Lambda^2 \right), \\ K_2 &= Q \sqrt{\frac{C}{A}} \left( \frac{v_1}{v_2} + \Lambda \right) + \kappa \frac{C}{A} \left( \frac{\Lambda v_1}{2 v_2} + \Lambda^2 - \frac{1}{2} \right), \\ K_3 &= -\kappa \frac{C}{A} \left( \frac{v_1}{v_2} + \Lambda \right)^2.\end{aligned}$$

Значення цих коефіцієнтів залежить від багатьох параметрів: моделі лінзи та відповідно каустики, розміру джерела, орієнтації джерела відносно каустики.

### 3.3 Приклади

#### 3.3.1 Приклад 1

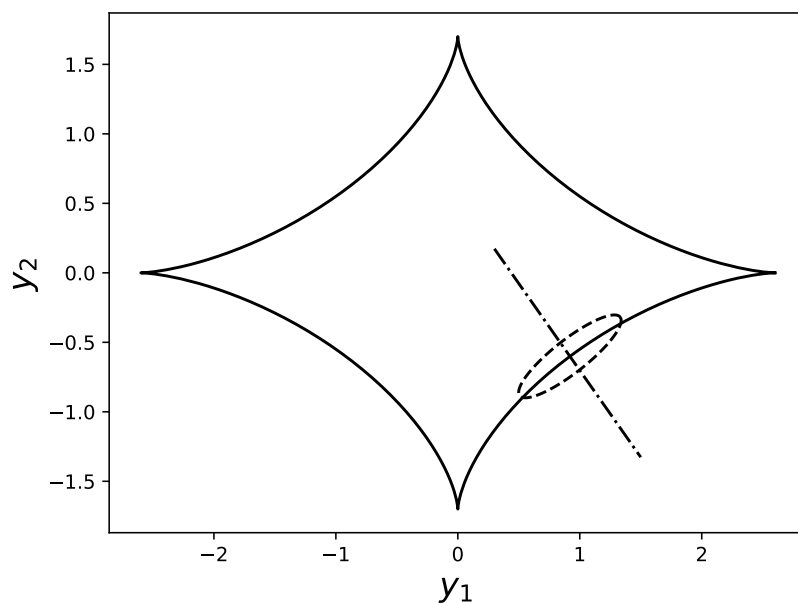


Рисунок 3.2 — Приклад 1; Суцільна крива - каустика, штрихована - еліптичне джерело, штрих-пунктир - траєкторія джерела

Для ілюстрації формули (3.22) потрібно перейти до конкретної моделі лінзи, та встановити зв'язок між коефіцієнтами  $P$ ,  $Q$ ,  $\kappa$ ,  $b$  та параметрами лінзи. Одною з найпоширеніших є модель лінзи Чанга-Рефсдала [1] Якщо обрати потенціал у вигляді:

$$\Psi(x_1, x_2) = -0.2(x_1^2 - x_2^2) + 3 \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (3.24)$$

а точку на каустиці як показано на (рис. 3.2) (точка не повинна бути близь-

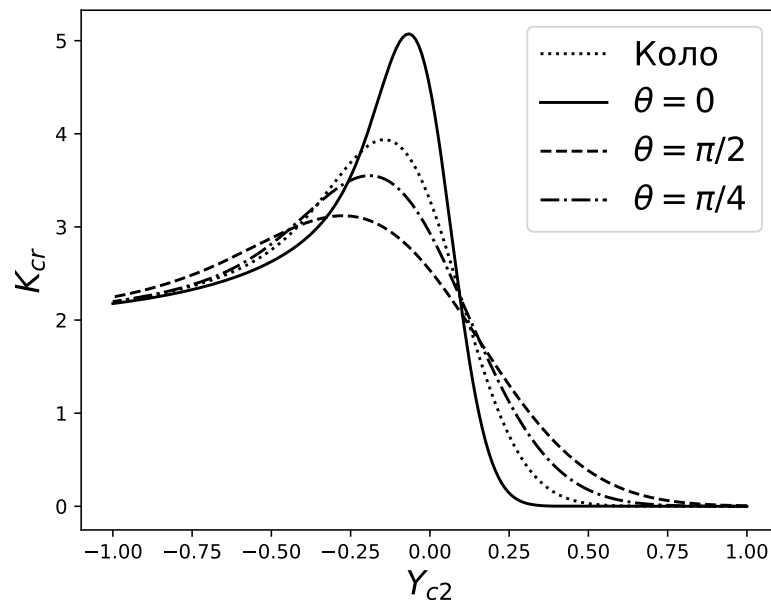


Рисунок 3.3 — Приклад 1; Криві для трьох орієнтацій еліптичного джерела та кола з тією ж світністю

ко до каспу, так як усі виведені формули відповідають складці) що відповідає положенню у 1.2 радіани, то параметри (3.2) приймуть значення  $P = 0.425$ ,  $Q = 0.193$ ,  $\kappa = 0.318$ ,  $b = -0.213$ . Також в обраній моделі джерело буде рухатись прямолінійно та рівномірно, так як такий випадок найчастіше спостерігається на практиці. На рис.(рис. 3.2) схематично зображено каустику що відповідає потенціалу (3.24), еліптичне джерело з параметрами  $\tilde{a} = 0.5, \tilde{b} = 0.125$ , що відповідає коловому джерелу з параметром  $L = 0.25$  та траєкторія еліпса.

У таблиці 3.1 подано коефіцієнти формули (3.23), для трьох орієнтацій джерела відносно каустики, та для кола з тією ж світністю

На (рис. 3.3) зображені криві блиску для різних орієнтацій еліпса відносно каустики, тобто різні варіації формули (3.22) для різних кутів  $\theta$ , та кола з однаковою світністю. Як видно навіть «на око» можна відрізнити криві, які відповідають еліпсу, а які колу.

Таблиця 3.1 — Коефіцієнти з формули (3.23) для прикладу 1

$\theta$	$MK_0$	$MK_1$	$MK_2$	$MK_3$
0	1,729	0,642	-0,550	0
$\pi/4$	1,013	0,210	-0,030	-0,091
$\pi/2$	0,864	0,188	-0,004	0
Коло	1,222	0,178	-0,049	0

Таблиця 3.2 — Коефіцієнти з формули (3.23) для прикладу 2 та  $\alpha = 0$ 

$\theta$	$MK_0$	$MK_1$	$MK_2$	$MK_3$
0	1,860	0,634	-0,523	0
$\pi/4$	1,089	0,266	-0,054	-0,087
$\pi/2$	0,930	0,227	-0,004	0
Коло	1,315	0,204	-0,046	0

### 3.3.2 Приклад 2

У наступному прикладі розглянемо таку саму модель джерела та каустики, але джерело буде перетинати каустику ближче до каспу, тобто у минулому прикладі точка на каустиці знаходилась на 1.2 радіани, а зараз буде на 1 радіані. Також у цьому випадку розглянемо не лише перпендикулярну траєкторію до каустики, а й ще під деякими кутами. Так як із умови прямолінійності та рівномірності руху джерела можна отримати що  $s = v_1/v_2$ , без зменшення загальності можна вважати що  $v_2 = 1$ , а відношення  $v_1/v_2 = \tan \alpha$  де  $\alpha$  - це кут нахилу траєкторії до каустики.

В таблицях 3.2 та 3.3 подані коефіцієнти з формули (3.23) для випадку

Таблиця 3.3 — Коефіцієнти з формули (3.23) для прикладу 2 та  $\alpha = \pi/3$ 

$\theta$	$MK_0$	$MK_1$	$MK_2$	$MK_3$
0	1,860	0,634	-0,133	-3,136
$\pi/4$	1,089	0,266	0,027	-0,081
$\pi/2$	0,930	0,227	0,045	-0,025
Коло	1,315	0,204	0,092	-0,277

коли джерело перетинає каустику перпендикулярно до дотичної у точці, та під кутом  $\pi/3$ . На (рис. 3.4) видно відмінність в кривих блиску для двох кутів пе-

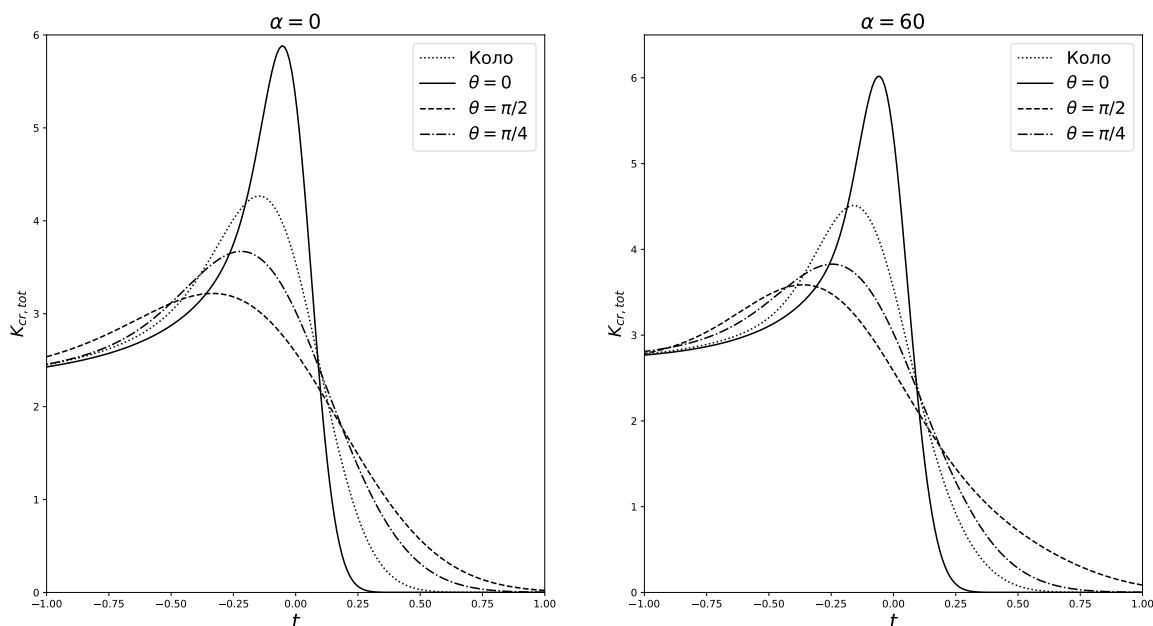


Рисунок 3.4 — Приклад 2; Криві для трьох орієнтацій еліптичного джерела та кола з тією ж світністю для  $\alpha = 0$  та  $\alpha = \pi/3$  відповідно

ретинку каустики. По осі ординат маємо параметр  $t$ , який формально відіграє роль часу, але для кривої  $\alpha = 0$  він має такий самий сенс як і  $Y_{c2}$  у (рис. 3.3, так як ми вибрали що  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = \tan \alpha$ .

Крива, яка відповідає  $\alpha = 0$  має максимум вище ніж аналогічна крива

для  $\alpha = \pi/3$ , а в свою чергу друга крива є більш розтягнутою. Це й не дивно, так еліпс який перетинає криву перпендикулярно

## ВИСНОВКИ

Отримана формула (3.22) дає наближену аналітичну залежність для коефіцієнту підсилення протяжного еліптичного джерела від відстані до каустики, параметрів джерела та орієнтації джерела відносно каустики, які входять незалежно в окремі доданки формули. Ця формула узагальнює аналогічну формулу отриману для колового джерела [7]. Як видно із формули, у наближені лінійної каустики, немає принципової змоги відрізнити еліптичне джерело від кола, тому принципово важливо використовувати наступні наближення. В розглянутому прикладі видно, що навіть «на око» є можливість відрізнити кругле джерело, та еліптичне.

Внаслідок лінійності формули (??) відносно яскравості джерела, формула (3.22), разом з формулами отриманими до цього дозволяє моделювати криві блиску для більш складних джерел, наприклад серповидних, або джерел с «дірками», тощо. Як ми бачили, різні за формою джерела можуть мати дуже схожі криві блиску. Тому, на наш погляд, актуальною залишається проблема визначення за кривою блиску інших характеристик джерела окрім оцінки його розміру. Можна сподіватися, що теоретичне аналіз кривих підсилення джерел різноманітної форми допоможе краще розібратися в цій проблемі.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Schneider, P. Gravitational Lenses / P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco. — Berlin: Springer, 1992.
2. Alcock, C. The MACHO project: Microlensing Optical Depth towards the Galactic Bulge from Difference Image Analysis / C. Alcock, Allsman A., D.R. Alves // *Astrophys. J.* — 2000. — Vol. 541. — Pp. 734–766.
3. Общая теория относительности : признание временем / А. Н. Александров, И. В Вавилова, В. И. Жданов и др. — Київ: Наукова Думка, 2015.
4. Солименко, С. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения / С. Солименко, Б. Крозиньяни, П. ДиПорто. — Мир, 1989.
5. Слюсар, В.М. Мікролінзування віддалених джерел в багаточастинкових гравітаційно-лінзових системах: статистика кривих блиску / В.М. Слюсар // *Київський національний університет імені Тараса Шевченка.* — 2002.
6. Dark energy and dark matter in the Universe: in three volumes / V.M. Shulga, A.A. Minakov, Vakulik V.G., Tsvetkova V. S. Smirnov, G.V. — V.M. Shulga, 2013. — Vol. 1.
7. Alexandrov, A. N. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic / A. N Alexandrov, V. I. Zhdanov // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2011. — Vol. 417. — Pp. 541–554.
8. Александров, О. Коефіцієнт підсилення блиску малого гаусівського джерела поблизу каустики гравітаційної лінзи / О. Александров, В. Жданов // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* — 2009. — С. 4–8.
9. Александров, О. Аналітична теорія гравітаційного лінзування: асимптотичні формули в околі каустики і квадратичне наближення / О. Александров // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* — 2007. — С. 21–31.

10. Witt, H.J. Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars / H.J. Witt // *Astron. Astrophys.* — 1990. — Vol. 236. — Pp. 311–322.
11. Fedorova, O.V. High amplification microlensing events and source structure in Q2237+030 / O.V. Fedorova, Alexandrov A.N., V.I. Zhdanov // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* — 2005. — С. 49–54.
12. Александров, О.М. Аналітичні співвідношення для гравітаційно-лінзового відображення в околі критичної кривої / О.М. Александров, В.Ію Жданов, О.В. Федерова // *Вісник Київ. ун-ту. Астрономія.* — 2003. — С. 52–59.
13. Jin, H. An. The Chang-Refsdal lens revisited / H. An Jin, N. Wyn Evans // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2006. — Vol. 369. — Pp. 317–334.
14. Schramm, T. The complex theory of gravitational lensing. Beltrami equation and cluster lensing / T. Schramm, R. Kayser // *Astronomy and Astrophysics.* — 1995. — Pp. 1–10.
15. Bateman, H. Higher Transcendental Functions / H. Bateman, A. Erdelyi. — New York, 1953. — Vol. 1.