

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ
ІНСТИТУТ

Кафедра математичного моделювання та аналізу даних

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Наталія КУССУЛЬ

«___» _____ 2022 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за освітньо-професійною програмою «Математичні методи
моделювання, розпізнавання образів та безпеки даних»
спеціальності: 113 «Прикладна математика»

на тему: «Оператори квантової фізики в дискретних ймовірнісних
структурах»

Виконав: здобувач вищої освіти IV курсу, групи ФІ-82
Грабовець Анастасія Сергіївна

Керівник: доцент, кандидат фіз.-мат. наук
Орехов Олександр Арсенійович _____

Консультант: професор, доктор фіз.-мат. наук,
член-кореспондент НАН України
Дороговцев Андрій Анатолійович _____

Рецензент: старший викладач, кандидат фіз.-мат. наук
Рябов Георгій Валентинович _____

Засвідчую, що у цій дипломній
роботі немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент _____

Київ — 2022

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ
ІНСТИТУТ

Кафедра математичного моделювання та аналізу даних

Рівень вищої освіти — перший (бакалаврський)
Спеціальність (освітня програма) — 113 Прикладна математика,
ОПП «Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та
безпеки даних»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Наталія КУССУЛЬ

«__» _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу

Студент: Грабовець Анастасія Сергіївна

1. Тема роботи: *«Оператори квантової фізики в дискретних ймовірнісних структурах»*,

керівник:

доцент, кандидат фіз.-мат. наук Орехов Олександр Арсенійович,

затверджені наказом по університету №__ від «__» _____ 2022р.

2. Термін подання студентом роботи: «__» _____ 2022р.

3. Вихідні дані до роботи: *розвинений аналіз простору функціоналів від гаусового білого шуму, метод діаграм Фейнмана, метод характеристичних функцій для доведення слабкої збіжності.*

4. Зміст роботи: *дослідження простору Фока та ізоморфного йому простору інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму; наближення гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин; дослідження властивостей простору функціоналів від бернулівського шуму.*

5. Перелік ілюстративного матеріалу: *Презентація доповіді*

6. Дата видачі завдання: 10 вересня 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання	Примітка
1	Узгодження теми роботи із науковим керівником	20-25 жовтня 2021 р.	Виконано
2	Огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження	Листопад-грудень 2021 р.	Виконано
3	Написання першого розділу	Січень-лютий 2022 р.	Виконано
4	Написання другого розділу	Березень-квітень 2022 р.	Виконано
5	Оформлення висновків та анотацій	Травень 2022 р.	Виконано
6	Здача роботи на кафедрі		
7	Попередній захист		
8	Подання завершеної роботи до Державної екзаменаційної комісії		

Студент _____ Грабовець А. С.

Керівник _____ Орехов Олександр
Арсенійович

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить: 49 стор., 8 рисунків, 5 джерел.

Однією з основних моделей, що описують системи бозонів зі змінним числом частинок є простір Фока з визначеними на ньому операторами. Ізоморфізм Сігала встановлює відповідність між простором Фока та простором інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму.

В даній роботі було побудовано наближення гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин. Було показано, що елементи бернулівського шуму слабо збігаються до відповідних елементів гаусового білого шуму.

Було виведено ряд корисних теорем і тверджень: аналог формули Динкіна для обчислення моментів добутоків елементів бернулівського шуму, існування стохастичної експоненти, загальну формулу для степенів Віка та аналог діаграм Фейнмана для обчислення моментів добутоків Віка для елементів бернулівського шуму.

ПРОСТІР ФОКА, ГАУСОВИЙ БІЛИЙ ШУМ, СТЕПЕНІ ВІКА,
ЕКСПОНЕНТА ВІКА, БЕРНУЛІВСЬКІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ,
ДІАГРАМИ ФЕЙНМАНА

ABSTRACT

Qualification work contains: 49 pages, 8 figures, 5 sources.

One of the main models for describing boson system is Fock space with the operators defined on it. Seagal's isomorphism establishes a correspondence between the Fock space and the space of square-integrable functionals from Gaussian white noise.

In this work, the approximation of Gaussian white noise by the noise built on the Bernoulli random variables was constructed. It was proved that the elements of Bernoulli noise weakly converge to the corresponding elements of Gaussian white noise.

For further work with the space of functionals from Bernoulli noise, a number of useful statements and theorems were derived: an analogue of Dynkin's formula for calculating the moments of the products for the elements of Bernoulli noise, the existence of a stochastic exponent, the expression for Wick's powers for Bernoulli noise and analog of Feynman diagrams for calculating the moments of Wick's products for elements of Bernoulli noise.

FOCK SPACE, GAUSSIAN WHITE NOISE, WICK'S POWERS,
WICK'S EXPONENT, BERNOULLI RANDOM VARIABLES, FEYNMAN
DIAGRAMS

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Гаусове числення.....	9
1.1 Простір Фока.....	9
1.2 Гаусовий білий шум в гільбертовому просторі.....	13
1.3 Діаграми Фейнмана.....	19
Висновки до розділу 1.....	24
2 Бернулівський шум.....	25
2.1 Означення бернулівського шуму та слабка збіжність.....	25
2.2 Властивості бернулівського шуму.....	27
2.3 Аналог Діаграм Фейнмана для бернулівського шуму.....	34
2.4 Гранична поведінка діаграм Фейнмана для бернулівського шуму.....	44
Висновки до розділу 2.....	47
Висновки.....	48
Перелік посилань.....	49

ВСТУП

Актуальність дослідження. Квантова теорія поля являє собою важливий розділ сучасної математичної фізики, що стрімко розвивається. Ця область є відносно новою, оскільки основні положення були сформульовані лише в середині ХХ ст.

Взаємозв'язок квантової теорії поля та статистичної фізики дає можливість переформулювати задачу побудови бозонного квантового поля у задачу побудови узагальненого випадкового поля, а до вирішення задач математичної фізики можуть бути застосовані методи теорії ймовірностей.

Метою дослідження є побудова моделей для опису системи бозонів. *Задачею дослідження* є вивчення простору функціоналів від гаусового білого шуму, що є ізоморфним до простору Фока, який використовується для опису систем бозонів; наближення гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин; дослідження властивостей простору функціоналів від бернулівського шуму. Для досягнення цієї мети повинні бути виконані наступні завдання:

- 1) огляд літератури на відповідну тематику;
- 2) дослідження гаусового білого шуму та його властивостей;
- 3) побудова бернулівського шуму та доведення його збіжності до гаусового білого шуму;
- 4) побудова методів, що дозволяють обчислювати моменти функціоналів від бернулівського шуму.

Об'єктом дослідження є математична модель для опису системи бозонів зі змінним числом частинок.

Предметом дослідження є простір інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму та простір функціоналів від бернулівського шуму.

Методи дослідження: методи комбінаторного аналізу, теорії

імовірностей та функціонального аналізу.

Наукова новизна полягає у наближенні гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин, що влаштовані простіше ніж гаусові. Вперше було побудовано діаграми Фейнмана для обчислення моментів добутків Віка для елементів бернулівського шуму.

Практичне значення. Отримані результати дають змогу побудувати простір функціоналів від бернулівського шуму, який, на відміну від простору функціоналів від гаусового білого шуму, має скінченну розмірність. При подальшому дослідженні такого простору та виявленні нових властивостей, дане наближення дасть змогу узагальнити отримані результати за допомогою граничного переходу.

Апробація результатів та публікації. Доповідь на міні-конференції з теорії стохастичних процесів «The Skorokhod readings 2022» та науково-практичній конференції «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики 2022».

1 ГАУСОВЕ ЧИСЛЕННЯ

Даний розділ присвячений простору Фока та ізометричному йому простору інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму.

У першому підрозділі буде наведено поняття тензорного добутку гільбертових просторів та простору Фока.

Другий підрозділ буде присвячено гаусовим випадковим величинам. Буде наведено поняття білого шуму, степенів та добутків Віка та стохастичної експоненти.

Для подальшого дослідження простору інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму корисним є вміння обчислювати моменти для добутків та добутків Віка гаусових випадкових величин. Для цього в третьому підрозділі буде наведено формулу Динкіна та описано метод діаграм Фейнмана.

1.1 Простір Фока

Простір Фока – конструкція, що використовується в квантовій теорії поля для опису стану системи однакових частинок. Для побудови простору Фока спершу введемо поняття тензорного добутку гільбертових просторів [1].

Нехай $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гільбертові простори зі скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_1$ і $(\cdot, \cdot)_2$ відповідно. Для кожного $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_2$ визначимо білінійну форму $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, що діє з $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = (\psi_1, \varphi_1)_1 (\psi_2, \varphi_2)_2.$$

Нехай \mathcal{E} – множина скінченних лінійних комбінацій таких білінійних форм. Визначимо скалярний добуток (\cdot, \cdot) та продовжимо його на \mathcal{E} за

лінійністю:

$$(\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu) = (\varphi, \eta)_1 (\psi, \mu)_2$$

Означення 1.1. Визначимо тензорний добуток $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ як поповнення \mathcal{E} відносно скалярного добутку (\cdot, \cdot) .

Приклад 1.1. Нехай $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^n$ і $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^m$ з евклідовими нормами. $\forall \varphi_1, h_1 \in \mathbb{R}^n, \forall \varphi_2, h_2 \in \mathbb{R}^m$ визначимо білінійну форму:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \langle h_1, h_2 \rangle &= (h_1, \varphi_1) (h_2, \varphi_2) = \sum_{i=1}^n h_1^i \varphi_1^i \sum_{j=1}^m h_2^j \varphi_2^j = \\ &= \begin{pmatrix} h_1^1, \dots, h_1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^1 \varphi_2^1 & \varphi_1^1 \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_1^1 \varphi_2^m \\ \varphi_1^2 \varphi_2^1 & \varphi_1^2 \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_1^2 \varphi_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^n \varphi_2^1 & \varphi_1^n \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_1^n \varphi_2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2^1 \\ \vdots \\ h_2^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Нехай $\mu_1, \varphi_1 \in \mathbb{R}^n, \mu_2, \varphi_2 \in \mathbb{R}^m, A_{ij} = \mu_1^i \mu_2^j, B_{ij} = \varphi_1^i \varphi_2^j$. Визначимо скалярний добуток:

$$\begin{aligned} (\mu_1 \otimes \mu_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2) &= (\mu_1, \varphi_1) (\mu_2, \varphi_2) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_1^i \varphi_1^i \sum_{j=1}^m \mu_2^j \varphi_2^j = \sum_{i,j=1}^{n,m} A_{ij} B_{ij} = \text{tr} AB^T. \end{aligned}$$

Отже, $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ – простір матриць розмірності $n \times m$ зі скалярним добутком $(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n,m} A_{ij} B_{ij}$.

Приклад 1.2. Нехай $\mathcal{H}_1 = L^2(M_1, d\mu_1)$ і $\mathcal{H}_2 = L^2(M_2, d\mu_2)$ зі скалярними добутками

$$(f_1, g_1)_1 = \int_{M_1} f_1(x) g_1(x) d\mu_1(x), \quad (f_2, g_2)_2 = \int_{M_2} f_2(y) g_2(y) d\mu_2(y)$$

відповідно.

$\forall f_1, g_1 \in L^2(M_1, \mu_1), \forall f_2, g_2 \in L^2(M_2, \mu_2)$ визначимо:

$$(f_1 \otimes f_2) \langle g_1, g_2 \rangle := (g_1, f_1)_1 (g_2, f_2)_2 = \int_{M_1} g_1(x) f_1(x) \mu_1(dx) \int_{M_2} g_2(y) f_2(y) \mu_2(dy).$$

За теоремою Фубіні [2] це дорівнюватиме:

$$\int_{M_1 \times M_2} g_1(x) g_2(y) f_1(x) f_2(y) \mu_1(x) \mu_2(y).$$

$\forall \varphi_1, \psi_1 \in L^2(M_1, \mu_1), \forall \varphi_2, \psi_2 \in L^2(M_2, \mu_2)$:

$$\nu(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y), \quad \eta(x, y) = \psi_1(x) \psi_2(y).$$

Визначимо скалярний добуток:

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 \otimes \varphi_2, \psi_1 \otimes \psi_2) = (\varphi_1, \psi_1)_1 (\varphi_2, \psi_2)_2 = \\ & = \int_{M_1 \times M_2} \varphi_1(x) \varphi_2(y) \psi_1(x) \psi_2(y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \\ & = \int_{M_1 \times M_2} \nu(x, y) \eta(x, y) \mu_1(x) \mu_2(y) = (\nu, \eta), \end{aligned}$$

де (\cdot, \cdot) – скалярний добуток в просторі $L^2(M_1 \times M_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

Нехай $\{\varphi_k\}$ – ортонормований базис в $L^2(M_1, d\mu_1)$, $\{\psi_l\}$ – ортонормований базис в $L^2(M_2, d\mu_2)$. Тоді $\{\varphi_k \psi_l\}$ – ортонормований базис в $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \times d\mu_2)$.

Дійсно, нехай $f(x, y) \in L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \times d\mu_2)$ і

$$\forall k, l : \int_{M_1 \times M_2} f(x, y) \varphi_k(x) \psi_l(y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = 0$$

За теоремою Фубіні:

$$\int_{M_2} \left[\int_{M_1} f(x,y) \varphi_k(x) \mu_1(dx) \right] \psi_l(y) \mu_2(dy) = 0.$$

Оскільки $\{\psi_l\}$ – ортонормований базис в $L^2(M_2, d\mu_2)$, то

$$\int_{M_1} f(x,y) \varphi_k(x) \mu_1(dx) = 0 \quad \mu_2 - \text{майже всюди.}$$

Оскільки $\{\varphi_k\}$ – ортонормований базис в $L^2(M_1, d\mu_1)$, то

$$f(x,y) = 0 \quad [\mu_1 \times \mu_2] - \text{майже всюди.}$$

Отже, $\{\varphi_k \psi_l\}$ – ортонормований базис в $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \times d\mu_2)$.

Нехай $g(x,y) \in L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \times d\mu_2)$:

$$g(x,y) = \sum_{k,l} c_{kl} \varphi_k \psi_l.$$

Тоді

$$\|g\|^2 = \int_{M_1 \times M_2} g^2(x,y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \sum_{k,l} c_{kl}^2 = \left\| \sum_{k,l} c_{kl} \varphi_k \otimes \psi_l \right\|^2.$$

Введемо

$$U : \varphi_k \otimes \psi_l \longrightarrow \varphi_k(\cdot) \psi_l(\cdot)$$

– відображення, що переводить базис для $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ в базис для $L^2(M_1 \times M_2, \mu_1 \times \mu_2)$, та продовжимо його за лінійністю до унітарного оператора, що діє з $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ в $L^2(M_1 \times M_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

Отже, простір $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ можна ототожнити простору $L^2(M_1 \times M_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

Нехай \mathcal{H} – комплексний гільбертів простір. Визначимо $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$ (n разів), $\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) = \mathbb{C}$.

Нехай $f_n \in \mathcal{F}_n$. Назвемо елемент f_n симетричним, якщо

$$\forall \sigma \in P_n \quad f_n = f_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = f_n(\varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}).$$

Множину \mathcal{F}_n^s таких симетричних f_n , що є підпростором \mathcal{F}_n , називатимемо n -кратним симетричним тензорним добутком \mathcal{H} [1].

Означення 1.2. $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^s(\mathcal{H})$ – симетричний простір Фока над \mathcal{H} .

Такий простір співвідносять з бозонним простором, оскільки хвильова функція бозонів симетрична щодо перестановки частинок.

1.2 Гаусовий білий шум в гільбертовому просторі

Означення 1.3. Випадкова величина ξ називається нормально розподіленою з параметрами a і σ^2 , якщо її густина ймовірності має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - a)^2 \right\}.$$

Характеристична функція нормального розподілу з параметрами a і σ^2 має вигляд:

$$\varphi(t) = \exp \left\{ ita - \frac{t^2\sigma^2}{2} \right\}.$$

Можна помітити, що нормальний розподіл повністю визначається значенням середнього та дисперсії.

Означення 1.4. Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) . Припустимо, для кожного $h \in H$ існує нормально розподілена випадкова величина (h, ξ) з наступними властивостями:

1) лінійність: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, h_1, h_2 \in H$:

$$(a_1 h_1 + a_2 h_2, \xi) = a_1 (h_1, \xi) + a_2 (h_2, \xi),$$

2) $\mathbb{E} (h, \xi)^2 = \|h\|^2, \mathbb{E} (h, \xi) = 0$.

Набір сумісно гаусових випадкових величин $\{(h, \xi); h \in H\}$ будемо називати гаусовим білим шумом в H .

Приклад 1.3. Нехай $H = \mathbb{R}^n$ з евклідовою нормою, і нехай ξ_1, \dots, ξ_n — незалежні стандартні гаусові величини. Для кожного $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ визначимо

$$(h, \xi) := \sum_{k=1}^n h_k \xi_k.$$

Перевіримо, чи виконуються властивості, дані в означенні 1.4:

1) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} (a_1 h_1 + a_2 h_2, \xi) &= \sum_{k=1}^n (a_1 h_{1k} + a_2 h_{2k}) \xi_k = \\ &= a_1 \sum_{k=1}^n h_{1k} \xi_k + a_2 \sum_{k=1}^n h_{2k} \xi_k = a_1 (h_1, \xi) + a_2 (h_2, \xi), \end{aligned}$$

2) Скористаємось незалежністю ξ_1, \dots, ξ_n . Відомо, що характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку характеристичних функцій:

$$\begin{aligned} \varphi(t)_{(h, \xi)} &= \prod_{k=1}^n \varphi(t)_{h_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} h_k^2 \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n h_k^2 \right\} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \|h\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отже, (h, ξ) — гаусова випадкова величина, для якої:

$$\text{Var}(h, \xi) = \|h\|^2, \mathbb{E}(h, \xi) = 0.$$

Приклад 1.4. Нехай H — сепарабельний гільбертів простір. $\{\xi_n; n \geq 1\}$ — послідовність незалежних стандартних гаусових випадкових

величин. Нехай $\{e_n; n \geq 1\}$ – ортонормований базис в H . Визначимо

$$\forall h \in H : (h, \xi) := \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) \xi_k.$$

Оскільки $\mathbb{E}\xi_k = 0, \text{Var}\xi_k = 1$, то:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}((h, e_k) \xi_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}((h, e_k) \xi_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k)^2 = \|h\|^2. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою Колмогорова про «два ряди» [2], $\sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) \xi_k$ збігається м.н.

Перевіримо, чи виконуються властивості, дані в означенні 1.4:

1) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, h_1, h_2 \in H :$

$$\begin{aligned} (a_1 h_1 + a_2 h_2, \xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 h_1 + a_2 h_2, e_k) \xi_k = \\ &= a_1 \sum_{k=1}^{\infty} (h_1, e_k) \xi_k + a_2 \sum_{k=1}^{\infty} (h_2, e_k) \xi_k = a_1 (h_1, \xi) + a_2 (h_2, \xi); \end{aligned}$$

2) Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h_k \xi_k = (h, \xi) \text{ м.н.,}$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)_{\sum_{k=1}^n h_k \xi_k} = \varphi(t)_{(h, \xi)}.$$

З іншої сторони:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)_{\sum_{k=1}^n h_k \xi_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \varphi(t)_{h_k \xi_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} h_k^2 \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n h_k^2 \right\} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \|h\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\varphi(t)_{(h,\xi)} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \|h\|^2 \right\},$$

тому (h, ξ) – гаусова випадкова величина, для якої

$$\text{Var}(h, \xi) = \|h\|^2, \mathbb{E}(h, \xi) = 0.$$

Існує велика різниця між прикладами 1.3 і 1.4. В прикладі 1.3 (h, ξ) – це звичайний скалярний добуток h і випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ в \mathbb{R}^n . В прикладі 1.4 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ не є випадковим елементом в просторі H . Дійсно, якщо б ξ був випадковим елементом в H , то сума $\sum (\xi, e_k)^2 = \sum \xi_k^2$ мала б бути скінченною, як квадрат норми ξ .

Доведемо, що це не так. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$:

$$P \{ |\xi_n| \geq \varepsilon \} = P \{ \xi_k \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) \} = 2(1 - \Phi(\varepsilon)) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Відповідно, $\xi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ за ймовірністю, а отже $\xi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ м.н.

Отже, ряд $\sum \xi_k^2$ розбіжний і ξ не є випадковим елементом в просторі H .

Означення 1.5. Нехай ξ – випадкова величина зі скінченними моментами. Тоді n -тий степінь Віка : ξ^n ; $n = 0, 1, \dots$ це поліном n -го степеня $P_n(\xi)$, що однозначно визначається співвідношеннями:

$$P_0(x) = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_n(x) = n P_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots,$$

$$\mathbb{E}(P_n(\xi)) = 0, n = 1, 2, \dots$$

Приклад 1.5. Нехай ξ – випадкова величина зі стандартним нормальним розподілом. Тоді : $\xi^n := H_n(\xi)$, де

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

– многочлен Ерміта.

Якщо ж ξ – випадкова величина з розподілом $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, то $:\xi^n:$:= $\sigma^n H_n\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)$.

Означення 1.6. Експоненційна генератриса для послідовності $\{:\xi^n:\}$ – це степеневий ряд виду:

$$:e^{\alpha\xi}: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n : \xi^n :}{n!}$$

Ця величина називається стохастичною експонентою (або експонентою Віка) для випадкової величини ξ .

Приклад 1.6. Перевіримо збіжність такого ряду в середньому квадратичному для стандартних гаусових випадкових величин. Розглянемо скінченну суму:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{\alpha^n H_n(\xi)}{n!} \right)^2 &= \mathbb{E} \sum_{n,m=k_1}^{k_2} \frac{\alpha^n \alpha^m H_n(\xi) H_m(\xi)}{n! m!} = \\ &= \sum_{n,m=k_1}^{k_2} \mathbb{E} \left(\frac{\alpha^n \alpha^m H_n(\xi) H_m(\xi)}{n! m!} \right) \end{aligned}$$

Відомо, що

$$\mathbb{E} (H_n(\xi) H_m(\xi)) = n! \delta_{nm},$$

тому:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=k_1}^{k_2} \mathbb{E} \left(\frac{\alpha^n \alpha^m H_n(\xi) H_m(\xi)}{n! m!} \right) &= \sum_{n=k_1}^{k_2} \mathbb{E} \left(\frac{H_n^2(\xi) (\alpha^2)^n}{(n!)^2} \right) = \\ &= \sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{(\alpha^2)^n}{(n!)} \rightarrow 0, \quad k_1, k_2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Отже, послідовність

$$S_k = \left(\sum_{n=1}^k \frac{\alpha^n H_n(\xi)}{n!} \right)^2$$

– фундаментальна в середньому квадратичному.

Отже,

$$: e^{\alpha\xi} : = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n H_n(\xi)}{n!}$$

збігається в середньому квадратичному.

Тепер перевіримо збіжність майже напевне. З властивостей математичного очікування, якщо $\eta \geq 0$ і $\mathbb{E}\eta < \infty$, то $\eta < \infty$ м.н. Використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n |H_n(\xi)|}{n!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} \mathbb{E} |H_n(\xi)| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} (\mathbb{E} |H_n(\xi)|^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} < \infty. \end{aligned}$$

Отже, $: e^{\alpha\xi} :$ збігається м.н.

Лема 1.1. *Якщо ряд, даний в означенні 1.6 збігається, то стохастична експонента може бути визначена наступним чином:*

$$: \exp(\alpha\xi) : = \frac{\exp(\alpha\xi)}{\mathbb{E} \exp(\alpha\xi)}.$$

Доведення. Позначимо $: \exp(\alpha\xi) : = g(\xi)$. Із співвідношень, що дані в означенні 1.5, визначимо наступні властивості функції $g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x) &= \alpha g(x) \\ \mathbb{E}(g(\xi)) &= 1. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(x)} \partial g(x) &= \int \alpha dx, \\ g(x) &= e^{\alpha x + C}, \end{aligned}$$

Отже, $: \exp(\alpha\xi) : = g(\xi) = e^{\alpha\xi + C}$.

Визначимо C з умови $\mathbb{E} : e^{\alpha\xi} : = 1 :$

$$\mathbb{E}g(\xi) = e^C \mathbb{E}e^{\alpha\xi} = 1,$$

$$e^C = \frac{1}{\mathbb{E}e^{\alpha\xi}}.$$

Отже, $: \exp(\alpha\xi) : = \frac{\exp(\alpha\xi)}{\mathbb{E} \exp(\alpha\xi)}$. □

1.3 Діаграми Фейнмана

Теорема 1.1 (Формула Динкіна). *Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , $\{(h, \xi)\}$ – гаусовий білий шум на H . Тоді для довільного парного n :*

$$\mathbb{E} [(h_1, \xi) \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)] = \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{s \in \pi} (h_i, h_j),$$

де Π – множина всіх можливих розбиттів множини $\{1, \dots, n\}$ на пари.

Якщо n – непарне, то:

$$\mathbb{E} [(h_1, \xi) \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)] = 0.$$

Доведення. Нехай $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\mathbb{E}e^{(\bar{t}, ((h_1, \xi), \dots, (h_n, \xi)))} = \mathbb{E}e^{\sum_{k=1}^n t_k (h_k, \xi)} = \mathbb{E}e^{(\sum_{k=1}^n t_k h_k, \xi)}$$

Можна помітити, що цей вираз дорівнює характеристичній функції $\varphi(-i)$ для випадкової величини $(\sum_{k=1}^n t_k h_k, \xi)$, що має нормальний розподіл з нульовим середнім та дисперсією $\|\sum_{k=1}^n t_k h_k\|^2$. Врахувавши це, отримуємо:

$$\mathbb{E}e^{(\bar{t}, ((h_1, \xi), \dots, (h_n, \xi)))} = \exp\left(\frac{\|\sum_{k=1}^n t_k h_k\|^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2=1}^n t_{k_1} t_{k_2} (h_{k_1}, h_{k_2})\right).$$

З іншої сторони:

$$\mathbb{E} [(h_1, \xi) \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)] = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \mathbb{E} e^{(\bar{t}, ((h_1, \xi), \dots, (h_n, \xi)))} \Big|_{\bar{t}=0}.$$

Тоді, застосувавши формулу Бруно [3], отримуємо:

$$\mathbb{E} [(h_1, \xi) \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)] = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2=1}^n t_{k_1} t_{k_2} (h_{k_1}, h_{k_2}) \right) \Big|_{\bar{t}=0} =$$

$$\sum_{\pi \in \Pi^*} \prod_{s \in \pi} \frac{\partial^{|s|}}{\prod_{j \in s} \partial t_j} \left[\frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2=1}^n t_{k_1} t_{k_2} (h_{k_1}, h_{k_2}) \right] \Big|_{\bar{t}=0},$$

де Π^* – множина всіх розбиттів множини $\{1, \dots, n\}$.

Враховавши, що при $|s| \neq 2$ похідна при $\bar{t} = 0$ буде дорівнювати нулю, отримуємо остаточну формулу:

$$\mathbb{E} [(h_1, \xi) \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)] = \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{s \in \pi} (h_i, h_j),$$

де Π – множина всіх можливих розбиттів множини $\{1, \dots, n\}$ на пари. \square

Зауваження. У випадку, коли $h_1 = \dots = h_n = h$, формула набуває вигляду

$$\mathbb{E} ((h, \xi))^n = \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{s \in \pi} \|h\|^2,$$

де Π – множина всіх можливих розбиттів множини $\{1_1, \dots, 1_n\}$ на пари.

Якщо $n = 2k + 1$, то Π – порожня множина, тому:

$$\mathbb{E} ((h, \xi))^{2k+1} = 0.$$

Якщо ж $n = 2k$, то всі можливі розбиття будуть відповідати одному і тому ж доданку $(\|h\|^2)^k$, а кількість можливих розбиттів буде дорівнювати

$$\frac{C_{2k}^2 \cdot C_{2k-2}^2 \cdot \dots \cdot C_2^2}{k!} = \frac{(2k)!}{2^k k!} = (2k - 1)!!$$

Отже,

$$\mathbb{E}((h, \xi))^{2k} = (2k - 1)!! (\|h\|^2)^k.$$

Приклад 1.7. Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , $\{(h, \xi)\}$ – гаусовий білий шум на H . Тоді:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(h_1, \xi) \cdot (h_2, \xi) \cdot (h_3, \xi) \cdot (h_4, \xi)] = \\ = (h_1, h_2)(h_3, h_4) + (h_1, h_3)(h_2, h_4) + (h_1, h_4)(h_2, h_3) \end{aligned}$$

Наслідок 1.1. *Такі добутки є частковим випадком добутків Віка і для обчислення їх математичного очікування можна використовувати діаграми Фейнмана [4].*

Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , $\{(h, \xi)\}$ – гаусовий білий шум на H , $\{(h_1, \xi), \dots, (h_n, \xi)\} \subset \{(h, \xi)\}$. Для того, щоб обчислити $\mathbb{E}[(h_1, \xi)^{k_1} \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)^{k_n}]$, побудуємо граф, де кожному множнику $(h_i, \xi)^{k_i}$ відповідає набір вершин $\{(h_i)_1, \dots, (h_i)_{k_i}\}$, з кожної вершини виходить по одному відростку. Діаграму G отримуємо, з'єднавши всі відростки між собою. Тоді:

$$\mathbb{E}[(h_1, \xi)^{k_1} \cdot \dots \cdot (h_n, \xi)^{k_n}] = \sum_{\{G\}} \prod_{((h_i)_l, (h_j)_m) \in L_G} (h_i, h_j),$$

де $\{G\}$ – множина всіх можливих діаграм, L_G – множина ребер в діаграмі G .

Приклад 1.8. Для того, щоб обчислити значення $\mathbb{E}[(h_1, \xi) \cdot (h_2, \xi) \cdot (h_3, \xi) \cdot (h_4, \xi)]$, побудуємо граф з набором вершин $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. З кожної вершини виходить по одному відростку (рис.1.1).

Побудуємо множину діаграм $\{G\}$. Кожна така діаграма буде відповідати одному із способів розбиття на пари множини $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. Для даного прикладу їх буде всього три (рис.1.2).

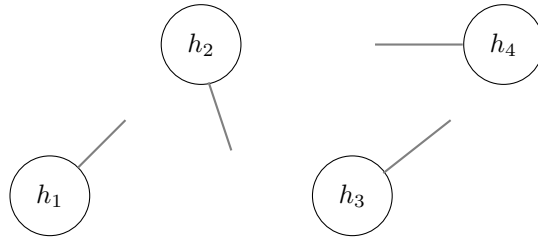


Рисунок 1.1 – Побудова діаграм Фейнмана для добутків елементів гаусового шуму

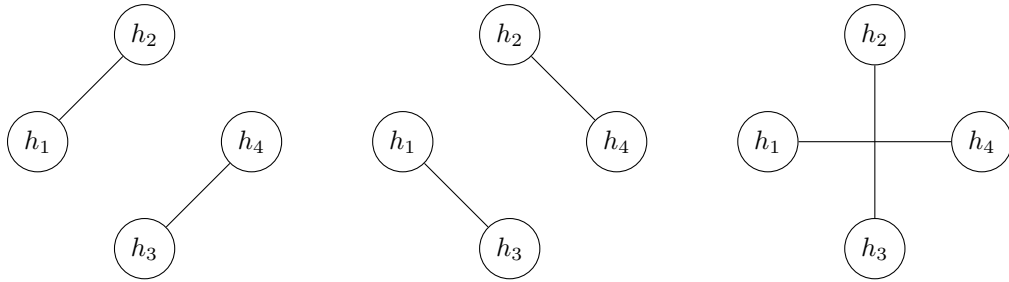


Рисунок 1.2 – Діаграми Фейнмана для добутків елементів гаусового шуму

Першій діаграмі буде відповідати доданок $(h_1, h_2)(h_3, h_4)$, другій діаграмі – $(h_1, h_3)(h_2, h_4)$, а третій – $(h_1, h_4)(h_2, h_3)$. Додавши, отримуємо такий ж результат, як в прикладі 1.7:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(h_1, \xi) \cdot (h_2, \xi) \cdot (h_3, \xi) \cdot (h_4, \xi)] &= \\ &= (h_1, h_2)(h_3, h_4) + (h_1, h_3)(h_2, h_4) + (h_1, h_4)(h_2, h_3) \end{aligned}$$

Діаграми Фейнмана також використовуються для знаходження моментів більш складних функцій, таких, як, наприклад, степенів та добутків Віка [4].

Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , $\{(h, \xi)\}$ – гаусовий білий шум на H . Введемо величину

$$A := \prod_{i=1}^N : (h_i, \xi)^{k_i} : .$$

Щоб обчислити $\mathbb{E}A$ побудуємо граф, де кожному множнику $(h_i, \xi)^{k_i}$ відповідає вершина h_i з k_i різними вільними відростками. Діаграму G отримуємо, з'єднавши всі відростки між собою (при цьому з'єднувати відростки, що виходять з однієї вершини не можна).

Теорема 1.2 (Діаграми Фейнмана для степенів Віка для гаусового білого шуму).

$$\mathbb{E}A = \sum_{\{G\}} \prod_{(i_m, j_l) \in L_G} (h_i, h_j),$$

де $\{G\}$ – множина всіх можливих діаграм, L_G – множина спарованих відростків в діаграмі G .

Приклад 1.9. Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , $\{(h, \xi)\}$ – гаусовий білий шум на H .

$$A =: (h_1, \xi)^2 :: (h_2, \xi)^2 :$$

Побудуємо граф з вершинами h_1, h_2 і відростками $1_1, 1_2, 2_1, 2_2$ (рис.1.3):

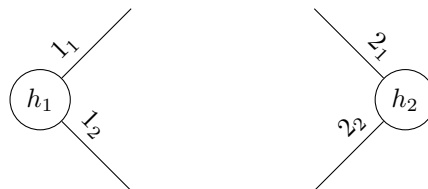


Рисунок 1.3 – Побудова діаграм Фейнмана для добутків Віка елементів гаусового шуму

Побудуємо множину діаграм $\{G\}$. Кожна така діаграма буде відповідати одному способу з'єднати всі відростки, що виходять з різних вершин, між собою. Для даного прикладу їх буде всього дві (рис.1.4).

В даному прикладі і першій, і другій діаграмі буде відповідати

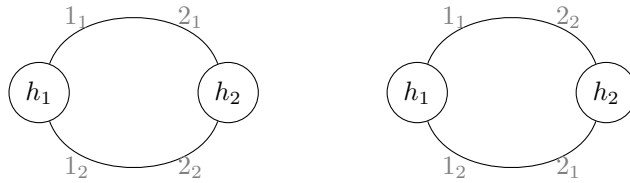


Рисунок 1.4 – Діаграми Фейнмана для добутків Віка елементів гаусового шуму

доданок $(h_1, h_2)^2$, отже:

$$\mathbb{E}A((h, \xi)) = 2(h_1, h_2)^2.$$

Висновки до розділу 1

В даному розділі було наведено поняття бозонного простору Фока та досліджено ізоморфний йому простір функціоналів від гаусового білого шуму. Було наведено поняття стохастичної експоненти та степенів Віка та описано метод діаграм Фейнмана, що дає змогу обчислювати моменти добутків Віка для елементів гаусового білого шуму.

2 БЕРНУЛІВСЬКИЙ ШУМ

Основним завданням даної дипломної роботи є дослідження наближення гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин. Випадкові величини, влаштовані схожим чином, досліджувались в роботах [7], [8].

В першому підрозділі буде наведено поняття бернулівського шуму та доведено збіжність елементів бернулівського шуму до відповідних елементів гаусового білого шуму.

У другому підрозділі буде доведено існування стохастичної експоненти, виведено загальну формулу для степенів Віка та аналог формули Динкіна для елементів бернулівського шуму. Далі будуть побудовані діаграми, аналогічні діаграмам Фейнмана, що дають можливість обчислювати моменти добутків Віка для елементів бернулівського шуму.

В останньому підрозділі буде показано, що при граничному переході діаграми для бернулівського шуму сходяться до діаграм Фейнмана для гаусового шуму.

2.1 Означення бернулівського шуму та слабка збіжність

Нехай $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин з розподілом Бернуллі:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Визначимо

$$\forall f \in C([0,1]) : \varphi(f) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}}$$

Означення 2.1. Множину випадкових величин $\{\varphi(f) : f \in C([0,1])\}$ будемо називати бернулівським шумом на $C([0,1])$.

Покажемо слабку збіжність елементів бернулівського шуму до відповідних елементів гаусового білого шуму.

Теорема 2.1 (Слабка збіжність до гаусового білого шуму).
 $\forall f \in C([0,1]) :$

$$\varphi(f) \implies N(0, \|f\|^2), n \rightarrow \infty$$

Доведення. Знайдемо характеристичну функцію для $\varphi(f)$ і покажемо, що вона збігається до характеристичної функції величини з нормальним розподілом $N(0, \|f\|^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{it\varphi(f)} &= \mathbb{E} \exp \left(it \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp \left(it f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(e^{it f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}} + e^{-it f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = \prod_{k=1}^n \cos \left(t f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \exp \left(\sum_{k=0}^n \ln \cos \left(t f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

Врахувавши те, що $\ln(\cos(x)) = -\sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$, де $b_p = \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p}-1)}{2p(2p)!}$, а B_{2p} – числа Бернуллі, отримуємо:

$$\exp \left(\sum_{k=0}^n \ln \cos \left(t f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = \exp \left(- \sum_{k=0}^n \sum_{p=1}^{\infty} b_p \left(t f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p} \right)$$

Розглянемо доданок при $p \geq 2$. Оскільки f неперервна на відрізку, то вона обмежена на ньому:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [0,1] : |f(x)| \leq M.$$

Врахувавши це, отримуємо:

$$\sum_{k=0}^n b_p t^{2p} f^{2p} \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n^p} \leq \sum_{k=0}^n b_p t^{2p} M^{2p} \frac{1}{n^p} = b_p t^{2p} M^{2p} \frac{1}{n^{p-1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

При $p = 1$ доданок $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n}$ – це сума Рімана до інтегралу

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f^2(s) ds.$$

Тому:

$$e^{it\varphi(f)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2\|f\|^2},$$

а отже:

$$\varphi(f) \Rightarrow N(0, \|f\|^2), n \rightarrow \infty.$$

□

2.2 Властивості бернулівського шуму

Було показано, що бернулівський шум апроксимує гаусовий. Тепер покажемо, що і правила та методи для обчислення моментів функціоналів від бернулівського шуму збігаються до вже розглянутих правил та методів для гаусового випадку.

Наступна формула дає змогу обчислювати моменти добутків елементів бернулівського шуму.

Лема 2.1. Для довільних f_1, \dots, f_j , що належать $L_2([0,1])$ та

довільних q_1, \dots, q_j , з множини \mathbb{N} виконується:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\varphi^{q_1}(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi^{q_j}(f_j)] = \\ & = \sum_{\Pi} \prod_{D \in \Pi} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p} \frac{1}{(2p - |D|)!} \prod_{d \in D} \left(f_d \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(\sum_{m=1}^j \lambda_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p - |D|} \mathbb{1}_{(2p - |D| \geq 0)}, \quad \text{при } \bar{\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де Π – всі можливі розбиття множини $\{1_1, 1_2, \dots, 1_{q_1}, 2_1, \dots, 2_{q_2}, \dots, j_{q_j}\}$.

Доведення. Нехай $\vec{t} \in \mathbb{R}^j$. Тоді

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{i(\vec{t}, (\varphi(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi(f_j)))} = \mathbb{E} \exp \left(i \sum_{m=1}^j t_m \varphi(f_m) \right) = \\ & = \mathbb{E} \exp \left(i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^j t_m f_m \right) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp \left(i \sum_{m=1}^j t_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}} \right) = \\ & = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\exp \left(i \sum_{m=1}^j t_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \exp \left(-i \sum_{m=1}^j t_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = \\ & = \prod_{k=1}^n \cos \left(\sum_{m=1}^j t_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\sum_{m=1}^j t_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) = \\ & = \exp \left(- \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p(2p)!} \left(\sum_{m=1}^j t_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p} \right). \end{aligned}$$

Підставивши $t_m = -i\lambda_m$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{(\vec{\lambda}, (\varphi(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi(f_j)))} = \\ & = \exp \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p(2p)!} \left(\sum_{m=1}^j \lambda_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p} \right). \end{aligned}$$

Можна помітити, що

$$\mathbb{E} [\varphi(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi(f_j)] = \frac{\partial^q}{\partial \lambda_1^{q_1} \cdot \dots \cdot \lambda_j^{q_j}} \mathbb{E} e^{(\bar{\lambda}, (\varphi(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi(f_j)))}.$$

Застосувавши формулу Бруно [3], отримаємо:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\varphi^{q_1}(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi^{q_j}(f_j)] = \\ & = \sum_{\Pi} \prod_{D \in \Pi} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p} \frac{1}{(2p - |D|)!} \prod_{d \in D} \left(f_d \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(\sum_{m=1}^j \lambda_m f_m \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p - |D|} \mathbb{1}_{(2p - |D| \geq 0)}, \quad \text{при } \bar{\lambda} = 0, \end{aligned}$$

де Π – всі можливі розбиття множини $\{1_1, 1_2, \dots, 1_{q_1}, 2_1, \dots, 2_{q_2}, \dots, j_{q_j}\}$. \square

Приклад 2.1. Обчислимо

$$\mathbb{E} [\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3) \cdot \varphi(f_4)].$$

Розбиття множини $\{1, 2, 3, 4\}$, що дадуть ненульовий внесок у математичне очікування:

$$\{\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2, 3, 4\}\}\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3) \cdot \varphi(f_4)] & = \sum_{k=1}^n f_1 \left(\frac{k}{n} \right) f_2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f_3 \left(\frac{k}{n} \right) f_4 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} + \\ & + \sum_{k=1}^n f_1 \left(\frac{k}{n} \right) f_3 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f_2 \left(\frac{k}{n} \right) f_4 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} + \\ & + \sum_{k=1}^n f_1 \left(\frac{k}{n} \right) f_4 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f_2 \left(\frac{k}{n} \right) f_3 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} - \\ & - 2 \sum_{k=1}^n f_1 \left(\frac{k}{n} \right) f_2 \left(\frac{k}{n} \right) f_3 \left(\frac{k}{n} \right) f_4 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Тепер доведемо існування стохастичної експоненти для бернулівської випадкової величини. Для цього покажемо, що ряд, даний в означенні 1.6 сходиться майже напевне.

Позначимо $f_n(x) = \frac{\alpha^n P_n(x)}{n!}$ і, використовуючи означення 1.5, визначимо властивості $f_n(x)$:

$$f_0(x) = 1,$$

$$f'_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha^{n+1} P_{n+1}(x)}{(n+1)!} \right) = \alpha \left(\frac{\alpha^n P_n(x)}{n!} \right) = \alpha f_n(x).$$

Нехай $f_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n b_{2k}^{(2n)} x^{2k}$. Тоді:

$$f_{2n+1}(x) = \alpha \int f_{2n}(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha b_{2k}^{(2n)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C_1, \quad C_1 = 0.$$

$$f_{2n+2}(x) = \alpha \int f_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha^2 b_{2k}^{(2n)} \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)} + C_2,$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^2 b_{2k}^{(2n)}}{(2k+1)(2k+2)}.$$

З цих співвідношень отримуємо:

$\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |b_m^{2n}| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha^2 b_{2k}^{(2n-2)}|}{(2k+1)(2k+2)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha^2|}{(2k+1)(2k+2)} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|\alpha^2 b_{2k}^{(2n-4)}|}{(2k+1)(2k+2)} \leq \\ &\leq \dots \leq \prod_{k=0}^{n-1} |\alpha^2| \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \right). \end{aligned}$$

Перевіримо, чи сходиться ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f_{2n}(\varepsilon)|$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{2n}(\varepsilon)| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{2n}(\varepsilon)| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n |b_{2k}^{(2n)}| \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n \prod_{k=0}^{n-1} |\alpha^2| \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \right).$$

Розглянемо суму під знаком добутку:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 + 6k + 2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{24} < 0.92. \end{aligned}$$

Тоді, якщо $|\alpha| \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \prod_{k=0}^{n-1} |\alpha^2| \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n (0.92)^{n-1}$$

– збіжний.

Отже, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_{2n}(\varepsilon)|$ сходиться.

Аналогічним чином можна показати, що і $\sum_{n=0}^{\infty} |f_{2n+1}(\varepsilon)|$ сходиться.

Звідси можемо зробити висновок, що : $e^{\alpha\varepsilon}$: збігається м.н. при $|\alpha| \leq 1$.

Тепер виведемо загальну формулу для степенів Віка для елементів бернулівського шуму.

Лема 2.2 (Явний вигляд для степенів Віка для бернулівського шуму). *Степінь Віка для елемента бернулівського шуму виражається наступною формулою:*

$$\begin{aligned} : \varphi^m(f) : &= \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{D \in \pi} \left[\varphi(f) \lambda^{1-|D|} \mathbb{1}_{(1-|D| \geq 0)} + \right. \\ &+ (-1)^p b_p \frac{1}{(2p - |D|)!} \sum_{k=1}^n \left(f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{|D|} \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p-|D|} \mathbb{1}_{(2p-|D| \geq 0)} \left. \right]_{\lambda=0}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де Π – всі можливі розбиття множини $\{1_1, 1_2, \dots, 1_m\}$, $b_p = \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2^p}$, а B_{2p} – числа Бернуллі.

Доведення. Помітимо, що

$$|\varphi(f)|^m \leq c^m,$$

де $c = \sqrt{n} \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Отже, ряд

$$\exp(\lambda\varphi(f)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \varphi^m(f)}{m!} - \text{збіжний м.н.}$$

Внаслідок теореми Лебега про мажоровану збіжність [2] отримуємо:

$$\mathbb{E} \exp(\lambda\varphi(f)) = \mathbb{E} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \varphi^m(f)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \mathbb{E} \varphi^m(f)}{m!} - \text{збіжний.}$$

Отже, відношення експоненти та її математичного очікування також можна записати як збіжний ряд:

$$\frac{\exp(\lambda\varphi(f))}{\mathbb{E} \exp(\lambda\varphi(f))} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \varphi^m(f)}{m!}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \mathbb{E} \varphi^m(f)}{m!}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m P_m(\varphi(f))}{m!}.$$

Покажемо, що поліноми $P_m(\varphi(f))$ задовольняють властивостям з означення 1.5 степенів Віка.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \varphi^m(f)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m P_m(\varphi(f))}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l \mathbb{E} \varphi^l(f)}{l!}.$$

Розглянемо коефіцієнти при різних степенях λ :

λ^0 :

$$1 = P_0(\varphi(f)).$$

λ^1 :

$$\varphi(f) = P_1(\varphi(f)) + \mathbb{E} \varphi(f);$$

$$P_1(x) = x - \mathbb{E} \varphi(f);$$

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (x - \mathbb{E}\varphi(f)) = 1 = P_0(x);$$

$$\mathbb{E}P_1(\varphi(f)) = \mathbb{E}(\varphi(f) - \mathbb{E}\varphi(f)) = 0.$$

Нехай для λ^{m-1} виконується:

$$P_{m-1}(x) = x^{m-1} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{P_{m-1-i}}{(m-1-i)!} \frac{\mathbb{E}\varphi^i(f)}{i!} (m-1)!;$$

$$\frac{dP_{m-1}(x)}{dx} = (m-1)P_{m-2}(x);$$

$$\mathbb{E}P_{m-1}(\varphi(f)) = 0.$$

Тоді для λ^m отримуємо:

$$\frac{\varphi^m(f)}{m!} = \sum_{i=0}^m \frac{P_{m-1}(\varphi(f)) \mathbb{E}\varphi^i(f)}{(m-i)! i!};$$

$$P_m(x) = x^m - \sum_{i=1}^m \frac{P_{m-i}}{(m-i)!} \frac{\mathbb{E}\varphi^i(f)}{i!} (m)!;$$

$$\frac{dP_m(x)}{dx} = m \left(x^{m-1} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{P_{m-1-i}}{(m-1-i)!} \frac{\mathbb{E}\varphi^i(f)}{i!} (m-1)! \right) = (m)P_{m-1}(x);$$

$$\mathbb{E}P_m(x) = \mathbb{E} \left(x^m - \sum_{i=1}^m \frac{P_{m-i}}{(m-i)!} \frac{\mathbb{E}\varphi^i(f)}{i!} (m)! \right) = \mathbb{E}(\varphi^m(f) - \mathbb{E}\varphi^m(f)) = 0.$$

Всі властивості, дані в означенні 1.5 виконуються. Отже, отримуємо:

$$\frac{\exp(\lambda\varphi(f))}{\mathbb{E}\exp(\lambda\varphi(f))} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m : \varphi^m(f) :}{m!},$$

$$: \varphi^m(f) : = \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[\frac{\exp(\lambda\varphi(f))}{\mathbb{E}\exp(\lambda\varphi(f))} \right]$$

По аналогії з лемою 2.1 можна показати, що

$$\mathbb{E}e^{\lambda\varphi(f)} = \exp \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p(2p)!} \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p} \right).$$

Отже,

$$\frac{\exp(\lambda\varphi(f))}{\mathbb{E} \exp(\lambda\varphi(f))} = \exp \left[\lambda \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p(2p)!} \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p} \right]$$

Застосувавши формулу Бруно [3] отримаємо остаточну формулу:

$$\begin{aligned} : \varphi^m(f) : &= \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{D \in \pi} \left[\varphi(f) \lambda^{1-|D|} \mathbb{1}_{(1-|D| \geq 0)} + \right. \\ &+ (-1)^p b_p \frac{1}{(2p - |D|)!} \sum_{k=1}^n \left(f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{|D|} \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p-|D|} \mathbb{1}_{(2p-|D| \geq 0)} \left. \right]_{\lambda=0}, \end{aligned}$$

де Π – всі можливі розбиття множини $\{1_1, 1_2, \dots, 1_m\}$, $b_p = \frac{|B_{2p}| 2^{2p} (2^{2p} - 1)}{2p}$, а B_{2p} – числа Бернуллі. \square

Приклад 2.2. Обчислимо вираз для $: \varphi^4(f) :$. Ненульовий внесок матимуть наступні розбиття множини $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$:

- $\{\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}\}$,
- $\{\{1_1\}, \{1_2\}, \{1_3\}, \{1_4\}\}$,
- три варіанти розбиття виду $\{\{1, 1\}, \{1, 1\}\}$,
- шість варіантів розбиття виду $\{\{1\}, \{1\}, \{1, 1\}\}$.

Отже,

$$\begin{aligned} : \varphi^4(f) : &= \varphi^4(f) - 6\varphi^2(f) \sum_{k=1}^n f^2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} + \\ &+ 3 \left(\sum_{k=1}^n f^2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} \right)^2 + 2 \sum_{k=1}^n f^4 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

2.3 Аналог Діаграм Фейнмана для бернулівського шуму

Для обчислення математичного очікування добутоків Віка бернулівських випадкових величин також можна побудувати діаграми, аналогічні діаграмам Фейнмана для гаусових випадкових величин.

Визначимо випадкову величину

$$A := \prod_{i=1}^N : \varphi^{n_i}(f_i) :$$

Для обчислення EA побудуємо граф, де множнику $: \varphi^{n_i}(f_i) :$ буде відповідати набір вершин-«клонів» $\{f_i^1, \dots, f_i^{n_i}\}$. Визначимо бієктивне відображення, що присвоює кожній вершині індивідуальний номер:

$$\psi : F \rightarrow \{1, 2, \dots, K\},$$

де F – множина всіх вершин $f_{i,j}$, $i = \overline{1, N}, \forall i : j = \overline{1, n_i}$, $|F| = K = \sum_{i=1}^N n_i$ – кількість вершин в діаграмі.

Побудуємо діаграму G за наступними правилами:

1) Будуємо розбиття множини $\{1, 2, \dots, K\}$ з парною кількістю елементів в кожному блоці розбиття. Розбиття, до яких входить множина, що містить лише такі вершини, що відповідають одному і тому ж множнику $: \varphi^{n_i}(f_i) :$, не враховуються.

2) Для кожного елементу розбиття S будуємо спосіб обходу всіх його вершин, що не проходить по одному і тому ж ребру більше одного разу. Обхід починається з вершини з найменшим порядковим номером. Тобто для кожного елементу розбиття S ми обираємо вершину з найменшим номером:

$$s_1 = \min_{s_1 \in S} s_i,$$

а відповідний спосіб обходу буде задаватись впорядкованим набором вершин:

$$\{s_1\} \cup \sigma(S \setminus \{s_1\}),$$

де $\sigma(\cdot)$ – перестановка.

Теорема 2.2 (Діаграми Фейнмана для бернулівського шуму).

$$\mathbb{E}A = \sum_{\{G\}} I(G), \text{ де}$$

$$I(G) = \prod_{s \in S} (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^n \prod_{i: \psi(f_i) \in s} f_i \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (2.3)$$

де $\{G\}$ – множина всіх можливих діаграм, S – розбиття, в якому кожен елемент $s \in S$ впорядкований відповідно до порядку обходу, m – кількість пар (a_1, a_2) двох сусідніх елементів з s , де $a_1 \leq a_2$.

Приклад 2.3. Нехай

$$A =: \varphi^2(f_1) :: \varphi^2(f_2) :$$

Граф буде складатись з чотирьох вершин $f_{1_1}, f_{1_2}, f_{2_1}, f_{2_2}$. Нехай

$$\psi(f_{1_1}) = 1, \psi(f_{1_2}) = 2, \psi(f_{2_1}) = 3, \psi(f_{2_2}) = 4.$$

Розбиття множини $\{1, 2, 3, 4\}$, по яким будуються діаграми:

$$\Pi = \{ \{ \{1,3\}, \{2,4\} \}, \{ \{1,4\}, \{2,3\} \}, \{ \{1,2,3,4\} \} \}.$$

Розглянемо перший варіант розбиття $\pi_1 = \{ \{1,3\}, \{2,4\} \}$. Такому розбиттю буде відповідати лише одна діаграма G_1 , так як існує лише один варіант обходу двох вершин.

Отже, $S_1 = \pi_1 = \{ \{1,3\}, \{2,4\} \}$, $m_{1_1} = 1$, (так як $1 \leq 3$), $m_{1_2} = 1$, (так як $2 \leq 4$).

Аналогічно, діаграмі G_2 відповідатиме розбиття $S_2 = \pi_2 = \{ \{1,4\}, \{2,3\} \}$, $m_{2_1} = 1$, (так як $1 \leq 4$), $m_{2_2} = 1$, (так як $2 \leq 3$).

Діаграми G_1 та G_2 матимуть наступний вигляд (рис.2.1):

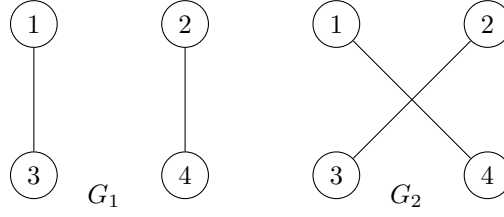


Рисунок 2.1 – Діаграми Фейнмана для степенів Віка елементів бернулівського шуму

Визначимо, яким доданкам відповідають діаграми G_1 і G_2 :

$$\begin{aligned} I(G_1) &= (-1)^0 \sum_{k=1}^n f_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^0 \sum_{k=1}^n f_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(G_2) &= (-1)^0 \sum_{k=1}^n f_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^0 \sum_{k=1}^n f_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо розбиття $\pi_3 = \{\{1,2,3,4\}\}$. Такому розбиттю буде відповідати шість різних варіантів обходу:

$$S_3 = \{\{1,2,3,4\}\}, m_3 = 3 (1 < 2, 2 < 3, 3 < 4),$$

$$S_4 = \{\{1,4,3,2\}\}, m_4 = 1 (1 < 4),$$

$$S_5 = \{\{1,3,4,2\}\}, m_5 = 2 (1 < 3, 3 < 4),$$

$$S_6 = \{\{1,2,4,3\}\}, m_6 = 2 (1 < 2, 2 < 4),$$

$$S_7 = \{\{1,3,2,4\}\}, m_7 = 2 \quad (1 < 3, 2 < 4),$$

$$S_8 = \{\{1,4,2,3\}\}, m_8 = 2 \quad (1 < 4, 2 < 3).$$

Відповідні діаграми матимуть такий вигляд (рис.2.2):

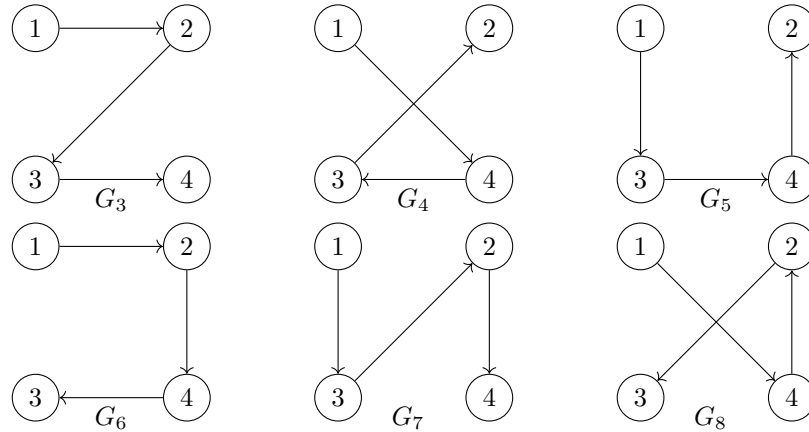


Рисунок 2.2 – Діаграми Фейнмана для степенів Віка елементів бернулівського шуму

Визначимо якому доданку відповідатиме кожна з діаграм:

$$I(G_3) = I(G_4) = \sum_{k=1}^n f_1^2 \left(\frac{k}{n} \right) f_2^2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n^2},$$

$$I(G_5) = I(G_6) = I(G_7) = I(G_8) = - \sum_{k=1}^n f_1^2 \left(\frac{k}{n} \right) f_2^2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n^2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [: \varphi^2(f_1) :: \varphi^2(f_2) :] &= \sum_{\{G\}} I(G) = \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^n f_1 \left(\frac{k}{n} \right) f_2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n} \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^n f_1^2 \left(\frac{k}{n} \right) f_2^2 \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Тепер доведемо теорему 2.2.

Доведення. Застосувавши формулу (2.2) отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [: \varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :] = \\
& = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\pi \in \Pi_1} \prod_{D \in \pi} \left[\varphi^d(f_1) \lambda^{1-|D|} \mathbb{1}_{(1-|D| \geq 0)} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (-1)^{\frac{|D|}{2}} b_p \frac{1}{(2-|D|)!} \sum_{k=1}^n f_1^d \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p-|D|} \mathbb{1}_{(2p-|D| \geq 0)} \right] \right) \cdot \right. \\
& \quad \left. \dots \cdot \left(\sum_{\pi \in \Pi_N} \prod_{D \in \pi} \left[\varphi^d(f_N) \lambda^{1-|D|} \mathbb{1}_{(1-|D| \geq 0)} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (-1)^{\frac{|D|}{2}} b_p \frac{1}{(2-|D|)!} \sum_{k=1}^n f_N^d \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p-|D|} \mathbb{1}_{(2p-|D| \geq 0)} \right] \right) \right] \\
& \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Розкривши дужки, ми отримаємо суму по всім можливим комбінаціям розбиттів множин $\{1_1, 1_2, \dots, 1_{n_1}\}, \dots, \{N_1, N_2, \dots, N_{n_N}\}$.

При обчисленні математичного очікування такої суми виникатимуть всі можливі доданки виду

$$\prod_{s \in S} \sum_{k=1}^n \prod_{i \in s} f_i \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

де S – розбиття $\{1_1, \dots, 1_{n_1}, 2_1, \dots, 2_{n_2}, \dots, N_{n_N}\}$ на підмножини з парною кількістю елементів.

Розглянемо доданок

$$\prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^{I_j} \sum_{k=1}^n f_j^{2k_{i,j}} \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \prod_{s \in S'} \sum_{k=1}^n \prod_{t \in s} f_t \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{2.5}$$

у другій частині якого немає сум виду $\sum_{k=1}^n f_i^m \left(\frac{k}{n} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, де $m > 1$. Визначимо, при обчисленні математичного очікування від яких доданків з виразу (2.3) може виникнути доданок (2.5). Кожен такий доданок відповідає певній комбінації розбиттів. Оскільки в другій частині немає сум виду $\sum_{k=1}^n f_i^m \left(\frac{k}{n} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, де $m > 1$, то цей множник може з'явитись

лише при обчисленні математичного очікування $\prod_{s \in S'} \prod_{t \in s} \varphi(f_t)$.

Зафіксуємо певне розбиття R для $:\varphi^{n_2}(f_2):, \dots, :\varphi^{n_N}(f_N):$, що дає, при обчисленні математичного очікування, доданок (2.5). Тобто:

$$R = R_2 \cup R_3 \cup \dots \cup R_N, \text{ де } R_i \in \Pi_i.$$

Тепер розглянемо різні варіанти розбиття R_1 для $:\varphi^{n_1}(f_1):$, що відповідають доданку (2.5).

Сум виду $\sum_{k=1}^n f_1^{2k_{1,j}} \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$ в (2.5) буде I_1 штук, і кожна з таких сум може з'явитись або як константа з (2.3), що відповідає розбиттю $\{\{1, \dots, 1\}\}$, або як математичне очікування від $\varphi^{2k_{1,j}}(f_1)$, що відповідає розбиттю $\{\{1\}, \dots, \{1\}\}$.

Визначимо і пронумеруємо типи розбиттів відповідно до того, скільки сум буде представлено константою:

$$0. \{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}\} \cup R;$$

$$1. \left\{ \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}, \{1\}, \{1\}, \dots, \{1\} \right\} \cup R;$$

$$2. \left\{ \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,j}}, \{1\}, \{1\}, \dots, \{1\} \right\} \cup R;$$

⋮

$$I_1. \left\{ \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}, \dots, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,I_1}}, \{1\}, \{1\}, \dots, \{1\} \right\} \cup R.$$

Тепер знайдемо коефіцієнт, з яким (2.5) увійде у вираз для $\mathbb{E}[:\varphi^{n_1}(f_1): \dots \dots : \varphi^{n_N}(f_N):]$ за фіксованого R . Для цього спочатку знайдемо коефіцієнт, з яким (2.5) виникне при обчисленні математичного очікування кожного з типів доданків, і тоді просумуємо.

0. Таке розбиття в формулі (2.3) відповідає доданку $\varphi^{n_1}(f_1)P_R(\varphi(f_2), \dots, \varphi(f_N))$, де P_R – певний многочлен, що відповідає

розбиттю R . В (2.3) таких доданків буде Q_{P_R} – деяка константа, що виникає з формули (2.2). Визначимо, який коефіцієнт буде при доданку (2.5) при обчисленні математичного очікування від $Q_{P_R} \varphi^{n_1}(f_1) P_R(\varphi(f_2), \dots, \varphi(f_N))$. Доданку (2.5) в формулі (2.1) відповідає розбиття

$$\left\{ \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}, \dots, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,I_1}} \right\} \cup S'.$$

Тоді коефіцієнт буде наступним:

$$a_0 = Q_{P_R} \cdot Q_{S'} \cdot C_{n_1}^{2k_{1,1}} \cdot C_{n_1-2k_{1,1}}^{2k_{1,2}} \cdot \dots \cdot C_{n_1-\sum_{i=1}^{I_1-1} 2k_{1,i}}^{2k_{1,I_1}} \cdot \prod_{i=1}^{I_1} ((-1)^{k_{1,i}+1} b_{|2k_{1,i}|}),$$

де $Q_{S'}$ – коефіцієнт, що відповідає розбиттю S' в формулі (2.1),

$C_{n_1-2k_{1,1}}^{2k_{1,2}} \cdot \dots \cdot C_{n_1-\sum_{i=1}^{I_1-1} 2k_{1,i}}^{2k_{1,I_1}}$ – кількість варіантів згрупувати елементи в I_1 множин з потужностями $2k_{1,1} \dots 2k_{1,I_1}$, а $b_{|2k_{1,i}|}$ – коефіцієнт, що відповідає $\underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}$ в формулі (2.1). Позначимо

$$Q := Q_{P_R} \cdot Q_{S'} \cdot C_{n_1}^{2k_{1,1}} \cdot C_{n_1-2k_{1,1}}^{2k_{1,2}} \cdot \dots \cdot C_{n_1-\sum_{i=1}^{I_1-1} 2k_{1,i}}^{2k_{1,I_1}} \cdot \prod_{i=1}^{I_1} (b_{|2k_{1,i}|}).$$

Тоді

$$a_0 = Q (-1)^{\sum_{i=1}^{I_1} k_{1,i} + I_1}$$

1. Зафіксуємо i . Таке розбиття відповідає доданку

$$\sum_{k=1}^n f_1^{2k,i} \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \varphi^{n_1-2k_{1,i}}(f_1) \cdot P_R(\varphi(f_2), \dots, \varphi(f_N)).$$

Таких доданків в (2.5) буде

$$Q_{P_R} \cdot (-1)^{k_{1,i}} b_{|2k_{1,i}|} \cdot C_{n_1}^{2k_{1,i}},$$

де $(-1)^{k_{1,i}} b_{|2k_{1,i}|} \cdot C_{n_1}^{2k_{1,i}}$ – коефіцієнт з формули (2.2), що відповідає $\underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}$.

Тепер визначимо коефіцієнт для (2.5) при обчисленні математичного

очікування від

$$Q_{PR} \cdot (-1)^{k_{1,i}} b_{|2k_{1,i}|} \cdot C_{n_1}^{2k_{1,i}} \sum_{k=1}^n f_1^{2k,i} \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \varphi^{n_1-2k_{1,i}}(f_1) \cdot P_R(\varphi(f_2), \dots, \varphi(f_N)).$$

Доданку (2.5) в (2.1) буде відповідати розбиття

$$\left\{ \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,i}}, \dots, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{2k_{1,I_1}} \right\} \cup S'.$$

Отже, коефіцієнт буде наступним:

$$\begin{aligned} a_1^i &= Q_{PR} \cdot (-1)^{k_{1,i}} b_{|2k_{1,i}|} \cdot C_{n_1}^{2k_{1,i}} \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^{I_1} \left((-1)^{k_{1,j}+1} b_{|2k_{1,j}|} \right) \cdot C_{n_1-2k_{1,i}}^{2k_{1,2}} \cdot \dots \cdot C_{n_1-\sum_{i=1}^{I_1-1} 2k_{1,i}}^{2k_{1,I_1}} = \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{I_1} k_{1,i} + I_1 - 1} \cdot Q. \end{aligned}$$

Як бачимо, коефіцієнт a_1^i не залежить від i . Врахувавши, що $C_{I_1}^1$ – кількість варіантів обрати i , отримуємо:

$$a_1 = Q C_{I_1}^1 (-1)^{\sum_{i=1}^{I_1} k_{1,i} + I_1 - 1}$$

Аналогічно отримуємо:

$$a_m = Q C_{I_1}^m (-1)^{\sum_{i=1}^{I_1} k_{1,i} + I_1 - m}, \quad m = \overline{1, I_1}$$

Отже, загальний коефіцієнт, з яким доданок (2.5) увійде у вираз для $\mathbb{E}[: \varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :]$ за фіксованого R буде дорівнювати:

$$A = \sum_{m=0}^{I_1} a_m = Q \sum_{m=0}^{I_1} C_{I_1}^m (-1)^{\sum_{i=1}^{I_1} k_{1,i} + I_1 - m} = 0$$

Отже, якщо в доданку є сума виду $\sum_{k=1}^n f_i^m \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$, то такий доданок увійде в $\mathbb{E}[: \varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :]$ з нульовим коефіцієнтом. Це підтверджує те припущення, що обходи в діаграмах не можуть

здійснюватись по вершинам, що відповідають одному і тому ж f_i . В такому випадку, $\mathbb{E}[: \varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :]$ буде визначатись доданками з $\mathbb{E}[\varphi^{n_1}(f_1) \cdot \dots \cdot \varphi^{n_N}(f_N)]$, де немає сум виду $\sum_{k=1}^n f_i^m \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Отже,

$$\mathbb{E}[: \varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :] = \sum_{\Pi'} \prod_{D \in \Pi} (-1)^{\frac{|D|}{2}} b_{|D|} \sum_{k=1}^n \prod_{d \in D} \left(f_d \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.6)$$

де $b_{|D|} = \frac{B_{|D|} 2^{|D|} (2^{|D|-1})}{|D|}$, Π' – всі можливі розбиття множини $\{1_1, 1_2, \dots, 1_{n_1}, \dots, N_{n_N}\}$ на підмножини з парною кількістю елементів, що не містить множин виду $\{i_{j_1}, \dots, i_{j_l}\}$.

Доведемо, що (2.6) відповідає (2.2).

Розглянемо множник з (2.2), що відповідає певній діаграмі G та певному елементу $s \in S$

$$s = \{s_1, s_2, \dots, s_{2t}\}$$

При цьому

$$\forall i \neq 1 : s_1 < s_i,$$

так як обхід починають з вершини з найменшим номером.

$\{\sigma(s)\}$ – множина всіх перестановок $\{s_2, \dots, s_{2t}\}$,

$l = m - 1$ – кількість "підйомів" в $\{s_2, \dots, s_{2t}\}$.

Нехай $F_s = \{f_i^{r_j} : \psi(f_i^{r_j}) \in s\}$. Можна помітити, що $F_s = F_{\{s_1\} \cup \sigma(s)}$, тому всі множини виду $\{s_1\} \cup \sigma(s)$ породжують один і такий ж самий множник

$$\sum_{k=1}^n \prod_{f_i \in F_s} f_i \binom{k}{n} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

різниця буде лише в коефіцієнті $(-1)^l$, що визначається кількістю підйомів в $\sigma(s)$.

Щоб знайти коефіцієнт, з яким множник

$$\sum_{k=1}^n \prod_{f_i \in F_s} f_i \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

увійде в остаточний вираз для $E[\varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :]$ потрібно просумувати коефіцієнти, що відповідають всім перестановкам $\sigma(s)$:

$$\sum_{l=0}^{|s|-1} (-1)^l E(|s| - 1, l) = \frac{B_{|s|} 2^{|s|} (2^{|s|} - 1)}{|s|},$$

де $E(|s| - 1, l)$ – число Ейлера I роду, що дорівнює кількості перестановок $|s| - 1$ елементів з l підйомами, а $B_{|s|}$ – числа Бернуллі [6].

Визначимо $D = \{i_j : \psi(f_i^j) \in s\}$. Оскільки ψ – бієктивне відображення, тому $|D| = |s|$.

Отже, застосовуючи (2.2), ми отримали такий ж самий коефіцієнт при

$$\sum_{k=1}^n \prod_{d \in D} f_d \left(\frac{n}{k} \right) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

як і при застосуванні (2.6). □

2.4 Гранична поведінка діаграм Фейнмана для бернулівського шуму

З теореми 2.1 відомо, що при $n \rightarrow \infty$ шум, побудований на основі бернулівських випадкових величин, збігається до гаусового білого шуму. Розглянемо, як будуть змінюватись діаграми при такому граничному переході.

Лема 2.3. *Розглянемо діаграму G та відповідне їй розбиття S . Якщо існує така $s \in S$, що $|s| > 2$, то*

$$I(G) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Доведення. Нехай існує така $s \in S$, що $|s| > 2$. Тоді відповідний множник в $I(G)$, згідно з формулою (2), буде дорівнювати

$$(-1)^{m-1} \sum_{k=1}^n \prod_{i:\psi(f_i) \in s} f_i \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Оскільки

$$\forall i : f_i \in C([0,1]),$$

то

$$\forall i \exists M_i \in \mathbb{R} : \forall x \in [0,1] : |f_i(x)| \leq M_i$$

Нехай

$$M = \max_i M_i$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left| (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^n \prod_{i:\psi(f_i) \in s} f_i \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right| &\leq \sum_{k=1}^n \prod_{i:\psi(f_i) \in s} \left| f_i \left(\frac{k}{n} \right) \right| \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n M^{|s|} \frac{1}{n^{\frac{|s|}{2}}} = M^{|s|} \frac{1}{n^{\frac{|s|}{2}-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Відповідно

$$I(G) = \prod_{s \in S} (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^n \prod_{i:\psi(f_i) \in s} f_i \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Отже, при граничному переході ненульовий внесок даватимуть лише діаграми з розбиттям на пари. Оскільки при обході двох елементів поняття «підйомів» і «спусків» втрачають сенс, то і створення і нумерацію клонів можна не здійснювати. Для кожної f_i «клони» знищуються, залишаючи по собі одну вершину f_i та n_i різних відростків, що виходять з цієї вершини, а діаграми визначаються способами спарування відростків між різними вершинами. Це в точності описує

діаграми Фейнмана для гаусових випадкових величин. Отже,

$$\mathbb{E} [: \varphi^{n_1}(f_1) : \dots : \varphi^{n_N}(f_N) :] \longrightarrow \mathbb{E} [: (f_1, \xi)^{n_1} : \dots : (f_N, \xi)^{n_N} :], n \rightarrow \infty,$$

Приклад 2.4. З прикладу 2.3 для математичного очікування

$$\mathbb{E} [: \varphi^2(f_1) :: \varphi^2(f_2) :]$$

ми отримали наступні діаграми (рис. 2.3):

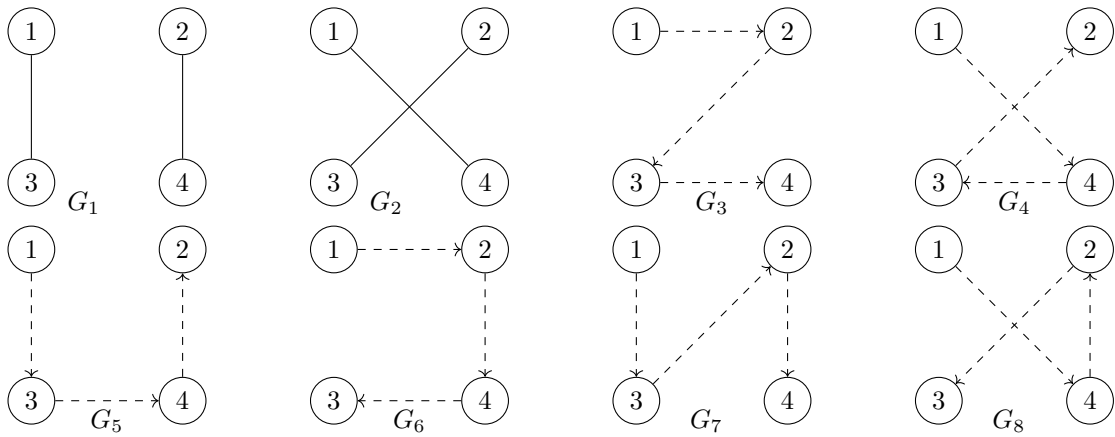
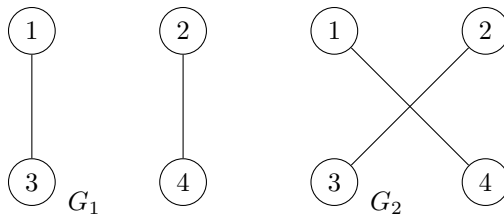


Рисунок 2.3 – Діаграми Фейнмана для степенів Віка елементів бернулівського шуму

Діаграми з пунктирними стрілками даватимуть нульовий внесок при граничному переході, оскільки обхід виконується по множині з чотирьох вершин ($|s| > 2$).

В перших двох діаграмах ототожнимо вершини, що відповідають одній f_i , але залишимо n_i різних відростків (рис. 2.4):



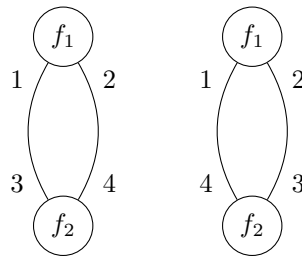


Рисунок 2.4 – Збіжність діаграм для бернулівського шуму до діаграм Фейнмана для гаусового шуму

що відповідає діаграмам Фейнмана в прикладі 1.9.

Висновки до розділу 2

В даному розділі було дане означення бернулівського шуму та показано, що такий шум є наближенням гаусового білого шуму.

Було виведено аналог формули Динкіна, загальний вираз для степенів Віка для бернулівського шуму, побудовано діаграми, що дозволяють обчислювати моменти добутоків Віка для елементів бернулівського шуму та показано, що такі діаграми збігаються до діаграм Фейнмана для гаусового випадку.

ВИСНОВКИ

У ході даної роботи було проведено аналіз публікацій і розглянуто поняття простору Фока та ізоморфного йому простору функціоналів від гаусового білого шуму. Було досліджено властивості білого шуму та методи обчислення моментів функціоналів від нього, зокрема метод діаграм Фейнмана.

Для наближення гаусового білого шуму було побудовано бернулівський шум. Теорема про слабку збіжність елементів бернулівського шуму до відповідних елементів гаусового білого шуму доводить можливість і коректність такого наближення.

Для подальшої роботи з простором функціоналів від бернулівського шуму було виведено ряд корисних тверджень та теорем. Було виведено аналог формули Динкіна, що дозволяє обчислювати моменти добутків елементів бернулівського шуму. Також було показано загальний вигляд степенів Віка для бернулівського шуму та побудовано графічний метод, що використовує діаграми для обчислення їх моментів. Показано, що діаграми для бернулівського шуму збігаються до вже відомих діаграм Фейнмана для гаусового білого шуму при $n \rightarrow \infty$.

Отримані результати дають змогу досліджувати простір функціоналів від бернулівського шуму. Бернулівські випадкові величини влаштовані простіше ніж гаусові і можуть приймати лише два значення, тому простір функціоналів від бернулівського шуму матиме скінченну розмірність, на відміну від простору функціоналів від гаусового білого шуму. Подальше дослідження такого скінченновимірного простору може виявити нові закономірності та співвідношення між відомими функціоналами та операторами квантової фізики.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. M. Reed, B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics Vol.1: Functional Analysis. 1972
2. А. Н. Ширяев. «Вероятность» в 2 кн. «Вероятность—1» — 552 с., «Вероятность—2» — 416 с. (5-е изд., 2011)
3. Hardy, Michael (2006). "Combinatorics of Partial Derivatives"
4. Quantum Physics: A Functional Integral Point of View. Front Cover. James Glimm, Arthur Jaffe.
5. Barry Simon. The Phi 2 Euclidean (Quantum) Field Theory.
6. Дональд Кнут, Роналд Грэхем, Орен Паташник. Числа Эйлера. Конкретная математика. Основание информатики — М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006. — С. 703
7. Bobkov, S. G. Concentration of distributions of the weighted sums with Bernoullian coefficients. Geometric aspects of functional analysis, 27–36, Lecture Notes in Math., 1807, Springer, Berlin, 2003.
8. Bobkov, Sergey G. ,Götze, Friedrich; Houdré, Christian. On Gaussian and Bernoulli covariance representations. (English summary) Bernoulli 7 (2001), no. 3, 439–451.