УДК 571.986

$\boxed{\text{М.М. Кухарчук}}$, М.І. Яременко

ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ В R^l

Вступ

Дана стаття присвячена дослідженню гладкості розв'язків рівняння типу

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u) = 0 .$$

При дослідженні використано метод форм, зв'язок між формами і операторами, які породжені цими формами, згідно з теоремою Банаха [1, 2].

Постановка задачі

Мета статті – дослідження розв'язності рівняння типу

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, Du) = 0, \ \ \lambda > 0,$$

у всьому евклідовому просторі R^l, $l \geq 3$, $1 < a \in C^{\infty}$.

Про розв'язність одного квазілінійного еліптичного диференціального рівняння другого порядку у всьому евклідовому просторі R^l, $l \geq 3$

Розглянемо рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + da \circ du + f(x, u, Du) = 0,$$

$$1 < a \in C_0^{\infty}, \qquad (1)$$

де $f(x, u, Du)$ – ліпшицева функція по u, Du, тобто

$$|f(x, y, z) - f(x, y_1, z_1)| \leq$$

$$\leq \tilde{\mu}_1(x)|z - z_1| + \tilde{\mu}_2(x)|y - y_1|, \qquad (2)$$

$$|f(x, y, z)| \leq \mu_1(x)|z| + \mu_2(x)|y| + \mu_3(x),$$

де $\mu_i(x), \tilde{\mu}_i(x) \in \prod_{k\beta}(-\Delta)$, $\mu_3(x) \in L^p(R^l, d^l x)$.

Теорема 1. Якщо для рівняння (1) виконані умови (2), то воно слабко однозначно розв'язне в просторі $W_1^p(R^l, d^l x)$, $l \geq 3$, $p \geq 2$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо гладкий базис $\eta_1, ..., \eta_n, ... \in W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$. Утворимо лінійну оболонку простору $L(\eta_1, ..., \eta_n)$. Для кожного елемента $u_n = \sum_k C_k \eta_n$ побудуємо двоїстий відносно норм в $L^p(R^l, d^l x)$, $W_1^p(R^l, d^l x)$ елемент

$$u_n' = u_n |u_n|^{p-2} = -\sum_i^l \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right).$$

Отже, для лінійного простору $L(\eta_1, ..., \eta_n)$ вводимо відносно вказаних вище норм спряжені простори $L'(\eta_1, ..., \eta_n)$. Складемо для фіксованого елемента $u_n \in L(\eta_1, ..., \eta_n)$ функціонал

$$|\langle L(x, u_n), \eta\rangle| = \lambda\langle u_n, \eta\rangle + \langle du_n \circ a \circ d\eta\rangle +$$

$$+ \langle da \circ du_n, \eta\rangle + \langle f, \eta\rangle \ \ \forall \eta \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x),$$

$$|\langle L(x, u_n), \eta\rangle| \leq \lambda \|u_n\|_{L^p(R^l, d^l x)} \|\eta\|_{L^q(R^l, d^l x)} +$$

$$+ C(p, \varepsilon)\|\nabla u_n\|_{L^p(R^l, d^l x)} \|\nabla \eta\|_{L^q(R^l, d^l x)} +$$

$$+ \mathrm{K}\|\nabla u_n\|_{L^p(R^l, d^l x)} \|\eta\|_{L^q(R^l, d^l x)} + \langle \mu_1|\nabla u_n| + \mu_2|u_n| +$$

$$+ \mu_3, \eta\rangle \leq \varphi(\|u_n\|_{W_1^p})\|\eta\|_{W_1^q(R^l, d^l x)}, \lambda > 0,$$

де використана форм-обмеженість функцій μ_i та нерівність Юнга

$$\|\mu_1 \eta\|_q^q = \|(\mu\eta)^{\frac{q}{2}}\|_2^{2q} = \left(\|\mu^{\frac{q}{2}}\eta^{\frac{q}{2}}\|_2^2\right)^q \leq$$

$$\leq \left(\beta\left\|\nabla\left(\eta^{\frac{q}{2}}\right)\right\|_2^2 + c(\beta)\left\|\eta^{\frac{q}{2}}\right\|_2^2\right)^q \leq$$

$$\leq \left(\beta\left(\frac{q}{2}\right)^2 \|\nabla\eta\|_q^2 \|\eta\|_q^{q-2} + c(\beta)\|\eta\|_q^q\right)^q \leq$$

$$\leq \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 \beta\left(\frac{2}{q}\varepsilon\|\nabla\eta\|_q^q + \frac{q-2}{q}\frac{1}{\varepsilon}\|\eta\|_q^q\right) + c(\beta)\|\eta\|_q^q\right)^q.$$

Для μ_2 проводяться аналогічні викладки. З умов (2), де $\varphi(r)$ – неперервна функція для $r \geq 0$, випливає, що функціонал $\langle L(x, u_n)\rangle$ є лінійним неперервним функціоналом над $W_{1,0}^{p'}(R^l, d^l x)$ при фіксованому $u_n \in L(\eta_1, ..., \eta_n) \subset$

$\subset W_{1,0}^{p}(R^l, d^l x)$. Тоді за теоремою Банаха функціонал $\langle L(x,u_n)\rangle$ може бути зображений у вигляді

$$\langle L(x,u_n),\eta\rangle = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n),\eta\rangle, \qquad (3)$$

де $\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)$ – деякий елемент з $W_{-1}^{p}(R^l, d^l x)$, а це, за умов нашої теореми, означає, що задано неперервне відображення $L(\eta_1,...,\eta_n)\xrightarrow{\mathrm{A}_\lambda^p(\cdot)}$ $\xrightarrow{\mathrm{A}_\lambda^p(\cdot)} W_{-1}^{p}(R^l, d^l x)$. Покажемо, що цей оператор є коерцитивним відображенням.

Дійсно, покладаючи в (3) $\eta = u_n|u_n|^{p-2}$, отримуємо

$$\langle L(x,u_n), u_n|u_n|^{p-2}\rangle \equiv \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n), u_n|u_n|^{p-2}\rangle =$$

$$= \lambda\|u_n\|_p^p + (p-1)\langle |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n \circ a \circ |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n\rangle +$$

$$+ \langle da\circ du_n, u_n|u_n|^{p-2}\rangle + \langle f, u_n|u_n|^{p-2}\rangle \geq$$

$$\geq \lambda\|u_n\|_p^p + (p-1)\langle |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n \circ a \circ |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n\rangle +$$

$$+ \langle da\circ du_n, u_n|u_n|^{p-2}\rangle - \langle \mu_1|\nabla u_n| + \mu_2|u_n| + \mu_3,$$

$$u_n|u_n|^{p-2}\rangle = \lambda\|W\|_2^2 + \frac{4}{p^2}(p-1)\langle dW\circ a\circ dW\rangle +$$

$$+\frac{2}{p}\langle da\circ dW, W\rangle - \frac{2}{p}|\langle \mu_1 W, |\nabla W|\rangle -$$

$$-|\langle \mu_2 W, |\nabla W|\rangle - |\langle \mu_3, u_n|u_n|^{p-2}\rangle| \geq \lambda\|W\|_2^2 + \frac{4}{p^2}\times$$

$$\times(p-1)\langle dW\circ a\circ dW\rangle - \frac{1}{p}\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle -$$

$$-\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}+\frac{\beta}{2\varepsilon}\right)\|\nabla W\|_2^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{c(\beta)}{\varepsilon}+\frac{c(\beta)}{2\varepsilon}+\frac{1}{q}+\right.$$

$$\left.+\frac{2c(\beta)}{p\varepsilon}\right)\|W\|_2^2 - \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p \geq \left(\lambda - \left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon c(\beta)}{2\varepsilon}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2c(\beta)}{p\varepsilon}+\frac{1}{q}\right)\right)\|W\|_2^2 + \left(\frac{4}{p^2}(p-1) - \frac{1}{p}\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\varepsilon+\frac{3\beta}{2\varepsilon}\right)\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle - \frac{1}{p}\|\mu\|_p^p \geq$$

$$\geq (\lambda-\lambda_0)\|W\|_2^2 + c(p,\varepsilon)\|W\|_2^2 - \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p, \qquad (4)$$

де $\lambda_0 = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{3c(\beta)}{2\varepsilon}+\frac{2c(\beta)}{p\varepsilon}+\frac{1}{q}$, оскільки

$$|\langle da\circ du_n, u_n|u_n|^{p-2}\rangle| = \frac{2}{p}\langle da\circ dW, W\rangle \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}\langle da\circ a^{-1}\circ da, W\rangle^{\frac{1}{2}}\langle dW\circ a\circ dW\rangle^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}\langle dW\circ a\circ dW\rangle^{\frac{1}{2}}(\beta\langle dW\circ a\circ dW\rangle + c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left(\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle + \frac{c(\beta)}{\varepsilon}\|W\|_2^2\right)$$

і

$$|\langle f, u_n|u_n|^{p-2}\rangle| \leq |\langle \mu_1|\nabla u_n| + \mu_2|u_n| + \mu_3, u_n|u_n|^{p-2}\rangle| \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}|\langle \mu_1 W, |\nabla W|\rangle + |\langle \mu_2 W, W\rangle| + |\langle \mu_3, u_n|u_n|^{p-2}\rangle| \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}\|\mu_1 W\|_2\|\nabla W\|_2 + \|\mu_2 W\|_2\|W\|_2 +$$

$$+\|\mu_3\|_p\|u_n\|_p^{p-1} \leq \frac{2}{p}\|\nabla W\|_2(\beta\|\nabla W\|_2^2 +$$

$$+c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \|W\|_2(\beta\|\nabla W\|_2^2 +$$

$$+c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p + \|W\|_2^2\frac{1}{q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\|\nabla W\|_2^2 + \frac{\beta}{\varepsilon}\|\nabla W\|_2^2 + \frac{c(\beta)}{\varepsilon}\|W\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|W\|_2^2 +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\|W\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varepsilon}\|\nabla W\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}c(\beta)\|W\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p +$$

$$+\frac{1}{q}\|W\|_2^2 = \left(\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\beta}{\varepsilon}+\frac{\beta}{2\varepsilon}\right)\|\nabla W\|_2^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{c(\beta)}{\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+\frac{c(\beta)}{2\varepsilon}+\frac{1}{q}\right)\|W\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p.$$

Далі нерівність (4) називатимемо слабкою нерівністю коерцитивності на відміну від відомої класичної сильної нерівності коерцитивності

$\| L(x,u)\|_{L^p} \ge c\|u\|_{W_2^p}$. З нерівності (4) випливає, що нелінійний оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : L(\eta_1,...,\eta_n) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є коерцитивним. Дійсно, маємо

$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}\to\infty} \frac{\langle L(x,u_n), u_n|u_n|^{p-2}\rangle}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}} \ge$$

$$\ge \lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}\to\infty}\left(\lambda\|u_n\|_p^p + (p-1)\times\right.$$

$$\times\frac{\langle |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n \circ a \circ |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n\rangle}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}} +$$

$$+\frac{\langle da\circ du_n, u_n|u_n|^{p-2}\rangle}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}} -$$

$$\left.-\frac{\langle \mu_1|\nabla u_n| + \mu_2|u_n| + \mu_3, u_n|u_n|^{p-2}\rangle}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}}\right) \ge$$

$$\ge \lim_{\|W\|_2^2\ge\infty} \frac{(\lambda-\lambda_0)\|W\|_2^2 + c(p,\varepsilon)\|W\|_2^2 - \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p}{\|W\|_2^{\frac{2}{q}} + (1-\frac{2}{p})\|W\|_2^{\frac{2}{q}-1}\|\nabla W\|_2} = \infty,$$

тобто оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : L(\eta_1,...,\eta_n) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є коерцитивним відображенням.

Покажемо, що існує послідовність $u_n(x) \in \in L(\eta_1,...,\eta_n)$, яка є слабко збіжною в $W_1^p(R^l, d^l x)$ до елемента $u_0(x)$, який є слабким розв'язком рівняння (1). Для цього складемо систему рівнянь

$$\langle L(x,u_n), \eta_j^*\rangle = \langle A_\lambda^p(u_n), \eta_j^*\rangle = 0,\ j = 1,...,n, \quad (5)$$

де η_j^* – двоїстий до η_j відносно норми в $L^p(R^l, d^l x)$ елемент.

Зауважимо, що елемент u_n^* може бути єдиним способом зображений у вигляді $u_n^* = = \sum_{j-1}^n c_j^*\eta_j^*$, адже визначник $\det(\langle\eta_i, \eta_j^*\rangle)$ – аналог визначника Грамма – не є нульовим.

Існування розв'язку системи (5) доведемо від супротивного. Припустимо, що $\mathrm{A}_\lambda^p(u_n) \ne 0$ $\forall u_n \in L(\eta_1,...,\eta_n)$. Складемо відображення $C_R \to C_R$:

$$-\frac{\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n), \eta_j^*\rangle R}{\|\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)\|_{W_{-1}^p(R^l,d^l x)}} =$$

$$= -\frac{R}{\|\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)\|_{W_{-1}^p(R^l,d^l x)}}\langle L(x,u_n), \eta_j^*\rangle,\ j = 1,...,n,$$

де R дорівнює $\|u_n\|_{W_1^p}$ і вибирається з умови додатності правої частини нерівності (4), що завжди можливо в силу коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)$. З умови (2) випливає, що система (5) задає неперервне відображення $R^n \to R^n$. Тоді за теоремою Брауера про нерухому точку в кулі $\|u_n\|_{L(\eta_1,...,\eta_n)} \le R$ знайдеться елемент u_n, який є нерухомою точкою відображення

$$-\frac{R}{\|\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)\|_{W_{-1}^p}}\langle L(x,u_n), \eta_j^*\rangle,\ j = 1,...,n.$$

Тому, помноживши це відображення на c_j^* і врахувавши наведене вище, отримаємо

$$-\frac{R}{\|\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)\|_{W_{-1}^p}}\langle L(x,u_n), u_n|u_n|^{p-2}\rangle =$$

$$= \langle u_n, u_n|u_n|^{p-2}\rangle = \|u_n\|_{L^p}^p > 0.$$

З іншого боку, із співвідношення (4) і вибору $\lambda > \lambda_0(\varepsilon, p, \|\tilde\mu_2^\alpha(x)\|_\infty)$, $\varepsilon > 0$, маємо

$$-\frac{R}{\|\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)\|_{W_{-1}^p}}\langle L(x,u_n), u_n|u_n|^{p-2}\rangle =$$

$$= -\frac{R}{\|\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)\|_{W_{-1}^p}}\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n),\ u_n|u_n|^{p-2}\rangle < 0,$$

що приводить до протиріччя, тобто існує елемент $u_n(x) \in L(\eta_1,...,\eta_n)$, який є розв'язком системи (5).

Покажемо, що послідовність розв'язків системи (5) або операторного рівняння $\mathrm{A}_\lambda^p(u_n) = = 0$ слабко збігається в $W_1^p(R^l, d^l x)$ до слабкого розв'язку рівняння (1). Дійсно, оскільки послідовність $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*, ...$ – система лінійно незалежних векторів у просторі $W_1^p(R^l, d^l x)$, то, відповідно, виконується інтегральна тотожність

$$\langle L(x, u_n), v\rangle \equiv 0, \qquad (6)$$

де u_n – розв'язок системи (5) $\forall v \in W_{1,0}^{p'}(R^l, d^l x)$.

Поклавши в (6) $v = u_n |u_n|^{p-2}$, отримаємо оцінку

$$0 = \lambda \|u_n\|_p^p + (p-1)\langle |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n \circ a \circ |u_n|^{\frac{p-2}{2}} du_n\rangle +$$

$$+ \langle da \circ du_n, u_n |u_n|^{p-2}\rangle + \langle f, u_n |u_n|^{p-2}\rangle,$$

$$\|u_n\|^p_{L^p(R^l, d^l x)} \le \frac{\frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p}{\lambda - \lambda_0}, \quad \|\nabla u_n\|^p_{L^p(R^l, d^l x)} \le c,$$

де c – стала, яка залежить від ε, p, μ_i, тобто від конкретних значень початкових параметрів. Отже, отримано апріорну оцінку $\|u\|_{W_1^p(R^l, d^l x)} < C$, де стала C залежить від структури рівняння і необхідного вибору $\varepsilon > 0$, $\lambda > \lambda_0 > 0$.

Доведемо слабку збіжність послідовності $u_n(x)$ розв'язків тотожності (6) до слабкого розв'язку рівняння (1).

Лема 1. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – хемінеперервне відображення.

Доведення. За визначенням оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є хемінеперервним відображенням, якщо $\forall u, \omega \in W_1^p$ $\omega - \lim_{t \to 0} A_\lambda^p(u + t\omega) = A_\lambda^p(u)$ в нормі W_{-1}^p.

Отже, можемо написати такі оцінки:

$$\langle A_\lambda^p(u + t\omega) - A_\lambda^p(u), v\rangle = \lambda t\langle \omega, v\rangle + t\langle d\omega \circ a \circ dv\rangle +$$

$$+ t\langle da \circ d\omega, v\rangle + \langle f(x, u + t\omega, du + td\omega) - f(x, u, du), v\rangle,$$

звідки

$$|\langle A_\lambda^p(u + t\omega) - A_\lambda^p(u), v\rangle| \le$$

$$\le t(\lambda \|\omega\|_{L^p} \|v\|_{L^q} + \mathrm{K}\|\nabla\omega\|_{L^p} \|\nabla v\|_{L^q} +$$

$$+ \ddot{\mathrm{K}}\|v\|_{L^q} \|\nabla\omega\|_{L^p} + \langle \tilde{\mu}_1 |\omega| + \tilde{\mu}_2 |\nabla\omega|, v\rangle) \le$$

$$\le t(\lambda \|\omega\|_{L^p} \|v\|_{L^q} + \mathrm{K}\|\nabla\omega\|_{L^p} \|\nabla v\|_{L^q} +$$

$$+ \ddot{\mathrm{K}}\|v\|_{L^q} \|\nabla\omega\|_{L^p} + \|v\tilde{\mu}_1\|_{L^q} \|\omega\|_{L^p} +$$

$$+ \|v\tilde{\mu}_2\|_{L^q} \|\nabla\omega\|_{L^p}) \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \quad \forall u, \omega \in W_1^p,$$

$$\forall v \in W_{1,0}^q,$$

де $\mathrm{K}, \ddot{\mathrm{K}}$ – деякі дійсні коефіцієнти.

Лема доведена.

Лема 2. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, $\lambda > \lambda_0$, – акретивне відображення в L_p.

Доведення. Згідно з означенням акретивності оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – акретивний в L_p, якщо

$$\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle \ge 0 \quad \forall u, v \in W_1^p.$$

Отже, враховуючи умови (2), маємо

$$\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge \lambda\langle (u - v), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle +$$

$$+ \langle d(u - v) \circ a \circ d((u - v)|u - v|^{p-2})\rangle +$$

$$+ \langle d \circ a \circ d(u - v), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle +$$

$$+ \langle f(x, u, \nabla u), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle -$$

$$- \langle f(x, v, \nabla v), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle \ge \lambda \|u - v\|_p^p +$$

$$+ (p-1)\langle |u - v|^{\frac{p-2}{2}} d(u - v) \circ a \circ |u - v|^{\frac{p-2}{2}} \times$$

$$\times d(u - v)\rangle + \langle da \circ d(u - v), (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle -$$

$$- \langle \tilde{\mu}_1 |u - v|, (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle -$$

$$- \langle \tilde{\mu}_2 |\nabla(u - v)|, (u - v)|u - v|^{p-2}\rangle \ge 0 \quad \forall u, v \in W_1^p.$$

Згідно з оцінками

$$W = (u - v)|u - v|^{\frac{p-2}{2}} \ge \lambda \|W\|_2^2 +$$

$$+ \frac{4(p-1)}{p^2}\langle dW \circ a \circ dW\rangle + \frac{2}{p}\langle da \circ dW, W\rangle -$$

$$- \|\tilde{\mu}_1 W\|_2 \|W\|_2 - \frac{2}{p}\|\tilde{\mu}_2 W\|_2 \|\nabla W\|_2 \ge \lambda \|W\|_2^2 +$$

$$+\frac{u}{p^2}(p-1)\langle dW\circ a\circ dW\rangle-\frac{1}{2}\left(\left(\varepsilon+\frac{c(\beta)}{\varepsilon}\right)\|W\|_2^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{\varepsilon}\|\nabla W\|_2^2\right)-\frac{1}{p}\left(\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\|W\|_2^2+\frac{c(\beta)}{\varepsilon}\|W\|_2^2\right)\geq$$

$$\geq\left(\lambda-2\frac{c(\beta)}{\varepsilon p}-\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{c(\beta)}{\varepsilon}\right)\right)\|W\|_2^2+$$

$$+\left(\frac{4}{p^2}(p-1)-\frac{2}{p}\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)-\frac{\beta}{2\varepsilon}\right)\|\nabla W\|_2^2\geq 0$$

маємо

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u)-\mathrm{A}_\lambda^p(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\geq 0\quad \forall u,v\in W_1^p.$$

Лема доведена.

Оскільки послідовність $u_n(x)$ задовольняє апріорну оцінку $\|u_n\|_{W_1^p(R^l,d^lx)}<C$, то, відповідно, $u_n(x)\xrightarrow[W_1^p(R^l,d^lx)]{}u_0(x)$ слабко. Тому використовуючи акретивність оператора $A_\lambda^p(\cdot):W_1^p(R^1,d^lx)\to W_1^p(R^1,d^lx)$ в $L^p(R^1,d^lx)$, маємо

$$\forall n\in N:\langle A_\lambda^p(u_n)-A_\lambda^p(\xi),(u_n-\xi)|u_n-\xi|^{p-2}\rangle\geq 0$$
$$\forall\xi\in L(\eta_1,...,\eta_n). \tag{7}$$

Як відомо, при $u_n\to u_0$ слабко двоїстий до нього елемент – оператор двоїстості $u_n'=\mathrm{I}(u_n)$ – в нашому випадку є слабко неперервним, тобто $|u_n|^{p-2}u_n\xrightarrow[L^{p'}(R^l,d^lx)]{}|u_0|^{p-2}u_0$ слабко. Тому, враховуючи тотожність (6) $\langle A_\lambda^p(u_n),v\rangle\equiv 0$ з $v=|u_n-\xi|^{p-2}(u_n-\xi)$ та переходячи до границі при $n\to\infty$ і фіксованому ξ, з (7) отримаємо

$$\langle A_\lambda^p(\xi),(u_0-\xi)|u_0-\xi|^{p-2}\rangle\leq 0. \tag{8}$$

Поклавши в останній нерівності $\xi=u_0-tz$, $z\in W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$, $t\to 0$, та скоротивши обидві частини отриманої нерівності на t^{p-1}, знайдемо

$$\langle A_\lambda^p(u_0-tz),\ z|z|^{p-2}\rangle\leq 0.$$

Оскільки, оператор $A_\lambda^p(\cdot):W_1^p(R^l,d^lx)\to$ $\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ хемінеперервний, а z – довільний елемент з $W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$, то відповідно матимемо

$$\lim_{t\to 0+}\langle A_\lambda^p(u_0-tz),\ z|z|^{p-2}\rangle=\langle A_\lambda^p(u_0),\ z|z|^{p-2}\rangle\leq 0,$$

що в силу довільності $z\in W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$ приводить до рівності

$$\langle A_\lambda^p(u_0),\ z|z|^{p-2}\rangle=0. \tag{9}$$

Отже, твердження доведено, причому єдиність розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A_\lambda^p(\cdot)$. Дійсно, покажемо, що цей розв'язок єдиний. Доводимо від супротивного. Нехай u_0 і u_0' – два таких розв'язки. Тоді справедливі рівності

$$\langle A_\lambda^p(u_0),\omega\rangle=0,\langle A_\lambda^p(u_0'),\omega\rangle=0\quad\forall\omega\in W_{1,0}^{p'}(R^l,d^lx),$$

тобто $\langle A_\lambda^p(u_0)-A_\lambda^p(u_0'),\omega\rangle=0$.

Поклавши $\omega=(u_0-u_0')|u_0-u_0'|^{p-2}$, отримаємо

$$0=\langle A_\lambda^p(u_0)-A_\lambda^p(u_0'),(u_0-u_0')|u_0-u_0'|^{p-2}\rangle\geq$$

$$\geq\left(\lambda-2\frac{c(\beta)}{\varepsilon p}-\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{c(\beta)}{\varepsilon}\right)\right)\|W\|_2^2+$$

$$+\left(\frac{4}{p^2}(p-1)-\frac{2}{p}\left(\varepsilon+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)-\frac{\beta}{2\varepsilon}\right)\|\nabla W\|_2^2\geq 0,$$

де $W=(u_0-u_0')|u_0-u_0'|^{\frac{p-2}{2}}$, $p\geq 2$, а це означає, що $u_0=u_0'$. Теорема 1 доведена.

Дослідження гладкості розв'язків у всьому евклідовому просторі R^l, $l\geq 3$

У даному пункті проводиться дослідження розв'язності двох типів рівнянь, точніше, спочатку досліджується рівняння $\lambda u-d\circ a\circ du+$ $+da\circ du+f(x,u,Du)=0$ за умов (2) і встановлюється гладкість його розв'язків за додаткових припущень на його нелінійну частину, а далі розглядається узагальнення цього рівняння у вигляді $\lambda u-d\circ a\circ du+f(x,u,\nabla u)=0$ за тих самих припущень на нелінійність.

Теорема 2. Якщо для рівняння (1) за умов (2) додатково виконуються умови $|f(x,y,z)|\leq$ $\leq\mu_1(x)|z|+\mu_2(x)|y|+\mu_3(x)$, то розв'язок $u\in$ $\in W_1^p(R^l,d^lx)$ рівняння

$$\lambda u-d\circ a\circ du+da\circ du+f(x,u,Du)=0, \tag{10}$$

де $\mu_1, \mu_2 \in L_\infty$, $\mu_3 \in L_q(R^l, d^l x)$, $da \in L_\infty$, належить $W_2^p(R^l, d^l x)$.

Доведення. Зробимо перетворення рівняння (10):

$$\lambda u - d \circ a \circ du + da \circ du + f(x, u, Du) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda u - da \circ du - a \circ d^2 u + da \circ du + f(x, u, Du) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \circ d^2 u = f(x, u, Du) + \lambda u.$$

За рівнянням, записаним у такому вигляді, складаємо лінійний функціонал над $v \in L_q(R^l, d^l x)$, тобто $L(u, v) = \langle a \circ d^2 u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle + \langle f, v \rangle$. Використовуючи оцінку

$$|\langle f, v \rangle| \le \langle \mu_1 |\nabla u| + \mu_2 |u| + \mu_3, v \rangle \le$$

$$\le \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p \|v\|_q + \|\mu_2\|_\infty \|v\|_q \|u\|_p + \|\mu_3\|_p \|v\|_q,$$

одержимо

$$|\langle a \circ d^2 u, v \rangle| \le \lambda \|u\|_p \|v\|_q + \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p \|v\|_q +$$

$$+ \|\mu_2\|_\infty \|v\|_q \|u\|_p + \|\mu_3\|_p \|v\|_q .$$

Далі, оскільки вже відомі оцінки для розв'язків $\|\nabla u\|_p$ і $\|u\|_p$ (адже $u \in W_1^p$), можемо знайти таке стале число μ (яке залежить від структури рівняння), що буде вірною оцінка $|\langle a \circ d^2 u, v \rangle| \le \mu \|v\|_q$ для довільного елемента v, що належить простору $L_q(R^l, d^l x)$.

Отже, з довільності елемента $v \in L_q$ випливає, що $a \circ d^2 u$ є елементом з L_p (теорема Банаха), а оскільки $a \ge 1$ і $\|d^2 u\|_p$ є числом, а не ∞, маємо $u \in W_2^p(R^l, d^l x)$, що й потрібно було довести.

Далі, для порівняння розглянемо гладкість розв'язків рівняння

$$(\lambda - d \circ a \circ d) u + f(x, u, \nabla u) = 0. \qquad (11)$$

Наша задача показати, що коли $|f(x, y, z)| \le \mu_1(x)|z| + \mu_2(x)|y| + \mu_3(x)$, тоді розв'язок рівняння (11) $u \in W_2^p(R^l, d^l x)$ за додаткових умов на μ_i, а саме нехай $\dfrac{\partial}{\partial x_r} a = a^r \in C^\infty$, тоді розв'язок $u \in W_1^p(R^l, d^l x)$ рівняння $(\lambda - d \circ a \circ d) u + f(x, u, \nabla u) = 0$, де $\mu_1, \mu_2 \in L_\infty$, $\mu_3 \in L_q(R^l, d^l x)$, $da \in L_\infty$ належить $W_2^p(R^l, d^l x)$.

Доведемо це. Запишемо рівняння (11), після того як підставимо в нього розв'язок, у вигляді

$$a \circ d^2 u = f(x, u, \nabla u) + \lambda u - da \circ du .$$

За цим рівнянням складаємо лінійний функціонал над v, тобто

$$L(u, v) = \langle a \circ d^2 u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle + \langle f, v \rangle - \langle da \circ du, v \rangle .$$

Використовуючи оцінки

$$|\langle da \circ du, v \rangle| \le \|v\|_q \|\nabla u\|_p \|da\|_\infty ,$$

$$|\langle f, v \rangle| \le \langle \mu_1 |\nabla u| + \mu_2 |u| + \mu_3, v \rangle \le$$

$$\le \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p \|v\|_q + \|\mu_2\|_\infty \|v\|_q \|u\|_p + \|\mu_3\|_p \|v\|_q ,$$

одержимо

$$|\langle a \circ d^2 u, v \rangle| \le \lambda \|u\|_p \|v\|_q + \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p \|v\|_q +$$

$$+ \|\mu_2\|_\infty \|v\|_q \|u\|_p + \|\mu_3\|_p \|v\|_q + \|v\|_q \|\nabla u\|_p \|da\|_\infty .$$

Далі, оскільки оцінки для розв'язків $\|\nabla u\|_p$ і $\|u\|_p$ (адже $u \in W_1^p$) вже відомі, можемо знайти таке стале число μ (яке залежить від структури рівняння), що вірною буде оцінка $|\langle a \circ d^2 u, v \rangle| \le \mu \|v\|_q$ для довільного елемента v, який належить простору $L_q(R^l, d^l x)$.

Оцінимо норму a і $d^2 u$:

$$\|a \circ d^2 u\|_p = \sup_{v \in L_q} \frac{|\langle a \circ d^2 u, v \rangle|}{\|v\|_q} =$$

$$= \sup_{v \in L_q} \frac{|\langle f + \lambda u - da \circ du, v \rangle|}{\|v\|_q} \le \sup_{v \in L_q} \frac{\lambda \|u\|_p \|v\|_q}{\|v\|_q} +$$

$$+ \frac{\|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p \|v\|_q + \|\mu_2\|_\infty \|v\|_q \|u\|_p}{\|v\|_q} +$$

$$+ \frac{\|\mu_3\|_p \|v\|_q + \|v\|_q \|\nabla u\|_p \|da\|_\infty}{\|v\|_q} < \infty.$$

Отже, внаслідок довільності елемента $v \in L_q$ елемент $a \circ d^2 u$ належить простору L_p (теорема Банаха) і, оскільки $a \ge 1$, то $\|d^2 u\|_p$ є число, а не ∞, тобто маємо, що $u \in W_2^p(R^l, d^l x)$, що й потрібно було довести.

Таким чином, нами встановлено гладкість розв'язків двох типів рівнянь, при цьому, як і слід було очікувати, чим більше деталізована його структура, тим слабші умови необхідно вимагати від його структурних складових. Крім того, на відміну від випадку гільбертового простору L_2 в банахових просторах L_p від коефіцієнта μ_2 ми вимагаємо вже не просто наявності форм-обмеженості, а належності його до L_∞ — умова, значно сильніша.

Висновки

У статті доведено однозначну розв'язність квазілінійного диференціального рівняння в $u \in W_1^p$ за досить слабких умов на нелінійний член. Основним же результатом є встановлення гладкості розв'язку при додаткових умовах на нелінійність. Для цього за допомогою форм введено слабкий аналог сильної нерівності коерцитивності за досить слабких обмежень на функції, що утворюють рівняння. При цьому було введено і досліджено новий клас нелінійних операторів, які породжені формою, складеною по лівих частинах цього рівняння.

$\boxed{\text{Н.М. Кухарчук}}$, Н.И. Яременко

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В R^l

В работе рассматривается гладкость решений квазилинейных эллиптических уравнений. Развивается метод форм для проверки условий теоремы Минти–Браудера и для получения результатов касательно гладкости решений.

$\boxed{\text{M.M. Kukcharchuk}}$, M.I. Yaremenko

ON THE SMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF ONE QUASILINEAR EQUATION IN R^l

We consider the smoothness of solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. In this paper we develop the form method for proving the conditions of Minty-Browder's theorem, as well as for obtaining the research results on the smoothness of the solutions.

1. *Кухарчук Н.М.* О гладкости обобщенных решений нелинейных равномерно эллиптических уравнений. – К., 1986. – 12 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, 03.01.86, №156.
2. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку з нелінійністю типу кулонівського потенціалу // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 6. – С. 151–155.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
9 грудня 2008 року