

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. А. Халатов, Є. В. Мочалін, Н. Ф. Димитрієва

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»,*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент

Черноусенко О. Ю., д-р техн. наук, проф., зав. каф.

Теплоенергетичних установок теплових і атомних електростанцій
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Воскобійник В. А., д-р техн. наук, ст. наук. співроб., пров. наук.

співроб. відд. Гідробіоніки і керування примежовим шаром Інституту
гідромеханіки НАН України

Борисов І. І., канд. техн. наук, ст. наук. співроб., пров. наук. співроб.

відд. Високотемпературної термогазодинаміки Інституту технічної
теплофізики НАН України

Відповідальний

редактор

Литвинова Т. В., канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 20.12.2018 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол № 11/2018 від 31.10.2018 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Халатов Артем Артемович, акад. НАНУ, д-р техн. наук, проф.

Мочалін Євген Валентинович, д-р техн. наук, проф.

Димитрієва Наталія Федорівна, канд. фіз.-мат. наук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

Основи теорії примежового шару [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / А. А. Халатов, Є. В. Мочалін, Н. Ф. Димитрієва ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,86 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 191 с.

Розглянуто фізичні основи та математичний опис процесів переносу імпульсу та тепла в пристінних ламінарних та турбулентних потоках рідин та газів. Викладено фундаментальні основи теорії примежового шару, включаючи диференціальні і інтегральні рівняння переносу, закони тертя і теплообміну. Представлено огляд сучасних підходів до математичного моделювання турбулентного примежового шару. Розглянуто приклади розв'язання характерних задач теорії примежового шару. Наведено основи метода скінчених об'ємів і застосування сучасних обчислювальних технологій до розв'язання задач фізики суцільних середовищ в примежовому шарі.

Навчальний посібник розраховано на студентів фізико-технічних та енергетичних спеціальностей, зокрема, спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

© А. А. Халатов, Є. В. Мочалін, Н. Ф. Димитрієва, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Розділ 1 ГІДРОДИНАМІКА І ТЕПЛООБМІН В ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИСТІННИХ ТЕЧІЯХ	8
1.1 Режими руху рідини. Ламінарно–турбулентний перехід	8
1.2 Осереднений і пульсаційний рух. Турбулентні напруження і потоки тепла	12
1.3 Математичний опис турбулентного потоку	19
1.4 Структура пристінної турбулентної течії	24
1.5 Розрахункові підходи до опису турбулентних течій	29
1.6 Диференційні моделі турбулентності	36
1.7 Запитання для самоконтролю	52
Розділ 2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ	55
2.1 Поняття про примежовий шар	55
2.2 Диференційні рівняння примежового шару	57
2.3 Інтегральні рівняння примежового шару	63
2.4 Закони тертя і теплообміну. Консервативність до зміни граничних умов	70
2.5 Основи теорії локального моделювання	75
2.6 Запитання для самоконтролю	80
Розділ 3 РОЗВ’ЯЗАННЯ ХАРАКТЕРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ	82
3.1 Застосування диференційних рівнянь примежового шару до розв’язання задач ламінарної течії	82

3.2	Застосування інтегральних співвідношень примежового шару до розв'язання задач ламінарної течії	92
3.3	Задача про турбулентну течію в початковій ділянці круглої труби	106
3.4	Задача про плоский затоплений турбулентний струмінь	115
3.5	Плоский супутний струмінь	128
3.6	Запитання для самоконтролю	137
Розділ 4 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМІНУ І ГІДРОДИНАМІКИ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ОБ'ЄМІВ . . .		
4.1	Загальні положення	140
4.2	Дискретизація конвективного члена	143
4.3	Дискретизація дифузійного, джерельного і нестационарного членів	149
4.4	Дискретний аналог рівняння переносу	152
4.5	Дискретна форма рівнянь переносу імпульсу	155
4.6	Взаємозв'язана процедура корекції полів тиску та швидкості	159
4.7	Техніка нижньої релаксації і критерії збіжності	164
4.8	Корекція Рхі – Чоу	167
4.9	Розв'язання систем лінійних рівнянь	169
4.10	Приклад розрахунку плоского затопленого турбулентного струменя	171
4.11	Запитання для самоконтролю	184
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		187

ВСТУП

Теорія примежового шару грає дуже важливу роль у багатьох галузях сучасної науки і техніки, насамперед, в області гідроаеромеханіки и тепломасопереносу. Теорія руху рідини і газу поблизу стінки та закони опору тертя широко використовується при конструюванні енергетичних систем, сучасних суден і літальних апаратів, теплових і газових магістралей, а також у галузі енергозберігаючих технологій керування примежовим шаром головним чином для зниження опору тертя, підвищення підйомної сили та інтенсифікації теплообміну. Це далеко не повний перелік завдань, в яких теорія примежового шару є визначальною. Тому курс «Основи теорії примежового шару» має велике значення у підготовці фахівців в області фізико-технічних, ~~теплотехнічних,~~ енергетичних, і ряду інших технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Сучасна механіка суцільних середовищ досягла дуже великих успіхів у теоретичному поясненні явищ, які спостерігаються при течії рідини і газів. Особливо великий розвиток отримала теорія примежового шару, початок якій поклав Л. Прандтль в 1904 р. [1, 2]. Було доведено, що достатньо враховувати дію в'язкості тільки там, де вона проявляється суттєво, а саме в тонкому «примежовому шарі» поблизу стінки, яку обтікає рідина. Перш за все, ідея Л. Прандтля зробила доступними для теоретичного дослідження питання, що пов'язані з опором, що виникає при обтіканні рідиною або газом твердих тіл.

Введення примежового шару дозволяє істотно спростити рівняння, що моделюють рух суцільного середовища, шляхом поділу потоку на дві

області: тонкого вузького примежового шару і області нев'язкого течії. Теплообмін обтічного тіла з потоком також відбувається виключно в примежовому шарі, що знову ж таки дозволяє спростити розв'язання рівнянь за межами примежового шару.

Теорія турбулентних течій є найважливішим для практики і одночасно найбільш важким розділом фізики суцільних середовищ. Концепція навчального курсу «Основи теорії примежового шару» передбачає попереднє знайомство з фундаментальними рівняннями руху, нерозривності і енергії для суцільного середовища, а також з основними поняттями і визначеннями теорії теплообміну. Для більшої ясності і доступності викладання, в якості базової моделі суцільного середовища розглядається нестислива рідина з незмінними теплофізичними властивостями, а основні рівняння записуються у прямокутній ортогональній системі координат.

Перший розділ курсу присвячено основним поняттям гідродинаміки і теплообміну в турбулентних пристінних течіях. Описано структуру пристінної турбулентної течії, наведено систему визначальних рівнянь та найпоширеніші моделі замикання пристінної турбулентної течії.

В другому розділі викладено основи класичної теорії примежового шару з виведенням основних диференціальних рівнянь та найважливіших інтегральних співвідношень. Розглянуто також питання узагальнення теоретичних і експериментальних даних з гідродинаміки і теплообміну в примежових шарах. У третій главі наведено приклади розв'язання базових для теорії конвективного теплообміну задач класичними методами теорії примежового шару.

Важливим чинником сучасного прогресу в галузі фізики суцільних середовищ є широке використання чисельних методів розв'язання

сполучених задач гідродинаміки і теплообміну. Тому четверту главу присвячено викладенню основ найбільш розвиненої обчислювальної технології моделювання процесів в суцільних середовищах – методу скінчених об'ємів. Матеріал, що наведено, містить ідею методу, основні підходи до дискретизації розрахункових рівнянь і організації обчислювального процесу, контроль збіжності й обґрунтування точності наближеного розв'язку. Закінчується глава прикладом чисельного розв'язання характерної задачі у досить загальній постановці.

Курс «Основи теорії примежового шару» розраховано на студентів фізико-технічних та енергетичних спеціальностей, зокрема, спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». Він також може бути корисним для студентів інших технічних спеціальностей, аспірантів, наукових співробітників і інженерів-дослідників, що вивчають фізичні явища в примежовому шарі.

РОЗДІЛ 1

ГІДРОДИНАМІКА І ТЕПЛООБМІН В ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИСТІННИХ ТЕЧІЯХ

1.1 РЕЖИМИ РУХУ РІДИНИ.

ЛАМІНАРНО–ТУРБУЛЕНТНИЙ ПЕРЕХІД

Вивчаючи рух води в прямій трубі з гладкими стінками, англійський фізик О. Рейнольдс в 1883 р. помітив, що при відносно невеликих швидкостях кожна частинка рідини рухається по прямолінійній траєкторії, а окремі шари рідини не перемішуються один з одним. Така течія була названа *ламінарною* або шаруватою. При збільшенні швидкості руху води було помічено, що на підфарбовану прямолінійну цівку починають накладатися хвилі, що поширюються уздовж цівки, тобто в раніше прямолінійному русі з'являються збурення. При подальшому збільшенні швидкості руху потоку число хвиль і їх амплітуда зростають доти, поки цівка не розіб'ється на дрібні нерегулярні цівки, що перемішуються між собою, рух яких є хаотичним.

Описана вище картина свідчить про те, що із зростанням швидкості ламінарна течія втрачає стійкість. При цьому випадкові збурення, які спочатку викликають лише коливання цівок навколо їх стійкого прямолінійного ламінарного руху, швидко розвиваються і призводять до виникнення нової форми руху потоку, яка була названа турбулентною. При турбулентному русі на основний рух рідини в осьовому напрямку накладаються поперечні рухи, що призводить до дуже помітного перемішування потоку. З вказаних вище причин радіальний розподіл

швидкості за перерізом труби при турбулентному русі є більш рівномірним, ніж при ламінарному (рис. 1.1).

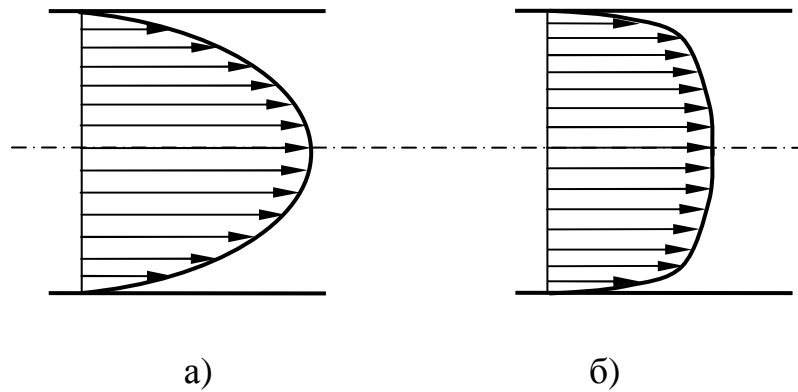


Рис. 1.1. Профіль осьової швидкості в трубі при ламінарному (а) та турбулентному (б) режимах течії

Зауважимо відразу, що у разі турбулентного руху йдеться про розподіл осереднених за часом значень швидкості, оскільки миттєві значення коливаються через хаотичне перемішування, що вже згадувалось раніше.

У своїх дослідях О. Рейнольдс встановив, що перехід від ламінарної течії до турбулентної відбувається після досягнення значення 10^4 певним безрозмірним параметром $\bar{w}d/\nu$, де \bar{w} – середня за перерізом швидкість потоку в трубі діаметром d , а ν – кінематична в'язкість води. Згодом цей параметр був названий критичним числом Рейнольдса ($Re_{кр}$). Надалі їм же було відкрито існування нижнього критичного числа Re , яке дорівнює приблизно 2000. При $Re < 2000$ течія в трубі зберігається ламінарною, незважаючи на будь-які збурення, які штучно вводилися у потік. У проміжній області чисел Рейнольдса ($Re = 2 \cdot 10^3 \dots 10^4$) течія рідини є перехідною.

Дослідні дані, що отримані О. Рейнольдсом, виконано для умов

плавного входу в трубу. Надалі різними авторами було показано, що при ретельній організації умов на вході в трубу критичне число Рейнольдса може досягати значення $5 \cdot 10^4$ [1]. Нині відповідь на питання, наскільки можна підвищити критичне число Рейнольдсу при усуненні вхідних і граничних збурень, не знайдено.

Ретельні виміри умов переходу ламінарної течії в турбулентну, які виконано різними дослідниками, показали, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса течія в трубі носить перемежований характер. Це свідчить про те, що ламінарна і турбулентна форми течії чергуються між собою в даній точці простору. Для фізичної характеристики такої течії використовується коефіцієнт перемежовування γ , що показує яку долю деякого проміжку часу Δt у визначеному місці каналу існує турбулентна течія ($\gamma=0$, якщо протягом усього часу течія ламінарна; $\gamma=1$, якщо увесь проміжок часу течія турбулентна). Залежність коефіцієнта перемежовування від числа Рейнольдса і відносної відстані від входу в трубу, яку отримано І. Ротта [2], наведено на рис. 1.2.

Перехід ламінарної течії в турбулентну на плоскій пластині з гострою передньою кромкою детально вивчався Х. Драйденом [2]. При низькому ступені початкової турбулентності повітряного потоку (близько 0,5%) умови переходу визначаються критичним числом Рейнольдса, яке визначається залежністю

$$Re_{кр} = \left(\frac{W_0 x}{\nu} \right)_{кр} = (3.5 \dots 10) \cdot 10^5,$$

де W_0 – швидкість зовнішнього потоку (за межами примежового шару).

На закінчення відмітимо, що значення критичного числа Рейнольдса залежить від ряду чинників, серед яких, в першу чергу, необхідно

відмітити: умови на вході в канал (гостра кромка, плавний або конічний вхід, початковий ступінь турбулентності), поздовжній градієнт статичного тиску (конфузорна або дифузорна течія), ступінь шорсткості поверхні каналу, граничні умови (вдув або відсмоктування через проникну стінку каналу), напрям теплового потоку (від газу до стінки або навпаки), дію поля відцентрових масових сил (закручування потоку, обертання каналу) і таке інше. Ці питання детально розглянуті в монографії [2].

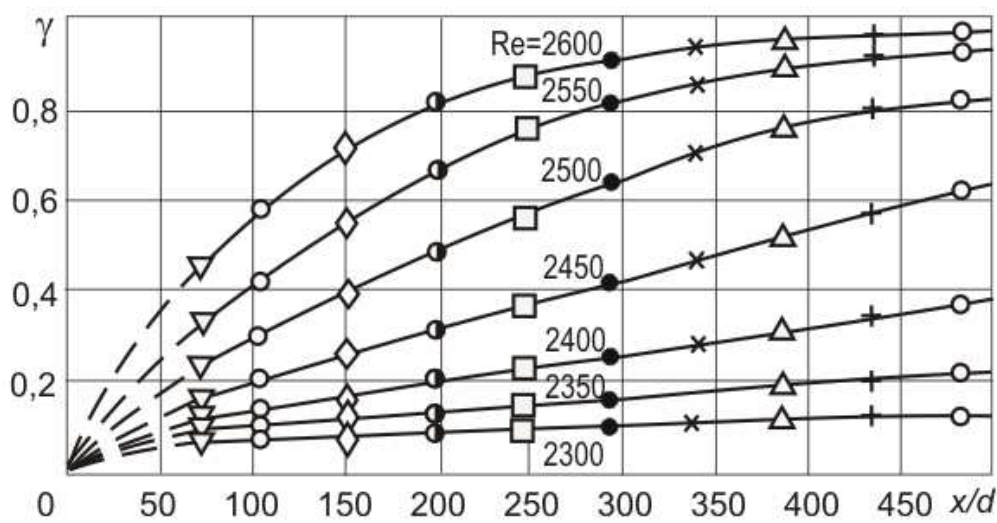


Рис. 1.2. Залежність коефіцієнта перемешування в трубі в області переходу ламінарної форми течії в турбулентну від поточної довжини x при різних числах Рейнольдса [2]

1.2 ОСЕРЕДНЕНИЙ І ПУЛЬСАЦІЙНИЙ РУХ. ТУРБУЛЕНТНІ НАПРУЖЕННЯ І ПОТОКИ ТЕПЛА

Експериментальні дослідження структури турбулентного потоку дозволили зробити висновок, що у фіксованій точці потоку його швидкість, тиск і температура не зберігаються незмінними, а дуже часто міняються, до того ж, дуже нерівномірно. Такі зміни основних характеристик турбулентного потоку називаються *пульсаціями* і є найбільш характерною властивістю турбулентної течії. Елементи рідини, що пульсують у потоці, є не окремими молекулами, а досить великими макроскопічними утвореннями, які називають «*турбулентними молями*». Проте, не слід вважати, що турбулентна течія є повністю нерегульованою. Якби це було так, то така течія не піддавалася б жодному математичному аналізу. Мабуть, найбільш правильним є визначення турбулентності, наведене в роботі [3]: «турбулентний рух рідини припускає наявність нерегульованої течії, у якій різні величини зазнають хаотичну зміну за часом і по просторових координатах, і при цьому можуть бути виділені статистично точні їх осереднені значення». Це означає, що турбулентний рух можна вважати нерегульованим, але таким, що підкорюється статистичним законам, тобто закономірностям теорії вірогідності. Для математичного дослідження турбулентну течію підрозділяють на осереднений та пульсаційний рух. У кожній точці швидкість потоку, тиск і температура потерпають безладні зміни, коливаючись поблизу своїх середніх значень (наприклад, рис. 1.3 ілюструє зміну компоненти швидкості).

Позначимо осереднені за часом значення компонент вектора

швидкості \bar{w}_i , тиску \bar{p} і температури \bar{T} , а їх пульсаційні складові відповідно w'_i, p', T' . Отже, миттєві значення параметрів можна записати в наступному вигляді:

$$w_i = \bar{w}_i + w'_i, \quad p = \bar{p} + p', \quad T = \bar{T} + T'. \quad (1.1)$$

Для прямокутних ортогональних координат $i = \{x, y, z\}$.

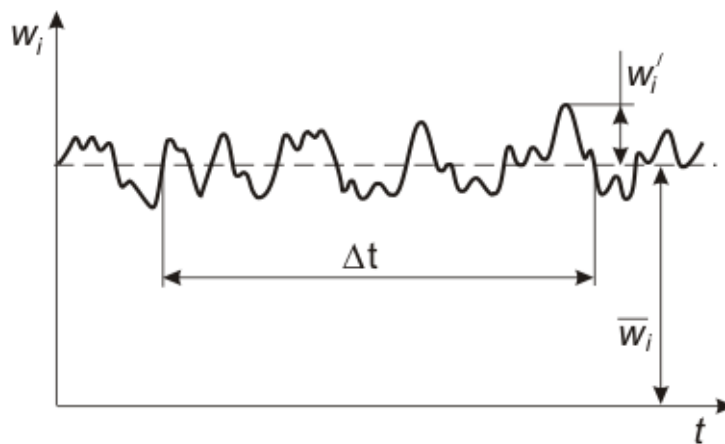


Рис. 1.3. Характер зміни миттєвої швидкості при турбулентному режимі течії

Осереднені значення параметрів, наприклад, швидкості, визначаються як результат наступного усереднювання:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} w_i dt, \quad (1.2)$$

де Δt – період усереднювання (рис. 1.3). Величина Δt вибирається досить великою в порівнянні з періодом пульсацій, але є досить малою у порівнянні з періодом зміни за часом осередненої швидкості. Аналогічним чином визначаються осереднені значення тиску і температури.

Середні значення пульсаційних складових згідно з визначенням (1.2) дорівнюватимуть нулю:

$$\overline{w'_i} = 0, \overline{p'} = 0, \overline{T'} = 0, \quad (1.3)$$

так само, як і середні значення добутків типу

$$\overline{\overline{w'_i w'_i}} = 0, \overline{\overline{p' p'}} = 0, \overline{\overline{T' T'}} = 0. \quad (1.4)$$

Середні значення добутків пульсаційних складових можуть не дорівнювати нулю:

$$\overline{w'_i w'_j} \neq 0, \overline{w'^2_i} \neq 0, \overline{w'_i T'} \neq 0 \text{ і так далі.} \quad (1.5)$$

В цьому випадку між пульсаціями існує кореляція. Ці параметри мають виключно велике значення в теорії турбулентних течій. При подальших операціях питання, пов'язані з усереднюванням параметрів течії, відіграватимуть важливу роль. Тому наведемо тут основні правила усереднювання для двох незалежних змінних A і B , де $A = \overline{A} + a$, $B = \overline{B} + b$:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \overline{\overline{AB}} = \overline{A} \overline{B}, \overline{\overline{A+B}} = \overline{A} + \overline{B}, \overline{\overline{AB}} = \overline{A} \overline{B} + \overline{ab}. \quad (1.6)$$

Рівності (1.6) впливають із співвідношень (1.3) – (1.5).

Турбулентність в потоці може бути збуджена силами тертя біля нерухомої поверхні, що призводить до виникнення градієнту швидкості (течія в каналі або біля поверхні) або при течії шарів рідини уздовж або поперек один одного. У першому випадку турбулентність називають *пристінковою* або *пристінною турбулентністю*, в другому (відсутність твердої границі) – *вільною турбулентністю*. Якщо турбулентність в усіх точках кількісно незмінна, то така турбулентність називається *однорідною*.

Якщо пульсаційні характеристики не залежать від просторових координат, то турбулентність є *ізотропною*.

В усіх випадках, коли осереднена швидкість має градієнт, турбулентність *анізотропна*, тобто пульсації в різних напрямках неоднакові. Для таких течій використовується поняття «*турбулентність в потоці з поперечним зсувом*». До них відносяться пристінна турбулентність і анізотропна вільна турбулентність.

Пульсаційний рух можна уявити як наслідок власного (відносного) руху турбулентних утворень, який накладається на основний рух. Ці об'єми є самостійними по відношенню до загального осередненого потоку і мають індивідуальну внутрішню структуру. Такі утворення, які називають «*великими вихорами*»¹ періодично виникають, а потім руйнуються. Характерний розмір цих вихорів носить назву «*великий масштаб турбулентності*». Він характеризує просторову протяжність елементів турбулентності, тобто їх просторовий масштаб. В процесі турбулентної дифузії відбувається розпад великих вихорів на дрібніші, в яких інерційні явища переважають над в'язкими. Ці вихори беруть участь в конвекції і турбулентній дифузії і практично не піддаються дії сил в'язкості. При подальшій «деградації» вихорів утворюються дрібні вихори з малим масштабом, на які діє в'язка дифузія. Ці вихори грають роль «перетворювача» енергії пульсаційного руху в теплоту. Викладене уявлення відповідає так званому «*каскадному механізму*» Колмогорова–Річардсона передачі енергії в турбулентних потоках (див., наприклад, [4]).

Разом з просторовим, необхідно розглядати часовий масштаб

¹ Термін «вихор» у даному випадку слід розуміти як «рідкий моль», який має вихрову природу.

турбулентності, що характеризує середній час, необхідний для проходження області збурення через фіксовану точку простору.

Для турбулентного потоку в трубі просторовий масштаб турбулентності є величиною, що має порядок діаметру труби, а при течії крізь ґрати з отворами – порядку діаметру отворів. Масштаб часу для течії в трубі буде величиною, що має порядок відношення діаметру труби до швидкості потоку в ній.

Інтенсивність пульсаційного руху за пропозицією Драйдена і Кьюза (1930) оцінюється відношенням [3]

$$Tu_i = \frac{\sqrt{w_i'^2}}{\bar{w}_i}$$

i є мірою інтенсивності турбулентних пульсацій. На практиці частіше використовується величина, що визначається таким виразом:

$$Tu = \left(\frac{1}{3W_0^2} \sum_{i=1}^3 \overline{w_i'^2} \right)^{0.5}, \quad (1.7)$$

де W_0 – характерна швидкість осередненого руху.

Досліди показують, що в турбулентному потоці існує дуже широкий діапазон частот пульсацій. Усі різнорозмірні вихори, з яких складається турбулентний рух, мають певну кінетичну енергію, залежну від міри їх завихореності або від інтенсивності пульсацій швидкості на відповідній частоті. Хоча в реальній турбулентності не спостерігається безперервного спектру частот, виявляється можливим вказати кількість енергії, що відповідає певному діапазону частот. Розподіл енергії за частотами називається енергетичним спектром і визначається за допомогою спеціальної апаратури.

Досліди показують [5], що в турбулентних течіях низькочастотні пульсації (пов'язані з великомасштабними вихорами) складають основну долю енергії пульсаційного руху; у високочастотних пульсаціях (дрібномасштабних вихорах) знаходиться незначна частина енергії.

Розглянемо турбулентну нестисливу течію в прямокутній ортогональній системі координат (складові швидкості w_x , w_y , w_z). Визначимо складові вектора $d\mathbf{j}$ потоку імпульсу через елементарну площадку dF , розташовану перпендикулярно осі x і паралельно осям y і z :

$$dj_x = \rho w_x dF w_x, \quad dj_y = \rho w_x dF w_y, \quad dj_z = \rho w_x dF w_z, \quad (1.8)$$

Розглянемо середні за часом значення складових потоку імпульсу. Оскільки густина середовища вважається постійною, то на основі рівності (1.8) матимемо наступні рівняння:

$$\overline{dj_x} = \overline{\rho w_x^2} dF, \quad \overline{dj_y} = \overline{\rho w_x w_y} dF, \quad \overline{dj_z} = \overline{\rho w_x w_z} dF. \quad (1.9)$$

Звернемося до розгляду величини $\overline{w_x^2}$. З урахуванням першого з рівнянь (1.1) матимемо наступні рівняння:

$$\overline{w_x^2} = \overline{(\bar{w}_x + w'_x)^2} = \overline{\bar{w}_x^2 + 2\bar{w}_x w'_x + w'^2_x}.$$

Застосовуючи до останнього співвідношення правила усереднювання (1.4), (1.6), далі отримаємо:

$$\overline{w_x^2} = \bar{w}_x^2 + \overline{2\bar{w}_x w'_x} + \overline{w'^2_x} = \bar{w}_x^2 + \overline{w'^2_x}.$$

При цьому враховано, що $\overline{w'_x} = 0$. Аналогічним чином можна знайти осереднене значення добутків $\overline{w_x w_y}$ та $\overline{w_x w_z}$. Пропускаючи проміжні

перетворення, запишемо остаточний результат:

$$\overline{w_x w_y} = \overline{w_x} \overline{w_y} + \overline{w'_x w'_y}, \quad \overline{w_x w_z} = \overline{w_x} \overline{w_z} + \overline{w'_x w'_z}.$$

Таким чином, рівність (1.9), що визначає осереднені за часом складові потоку імпульсу, приводиться до наступного вигляду:

$$\overline{dj_x} = \rho dF \left(\overline{w_x^2} + \overline{w_x'^2} \right), \quad \overline{dj_y} = \rho dF \left(\overline{w_x} \overline{w_y} + \overline{w'_x w'_y} \right), \quad \overline{dj_z} = \rho dF \left(\overline{w_x} \overline{w_z} + \overline{w'_x w'_z} \right). \quad (1.10)$$

Вирази (1.10) характеризують зміну імпульсу в одиницю часу і мають розмірність сили. Якщо розділити ліві і праві частини цих рівнянь на dF , то отримаємо напруження. Оскільки потік імпульсу в одиницю часу через певну площадку еквівалентний протилежно спрямованій силі, з якою навколишнє середовище діє на цю площадку, то можна зробити висновок, що на площадку dF діють напруження

$$-\rho \left(\overline{w_x^2} + \overline{w_x'^2} \right), \quad -\rho \left(\overline{w_x} \overline{w_y} + \overline{w'_x w'_y} \right), \quad -\rho \left(\overline{w_x} \overline{w_z} + \overline{w'_x w'_z} \right),$$

у напрямках осей x , y та z відповідно.

Перше з цих напружень є нормальним до площадки dF , два інших – дотичними. Таким чином, накладення пульсаційного руху на осереднений викликає на площадці, перпендикулярній до осі x , додаткові напруження:

$$\sigma'_x = -\rho \overline{w_x'^2}, \quad \tau'_{xy} = -\rho \overline{w'_x w'_y}, \quad \tau'_{xz} = -\rho \overline{w'_x w'_z}. \quad (1.11)$$

Ці напруження часто називають «уявними» напруженнями турбулентної течії або *турбулентними напруженнями*. Аналогічні додаткові напруження виникають на площадках, перпендикулярних осям y та z . Сукупність усіх дев'яти додаткових напружень називається *тензором турбулентних напружень* або *напружень Рейнольдса*.

Тепер запишемо вираз для потоку тепла через площадку dF , нормальну до осі x :

$$q_x dF = \rho c_p T w_x dF,$$

де c_p – теплоємність при постійному тиску, яку, так само як і густину, вважаємо в цьому розгляді постійною.

Для середнього значення густини теплового потоку матимемо

$$\bar{q}_x = \rho c_p \overline{T w_x},$$

або, з урахуванням правил (1.4), (1.6)

$$\bar{q}_x = \rho c_p (\overline{T w_x} + \overline{T' w'_x}).$$

Аналогічні вирази матимуть місце для проекцій \bar{q}_y, \bar{q}_z .

Отже, наявність пульсаційного руху призводить до додаткових теплових потоків, які характеризуються густиною:

$$q'_x = \rho c_p \overline{T' w'_x}, \quad q'_y = \rho c_p \overline{T' w'_y}, \quad q'_z = \rho c_p \overline{T' w'_z}. \quad (1.12)$$

Вирази (1.12) визначають *турбулентні потоки тепла* вздовж осей x, y, z .

1.3 МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКУ

Рух нестисливої рідини з постійною динамічною в'язкістю ($\mu = const$) описуються відомими рівняннями Нав'є–Стокса, доповненими рівнянням нерозривності. У прямокутній системі координат ці рівняння мають вигляд [1]:

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.14)$$

де F_i – проекція на вісь x_i густини зовнішньої масової сили. Позначення координат x_1, x_2, x_3 еквівалентно x, y, z , а для проекцій швидкості має місце відповідність $(w_1, w_2, w_3) = (w_x, w_y, w_z)$. При записі рівнянь (1.13), (1.14) використана тензорна нотація, яка передбачає підсумовування по індексах, що повторюються в одночленах. Такі індекси не залишаються в розгорнутому записі і називаються «німими». Таким чином, в лівій частині

(1.14) має місце дивергенція $\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)$. Останній доданок в

правій частині (1.13) для $i = 1$ відповідає виразу

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) = \mu \Delta^2 w_x.$$

Якщо для турбулентної течії замість проекцій швидкості і тиску в рівняннях (1.13) підставити їх представлення згідно з рівністю (1.1), то після перетворень ми приходимо до рівнянь, які уперше отримав О. Рейнольдс і які носять його ім'я. Ці рівняння наведені нижче:

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{w'_i w'_j}) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.15)$$

У записі рівнянь (1.15), як це часто роблять для зручності, опущена риса зверху над позначеннями середніх величин, окрім кореляцій пульсаційних доданок. Виведення рівнянь Рейнольдса можна знайти, наприклад, в [1]. Він заснований на правилах усереднювання (1.3), (1.4), (1.6), а також на

правилах усереднювання похідних.

Рівняння нерозривності (1.14) після усереднювання не змінює свій вигляд по відношенню до осереднених швидкостей.

У порівнянні з рівняннями ламінарної течії, рівняння Рейнольдсу містять додаткові члени, які обумовлені наявністю пульсацій (представлені останнім доданком у правій частині (1.15)). Ці члени, як показано раніше (див. рівність (1.11)), утворюють тензор турбулентних напружень

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \overline{\rho w_x'^2} & \overline{\rho w_x' w_y'} & \overline{\rho w_x' w_z'} \\ \overline{\rho w_x' w_y'} & \overline{\rho w_y'^2} & \overline{\rho w_y' w_z'} \\ \overline{\rho w_x' w_z'} & \overline{\rho w_y' w_z'} & \overline{\rho w_z'^2} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Останні два доданки у рівняннях (1.15) виникають внаслідок застосування операції дивергенції до тензорів в'язкої і турбулентної напруги відповідно. Тому виникає природне бажання спробувати представити їх в однаковому вигляді. Це можна зробити, увівши поняття *турбулентної в'язкості* на основі наступних співвідношень:

$$\mu_{ij}^t = - \frac{\overline{\rho w_i' w_j'}}{\partial w_i / \partial x_j}. \quad (1.17)$$

З урахуванням позначення (1.17) рівняння Рейнольдса (1.15) можна переписати таким чином:

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \mu_{ij}^t) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.18)$$

На відміну від молекулярної в'язкості μ , турбулентна в'язкість не є фізичною величиною. Вона залежить від полів осередненої і пульсаційної

швидкостей і в загальному випадку не є однаковою у даній точці по різних напрямках (тобто не є ізотропною).

В області, де турбулентність є розвиненою, турбулентна в'язкість у багато разів (у сотні і тисячі) більше за молекулярну. Це пояснюється тим, що процес перенесення імпульсу «турбулентними молями (грудками, вихорами)» значно інтенсивніший, ніж перенесення імпульсу молекулами. Отже, в цьому випадку $\mu_{ij}^t \gg \mu$, тобто, турбулентна (уявна) в'язкість у багато разів більша за молекулярну.

Рівняння Рейнольдса є продуктивною основою для дослідження турбулентних течій. На їх основі визначаються осереднені значення w_x, w_y, w_z, p . Для їх розв'язання, так само, як і при ламінарному режимі течії, необхідно задати граничні умови, які відповідають окремим особливостям даного процесу. Зокрема, на стінці каналу усі компоненти швидкості дорівнюватимуть нулю. Це справедливо, як для усередненої, так і для пульсаційної швидкостей, отже і для турбулентного напруження.

Основною проблемою застосування рівнянь Рейнольдса є їх незамкненість, яка долається на основі використання різних гіпотез, що зв'язують параметри осередненого і пульсаційного рухів, і які призводять до тієї або іншої *моделі турбулентності*.

Зміна температури в ламінарному потоці нестисливої рідини описується рівнянням перенесення тепла [6]

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p w_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1.19)$$

яке виходить з рівняння енергії за відсутності внутрішніх джерел тепла, помірних швидкостях течії і за постійних фізичних властивостей

середовища. Через λ в рівнянні (1.19) позначено коефіцієнт теплопровідності.

У випадку турбулентної течії використовуватимемо для характеристик потоку, включаючи температуру, представлення (1.1). Після підстановки в рівняння (1.19) і процедури усереднювання, аналогічної випадку виведення рівнянь Рейнольдса, прийдемо до наступного рівняння:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p w_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p \overline{T'w'_j}), \quad (1.20)$$

де останній доданок в правій частині є дивергенцією вектора густини турбулентного потоку тепла з проєкціями, що визначаються рівностями (1.12). У рівнянні (1.20) так само не використовується риска зверху в позначенні характеристик осередненої течії (окрім кореляцій пульсаційних величин).

Введемо аналогічно турбулентній в'язкості (1.17) поняття *турбулентної теплопровідності*:

$$\lambda_j^t = - \frac{\rho c_p \overline{T'w'_j}}{\partial T / \partial x_j}, \quad (1.21)$$

яка, так само як і турбулентна в'язкість, не є фізичною величиною.

З урахуванням позначення (1.21), усереднене рівняння перенесення тепла (1.20) набуває наступного вигляду:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p w_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\lambda + \lambda_j^t) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (1.22)$$

У розвиненій турбулентній течії турбулентна теплопровідність, так

само як і турбулентна в'язкість, набагато більше теплопровідності λ , яка обумовлена молекулярною дифузією тепла.

1.4 СТРУКТУРА ПРИСТІННОЇ ТУРБУЛЕНТНОЇ ТЕЧІЇ

Однією з перших плідних гіпотез, що дозволяють замкнути усереднені рівняння турбулентної течії, є теорія «шляху перемішування» Л.Прандтля (1925 р.) [1, 7]. Ця теорія встановлює зв'язок між турбулентними напруженнями і полем швидкостей осередненої течії. Розглянемо основні положення цієї теорії.

Аналізуватимемо плоску турбулентну течію, в якій усереднена швидкість змінюється лише у поперечному напрямку:

$$w_x = w_x(y), \quad w_y = w_z = 0.$$

З дотичних турбулентних напружень в даному випадку є лише τ'_{xy} , яке, згідно (1.16), визначається співвідношенням

$$\tau'_{xy} = -\rho \overline{w'_x w'_y}.$$

Згідно статистичної теорії величину турбулентного напруження можна представити таким чином:

$$|\tau'_{xy}| = \rho R_{xy} \sqrt{w'^2_x} \sqrt{w'^2_y}, \quad (1.23)$$

де R_{xy} – коефіцієнт кореляції, що враховує взаємообумовленість турбулентних пульсацій у напрямках x та y .

Аналіз осередненого руху біля поверхні каналу (рис. 1.4) дозволив Л.Прандтлю припустити, що величина середньоквадратичних пульсацій

пропорційна градієнту осередненої швидкості, тобто

$$\sqrt{w_x'^2} = l_1 \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad \sqrt{w_y'^2} = l_2 \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

де l_1, l_2 – певні лінійні масштаби потоку. Тоді, підставляючи ці вирази у рівняння (1.23), можна отримати:

$$|\tau'_{xy}| = \rho R_{xy} l_1 l_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2.$$

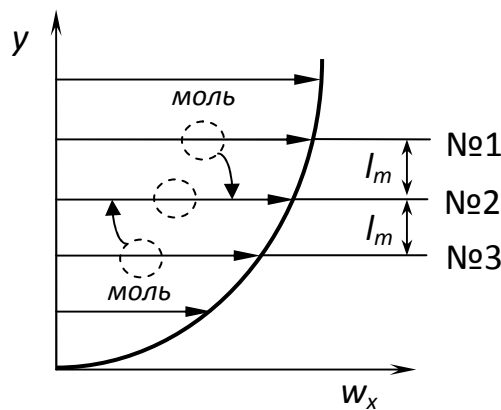


Рис. 1.4. До пояснення поняття довжини шляху перемішування

Останнє співвідношення, вочевидь, можна переписати коротше:

$$|\tau'_{xy}| = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (1.24)$$

де l_m – величина, яку Л. Прандтль назвав *довжиною шляху перемішування*. Вона визначає відстань, яку під дією турбулентних пульсацій проходить моль турбулентної рідини у поперечному напрямку, зберігаючи при цьому первинну кількість руху (шар №1 на рис. 1.4). У шарі №2 турбулентний

моль змішується з навколишньою рідиною, віддаючи (чи отримуючи) певну кількість руху. Вважається, що величина l_m характеризує середній розмір рідких об'ємів, які беруть участь в турбулентному перенесенні, тобто середній масштаб турбулентності.

З урахуванням знаку турбулентного напруження, формулу (1.24) можна переписати таким чином:

$$\tau'_{xy} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial w_x}{\partial y} \right| \frac{\partial w_x}{\partial y}. \quad (1.25)$$

По аналогії з формулою Ньютона для в'язкого напруження у ламінарній течії, формулу Прандтля (1.25) можна навести у вигляді

$$\tau'_{xy} = \mu_t \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad (1.26)$$

де $\mu_t = \mu'_{xy}$ – турбулентна в'язкість, вже уведена до розгляду вище (див. рівність (1.17)) для більш загального випадку. З виразів (1.25) і (1.26), для турбулентної в'язкості, згідно гіпотези Прандтля, маємо

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|. \quad (1.27)$$

Для відносно простих зсувних течій довжина шляху перемішування l_m може бути визначена простими залежностями. Зокрема, в пристінних течіях вона є пропорційною відстані від стінки y :

$$l_m = \kappa y. \quad (1.28)$$

Постійну $\kappa \approx 0,4$ називають постійною Кармана.

У структурі турбулентного потоку поблизу стінки загалом виділяють п'ять підобластей [7,8]: в'язкий підшар, перехідна або буферна область, область логарифмічного профілю швидкості, область закону сліду і область перемижування. На рис. 1.5 представлена типова зміна безрозмірної швидкості поперек турбулентного прилежого шару з одночасним позначенням масштабів підобластей. По осі абсцис відкладається безрозмірна відстань від стінки

$$y^+ = \frac{u_w y}{\nu}, \quad (1.29)$$

а по осі ординат – безрозмірна швидкість

$$u^+ = w_x / u_w. \quad (1.30)$$

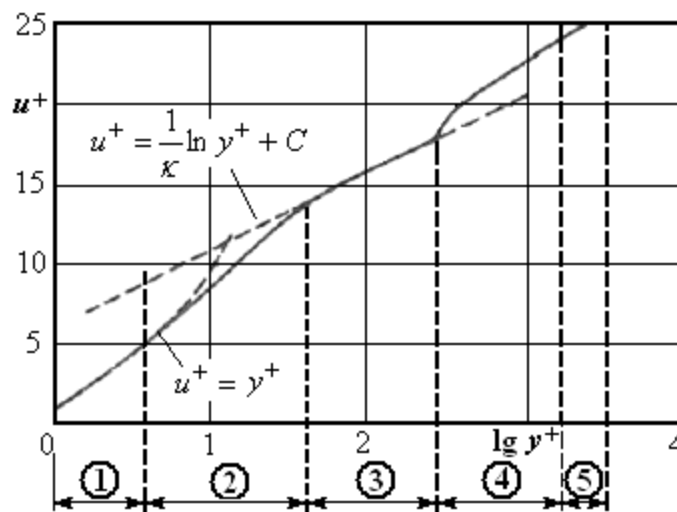


Рис. 1.5. Профіль усередненої швидкості і структура турбулентної пристінної течії: 1 – в'язкий підшар; 2 – буферна область; 3 – область логарифмічного профілю швидкості; 4 – область закону сліду; 5 – область перемижування.

Динамічна швидкість (або швидкість тертя) u_w , яка входить до їх

визначення, визначається таким чином:

$$u_w = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (1.31)$$

де τ_w – дотичне напруження на стінці. Параметри y^+, u^+ дістали назву універсальних координат так званого *закону стінки*. Його було встановлено Людвігом і Тільманом, і нині він формулюється таким чином:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.45. \quad (1.32)$$

Залежності (1.32) відповідає пряма лінія (враховуючи логарифмічний масштаб по осі абсцис) на рис. 1.5. Для в'язкого підшару характерна залежність $u^+ = y^+$.

Сучасні алгебраїчні моделі турбулентності базуються на двошаровому уявленні структури турбулентної течії поблизу стінки, сформульованому Клаузером [7]. Згідно з цим підходом в'язкий підшар, буферна зона і логарифмічна область розглядаються як одна внутрішня область з характерною для неї дрібномасштабною турбулентністю. А області сліду і перемешування розглядаються як зовнішня область великомасштабних вихрових структур. У внутрішній області коефіцієнт турбулентної в'язкості визначають на основі формули Прандтля (1.27).

Формула (1.28) для визначення шляху перемішування дає добрі результати для логарифмічної зони, проте призводить до спотворень в межах в'язкого підшару і буферної області, де турбулентне тертя не переважає істотно над молекулярним. Для подолання цього недоліку у рамках використання гіпотези Прандтля, використовується підхід, запропонований Ван Дристом [7], який полягає у введенні демпфуючого

множника, що враховує блокуючий вплив стінки на турбулентний обмін в її безпосередній близькості. При такому підході замість формули (1.28) використовується залежність

$$l_m = \kappa y \left[1 - \exp(-y^+ / A_*) \right], \quad A_* = 26. \quad (1.33)$$

У зовнішній області в основу визначення коефіцієнта турбулентної в'язкості покладена гіпотеза Клаузера, згідно якої

$$\mu_t = \rho k W_m \delta^*, \quad (1.34)$$

де W_m – максимальна швидкість в перерізі потоку, δ^* – так звана інтегральна товщина витіснення (див. п. 2.3), k – емпірична константа. Для розвинених турбулентних течій ($Re \sim (10^5 \div 10^7)$) приймають $k = 0.0168$.

1.5 РОЗРАХУНКОВІ ПІДХОДИ ДО ОПИСУ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ

Враховуючи величезний інтерес до турбулентних течій в інженерних застосуваннях, сьогоднішній стан справ в цій області характеризує той факт, що десятки і сотні тисяч дослідників у всьому світі займаються розрахунками турбулентних течій. Існуючі математичні моделі таких течій допускають аналітичне рішення лише в поодиноких найпростіших випадках. Тому розрахунковою основою є чисельні методи, широке використання яких стало можливим завдяки швидкому вдосконаленню обчислювальної техніки. Проте, незважаючи на пильний інтерес і дійсно титанічні зусилля, доводиться констатувати, що до теперішнього часу не існує універсального підходу до розрахунку турбулентних течій, який дозволяв би адекватно відбивати різні аспекти цих течій, що проявляються

в різноманітних окремих випадках.

Дамо коротку характеристику основним підходам до чисельного моделювання турбулентних течій.

Пряме моделювання турбулентності і моделювання великих вихорів

В цьому відношенні найбільш загальним є [7, 9] пряме чисельне моделювання або метод DNS (Direct Numerical Simulation), що відповідає безпосередньому розв'язанню повних нестационарних тривимірних рівнянь Нав'є–Стокса і рівняння нерозривності без їх попереднього усереднювання. Цінність такого підходу, передусім, в тому, що він не вимагає додаткового залучення напівемпіричних теорій.

Основні аспекти застосування DNS викладені, зокрема, в роботі [10]. Попри те, що DNS досить швидко прогресує останніми роками, вимоги до обчислювальних ресурсів настільки великі, що і в найближчому майбутньому цей метод буде швидше унікальною можливістю перевірки адекватності інших, менш витратних методів, ніж інструмент інженерних розрахунків. До теперішнього часу за допомогою цього підходу вдалося розв'язати лише відносно прості модельні задачі. Так в роботі [7], наводяться дані про те, що для розрахунку каналної течії при $Re \approx 6000$ використовувалася сітка с 4 млн. вузлів, а час розрахунку, в перерахунку на характеристики сучасного персонального комп'ютера, склав понад 500 процесорних годин. Зі збільшенням числа Рейнольдса з'являються усе більш дрібні масштаби турбулентності, що вимагають подальшого подрібнення сітки, бо DNS передбачає спроможність адекватного розрахунку вихорів усіх масштабів.

Компромісний підхід, що зберігає багато переваг DNS і помітно знижує вимоги до обчислювальних ресурсів, дістав назву методу моделювання великих вихорів або LES методу (Large Eddy Simulation). Згідно з цим методом, засновником якого є Дірдорф [11], моделювання великих енергоємних вихорів здійснюється, як і в методі DNS, на основі рівнянь Нав'є – Стокса, а для моделювання дрібних вихорів (з розмірами, що є порівнянними та меншими за розміри комірок обчислювальної сітки) залучають додаткові співвідношення напівемпіричного характеру. Зокрема, для представлення так званої підсіткової або SGS (Sub – Grid Scale) турбулентності найбільш використовуваним виявився підхід Смагоринського [12], який першим запропонував модель для визначення підсіткових турбулентних напружень, обумовлених дрібномасштабною турбулентністю.

Переваги методу LES полягають в тому, що дрібномасштабна турбулентність однорідніша за великомасштабну, отже, має близькі до універсальних характеристики. Тому вона більшою мірою піддається моделюванню. В той же час, найбільш специфічні риси різних турбулентних течій обумовлені взаємодією великих енергонасичених вихорів, які в даному випадку обчислюються без додаткових спрощуючих припущень.

У загальному випадку застосування методу LES замість методу DNS дає економію обчислювальних ресурсів на порядок і більше. У LES не вимагається, щоб сітковий крок був співрозмірним із Колмогоровським внутрішнім масштабом турбулентності [4]

$$\lambda_0 \sim L/Re^{3/4},$$

де L – характерний розмір області, який визначає розміри найбільших енергоємних вихорів.

Величина λ_0 визначає розміри вихорів, в яких здійснюється в'язка дисипація енергії. Проте, для адекватного розрахунку усіх значимих масштабів потрібні дуже великі обчислювальні ресурси. Тому, як зазначено в оглядовій публікації [13], на сьогодні моделювання великих вихорів використовується переважно для розрахунку турбулентних течій в областях простої форми.

Основна складність в моделюванні великих вихорів полягає в тому [7], що поблизу стінок усі вихори малі і розміри енергоємних і дисипуючих вихорів перекриваються. Як наслідок, пристінкові кроки сітки і кроки за часом падають до значень, що є характерними для методу DNS.

Рівняння Рейнольдса і модель Бусінеска

Нині основним підходом до розрахунку різноманітних турбулентних течій в інженерних застосуваннях є використання моделей турбулентності, заснованих на усереднених за Рейнольдсом рівняннях Нав'є–Стокса (RANS – Reynolds Averaged Navier – Stokes). Для нестисливої рідини з постійними теплофізичними властивостями ці рівняння мають вигляд (1.18).

Як відмітив Л.Г. Лойцянский [1], рівняння Рейнольдса в умовному сенсі (умовність обумовлена процедурою усереднювання) є суворим наслідком рівнянь Нав'є – Стокса, і тому можуть розглядатися як «надійний фундамент...». методів розрахунку турбулентних течій. Основною проблемою є незамкненість цих рівнянь, у яких з'являються додаткові турбулентні напруження (1.16). Досить детальний огляд

способів замикання рівнянь Рейнольдса можна знайти в роботах [7, 14].

Найбільш продуктивним до теперішнього часу залишається підхід Бусінеска до представлення напружень Рейнольдса. У первинному вигляді формула Бусінеска співпадає із вже розглянутою вище формулою (1.26) для визначення турбулентного дотичного напруження між шарами плоскопаралельної осередненої течії рідини з використанням поняття скалярного коефіцієнту турбулентної в'язкості μ_t . Ця формула за структурою ідентична відомій формулі Ньютона для дотичного напруження, яку обумовлено молекулярною в'язкістю.

Узагальненням реологічної формули Ньютона на випадок довільної просторової течії є умова лінійної залежності тензора напружень від тензора швидкостей деформацій, що дає (см., наприклад, [1]) відомий вираз для напружень в ламінарному потоці:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j; \\ \sigma_i &= \mu \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - p \quad (\text{по індексу } i \text{ немає підсумовування}).\end{aligned}\tag{1.35}$$

На основі аналогічних міркувань [1] можна узагальнити на випадок довільної просторової усередненої течії формулу (1.26), що дає нам наступний вираз узагальненої гіпотези Бусінеска:

$$\begin{aligned}\tau'_{ij} &= \mu_t \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j; \\ \sigma'_i &= \mu_t \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \rho k \quad (\text{по індексу } i \text{ немає підсумовування}).\end{aligned}\tag{1.36}$$

Величина k , що входить до виразу для нормального турбулентного

напруження, визначається рівністю

$$k = \frac{1}{2} \overline{w'_i w'_i} = \frac{1}{2} \left(\overline{w'^2_x} + \overline{w'^2_y} + \overline{w'^2_z} \right) \quad (1.37)$$

і називається *питомою кінетичною енергією турбулентних пульсацій* або *турбулентною кінетичною енергією*. Ця величина з'являється в (1.36) з умови рівності перших інваріантів тензора, що визначається цими виразами, і тензора (1.16) напружень Рейнольдса. Формальне зіставлення формул (1.35) і (1.36) дає основу іменувати величину $\frac{2}{3}\rho k$ – *турбулентним тиском*.

Підстановка напружень, що визначаються рівностями (1.36), замість напружень Рейнольдса в рівняннях (1.15), перетворює їх до наступного вигляду:

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.38)$$

у якому, на відміну від (1.18), турбулентна в'язкість є величиною скалярною та додається турбулентний тиск.

Гіпотеза Бусінеска істотно спрощує проблему замикання рівнянь Рейнольдса, оскільки замість шести невідомих компонент тензора турбулентних напружень уводиться лише одна невідома величина – коефіцієнт турбулентної в'язкості μ_t . Його скалярне уявлення відповідає допущенню про локальну ізотропність турбулентних пульсацій, що у багатьох практично важливих випадках не має місця (наприклад, у сильно закручених потоках). Про умовність підходу Бусінеска говорить і те, що якщо молекулярна в'язкість є властивістю рідини і не залежить від поля швидкостей, то турбулентна в'язкість залежить від характеру руху. Дійсно,

величина і розподіл швидкостей характеризують інтенсивність турбулентності аж до її виродження. Отже, коефіцієнт турбулентної в'язкості в загальному випадку змінюється від точки до точки середовища. Та обставина, що для опису перенесення імпульсу пульсаційним рухом, від якого ми абстрагуємося, використовується коефіцієнт перенесення, який визначається, у тому числі, самим пульсаційним рухом, призводить до неминучості емпіричного підходу до встановлення залежностей для коефіцієнта турбулентної в'язкості. Характерним є те, що, на жаль, немає універсальних моделей, заснованих на гіпотезі турбулентної в'язкості, які з однаковим успіхом можна було б застосовувати для опису різноманітних течій.

Проте, цей підхід є на сьогодні найпоширенішим в дослідницькій практиці, і належний вибір моделі турбулентної в'язкості забезпечує адекватний розрахунок найскладніших течій. Саме тому усі сучасні універсальні пакети для чисельного аналізу задач механіки суцільних середовищ містять каталоги найбільш поширених і апробованих моделей, які засновані на гіпотезі турбулентної в'язкості.

Найбільш простими є так звані *алгебраїчні* моделі турбулентності, які встановлюють алгебраїчні співвідношення для коефіцієнту μ_t без необхідності розв'язання додаткових диференціальних рівнянь. Більшість з цих моделей засновано на розглянутих вище гіпотезах Прандтля (про шлях змішування) і Клаузера (про турбулентну в'язкість у ядрі потоку). Безумовно, алгебраїчні моделі турбулентності є найдоступнішими. Вони концептуально прості, і їх застосування не викликає обчислювальних труднощів. В області застосовності, як зазначено Л.Г. Лойцянським [1], алгебраїчні моделі дають результати не менш точні, ніж складніші моделі. Проте обмеженість алгебраїчних моделей турбулентності обумовлена, в

першу чергу, тим, що вони припускають *рівновагу модельованої турбулентності*. Це означає, що в кожній точці розрахункової області спостерігається баланс генерації і дисипації турбулентної енергії, на який не впливає перенесення з сусідніх точок. В цьому випадку турбулентне напруження залежить лише від локальної структури осередненої течії.

Щоб здолати цю обмеженість розроблено моделі турбулентності, які дозволяють враховувати перенесення характеристик турбулентності шляхом розв'язання диференціальних рівнянь цього перенесення. Такі моделі називають *диференціальними моделями турбулентності*. Розглянемо далі деякі з них.

1.6 ДИФЕРЕНЦІЙНІ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

В якості величин, що характеризують турбулентність, для яких формулюються диференціальні рівняння перенесення, найчастіше використовуються параметри k , ε , ω , ν_t .

Питома кінетична енергія турбулентності k вже визначена вище співвідношенням (1.37).

Швидкість дисипації (або просто *дисипація*) турбулентної енергії в декартовій системі координат представляється [7] таким чином

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} \frac{\partial w'_i}{\partial x_j}}, \quad (1.39)$$

де $\nu = \mu/\rho$ – кінематичний коефіцієнт молекулярної в'язкості.

Величину ω можна розглядати [14] як відношення

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k}. \quad (1.40)$$

Звідси трактування цієї величини як *питомої* (на одиницю турбулентної енергії) *швидкості дисипації турбулентності*. Слід зауважити, що це не єдине представлення фізичного сенсу параметра ω . Досить детальне обговорення цього питання можна знайти, наприклад, в роботі [7].

Фундаментальну роль в теорії, заснованій на використанні диференціальних рівнянь переносу характеристик турбулентності, зіграли роботи А. М. Колмогорова і Прандтля–Вігхардта, у яких було запропоновано гіпотезу, що пов'язує кінематичний коефіцієнт турбулентної в'язкості $\nu_t = \mu_t / \rho$ і кінетичну енергію турбулентності k . Вираженням цієї гіпотези є співвідношення Колмогорова–Прандтля [7]

$$\nu_t = C'_\mu \sqrt{k} L, \quad (1.41)$$

де L – інтегральний масштаб турбулентності (характерний розмір великих енергонасичених вихорів).

Емпірична числова величина C'_μ , в загальному випадку, залежить від турбулентного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_t = \frac{\sqrt{k} L}{\nu}. \quad (1.42)$$

Проте, для випадку повністю розвиненої турбулентності ($\text{Re}_t \rightarrow \infty$) вважають $C'_\mu = \text{const}$.

$k - \varepsilon$ модель турбулентності

Найбільш популярною до 90-х років минулого сторіччя була двохпараметрична дисипативна модель турбулентності, що дістала назву $k - \epsilon$ моделі. «Стандартна» версія цієї моделі була запропонована Джонсом і Лаундером (1972). Популярність цієї моделі обумовлена її гарними обчислювальними властивостями, що забезпечують стійкий розрахунок, і прийнятними результатами у багатьох інженерних застосуваннях. У $k - \epsilon$ моделі в якості характеристик турбулентності, для яких формулюються диференціальні рівняння перенесення та на основі яких визначається вихрова в'язкість, розглядаються кінетична енергія турбулентності k і дисипація ϵ .

Диференціальне рівняння перенесення k є прямим наслідком точних рівнянь руху (1.13) (відповідний вивід дано, наприклад, у роботі [7]). З урахуванням припущення про градієнтний механізм турбулентної дифузії, прийнятого А.М. Колмогоровим [15], це рівняння набуває вигляду:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_k - \rho \epsilon, \quad (1.43)$$

де емпіричний коефіцієнт σ_k називають турбулентним «числом Прандтля»; доданок P_k визначає генерацію турбулентної енергії, обумовлену нерівномірністю поля швидкостей усередненого руху, і представляється таким чином:

$$P_k = 2\mu_t S_{ij} S_{ij}, \quad (1.44)$$

де $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)$ – компоненти тензору швидкостей деформації осередненого руху.

Для величини ε також можна на основі рівнянь Навьє – Стокса отримати точне рівняння перенесення. Проте воно містить багато невідомих доданків із подвійними та потрійними кореляціями пульсаційних швидкостей, тиску і похідних швидкості. Замість цього, у $k - \varepsilon$ моделі використовується рівняння, яке запропоновано Б. Лаундером і більшою мірою базується на інтуїції і міркуваннях емпіричного характеру. Модельне рівняння для дисипації має наступний вигляд:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (1.45)$$

де σ_ε – емпірична величина, яку, аналогічно σ_k в рівнянні (1.43), можна назвати «турбулентним числом Прандтля»; $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$ – емпіричні константи моделі.

Для визначення турбулентної в'язкості використовується співвідношення Колмогорова–Прандтля (1.41) у вигляді

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (1.46)$$

Для модельних констант використовуються наступні емпіричні значення [7]:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (1.47)$$

У формулюванні (1.43) – (1.47) $k - \varepsilon$ модель придатна для опису течій, що характеризуються близьким до ізотропного станом дисипуючої турбулентності (маються на увазі вихори найменших масштабів). Це має місце при великих значеннях локального турбулентного числа Рейнольдса

(1.42), тому стандартна $k - \epsilon$ модель належить до так званих *високорейнольдсових* моделей турбулентності. Поблизу стінок мають місце малі значення Re_t із-за пригнічення пульсацій швидкості і зменшення масштабів енергоємних вихорів, що визначають лінійний розмір L в (1.42). Тому у високорейнольдсовому формулюванні моделі, для визначення характеристик турбулентності у безпосередній близькості до твердих стінок, використовується так званий метод *пристінних функцій*. Наведемо тут короткий опис основного змісту цього методу та основні співвідношення, що реалізують його, у варіанті, запропонованому Лаундером і Сполдингом [16], який набув широке розповсюдження. Більш детальне обговорення цього питання, можна знайти, наприклад, у роботі [7].

Логарифмічний профіль швидкості (1.32), що часто називається «*законом стінки*», можна переписати в наступному вигляді:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad (1.48)$$

де $\kappa = 0.42$ – константа Кармана; $E = 9.793$ – емпірична стала.

Для найближчого до стінки вузла P розрахункової сітки, що знаходиться від неї на відстані y_P , на основі визначення пристінних координат (1.29), (1.30), динамічної швидкості (1.31) і постульованого співвідношення $u_w = C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}$, можна записати:

$$u_P^+ = \frac{w_{xP} C_\mu^{0,25} k_P^{0,5}}{\tau_w / \rho}, \quad (1.49)$$

$$y_P^+ = \frac{\rho C_\mu^{0,25} k_P^{0,5} y_P}{\mu}. \quad (1.50)$$

Із співвідношень (1.48) – (1.50) можна визначити напруження тертя на стінці, для якого отримуємо наступну рівність:

$$\tau_w = \frac{\kappa \rho w_{xP} C_\mu^{0,25} k_P^{0,5}}{\ln\left(E \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P / \mu\right)}. \quad (1.51)$$

Логарифмічний закон (1.48), строго кажучи, виконується за межами в'язкого підшару і буферної зони (див. рис. 1.5), тобто при $y_P^+ > 30$. Проте співвідношення (1.51) на практиці використовують при $y_P^+ > 11.5$ (хоча рекомендується при використанні пристінних функцій будувати сітку так, щоб виконувалась умова $y_P^+ \approx 30 \div 60$).

В межах в'язкого підшару ($y_P^+ < 11.5$) профіль швидкості визначається співвідношенням

$$u^+ = y^+, \quad (1.52)$$

з якого виходить

$$\tau_w = \mu \frac{w_{xP}}{y_P}. \quad (1.53)$$

Для визначення величини k_P рівняння перенесення (1.43) розв'язується в межах прилеглого до поверхні шару розрахункових комірок так само, як і в усій іншій області, з граничною умовою на стінці

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0. \quad (1.54)$$

При цьому джерельні члени в правій частині (1.43), що визначають генерацію і дисипацію k , на відміну від решта області, визначаються на

основі гіпотези про локальну рівновагу, відповідно до якої генерація турбулентної енергії і швидкість її дисипації вважаються рівними одна одній. Це дає наступні співвідношення:

$$P_k = \frac{\tau_w^2}{\kappa \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} u_P}, \quad (1.55)$$

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa u_P}. \quad (1.56)$$

Рівняння (1.45) перенесення ε в пристінних комірках не розв'язується. Замість цього для визначення швидкості дисипації використовується співвідношення (1.56).

Таким чином, рівняння (1.43) і співвідношення (1.51), (1.55), (1.56) дозволяють обчислити значення турбулентної енергії і швидкості її дисипації в пристінковій області, а також визначити тертя на стінці. При цьому, окрім умови (1.54) не вимагається виставляти інших граничних умов для k та ε .

Теплообмін в турбулентному потоці при використанні стандартної $k-\varepsilon$ моделі турбулентності розраховується на основі рівняння (1.22), яке у припущенні про скалярний коефіцієнт турбулентної теплопровідності записується в наступному вигляді:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p w_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (1.57)$$

де турбулентна теплопровідність визначається по формулі

$$\lambda_t = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t}, \quad (1.58)$$

а турбулентне число Прандтля приймається рівним $Pr_t = 0.85$.

Метод пристінних функцій дає для зв'язку температури T_w і густини теплового потоку q_w на стінці зі значенням температури T_P у найближчому до стінки сітковому вузлі наступні співвідношення:

$$\frac{(T_w - T_P) \rho C_\mu^{0.25} k_P^{0.5}}{q_w} = \begin{cases} Pr y_P^+ \quad (Pr y_P^+ < 11.5), \\ Pr_t \left[\frac{1}{\kappa} \ln(E y_P^+) + P \right] \quad (Pr y_P^+ > 11.5). \end{cases} \quad (1.59)$$

В якості граничних умов задається або значення T_w , або густина теплового потоку q_w . Ми розглядаємо тут нестисливу рідину з постійними значеннями фізико-механічних констант (μ, c_p, λ). Тому до рівняння (1.57) та співвідношення (1.59) не включені доданки, що відповідають тепловиділенню за рахунок в'язкої дисипації. Для цього випадку теплову задачу на основі рівнянь (1.57) і рівностей (1.58), (1.59) можна розв'язувати незалежно після розв'язання динамічної задачі на основі рівнянь (1.38), (1.14), (1.43), (1.45) із замикаючими співвідношеннями.

Стандартне формулювання $k - \epsilon$ моделі у поєднанні з використанням пристінних функцій дозволяє досить адекватно моделювати турбулентні течії при високих значеннях місцевого турбулентного числа Рейнольдса у випадках, коли вплив пристінкових ефектів не такий істотний, щоб чинити помітний вплив на характер течії в усій області. В той же час, у низці випадків не виконуються умови локальної рівноваги, що покладені в основу формулювання пристінних функцій. Серед інших до таких випадків належить і наявність інтенсивного відсмоктування або вдування рідини крізь поверхню стінки, що має велике прикладне значення у задачах конвективного теплообміну. У такій ситуації потрібно детальне

моделювання на основі розв'язання усіх диференціальних рівнянь перенесення в межах буферної області і в'язкого підшару. Для цього потрібний дуже малий крок сітки в пристінковій області (зазвичай приймається $u_r^+ < 1$), що істотно підвищує вимоги до обчислювальних ресурсів (обсяг пам'яті і час розрахунку). Окрім цього, при малих значеннях Re_τ джерельні члени рівнянь перенесення (1.43), (1.45) потребують в коригування. Відповідні питання послідовно розглядаються, наприклад, в роботі [7].

SST $k - \omega$ модель Ментера

Першою двохпараметричною диференціальною моделлю турбулентності, запропонованою Колмогоровим [15], була модель, що містить рівняння перенесення кінетичної енергії турбулентності k і дисипації на одиницю турбулентної енергії ω (див. формулу (1.40)). У 1970 р. Сафмен запропонував $k - \omega$ модель, яка має певні переваги [7] по відношенню до колмогоровської версії. Надалі Вилкокс, Саффмен та ін. розвинули і апробували моделі цього сімейства. За своєю суттю ці моделі є низькорейнольдсовими і, отже, добре пристосованими для моделювання пристінної турбулентності. В той же час ця модель дещо гірше описує вільні зсувні течії.

У 1993 р. Ментер запропонував модель, яка поєднує в собі сильні сторони $k - \omega$ моделі, що полягають в урахуванні низькорейнольдсових ефектів в пристінковій області, і переваги $k - \epsilon$ моделі у розрахунку зсувних турбулентних течій далеко від твердої поверхні. Для цього $k - \epsilon$ модель було переформульовано у термінах k і ω , а потім уведена емпірична згладжувальна функція, яка забезпечує плавний перехід від $k - \omega$ моделі у

пристінковій області до $k-\varepsilon$ моделі далеко від твердої стінки. Завдяки врахуванню перенесення зсувних напружень при визначенні турбулентної в'язкості, що також є однією з відмінних рис моделі, модель Ментера називають моделлю перенесення зсувних напружень (Shear Stress Transport) або SST $k-\omega$ моделлю. Вона є моделлю нової генерації і, при цьому, пройшла всебічну апробацію. Її детальний опис можна знайти, наприклад, в роботах [7, 17]. Тут наведемо короткий опис, що містить в замкненому вигляді сукупність усіх необхідних для розрахунку характеристик турбулентності та турбулентної в'язкості виразів.

Рівняння перенесення турбулентної енергії та питомої швидкості її дисипації мають вигляд:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_k - Y_k, \quad (1.60)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + P_\omega - Y_\omega + D_\omega. \quad (1.61)$$

Для визначення турбулентної в'язкості використовується співвідношення

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\sqrt{2S_{ij}S_{ij}} F_2}{a_1 \omega} \right]}, \quad (1.62)$$

де S_{ij} – компоненти тензора швидкостей деформації осередненого руху (див. формулу (1.44)). Згладжувальна функція F_2 уводиться таким чином:

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2), \quad \Phi_2 = \max \left[\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right], \quad (1.63)$$

де y – найкоротша відстань до найближчої стінки.

Через коефіцієнт α^* здійснюється низькорейнольдсова корекція, що призводить до пригнічення турбулентної в'язкості при малих Re_t . Цей коефіцієнт визначається наступними співвідношеннями:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + \frac{Re_t}{R_\omega}}{1 + \frac{Re_t}{R_\omega}} \right), \quad Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}, \quad \alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}. \quad (1.64)$$

Турбулентні числа Прандтля для k і ω розраховуються згідно виразів

$$\sigma_k = (F_1/\sigma_{k,1} + (1-F_1)/\sigma_{k,2})^{-1}, \quad \sigma_\omega = (F_1/\sigma_{\omega,1} + (1-F_1)/\sigma_{\omega,2})^{-1}, \quad (1.65)$$

де згладжувальна функція F_1 визначається таким чином:

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4), \quad \Phi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2} \right], \quad (1.66)$$

$$D_\omega^+ = \max \left[2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right), 10^{-20} \right].$$

Генерація турбулентної енергії визначається аналогічно (1.44):

$$P_k = 2\mu_t S_{ij} S_{ij},$$

а генерація ω – виразом

$$P_\omega = \frac{a\rho}{\mu_t} P_k, \quad (1.67)$$

у якому низькорейнольдсова корекція здійснюється за допомогою

множника

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left(\frac{\alpha_0 + \text{Re}_t / R_\omega}{1 + \text{Re}_t / R_\omega} \right), \quad (1.68)$$

де α^* і турбулентне число Рейнольдса Re_t визначаються виразами (1.64).

Емпірична величина α_∞ в (1.68) визначається так:

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty,1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty,2}, \quad \alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,1} \sqrt{\beta_\infty^*}},$$

$$\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,2} \sqrt{\beta_\infty^*}}. \quad (1.69)$$

Дисипативний джерельний член у рівнянні (1.60) перенесення турбулентної енергії визначається виразами:

$$Y_k = \rho \beta^* k \omega, \quad \beta^* = \beta_\infty^* \left(\frac{4/15 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4} \right). \quad (1.70)$$

Дисипація ω в рівнянні (1.61) описується доданком Y_ω , який має наступний вигляд:

$$Y_\omega = \rho \beta \omega^2, \quad \beta = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2}. \quad (1.71)$$

При записі рівнянь перенесення k , ε у термінах k і ω , в рівнянні (1.61) з'являється відсутній в стандартній $k - \omega$ моделі перехресний дифузійний член, представлений виразом:

$$D_{\omega} = 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right). \quad (1.72)$$

Емпіричні константи моделі, присутні у виразах (1.62) – (1.72), визначені таким чином:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.41, \quad a_1 = 0.31, \quad R_{\omega} = 2.95, \quad R_k = 6, \quad R_{\beta} = 8, \quad \alpha_0 = 1/9, \quad \alpha_{\infty}^* = 1, \\ \beta_i &= 0.072, \quad \beta_{i,1} = 0.075, \quad \beta_{i,2} = 0.0828, \quad \beta_{\infty}^* = 0.09, \quad \sigma_{k,1} = 1.176, \\ \sigma_{\omega,1} &= 2.0, \quad \sigma_{k,2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega,2} = 1.168. \end{aligned}$$

Гранична умова для k має вигляд (1.54). Для ω на твердій гладкій стінці ($y=9$) використовується гранична умова

$$\omega = 10 \frac{\mu}{\rho \beta_{i,1} \Delta y^2},$$

де Δy – пристінковий крок сітки. Ця умова прийнятна [7] коли $\Delta y^+ = y_p^+ < 3$.

На відміну від рівняння (1.45) для ε , рівняння (1.61) для ε залишається виправданим і при малих Re_t поблизу стінки. Тому його можна розв'язувати з вказаною вище граничною умовою, не використовуючи пристінних функцій. Проте це вимагає, як вказано вище, досить дрібної пристінкової сітки. Принципово можна використати і грубішу сітку ($y_p^+ > 30$) у поєднанні з описаним вище методом пристінних функцій, які доповнюються співвідношенням (1.40) для зв'язку ω та ε .

Для розрахунку теплообміну використовуються рівняння (1.57) – (1.59), доповнені співвідношенням (1.62) для визначення турбулентної в'язкості з необхідними замикаючими співвідношеннями.

Модель Спаларта–Алмареса

Ще однією малодисипативною диференціальною моделлю турбулентності останньої генерації є однопараметрична модель, яку запропоновано Спалартом і Алмаресом в 1992 р. Модель була спеціально сконструйована для завдань зовнішнього обтікання профілів в аерокосмічних дослідженнях і добре зарекомендувала себе для розрахунку примежових шарів з додатним градієнтом тиску. Вона також завоювала популярність у застосуванні до турбомашин. В оригінальній формі модель Спаларта–Алмареса (SA) є низькорейнольдсовою моделлю, що вимагає використання досить дрібної сітки в пристінковій області.

Модель SA засновано на розв'язанні одного диференціального рівняння перенесення величини \hat{v} , яка є модифікованою турбулентною кінематичною в'язкістю. Відповідне рівняння має вигляд:

$$\rho \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \rho \hat{v}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} \right) + P_v + \frac{C_{b2}}{\sigma_v} \rho \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} - Y_v, \quad (1.73)$$

де P_v – генерація турбулентної в'язкості; Y_v – розсіювання (дисипація) турбулентної в'язкості, що виникає в пристінковій області внаслідок блокування турбулентних пульсацій і в'язкого демпфування; σ_v, C_{b2} – модельні константи.

Турбулентна в'язкість визначається на основі рівності

$$\mu_t = \rho \hat{v} f_{v1}, \quad (1.74)$$

де демпфівальна функція f_{v1} має вигляд

$$f_{\text{vl}} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\text{vl}}^3}, \quad \chi = \frac{\hat{v}}{v}.$$

Член генерації моделюється виразом

$$P_v = C_{b1} \rho \hat{S} v,$$

де

$$\hat{S} = S + \frac{v}{\kappa^2 y^2} \left(1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\text{vl}}} \right). \quad (1.75)$$

C_{b1} та κ є постійними величинами, y означає відстань до найближчої стінки, а через S позначена скалярна величина, яка характеризує неоднорідність поля швидкостей усередненого руху. В оригінальному варіанті моделі ця величина визначалася на основі згортки тензора ротації поля осередненої швидкості:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right),$$

що відповідає припущенню про визначальну роль завихреності в генерації турбулентності. Проте, подальші дослідження показали, що в загальному випадку при визначенні генерації турбулентної в'язкості слід також брати до уваги вплив деформації поля усереднених швидкостей. У роботі [18] запропоновано модифікований вираз для S , який враховує цю обставину і має наступний вигляд:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} + 2 \min \left(0, \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \right). \quad (1.76)$$

Оригінальна модель досить добре працює в пристінковій області, яка

представляла найбільший інтерес при створенні моделі. Скоректований варіант (1.76) є більш прийнятним при розрахунку відривних течій.

Дисипативний член у рівнянні (1.73) визначається таким чином:

$$Y_V = C_{w1} \rho f_w \left(\frac{\hat{v}}{y} \right)^2,$$

де

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^2 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = \frac{\hat{v}}{\hat{S} \kappa^2 y^2} + C_{w2} \left(\left(\frac{\hat{v}}{\hat{S} \kappa^2 y^2} \right)^6 - \frac{\hat{v}}{\hat{S} \kappa^2 y^2} \right).$$

У останній рівності величини C_{w1}, C_{w2}, C_{w3} – сталі коефіцієнти, а величина \hat{S} визначається рівністю (1.75).

Моделльні константи визначені таким чином:

$$C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \sigma_v = 2/3, \quad C_{v1} = 7.1,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_v}, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0, \quad \kappa = 0.4187.$$

Гранична умова на стінці формулюється очевидним способом:

$$\hat{v} = 0.$$

При досить дрібній для визначення в'язкого підшару сітці, напруження тертя на стінці визначається за формулою (1.53).

Для розрахунку теплообміну використовуються рівняння (1.57), (1.58) з урахуванням співвідношення (1.74) для визначення μ_t .

1.7 ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1) За якого режиму течії, ламінарного чи турбулентного, гідравлічне тертя на стінках труби буде більшим при однаковій витраті рідини і як це обґрунтувати?
- 2) Що називається критичним числом Рейнольдса і в чому особливість так званого нижнього критичного числа Рейнольдса?
- 3) Що називають явищем перемежовування та якою величиною воно характеризується?
- 4) Які фактори впливають на значення критичного числа Рейнольдса для потоків у каналах?
- 5) Як розуміти поняття «стаціонарний турбулентний рух»?
- 6) Як визначається однорідна та ізотропна турбулентність?
- 7) Що називають крупними та дрібномасштабними турбулентними вихорами? В чому полягає «каскадний механізм» Колмогорова–Річардсона передачі енергії в турбулентних потоках?
- 8) Як визначається величина, що характеризує інтенсивність турбулентних пульсацій швидкості?
- 9) В чому різниця між потоками кількості руху (імпульсу) через елементарні площадки у ламінарному русі рідини і в осередненому турбулентному русі?
- 10) Як визначається тензор напружень Рейнольдса і в чому його фізичний сенс?
- 11) Чим обумовлені турбулентні потоки тепла і як вони визначаються?
- 12) Які міркування сприяють введенню понять турбулентної в'язкості та турбулентної теплопровідності?

13) В чому різниця між коефіцієнтами молекулярної та турбулентної в'язкості та теплопровідності?

14) В чому фізичний сенс довжини «шляху перемішування» у теорії Прандтля?

15) Як визначається турбулентна в'язкість згідно теорії «шляху перемішування»?

16) Як визначаються універсальні безрозмірні координати в теорії пристінних турбулентних течій?

17) Що називають «законом стінки» в теорії турбулентності і яким є його аналітичний вираз?

18) На які основні ділянки поділяють пристінні турбулентні течії і якими є розміри цих ділянок?

19) Як визначається довжина путі перемішування у межах ламінарного підшару та буферної зони?

20) Що називають формулою Клаузера?

21) В чому полягає ідея так званих двошарових алгебраїчних моделей турбулентності?

22) В яких випадках застосування методу крупних вихорів (LES) є оптимальним?

23) В чому полягає гіпотеза «Бусінеска» в теорії турбулентності і чому її основні переваги та недоліки?

24) В чому основні переваги та недоліки стандартної $k - \epsilon$ моделі турбулентності?

25) Для чого було розроблено метод пристінних функцій?

26) Якими є основні правила використання стандартних пристінних функцій?

27) Якими є вимоги до розрахункової сітки у пристінній області при

використанні моделей турбулентності $k - \epsilon$, SST $k - \omega$ і Спаларта-Аллмареса?

28) В чому основні переваги SST $k - \omega$ моделі турбулентності?

29) Чим пояснюється широке застосування диференціальних моделей турбулентності при розрахунках теплообмінних та гідродинамічних процесів?

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

2.1 ПОНЯТТЯ ПРО ПРИМЕЖОВИЙ ШАР

Аналіз рівняння (1.19) показує, що температурне поле в потоці, яке визначає процес тепловіддачі між газом і стінкою, залежить від розподілу швидкості в каналі. Тому для розв'язання теплової задачі необхідно спочатку розв'язати гідродинамічну задачу, яка визначається системою рівнянь (1.13)-(1.14).

Рівняння Навьє–Стокса є нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку в часткових похідних. Розв'язати аналітично цю систему в загальному вигляді, навіть за сталих значень теплофізичних параметрів потоку, досі не вдалося. У зв'язку з труднощами математичного характеру при розв'язанні цих рівнянь Прандтль в 1904 р. запропонував метод спрощення рівнянь Навьє–Стокса в області малої в'язкості потоку (за умов великих чисел Рейнольдса).

Розглянемо підхід Прандтля на прикладі стаціонарного плоскопаралельного потоку рідини, який обтікає пластину. Потік рідини поділяється на дві області (рис. 2.1): примежовий шар (1) і зовнішній потік (2).

Примежовим шаром називають область течії в'язкої теплопровідної рідини, що характеризується малою товщиною (в порівнянні з подовжніми розмірами області течії) і значним поперечним градієнтом величини, зміною якої обумовлений процес перенесення кількості руху, тепла або речовини. Природно, що примежовий шар, який характеризується великим поперечним градієнтом подовжньої складової швидкості, що забезпечує

поперечне перенесення кількості руху, називають *динамічним примежовим шаром*. Примежовий шар, що характеризується великим поперечним градієнтом температури, називають *тепловим примежовим шаром*.

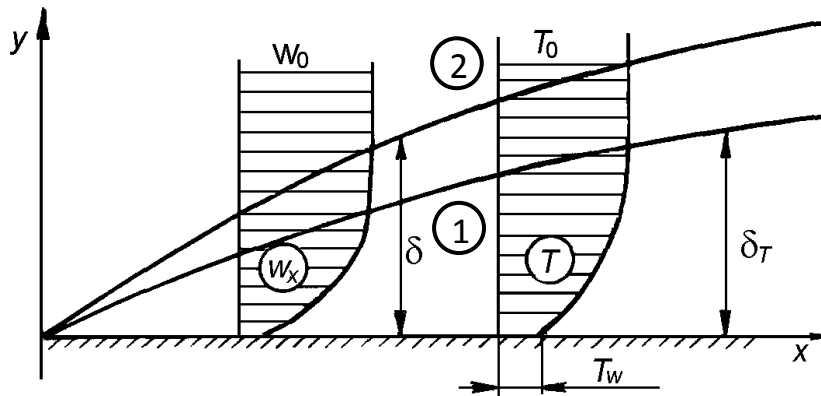


Рис.2.1. Розвиток примежового шару на плоскій поверхні

Поперек динамічного і теплового примежових шарів швидкість і температура різко змінюються від значень на стінці до значень, що відповідають зовнішньому потоку (W_0 , T_0). При цьому на стінці швидкість дорівнює нулю, а температура потоку і стінки рівні між собою (T_w).

Товщиною примежового шару називається умовна величина, що визначає відстань по нормалі до стінки, на якій характерний параметр потоку (швидкість, температура, концентрація речовини) із заданою точністю досягає величин, що відповідають параметрам зовнішньої течії (W_0 , T_0). Оскільки процес зміни швидкості і температури є асимптотичним, то в теорії примежового шару постулюється, що товщини динамічного (δ) і теплового (δ_T) примежового шарів є скінченними величинами, що визначаються з наступних умов на їх зовнішніх границях:

$$y = \delta, \quad w_x = \varepsilon W_0, \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0,$$

$$y = \delta_T, \quad T = \varepsilon T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

де ε – константа, числове значення якої приймається рівним 0.99.

Виділення в потоці області примежового шару спрощує основні рівняння, які визначають процеси течії і теплообміну, що дозволяє в деяких окремих випадках отримати аналітичний розв'язок.

2.2 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

Отримаємо основні рівняння, що описують плоску неізотермічну течію рідини в примежовому шарі. Рівняння Нав'є–Стокса (1.13) і нерозривності (1.14) для нестисливої рідини з незмінними теплофізичними властивостями для плоского двовимірного потоку мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Спрощення рівнянь (2.1) виконується на основі оцінювання порядків величин, що входять в рівняння, і відкидання малих параметрів.

Для з'ясування суті оцінювання розглянемо наступний приклад.

Якщо задані змінні x і y , які змінюються відповідно в межах $[0, x_0]$ і $[0, y_0]$, то при оцінці порядку значень змінних x і y вказують, що x визначена, як величина порядку x_0 , а y – порядку y_0 . Математично це записується таким чином $O(x) = x_0$, $O(y) = y_0$. Порядок похідної визначається з виразу:

$$O\left(\frac{dy^m}{dx^m}\right) = \frac{y_0}{x_0^m}.$$

Спочатку розглянемо рівняння нерозривності. Величина w_x змінюється від 0 до W_0 , а координата x змінюється від 0 до L , де L – деякий характерний подовжній розмір. У зв'язку з цим

$$O\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right) = \frac{W_0}{L}.$$

Оскільки обидва члени рівняння нерозривності повинні мати однаковий порядок, то

$$O\left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right) = \frac{W_0}{L}.$$

Оскільки $0 \leq y \leq \delta$, то згідно з останнім виразом напишемо

$$O\left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right) = \frac{O(w_y)}{\delta} = \frac{W_0}{L},$$

звідки виходить рівняння для порядку поперечної складової швидкості

$$O(w_y) = W_0 \frac{\delta}{L}. \quad (2.2)$$

Основним допущенням теорії примежового шару є умова малості величини δ у порівнянні з характерним подовжнім розміром тіла L . Тому

внаслідок нерівності $(\delta/L) \ll 1$ з рівняння (2.2) виходить, що порядок величини w_y є набагато меншим за порядок величини w_x .

Оцінимо далі порядок членів, що входять в перше рівняння системи (2.1). Результати оцінки окремих складових наведено нижче:

$$\begin{aligned}
 O\left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}\right) &= W_0 \frac{W_0}{L} = \frac{W_0^2}{L}, & O\left(w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}\right) &= W_0 \frac{\delta W_0}{L \delta} = \frac{W_0^2}{L}, \\
 O\left(v \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}\right) &= v \frac{W_0}{L^2} = \frac{v}{W_0 L} \frac{W_0^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{W_0^2}{L}, & & (2.3) \\
 O\left(v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right) &= v \frac{W_0}{\delta^2} = \frac{W_0^2}{W_0 L} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{W_0^2}{L},
 \end{aligned}$$

де $\text{Re} = \frac{W_0 L}{v}$ – число Рейнольдса набігаючого потоку.

Аналіз виразів (2.3) показує, що другий і третій члени лівої частини першого рівняння (2.1) мають порядок $\frac{W_0^2}{L}$. Порядок величини $v \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$, внаслідок умови $(L/\delta) \gg 1$, набагато менше порядку величини $v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$.

Член $\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{W_0^2}{L}$ матиме однаковий порядок з інерційними членами лівої частини лише за умови, що

$$O\left(\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right) = 1.$$

Останнє має місце при $\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$, тобто при досить великих числах

Рейнольдса. Отже, основне допущення теорії примежового шару $(\delta/L) \ll 1$ виконуватиметься при $Re > 100$.

Аналізуючи далі перше рівняння системи (2.1), прийнемо, що перший член лівої частини має такий самий порядок, як і другий. Таке допущення може бути зроблене для течій, у яких не виникають раптові прискорення [2].

Таким чином, у наближенні теорії двовимірного примежового шару рівняння руху в проекції на вісь x запишеться в наступному вигляді:

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (2.4)$$

Розглянемо друге рівняння системи (2.1). Аналіз оцінок, наведених вище, дозволяє зробити висновок, що усі члени другого рівняння мають порядок величини $\frac{W_0^2 \delta}{L L}$, тобто набагато менший за порядок членів, які входять до першого рівняння системи (2.1). Отже, друге рівняння цієї системи для області примежового шару набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

що означає постійність статичного тиску за товщиною примежового шару. Цей факт дає можливість для стаціонарних течій розглядати величину подовжнього градієнта статичного тиску в рівнянні (2.4) як повну похідну $\frac{dp}{dx}$.

Отже, рівняння Навьє–Стокса і нерозривності у *наближенні теорії примежового шару* мають вигляд:

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$
(2.5)

Ці рівняння уперше були отримані Прандтлем в 1904 р. і називаються *диференціальними рівняннями динамічного примежового шару*.

Якщо увести до розгляду дотичну напругу тертя в потоці (τ), то перше з рівнянь (2.5) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$
(2.6)

Диференціальне рівняння теплового примежового шару може бути отримано на основі оцінки порядку членів рівняння (1.19). Перепишемо це рівняння для плоского двовимірного випадку таким чином:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$
(2.7)

Воно може бути наведено також у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial q}{\partial y},$$
(2.8)

де q – густина теплового потоку в довільній точці примежового шару.

Слід зауважити, що розділення потоку на примежовий шар і зовнішню течію можливо не завжди (наприклад, при відривних течіях,

потоках із закручуванням, дискретному вдуванні крізь поверхню і таке інше). Для цих умов необхідно використати повну систему рівнянь руху і енергії.

Для розв'язання рівнянь динамічного і теплового примежових шарів необхідно задати відповідні умови однозначності. Зокрема, для стаціонарних умов $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, граничні умови мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad w_x = w_y = 0, T = T_w(x), \\ y = \delta: \quad w_x = W_0(x), \\ y = \delta_T: \quad T = T_0(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

де δ і δ_T – товщина динамічного і теплового примежових шарів; T_w – температура поверхні; W_0 – швидкість зовнішнього потоку.

Рівняння (2.5), (2.6), (2.8) можуть бути використані для розрахунку ламінарних і турбулентних потоків. У останньому випадку актуальні значення швидкостей і температур в цих рівняннях слід замінити на осереднені, а в'язкість μ і теплопровідність λ представити у вигляді суми двох параметрів, що визначають молекулярне і турбулентне перенесення кількості руху і теплоти:

$$\mu_{\Sigma} = \mu - \rho \overline{w'_y w'_x} \Big/ \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad \lambda_{\Sigma} = \lambda - \rho C_p \overline{w'_y \cdot T'} \Big/ \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}.$$

Приведемо також запис диференціальних рівнянь перенесення імпульсу (2.6) і теплоти (2.8) в примежовому шарі для поширеного випадку стаціонарного та стисливого потоку:

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$c_p \rho w_x \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (2.11)$$

2.3 ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

Точний розв'язок рівнянь примежового шару можна отримати при ламінарному режимі течії для деяких окремих випадків. Для турбулентного потоку розв'язання цих рівнянь можуть бути отримані лише на основі напівемпіричних теорій, які ґрунтуються на закономірностях осередненого і пульсаційного рухів турбулентної течії.

Проте застосування напівемпіричних методів розрахунку не завжди призводить до задовільних результатів. У зв'язку з цим великого практичного значення набувають наближені методи розв'язання задач примежового шару, особливо методи, що засновані на використанні рівнянь примежового шару в інтегральній формі, які називаються інтегральними співвідношеннями імпульсів і енергії для примежового шару. Наближеність цього методу полягає в тому, що в цьому випадку відмовляються від застосування диференціальних рівнянь в кожній точці примежового шару, а обмежуються їх задоволенням у середньому за його товщиною при виконанні граничних умов (2.9) на стінці каналу і при переході до зовнішньої течії.

Інтегральні співвідношення примежового шару можуть бути отримані при аналізі балансу кількості руху і енергії диференціально малих об'ємів примежового шару, а також безпосереднім інтегруванням рівнянь (2.6) та (2.9) (або (2.10), (2.11)). Як приклад застосуємо другий

метод до рівняння динамічного примежового шару (2.10).

Оскільки за межами примежового шару виконуються умови $\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0$, то, записуючи рівняння (2.10) для зовнішньої границі примежового шару, отримаємо:

$$-\frac{dP_0}{dx} = \rho_0 W_0 \frac{dW_0}{dx}, \quad (2.12)$$

де P_0 , ρ_0 , W_0 – значення відповідних параметрів на зовнішній границі динамічного примежового шару (у ядрі потоку).

Внаслідок незмінності статичного тиску поперек примежового шару рівняння (2.12) можна записати таким чином:

$$\frac{dP_0}{dx} = \frac{dP}{dx} = -\rho_0 W_0 \frac{dW_0}{dx}. \quad (2.13)$$

Після підстановки виразу (2.13) в рівняння (2.10) отримаємо наступний запис рівняння примежового шару:

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \rho_0 W_0 \frac{dW_0}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Проінтегруємо рівняння (2.14) в межах від 0 до δ , вважаючи стінку каналу непроникною:

$$\int_0^{\delta} \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = \int_0^{\delta} \rho_0 W_0 \frac{dW_0}{dx} dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy. \quad (2.15)$$

Розглянемо другий інтеграл в лівій частині рівняння (2.15). Після застосування правила інтегрування по частинах його можна записати так:

$$\int_0^{\delta} \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = (\rho w_y) w_x \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) dy.$$

Оскільки для заданих умов на стінці каналу $w_x = w_y = 0$, а з рівняння нерозривності (останнє з рівнянь (2.1)) виходить

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x), \quad (\rho w_y)_0 = \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) dy = -\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) dy,$$

то рівняння (2.15) можна перетворити таким чином:

$$\int_0^{\delta} \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) dy - W_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy = \frac{dW_0}{dx} \int_0^{\delta} \rho_0 W_0 dy - \tau_w, \quad (2.16)$$

де τ_w – дотичне напруження тертя на поверхні каналу. Рівняння (2.16) після групування перших двох членів запишемо в скороченій формі:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy - W_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy - \frac{dW_0}{dx} \int_0^{\delta} \rho_0 W_0 dy = -\tau_w.$$

Перетворимо останню рівність. Для цього запишемо її у модифікованому вигляді –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\rho_0 W_0^2 \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x^2}{\rho_0 W_0^2} dy \right] - \frac{d}{dx} \left[\rho_0 W_0^2 \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x W_0}{\rho_0 W_0^2} dy \right] + \frac{dW_0}{dx} \left[\rho_0 W_0 \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0} dy \right] - \\ - \frac{dW_0}{dx} \left[\rho_0 W_0 \int_0^{\delta} dy \right] = -\tau_w, \end{aligned}$$

і далі згрупуємо окремі члени, змінивши знаки:

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_0 W_0^2 \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0} \cdot \left(1 - \frac{w_x}{W_0} \right) dy \right] + \frac{dW_0}{dx} \left[\rho_0 W_0 \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0} \right) dy \right] = \tau_w. \quad (2.17)$$

Перший з інтегралів, що входять в ліву частину рівняння (2.17) носить назву товщини втрати імпульсу δ^{**} , а другий – товщини витіснення δ^* . Фізичний сенс умовних товщин примежового шару δ^* і δ^{**} детально розглядається в курсах газодинаміки, наприклад у роботі [19]. Таким чином, рівняння (2.17) набуває наступного вигляду:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{(2\delta^{**} + \delta^*)}{W_0} \frac{dW_0}{dx} + \frac{\delta^{**}}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2}. \quad (2.18)$$

Це рівняння носить назву інтегрального співвідношення імпульсів, або рівняння Кармана. Воно виконується для ламінарного і турбулентного примежових шарів.

Для нестисливої рідини його можна спростити, оскільки в цьому випадку $\frac{d\rho_0}{dx} = 0$:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{2\delta^{**} + \delta^*}{W_0} \frac{dW_0}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2}. \quad (2.19)$$

Для подальшого аналізу введемо такі позначення:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho_0 W_0^2}; \quad \text{Re}^{**} = \frac{\rho_0 W_0 \delta^{**}}{\mu^*}; \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}; \quad f = \frac{\delta^{**}}{W_0} \frac{dW_0}{dx};$$

де C_f – коефіцієнт тертя; μ^* – характерна в'язкість, яка не залежить від координати x .

Тоді інтегральне співвідношення імпульсів (2.19) можна записати в

наступній формі:

$$\frac{d \operatorname{Re}^{**}}{d \bar{x}} + \operatorname{Re}_L (1 + H) f = \operatorname{Re}_L \frac{C_f}{2}. \quad (2.20)$$

Тут – $\bar{x} = \frac{x}{L}$; L – характерна довжина поверхні; $\operatorname{Re}_L = \frac{\rho_0 W_0 L}{\mu^*}$ – число

Рейнольдса, побудоване за характерним розміром тіла.

Величини f і H мають сенс чисел подібності, що характеризують аеродинамічну кривизну примежового шару, і називаються формпараметрами примежового шару [20]. Параметри δ^* і δ^{**} можуть розглядатися як деякі динамічні лінійні масштаби примежового шару. У зв'язку з цим δ^{**} може використовуватися як характерний розмір при побудові числа Re^{**} . Якщо поняття товщини примежового шару δ носить до певної міри суб'єктивний характер, або пов'язано з точністю вимірювання швидкостей, то товщини δ^* та δ^{**} є цілком однозначними функціями течії.

В деяких випадках (при течії з великими позитивними градієнтами тиску) в розрахунках замість (2.20) використовується узагальнене рівняння Кармана, яке дає кращі результати:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2 + H) = \frac{C_f}{2} - \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\overline{w_x'^2} - \overline{w_y'^2}}{W_0^2} dy,$$

де $\overline{w_x'^2}$, $\overline{w_y'^2}$ – нормальні рейнольдсові напруження. Їх фізичний сенс розглядається в спеціальній літературі по турбулентних течіях [3].

При обтіканні газом проникної поверхні, крізь яку підводиться додаткова маса в примежовий шар, інтегральне співвідношення імпульсів

записується таким чином:

$$\frac{d\text{Re}^{**}}{d\bar{x}} + \text{Re}_L(1+H)f - \frac{(\rho V)_w}{\rho_0 W_0} \text{Re}_L = \frac{C_f}{2} \text{Re}_L. \quad (2.21)$$

Тут $(\rho V)_w$ – густина масової витрати речовини, яка вдувається.

Рівняння енергії

Інтегральне співвідношення енергії можна отримати інтеграцією рівняння енергії (2.11) в межах теплового примежового шару (від 0 до δ_T) з урахуванням рівняння нерозривності. В цьому випадку отримаємо інтегральне співвідношення, аналогічне рівнянню Кармана (2.18) для імпульсу:

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \frac{\frac{d}{dx}(\rho_0 W_0)}{\rho_0 W_0} + \frac{\delta_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{q_w}{C_p \rho_0 W_0 \Delta T}, \quad (2.22)$$

яке називається інтегральним співвідношенням енергії.

Тут $\Delta T = T_0 - T_w$; ($T_0 > T_w$) – різниця температур ядра потоку та стінки.

Величина

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0} \left(1 - \frac{T_w - T}{T_w - T_0} \right) dy$$

називається *товщиною втрати енергії* і має, як і товщина втрати імпульсу, зміст характерного лінійного масштабу теплового примежового шару. У зв'язку з цим параметр δ_T^{**} може використовуватися як визначальний розмір при побудові безрозмірних комплексів.

Введемо позначення:

$$St = \left(\frac{q_w}{C_p \rho_0 W_0 \Delta T} \right); \quad Re_T^{**} = \frac{\rho_0 W_0 \delta_T^{**}}{\mu^*},$$

де St – число Стентона, Re_T^{**} – число Рейнольдса, яке визначено за товщиною втрати енергії.

Тоді рівняння (2.22) після перетворення матиме наступний вигляд:

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} = St \cdot Re_L. \quad (2.23)$$

При обтіканні проникної поверхні інтегральне співвідношення енергії записується так:

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} - \frac{(\rho V)_w}{\rho_0 W_0} Re_L = St \cdot Re_L. \quad (2.24)$$

Усі позначення раніше розглядалися при виведенні інтегрального співвідношення імпульсів.

Інтегральні співвідношення імпульсів (2.18) – (2.21) і енергії (2.22) – (2.24), яких отримано в цьому параграфі, утворюють систему рівнянь, що описують тертя і теплообмін на стінці каналу, тобто є математичним формулюванням вказаних фізичних явищ. Вони включають граничні умови (2.9). У цих рівняннях шукані параметри $\frac{C_f}{2}$ і St прямо пов'язані з відповідними «внутрішніми» лінійними параметрами δ^{**} і δ_T^{**} , а також з безрозмірними числами Re^{**} і Re_T^{**} .

2.4 ЗАКОНИ ТЕРТЯ І ТЕПЛООБМІНУ. КОНСЕРВАТИВНІСТЬ ДО ЗМІНИ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Система рівнянь, яку отримано в попередньому параграфі, що описує тертя і теплообмін (для більшої загальності розглядається проникна стінка):

$$\frac{d \operatorname{Re}^{**}}{d \bar{x}} + \operatorname{Re}_L (1 + H) f - \frac{(\rho V)_w}{\rho_0 W_0} \operatorname{Re}_L = \frac{C_f}{2} \operatorname{Re}_L,$$

$$\frac{d \operatorname{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\operatorname{Re}_T^{**}}{\Delta T} \cdot \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} - \frac{(\rho V)_w}{\rho_0 W_0} \operatorname{Re}_L = \operatorname{St} \cdot \operatorname{Re}_L,$$

є незамкненою. Для її замикання необхідно застосувати співвідношення, що встановлюють зв'язок між локальними ($\frac{C_f}{2}$ і St) і інтегральними (Re^{**} і Re_T^{**}) параметрами течії. Для даного випадку із структури цих рівнянь виходить, що ці закономірності мають вигляд:

$$\frac{C_f}{2} = f_1 \left(\operatorname{Re}^{**}; \frac{\delta^{**}}{W_0} \frac{dW_0}{dx}; \frac{(\rho V)_w}{\rho_0 W_0}; \frac{T_w}{T_0} \right), \quad (2.25)$$

$$\operatorname{St} = f_2 \left(\operatorname{Re}_T^{**}; \frac{\delta_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{dx}; \frac{(\rho V)_w}{\rho_0 W_0}; \frac{T_w}{T_0} \right). \quad (2.26)$$

Рівняння (2.25) і (2.26) називаються відповідно *законами тертя і теплообміну*. Визначення цих законів є основним завданням теорії примежового шару. Їх може бути отримано емпіричним шляхом або на основі відповідних напівемпіричних теорій турбулентності. Для деяких окремих випадків ламінарного примежового шару вдається встановити ці

зв'язки аналітичним шляхом.

Незважаючи на уявну складність законів тертя і теплообміну, ці залежності істотно спрощуються, що обумовлено особливими консервативними властивостями турбулентного примежового шару, які встановив В. М. Ієвлев [21], [22].

З теорії подібності фізичних явищ виходить, що якщо дослідні дані з тертя і теплообміну наведено у формі рівнянь подібності

$$\frac{C_f}{2} = f_1(\text{Re}), \quad (2.27)$$

$$\text{Nu} = f_2(\text{Re}, \text{Pr}) \quad (2.28)$$

то їх можна використовувати для розрахунку процесів тертя і теплообміну лише в тих випадках, коли граничні умови є подібними до досліджених. Наприклад, якщо рівняння подібності (2.28) отримано для постійної температури поверхні, то за умов $\frac{dT_w}{dx} \neq 0$ його можна використати лише для наближених розрахунків. Це обумовлено тією обставиною, що при зміні параметра

$$Q = \frac{1}{\rho_0 W_0 \Delta T} \frac{d(\Delta T)}{dx}$$

профіль температури в примежовому шарі (оскільки $T_0 = \text{const}$) деформується, що викликає деформацію профілю густини теплового потоку за товщиною теплового примежового шару. Відповідно змінюється і густина теплового потоку в стінку каналу. Таким чином, рівняння подібності (2.28) виявляється чутливим до зміни теплових граничних умов. Аналогічним чином рівняння подібності (2.27) є чутливим до зміни

параметра, що враховує зміну градієнта тиску за довжиною каналу:

$$P = \frac{1}{W_0} \frac{dW_0}{dx}.$$

У неізотермічних течіях рівняння подібності (2.27) і (2.28) стають чутливими до зміни параметрів P і Q одночасно.

Таким чином, наведення дослідних даних у формі (2.27) і (2.28) суттєво знижує цінність експериментальних результатів і сферу їх практичного застосування. У зв'язку з цим В.М. Ієвлевим у роботах [21], [22] запропоновано спосіб узагальнення дослідних даних щодо тертя і теплообміну, що дозволяє здолати вищезгадані недоліки. Їм показано, що в деякому інтервалі зміни параметрів P і Q можна нехтувати впливом цих величин на коефіцієнти тертя і теплообміну. Для цього необхідно експериментальні результати, що отримано, подавати у формі законів тертя і теплообміну наступного вигляду:

$$\frac{C_f}{2} = f_1(\text{Re}^{**}), \quad (2.29)$$

$$\text{St} = f_2(\text{Pr}), \quad (2.30)$$

які виявляються консервативними (нечутливими) до зміни граничних умов. Вказаний факт істотно поширює можливості теорії подібності.

В.М. Ієвлевим показано, що помилка у визначенні чисел St і $C_f/2$ по залежностях (2.29) і (2.30), що отримані без урахування параметрів P і Q , визначатиметься нерівностями:

$$\frac{\Delta\left(\frac{C_f}{2}\right)}{\frac{C_f}{2}} \leq 0,1 \left| \frac{\text{Re}^{**} \frac{dW_0}{d\bar{x}}}{\frac{C_f}{2} W_0 \text{Re}_L} \right|, \quad (2.31)$$

$$\frac{\Delta(\text{St})}{\text{St}} \leq 0,1 \left| \frac{\text{Re}_T^{**} \frac{d(\Delta T)}{d\bar{x}}}{\text{St} \Delta T \text{Re}_L} \right|. \quad (2.32).$$

У роботах С. С. Кутателадзе, О.І. Леонтьєва та їх учнів (Інститут теплофізики СВ АН СРСР) на основі усебічного експериментального дослідження турбулентних течій підтверджено, що закони тертя і теплообміну є досить консервативними до зміни граничних умов. Тому нині при розрахунку динамічного і теплового примежового шарів нехтують (але не завжди) впливом параметрів P і Q на закони тертя і теплообміну.

Як приклад розглянемо результати експериментального дослідження впливу граничних умов на закон теплообміну при обтіканні плоскої пластини [23]. Експерименти проводилися в слабонеізотермічному потоці. По довжині пластини створювалися різні закони зміни граничних умов (рис. 2.2). Дослідні дані щодо локальної тепловіддачі оброблялися за формою рівняння подібності

$$\text{St} = f(\text{Re}_x, \text{Pr})$$

де $\text{Re}_x = \rho_0 W_0 x / \mu_0$.

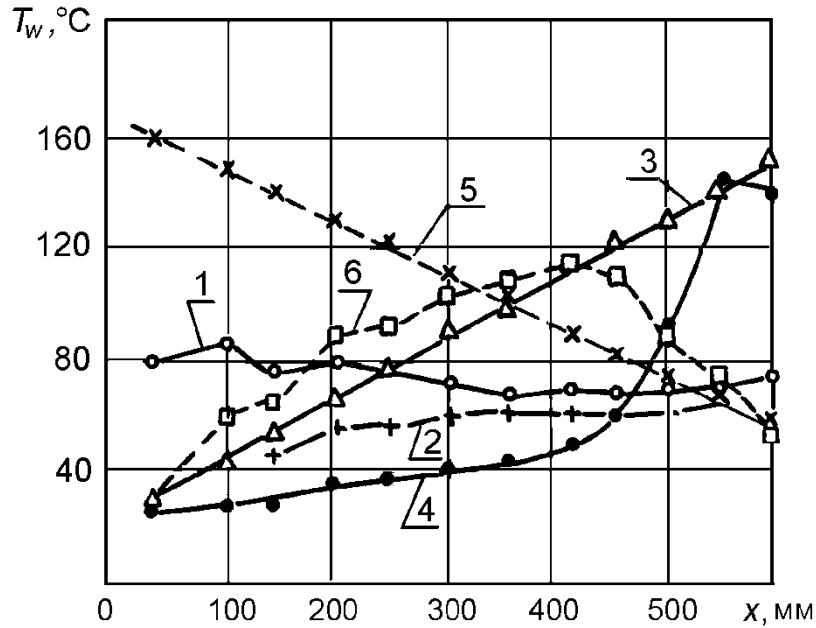


Рис. 2.2. Зміна температури стінки за довжиною пластини для різних граничних умов: 1 – $\Delta T = \text{const}$; 2 – $q_w = \text{const}$; 3 – $\Delta T = b + d_0 \bar{x}$; 4 – $q_w = q_0 \exp(k\bar{x})$; 5 – $\Delta T = b - d_0 \bar{x}$; 6 – $q_w = q_0 \sin(\pi \bar{x})$

При використанні цієї форми закону теплообміну експериментальні точки (рис. 2.3) помітно розшаровуються залежно від виду граничних умов, але задовільно узгоджуються з рівняннями подібності, які отримані для відповідних граничних умов.

На рис. 2.4 представлені дані зіставлення експериментальних результатів з теплообміну на пластині із залежністю (2.33).

Можна підрахувати відносну помилку у визначенні числа Стентона, викликану ігноруванням впливу граничних умов на закон теплообміну. Наприклад, для граничних умов $\Delta T = b + d_0 \bar{x}$ ця помилка складає

$$\frac{\Delta(\text{St})}{\text{St}} < 0.055. \text{ Проте при зменшенні температури поверхні за довжиною}$$

$$(\Delta T = b - d_0 \bar{x}) \text{ похибка дещо зростає. В цьому випадку } \frac{\Delta(\text{St})}{\text{St}} \geq 0.055.$$

Розрахунки проведені по рівнянню (2.32) для довільних значень b і d_0 .

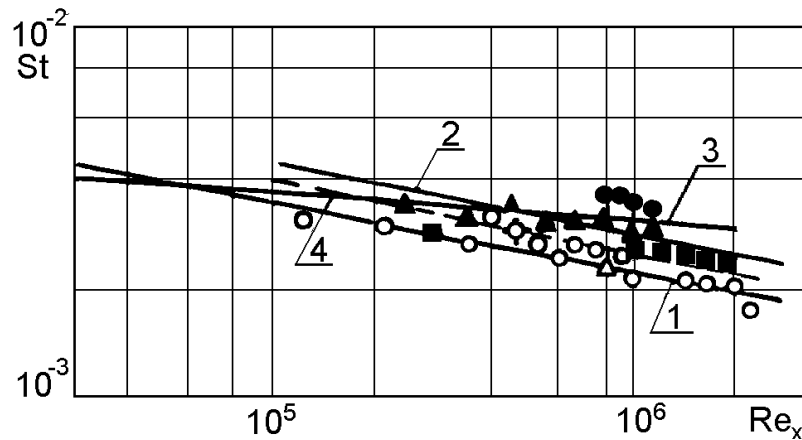


Рис.2.3. Залежність St від Re_x для різних граничних умов [23]:
 1 – $\Delta T = const$ $St = 0.0288 Re_x^{-0.2} Pr^{-0.6}$; 2 – $\Delta T = d_0 \bar{x}$ $St = 0.0338 Re_x^{-0.2} Pr^{-0.6}$;

$$3 - q_w = q_0 \exp(k\bar{x}), St = 0.0306 (k\bar{x})^{0.2} Re_x^{-0.2} Pr^{-0.6} \left(\frac{\exp(k\bar{x})}{\exp(k\bar{x}) - 1} \right);$$

$$4 - q_w = const, St = 0.0306 Re_x^{-0.2} Pr^{-0.6}$$

Представлений аналіз переконливо доводить консервативність закону теплообміну до зміни теплових граничних умов. Аналогічним чином підтверджується консервативність цього закону до зміни поздовжнього градієнту тиску [23].

2.5 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЛОКАЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Теорія локального моделювання є розвитком теорії подібності. Основна особливість цієї теорії полягає в тому, що аналітичні перетворення рівнянь, що описують даний процес, проводяться доти, поки розв'язання отриманих рівнянь не зажадає прийняття фізично обґрунтованих допущень. У задачах конвективного теплообміну в

примежовому шарі такою стадією є інтегральні співвідношення імпульсів (у одній з форм (2.18) – (2.21)) і енергії ((2.22) – (2.24)). Для їх вирішення необхідно знати закони тертя і теплообміну, які для турбулентної течії отримують в основному емпіричним шляхом.

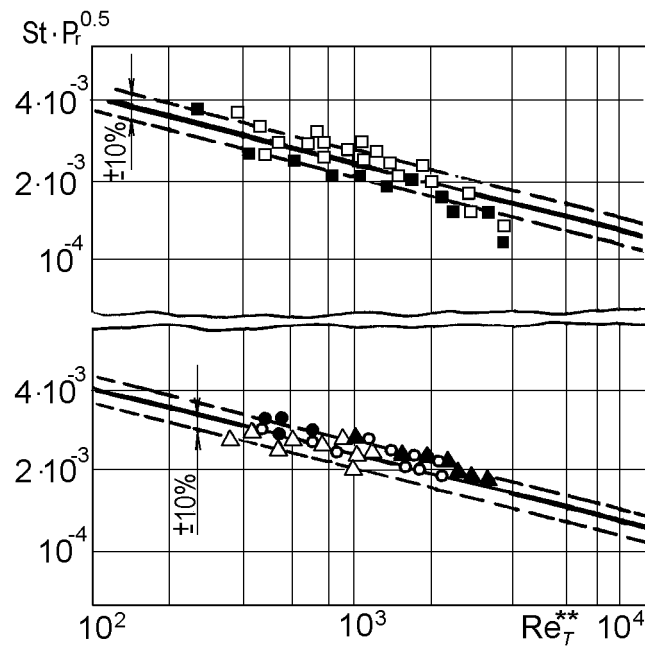


Рис. 2.4. Закон теплообміну для різних граничних умов [23]:

суцільна лінія – залежність $St = 0.0128 Re_T^{** -0.25} Pr^{-0.75}$;

○ – $\Delta T = const$; △ – $\Delta T = b + d_0 \bar{x}$; ● – $q_w = q_0 \exp(k \bar{x})$;

▲ – $q_w = const$; ■ – $\Delta T = b - d_0 \bar{x}$; □ – $q_w = q_0 \sin(\pi \bar{x})$

При використанні теорії локального моделювання для узагальнення дослідних даних по тертю і теплообміну окрім сумарних характеристик ($C_f/2$ и St) необхідно мати відомості про розподіл швидкостей і температур по перерізу примежового шару. В цьому випадку можна обчислити умовну товщину примежового шару δ^{**} і δ_T^{**} (см п.2.3), а також чисел Re^{**} та Re_T^{**} . Таким чином, експеримент має бути поставлений на

більш високому рівні, ніж при традиційній обробці.

Проте важливо підкреслити, що в деяких випадках при визначенні чисел Re^{**} і Re_T^{**} вдається уникнути вимірювання швидкостей і температур у примежовому шарі.

Розглянемо приклад застосування теорії локального моделювання для узагальнення дослідних даних з тертя і теплообміну.

Тепловіддача на пластині

Розглянемо інтегральне співвідношення енергії для течії на пластині

$$\frac{d Re_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} = Re_L St.$$

Це рівняння можна представити в більш компактнішій формі

$$\frac{d}{d \bar{x}} (Re_T^{**} \Delta T) = St Re_L \Delta T. \quad (2.34)$$

Інтегруючи рівність (2.34) у припущенні, що тепловий примежовий шар починає розвиватися з перерізу $\bar{x} = 0$, отримаємо вираз

$$Re_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\bar{x}} Re_L St \Delta T d \bar{x},$$

або, враховуючи, що $Re_L St \Delta T = \frac{q_w L}{\lambda Pr}$:

$$Re_T^{**} = \frac{\Delta T^{-1}}{\lambda Pr} \int_0^x q_w(x) dx. \quad (2.35)$$

Таким чином, вимірюючи локальну густину теплового потоку в стінку каналу (q_w), а також обчислюючи локальні значення числа Стентона, можна отримати емпіричне рівняння, яке буде законом теплообміну за даних умов.

Якщо за довжиною пластини здійснюється вдвух охолоджувача, то з інтегрального співвідношення енергії (2.24), після відповідних перетворень, можна отримати наступне рівняння:

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{\Delta T^{-1}}{\lambda \cdot \text{Pr}} \int_0^x q_w(x) \cdot dx + \frac{\Delta T^{-1}}{\mu^*} \int_0^x (\rho V)_w \Delta T \cdot dx. \quad (2.36)$$

В цьому випадку для визначення Re_T^{**} необхідно виміряти розподіл q_w , T_w та $(\rho V)_w$ за довжиною каналу. Таким чином, використання рівняння (2.36) звільняє від необхідності вимірювання швидкостей і температур в перерізах примежового шару.

С.С. Кутателадзе та О.І. Леонтєвим [23] запропоновано надавати закон теплообміну у формі

$$\text{St} = \text{St}_0 \cdot \Psi_\Sigma$$

де St_0 – закон теплообміну для безградиентної квазіізотермічної течії на пластині, який визначається рівнянням (2.33); Ψ_Σ – відносна функція, що враховує вплив збурюючих чинників на інтенсивність теплообміну. Автори монографії [23] теоретичним і експериментальним шляхом довели, що ця функція підкоряється принципу суперпозиції окремих впливів, тобто

$$\Psi_\Sigma = \Psi_T \cdot \Psi_B \cdot \Psi_M$$

де Ψ_T , Ψ_B , Ψ_M – відносні функції, що враховують відповідно вплив

неізотермічності, вдування, стисливості і таке інше на інтенсивність теплообміну. Для визначення функцій Ψ_T, Ψ_B, Ψ_M С.С. Кутателадзе та О.І. Леонтьев розробили оригінальну теорію примежового шару з вироджуваною в'язкістю [23]. Наприклад, відносна функція Ψ_T для дозвукових швидкостей визначається рівнянням

$$\Psi_T = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1} \right)^2,$$

де $\Psi = \frac{T_w}{T_0}$, що підтверджується численними експериментами різних авторів.

Поверхнєве тертя на пластині

При обробці дослідних даних з тертя в загальному випадку з рівняння імпульсів не вдається отримати явний вираз для числа Re^{**} . В цьому випадку доводиться проводити інтегрування профілю швидкості з подальшим визначенням товщини втрати імпульсу δ^{**} . При цьому коефіцієнти тертя визначаються звичайними способами [24].

У разі, коли зміна швидкості на зовнішній границі примежового шару є малою $\left(\frac{dW_0}{dx} \approx 0 \right)$ та її впливом можна нехтувати, число Re^{**} вдається виразити в явному вигляді:

$$Re^{**} = \int_0^{\bar{x}} Re_L \frac{C_f}{2} d\bar{x}.$$

Таким чином, узагальнення експериментальних даних дозволяє отримати в загальному випадку закон тертя, який також можна

представити у формі [23]:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{C_{f0}}{2} \Psi_T^* \Psi_B^* \Psi_M^*$$

де Ψ_T^* , Ψ_B^* , Ψ_M^* – відносні функції, що враховують вплив неізотермічності, вдування та стисливості на характеристики тертя [23]; $C_{f0}/2$ визначає закон тертя при ізотермічній безградієнтній течії на пластині. Для чисел Re^{**} менших, ніж 10^4 , цей закон визначається степеневим рівнянням [23]:

$$\frac{C_{f0}}{2} = 0.0128 Re^{** -0.25}.$$

Слід зауважити, що з теорії примежового шару з вироджуваною в'язкістю витікає, що для дозвукових швидкостей $\Psi_T = \Psi_T^*$.

2.6 ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1) Що називають примежовим шаром?
- 2) У якому випадку товщини динамічного та температурного примежових шарів співпадають?
- 3) На чому засновано спрощення рівнянь руху рідини та переносу тепла у межах примежового шару?
- 4) Чи змінюється тиск рідини у примежового шарі в напрямку нормалі до обтічної поверхні?
- 5) Як записуються рівняння теплообміну та гідродинаміки у примежовому шарі нестисливої рідини?
- 6) Які граничні умови використовуються у задачах конвективного теплообміну у примежовому шарі?
- 7) Чи можна використовувати рівняння примежового шару у випадку

турбулентної пристінної течії?

8) Як можна записати рівняння примежового шару для стисливого газу?

9) Як записується інтегральне рівняння імпульсів для примежового шару (рівняння Кармана)?

10) Як визначається коефіцієнт гідродинамічного тертя?

11) Що називають формпараметрами примежового шару?

12) Як визначаються інтегральні товщини примежового шару?

13) Як змінюється інтегральне рівняння імпульсів у випадку вдування газу крізь обтічну поверхню?

14) Як визначається товщина втрати енергії у примежовому шарі?

15) Які існують форми запису інтегрального рівняння енергії для примежового шару?

16) Як визначається число Стентона?

17) Який вид мають закони тертя та теплообміну у примежовому шарі?

18) У якій формі закони тертя та теплообміну є малочутливими до зміни граничних умов?

19) В чому полягає основне положення теорії локального моделювання і які вимоги при цьому висуваються до експерименту з визначення законів тертя та теплообміну в примежовому шарі?

20) В чому полягає принцип суперпозиції впливу різних факторів на закон теплообміну у примежовому шарі?

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ХАРАКТЕРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

3.1 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛАМІНАРНОГО РЕЖИМУ ТЕЧІЇ

Незважаючи на спрощення, які було виконано, розв'язання системи рівнянь примежового шару, навіть при ламінарному режимі, є складним і виконано лише для окремих випадків, які розглянуті в спеціальних виданнях [1, 2]. Ми наводимо тут результати розв'язання лише деяких характерних задач ламінарного примежового шару.

Розглянемо розв'язання задачі гідродинаміки і теплообміну в ламінарному потоці біля поздовжньо обтічної напівнескінченої плоскої пластини, яке уперше отримано Блазіусом і Польгаузенем [1]. Вважатимемо, що швидкість течії мала, виділенням тепла за рахунок дії сил тертя можна нехтувати, течія стаціонарна та безградієнтна. Поздовжня швидкість зовнішньої течії і температура стінки постійні за довжиною, теплофізичні властивості рідини (λ , ρ , C_p , μ) є незмінними. Рівняння (2.5), (2.7) в даному випадку набувають наступного вигляду:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0,$$
(3.1)

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$
(3.2)

де $a = \lambda / (\rho C_p)$ – коефіцієнт теплопровідності потоку.

Для рівнянь (3.1) граничні умови задаються такими:

$$y = 0: \quad w_x = w_y = 0,$$

$$y \rightarrow \infty: \quad w_x = W_0,$$

$$x = 0: \quad w_x = W_0.$$

Граничні умови для рівняння (3.2) мають наступний вигляд:

$$y = 0: \quad T = T_w,$$

$$y \rightarrow \infty: \quad T = T_\infty,$$

$$x = 0: \quad T = T_0.$$

Розв'язання рівняння (3.2) вимагає попереднього розв'язання гідродинамічної задачі – інтегрування рівнянь (3.1), яке уперше було виконано Блазіусом.

Відповідно до уведеного вище визначення динамічного примежового шару і граничних умов до рівнянь (3.1) очікувані профілі швидкостей матимуть вигляд, зображений на рис. 3.1. Характер течії дозволяє припустити, що профілі швидкостей є геометрично подібними і відрізняються між собою в різних перерізах лише масштабним множником, залежним від поздовжньої координати. Течії в примежових шарах за умови подібності профілів швидкості в різних перерізах потоку називаються *автомодельними*. У таких випадках диференціальні рівняння руху мають сімейство автомодельних (подібних) розв'язків, а розв'язання рівнянь примежового шару значно полегшується, оскільки диференціальні рівняння в часткових похідних можуть бути приведені до звичайних диференціальних рівнянь. Наголосимо, що у формулюванні даного

завдання відсутня довжина пластини, що опосередковано підтверджує існування автомодельних розв'язків.

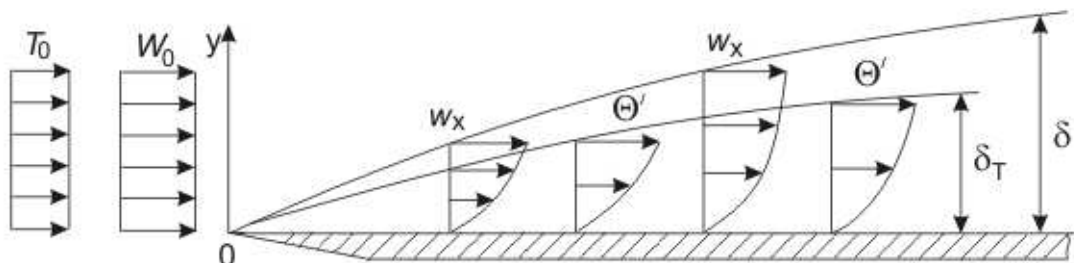


Рис. 3.1. Автомодельні профілі швидкості і температури в ламінарному примежовому шарі при $Pr \neq 1$ ($\Theta' = T - T_w$)

Для інтегрування системи рівнянь (3.1) введемо функцію течії $\Psi(x, y)$ відповідно до виразів

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Оскільки функція течії задовольняє рівнянню нерозривності, то воно автоматично випадає з математичного опису задачі.

Після підстановки виразів для складових швидкості у перше рівняння системи (3.1) отримаємо диференціальне рівняння третього порядку (проміжні перетворення розглянуті в [1])

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (3.3)$$

Граничними умовами для виразу (3.3) будуть наступні:

$$y = 0: \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0,$$

$$y \rightarrow \infty: \frac{\partial \Psi}{\partial y} = W_0,$$

$$x = 0: \frac{\partial \Psi}{\partial y} = W_0.$$

Введемо далі безрозмірні змінні відповідно до виразів: $\bar{\Psi} = \Psi / \sqrt{W_0 \nu / L}$, $\bar{y} = y / \sqrt{\nu L / W_0}$, $\bar{x} = x / L$, де L – характерний розмір пластини.

У нових змінних рівняння (3.3) і граничні умови набувають наступного вигляду:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}^3}, \quad (3.4)$$

$$\bar{y} = 0, \bar{x} > 0: \bar{\Psi} = 0, \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty, \bar{x} = 0: \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} = 1.$$

Припустимо далі, що розв'язок рівняння (3.4) може бути представлений як

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{x}, \bar{y}),$$

чи в розмірних координатах:

$$\Psi = \sqrt{\nu W_0 L} \bar{\Psi} \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{W_0}{\nu L}} \right).$$

Для того, щоб останнє рівняння не залежало від L відповідно до автомодельності розв'язку задачі, треба дотримуватись наступної умови:

$$\bar{\Psi} = \sqrt{\bar{x}} f \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} \right).$$

В цьому випадку функція течії визначатиметься виразом

$$\bar{\Psi} = \sqrt{\nu W_0 x} \varphi(z),$$

де прийнято $z = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{W_0}{\nu x}}$.

Визначаючи необхідні похідні від Ψ , і підставляючи їх значення в рівняння (3.3), отримаємо замість рівнянь (3.1) одне звичайне нелінійне диференціальне рівняння третього порядку

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0 \tag{3.5}$$

з граничними умовами:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \varphi = \varphi' = 0, \\ z \rightarrow \infty: \quad \varphi' = 2. \end{aligned}$$

Інтегрування рівняння (3.5) виконано чисельним методом, результати цього розв'язання табульовані і приведені в [1]. Профіль поздовжньої швидкості визначається виразом

$$\frac{w_x}{W_0} = \frac{1}{2} \varphi'(z). \tag{3.6}$$

Зіставлення теоретичних і дослідних даних, наведених на рис. 3.2, показує, що використання теорії примежового шару дає надійні результати.

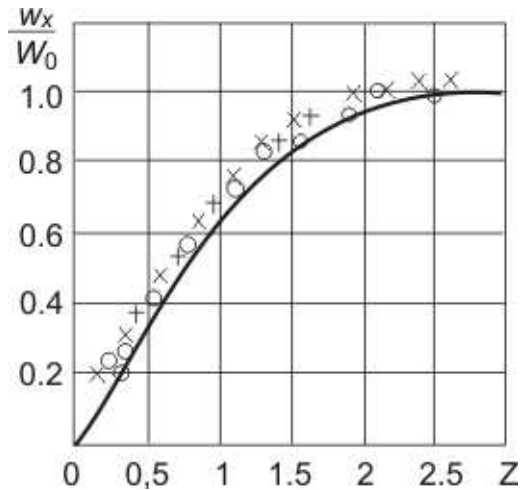


Рис. 3.2. Ламінарний примежовий шар ($W_0 = 0.08$ м/с): + – $x = 0.03$ м; ○ – $x = 0.1$ м; • – $x = 0.15$ м; суцільна лінія – розрахунок

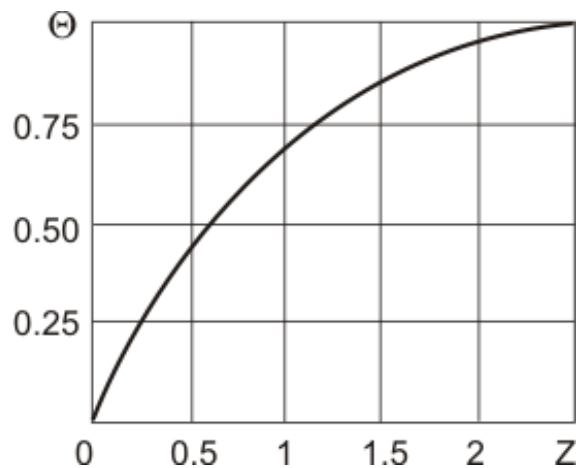


Рис. 3.3. Зміна температури за товщиною ламінарного пограничного шару ($Pr = 1$)

Блазіусом отримані рівняння для визначення коефіцієнта тертя і товщини примежового шару, які наведені нижче:

$$\frac{C_f}{2} = 0.332 \text{Re}_x^{-0.5}, \quad \frac{\delta}{x} \approx 5 \text{Re}_x^{-0.5}, \quad (3.7)$$

де $\text{Re}_x = W_0 x / \nu$ – число Рейнольдса для перерізу x .

Базове допущення теорії примежового шару припускає, що товщина примежового шару значно менше характерного розміру тіла. Згідно з формулою (3.7) для товщини примежового шару це допущення виконується за умов, що $\text{Re}_x \gg 1$. У зв'язку з цим дослідні дані, що отримані для області вхідної кромки пластини ($x = 0.03$ м), де число Re_x мале, відрізняються від розрахункових.

Розв'язання теплової задачі виконано Польгаузенем. При інтегруванні рівняння теплового примежового шару (3.2) він використав результати розв'язання динамічної задачі і змінні Блазіуса. В якості

визначальної величини Польгаузен використав безрозмірну надлишкову температуру

$$\Theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_0},$$

що задовольняє граничним умовам:

$$y = 0: \Theta = 0; \quad y \rightarrow \infty: \Theta = 1.$$

Профілі надлишкової температури за довжиною пластини якісно однакові з профілем повздовжньої швидкості в динамічному примежовому шарі (рис. 2.5), отже, теплова задача є автомодельною, так само як і динамічна.

У розглянутих змінних рівняння (3.2) зводиться до однорідного лінійного рівняння другого порядку

$$\Theta'' + \text{Pr} \varphi \Theta' \Theta'' \quad (3.8)$$

з граничними умовами:

$$z = 0: \Theta = 0; \quad z \rightarrow \infty: \Theta = 1.$$

У рівнянні (3.8): $\text{Pr} = \nu/\alpha$ – число Прандтля; φ – функція, що визначається розв’язком рівняння (3.5).

Розв’язання рівняння (3.8) визначається рівнянням

$$\Theta(z) = \frac{\int_0^z [\varphi''(z)]^{\text{Pr}} dz}{\int_0^\infty [\varphi'(z)]^{\text{Pr}} dz},$$

а результати розрахунку величини Θ при $Pr = 1$ наведені на рис. 3.3. Місцевий коефіцієнт тепловіддачі по довжині пластини обчислюється за рівнянням

$$\alpha(x) = \frac{\lambda}{2x} f(Pr) Re_x^{0.5},$$

де $f(Pr) = 0.664 \cdot Pr^{0.33}$ – функція, яка залежить від фізичних властивостей потоку. Рівняння подібності для розрахунку місцевої тепловіддачі має наступний вигляд (Nu_x – число Нуссельта):

$$Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = 0.332 \cdot Re_x^{0.5} \cdot Pr^{0.33}. \quad (3.9)$$

Розрахунки показують, що при $Pr = 1$ профілі безрозмірних швидкостей (w_x/W_0) і температури (Θ) співпадають між собою, а товщина динамічного і теплового примежового шару однакова. Відмінність числа Прандтля від одиниці призводить до порушення подібності профілів швидкості і температури, товщини теплового і динамічного примежового шару стають різними:

$$\left(\frac{\delta_T}{\delta} \right) = Pr^{-0.33}.$$

При зовнішньому обтіканні кінчної поверхні (вхідні пристрої двигунів літальних апаратів, головні частини ракет) за рахунок розтікання потоку по поверхні конуса товщина примежового шару зростає повільніше, ніж на плоскій поверхні. Це призводить до збільшення поверхневого тертя і тепловіддачі на кінчній поверхні в порівнянні з пластиною. Вплив чинника розтікання можна врахувати введенням в праву

частину рівнянь (3.7), (3.9) поправки, що дорівнює $\sqrt{3}$ [25].

Рівняння (3.7), (3.9) можна використати також при розрахунку газових потоків, що рухаються з великою швидкістю, коли проявляються ефекти стисливості ($M > 1,6$). Для врахування зміни фізичних властивостей потоку в примежовому шарі розроблено метод ефективної температури. Відповідно до цього методу фізичні параметри потоку в рівняннях подібності слід обирати за ефективною температурою [25]:

$$T_0 = \frac{T_w + T_\delta}{2} + 0.22(T_r - T_\delta),$$

де $T_r = T_0 \left(1 + r \frac{K-1}{2} M^2 \right)$ – температура відновлення потоку; $r = \sqrt{\text{Pr}}$ – коефіцієнт відновлення для ламінарних потоків. При обтіканні тіла без стрибків ущільнення та від'єднаних ударних хвиль T_δ відповідає температурі потоку на зовнішній границі примежового шару; інакше під T_δ слід розуміти температуру газу за ударною хвилею або стрибком ущільнення.

За наявності хімічних реакцій в примежовому шарі за рахунок вигорання теплозахисних покриттів, особливості процесів тертя і тепловіддачі враховуються введенням в праву частину рівнянь подібності числа Льюїса у відповідному степені [25].

На закінчення приведемо деякі результати розв'язання задач ламінарного примежового шару, що становлять найбільший інтерес.

1) *Профіль швидкості в ламінарному примежовому шарі, який отримано на основі наближеного розв'язку [25]*

$$\frac{w_x}{W_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3.$$

З нього випливає вираз для розподілу напруги тертя

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2.$$

2) *Плоский струмінь, що набігає на плоску поверхню* із швидкістю W_∞ . В цьому випадку навколо передньої критичної точки відбувається розворот потоку і рух його уздовж поверхні зі зменшенням тиску і збільшенням швидкості. У разі, коли навколо передньої критичної точки швидкість «зовнішнього» потоку (за межами примежового шару) збільшується за лінійним законом $W_0 = u_i x$, рівняння подібності має наступний вигляд [26]:

$$\text{Nu}_x = 0.57 \text{Re}_\infty^{0.5} \text{Pr}^{0.4} \cdot \left(\frac{u_i x}{W_\infty} \right),$$

де $\text{Re}_\infty = \frac{\rho W_\infty x}{\mu}$ – число Рейнольдса набігаючого потоку; $\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$ –

локальне число Нуссельта.

Товщина примежового шару в цьому випадку визначається виразом

$$\delta / x = 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{u_i x^2}}.$$

3) *Вісесиметричний струмінь, що набігає на плоску поверхню*. В цьому випадку потік розтікається від передньої критичної точки на всі боки по радіусах, що характеризується більшим градієнтом швидкості, ніж при набіганні плаского потоку. Інтенсивність тепловіддачі визначається в

даному випадку рівнянням

$$\text{Nu}_x = 0.763 \text{Re}_\infty^{0.5} \text{Pr}^{0.4} \left(\frac{u_i x}{W_\infty} \right)^{0.5}.$$

4) *Плоский струміль, що набігає на циліндр* (передня кромка крила, лопатей, аеродинамічних рулів, головні частини ракет та ін.).

$$\text{Nu}_d = 1.526 \text{Re}_\infty^{0.5} \text{Pr}^{0.4},$$

де $\text{Re}_\infty = \frac{\rho W_\infty d}{\mu}$ – число Рейнольдса потоку, що натікає; d – діаметр циліндру.

5) *Плоский струміль, що набігає на сферичну поверхню*

$$\text{Nu}_d = 1.32 \text{Re}_\infty \text{Pr}^{0.4},$$

де Re_∞ визначається так само, як і у попередньому випадку.

3.2 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ

Обтікання плоскої пластини

Для примежового шару нестисливої рідини на плоскій пластині градієнт швидкості зовнішнього потоку дорівнює нулю. Тому інтегральне рівняння імпульсів (2.19) може бути записане в наступному вигляді:

$$W_0^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10) доки ще не містить ніяких припущень, що дозволяють виконати наближений розрахунок примежового шару. Перш ніж перейти до виконання цього розрахунку, вкажемо на одне співвідношення між τ_w та δ^{**} , яке виходить з (3.10), якщо в останнє замість τ_w підставити його значення, що визначене за формулою (3.7), з якої виходить:

$$\tau_w = \frac{c_f}{2} \rho W_0^2 = \alpha \rho \sqrt{\frac{v}{W_0 x}},$$

де $\alpha = 0.332$.

Із записаної рівності маємо

$$\frac{\tau_w}{\rho W_0^2} = \alpha \sqrt{\frac{v}{W_0 x}}.$$

Виконавши потім інтегрування рівняння (3.10), ми отримаємо

$$\delta^{**} = \int_0^x \frac{\tau_w}{\rho W_0^2} dx = 2\alpha \sqrt{\frac{vx}{W_0}},$$

або

$$\delta^{**} = 2 \frac{\tau_w}{\rho W_0^2} x. \quad (3.11)$$

Для нестисливої рідини на основі визначень, розглянутих в п. 2.3, матимемо наступні вирази для інтегральної товщини примежового шару:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{w_x}{W_0}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{w_x}{W_0} \left(1 - \frac{w_x}{W_0}\right) dy. \quad (3.12)$$

Перейдемо тепер до виконання наближеного розрахунку примежового шару, що утворюється при поздовжньому обтіканні плоскої пластини на основі рівняння (3.10), або еквівалентної йому (з урахуванням (3.12)) рівності

$$\tau_w(x) = \rho \frac{d}{dx} \int_{y=0}^{\delta} w_x (W_0 - w_x) dy. \quad (3.13)$$

Суть цього наближеного способу полягає у виборі відповідного виразу для розподілу швидкостей $w_x(y)$ в примежовому шарі, і до того ж такого, яке задовольняє найважливішим граничним умовам і, крім того, містить один вільний параметр, наприклад, відповідним чином обрану товщину примежового шару. Цей вільний параметр визначається потім з рівняння імпульсів у формі (3.13).

З метою вибору відповідного виразу для розподілу швидкостей використовуємо зазначену вище властивість афінності (подібності) профілів швидкостей в примежовому шарі на плоскій пластині (див. п.2.6). Отже, прийmemo, що

$$\frac{w_x}{W_0} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) = f(\eta), \quad (3.14)$$

де $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$ – безрозмірна відстань від стінки, яка отримана діленням розмірної відстані y на товщину примежового шару $\delta(x)$, а функція $f(\eta)$ залежить лише від η і не містить ніякого вільного параметра. Саме ця

властивість функції $f(\eta)$ і виражає зроблене припущення про афінність усіх профілів швидкості. Далі, з урахуванням граничних умов для розподілу швидкостей w_x , функція f повинна зникати на стінці ($\eta=0$) і має дорівнювати одиниці для великих значень η . Хоча усі точні розв'язки рівнянь примежового шару показують, що перехід примежового шару в потенційну течію відбувається асимптотично, проте, для наближеного розрахунку доцільно зробити змикання примежового шару з потенційною течією на скінченній відстані від стінки, отже, ввести у розрахунок скінченну товщину примежового шару $\delta(x)$. Власне, інтегрування в (3.13) вже відбиває це допущення. Слід додати, що товщина δ не має будь-якого особливого фізичного сенсу і грає лише роль допоміжної розрахункової величини.

Після того, як розподіл швидкостей задано рівнянням (3.14), тобто вибрано певний вираз для функції $f(\eta)$, можна обчислити інтеграл в правій частині рівності (3.13). Насправді, виконавши підстановку (3.14), ми отримуємо

$$\int_0^{\delta} w_x (W_0 - w_x) dy = W_0^2 \delta(x) \int_0^1 f(1-f) d\eta. \quad (3.15)$$

Тепер, маючи певний вираз для $f(\eta)$, можна відразу обчислити інтеграл в правій частині рівності (3.15). Увівши для скорочення запису позначення

$$\alpha_1 = \int_0^1 f(1-f) d\eta, \quad (3.16)$$

перезапишемо попередню рівність в наступному вигляді:

$$\int_0^{\delta} w_x (W_0 - w_x) dy = W_0^2 \delta^{**} = \alpha_1 \delta W_0^2$$

або

$$\delta^{**} = \alpha_1 \delta. \quad (3.17)$$

Для подальших обчислень використаємо також товщину витіснення δ^* , що визначається першою рівністю (3.12). Застосовуючи для скорочення запису позначення

$$\alpha_2 = \int_0^1 (1-f) d\eta, \quad (3.18)$$

ми отримаємо

$$\delta^* = \alpha_2 \delta. \quad (3.19)$$

Далі, увівши до виразу для дотичної напруги на стінці розподіл швидкостей $f(\eta)$, матимемо

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\nu W_0}{\delta} f'(0) = \beta_1 \frac{\nu W_0}{\delta}, \quad (3.20)$$

де для скорочення запису застосовано позначення

$$\beta_1 = f'(0). \quad (3.21)$$

Підставивши вираз (3.20) в рівняння (3.10), з урахуванням співвідношення (3.17), отримаємо

$$W_0^2 \alpha_1 \frac{d\delta}{dx} = \beta_1 \frac{\nu W_0}{\delta}, \quad \text{або} \quad \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta_1 \nu}{\alpha_1 W_0}.$$

Проінтегруємо це рівняння, маючи на увазі, що при $x=0$ початкове значення $\delta=0$. Тоді в якості першого результату наближеного розрахунку отримаємо

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\nu x}{W_0}}. \quad (3.22)$$

Підставляючи цей вираз $\delta(x)$ у рівність (3.20), визначимо дотичне напруження на стінці:

$$\tau_w(x) = \sqrt{\frac{\alpha_1\beta_1}{2}} \mu W_0 \sqrt{\frac{W_0}{\nu x}}. \quad (3.23)$$

Далі, підставивши $\tau_w(x)$ у формулу

$$2R = 2b \int_0^l \tau_w dx,$$

де b та l ширина і довжина пластини, і виконавши інтегрування, знайдемо повний опір тертя пластини, змоченої з обох боків:

$$2R = 2b \sqrt{2\alpha_1\beta_1} \sqrt{\mu\rho l W_0^2}. \quad (3.24)$$

Нарешті, виключивши з рівностей (3.19) і (3.22) товщину прилежого шару δ , визначимо товщину витіснення:

$$\delta^* = \alpha_2 \sqrt{\frac{2\beta_1}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\nu x}{W_0}}. \quad (3.25)$$

Формули (3.22) – (3.25) дають можливість визначити товщину прилежого шару, розподіл тертя по поверхні пластини, повну силу

опору і інтегральну товщину примежового шару. Числа α_1 , α_2 , та β_1 , що входять в них і які залишилися доки невідомими, можуть бути визначені лише після того, як функція $f(\eta)$ буде задана в явному вигляді, тобто після того, як буде зроблено припущення про розподіл швидкостей (3.14).

При завданні функції $f(\eta)$ мають бути виконані певні граничні умови для профілю швидкостей $w_x(y)$ і, отже, для самої функції $f(\eta)$. В усякому разі, мають бути виконані умова прилипання ($w_x(0) = 0$) і умова «змикання» з потенційною течією ($w_x(\delta) = W_0$), які входять до умов (2.9). Іншими граничними умовами є безперервність зміни дотичної до профілю швидкості $w_x(y)$ і його кривизни при змиканні з потенційною течією, тобто дотримання рівностей

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \text{ та } \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = \delta.$$

Для плоскої пластини також є обов'язковою умова

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0,$$

яка виходить з першого рівняння (3.1).

Перевіримо придатність викладеного способу наближеного розрахунку примежового шару на деяких прикладах. Якість наближеного розрахунку, вочевидь, значною мірою залежить від того, наскільки вдало вибрано розподіл швидкостей (3.14). Як уже згадувалося, обрана функція $f(\eta)$ у будь-якому випадку повинна зникати при $\eta = 0$, оскільки інакше не буде виконано умову прилипання на стінці. Далі, функція $f(\eta)$ має дорівнювати одиниці при $\eta = 1$ внаслідок умови змикання із зовнішнім

поток. Перехід функції $f(\eta)$ до одиничного значення може відбуватися при грубому наближенні із зломом, а при більш якісному наближенні – з безперервною зміною похідної $df/d\eta$.

Результати розрахунку для чотирьох окремих видів функції $f(\eta)$, з яких перші два зображені на рис. 3.4, зведені в таблицю 3.1. Лінійна функція задовольняє лише умовам $f(0) = 0$ та $f(1) = 1$; кубічна функція – ще двом умовам: $f'(1) = 0$ та $f''(0) = 0$; а функція четвертого степеня – також умові $f''(1) = 0$. Функція $\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$ задовольняє тим самим значенням, що і функція четвертого степеня, за винятком умови $f''(1) = 0$. Поліноми третього і четвертого степеня, а також функція $\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$, дають для дотичного напруження на стінці значення, що відрізняються від точного значення менше ніж на 3%, що слід розглядати як цілком добрий результат. Значення товщини витіснення δ^* , що визначені вказаними наближеннями, також задовільно співпадають з точним значенням.



Рис. 3.4. Розподіл швидкостей у пограничному шарі на плоскій пластині в лінійному (а) та у кубічному (б) наближеннях

Отже, викладений спосіб наближеного розрахунку примежового шару на поздовжньо-обтічній пластині дає цілком задовільні результати. Особливо слід підкреслити надзвичайну простоту наближеного розрахунку в порівнянні з точним розв'язанням.

Таблиця 3.1

Результати наближеного розрахунку примежового шару на плоскій пластині на основі інтегральних співвідношень

№	Розподіл швидкостей $\frac{w_x}{W_0} = f(\eta)$	α_1	α_2	β_1	$\delta^* \sqrt{\frac{W_0}{\nu x}}$	$\frac{\tau_w}{\mu W_0} \sqrt{\frac{\nu x}{W_0}}$	$C_f \sqrt{\frac{W_0 l}{\nu}}$	$\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = H$
1	$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1.732	0.289	1.155	3.00
2	$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	1.740	0.323	1.192	2.70
3	$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2	1.752	0.343	1.372	2.55
4	$f(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	1.741	0.327	1.312	2.66
5	Точний	–	–	–	1.721	0.332	1.328	2.59

$$\delta^{**} \sqrt{\frac{W_0}{\nu x}} = \frac{2\tau_w}{\mu W_0} \sqrt{\frac{\nu x}{W_0}}; \quad C_f = \sqrt{\frac{W_0 l}{\nu}} = 2\delta^{**} \sqrt{\frac{W_0}{\nu x}}$$

Тепловіддача пластини с ламінарним примежовим шаром за умов $Pr \geq 1$

Внаслідок аналогічності граничних умов загальний вигляд інтерполяційних профілів безрозмірних швидкостей та надлишкових

температур виявляється однаковим, тобто при поліномі четвертого степеня ми маємо:

$$\begin{aligned}\frac{w_x}{W_0} &= 2y/\delta - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4; \\ \frac{T_w - T}{T_w - T_0} &= 2y/\delta_T - 2(y/\delta_T)^3 + (y/\delta_T)^4.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Слід зауважити, що, незважаючи на аналогічність виразів (3.26), поля швидкостей і температур, взагалі кажучи, не подібні, оскільки при $Pr \neq 1$ маємо $\delta_T \neq \delta$.

Враховуючи вираз густини теплового потоку в стінку

$$q_w = -\lambda(\partial T/\partial y)_w = -\lambda(\partial(T - T_0)/\partial y)_w,$$

а також справедливі для даного випадку умови

$$\frac{dW_0}{dx} = 0, \quad \frac{d\Delta T}{dx} = \frac{d(T_0 - T_w)}{dx} = 0,$$

перепишемо інтегральне рівняння енергії (2.22) у наступному вигляді:

$$c_p \rho W_0 (T_w - T_0) \frac{d\delta_T^{**}}{dx} = \lambda \left(\frac{\partial(T - T_0)}{\partial y} \right)_w.\tag{3.27}$$

Товщина втрати енергії, що введена раніше в п. 2.3, для нестисливої рідини визначається виразом

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{w_x}{W_0} \left(1 - \frac{T_w - T}{T_w - T_0} \right) dy.$$

З урахуванням цієї рівності і виразів (3.26), рівняння (3.27) зводиться до вигляду [6]

$$W_0 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\delta_T^2}{\delta} \left[0.133 - 0.0214 \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 + 0.0055 \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^3 \right] \right\} = \frac{2a}{\delta_T}, \quad (3.28)$$

де $a = \lambda / (\rho c_p)$ – коефіцієнт теплопровідності.

При $Pr \geq 1$ збурення, що обумовлені молекулярним тертям, поширюються на більшу область, ніж збурення, які обумовлені молекулярною теплопровідністю. Отже, при $v \geq a$ маємо $\delta \geq \delta_T$ і значення співвідношення δ_T / δ міститься між одиницею і нулем. При цьому, значення величини, що стоїть у квадратних дужках рівняння (3.28), змінюється в межах від 0.133 до 0.117, тобто усього на 14%. Приймаючи в першому наближенні середнє значення, що дорівнює 0.125, приводимо рівняння (3.28) до дуже простого виразу відносно δ_T^3 :

$$\frac{d(\delta_T^3)}{dx} + \frac{3}{2} \delta_T^3 \delta \frac{d(1/\delta)}{dx} - 24 \frac{a\delta}{W_0} = 0. \quad (3.29)$$

Формула (3.22) зі значеннями коефіцієнтів α_1, β_1 з таблиці 3.1 (для даного профілю швидкості четвертого степеня) дає для товщини динамічного примежового шару вираз

$$\delta(x) = 5.835 \sqrt{\frac{vx}{W_0}}. \quad (3.30)$$

Підставляючи його у рівняння (3.29), і знаходячи інтеграл цього звичайного диференціального рівняння відносно δ_T^3 , отримуємо

$$\delta_T^3 x^{-3/4} = C + 186av^{1/2}W_0^{-3/2}x^{3/4}.$$

Якщо на передній кромці пластини ($x = 0$) товщина примежового шару $\delta_T = 0$, то $C = 0$ і

$$\delta_T = 5.72(a/\nu)^{1/3}(\nu x/W_0)^{1/2}. \quad (3.31)$$

Оскільки при обтіканні пластини середовищем, що має $Pr = 1$, повинна бути точна подібність полів швидкостей і температур, то в цьому випадку $\delta_T = \delta$. Порівнюючи формули (3.30), (3.31), знаходимо, що з точністю до 2% при ламінарному примежовому шарі та $Pr \geq 1$

$$\frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{1/3}. \quad (3.32)$$

З урахуванням розподілу температур, що визначається другою рівністю (3.26), для місцевого коефіцієнта теплообміну отримуємо вираз

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_0 - T_w} \left(\frac{\partial(T - T_w)}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2\lambda}{\delta_T}. \quad (3.33)$$

Підставляючи сюди значення δ_T з (3.31), отримуємо

$$\alpha(x) = 0.35\lambda Pr^{1/3} \left(\frac{W_0}{\nu x} \right)^{1/2}.$$

Для місцевого числа Нуссельта звідси маємо

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0.35 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}. \quad (3.34)$$

Порівняння рівностей (3.34) і (3.9) показує хороший збіг

безрозмірних коефіцієнтів тепловіддачі, отриманих на основі застосування інтегральних співвідношень та безпосереднім інтегруванням диференціальних рівнянь примежового шару.

Тепловіддача пластини з ламінарним примежовим шаром за умов $Pr \ll 1$

У багатьох важливих практичних випадках в якості теплоносіїв застосовуються рідкі метали, для яких $Pr \ll 1$. При $Pr < 1$ маємо $\delta < \delta_T$, тобто тепловий примежовий шар проникає в область гідродинамічно незбуреного потоку. Якщо вільна турбулентність цього потоку невелика, то профіль температур (3.26) можна зберегти і в даному випадку, причому інтеграл, що визначає величину δ_T^{**} , розпадається на дві області – область $0 < y < \delta$, в якій швидкість течії змінюється від 0 до W_0 , і область $y \geq \delta$, в якій швидкість течії дорівнює швидкості незбуреного потоку. Звідси

$$\frac{2a}{W_0 \delta_T} = \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\delta} \left[2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right] \left[1 - 2 \frac{y}{\delta_T} + 2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 - \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^4 \right] dy + \int_0^{\delta_T} \left[1 - 2 \frac{y}{\delta_T} + 2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 - \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^4 \right] dy \right\},$$

або

$$\frac{2a}{W_0 \delta_T} = \frac{d}{dx} \left\{ 0.3 \delta_T \left[1 - \frac{\delta}{\delta_T} + 0.48 \left(\frac{\delta}{\delta_T} \right)^2 - 0.0735 \left(\frac{\delta}{\delta_T} \right)^3 - 0.146 \left(\frac{\delta}{\delta_T} \right)^4 \right] \right\}. \quad (3.35)$$

Визначаючи порядок співвідношення δ/δ_T за формулою (3.32), знаходимо, що вже при $Pr \leq 0,1$ в рівнянні (3.35) можна нехтувати

доданками, що містять δ/δ_T у степенях більших за одиницю. Інтегруючи рівняння (3.35) за цієї умови, отримуємо

$$\delta_T \approx 3.65 \sqrt{\frac{ax}{(1-\delta/\delta_T)W_0}}. \quad (3.36)$$

При $Pr \rightarrow 0$ маємо $\delta/\delta_T \rightarrow 0$, чому відповідає значення товщини теплового шару

$$\delta_T = 3.65 \sqrt{ax/W_0}. \quad (3.37)$$

З (3.30) і (3.37) витікає, що при $Pr \rightarrow 0$

$$\delta/\delta_T \rightarrow 1.6Pr^{1/2}. \quad (3.38)$$

Зіставлення значень величин $\sqrt{1-\delta/\delta_T}$, розрахованих за допомогою формул (3.32) і (3.38) зведено до табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Порівняння різних наближень величини $\sqrt{1-\delta/\delta_T}$

$Pr = v/a$	0.1	0.05	0.01	0.005	0
$\sqrt{1-Pr^{1/3}}$	0.731	0.795	0.885	0.910	1
$\sqrt{1-1.6Pr^{1/2}}$	0.700	0.795	0.915	0.943	1

Як видно, для області чисел Pr , характерних для рідких металів, практично можна користуватися будь-яким з цих наближень.

Вибираючи простіший розрахунковий вираз і підставляючи його у формулу (3.36), на основі рівності (3.33) визначаємо коефіцієнт тепловіддачі

$$\alpha(x) = \frac{2\lambda}{\delta_T} = 0.55\lambda \left(\frac{(1 - \text{Pr}^{1/3})W_0}{ax} \right)^{1/2}.$$

Звідси маємо наступний вираз для локального числа Нуссельта:

$$\text{Nu}_x = 0.55 \left((1 - \text{Pr}^{1/3}) \text{Pr} \right)^{1/2} (\text{Re}_x)^{1/2}.$$

3.3 ЗАДАЧА ПРО ТУРБУЛЕНТНУ ТЕЧІЮ В ПОЧАТКОВІЙ ДІЛЯНЦІ КРУГЛОЇ ТРУБИ

Для замикання інтегральних співвідношень імпульсів і енергії, як було показано раніше (див. п. 2.4, 2.5), можуть використовуватися закони тертя і теплообміну, отримані з експерименту. В цьому випадку початкові критеріальні рівняння імпульсів (2.20) і енергії (2.23) доповнюються емпіричними залежностями для коефіцієнтів тертя і теплообміну, обґрунтованими в п. 2.4, 2.5. Таким чином, початкова система рівнянь для випадку непроникної стінки виглядає таким чином:

$$\frac{d \text{Re}^{**}}{d \bar{x}} + \text{Re}_L (1 + H) f = \text{Re}_L \frac{C_f}{2}, \quad (3.39)$$

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} = \text{Re}_L \text{St}, \quad (3.40)$$

$$\frac{C_f}{2} = 0.0128 \text{Re}^{**-0.25} \Psi_{\Sigma}^*, \quad (3.41)$$

$$\text{St} = 0.0128 \text{Re}_T^{**-0.25} \text{Pr}^{-0.75} \Psi_{\Sigma}. \quad (3.42)$$

Для вісесиметричної течії у рівняннях (3.39) – (3.42) умовні товщини примежового шару визначається трохи інакше (їх іноді називають

умовними площами примежового шару):

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0}\right) \left(1 - \frac{y}{R}\right) dy, \quad (3.43)$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0} \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0}\right) \left(1 - \frac{y}{R}\right) dy, \quad (3.44)$$

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho w_x}{\rho_0 W_0} \left(1 - \frac{T_w - T}{T_w - T_0}\right) \left(1 - \frac{y}{R}\right) dy. \quad (3.45)$$

Система рівнянь (3.39) – (3.42) може бути розв’язана для багатьох практично важливих випадків.

Як приклад розглянемо течію повітря в початковій ділянці теплової і гідродинамічної стабілізації труби (рис. 3.5). Вісесиметричні канали знаходять широке застосування в різних технічних системах, причому їх відносна довжина дуже часто недостатня для змикання динамічного і теплового примежових шарів (початкова ділянка каналу).

На вхідній ділянці труби примежові шари розвиваються так само, як і при зовнішньому обтіканні тіла, доки примежові шари, наростаючі на протилежних стінках, не перетнуться. Відмінність внутрішньої течії від зовнішнього обтікання полягає в тому, що швидкість газу на зовнішній границі примежового шару є шуканим параметром, а не заданим. Закон зміни W_0 за довжиною труби визначається в процесі розв’язання поставленої задачі.

Використовуватимемо наступні допущення:

- 1) швидкість газу на вході в канал є дозвуковою ($M < 0.3$);
- 2) розподіл швидкостей і температур на вході в трубу є рівномірним;

- 3) динамічний і тепловий примежові шари розвиваються одночасно, починаючи з перерізу $x = 0$;
- 4) серед збурюючих параметрів в наявності лише неізотермічність, отже, $\Psi_{\Sigma} = \Psi_{\Sigma}^* = \Psi_T$.

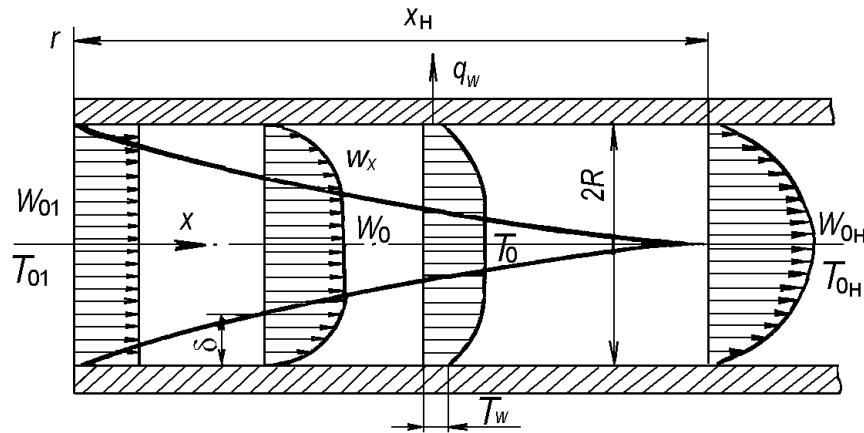


Рис. 3.5. Схема течії повітря у початковій ділянці циліндричної труби ($Pr \approx 1$)

Розв'язання рівняння імпульсів.

Беручи до уваги закон тертя (3.41), з урахуванням зроблених припущень, рівняння імпульсів запишемо в наступному вигляді:

$$\frac{d Re^{**}}{dx} + Re^{**} (1 + H) \frac{1}{W_0} \frac{dW_0}{d\bar{x}} = Re_L \frac{B}{2} \Psi_T Re^{**-m}, \quad (3.46)$$

До того ж, для $Re^{**} < 10^4$ константи B і m дорівнюють відповідно 0.0256 та 0.25. Щоб врахувати вплив скінченності числа Re^{**} на відносний закон тертя, вираз для Ψ_T пропонується записувати так [23]:

$$\Psi_T = \left(\frac{\mu_w}{\mu_0} \right)^m \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1} \right)^2,$$

де ψ – параметр неізотермічності.

Для розв'язання рівняння (3.46) необхідно знати закон зміни W_0 за довжиною труби. Скористаємося умовою незмінності витрати, яка для труби записується у формі

$$R^2 \rho_{01} W_{01} = 2 \int_0^R \rho w_x r dr, \quad (3.47)$$

де ρ_{01} та W_{01} – відповідно густина та швидкість в початковому перерізі каналу; R – його радіус.

Враховуючи співвідношення (3.43), рівняння (3.47) можна записати так

$$\rho_{01} W_{01} = \rho_0 W_0 \left(1 - 2 \frac{\delta^*}{R} \right), \quad (3.48)$$

або, позначивши $W = \frac{W_0}{W_{01}}$, отримаємо

$$\frac{\delta^*}{R} = \frac{W - 1}{2W}. \quad (3.49)$$

Внаслідок зроблених припущень при виведенні (3.49) вважається $\rho_{01} = \rho_0$.

Запишемо вирази для окремих складових рівняння (3.46):

$$\text{Re}^{**} = \frac{\rho_0 W_0 \delta^{**}}{\mu_0} = \frac{\rho_0 W_{01} 2R}{\mu_0} \frac{W_0}{W_{01}} \frac{\delta^{**}}{\delta^*} \frac{\delta^*}{2R} = \text{Re}_0 \frac{W - 1}{4H}, \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{W_0} \frac{dW_0}{d\bar{x}} = \frac{1}{W} \frac{dW}{d\bar{x}}, \quad (3.51)$$

$$\text{Re}_L = \frac{\rho_0 W_0 2R}{\mu_0} = \frac{\rho_0 W_{01} 2R}{\mu_0} \frac{W_0}{W_{01}} = \text{Re}_0 W. \quad (3.52)$$

У рівняннях (3.50), (3.52) позначено: $\text{Re}_0 = \frac{\rho_0 W_{01} 2R}{\mu_0}$ – вхідне число

Рейнольдса; $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$, а значення $\frac{\delta^*}{2R}$ визначається за формулою (3.49). При

цьому слід пам'ятати, що на підставі дослідних даних формпараметр H є функцією параметра неізотермичності ψ , а отже, є залежним від \bar{x} .

Підставимо вираз (3.50) – (3.52) у рівняння (3.46):

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{W-1}{H} \right) + \frac{1+H}{H} \frac{W-1}{W} \frac{dW}{d\bar{x}} = \frac{B}{2} W \frac{16 \left(\frac{\mu_w}{\mu_0} \right)^m}{(\sqrt{\psi}+1)^2} \text{Re}_0^{-m} \cdot \left(\frac{W-1}{4H} \right)^m. \quad (3.53)$$

Останнє співвідношення дозволяє визначити закон зміни безрозмірної швидкості W за довжиною труби.

Розглянемо розв'язання рівняння (3.53) для випадку постійної температури стінки ($\Psi = \text{const}$). Оскільки на підставі експериментальних даних [23] формпараметр H можна виразити співвідношенням $H = H_0 \Psi$, де $H_0 = 1.3$, то після диференціювання (3.53) отримаємо ($B = 0.0256$, $m = 0.25$):

$$\frac{(W-1)^{0.25}}{W} \frac{dW}{d\bar{x}} + (1+1.3\Psi) \frac{(W-1)^{1.25}}{W^2} \frac{dW}{d\bar{x}} = \frac{0.4\Psi^{1.25}}{(\sqrt{\psi}+1)^2} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} \cdot \text{Re}_0^{-0.25},$$

або в інтегральній формі –

$$\int_1^W \frac{(W-1)^{0.25}}{W} dW + (1+1.3\Psi) \int_1^W \frac{(W-1)^{1.25}}{W^2} dW = \frac{0.4\Psi^{1.25}}{(\sqrt{\psi}+1)^2} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} (\bar{x} \text{Re}_0^{-0.25}).$$

Пропустивши проміжні обчислення, розв'язок цього рівняння запишемо в наступному вигляді:

$$(W-1)^{0.25} \left[8 + 5.1\psi \frac{1+1.3\psi}{W} \right] - (3.2 + 2.3\psi) \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}(W-1)^{0.25}}{2 - \left[1 + (W-1)^{0.25} \right]^2} =$$

$$= \frac{0.4\psi^{1.25}}{(\sqrt{\psi} + 1)^2} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} \cdot (\bar{x} \operatorname{Re}_0^{-0.25}). \quad (3.54)$$

Розв'язавши алгебраїчне рівняння (3.54) одним з наближених методів, можна знайти залежність

$$W = W(\psi, \bar{x} \operatorname{Re}_0^{-0.25}). \quad (3.55)$$

Результати таких розрахунків для умов охолодження стінки [23] показані на рис. 3.6. Видно, що зі збільшенням ψ (зменшенням неізотермічності) спостерігається тенденція до збільшення відносної швидкості $W = \frac{W_0}{W_{01}}$ за довжиною каналу.

Таким чином, використовуючи графіки (рис.3.6), можна за формулою (3.50) визначити число Re^{**} , і далі вирахувати зміну коефіцієнта тертя:

$$\frac{C_f}{2} = 0.0128 \operatorname{Re}^{** - 0.25} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\psi} + 1} \right)^2.$$

Підставивши в останнє рівняння вираз (3.50), отримаємо наступний запис:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0.0775\psi^{0.25}}{(\sqrt{\psi} + 1)^2} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w}\right)^{0.25} \cdot [\text{Re}_0(W - 1)]^{-0.25}, \quad (3.56)$$

який є зручнішим для практичних розрахунків.

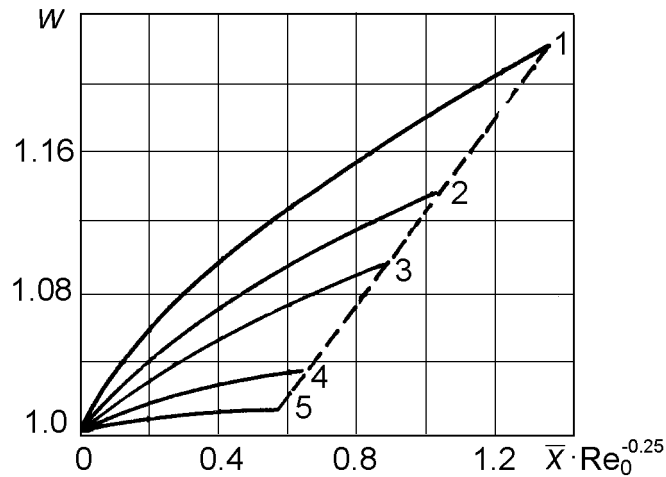


Рис. 3.6. Вплив охолодження стінки на розподіл швидкості в ядрі потоку :
1 – $\psi = 1.0$; 2 – $\psi = 0.6$; 3 – $\psi = 0.2$; 4 – $\psi = 0.137$; 5 – $\psi = 0.044$.

Розв'язання рівняння енергії.

Запишемо інтегральне співвідношення енергії (3.40) з урахуванням закону теплообміну (3.42) в наступному вигляді:

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} = 0.0128 \text{Re}_T^{**-0.25} \text{Pr}^{-0.75} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w}\right)^{0.25} \frac{4 \text{Re}_L}{(\sqrt{\psi} + 1)^2}. \quad (3.57)$$

Оскільки $\text{Re}_L = \text{Re}_0 W$, а значення W вважається відомим з розв'язку динамічної задачі, то рівняння (3.57) зводиться до вигляду

$$\frac{d \operatorname{Re}_T^{**}}{d \bar{x}} + \frac{\operatorname{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{d \bar{x}} = 0.0512 \operatorname{Re}_0 W \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} \frac{\operatorname{Re}_T^{**-0.25} \operatorname{Pr}^{-0.75}}{(\sqrt{\Psi} + 1)^2},$$

інтеграл якого може бути записаний як

$$\operatorname{Re}_T^{**} = \frac{0.11 \operatorname{Re}_0^{0.8} \operatorname{Pr}^{-0.6}}{\Delta T} \left[\int_0^{\bar{x}} \frac{W \Delta T^{1.25}}{(\sqrt{\Psi} + 1)^2} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} d \bar{x} \right]^{0.8}. \quad (3.58)$$

Підставивши цей вираз у рівняння для закону теплообміну (3.42), отримаємо співвідношення, що дозволяє обчислити зміну числа Стентона:

$$\operatorname{St} = \frac{0.089 \operatorname{Re}_0^{-0.2} \operatorname{Pr}^{-0.6}}{(\sqrt{\Psi} + 1)^2} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} \Delta T^{0.25} \cdot \left[\int_0^{\bar{x}} \frac{W \Delta T^{1.25}}{(\sqrt{\Psi} + 1)^2} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0.25} d \bar{x} \right]^{-0.2}. \quad (3.59)$$

В окремому випадку квазіізотермічної ($\Psi \rightarrow 1$) безградиентної ($W \rightarrow 1$) течії при $\Delta T = \text{const}$ з цього рівняння можна отримати широко відоме рівняння подібності для течії на пластині при $T_w = \text{const}$:

$$\operatorname{St} = 0.029 \operatorname{Re}_x^{-0.2} \operatorname{Pr}^{-0.6}, \quad (3.60)$$

або

$$\operatorname{Nu}_x = 0.029 \operatorname{Re}_x^{0.8} \operatorname{Pr}^{0.4}, \quad (3.61)$$

Таким чином, інтегральні співвідношення імпульсів і енергії, що доповнені законами тертя і теплообміну, дозволяють отримувати надійні результати для різноманітних граничних умов.

Визначення довжини ділянки гідродинамічної стабілізації

Усі співвідношення, які розглянуто вище, можна застосовувати лише для ділянок гідродинамічної і теплової стабілізації труби. Визначимо довжину ділянки гідродинамічної стабілізації для розглянутих умов. З рівняння (3.49) виходить, що наприкінці початкової ділянки повинна мати місце рівність

$$W_H = \left(1 - 2 \frac{\delta^{**}}{R} H \right)^{-1},$$

або, з урахуванням співвідношення $H = 1,3\psi$:

$$W_H = \left(1 - 2,6 \frac{\delta^{**}}{R} \psi \right)^{-1}, \quad (3.62)$$

де W_H безрозмірна швидкість в ядрі потоку у кінці початкової ділянки.

Залежність довжини ділянки гідродинамічної стабілізації \bar{x}_H від різних чинників можна отримати з рівняння (3.54), поклавши, що $W = W_H$:

$$\bar{x}_H = \frac{2,5 \operatorname{Re}_0^{0,25} (\sqrt{\psi} + 1)^2}{\psi^{1,25} \left(\frac{\mu_0}{\mu_w} \right)^{0,25}} \left\{ 8 + 5,1\psi + \frac{1 + 1,3\psi}{W} - \right. \\ \left. - (3,2 + 2,3\psi) \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} (W_H - 1)^{0,25}}{2 - [1 + (W_H - 1)^{0,25}]^2} \right\}. \quad (3.63)$$

Результати розв'язання системи рівнянь (3.62) і (3.63) з урахуванням

залежності $\frac{\delta^{**}}{R} = f(\psi)$ у кінці ділянки гідродинамічної стабілізації [23 рис. 4.5] добре апроксимуються наступною простою формулою (рис. 3.6, пунктирна лінія):

$$\frac{\bar{x}_H}{Re_0^{0.25}} = \frac{0.55 + 0.8\psi}{\psi^{0.25m}}, \quad (3.64)$$

де m – константа в рівнянні $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^m$, яка залежить від фізичної природи теплоносія.

Результати експериментальних досліджень задовільно узгоджуються із залежністю (3.64) [23].

Як видно з графіків (див. рис. 2.10), в діапазоні зміни чинника неізотермічності ψ від 1.0 до 0.044 довжина ділянки гідродинамічної стабілізації змінюється в межах 30%. Набагато сильніше впливає на цю довжину величина вхідного числа Рейнольдса Re_0 .

3.4 ЗАДАЧА ПРО ПЛОСКИЙ ЗАТОПЛЕННИЙ ТУРБУЛЕНТНИЙ СТРУМІНЬ

Турбулентний струмінь, що витікає з деякого насадку в середовище, що покоїться, називається *затопленим струменем*. Він належить до найбільш вивчених струменів, як в теоретичному, так і в експериментальному плані. Найпростішою схемою затопленого струменя є його витікання з плоского сопла скінченних розмірів з рівномірним початковим полем швидкості ($W_{01} = const$).

Принципова розрахункова схема струменя з виділенням початкової,

перехідної та основної ділянок запропонована Г.Н. Абрамовичем на основі аналізу численних дослідів і вимірів самого автора та інших дослідників. При розв'язанні задачі про затоплений струмінь часто користуються його спрощеною схемою і вважають довжину перехідної ділянки малою. В цьому випадку в перехідному перерізі струменя здійснюється спряження початкової і основної ділянок. Ми використовуватимемо цей прийом, який добре працює у тому випадку, коли інтерес становлять загальні закономірності поширення струменя і немає на меті розрахунку саме області переходу. Близькість задачі про затоплений струмінь до задачі примежового шару на обтічній поверхні проявляється, зокрема, в подібності поперечних профілів швидкості в різних перерізах струменя. Це дозволило створити досить ефективні інтегральні методи розрахунку струменів.

Початкова ділянка.

Розглянемо затоплений турбулентний струмінь, що витікає з плоского сопла шириною $2b_0$ з початковою швидкістю W_{01} у рідину тієї ж густини. Принципова схема струменя і прийнята система декартових координат з виділенням початкової та основної ділянок приведені на рис.3.7. Струмінь поширюється у напрямку осі x ; y_0 – напівширина потенціального ядра струменя; δ_0 – товщина шару змішування на початковій ділянці струменя (еквівалентна за суттю товщині примежового шару); b – напівширина струменя на основній ділянці. Внаслідок наявності в даній задачі симетрії течії відносно осі y достатньо розглянути лише одну половину струменя ($y > 0$). Розглянемо початкову ділянку струменя. Припустимо, що рідина нестислива і середовище, що оточує струмінь,

однорідне і нерухоме; рух взагалі двомірний і сталий; виконуються рівняння примежового шару; молекулярною в'язкістю в порівнянні з турбулентною нехтуватимемо.

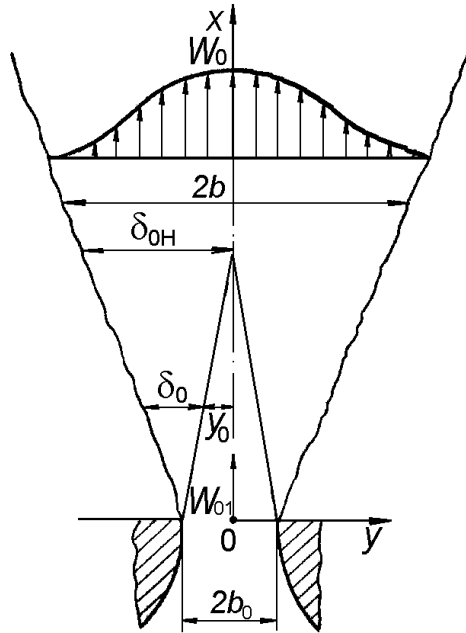


Рис. 3.7. Принципіальна схема струменя

При цих допущеннях рівняння (2.6) запишеться таким чином:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (3.65)$$

де дотичне напруження визначається кореляцією пульсаційних добавок проєкцій швидкості ($\tau = \overline{w'_x w'_y}$), а символами w_x , w_y позначено проєкції осередненої швидкості.

Перепишемо також рівняння нерозривності (друге рівняння системи (2.5)):

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (3.66)$$

Відповідно до концепції Г.Н. Абрамовича [27] про наявність у струмені потенціального ядра, а також з очевидними умовами безперервного переходу величини швидкості до нульового значення на границі струменя та до значення W_{01} на границі потенціального ядра струменя, маємо наступні додаткові умови:

$$w_x = 0 \quad (y = y_0 + \delta_0), \quad w_x = W_{01} \quad (0 \leq y \leq y_0), \quad (3.67)$$

$$w_y = 0 \quad (y = y_0 + \delta_0), \quad w_y = 0 \quad (0 \leq y \leq y_0), \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \quad (y = y_0 + \delta_0), \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \quad (0 \leq y \leq y_0). \quad (3.69)$$

Відзначимо одразу, що умови (3.69) еквівалентні відсутності дотичного напруження на зовнішній границі струменя і в потенціальному ядрі.

Помноживши рівняння нерозривності на w_x і просумувавши його з рівнянням (3.65), після простих перетворень отримуємо

$$\frac{\partial w_x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (w_x w_y) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Інтегруючи цю рівність по y в межах напівширини струменя з урахуванням умов (3.67) – (3.69), отримуємо співвідношення

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_0+\delta_0} w_x^2 dy = 0. \quad (3.70)$$

Рівняння (3.70) є аналогом співвідношення Кармана (2.19) і виражає збереження за даних умов імпульсу струменя уздовж його осі.

Ще одне інтегральне співвідношення ми отримаємо, помноживши рівняння (3.65) на w_x . З урахуванням співвідношень $w_x^2 (\partial w_x / \partial x) = \frac{1}{2} w_x (\partial w_x^2 / \partial x)$ та $w_x w_y (\partial w_x / \partial y) = \frac{1}{2} w_y (\partial w_x^2 / \partial y)$ це призводить до рівності

$$w_x \left(\frac{\partial w_x^2}{\partial x} \right) + w_y \left(\frac{\partial w_x^2}{\partial y} \right) = \frac{2w_x}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Сумуючи її з помноженим на w_x^2 рівнянням нерозривності, після очевидних перетворень, отримуємо

$$\frac{\partial w_x^3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (w_x^2 w_y) = \frac{2w_x}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (3.71)$$

Наступним етапом є інтегрування (3.71) по y в межах напівширини струменя. Інтеграл від другого доданку, з урахуванням умов (3.68), дорівнює нулю. Для правої частини рівності (3.71) застосуємо правило інтегрування по частинах. З урахуванням відміченої рівності нулю дотичних напружень у потенціальному ядрі та на границі струменя, це дає

$$\int_0^{y_0+\delta_0} \frac{2w_x}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = - \int_0^{y_0+\delta_0} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy.$$

Таким чином, остаточно отримуємо наступне інтегральне співвідношення:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_0+\delta_0} w_x^3 dy = -2 \int_0^{y_0+\delta_0} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy. \quad (3.72)$$

Це рівняння описує зміну кінетичної енергії в перерізах струменя уздовж

його осі.

Розв'язання задачі інтегральним методом, як і у разі примежового шару на пластині (див. п. 2.7), засновано на використанні універсальних властивостей подібності поперечних профілів швидкості в шарах змішування струменя. В якості автотодельної змінної для початкової ділянки струменя оберемо $\eta = (y - y_0) / \delta_0$. Для розподілу безрозмірної швидкості поперек шару змішування застосуємо відомий профіль Гіневського [28]

$$\frac{w_x}{W_{01}} = f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad (3.73)$$

який задовольняє усім умовам (3.67), (3.69).

Для розподілу турбулентного тертя використовуватимемо поліноміальний закон

$$\frac{\tau}{\rho} = \varphi(\eta) = -12\kappa W_{01}^2 \eta(1 - \eta)^2, \quad (3.74)$$

який узгоджується [29] у рамках гіпотези Прандтля про турбулентну в'язкість з профілем (3.73) та з умовами для τ на границях шару змішування. Параметр κ визначається дослідним шляхом і для початкової ділянки плоского струменя прийнятий рівним 0.0063.

Знаючи профілі швидкості і тертя, можна обчислити відповідні інтеграли, які входять до рівнянь (3.70), (3.72), а саме:

$$\int_0^{y_0 + \delta_0} w_x^2 dy = W_{01}^2 (y_0 + a_2 \delta_0), \quad a_2 = \int_0^1 f^2(\eta) d\eta = 0.2857;$$

$$\int_0^{y_0+\delta_0} w_x^3 dy = W_{01}^3 (y_0 + a_3 \delta_0), \quad a_3 = \int_0^1 f^3(\eta) d\eta = 0.2321; \quad (3.75)$$

$$\int_0^{y_0+\delta_0} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} = a_4 \kappa W_{01}^3, \quad a_4 = \int_0^1 \varphi(\eta) f'(\eta) d\eta = 1.3714.$$

Підставляючи значення цих інтегралів у рівняння (3.70), (3.72), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь з двома невідомими – δ_0 та y_0 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(y_0 + a_2 b_{01}) &= 0, \\ \frac{d}{dx}(y_0 + a_3 b_{01}) &= -2a_4 \kappa. \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Початкові умови для системи (3.76) виходять з постановки задачі:

$$\delta_0(0) = 0, \quad y_0(0) = b_0. \quad (3.77)$$

Таким чином, для визначення зміни параметрів y_0 і δ_0 уздовж осі струменя на початковій ділянці необхідно розв'язати задачу Коші для системи рівнянь (3.76) з початковими умовами (3.77). В даному випадку задача розв'язується аналітично. В результаті інтегрування і простих перетворень отримуємо

$$\delta_0 = \frac{2a_4}{a_2 - a_3} \kappa x, \quad (3.78)$$

$$y_0 = b_0 - \frac{2a_2 a_4}{a_2 - a_3} \kappa x. \quad (3.79)$$

Легко побачити, що ордината границі потенціального ядра плоского затопленого струменя y_0 і ширина зони змішування δ_0 змінюються лінійно

зі збільшенням координати x .

Довжину початкової ділянки x_H визначаємо з умови рівності нулю ширини потенціального ядра. З виразу (3.79) знаходимо

$$x_H = \frac{a_2 - a_3}{2\kappa a_2 a_4} b_0. \quad (3.80)$$

При взятому законі розподілу швидкості постійні a_2 , a_3 та a_4 визначені виразами (3.75). Тоді, вважаючи, що $\kappa = 0.0063$, отримуємо

$$x_H \approx 10.9b_0, \quad (3.81)$$

А ширина зони змішування у кінці початкової ділянки відповідно до (3.78) та (3.80) буде

$$\delta_{0H} = \frac{b_0}{a_2} \approx 3.5b_0. \quad (3.82)$$

Наголосимо, що в дослідах зазвичай спостерігається розкид даних і можливе деяке відхилення від отриманого значення x_H при прийнятому κ . Це пов'язано з умовами проведення дослідів, оскільки в загальному випадку значення параметра κ залежить від таких початкових умов витікання, як рівномірність профілю швидкості, ступінь підтискання, шорсткість стінок сопла, початкова міра турбулентності і т. ін. Проте, правильний підбір всього лише одного дослідного значення параметра κ дозволяє привести у відповідність теорію та експеримент.

Основна ділянка

Схема розрахунку основної ділянки плоского струменя аналогічна наведеній вище схемі розрахунку початкової ділянки. Для простоти

припустимо, що кінець початкової ділянки є початком основної ділянки. Це допущення виправдане тим, що при такому підході однозначно визначаються початкові умови, які необхідні для розрахунку параметрів струменя на основній ділянці, де рух є автотельним.

Оскільки граничні умови на зовнішній границі струменя і на осі струменя для основної ділянки співпадають з аналогічними умовами на границях зони змішування на початковій ділянці, то основні інтегральні співвідношення мають вигляд, аналогічний рівнянням (3.70), (3.72):

$$\frac{d}{dx} \int_0^b w_x^2 dy = 0, \quad (3.83)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^b w_x^3 dy = -2 \int_0^b \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy. \quad (3.84)$$

Враховуючи властивість універсальності профілю швидкості, вводим до розгляду змінну $\eta = y/b$, а швидкість на осі струменя позначаємо W_0 . Тоді, відповідно до викладеного раніше, для профілів швидкості і тертя на основній ділянці приймаємо:

$$\frac{w_x}{W_0} = f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad (3.85)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = \varphi(\eta) = -12\kappa W_0^2 \eta(1-\eta)^2, \quad (0 \leq y \leq b), \quad (3.86)$$

де $\kappa = 0.011$ для основної ділянки плоского струменя.

Знаючи профілі швидкості (3.85) і турбулентного тертя (3.86), обчислюємо інтеграли, що нас цікавлять:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b w_x^2 dy &= a_2 W_0^2 b, \\ \int_0^b w_x^3 dy &= a_3 W_0^3 b, \\ \int_0^b \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy &= a_4 \kappa W_0^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

Константи a_2 , a_3 та a_4 визначені в (3.75). Підстановка значень інтегралів в початкові рівняння (3.83), (3.84) призводить до задачі Коші для системи двох диференціальних рівнянь з двома невідомими W_0 та b :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(W_0^2 b) &= 0, \\ \frac{d}{dx}(W_0^3 b) &= -2 \frac{a_4}{a_3} \kappa W_0^3, \end{aligned} \quad (3.88)$$

з початковими умовами: $W_0(x_H) = W_{01}$, $b(x_H) = \delta_{0H}$, де δ_{0H} – ширина зони змішування струменя у кінці початкової ділянки, яка визначається рівністю (3.82).

У даному простому випадку плоского затопленого струменя система рівнянь (3.88) інтегрується в квадратурах і допускає можливість отримання аналітичного рішення. Дійсно, диференціюючи ліву частину рівнянь (3.88), маємо:

$$2b \frac{dW_0}{dx} + W_0 \frac{db}{dx} = 0, \quad (3.89)$$

$$3b \frac{dW_0}{dx} + W_0 \frac{db}{dx} = -2 \frac{a_4}{a_3} \kappa W_0. \quad (3.90)$$

Віднімаючи перше рівняння з другого, знаходимо

$$b \frac{dW_0}{dx} = -2 \frac{a_4}{a_3} \kappa W_0. \quad (3.91)$$

Підставляючи (3.91) у (3.89), отримуємо рівняння для визначення ширини струменя :

$$\frac{db}{dx} = 4 \frac{a_4}{a_3} \kappa, \quad (3.92)$$

яке відразу інтегрується, і після визначення постійної інтегрування з початкової умови $b(x_H) = \delta_{0H}$, знаходимо

$$b = \delta_{0H} + 4 \frac{a_4}{a_3 \kappa} (x - x_H),$$

або, враховуючи (3.82),

$$b = \frac{b_0}{a_2} + 4 \frac{a_4}{a_3} \kappa (x - x_H). \quad (3.93)$$

Підставляючи (3.93) та (3.92) у (3.90), приходимо до наступного диференціального рівняння першого порядку відносно шуканої осьової швидкості струменя W_0 :

$$\frac{dW_0}{dx} = -2 \frac{a_4}{a_3} \kappa \frac{W_0}{\left| \frac{b_0}{a_2} + 4 \frac{a_4}{a_3 \kappa} (x - x_H) \right|}. \quad (3.94)$$

У цьому рівнянні змінні легко розділяються, і його розв'язок має вигляд

$$\frac{W_0}{W_{01}} = \left[1 + \frac{4a_2 a_4}{a_3 b_0} \kappa(x - x_H) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.95)$$

Неважко бачити, що ширина зони змішування на основній ділянці плоского затопленого струменя зростає лінійно:

$$b \sim x, \quad (3.96)$$

а закон спадання осьової швидкості, як випливає з (3.95), має наступний характер:

$$\frac{W_0}{W_{01}} \sim x^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.97)$$

Результати розрахунку зміни безрозмірної осьової швидкості уздовж осі плоского затопленого струменя, який виконано за формулою (3.95), наведено на рис. 3.8, де для порівняння також надано дослідні дані Е. Фортмана [30], В.А. Туркуса [31] та Г.Ф. Проскури [32]. З рисунка видно хороший збіг теоретичних і дослідних даних.

З точки зору різних застосувань цікаво оцінити ежекційні властивості плоского турбулентного струменя на основній ділянці. Цілком очевидно, що в автомобельній області витрата на одиницю ширини струменя в перерізі x буде

$$Q(x) = \int_0^b w_x dy = W_0 b \int_0^1 \frac{w_x}{W_0} d\left(\frac{y}{b}\right) = a_1 W_0 b,$$

де

$$\frac{W_x}{W_0} = f(\eta), \quad a_1 = \int_0^1 f(\eta) d\eta = 0.4, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

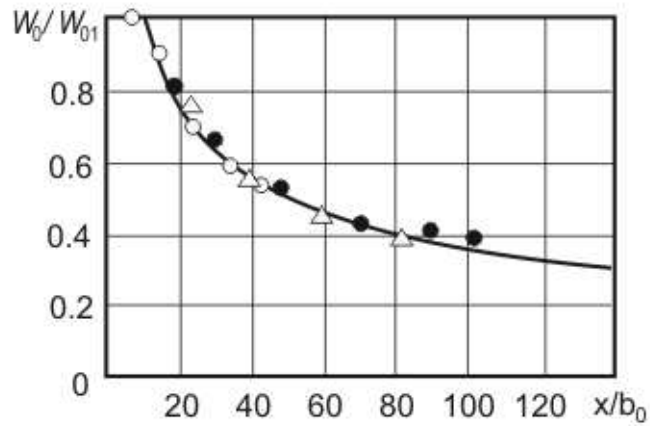


Рис. 3.8. Залежність швидкості по осі плоского затопленого струменя від відстані

Явище підсмокнутавння або ежекції струменя характеризується відношенням витрати струменя в довільному перерізі x до витрати на зрізі сопла, тобто

$$\frac{Q(x)}{Q_0} = a_1 \frac{W_0(x)b(x)}{W_{01}b_0}. \quad (3.98)$$

Враховуючи (3.93) та (3.95), з (3.98) легко отримуємо кількісну оцінку ежекційних властивостей струменя. Прості перетворення дають

$$\frac{Q(x)}{Q_0} = \frac{a_1}{a_2} \left[1 + \frac{4a_2a_4}{a_3} \frac{\kappa}{b_0} (x - x_H) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, витрата в плоскому турбулентному струмені на основній ділянці збільшується згідно з законом $Q(x) \sim x^{\frac{1}{2}}$.

3.5 ПЛОСКИЙ СУПУТНИЙ СТРУМІНЬ

Початкова ділянка

Турбулентний струмінь, що витікає з плоского або круглого насадку в середовище, яке рухається в однаковому із струменем напрямі зі швидкістю W , відмінною від початкової швидкості струменя, називають супутним струменем, або струменем у супутному потоці.

Завдання про поширення плоского або круглого турбулентного струменя в супутному потоці має важливе прикладне значення, оскільки такий тип течії зустрічається у багатьох областях техніки. Характерним параметром такого завдання є параметр супутності m , що є відношенням швидкості супутного потоку W до початкової швидкості витікання струменя W_{01} . Значення $m = W/W_{01}$ може бути меншим або більшим за одиницю. Випадок $m = 0$ відповідає затопленому струменю.

Найпростіша схема струменя в супутному потоці, яка зазвичай приймається в інтегральних методах, передбачає незмінність супутного потоку ($W = const$) і рівномірність початкової швидкості струменя ($W_{01} = const$). При цьому дійсний розподіл швидкості в площині зрізу сопла, що збурене впливом стінок сопла, замінюється дещо ідеалізованою схемою, за якою характер розподілу швидкості в цьому перерізі носить ступінчастий характер (рис. 3.9). Перейдемо до викладу інтегрального методу розв'язання задачі про струмінь в супутному потоці. Як і в затопленому струмені, виділимо в супутному струмені початкову і основну ділянки, а початкові умови для основної ділянки визначимо з умови їх спряження.

Розглянемо завдання про початкову ділянку турбулентного

струменя, що витікає з плоского сопла шириною $2b_0$ з початковою швидкістю W_{01} у супутний безмежний потік тієї ж густини (температури), що має постійну швидкість W . Принципова схема течії та осі прямокутної системи координат зображені на рис. 3.9. Струмінь і супутний потік поширюються у напрямку осі x . Як і у завданні про затоплений струмінь введемо наступні позначення: y_0 – напівширина потенціального ядра струменя, δ_0 та b напівширина шару змішування на початковій та основній ділянках відповідно.

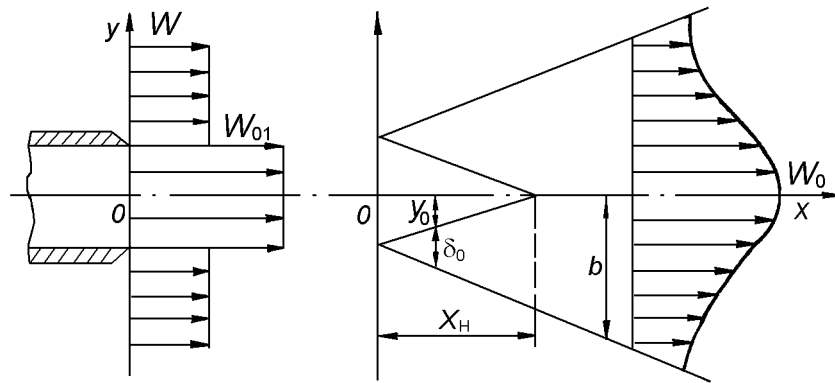


Рис. 3.9. Принципова схема супутного струменя

При звичайних допущеннях, які вже розглянуто у задачі про затоплений струмінь, система початкових інтегральних співвідношень для імпульсу і кінетичної енергії на початковій ділянці супутного струменя має вигляд [29]:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_0+\delta_0} w_x (w_x - W) dy = 0, \quad (3.99)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_0+\delta_0} w_x (w_x^2 - W^2) dy = -2 \int_0^{y_0+\delta_0} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy. \quad (3.100)$$

Рівняння (3.99), (3.100) відрізняються від рівнянь (3.70), (3.72) для затопленого струменя лише тим, що в них розглядаються надлишкові величини імпульсу і кінетичної енергії. При $W = 0$ рівняння (3.99), (3.100), як і повинно бути, переходять у рівняння (3.70), (3.72).

З дослідів із супутними струменями відомо, що подібними є не профілі саме швидкості, а профілі надлишкової швидкості. Тому ми використаємо відомі з виразів (3.73), (3.74) поліноміальні апроксимації розподілу відносних величин осьової швидкості і турбулентного тертя, замінивши в цих виразах осьові швидкості в струмені на їх надлишкові значення. При цьому задовольняються усі очевидні граничні умови для осьової швидкості та дотичного напруження. Таким чином, профілі швидкості і турбулентного тертя у довільному поперечному перерізі ядра і зони змішування в початковій ділянці супутного струменя представляємо у вигляді:

$$w_x = W_{01}, \quad \tau = 0 \quad (0 \leq y \leq y_0), \quad (3.101)$$

$$\frac{w_x - W}{W_{01} - W} = f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad \eta = \frac{y - y_0}{\delta_0}, \quad (3.102)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = \varphi(\eta) = -12\kappa(W_{01} - W)^2 \eta(1 - \eta)^2 \quad (y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_0). \quad (3.103)$$

Передбачається, що параметр $\kappa = 0.0063$ має таке ж саме значення, що і для затопленого струменя, тобто він не залежить від параметра супутності m .

Подальша методика розв'язання задачі про супутний струмінь багато в чому аналогічна схемі розрахунку затопленого струменя. Знаючи профілі швидкості і тертя, обчислюємо інтеграли

$$\left. \begin{aligned}
& \int_0^{y_0+\delta_0} w_x (w_x - W) dy = W_{01}^2 (1-m) \left[y_0 + \delta_0 (a_1 m + a_2 (1-m)) \right], \\
& \int_0^{y_0+\delta_0} w_x (w_x^2 - W^2) dy = W_{01}^3 \left[y_0 (1-m^2) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \delta_0 (1-m) (2a_1 m^2 + 3a_2 m (1-m) + a_3 (1-m)^2) \right], \\
& \int_0^{y_0+\delta_0} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = \mp a_4 \kappa W_{01}^3 (1-m)^3.
\end{aligned} \right\} (3.104)$$

Тут і далі верхній знак відповідає випадку $W_{01} < W$ ($m > 1$), а нижній – випадку $W_{01} > W$ ($m < 1$). Обґрунтуванням цього править та обставина, що інтеграл, який входить до останньої з рівностей (3.104), фізично виражає дисипацію кінетичної енергії і відповідно до рівняння (3.100) має бути додатний за будь-якого m . Постійні коефіцієнти a_i визначаються, як і раніше:

$$a_i = \int_0^1 \frac{d^i f}{d\eta^i} d\eta \quad (i=1,2,3), \quad a_4 = \int_0^1 \varphi(\eta) f'(\eta) d\eta.$$

Підставляючи значення інтегралів (3.104) у початкові рівняння (3.99), (3.100), отримуємо систему двох диференціальних рівнянь з двома невідомими $y_0(x)$ та $\delta_0(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left[y_0 + \delta_0 (a_1 m + a_2 (1-m)) \right] = 0, \quad (3.105)$$

$$\frac{d}{dx} \left[y_0 (1+m) + \delta_0 (2a_1 m^2 + 3a_2 m (1-m) + a_3 (1-m)^2) \right] = \pm 2a_4 \kappa (1-m)^2,$$

яку необхідно розв'язати за початкових умов

$$y_0(0) = b_0, \quad \delta_0(0) = 0. \quad (3.106)$$

Система рівнянь (3.105) легко інтегрується. Виконавши прості перетворення і визначивши постійні інтегрування з умов (3.106), отримаємо аналітичне рішення для шуканих параметрів струменя :

$$\delta_0 = \frac{\mp \kappa x 2a_4(1-m)^2}{a_2 - a_3 + m(a_1 - 3a_2 + 2a_3) + m^2(2a_2 - a_1 - a_3)}, \quad (3.107)$$

$$y_0 = b_0 \pm \kappa x \frac{2a_4(1-m)^2(a_2 + m(a_1 - a_2))}{a_2 - a_3 + m(a_1 - 3a_2 + 2a_3) + m^2(2a_2 - a_1 - a_3)}. \quad (3.108)$$

Результати, що отримано, повністю відповідають результатам А.С. Гіневського [28] і показують, що зовнішня і внутрішня границі зони турбулентного перемішування в плоскому супутному струмені із зростанням координати x змінюються лінійно. Легко бачити, що формули (3.107), (3.108) при $m = 0$ тотожно співпадають з аналогічними формулами (3.78), (3.79) для плоского затопленого струменя.

Вимагаючи обернення в нуль параметра y_0 у формулі (3.108), отримаємо вираз для визначення довжини початкової ділянки плоского супутного струменя:

$$x_H = \frac{\mp b_0(a_2 - a_3 + m(a_1 - 3a_2 + 2a_3) + m^2(2a_2 - a_1 - a_3))}{2\kappa a_4(1-m)^2(a_2 + m(a_1 - a_2))}. \quad (3.109)$$

Для кількісної оцінки впливу параметра супутності m на основні характеристики початкової ділянки струменя по формулах (3.107) – (3.108) при заданих a_i , κ та різних m було виконано чисельні розрахунки. Результати розрахунків за різних значень параметра супутності наведено на рис. 3.10, 3.11. На рис. 3.10 у безрозмірних координатах наведено

границі зони змішування в початковій ділянці струменя при $0 \leq m \leq 3$, а на рис. 3.11 суцільною лінією представлена розрахункова залежність безрозмірної довжини початкової ділянки плоского струменя від параметра супутності.

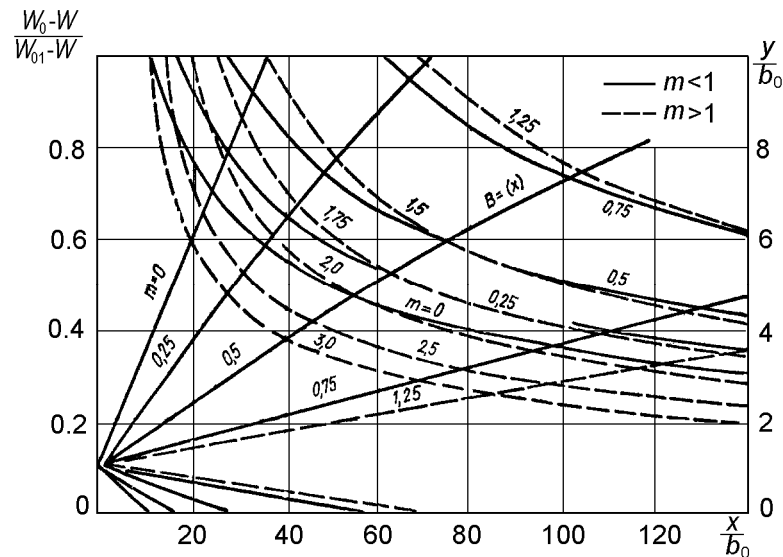


Рис. 3.10. Залежність безрозмірних осьової надлишкової швидкості та ширини зони змішування в плоскому супутному струмені від відстані за різних m

Основна ділянка

Розглянемо основну ділянку плоского струменя, що витікає з початковою швидкістю W_{01} з сопла шириною $2b_0$ в супутний потік, який має швидкість W . Початкові умови для осьової швидкості і ширини зони змішування в перерізі x_n , від якого починається основна ділянка, вважаються відомими з розв'язання задачі для початкової ділянки і мають вигляд:

$$W_0(x_n) = W_{01}, \quad b(x_n) = \delta_0(x_n) = \delta_{0n}. \quad (3.110)$$

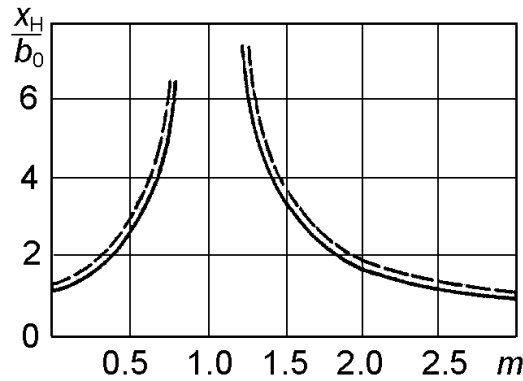


Рис. 3.11. Залежність довжини початкової ділянки плоского (суцільні криві) та круглого (штрихові криві) струменів від параметра супутності

Для основної ділянки аналогічно (3.99), (3.100) маємо наступні інтегральні співвідношення перенесення надлишкового імпульсу і надлишкової кінетичної енергії:

$$\frac{d}{dx} \int_0^b w_x (w_x - W) dy = 0, \quad (3.111)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^b w_x (w_x^2 - W^2) dy = -2 \int_0^b \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy. \quad (3.112)$$

Вважаючи

$$\frac{w_x - W}{W_0 - W} = f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad (3.113)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = \varphi(\eta) = -12\kappa(W_0 - W)^2 \eta(1 - \eta)^2 \quad (0 \leq y \leq b), \quad (3.114)$$

де на основній ділянці емпіричний параметр $\kappa = 0.011$, обчислюємо інтеграли. В результаті маємо:

$$\int_0^b w_x (w_x - W) dy = W_0^2 b \Phi, \quad (3.115)$$

$$\int_0^b w_x (w_x^2 - W^2) dy = W_0^3 b \Psi, \quad (3.116)$$

$$\int_0^b \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = \mp a_4 \kappa W_0^3 \left(1 - \frac{m}{V_m}\right)^3, \quad (3.117)$$

де

$$m = \frac{W}{W_0}, V_m(x) = \frac{W_0}{W_{01}}, \Phi(x) = \left(1 - \frac{m}{V_m}\right) \left[a_1 \frac{m}{V_m} + a_2 \left(1 - \frac{m}{V_m}\right) \right], \quad (3.118)$$

$$\Psi(x) = \left(1 - \frac{m}{V_m}\right) \left[2a_1 \left(\frac{m}{V_m}\right)^2 + 3a_2 \frac{m}{V_m} \left(1 - \frac{m}{V_m}\right) + a_3 \left(1 - \frac{m}{V_m}\right)^2 \right].$$

Підставляючи значення відповідних інтегралів в початкові рівняння (3.111), (3.112), отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь відносно двох шуканих величин – W_0 та b :

$$\frac{d}{dx} (W_0^2 b \Phi) = 0, \quad (3.119)$$

$$\frac{d}{dx} (W_0^3 b \Psi) = \pm 2a_4 \kappa W_0^3 \left(1 - \frac{m}{V_m}\right)^3. \quad (3.120)$$

Рівняння (3.119), (3.120) слід розв'язувати за початкових умов (3.110). Аналітичне розв'язання даної системи є утрудненим, проте чисельно вона легко вирішується. Введемо додатково до (3.118) у розгляд наступні безрозмірні величини:

$$B = \frac{b}{b_0}, \quad X = \frac{x}{b_0}, \quad B_0 = \frac{\delta_H}{b_0}.$$

Тоді, після операції диференціювання, рівняння (3.119), (3.120) перетворяться до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dX} &= \mp \frac{2a_4 \kappa (2\Phi + V_m \Phi_1) (1 - m/V_m)^3}{\Phi \Psi - V_m (\Phi_1 \Psi - \Psi_1 \Phi)}, \\ \frac{dV_m}{dX} &= \pm \frac{2a_4 \kappa V_m \Phi (1 - m/V_m)^3}{B [\Phi \Psi - V_m (\Phi_1 \Psi - \Psi_1 \Phi)]}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Початкові умови для системи (3.121) записуються на основі (3.110) таким чином:

$$B(X_H) = B_0, \quad V_m(X_H) = 1. \quad (3.122)$$

У запису рівнянь (3.121) прийняті наступні додаткові позначення:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{m}{V_m^2} \left[2a_2 - a_1 + 2(a_1 - a_2) \frac{m}{V_m} \right], \\ \Psi_1 &= \frac{m}{V_m^2} \left[2a_1 \frac{m^2}{V_m^2} + 2(3a_2 - 2a_1) \frac{m}{V_m} \left(1 - \frac{m}{V_m} \right) + 3(a_3 - a_2) \left(1 - \frac{m}{V_m} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Задача Коші (3.121) – (3.123) розв’язувалася чисельно [29] методом Рунге–Кутта за вказаних раніше значень сталих параметрів a_i , κ та змінного параметра супутності m . Результати розрахунку, що ілюструють зміну уздовж струменя безрозмірних осьової надлишкової швидкості і ширини зон змішування при $0 \leq m \leq 3$, представлені на рис. (3.10). При $m=0$ рівняння (3.121) тотожно співпадають з рівняннями (3.92), (3.94) для затопленого плоского струменя, які розв’язано аналітично. Ця обставина

використовувалася для оцінки точності чисельного методу. Розбіжність спостерігалася лише в четвертому знаку після коми, а це означає, що використання схеми Рунге–Кутта четвертого порядку забезпечувало точність до 0.1%.

3.6 ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1) Як змінюється товщина ламінарного примежового шару на плоскій пластині?

2) Яку формулу отримано Блазіусом для коефіцієнта тертя на пластині?

3) Який вираз отримано Польгаузенем для місцевого числа Нуссельта на пластині, обтічній у поздовжньому напрямку.

4) Як визначається профіль швидкості і розподіл напруги тертя у ламінарному примежовому шарі на пластині?

5) Якими формулами визначається місцеве число Нуссельта у ламінарному примежовому шарі, що утворюється при набіганні плоского та вісесиметричного струменів на плоску поверхню?

6) Як записуються закони тепловіддачі у примежовому шарі при набіганні плоского струменя на циліндричну та сферичну поверхні?

7) Які вирази для розподілу безрозмірної швидкості у перерізі примежового шару використовуються для інтегрування рівняння імпульсів?

8) Як залежить співвідношення товщини динамічного та теплового примежових шарів від числа Прандтля?

9) Який вираз для місцевого числа Нуссельта у ламінарному примежовому шарі на пластині дає інтегральне рівняння енергії у випадку

$Pr \geq 1$?

10) Якою формулою можна користуватись для обчислення місцевого числа Нуссельта у ламінарному примежовому шарі рідких металів на пластині?

11) Який вираз отримано для коефіцієнта гідродинамічного тертя у вхідній ділянці круглої труби з урахуванням неізотермічності?

12) Як впливає охолодження стінки на розподіл швидкості в ядрі потоку на початковій ділянці круглої труби?

13) Який вигляд має вираз для числа Стентона на початковій ділянці круглої труби з урахуванням неізотермічності?

14) Який параметр використовують в теорії конвективного теплообміну для характеристики ступеня неізотермічності?

15) Що називають довжиною ділянки гідродинамічної стабілізації і як вона визначається?

16) Що називають затопленим струменем?

17) На які ділянки поділяють затоплений струмінь при наближеному аналітичному описанні?

18) Які граничні умови для компонент швидкості у плоскому затопленому струмені використовують у межах початкової ділянки?

19) Як визначається автомодельна змінна на початковій ділянці плоского затопленого струменя?

19) Яку форму профілю безрозмірної швидкості поперек примежового шару на початковій ділянці плоского струменя використовують для наближених розрахунків?

20) Чому дорівнює довжина початкової ділянки плоского затопленого струменя?

21) Як визначається ширина плоского струменя наприкінці

початкової ділянки?

22) Як визначається автотодельна змінна і який профіль безрозмірної швидкості використовують для аналітичного описання основної ділянки плоского струменя?

23) Який характер мають закони зміни ширини плоского струменя та зменшення швидкості на його осі на основній ділянці?

24) Якою є кількісна оцінка ежекційних властивостей затопленого струменя?

25) Що називають супутним струменем та параметром супутності?

26) Як впливає параметр супутності на ширину зони змішування та надлишкову швидкість по осі струменя?

27) Як залежить від параметра супутності довжина початкової ділянки струменя?

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМІНУ І ГІДРОДИНАМІКИ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ОБ'ЄМІВ

4.1 ЗАГАЛЬНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Одним з найбільш ефективних сучасних підходів до дискретизації вихідних рівнянь у задачах гідрогазодинаміки і теплообміну є метод скінчених об'ємів [17, 33, 34]. Відповідно до цього методу диференціальні рівняння інтегруються в межах кожної з розрахункових комірок, на які розбивається досліджувальна область, із застосуванням теореми про середнє значення. В отриманих співвідношеннях фігурують значення невідомих величин (компонент швидкості, характеристик турбулентності і т. ін.) та їх похідних у центрах комірок та у центрах їх бічних граней. За допомогою відповідних різницевих співвідношень, що забезпечують необхідні обчислювальні властивості, формується система алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих величин в точках комірок, що відповідають вузлам обраного розрахункового шаблону. Оскільки коефіцієнти системи містять невідомі величини, через нелінійність початкових рівнянь, потрібна ітераційна процедура, на кожному кроці якої розв'язання лінеаризованої системи рівнянь дає уточнені значення компонент швидкості і температури рідини. Для корекції тиску на кожному кроці ітерацій використовується система лінійних рівнянь, яку отримано на основі різницевих співвідношень, що виходять з рівняння нерозривності.

Детальніше основні аспекти дискретизації за методом скінчених

об'ємів зручно розглядати на прикладі загального рівняння перенесення скалярної величини ϕ у потоці суцільного середовища:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi w_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + J, \quad (4.1)$$

де Γ – коефіцієнт дифузії; J – джерельний член.

Перший доданок у лівій частині відповідає локальній зміні субстанції, що характеризується величиною ϕ , у даній точці області. Другий доданок у лівій частині визначає просторову зміну субстанції в цій точці, обумовлену її перенесенням разом із середовищем, що рухається, тобто характеризує конвективний потік. Перший доданок у правій частині відповідає просторовій зміні субстанції за рахунок її перенесення на молекулярному рівні, тобто визначає дифузійний потік. Останній, джерельний член у правій частині характеризує швидкість утворення (або зникнення) субстанції, яке обумовлено різними фізичними механізмами, пов'язаними з перетвореннями енергії (взаємодія за рахунок фізичних полів, хімічні реакції, фазові перетворення, дисипація і т. ін.).

Покажемо, що рівняння кількості руху (1.13) і перенесення теплоти (1.19), які цікавлять нас у задачах конвективного теплообміну, можуть бути представлені у вигляді (4.1). Дійсно, для випадку сталих ρ , λ , c_p та з урахуванням рівняння нерозривності (1.14), рівняння (1.19) еквівалентно співвідношенню:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho T w_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (4.2)$$

Як бачимо, рівняння (4.2) повністю відповідає рівнянню (4.1) при $\phi = T$,

$\Gamma = \lambda/c_p$ та $J = 0$.

З урахуванням рівняння нерозривності (1.14), рівняння кількості руху (1.13) можуть бути представлені в наступній формі:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho w_i w_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} . \quad (4.3)$$

При $\phi = w_i$, $\Gamma = \mu$ та $J = \rho f_i$ рівняння (4.3) відрізняється від модельного рівняння перенесення (4.1) лише доданком з градієнтом тиску (останній доданок у правій частині (4.3)), який є специфічним для рівнянь перенесення компонент імпульсу. Наявність цього доданку призводить до необхідності використання рівняння нерозривності для розв'язання рівнянь (4.3). Специфіку цієї ситуації буде розглянуто далі.

Слід зауважити, що рівняння (4.2), (4.3) є так званою *дивергентною* формою запису рівнянь енергії і кількості руху. Це пов'язано з тим, що вони можуть бути безпосередньо отримані з інтегральних законів збереження відповідних фізичних величин із застосуванням теореми про дивергенцію (теореми Остроградського–Гаусса). Дивергентна форма запису є переважною при використанні методу скінчених об'ємів, оскільки забезпечує краще виконання інтегральних законів збереження на границях між контрольними об'ємами.

Рівняння перенесення характеристик турбулентності (1.43), (1.45), (1.60), (1.61), (1.73), що розглянуті в главі 1, також повністю відповідають модельному рівнянню (4.1). Усі доданки в їх правих частинах, окрім дифузійного члена, трактуються як джерело. Це обґрунтовано не лише формально, але й фізично, оскільки вони характеризують генерацію і дисипацію відповідних величин.

Отже, звернемося до рівняння (4.1). Його інтегрування за об'ємом контрольної комірки з центром в т. Р із застосуванням теореми Гаусса–Остроградського (теореми про дивергенцію) [1, 35] дає наступну рівність:

$$\int_{V_P} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \oint_{S_P} \rho\phi w_n dS = \oint_{S_P} \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial n} dS + \int_{V_P} J dV, \quad (4.4)$$

де V_P , S_P – відповідно об'єм комірки та його гранична поверхня; w_n – проекція швидкості на зовнішню нормаль до граничної поверхні; $\partial\phi/\partial n$ – похідна за напрямком зовнішньої нормалі.

Застосування до виразу (4.4) теореми про середнє значення [35] призводить до дискретного співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)_P V_P + \sum_f^{N_f} (\rho\phi w_n)_f S_f = \sum_f^{N_f} \Gamma_f \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_f S_f + J_P V_P, \quad (4.5)$$

де індекси P, f відмічають значення у центрі комірки та у центрі грані відповідно; S_f – площа грані; N_f – кількість граней вічка.

Загальний підхід такий, що за середні за об'ємом комірки значення приймаються значення у центрі комірки, а за середні значення на кожній грані вибираються значення у центрах граней.

4.2 ДИСКРЕТИЗАЦІЯ КОНВЕКТИВНОГО ЧЛЕНА

Ефективність і якість чисельного розв'язання завдань динаміки рідини багато в чому залежить від способу дискретизації конвективного члена (другий доданок у лівій частині рівняння (4.5)). Відомо [36], що центрально–різницевої апроксимації значення ϕ на границі контрольного

об'єму призводять до нефізичних осциляцій розв'язку. При цьому амплітуда осциляцій зазвичай не знижується з подрібненням сітки, а їх частота зростає. Тому загальноприйнятим є використання *протипотокових схем* апроксимації конвективного члена у задачах течії рідин, де вплив конвекції зазвичай великий. Найпростішою є протипотокова схема першого порядку точності, згідно якої значення величини, що переноситься, на грані апроксимується її значенням у центрі комірки, розташованої вище за потоком. Проте схеми з різницями проти потоку низького порядку дають схемну в'язкість, сумірну за порядком величини з фізичною в'язкістю, особливо коли сіткові лінії не вирівняні уздовж напрямку течії (що взагалі можливо лише за наявності у потоці переважного напрямку), або використовується неструктурована сітка (структурованою називають сітку з впорядкованим пошаровим розташуванням комірок). Ця обставина посилює в'язкий характер течії, що призводить до «розмазування» градієнтів шуканих функцій. Хоча це явище дещо стабілізує обчислювальну процедуру, підвищуючи її стійкість, проте при цьому виникають істотні похибки у розв'язку. Досить детальне обговорення цих питань можна знайти, наприклад, в роботі [37]. У підсумку, на сьогодні склалося уявлення [17, 38, 39] про необхідність використання для апроксимації конвективних членів протипотокових схем високого порядку точності з контролем монотонності розв'язку, щоб уникнути появи неправдивих екстремумів функції, що апроксимується.

У загальному вигляді протипотокова різницева схема для визначення значення величини, що переноситься, на грані f , спільної для двох сусідніх контрольних об'ємів (рис. 4.1), може бути представлена як:

$$\phi_f = R_f \left[\phi_P + \frac{1}{2} \lim(\gamma_{f+})(\phi_P - \phi_W) \right] + (1 - R_f) \left[\phi_E + \frac{1}{2} \lim(\gamma_{f-})(\phi_E - \phi_{EE}) \right], \quad (4.6)$$

$$R_f = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|w_n|}{w_n} \right)_f,$$

де $\lim(\gamma)$ – обмежуюча функція (обмежувач потоку), використання якої потрібне для забезпечення монотонності розв’язку.

Обмежувач $\lim(\gamma)$ визначає [37] обчислювальні властивості і порядок точності різницевої схеми. Аргумент γ є відношенням похідних ϕ уздовж прямої, що з’єднує центри суміжних комірок, обчислених за двома сітковими кроками проти потоку. Для структурованих сіток (рис. 4.1) параметр γ може бути обчисленим безпосередньо по значеннях ϕ у центрах комірок [37, 38]:

$$\gamma_{f+} = \frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}; \quad \gamma_{f-} = \frac{\phi_P - \phi_E}{\phi_E - \phi_{EE}}. \quad (4.7)$$

Величина R_f у виразі (4.6) набуває значення 1, якщо потік витікає через дану грань із комірки з центром P , і значення 0 у протилежному випадку. Тож один з доданків у формулі (4.6) дорівнює нулю.

При використанні формул (4.6), (4.7) слід мати на увазі, що індекси «E» та «EE» завжди відповідають коміркам, що розташовані вниз за потоком стосовно комірки з центром P , грань якої розглядається.

Зауважимо також, що формули (4.6), (4.7) справедливі для рівномірної структурованої сітки. Узагальнення на нерівномірні сітки не є складним, проте робить вирази громіздкішими і менш наочними. Використання неструктурованих сіток викликає деякі додаткові труднощі. З цього питання можна звернутися, наприклад, до робіт [38, 40].

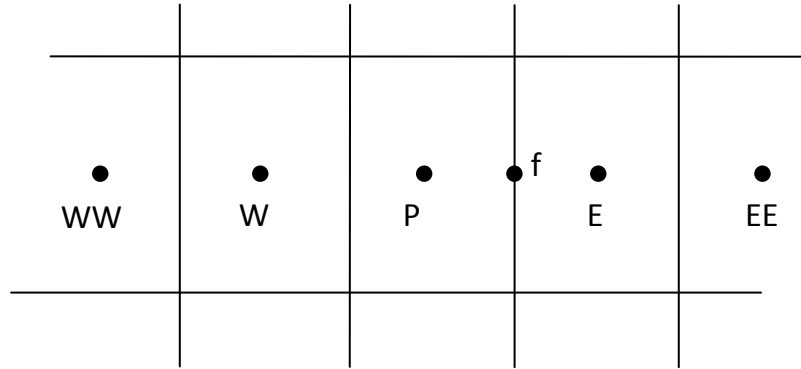


Рис. 4.1. Різницевий шаблон для визначення конвективного потоку крізь грань структурованої сітки

Приклади протипотокових різницевоїх схем

Якщо для обмежувача потоку прийняти значення $\lim \gamma = 0$, то з виразів (4.6) отримаємо таке різницеве співвідношення:

$$\phi_f = R_f \phi_P + (1 - R_f) \phi_E. \quad (4.8)$$

Рівність (4.8) визначає вже згадувану вище протипотокову схему першого порядку точності, яку прийнято позначати UDS (Upstream Difference Scheme).

Значенню $\lim \gamma = 1$ відповідає вираз

$$\phi_f = R_f \left[\frac{3}{2} \phi_P - \frac{1}{2} \phi_W \right] + (1 - R_f) \left[\frac{3}{2} \phi_E - \frac{1}{2} \phi_{EE} \right]. \quad (4.9)$$

Співвідношення (4.9) визначає *лінійну протипотокову схему*, яку позначають LUDS (Linear Upstream Difference Scheme), що має другий порядок точності. Схема LUDS має меншу чисельну дифузію, ніж схема UDS, проте в окремих випадках може вносити надмірну чисельну дифузію.

Вираз для обмежувача потоку у вигляді $\lim \gamma = \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{4}$ відповідає *квадратичній протипотоковій інтерполяції* з використанням двох сіткових вузлів вгору за течією і одного – униз за течією. В цьому випадку із загального виразу (4.6), з урахуванням співвідношень (4.7), отримуємо:

$$\phi_f = R_f \left[\frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W \right] + (1 - R_f) \left[\frac{3}{8}\phi_P + \frac{3}{4}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_{EE} \right]. \quad (4.10)$$

Схема, якій відповідає рівність (4.10), названа QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) і має 3-й порядок точності.

Схеми UDS, LUDS і QUICK відносяться до схем, для яких обмежувач потоку є лінійною функцією свого аргументу γ . Найточнішою з цих схем є схема QUICK, проте, вона в деяких випадках може призводити до появи нефізичних осциляцій в області високих градієнтів шуканих функцій. Для пригнічення цих осциляцій на базі схеми QUICK розроблено нелінійні схеми (з нелінійною залежністю обмежувача потоку від γ), що задовольняють спеціальному критерію *обмеження повної варіації* (або TVD – Total Variation Diminishing), що виключає появу хибних екстремумів [37].

Переваги базової схеми QUICK найбільшою мірою виявляються на структурованій сітці з правильних шестигранних (чотирикутних в двовимірному випадку) комірок. Для неструктурованих або сильно викривлених сіток результати застосування цієї схеми практично не відрізняються від використання схеми LUDS, яка до того ж є більш простою.

Визначення конвективного потоку.

Після визначення різницевої схеми на основі загального виразу (4.6) і вибору відповідного обмежувача потоку, конвективний член у рівнянні (4.5) для контрольного об'єму можна записати так:

$$\sum_f^{N_f} (\rho \phi w_n)_f S_f = \sum_f^{N_f} \dot{m}_f [R_f \phi_P + (1 - R_f) \phi_E] + j_{P,conv}, \quad (4.11)$$

$$j_{P,conv} = \sum_f^{N_f} \dot{m}_f \left[\frac{1}{2} R_f \lim(\gamma_{f+}) (\phi_P - \phi_W) + \frac{1}{2} (1 - R_f) \lim(\gamma_{f-}) (\phi_E - \phi_{EE}) \right]^{\text{expl}}, \quad (4.12)$$

де потік маси крізь грань f визначається виразом

$$\dot{m}_f = (\rho w_n)_f S_f. \quad (4.13)$$

Перший доданок в рівності (4.11) обчислюється на шаблоні, що складається з двох суміжних комірок, тобто визначається компактною обчислювальною молекулою. Наявність другого доданку $j_{P,conv}$, що підвищує порядок схеми, як впливає з рівності (4.12), призводить до розширення обчислювальної молекули. У зв'язку з цим, як часто роблять [38], трактуватимемо другий доданок явним чином, тобто обчислювати на основі значень, визначених на попередньому кроці ітераційного процесу. Цю обставину підкреслює верхній індекс «expl» у рівності (4.12) і далі.

У окремому випадку застосування схеми LUDS ($\lim \gamma = 1$) з (4.12) маємо:

$$j_{P,conv} = \sum_f^{N_f} \dot{m}_f \left[\frac{1}{2} R_f (\phi_P - \phi_W) + \frac{1}{2} (1 - R_f) (\phi_E - \phi_{EE}) \right]^{\text{expl}}.$$

4.3 ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ДИФУЗІЙНОГО, ДЖЕРЕЛЬНОГО

І НЕСТАЦІОНАРНОГО ЧЛЕНІВ

Дифузійний доданок

Для представлення дифузійного члена в рівнянні (4.5) (перший доданок в правій частині) необхідно отримати різницеву апроксимацію нормальної похідної $(\partial\phi/\partial n)_f$ у центрі грані. Співвідношення

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_f \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{|\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_P|} = \frac{\phi_E - \phi_P}{|\mathbf{r}_{PE}|}, \quad (4.14)$$

записане в позначеннях, поданих на рис. 4.1, забезпечує центрально-різницеву апроксимацію, яка характеризується 2-м порядком точності. Підкреслимо, що вираз (4.14) відноситься до простого випадку, коли лінія PE, що з'єднує центри сусідніх комірок, проходить крізь центр даної грані по нормалі до неї. В цьому випадку сіткові лінії різних напрямів взаємно ортогональні (плоскі прямокутні комірки або просторові комірки у формі прямих прямокутних призм). Існує узагальнення формули (4.14) на будь-який тип сіток, з яким за необхідності можна ознайомитися по роботах [38, 41].

Застосовуючи формулу (4.14) до інших граней того ж контрольного об'єму, слід мати на увазі, що зменшуваним у чисельнику є значення величини, що переноситься, у центрі сусідньої комірки, а знаменник є відстанню між центрами суміжних осередків, що поділяють цю грань.

Для дифузійного доданку в рівнянні (4.5), з урахуванням формули (4.14), матимемо:

$$\sum_f^{N_f} \Gamma_f \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_f S_f = \sum_f^{N_f} \Gamma_f S_f \frac{\phi_E - \phi_P}{|\mathbf{r}_{PE}|}. \quad (4.15)$$

Дискретизація джерела

Джерело представляє останній доданок у рівнянні (4.5). У загальному випадку в джерельний член можуть входити значення величини, що переноситься, та її похідних, тому для обчислення значення J_P необхідно мати значення ϕ_P та $(\partial\phi/\partial x_i)_P$. Джерело зазвичай трактується явним чином [38], тому зазначені вище величини беруться з попереднього кроку ітераційного циклу. Якщо значення ϕ_P визначені безпосередньо при використанні центрованого розрахункового шаблону (при якому зберігаються значення шуканої функції в центрах розрахункових комірок), то для обчислення похідних необхідно використовувати відповідне співвідношення. Таке співвідношення, прийнятне для будь-яких сіток, можна отримати із застосуванням теореми Гаусса–Остроградського. Дійсно, за цією теоремою маємо:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \right)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f^{N_f} \phi_f \mathbf{n}_f S_f, \quad (4.16)$$

де \mathbf{i}_i – одиничні вектори координатних осей; \mathbf{n}_f – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поточної грані.

Із співвідношення (4.16) виходить рівність, що визначає значення частинних похідних у центрі контрольного об'єму:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f^{N_f} \phi_f S_f n_{fi}, \quad (4.17)$$

де n_{fi} – проекція зовнішньої нормалі до грані на ось x_i .

Значення ϕ_f в центрі кожної грані визначаються як середнє арифметичне значень у центрах суміжних комірок. Наприклад, для грані,

відміченої на рис. 4.1, маємо

$$\phi_f = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}. \quad (4.18)$$

Отже, значення величини, що переноситься, в центрах розрахункових осередків на попередньому кроці ітераційного циклу і співвідношення (4.17),(4.18) забезпечують обчислення значення J_P у формулі (4.5), яке залежить від шуканої функції та її похідних.

Дискретизація нестационарного члена

Нестационарний член у рівнянні (4.5) у разі нестисливої рідини і сітки, що не деформується, має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)_P V_P = \rho V_P \frac{d\phi_P}{dt}. \quad (4.19)$$

Будемо для зручності позначати похідну за часом точкою згори, а верхніми індексами $n, n+1$ – приналежність до моментів часу t_n і $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Запишемо рівність, обидві частини якої визначають похідну за часом у момент часу $t_{n+1} = t_n + \Delta t/2$:

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}_P^{n+1} + \dot{\phi}_P^n).$$

З цієї рівності виходить апроксимація

$$\dot{\phi}_P^{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(\phi_P^{n+1} - \phi_P^n) - \dot{\phi}_P^n. \quad (4.20)$$

Схема (4.20) заснована на центрально-різницевій апроксимації похідної за часом, тому характеризується 2-м порядком точності. Вона містить значення функції в два найближчі моменти часу, тобто, є

двошаровою.

Значення похідної $\dot{\phi}_P^n$ на початку поточного кроку за часом, як буде показано далі, виражається на основі рівняння (4.5) через значення функції в цьому і сусідньому вузлах у цей момент часу.

4.4 ДИСКРЕТНИЙ АНАЛОГ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ

Записавши рівняння (4.5) для моменту t_n (початок поточного кроку за часом), розв'яжемо його відносно похідної за часом. З підстановкою виразів (4.11),(4.15) матимемо:

$$\rho V_P \dot{\phi}_P^n = - \sum_f^{N_f} \dot{m}_f^n \left[R_f^n \phi_P^n + (1 - R_f^n) \phi_E^n \right] - j_{P,conv}^n + \sum_f^{N_f} \Gamma_f^n S_f \frac{\phi_E^n - \phi_P^n}{\Delta n_f} + J_P^n V_P, \quad (4.21)$$

де позначено $\Delta n_f = |\mathbf{r}_{PE}|$, а верхній індекс « n » означає, що відповідна величина обчислюється для початку поточного кроку.

Для визначення невідомих вузлових значень у кінці поточного кроку за часом, запишемо співвідношення (4.5) для моменту $t = t_{n+1}$ (усі доданки, що визначаються просторовою дискретизацією, обчислюються через значення у кінці поточного кроку). Такий підхід відповідає *неявній схемі* інтегрування за часом. Неявна схема забезпечує безумовну стійкість відносно кроку Δt [34,38]. Підставлення в (4.5) виразів (4.11), (4.15), (4.20),(4.21) призводить до співвідношення

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\rho V_P}{\Delta t} + \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^{m-1} R_f^{m-1} + \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \right) \phi_P^m + \sum_f^{N_f} \left[\left(\dot{m}_f^{m-1} (1 - R_f^{m-1}) - \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \phi_E^m \right] = \\ & = \left(\frac{2\rho V_P}{\Delta t} - \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^n R_f^n + \Gamma_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \right) \phi_P^n - \sum_f^{N_f} \left[\left(\dot{m}_f^n (1 - R_f^n) - \Gamma_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \phi_E^n \right] - \end{aligned}$$

$$-j_{P,conv}^n - j_{P,conv}^{m-1} + J_P^n V_P + J_P^{m-1} V_P. \quad (4.22)$$

Верхній індекс « n » у виразі (4.22) як і раніше означає приналежність до моменту часу, що відповідає початку поточного кроку. Величини, що відмічені цим індексом, відомі, або за початковими умовами, або за результатами розв'язання на попередньому кроці. Використання індексів « m », « $m-1$ » замість « $n+1$ » обумовлено ітераційною процедурою розв'язання на поточному часовому кроці системи дискретних рівнянь вигляду (4.22), записаних для усіх комірок, на які розбита розрахункова область. На початковій ітерації ($m = 1$) перше наближення для розподілу шуканої функції в області приймається на основі результатів, отриманих на попередньому кроці ($\phi^{m-1} = \phi^n$).

На основі цих значень обчислюються потоки маси \dot{m}_f^{m-1} крізь грані комірок, коефіцієнти дифузії Γ_f^{m-1} у центрі граней (якщо вони змінні), а також доданки $j_{P,conv}^{m-1}$, з частиною конвективного потоку, що трактується явним чином, та з джерелом J_P^{m-1} , які входять до правої частини (4.22). Після чергової ітерації виконується присвоєння $\phi^{m-1} = \phi^m$, збільшення номера ітерації ($m = m + 1$), та ітераційний процес триває до досягнення необхідної точності. Величини, відмічені верхнім індексом « n », в процесі ітерацій на одному кроці за часом не перераховуються.

Як вже було зазначено вище, сукупність рівнянь (4.22), записаних для кожної розрахункової комірки, разом з виразами (4.12),(4.13), є системою лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженою матрицею коефіцієнтів, яка розв'язується ітераційним методом. Для збіжності ітераційних методів розв'язання систем лінійних рівнянь потрібно

переважання діагональних елементів у матриці коефіцієнтів. Стосовно рівняння (4.22) це означає виконання умови

$$\frac{2\rho V_P}{\Delta t} + \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^{m-1} R_f^{m-1} + \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \geq \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^{m-1} (1 - R_f^{m-1}) - \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f} \right),$$

що в нашому випадку заздалегідь не гарантується. Для усунення цього недоліку, дотримуючись роботи [38], додамо до правої частини (4.22) величину

$$-\phi_P^m \sum_f^{N_f} \dot{m}_f^{m-1} + \phi_P^{m-1} \sum_f^{N_f} \dot{m}_f^{m-1},$$

яка прагне до нуля в процесі ітерацій. В результаті отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\rho V_P}{\Delta t} + \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^{m-1} (R_f^{m-1} - 1) + \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \right) \phi_P^m - \sum_f^{N_f} \left[\left(\dot{m}_f^{m-1} (R_f^{m-1} - 1) + \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \phi_E^m \right] = \\ & = \left(\frac{2\rho V_P}{\Delta t} - \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^n R_f^n + \Gamma_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \right) \phi_P^n - \sum_f^{N_f} \left[\left(\dot{m}_f^n (1 - R_f^n) - \Gamma_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \phi_E^n \right] - \\ & - \phi_P^{m-1} \sum_f^{N_f} \dot{m}_f^{m-1} - j_{P,\text{conv}}^n - j_{P,\text{conv}}^{m-1} + J_P^n V_P + J_P^{m-1} V_P, \end{aligned} \quad (4.22)$$

у якому діагональне переважання забезпечене.

Переходячи до стандартного запису, рівняння (4.22) можна представити у вигляді:

$$a_P^{m-1} \phi_P^m - \sum_f^{N_f} (a_f^{m-1} \phi_E^m) = Q_P^{m-1}, \quad (4.23)$$

де

$$a_f^{m-1} = \dot{m}_f^{m-1} (R_f^{m-1} - 1) + \Gamma_f^{m-1} \frac{S_f}{\Delta n_f}; \quad (4.24)$$

$$a_P^{m-1} = \frac{2\rho V_P}{\Delta t} + \sum_f^{N_f} a_f^{m-1}; \quad (4.25)$$

$$Q_P^{m-1} = \left(\frac{2\rho V_P}{\Delta t} - \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^n R_f^n + \Gamma_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \right) \phi_P^n - \sum_f^{N_f} \left[\left(\dot{m}_f^n (1 - R_f^n) - \Gamma_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \phi_E^n \right] - \phi_P^{m-1} \sum_f^{N_f} \dot{m}_f^{m-1} - j_{P,conv}^n - j_{P,conv}^{m-1} + J_P^n V_P + J_P^{m-1} V_P, \quad (4.26)$$

Якщо потік маси крізь грані комірок та коефіцієнт дифузії не залежать від значень величини ϕ , то коефіцієнти і вільний член рівняння (4.23), що визначаються формулами (4.24) – (4.26), залишаються сталими в процесі ітерацій.

4.5 ДИСКРЕТНА ФОРМА РІВНЯНЬ ПЕРЕНОСУ ІМПУЛЬСУ

Рівняння кількості руху (імпульсу) в дивергентній формі (4.3) можна розглядати як рівняння перенесення компоненти w_i вектора швидкості. Розглядатимемо тут його загальнішу форму, яка відповідає рівнянню Рейнольдса осередненого турбулентного руху у формі (1.38). Якщо увести поняття ефективної в'язкості $\mu_e = \mu + \mu_t$ та перейти, з урахуванням рівняння нерозривності (1.14) для осереднених швидкостей, до дивергентної форми рівняння (1.38), отримаємо наступний вираз:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho w_i w_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_e \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2}{3} \rho k \right). \quad (4.27)$$

Інтегруючи (4.27) за об'ємом розрахункової комірки з застосуванням теореми про дивергенцію і теореми про середнє значення, прийдемо, за аналогією з рівністю (4.5), до наступного рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho w_i)_P V_P + \sum_f^{N_f} (\rho w_i w_n)_f S_f = \sum_f^{N_f} (\mu_e)_f \left(\frac{\partial w_i}{\partial n} \right)_f S_f + (\rho f_i)_P V_P - \\ - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P V_P - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \rho k}{\partial x_i} \right)_P V_P. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Дискретизація нестационарного і конвективного членів рівняння (доданки у лівій частині), а також дифузійного і джерельного (перший і другий у правій частині), розглянута вище стосовно модельного рівняння (для даного випадку маємо: $\phi = w_i$, $\Gamma = \mu_e$, $J = \rho f_i$). Розглянемо доданки, що залишилися.

Для визначення проекції градієнта тиску в центрі розрахункової комірки можна використати співвідношення (4.17), яке в даному випадку має вигляд :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f^{N_f} p_f S_f n_{fi}, \quad (4.29)$$

де значення тиску в центрі кожної грані визначається через значення в центрах суміжних комірок аналогічно рівності (4.18):

$$p_f = \frac{1}{2}(p_P + p_E). \quad (4.30)$$

Аналогічно для доданку з турбулентною енергією, отримуємо

наступний вираз:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\partial \rho k}{\partial x_i} \right)_P V_P = \frac{2}{3} \sum_f^{N_f} (\rho k)_f S_f n_{fi}, \quad (\rho k)_f = \frac{1}{2} ((\rho k)_P + (\rho k)_E). \quad (4.31)$$

Доданок (4.31) трактуватимемо явним способом і введемо для нього наступне позначення:

$$J_{P,k} = \frac{2}{3} \sum_f^{N_f} (\rho k)_f n_{fi} S_f. \quad (4.32)$$

У результаті, вводючи за аналогією з (4.26) позначення

$$\begin{aligned} (Q_i)_P^{m-1} &= \left(\frac{2\rho V_P}{\Delta t} - \sum_f^{N_f} \left(\dot{m}_f^n R_f^n + (\mu_e)_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) \right) (w_i)_P^n - \\ &\quad - \sum_f^{N_f} \left[\left(\dot{m}_f^n (1 - R_f^n) - (\mu_e)_f^n \frac{S_f}{\Delta n_f} \right) (w_i)_E^n \right] - \\ &\quad - (w_i)_P^{m-1} \sum_f^{N_f} \dot{m}_f^{m-1} - j_{P,\text{conv}}^n - j_{P,\text{conv}}^{m-1} + (\rho f_i)_P^n V_P + (\rho f_i)_P^{m-1} V_P - J_{P,k}^{m-1}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

отримаємо наступний аналог рівняння (4.23):

$$a_P^{m-1} (w_i)_P^m - \sum_f^{N_f} (a_f^{m-1} (w_i)_E^m) = (Q_i)_P^{m-1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P^m V_P. \quad (4.34)$$

Доданки $j_{P,\text{conv}}^n, j_{P,\text{conv}}^{m-1}$ у рівності (4.33) обчислюються на основі виразу (4.12) з очевидною заміною: $\phi = w_i$. Доданок $J_{P,k}^{m-1}$ розраховується на основі визначення (4.32). Коефіцієнти a_f^{m-1}, a_P^{m-1} визначаються по формулах (4.24), (4.25), де $\Gamma = \mu_e$. Нагадаємо, що верхній індекс « $m-1$ » означає, що відповідні величини визначаються по значеннях компонент швидкості та інших залежних змінних, що визначені на попередньому

кроці ітерацій.

Рівняння (4.34) для кожної компоненти швидкості, записані для усіх розрахункових комірок, утворюють систему, яка є різницевим аналогом рівнянь перенесення імпульсу (4.27).

Для дискретизації рівняння нерозривності (1.14) представимо його у такому вигляді:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.35)$$

У цій формі воно є справедливим не лише для нестисливої рідини, але і для стаціонарної течії стисливого газу. Для турбулентних потоків це рівняння залишається справедливим для осереднених значень густини та швидкості.

Інтегрування (4.35) за контрольним об'ємом (комірки з центром P) дає

$$\int_{V_P} \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} dV = \oint_{S_P} \rho w_n dS = 0.$$

А після застосування теореми про середнє значення приходимо до дискретного співвідношення:

$$\sum_f^{N_f} \rho (w_n)_f S_f = 0. \quad (4.36)$$

4.6 ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНА ПРОЦЕДУРА КОРЕКЦІЇ ПОЛІВ ТИСКУ ТА ШВИДКОСТІ

Особливість рівнянь динаміки нестисливої рідини проявляється в

тому, що для визначення компонент швидкості використовуються дискретні рівняння (4.34), що виходять з рівнянь кількості руху, а для визначення тиску залишається рівняння (4.36), що є дискретним аналогом рівняння нерозривності, але тиск в нього явно не входить. Тому для визначення поля тиску необхідно розробити спеціальну процедуру, що включає використання рівняння (4.36).

У скінченно–об'ємній технології базовою ітераційною процедурою взаємозв'язаного розрахунку значень швидкості і тиску у вузлах розрахункової сітки є алгоритм SIMPLE (Semi – Implicit Method for Pressure – Linked Equations), запропонований Патанкармом і Сполдингом [33]. Згідно цього методу спочатку по заданому орієнтовно розподілу тиску p^{m*} визначається поле швидкостей w_i^{m*} . При цьому розв'язуються дискретні рівняння (4.34), які записуються так:

$$a_P^{m-1}(w_i)_P^{m*} - \sum_f^{N_f} (a_f^{m-1}(w_i)_E^{m*}) = (Q_i)_P^{m-1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P^{m*} V_P \quad (i=1,2,3). \quad (4.37)$$

Використання отриманих значень швидкості для розрахунку потоку маси через грані кожної розрахункової комірки призводить до похибки у виконанні дискретного рівняння нерозривності (4.36), замість якого з'являється співвідношення

$$\sum_f^{N_f} \rho (w_n)_f^{m*} S_f = \delta^{m*}, \quad (4.38)$$

де δ^{m*} – похибка.

Дійсні значення швидкості і тиску можна представити у вигляді:

$$w_i = w_i^* + w_i', \quad (4.39)$$

$$p = p^* + p', \quad (4.40)$$

де w'_i, p' – коригувальні добавки.

Віднімаючи з рівняння (4.34) рівняння (4.37) з урахуванням співвідношень (4.39),(4.40) отримуємо:

$$a_p^{m-1} (w'_i)_p = \sum_f^{N_f} (a_f^{m-1} (w'_i)_E) - \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_p V_p \quad (i=1,2,3). \quad (4.41)$$

У базовому методі SIMPLE для отримання явного співвідношення нехтують першим доданком у правій частині рівності (4.41). При цьому для поправки швидкості виходить наступний вираз:

$$(w'_i)_p = -\frac{V_p}{B_p} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_p, \quad (4.42)$$

де

$$B_p = a_p^{m-1}. \quad (4.43)$$

В узгодженій процедурі SIMPLE, що дістала назву SIMPLEC [42], використовується точніше явне наближення рівняння (4.41). Для цього з

обох частин цього рівняння віднімається вираз $(w'_i)_p \sum_f^{N_f} a_f^{m-1}$, і, після

нехтування доданком $\sum_f^{N_f} (a_f^{m-1} (w'_i)_E) - (w'_i)_p \sum_f^{N_f} a_f^{m-1}$, знову виходить рівність

(4.42), у якій тепер

$$B_p = a_p^{m-1} - \sum_f^{N_f} a_f^{m-1}. \quad (4.44)$$

Грунтуючись на значеннях поправок швидкості в центрах суміжних комірок, що визначаються рівністю (4.42), можна записати наступний

вираз [38] для поправки нормальної швидкості на грані:

$$(w'_n)_f = -V_f \frac{1}{B_f} \left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_f, \quad (4.45)$$

де апроксимований об'єм V_f визначається таким чином:

$$V_f = S_f \Delta n_f, \quad (4.46)$$

А Δn_f – уведена вище відстань вздовж нормалі до грані між центрами суміжних комірок ($\Delta n_f = |\mathbf{r}_{PE}|$).

Для коефіцієнта $1/B_f$ маємо представлення

$$\frac{1}{B_f} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_P} + \frac{1}{B_E} \right), \quad (4.47)$$

де B_P і, аналогічно ньому B_E , визначаються однією з рівностей (4.43)(4.44).

Нормальну похідну від поправки тиску на грані апроксимуватимемо наступним виразом:

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_f = \frac{p'_E - p'_P}{\Delta n_f}. \quad (4.48)$$

З урахуванням визначень (4.46) – (4.48), вираз (4.45) для поправки швидкості на грані набуває вигляду

$$(w'_n)_f = -d_f (p'_E - p'_P), \quad (4.49)$$

де $d_f = S_f / B_f$.

Після віднімання рівняння (4.38) з (4.36), ми отримуємо наступне дискретне співвідношення, якому повинні задовольняти поправки нормальних швидкостей на границі контрольного об'єму:

$$\sum_f^{N_f} \rho(w'_n)_f S_f = -\delta^{m*}.$$

Підставляючи в останню рівність співвідношення (4.49), отримуємо шукане рівняння для визначення значень поправки тиску:

$$\left(\sum_f^{N_f} d_f \right) p'_P - \sum_f^{N_f} d_f p'_E = -\delta^{m*}. \quad (4.50)$$

Граничну умова для поправки тиску можна отримати з умови нульової поправки для нормальної швидкості на тих гранях, що належать границі розрахункової області, для яких відоме значення швидкості. Ввести цю умову в коефіцієнти рівнянь (4.50) можна, прийнявши для цих граней $d_f = 0$.

Алгоритм корекції значень тиску і швидкості

Відповідно до алгоритмів сімейства SIMPLE для визначення величин швидкості w_i^m і тиску p^m , а також характеристик турбулентності, на кожному кроці m ітераційного циклу, обумовленого нелінійністю початкових рівнянь, виконується наступна послідовність дій:

1) Орієнтовні значення тиску p^{m*} вибираються на основі значень, отриманих на попередньому кроці ($p^{m*} = p^{m-1}$), або на основі початкового розподілу. Так само певні значення компонент швидкості, кінетичній енергії турбулентності k і ефективної в'язкості μ_e використовуються для розрахунку коефіцієнтів a_p^{m-1}, a_f^{m-1} і вільних членів $(Q_i)_p^{m-1}$ у рівняннях (4.37). Після цього з розв'язку цих рівнянь (системи рівнянь вигляду (4.37) для кожної компоненти швидкості розв'язуються окремо по черзі)

визначається перше наближення розподілу швидкостей w_i^{m*} .

2) З розв'язку системи рівнянь, що включає рівність (4.50), записану для кожної розрахункової комірки, визначаються значення поправки p' до тиску, необхідні для виконання рівняння нерозривності.

3) На основі рівності (4.49) обчислюються поправки до значень нормальної швидкості на гранях усіх комірок, а з рівності (4.42), доповненої співвідношеннями

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f^{N_f} p'_f S_f n_{fi}, \quad p'_f = \frac{1}{2} (p'_P + p'_E),$$

аналогічними розглянутим вище співвідношенням (4.29), (4.30), визначаються поправки до значень проекцій швидкості в центрах розрахункових комірок.

4) З використанням залежностей (4.39), (4.40) визначаються скоректовані значення проекцій швидкості і тиску :

$$(w_i)_P^m = (w_i)_P^{m*} + (w'_i)_P, \quad (w_n)_f^m = (w_n)_f^{m*} + (w'_n)_f, \quad p_P^m = p_P^{m*} + p'_P \\ (i = 1, 2, 3; f = 1, 2, \dots, N_f; P = 1, 2, \dots, N_{cells}),$$

де N_{cells} – загальне число розрахункових осередків.

5) На основі скоректованих значень компонент швидкості і потоків маси через грані розрахункових комірок обчислюються коефіцієнти і вільні члени рівнянь виду (4.23), що представляють дискретні аналоги рівнянь перенесення характеристик турбулентності, які відповідають тій або іншій моделі турбулентності. З розв'язку отриманих рівнянь, доповнених замикаючими співвідношеннями моделі, визначаються уточнені значення характеристик турбулентності. Після цього

визначаються значення турбулентної і ефективної в'язкості.

б) При виконанні умов збіжності для кожної змінної у разі стаціонарної задачі розрахунок припиняється, а у разі нестаціонарної задачі починається новий ітераційний цикл на наступному кроці за часом з пункту 1). При невиконанні умов збіжності хоча б для однієї змінної розрахунок триває з пункту 1) на наступному кроці ітерацій ($m = m + 1$).

4.7 ТЕХНІКА НИЖНЬОЇ РЕЛАКСАЦІЇ І КРИТЕРІЙ ЗБІЖНОСТІ

Складний нелінійний характер зміни залежних змінних у процесі ітерації вимагає контролю над вибором наступного наближення при переході на кожен наступний крок ітерацій. Це необхідно як для прискорення збіжності, так і для забезпечення її як такої. Такий контроль може бути здійснений із застосуванням релаксаційних коефіцієнтів.

При корекції тиску це має на увазі використання замість рівності (4.40) наступного співвідношення :

$$p = p^* + \alpha_p p', \quad (4.51)$$

де $\alpha_p \leq 1$ – релаксаційний коефіцієнт.

При ітераційному визначенні проекцій швидкості релаксаційний параметр вводиться відповідно до співвідношення

$$(w_i)_p^{m,new} = \alpha_w (w_i)_p^m + (1 - \alpha_w)(w_i)_p^{m-1}, \quad (4.52)$$

де $\alpha_w \leq 1$ – коефіцієнт релаксації.

З урахуванням співвідношення (4.52) рівняння (4.34) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\alpha_w} a_P^{m-1} (w_i)_P^{m, new} - \sum_f^{N_f} (a_f^{m-1} (w_i)_E^m) = (Q_i)_P^{m-1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P^m - \frac{(1 - \alpha_w)}{\alpha_w} a_P^{m-1} (w_i)_P^{m-1}, \quad (4.53)$$

Таким чином, введення релаксаційного коефіцієнта ($\alpha_w < 1$) за приведеною схемою призводить до посилення діагонального переважання в матриці коефіцієнтів дискретного рівняння кількості руху і до появи додаткового джерельного члена.

Аналогічно (4.52) вводяться релаксаційні коефіцієнти $\alpha_k, \alpha_\varepsilon, \alpha_\omega, \alpha_\nu$ при розв'язанні рівнянь перенесення характеристик турбулентності (залежно від моделі турбулентності, що використовується).

На кожному кроці за часом ітерації, в ході яких уточнюються значення компонент швидкості, тиску і характеристик турбулентності, тривають до тих пір, поки не будуть задоволені умови, що грають роль критеріїв збіжності. Такими умовами є досягнення нормалізованими похибками у виконанні дискретних рівнянь кількості руху, нерозривності і перенесення характеристик турбулентності величин менших, ніж заздалегідь прийняті граничні значення. Похибки (чи дисбаланс) в рівняннях кількості руху на m – ом кроці ітерацій визначаються таким чином (грунтуючись на рівняннях (4.34)):

$$\delta_{w_i}^m = \frac{\sum_P^{N_{cells}} \left| a_P^{m-1} (w_i)_P^m - \sum_f^{N_f} a_f^{m-1} (w_i)_E^m - (Q_i)_P^{m-1} + V_P \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_P^m \right|}{\sum_P^{N_{cells}} |a_P^{m-1} w_P^m|}, \quad (4.54)$$

де w_P^m – величина швидкості у центрі комірки на поточному (m – ому) кроці ітерацій.

Аналогічним чином визначаються похибки у рівняннях перенесення

характеристик турбулентності. Наприклад, для рівняння перенесення кінетичної енергії турбулентних пульсацій, маємо

$$\delta_k^m = \frac{\sum_P^{N_{cells}} \left| a_P^{m-1} k_P^m - \sum_f^{N_f} a_f^{m-1} k_E^m - Q_P^{m-1} \right|}{\sum_P^{N_{cells}} \left| a_P^{m-1} k_P^m \right|},$$

де коефіцієнти рівнянь a_f, a_P та вільні члени Q_P визначені в процесі дискретизації рівняння (1.43) (при використанні $k - \varepsilon$ моделі) або (1.60) (для SST $k - \omega$ моделі).

Похибку в рівнянні нерозривності визначатимемо таким чином:

$$\delta_c^m = \frac{\sum_P^{N_{cells}} \left| (\delta_P^{m*}) \right|}{\max_{n=1,2,\dots,5} \left(\sum_P^{N_{cells}} \left| (\delta_P^{n*}) \right| \right)}, \quad (4.55)$$

де δ_P^{m*} – джерело маси у комірці з центром P на m – ому кроці ітерацій, що визначається відповідно до виразу (4.38).

Нормування у визначенні (4.55) здійснюється на основі максимального сумарного дисбалансу в рівнянні нерозривності, який визначається по п'яти перших ітераціях.

Зазвичай критеріями збіжності вважають зменшення похибок $\delta_{w_i}^m, \delta_c^m, \dots$ на 3–4 порядки у порівнянні з їх значеннями на перших ітераціях. Проте сучасні дослідження показують [178], що далеко не завжди достатня точність розв'язку досягається відразу після виконання сформульованих вище умов. Тому окрім контролю над поведінкою похибок необхідно стежити за зміною в процесі ітерацій характерних

інтегральних параметрів досліджуваної течії, наприклад, коефіцієнтів гідродинамічних сил, сумарної кінетичної енергії потоку в області і т. ін.

4.8 КОРЕКЦІЯ РХИ – ЧОУ

У варіанті скінченно–об'ємної дискретизації, що описується нами, використовується суміщений центрований розрахунковий шаблон для компонент швидкості та тиску. Це означає, що вузловими точками, в яких розраховуються і зберігаються значення компонент швидкості і тиску, є центри комірок. При цьому, як відомо, [33] можуть виникати осциляції тиску нефізичного характеру. Для запобігання осциляціям, які обумовлені похибкою лінійної інтерполяції тиску на грані через значення тиску в центрах комірок у процесі розрахунку значень нормальної швидкості на гранях, в роботі [43] був запропонований підхід, що полягає у використанні згладжувальної поправки до значення нормальної швидкості на грані.

В інтерпретації, викладеній у роботі [4.8], корекція швидкості на грані записується таким чином:

$$(w_n)_f^* = \overline{(w_n)_f^*} - C_{rch} \frac{V_f}{B_f} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_f - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_f} \right], \quad (4.66)$$

де коефіцієнти V_f і B_f визначаються по виразах (4.46)(4.47).

Значення нормальної швидкості на грані, що коригується, визначається інтерполяцією

$$\overline{(w_n)_f^*} = \frac{1}{2} (w_P^* + w_E^*).$$

Вираз у квадратних дужках є різницею похідної по нормалі до грані від

тиску, яка визначається через значення тиску в центрах двох суміжних комірок –

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_f = \frac{p_E - p_P}{\Delta n_f},$$

та похідною, що визначається як середнє значення проєкцій на нормаль до грані градієнтів тиску в центрах сусідніх комірок –

$$\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_f} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} n_{fi}\right)_P + \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} n_{fi}\right)_E \right].$$

Частинні похідні у центрах суміжних комірок визначаються на основі рівностей (4.29)(4.30).

Коефіцієнт C_{rch} призначений для регулювання долі поправки Рхи–Чоу в загальній величині нормальної швидкості. У початковій інтерпретації [43] $C_{rch} = 1$.

У підсумку вираз (4.66) для корекції швидкості представляється у вигляді:

$$(w_n)_f^* = \overline{(w_n)_f^*} - C_{rch} \frac{1}{B_f} \left[S_f (p_E - p_P) - V_f \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_f} \right] \quad (4.67)$$

Поправка (4.67) використовується при обчисленні дефекту маси по рівнянню (4.38) у блоці корекції тиску.

4.9 РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

На кожному кроці ітерацій для отримання уточнених значень

залежних змінних вирішуються системи лінійних рівнянь, в яких невідомими є значення шуканих величин у центрах розрахункових комірок. Для кожної компоненти швидкості систему складають рівняння (4.34), записані для всіх розрахункових комірок. При визначенні поправок тиску систему утворюють рівняння (4.50). Для рівнянь перенесення характеристик турбулентності маємо систему рівнянь виду (4.23). В усіх випадках підсумкова система рівнянь має такий вигляд:

$$\mathbf{A}\phi + \mathbf{b} = 0, \quad (4.68)$$

де ϕ – вектор дискретних значень шуканої скалярної змінної.

Матриця коефіцієнтів \mathbf{A} є *розрідженою* (більша кількість її коефіцієнтів дорівнює нулю). Це пояснюється тим, що у кожне рівняння системи входять зі своїми коефіцієнтами лише значення шуканих функцій у центрах декількох суміжних комірок. В той же час розмірність матриці, як правило, дуже велика. У такій ситуації оптимальним є використання ітераційних методів рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ). Зокрема, часто використовується метод Гауса–Зейделя.

Згідно з методом Гауса–Зейделя [44] матриця коефіцієнтів системи (4.68) представляється як сума верхньої і нижньої трикутних матриць:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'', \quad (4.69)$$

де

$$\mathbf{A}' = [a'_{ij}]: \{a'_{ij} = a_{ij} \ (i \geq j), \ a'_{ij} = 0 \ (i < j)\};$$

$$\mathbf{A}'' = [a''_{ij}]: \{a''_{ij} = a_{ij} \ (i < j), \ a''_{ij} = 0 \ (i \geq j)\}.$$

Потім ітерації виконуються за правилом

$$\mathbf{A}'\phi^{k+1} + \mathbf{A}''\phi^k + \mathbf{b} = 0 \ (k = 0, 1, \dots). \quad (4.70)$$

У системі (4.70) всі уточнені значення ϕ^{k+1} визначаються незалежно, починаючи з останнього рівняння, в якому лише одне невідоме значення. Вектор початкового наближення ϕ^0 формується з вузлових значень шуканої функції на попередньому кроці ітераційного циклу – ϕ_p^{m-1} ($P=1,2,\dots,N_{cells}$).

Схема Гауса–Зейделя (4.69),(4.70) досить швидко усуває локальні похибки у початковому наближенні, обумовлені взаємним впливом близько розташованих комірок. В той же час глобальні похибки, обумовлені взаємним впливом віддалених комірок, зменшуються істотно повільніше. При цьому швидкість збіжності ітераційного процесу помітно знижується зі збільшенням загального числа розрахункових комірок. Це проявляється в тому, що загальна збіжність чисельного розв'язання при використанні досить детальних сіток серйозно зменшується.

Окрім використання паралельних розподілених обчислень, одним з ефективних шляхів подолання вказаного вище обмеження є використання методу алгебраїчного багатосіткового прискорювача (Algebraic Multigrid – AMG). Багатосітковий підхід передбачає використання послідовності грубіших сіток для корекції глобальних похибок у ході ітерацій. Метод заснований на принциповій можливості переформулювання початкової системи рівнянь, отриманої з використанням дрібної сітки, до вигляду, еквівалентного формального переходу до грубішої сітки, в якій комірки формуються шляхом злиття декількох сусідніх комірок початкової сітки. При цьому зберігаються особливості, пов'язані зі взаємним впливом комірок, які спочатку є віддаленими одна від іншої.

Проте масштаби взаємного впливу величин, що визначаються, пов'язані з числом проміжних рівнянь (при записі системи), кардинально

зменшуються. Таким чином, глобальні (великомасштабні) на дрібній сітці похибки стають локальними (дрібномасштабними) на грубій сітці і можуть бути ефективно скоректовані процедурою Гауса–Зейделя. Ідея методу передбачає екстраполяцію скоректованих на грубій сітці значень невідомих в процесі зворотного переходу до дрібної сітки. При цьому генеруються локальні по відношенню до дрібної сітки похибки, які можуть бути ефективно видалені в процесі пост–релаксації із застосуванням процедури Гауса–Зейделя для рівнянь на дрібній сітці.

Оскільки розрахунки на грубій сітці дозволяють провести корекцію великомасштабних похибок у початковому наближенні зі зменшеним по експоненціальній залежності процесорним часом та зниженими вимогами до ресурсів пам'яті, застосування методу AMG відкриває великі можливості підвищення загальної ефективності розрахункового алгоритму. У рамках огляду ми не поглиблюватимемося в розгляд цього специфічного питання, що стосується техніки обчислень. Зауважимо тільки, що з однією з версій методу AMG можна ознайомитися у роботі [41].

4.10 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ПЛОСКОГО ЗАТОПЛЕНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СТРУМЕНЯ

Проілюструємо застосування методу скінчених об'ємів у викладеній вище інтерпретації на прикладі задачі про турбулентний повітряний струмінь, що витікає з плоского каналу в область, заповнену нерухомим повітрям (плоский затоплений турбулентний струмінь). Ця класична задача вже розглянута нами у параграфі 3.4 на основі інтегральних співвідношень теорії примежового шару після прийняття деяких обґрунтованих спрощуючих допущень. Ця обставина дозволяє провести

порівняння результатів чисельного розрахунку з достовірними даними.

Розрахункова схема для чисельного моделювання зображена на рис. 4.2.

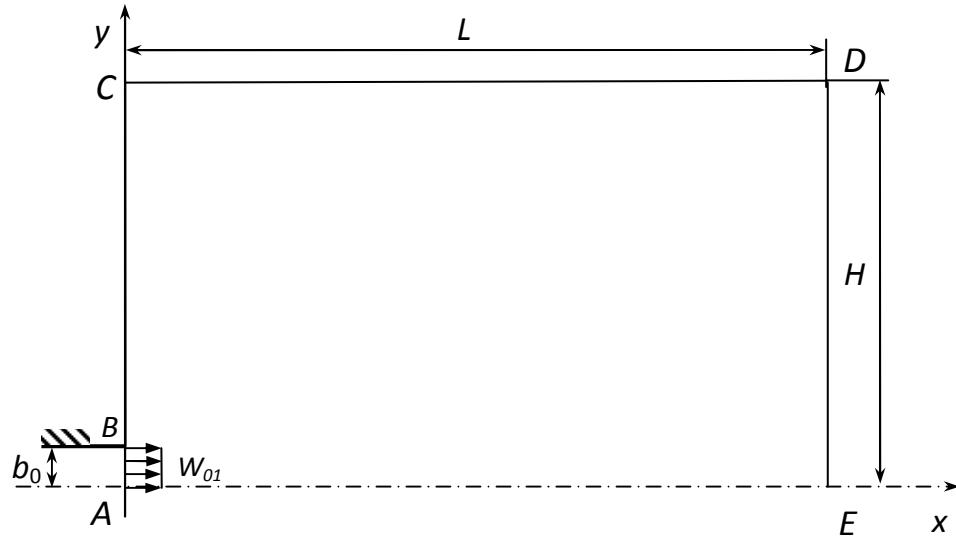


Рис. 4.2. Схема області течії

Для напівширини струменя прийнято значення $b_0 = 0.01$ м. Розміри розрахункової області обрані рівними $L = H = 1$ м. Розглядається рівномірний профіль швидкості на виході з каналу (границя AB) з величиною швидкості $W_{01} = 10$ м/с. Для повітря при температурі ~ 300 К маємо: $\rho = 1.175$ кг/м³, $\nu = 15.486 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 2.6198$ Вт/(м·К). Таким чином, число Рейнольдса дорівнює $Re = 2b_0W_{01}/\nu \approx 12900$.

Плоску розрахункову область розбиваємо структурованою розрахунковою сіткою зі взаємно перпендикулярними сітковими лініями, які вирівняні уздовж осей x і y . Для базової сітки прийmemo кількість сіткових шарів уздовж обох напрямів рівним: $N_x = N_y = 500$, що відповідає числу $N_{cells} = 250000$ квадратних розрахункових комірок.

Граничні умови для рівнянь руху

Граничні умови, які застосовуються під час розв'язання рівнянь перенесення імпульсу і нерозривності, можна сформулювати таким чином:

$$\begin{aligned} \text{Границя } AB (x=0, 0 \leq y \leq b_0): w_x = W_{01} = 10 \text{ м/с}, w_y = 0; \\ \text{Границя } BC (x=0, b_0 \leq y \leq H): p - p_a = 0; \\ \text{Границя } CD (0 \leq x \leq L, y=H): p - p_a = 0; \\ \text{Границя } DE (x=L, 0 \leq y \leq H): p - p_a = 0; \\ \text{Границя } AE (0 \leq x \leq L, y=0): w_y = 0, \partial w_x / \partial y = \partial w_y / \partial x = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Перша з умов (4.71) задає розподіл швидкості на початку струменя. Остання умова відповідає симетрії течії відносно площини $y=0$. На інших границях задається постійний тиск, що дорівнює атмосферному тиску p_a . Для нестисливого середовища абсолютне значення цього тиску не має значення (можна прийняти $p=0$, розглядаючи надлишковий тиск).

Врахування граничних умов щодо тиску в процедурі чисельного розв'язання методом скінчених об'ємів виконується шляхом підстановки значення $p'_E = 0$ у рівняння (4.49), (4.50) для тих граней розрахункових комірок, які належать відповідним границям. При цьому значення нормальної швидкості рідини на цих гранях визначається в процесі ітерацій. Цілком можливою є ситуація, коли на частини границі, де задається умова щодо тиску, має місце втікання рідини в розрахункову область ззовні (для течій каналного типу це так звана *зворотна течія*). В цьому випадку для розв'язання рівнянь перенесення компонент швидкості, тепла і характеристик турбулентності необхідно задавати значення величин, що переносяться, на гранях комірок, крізь які рідина втікає ззовні.

Для визначення значення компонент швидкості досить задати кут між вектором швидкості і нормаллю до грані (оскільки проекція швидкості на нормаль визначається в процесі ітерацій). У нашому випадку, як і у багатьох інших, можна прийняти напрям швидкості на ділянках втікання рідини нормальним до граничної поверхні.

Модель турбулентності

З приведеної у п.1.6 характеристики декількох поширених диференціальних моделей турбулентності витікає, що для задачі, яка розглядається нами, цілком відповідною виглядає стандартна $k-\varepsilon$ модель. Ця модель досить адекватна в умовах вільних зсувних шарів далеко від стінок. Крім того, вона має хороші обчислювальні характеристики. Для порівняння розглянемо також SST $k-\omega$ модель Ментера. Хоча за відсутності помітного впливу твердих стінок і поля відцентрових сил важко чекати помітних переваг цієї моделі над моделлю $k-\varepsilon$, проте додаткові можливості демпфування турбулентної в'язкості за малих значень турбулентного числа Рейнольдса Re_t , які реалізовані у SST $k-\omega$ моделі, можуть стати помітними в області переходу від високої турбулентності у зоні струменя до відсутності турбулентності на видаленні від неї.

При використанні $k-\varepsilon$ моделі на додачу до умов (4.71) необхідно задавати значення k і ε на вхідній границі AB , а також у зовнішній області на випадок притоку рідини ззовні через ділянки граничної поверхні BCD . На ділянках, де рідина підтікає в розрахункову область з навколишнього простору, ці значення, як показано вище, потрібні для визначення конвективних потоків крізь відповідні грані розрахункових комірок, що

примикають до границі. Безпосереднє завдання величин k і ϵ на границях області є ускладненим. Тому їх визначають зазвичай через інші параметри, для яких значно легше встановити фізично обґрунтовані значення.

Для вхідної границі AB такими параметрами є інтенсивність турбулентних пульсацій Tu (формула (1.7)) і інтегральний масштаб турбулентності L (див. формулу (1.41)). Для розвиненої каналної течії інтенсивність турбулентності оцінюється співвідношенням $Tu = 0.16(\text{Re})^{-\frac{1}{8}}$, що для нашого випадку дає $Tu \approx 0.05$. Характерний масштаб турбулентних вихорів для течії у каналі визначається як $L = 0.07d_h$, де d_h – гідравлічний діаметр, який в нашому випадку дорівнює $2b_0$. Таким чином, на межі AB маємо $L = 0.14b_0$. З формул (1.7),(1.37) для кінетичної енергії турбулентності маємо:

$$k = \frac{3}{2}(W_{01}Tu)^2. \quad (4.72)$$

Швидкість дисипації турбулентної енергії можна визначати на основі формули

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{L}, \quad (4.73)$$

що є аналогічною виразу (1.56). Константа C_μ визначена третьою рівністю (1.47).

Для вільної турбулентності в зовнішній області прийmemo $Tu = 0.005$. Замість завдання масштабу турбулентності для зовнішньої області більш обґрунтованим є завдання відносної турбулентної в'язкості μ_t/μ , яку в таких випадках беруть з діапазону 1...10. Ми прийmemo для наших розрахунків $\mu_t/\mu = 5$. Поділивши рівність (1.46) на в'язкість μ ,

отримаємо вираз для визначення швидкості дисипації турбулентної енергії:

$$\varepsilon = \rho C_{\mu} \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^{-1}, \quad (4.74)$$

Таким чином, вирази (4.72),(4.73) при значеннях $Tu = 0.05$, $L = 0.14b_0 = 0.0014$ м дають нам граничні умови для рівнянь перенесення k і ε у вхідному перерізі струменя (границя AB). Рівності (4.72),(4.74) при значеннях $Tu = 0.005$, $\mu_t/\mu = 5$ дозволяє розраховувати потоки величин k, ε на ділянках втікання рідини у розрахункову область крізь вільні зовнішні границі.

При використанні SST $k - \omega$ моделі турбулентності на основі рівностей (4.72) – (4.74), доповнених співвідношенням (1.40), розраховуються граничні значення величин k та ω .

Моделювання теплообміну

При чисельному розв'язанні рівняння (4.2) використовуватимемо наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} \text{Границя } AB \ (x = 0, 0 \leq y \leq b_0): \quad T = T_0 = 350\text{К}; \\ \text{Границя } BC \ (x = 0, b_0 \leq y \leq H): \quad T = T_a = 290\text{К}; \\ \text{Границя } CD \ (0 \leq x \leq L, y = H): \quad T = T_a = 290\text{К}; \\ \text{Границя } DE \ (x = L, 0 \leq y \leq H): \quad T = T_a = 290\text{К}; \\ \text{Границя } AE \ (0 \leq x \leq L, y = 0): \quad \partial T / \partial y = 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Друга, третя та четверта з умов (4.75) використовуються лише на ділянках втікання рідини в розрахункову область з навколишнього простору.

Результати розв'язання

Основні підходи до апроксимації і загальна схема побудови чисельного розв'язку описані вище. Для врахування рівняння нерозривності використовуватимемо узгоджену процедуру SIMPLEC. При дискретизації конвективних членів рівнянь перенесення виконаємо порівняння схем UDS і QUICK. Будемо розв'язувати стаціонарну задачу; за перше наближення приймемо поля швидкостей, температури і характеристик турбулентності, отримані лінійною інтерполяцією цих величин по значеннях на границях області, а також незмінне по області значення тиску ($p - p_a = 0$).

Для нестисливої рідини за незмінних значень теплофізичних констант розподіл температури не впливає на рух суцільного середовища, тому спочатку розв'язуємо рівняння руху, доповнені рівняннями перенесення характеристик турбулентності.

На рис. 4.3 наведено дані про зміну відносних похибок у процесі ітерацій, які визначаються на основі співвідношень, приведених у параграфі 4.7. Як було зауважено, цієї інформації не завжди буває досить для висновку про досягнення збіжності і припинення обчислень. Тому в процесі ітерацій аналізувалася також зміна середнього по розрахунковій області значення швидкості осередненого руху (w_m) та середнього значення відносної турбулентної в'язкості $(\mu_t/\mu)_m$, зміна яких характеризує перебудову течії у процесі ітерацій. Відповідні графіки представлені на рис. 4.4.

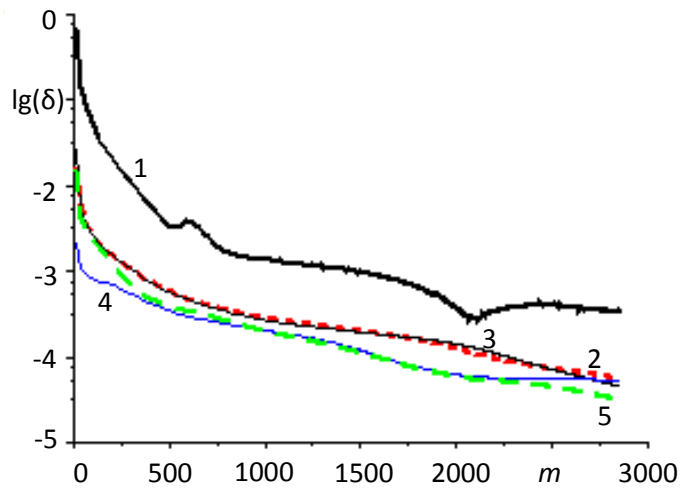


Рис. 4.3. Зміна відносних похибок у виконанні розрахункових рівнянь у процесі ітерацій: 1– δ_c^m ; 2– $\delta_{w_x}^m$; 3– $\delta_{w_y}^m$; 4– δ_k^m ; 5– δ_ε^m

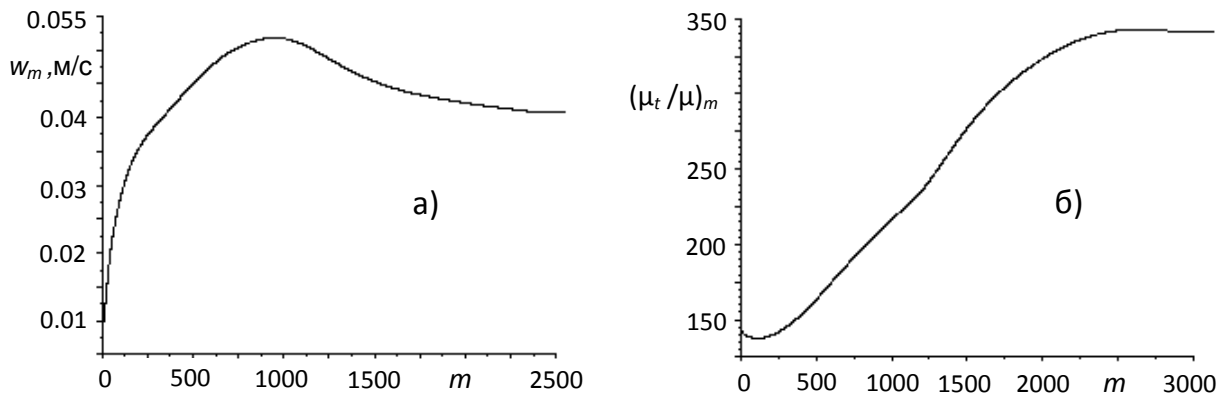


Рис. 4.4. Зміна середніх по області значень величини швидкості (а) та відносної турбулентної в'язкості (б) в процесі ітерацій

Представлені дані, зокрема, показують, що зміна інтегральних параметрів, які характеризують осереднений та пульсаційний рухи, набуває асимптотичного характеру дещо пізніше, ніж початкові похибки у виконанні дискретних аналогів розрахункових рівнянь зменшуються на

три порядки. Крім того, підтверджується також існування як такого усталеного в цілому режиму течії.

Картина течії наочно представляється у вигляді ліній течії осередненого руху повітря. Відповідні контурні графіки, що отримані із застосуванням двох моделей турбулентності, приведені на рис. 4.5. Розрахунок по моделі $k-\varepsilon$ виконувався із застосуванням протипотокової схеми першого порядку UDS. Використання SST $k-\omega$ моделі поєднувалося із застосуванням схеми QUICK, що характеризується переважно 3-ім порядком точності при апроксимації конвективних доданків.

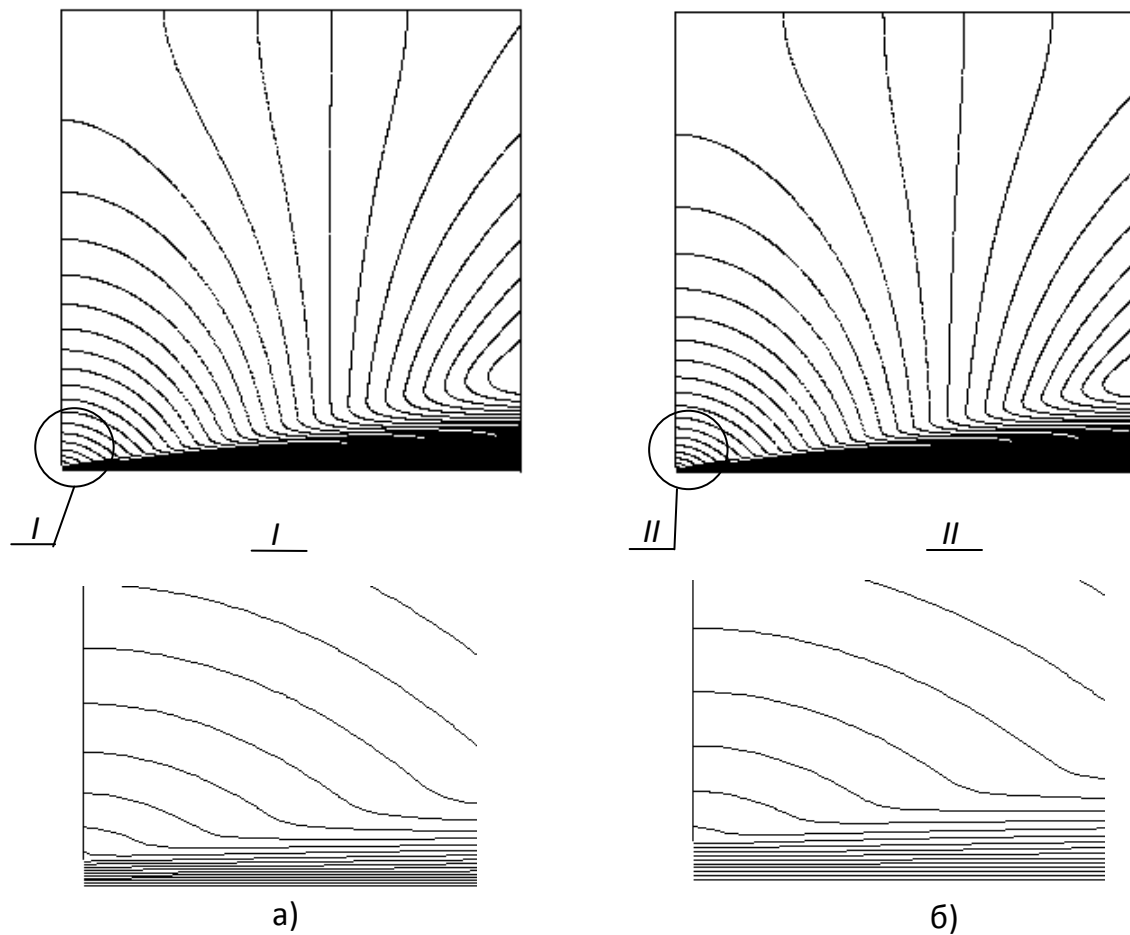


Рис. 4.5. Лінії течії осередненого потоку в області затопленого струменя, розраховані з використанням $k-\varepsilon$ (а) і SST $k-\omega$ (б) моделей турбулентності

Як можна бачити, обидві моделі турбулентності дають практично однакові картини течії, що і не дивно, бо далеко від твердих стінок SST $k-\omega$ модель в основному відтворює імплементовану в неї модель $k-\varepsilon$ (за винятком декількох відмінностей, одну з яких буде розглянуто нижче). Різниця у порядку точності схем апроксимації конвективних доданків також не приводить у даній задачі до помітних відмінностей у картині течії. Це багато в чому пояснюється відсутністю різномасштабних вихрових рециркуляційних зон і хорошою якістю структурованої сітки. В цьому випадку додаткова схемна в'язкість, що є характерною для схеми UDS, не проявляється настільки, щоб викривити структуру течії.

На рис. 4.6 наведено дані щодо зміні максимальної швидкості в струмені уздовж його осі. Розраховані залежності добре узгоджуються з розглянутими раніше результатами розв'язання цієї ж задачі методами теорії примежового шару та з експериментальними даними (рис. 3.8). Обидві моделі турбулентності і тут дають дуже близькі результати.

Розрахункові профілі подовжньої швидкості, відносної турбулентної в'язкості і температури у 4-х перерізах струменя наведено на рис. 4.7 – 4.9. Обидві моделі турбулентності у поєднанні з протипотоковими схемами апроксимації різного порядку відтворюють досить близькі розподіли усередненої швидкості і температури в області. Проте, помітна різниця є у розрахунковому розподілі турбулентної в'язкості (рис. 4.8). $k-\varepsilon$ модель дещо занижує її в межах струменя і істотно завищує за межею струменя в області підтікання повітря до струменя з навколишнього простору. На профілях швидкості (рис. 4.7) і температури (рис. 4.9) це проявляється у вигляді незначного їх завищення у центрі струменя і більш плавної зміни на його межі. SST $k-\omega$ модель дає більш виражену границю струменя.

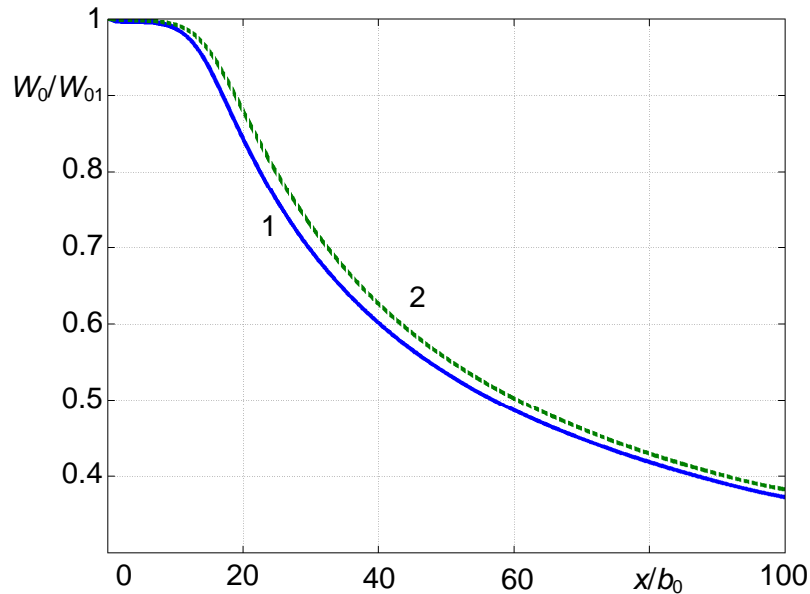


Рис. 4.6. Зміна швидкості у центрі струменя вздовж його осі:
 1 – розрахунок із застосуванням SST $k-\omega$ моделі; 2 – розрахунок із застосуванням $k-\epsilon$ моделі

Цю різницю в результатах моделювання турбулентності можна пояснити тим, що в SST $k-\omega$ моделі, згідно з виразами (1.62),(1.64), закладено механізм демпфування турбулентної в'язкості в областях з малими значеннями турбулентного числа Рейнольдса. Низькі значення Re_t можуть мати місце не лише поблизу твердих стінок, які блокують турбулентні пульсації, але і на вільних границях розрахункової області. Стандартна $k-\epsilon$ модель турбулентності є високореїнольдсовою моделлю і не має подібної корекції.

Важливим аспектом чисельного моделювання задач гідродинаміки і теплообміну є дослідження так званої *збіжності по сітках*, яка полягає в обґрунтуванні незалежності отриманого розв'язку від подальшого подібнення розрахункової сітки. З цією метою за базовий ми візьмемо варіант із застосуванням SST $k-\omega$ моделі турбулентності та протипотокової схеми QUICK на розрахунковій сітці розмірності 500×500

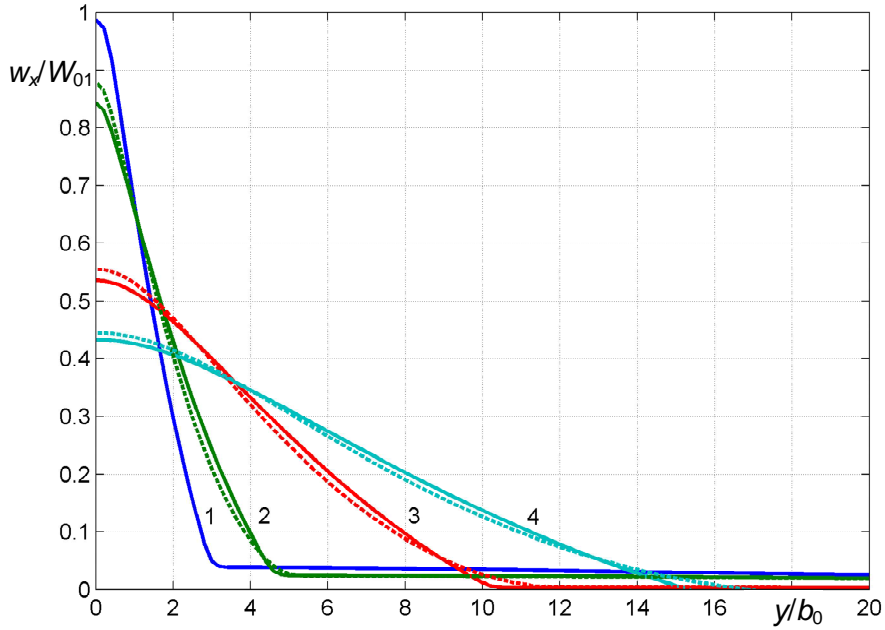


Рис. 4.7. Профілі нормованої поздовжньої швидкості в перерізах струменя, розраховані з використанням SST $k-\omega$ (суцільні лінії) та $k-\epsilon$ (штрихові лінії) моделей турбулентності:
 1 – $x/b_0 = 0.1$; 2 – $x/b_0 = 0.2$; 3 – $x/b_0 = 0.5$; 4 – $x/b_0 = 0.75$

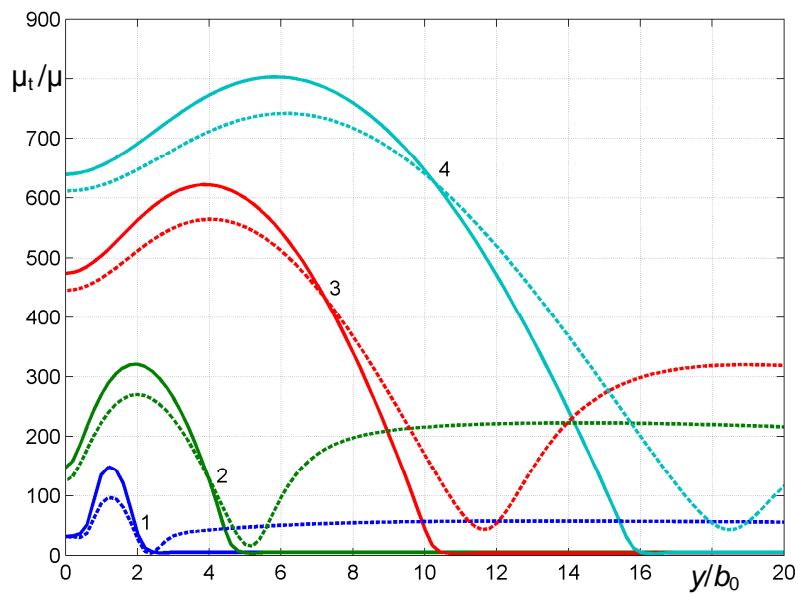


Рис. 4.8. Профілі відносної турбулентної в'язкості в перерізах струменя, розраховані з використанням SST $k-\omega$ (суцільні лінії) та $k-\epsilon$ (штрихові лінії) моделей турбулентності:
 1 – $x/b_0 = 0.1$; 2 – $x/b_0 = 0.2$; 3 – $x/b_0 = 0.5$; 4 – $x/b_0 = 0.75$

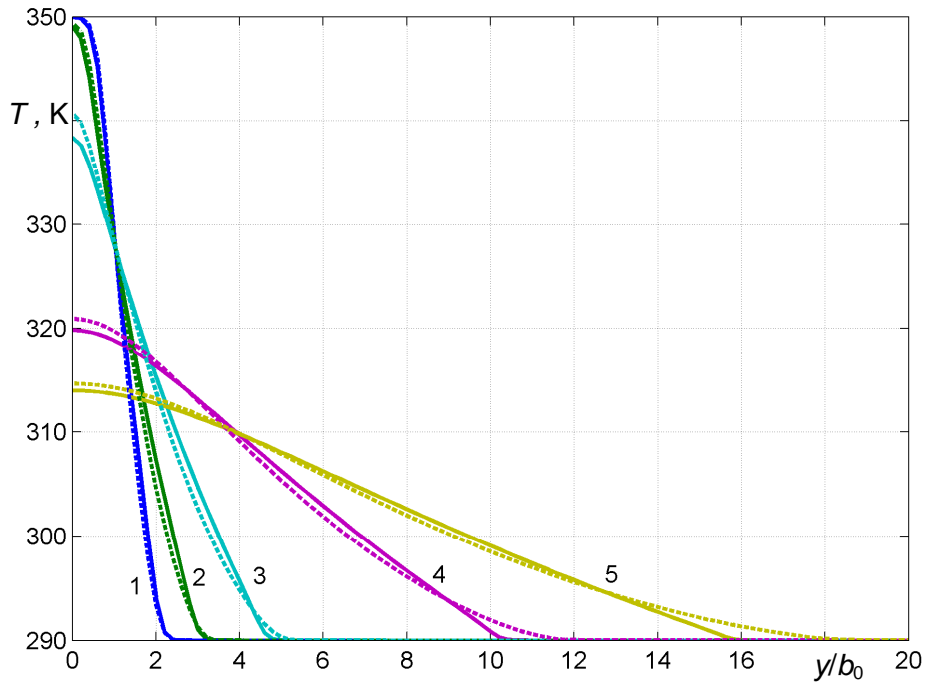


Рис. 4.9. Профілі температури в перерізах струменя, розраховані з використанням SST $k-\omega$ (суцільні лінії) та $k-\epsilon$ (штрихові лінії) моделей турбулентності:

1 – $x/b_0 = 0.1$; 2 – $x/b_0 = 0.2$; 3 – $x/b_0 = 0.5$; 4 – $x/b_0 = 0.75$

Таблиця 4.1

Результати чисельного розрахунку інтегральних характеристик течії, отримані на двох розрахункових сітках

Число комірок сітки: N_{cells}	Середня величина швидкості: w_m , м/с	Середнє значення температури: T_m , К	Середнє значення завихреності: Ω_m , 1/с	Середнє значення питомої кінетичної енергії турбулентності: k_m , м ² /с ²
250 000	0,380 880 06	291,570 6	6,110 116 5	0,121 764 56
1 000 000	0,380 883 10	291,570 1	6,164 232 3	0,120 050 77

і повторимо розрахунок на сітці 1000×1000 , що відповідає числу розрахункових комірок $N_{cells} = 1 \cdot 10^6$. Результати розрахунку деяких характерних інтегральних параметрів даної течії, отримані на двох сітках, зведені до таблиці. 4.1. В якості таких параметрів були обрані середні по розрахунковій області значення величини швидкості (w_m), температури (T_m) та завихреності Ω_m усередненої течії, а також середнє по області значення питомої кінетичної енергії турбулентності (k_m).

З представлених даних виходить, що різниця за швидкістю і температурою не перевищує тисячної долі відсотка, а за завихреністю і турбулентною кінетичною енергією складає близько 1%.

Отже, базова сітка з $N_{cells} = 250000$ є виправданою в даній задачі.

4.11 ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1) Який вигляд має модельне рівняння перенесення фізичної величини у потоці рідини (газу) та яким механізмам перенесення відповідають його доданки?

2) Як записати рівняння руху та енергії для рідини у дивергентній формі и в чому переваги такого запису для наближеного розв'язання за методом скінчених об'ємів?

3) В чому основна ідея методу скінчених об'ємів і як згідно цього методу перейти від диференціального рівняння перенесення до сукупності дискретних алгебраїчних рівнянь?

4) В чому основна особливість дискретизації конвективного доданку у рівнянні перенесення?

5) Як записується в узагальненій формі протипотокова різницєва

схема для апроксимації значення переносимо величини на грані скінченного об'єму?

6) Що називають обмежувачем потоку і як він визначається?

7) Які приклади проти потокових різницевих схем вам знайомі і які вирази для обмежувача потоку їм відповідають?

8) Якою формулою визначається конвективний член у дискретному аналогу рівняння перенесення фізичної величини?

9) Який вираз має дифузійний доданок рівняння перенесення після дискретизації?

10) Який загальний підхід використовують для дискретизації джерела?

11) Які співвідношення відповідають застосуванню центрально-різницевої двошарової схеми апроксимації доданку, якій містить похідну за часом?

12) Що означає неявний підхід до інтегрування за часом?

13) Як записується дискретний аналог рівняння перенесення після застосування апроксимацій для всіх доданків і в чому особливість використання верхніх індексів в цьому співвідношенні?

14) Як гарантовано забезпечити діагональне переважання у матриці коефіцієнтів дискретної системи рівнянь, одержаної за методом скінчених об'ємів?

15) Чим відрізняються рівняння перенесення імпульсу для рідини від модельного рівняння перенесення?

16) В чому основна ідея алгоритмів сімейства SIMPLE для врахування рівняння нерозривності?

17) Які основні етапи містить алгоритм визначення полів швидкості, тиску і температури за методом скінчених об'ємів з застосуванням схем

сімейства SIMPLE?

18) Для чого використовуються релаксаційні коефіцієнти при чисельному розв'язанні рівнянь гідродинаміки та теплообміну і на основі яких співвідношень вони уводяться?

19) Як визначаються відносні похибки у чисельному розв'язанні рівнянь гідродинаміки та теплообміну за методом скінчених об'ємів?

20) Що називають корекцією Рхи-Чоу і для чого вона застосовується?

21) В чому полягає метод алгебраїчного багатосіткового прискорювача (AMG) при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь і в чому переваги його застосування при чисельному моделюванні за методом скінчених об'ємів?

22) Які засоби існують для контролю збіжності чисельного розв'язання та якими є рекомендації з їх застосування?

23) Як обґрунтовується незалежність результатів чисельного моделювання від розрахункової сітки?

24) Як задаються граничні умови для характеристик турбулентності у вхідному перерізі потоку?

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский.– М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. Шлихтинг Г. Теория призматического слоя / Г. Шлихтинг.– М.: Наука, 1974. – 712 с.
3. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория / И.О. Хинце.– М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 680 с.
4. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10-ти т. / Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.– М.: Наука, 1986.– Т.6: Гидродинамика. – 736 с.
5. Повх И. Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении / И. Л. Повх.– Л.: Машиностроение, 1974. – 480 с.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе.– М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.
7. Белов И. А. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие / И. А. Белов, С. А. Исаев. – СПб.: Балт. гос. тех. университет, 2001.– 108 с.
8. Гарбарук А. В. Современные подходы к моделированию турбулентности: учеб. пособие / А. В. Гарбарук [и др.]. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 234 с.
9. Белоцерковский О. М. Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу / О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин.– 2-е изд., доп.– М.: Наука, 2001.– 223 с.
10. Moin P. Direct Numerical Simulation: a Tool in Turbulence Research / P. Moin, K. Mahesh // Annual Rev. Fluid Mech. – 1998. – V.30. –

- P. 539 – 578.
11. Deardorff J. W. The use of Subgrid Transport Equation in 3-D Model of Atmospheric Turbulence / J. W. Deardorff // J. Fluid Eng. – 1973. – V. 95. – P. 429 – 438.
 12. Smagorinsky J. Numerical Results from a Ninelevel General Circulation Model of the Atmosphere / J. Smagorinsky, S. Manabe, J. Holloway // Month. Weather Rev. – 1965. – V. 93. – P. 727 – 768.
 13. Galperin B. A. Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows / B. A. Galperin, S. A. Orszag.– Cambridge: Cambridge University Press, 1993. – 622 p.
 14. Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD / D. C. Wilcox.– La Canada, California: DSW Industries, 1998. – 537 p.
 15. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Физика. – 1942. – Т. 6, № 1–2. С. 56 – 58.
 16. Launder B. E. The Numerical Computation of Turbulent Flows / B. E. Launder, D. B. Spalding // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1974. – V. 3, № 2. – P. 269 – 289.
 17. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене /А. А. Приходько. – К.: Наукова думка, 2003. – 380 с.
 18. Numerical Experimental Study of a Wingtip Vortex in the Near Field / J. Dacles-Mariani, G. G. Zilliac, J. S. Chow, P. Bradshaw // AIAA Journal. – 1995. – V. 33, № 9. – P. 1561 – 1568.
 19. Виноградов Б. С. Прикладная газовая динамика / Б. С. Виноградов. – М.: Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965. – 350 с.
 20. Кутателадзе С. С. Пристенная турбулентность / С. С. Кутателадзе. –

Новосибирск: Наука, 1973. – 227 с.

21. Иевлев В. М. Некоторые вопросы гидродинамической теории теплообмена при течении несжимаемой жидкости / В. М. Иевлев // ДАН СССР, 1952. – Т. 86, № 6.– С. 1077 – 1080.
22. Иевлев В. М. Некоторые вопросы гидродинамической теории теплообмена при течении газа / В. М. Иевлев // ДАН СССР, 1952. – Т. 87, № 1.– С. 21 – 24.
23. Кутателадзе С. С. Тепло-массообмен и трение в турбулентном пограничном слое / С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев.– М.: Энергоатомиздат, 1985. – 320 с.
24. Федяевский К. К. Расчет турбулентного приежового слоя несжимаемой жидкости / К. К. Федяевский, А. С. Гиневский, А. В. Колесников. – Л.: Судостроение, 1973. – 256 с.
25. Болгарский А. В. Термодинамика и теплопередача / А. В. Болгарский, Г. А. Мухачев, В. К. Щукин. – М.: Высшая школа, 1975. – 494 с.
26. Юдаев Б. Н. Теплопередача / Б. Н. Юдаев.– М.: Высшая школа, 1973. – 358 с.
27. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй / Г. Н. Абрамович.– М.: Физматгиз, 1960. – 715 с.
28. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов /А. С. Гиневский. – М.: Машиностроение, 1969. – 400 с.
29. Бруяцкий Е. В. Турбулентные стратифицированный струйные течения / Е. В. Бруяцкий. – К.: Наук. Думка, 1986. – 296 с.
30. Forthman E. Uber turbulente Strahlausbreitung / E. Forthman // Ing. Arch.– 1934. – V. 5, №1. – S. 42 – 54.
31. Туркус В. А. Структура воздушного приточного факела, выходящего из прямоугольного отверстия. / В. А. Туркус // Отопление и

- вентиляция. – 1933. – №5. – С. 11 – 19.
32. Проскура Г. Ф. Опытное изучение воздушной завесы / Г. Ф. Проскура // Техн. новости.– Бюл. Научно-техн. управления выставок советского народного хозяйства УССР. – 1929. – №31. – С. 3 – 42.
 33. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
 34. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч.– М.: Мир, 1982. – 616 с.
 35. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
 36. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т.1. – 504 с.
 37. Волков К. Н. Дискретизация конвективных потоков в уравнениях Навье–Стокса на основе разностных схем высокой разрешающей способности / К. Н. Волков // Вычислительные методы и программирование. – 2004. – Т.5. – С.129 – 145.
 38. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб:/ Ю. А. Быстров, С. А. Исаев, Н. А. Кудрявцев, А. И. Леонтьев. – СПб.: Судостроение, 2005. – 392 с.
 39. Ершов С. В. Математическое моделирование трехмерных вязких течений в турбомашинах – современный взгляд / С. В. Ершов // Пробл. машиностроения. – 1998. – Т.1, №2. – С.76 – 93.
 40. Волков К. Н. Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках / К. Н. Волков // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т.6. – С.43 – 60.

41. Мочалин Е. В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил / Е. В. Мочалин, А. А. Халатов. – Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2010. – Т.8: Гидродинамика закрученного потока в ротационных фильтрах. – 428 с.
42. Van Doormaal J. R. Enhancement of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow / J. R. Van Doormaal, G. D. Raithby // Numer. Heat Transfer. – 1984. – V.7, № 2. – P. 147 – 163.
43. Рхи С. М. Численный расчет турбулентного обтекания профиля с отрывом у задней кромки / С. М. Рхи, У. Л. Чоу // Аэрокосмическая техника. – 1984. – Т.2, №7. – С. 33 – 43.
44. Задачин В. М. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с.