Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут
імені
Ігоря Сікорського”
Фізико-математичний факультет

ТЕОРІЯ ПОХИБОК

Київ 2017

Теорія похибок
і обробка результатів вимірювань
у фізичній лабораторії

1.Вимірювання фізичних величин

Виміром називають послідовність експериментальних операцій для знаходження фізичної величини, що характеризує об'єкт чи явище. Виміряти – значить порівняти вимірювану величину з іншою, однорідною з нею величиною, прийнятою за одиницю вимірювання.

Завершується вимірювання визначенням ступеню наближення знайденого значення до істинного або до істинного середнього. Істинним середнім характеризуються величини, що носять статистичний характер, наприклад, середній зріст людини, середня енергія молекул газу тощо. Такі ж параметри, як маса тіла або його об'єм, характеризуються істинним значенням. В цьому випадку можна говорити про ступінь наближення знайденого середнього значення фізичної величини до її істинного значення.

Виміри можуть бути як прямими, коли шукану величину знаходять безпосередньо з дослідних даних, так і непрямими, коли остаточну відповідь на запитання знаходять через відомі залежності між фізичною величиною, що нас цікавить, і величинами, які можна отримати експериментально через прямі виміри.

2. Похибки вимірювань

Недосконалість вимірювальних приладів і органів відчуття людини, а часто – і природа самої вимірюваної величини призводять до того, що результат при будь-яких вимірах отримують з певною точністю, тобто експеримент дає не істинне значення вимірюваної величини, а наближене.

Точність вимірювання визначається близькістю цього результату до істинного значення вимірюваної величини або до істинного середнього. Кількісною мірою точності вимірювання служить похибка вимірювання. Загалом, вказують абсолютну похибку вимірювання.

Абсолютною похибкою даного вимірювання x називається різниця між її виміряним значенням x_i та істинним значенням цієї величини:

$$\Delta x_i = x_i - x.$$

У досліді істинне значення вимірюваної величини x невідомо наперед, тому абсолютну похибку відносять до середнього значення $\langle x \rangle$ і знаходять за формулою:

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle.$$

Абсолютна похибка Δx_i має ту ж розмірність, що і сама вимірювана величина x. Вона може бути як додатною, так і від'ємною.

Відносною похибкою виміру називають модуль відношення абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини

$$\varepsilon = |\Delta x| / x. \quad (1)$$

Відносна похибка – величина безрозмірна, переважно виражається у відсотках або в долях одиниці. Зі співвідношення (1) виходить, що $|\Delta x| = \varepsilon x$.

Основні типи похибок вимірювань

1. **Грубі похибки** (промахи) виникають в результаті недбалості або неуважності експериментатора. Наприклад,

відлік вимірюваної величини випадково проведено не за потрібною схемою, невірно прочитана цифра на шкалі тощо. Цих похибок легко уникнути.

2**. Випадкові похибки** виникають через різні причини, дія яких різна в кожному з дослідів, вони не можуть бути передбачені заздалегідь. Ці похибки зумовлені неминучими неточностями при спостереженнях за показаннями приладів, неврахованими змінами умов досвіду, обмежень чутливості приладів і так далі. Величина випадкової похибки різна навіть для вимірювань, виконаних однаковим чином.

Випадкові похибки неминучі, тому потрібно вміти оцінювати їх. Ці похибки підкоряються статистичним закономірностям і вираховуються за допомогою методів математичної статистики.

3.**Систематичні похибки** обумовлені головним чином похибками засобів вимірювань (приладів) – $\boldsymbol{\sigma}_{\textbf{пр}}$ і недосконалістю методів вимірювань – $\boldsymbol{\sigma}_{\textbf{мет}}$. При зчитуванні результату вимірювань є неминучим округлення, яке пов'язане з ціною поділки і, відповідно, точністю приладу. Це призводить до появи похибки округлення – $\boldsymbol{\sigma}_{\textbf{окр}}$. Систематичну похибку не можна усунути повторним виміром. Її усувають або за допомогою поправок, або «поліпшенням» експерименту.

У запропонованих методичних вказівках наведено кінцеві формули теорії похибок, необхідні для математичної обробки результатів вимірювань.

3.Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Розглянемо з правилами обробки результатів вимірювань при наявності лише випадкових похибок.

Уявімо фізичний експеримент, у якому в результаті n прямих вимірів деякої величини x були отримані значення x_1,

$x_2, \ldots, x_n$. Сукупність цих значень називається вибіркою з нескінченно великого ряду значень, котрі могла б прийняти випадкова величина x. За достатньо великого числа вимірів n ближче усього до істинного значення величини x лежить середнє арифметичне результатів вимірювання $<x>$, яке визначається таким чином :

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (2)$$

і у теорії називається ***вибірковим середнім.***

Відхилення окремих значень x_1, $x_2, \ldots, x_n$ від вибіркового середнього $\langle x \rangle$ називаються абсолютними похибками результатів окремих вимірювань:

$$\Delta x_1 = x_1 - <x>;$$
$$\Delta x_2 = x_2 - <x>;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta x_n = x_n - <x>.$$

Для оцінки відхилення вибіркового середнього $<x>$ від істинного значення вимірюваної величини вводиться ***середня квадратична похибка середнього*** $S_{\langle x \rangle}$, яка визначається так:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2} \qquad (3)$$

З формули (3) видно, що точність знаходження середнього значення можна підвищити, збільшуючи число n, оскільки $S_{\langle x \rangle}$ зменшується, загалом, з ростом n. Однак необхідно врахувати, що коли $S_{\langle x \rangle}$ стане меншим за сумарну систематичну похибку, подальше збільшення n не призведе до підвищення точності результату. У такому випадку точність вимірювань буде визначатися систематичними похибками. Тому на практиці число n невелике – від 3 до 10. З кінцевого числа вимірювань неможливо точно знайти істинне (або теоретичне середнє) значення вимірюваної величини x. Задача вимірювання – оцінити величину x, тобто вказати інтервал значень, до якого із заданою імовірністю довіри α (іноді використовують іншу назву α – коефіцієнт надійності) потрапляє вимірювана величина x.

Позначимо через β_1 і β_2 межі інтервалу, що визначаються таким чином:

$$\beta_1 = \langle x \rangle - \Delta x_{\text{вип}};$$

$$\beta_1 = \langle x \rangle + \Delta x_{\text{вип}}, \tag{4}$$

де $\Delta x_{\text{вип}}$ – напівширина інтервалу довіри:

$$\Delta x_{\text{вип.}} = t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle}; \tag{5}$$

$t_{\alpha,n}$ – коефіцієнт Стьюдента, який залежить від імовірності довіри α та числа вимірів n (див. таб. 1).

Запис
$$\beta_1 \le x \le \beta_2 \tag{6}$$
означає, що шукана величина x буде знаходитись з імовірністю α (наприклад, α=0,8 або 80%) в інтервалі значень від β_1 до β_2 . Ширина цього інтервалу – 2 $\Delta x_{\text{вип}}$ (див. рис.1).

Якщо використати (4) – (6), можна записати:

$$\langle x \rangle - t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle} \le x \le \langle x \rangle + t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle}$$

або з імовірністю α

$$x = \langle x \rangle \pm t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle x \rangle}. \tag{7}$$

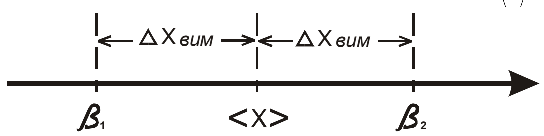

Рис.1.

Формула (7) є ***кінцевою формулою запису результату*** під час проведення прямих вимірювань за умови переважання випадкових похибок над систематичними.

Розглянемо приклад розрахунку напівширини інтервалу довіри за заданим коефіцієнтом надійності α.

Нехай вимірювання деякого проміжку часу τ повторено три рази (n=3). Розрахована за формулою (3) похибка середнього виявилась рівною $S_{\langle x \rangle} = 0{,}1$ с, а середнє значення $<\tau>=2{,}3$ с. Якою повинна бути напівширина інтервалу довіри $\Delta\tau$, щоб коефіцієнт надійності α дорівнював 0,8 ?

У табл.1 на перетині стовпчика n=3 і рядка α=0,8 знаходимо значення коефіцієнта Стьюдента $t_{\alpha,n} = t_{0,8;3} = 1{,}89$.

Остаточна відповідь: $\Delta\tau = t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle \tau \rangle} = (1{,}89 \cdot 0{,}1)$ с.

Табл. 1

α	Кількість вимірів n												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	60	100
0,8	3,08	1,89	2,35	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38	1,33	1,30	1,30	1,29
0,9	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,73	1,73	1,68	1,67	1,66
0,95	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	2,02	2,00	1,98

4. Розрахунок середньої квадратичної похибки при непрямих вимірюваннях

Припустимо, що у фізичному експерименті шукану величину знаходять непрямим шляхом, тобто використовують певну функціональну залежність

$$y = f(a, b, c, \ldots), \tag{8}$$

яка називається розрахунковою або робочою формулою. Наприклад, у разі вирахування густини речовини за відомою масою та об'ємом робоча формула має вигляд:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Похибка у вимірюванні "y" залежить від похибок, допущених у прямих вимірюваннях величин a, b, c… Передбачаючи, що похибки a, b, c … за абсолютним значенням значно менші самих величин, можна, на підставі (8) отримати за допомогою диференціального числення вираз для ***середньої квадратичної похибки*** вимірювання величини "*y*":

$$S_{\langle y\rangle}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\Bigg/\begin{matrix}a=\langle a\rangle\\ b=\langle b\rangle\\ \ldots\end{matrix}\right)^2 S_{\langle a\rangle}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial b}\Bigg/\begin{matrix}a=\langle a\rangle\\ b=\langle b\rangle\\ \ldots\end{matrix}\right)^2 S_{\langle b\rangle}^2+\ldots} \qquad (9)$$

Отже, для розрахунку середньої квадратичної похибки вимірювання величини "*y*" необхідно вирахувати частинні похідні, враховуючи функціональну залежність від безпосередньо вимірюваних величин.

Послідовність розрахунку шуканої величини "*y*" при непрямих вимірюваннях

1. Виміряти незалежні величини *a, b, c...* , що входять до робочої формули (8), і визначити вибіркові середні значення величин $\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle,\ldots$. Після цього, підставивши значення $\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle,\ldots$ у формулу (8), визначити вибіркове середнє значення величини "*y*":

$$\langle y\rangle=f\left(\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle\ldots\right).$$

2. За допомогою виразу (3) знайти середні квадратичні похибок $S_{\langle a\rangle},S_{\langle b\rangle},S_{\langle c\rangle}\ldots$ і використати їх для визначення $S_{\langle y\rangle}$ за формулою (9).

3. Як і для прямих вимірів, кінцевий результат записується у вигляді, аналогічному до (7):

$$y=\langle y\rangle \pm t_{\alpha,n}S_{\langle y\rangle} \text{ з імовірністю } \alpha.$$

Коефіцієнт Стьюдента для даного числа вимірів *n* і заданої ймовірності довіри α знаходимо за табл. 1.

5. Оцінка систематичної похибки

Систематична похибка у ряді випадків може бути переведена у випадкову. Сумарну систематичну похибку σ_Σ (сумарне стандартне відхилення) оцінюють за формулою

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_{пр}^2 + \sigma_{окр}^2 + \sigma_{мет}^2 + \sigma_{суб}^2 + \dots}, \qquad (10)$$

де $\sigma_{суб}$ – це систематична похибка, що пов'язана з особистістю дослідника.

Похибка $\sigma_{пр} = \Delta/3$, де Δ – максимальна похибка, вказана у паспорті приладу. Для електровимірювальних приладів $\Delta = r \cdot A_m \cdot 10^{-2}$, де r – клас точності приладу, A_m – номінальне значення вимірюваної величини ("розмах шкали"). Максимальну похибку Δ можна також оцінити за ціною поділки δ шкали приладу $\Delta = \delta/2$ або остаточно $\sigma_{пр} = \delta/6$.

Для приладів із цифровим табло Δ дорівнює половині одиниці найменшого розряду. При зчитуванні показів зі шкали вимірювального приладу або при округленні деякого числа результат можна розглядати як випадкову величину з прямокутним розподілом. Тоді стандартне відхилення такого розподілу розраховується за формулою

$$\sigma_{окр.} = \delta/\sqrt{12}.$$

Окрім $\sigma_{пр}$ і $\sigma_{окр}$, до σ_Σ входить також похибка методики $\sigma_{мет}$ тощо. У виразі (10) можна знехтувати тими складовими, значення яких не перевищує 30% максимальної з похибок.

Якщо проаналізувати питання щодо $\sigma_{пр}$, $\sigma_{окр}$ і $\sigma_{мет}$, то виявиться, що останньою з них можна знехтувати, оскільки в навчальній лабораторії, як правило, використовуються добре відпрацьовані методики, які дають малі $\sigma_{мет}$. Оскільки $\sigma_{пр}$ менша за $\sigma_{окр}$, то для оцінки сумарного стандартного відхилення використовують $\sigma_{окр}$:

$$\sigma_\Sigma = \sigma_{окр} = \delta/\sqrt{12}. \qquad (11)$$

Сумарне стандартне відхилення $\sigma_{\langle y\rangle\Sigma}$ непрямих вимірів величини “y” розраховується за формулою, аналогічною (9):

$$\sigma_{\langle y\rangle\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\Bigg/ \begin{matrix} a=\langle a\rangle \\ b=\langle b\rangle \\ \ldots \end{matrix}\right)^2 \sigma^2_{\langle a\rangle\Sigma} + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Bigg/ \begin{matrix} a=\langle a\rangle \\ b=\langle b\rangle \\ \ldots \end{matrix}\right)^2 \sigma^2_{\langle b\rangle\Sigma} + \ldots} . \qquad (12)$$

Якщо у формулах присутні табличні величини, похибки округлення табличної величини оцінюються за формулою $\sigma_{\text{таб}} = m/\sqrt{12}$, де m – одиниця розряду, до якого проводиться округлення чисельного значення.

Приклад: π =3,14..., середнє знач. $\langle\pi\rangle$ =3,14; m=0,01;

$$\sigma_{\langle\pi\rangle} = 0{,}01/\sqrt{12}.$$

6. Зіставлення систематичної та випадкової похибок

Зіставляючи систематичні та випадкові похибки, врахуємо три можливих випадки.

1. Нехай виконується умова

$$S_{\langle x\rangle} > 3\sigma_{\Sigma}. \qquad (13)$$

У цьому випадку можна знехтувати систематичною похибкою. Кінцевий результат запишеться у вигляді (7).

2. Нехай виконується умова

$$\sigma_{\Sigma} > 3S_{\langle x\rangle}. \qquad (14)$$

У цьому випадку можна знехтувати випадковою похибкою, і кінцевий результат записати у вигляді $x = \langle x\rangle \pm \Delta x_{\text{сис}}$ з імовірністю α. Тут $\Delta x_{\text{сис}}$ (Δx систематичне – напівширина інтервалу довіри) визначається так: $\Delta x_{\text{сис}} = \gamma_{\alpha}\ \sigma_{\Sigma}$, де коефіцієнт γ_{α} – деяке число більше одиниці. Ці коефіцієнти залежать від імовірності α, з якою істинне значення шуканої фізичної величини потрапляє до інтервалу довіри з напівшириною $\Delta x_{\text{сис}}$.

Закон розподілу похибок не завжди відомий. В цьому випадку слід скористуватись так званною нерівністю Чебишева [3], яка отримана для довільного закону розподілу і має таким чином вельми загальний характер. З цієї нерівності для коефіцієнта γ_α отримаємо

$$\gamma_\alpha \prec 1/\sqrt{1-\alpha}. \qquad (15)$$

Обчислення γ_α для різних значень α за формулою (15) дає змогу отримати $\Delta x_{\text{сис}}$ в найбільш загальному вигляді.

Для прямокутного розподілу випадкової величини

$$\gamma_\alpha = \alpha\sqrt{3}, \qquad (16)$$

з урахуванням (11)

$$\Delta x_{\text{сис}} = \boldsymbol{\gamma_\alpha}\, \sigma_\Sigma = \alpha\delta/2. \qquad (17)$$

3. Нехай $\sigma_\Sigma \approx S_{\langle x\rangle}$; у цьому випадку результат вимірювань записується у формі:

$x = \langle x\rangle$, $\Delta x_{\text{сис}}$ = (число), з імовірністю α = (число).

$S_{\langle x\rangle}$ =(число), n=(число). Інтервал довіри для випадкової похибки при цьому не визначають.

7. Обговорення результатів вимірювань

Припустимо, що дослід завершено, знайдено $\langle x\rangle$, розраховані систематичні і випадкові похибки, визначена напівширина інтервалу довіри для заданого коефіцієнта надійності α. Однак, отриманий результат сумнівний.

Приклад:

Вимірюємо дослідним шляхом прискорення вільного падіння **g**. Поклавши α =0,99, отримали результат |**g**| = <g>±$\Delta x_{сис}$ = (11,2 ±0,8) м/с^2. Бачимо, що відоме для даної місцевості значення g (|**g**| = 9,8 м/с^2) не потрапляє до вирахуваного нами інтервалу довіри. Такий результат міг бути отриманий внаслідок значної систематичної похибки, що вносить експериментатор – $\sigma_{суб}$. Або була запропонована невірна методика визначення |**g**| (велика $\sigma_{мет}$), що призвело до невірної оцінки напівширини інтервалу довіри $\Delta x_{сис}$.

Питання про усунення чи зменшення під час експерименту різного роду систематичних похибок є досить складним, тому у кожному окремому випадку розв'язується окремо.

Література

1. Сквайрс Дж. Практическая физика. –М.: Мир, 1971.
2. Диденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. –М.: Изд. МГУ, 1977.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. –Л.: Наука, 1985.

Видавець „Пугач О.В." Свідоцтво про реєстрацію суб'єкта видавничої справи ДК №1560 від 05.11.2003 р.
E-mail: olgapugach@ukr.net.

Укладачі: Ужва В. І., Пугач О. В.
Відповідальний редактор: Балановська О.Ю.

Рекомендовано кафедрою ЗФ та ФТТ.
Протокол № 12-16 від 14 грудня 2016 р.