

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**В. М. Турик**

# **ОСНОВИ ГАЗОДИНАМІКИ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітньою програмою «Автоматизовані та роботизовано механічні системи»  
спеціальності 131 Прикладна механіка

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022

Рецензент *Кравець В. Ю.*, д-р техн. наук, ст. наук. сп., професор,  
кафедра атомних електростанцій та інженерної теплофізики

Відповідальний редактор *Луговський О. Ф.*, д-р. техн. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)  
за поданням Вченої ради Навчально-наукового механіко-машинобудівного інституту  
(протокол № 8 від 30.05.2022 р.)*

Навчальний посібник відповідає дисципліні «Газодинаміка» в обмеженому часовому обсязі вивчення і містить: термодинамічні та акустичні характеристики газодинамічних процесів; закони збереження мас, кількості руху, моменту імпульсу та енергії з урахуванням течії двохфазних і хімічно реагуючих середовищ; вплив стисливості газу на параметри течії; характеристичні рівняння ізоентропійної течії; хвильові процеси малих та сильних збурень; ударні хвилі; прямі та косі стрибки ущільнення; хвильовий опір; геометричне, витратне, теплове і механічне сопла надзвукових швидкостей; одновимірна теорія сопла Лаваля при розрахункових і нерозрахункових режимах; течія в до- та надзвукових дифузорах; одновимірна течія с тертям; взаємодія стрибків ущільнення з примежовим шаром тощо. Увага акцентується на фізичному розумінні газодинамічних явищ, принципах складання і аналізу рівнянь процесів, умовах і методах їх інтегрування та застосування знайдених розв'язків.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 131 Прикладна механіка та буде також корисним студентам спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали.

Реєстр. № НП21/22-657. Обсяг 6,3 авт. арк.  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. М.Турик, 2022  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

## ВСТУП

Бурхливий розвиток авіакосмічної техніки, двигунобудування, компресорних станцій і трубопроводів газових магістралей, роботизованих систем на базі механотроніки в різних галузях промисловості, в енергетиці, в автоматизованих системах керування літальними апаратами, наземним транспортом і судами пред'являють підвищені вимоги до розрахунків і проектування конструкцій машин, силових пневмоприводів, а також пневматичних і електропневматичних пристроїв автоматики. Це обумовлює підсилення фундаментальної підготовки фахівців, які можуть працювати у відповідних напрямках.

Газодинамічні процеси і явища займають центральне місце в робочих процесах в проточних трактах лопатевих апаратів компресорних машин і турбін, пневмогазових систем автоматичного керування авіаційних і ракетних двигунів, пристроїв керування примежовими шарами на крилах і хвостовому оперенні літаків і ракет, їх допоміжного обладнання та інших об'єктів нової техніки.

Предмет навчальної дисципліни «Газодинаміка» в наданому часовому обсязі вивчення (до 36 годин лекцій, лабораторні, практичні заняття) містить: термодинамічні та акустичні характеристики газодинамічних процесів; закони збереження мас, кількості руху, моменту імпульсу та енергії з урахуванням течії двохфазних і хімічно реагуючих середовищ; вплив стисливості газу на параметри течії; характеристичні рівняння ізоентропійної течії; хвильові процеси малих та сильних збурень; ударні хвилі; прямі та косі стрибки ущільнення; хвильовий опір; геометричне, витратне, теплове і механічне сопла надзвукових швидкостей; одновимірна теорія сопла Лавалю при розрахункових і нерозрахункових режимах; течія в до- та надзвукових дифузорах; одновимірна течія с тертям; взаємодія стрибків ущільнення з примежовим шаром тощо.

### 1. ПРЕДМЕТ, БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ГАЗОДИНАМІКИ

Газодинаміка вивчає рух суцільного середовища за умов, коли на властивості руху впливає стисливість, яка найбільш притаманна газам. Однак прояв властивості відносно легко змінювати свою густину залежить, у першу чергу, від швидкості руху середовища, коли стисливість відіграє вже досить істотну роль (у багатьох випадках більшу, ніж в'язкість, вплив якої обмежується тонким примежовим шаром при великих числах Рейнольдса).

Наприклад, при польоті літака зі швидкістю  $v \leq 100 \div 150 \text{ м/с}$  ( $360 \div 540 \text{ км/год}$ ) стисливість легко стисливого повітря виявляє себе слабо і практично не впливає на розподіл тиску по поверхні крила та інші характеристики руху: повітря поводить себе приблизно як нестисливе середовище. Але при збільшенні швидкості руху відносна зміна густини  $\rho$  повітря зростає, стисливість все більше впливає на кількісні, а потім і якісні

характеристики течії поблизу поверхонь літака, а отже, на особливості польоту.

Слово «газ» (від грецького chaos) як позначення середовищ в особливому стані увів голландський дослідник Ян Баптист Ван Хелмонт (1579–1644).

Газодинаміка базується на законах та рівняннях гідромеханіки та термодинаміки (макроскопічний, тобто феноменологічний метод), а для сильно розріджених газів — на молекулярно-кінетичній теорії газів (мікроскопічний метод).

З цієї причини, наприклад, видатний вчений Теодор фон Карман пропонував гідродинаміку стисливої рідини називати «аеротермодинамікою», але в міжнародному науковому середовищі все ж основним залишається термін «газова динаміка», або «газодинаміка».

Оцінку можливості опису високошвидкісних течій газу в межах законів гідромеханіки і термодинаміки застосуванням гіпотези суцільності здійснюють за допомогою числа Кнудсена  $Kn = \ell/\ell_o$ , де  $\ell$  — середня довжина вільного пробігу молекул;  $\ell_o$  — характерний лінійний розмір обтічного тіла (довжина обтічної пластини, хорда крила, діаметр каналу з рухомим газом тощо). При  $Kn \ll 1$  гіпотеза суцільності справджується. Але коли величина  $Kn$  сумірна з 1, а тим паче при  $Kn > 1$ , має місце течія розрідженого газу з огляду на те, що  $\ell \sim 1/\rho$ , а це робить застосування континуального опису середовища та його руху неприйнятним. Звичайно для багатьох течій в задачах газодинаміки маємо  $\ell_o > \ell$ , оскільки, наприклад, для молекули кисню за атмосферних умов  $\ell = 6,5 \cdot 10^{-5}$  мм.

Фундаторами газодинаміки як науки треба уважати видатного німецького математика Г. Ф. Б. Рімана, шотландського фізика і інженера У. Дж. М. Ренкіна, французьких математиків і механіків А. Ж. К. Сен-Венана, П.-А. Гюгонію, Е. Жуге, австрійського фізика Е. Маха, російських вчених-механіків М. В. Маїєвського, С. О. Чаплигіна та інших визначних вчених. Також слід відзначити великий внесок в газодинаміку таких математиків і механіків, як Л. Прандтль, Т. Карман, С. О. Чаплигін, М. О. Лаврент'єв, Л. І. Седов, С. О. Христианович, М. В. Келдиш, А. О. Дородніцин, Я. Б. Зельдович, Г. Г. Чорний та інших.

Найбільш широко застосований в прикладній газодинаміці феноменологічний метод дослідження передбачає просторово-часову неперервність розподілу макроскопічних параметрів газу як суцільного середовища (швидкості  $\vec{v}$ , тиску  $p$ , густини  $\rho$ , температури  $T$  і т. п.) при їх переході від одного малого, але скінченного об'єму до другого, що дає можливість використовувати диференційовані функціональні залежності. Ця передумова порушується лише в задачах про ударні хвилі та стрибки ущільнення, для яких є характерними функціональні залежності з розривами першого роду. Однак треба зауважити, що в теоретичній газодинаміці, як і в загальній механіці рідин і газів при

великих числах Рейнольдса, існують проблеми адекватності розрахункових моделей реальним процесам течії. По-перше, це пов'язано з відсутністю до теперішнього часу доведених теорем існування, єдиності та стійкості розв'язку рівнянь руху газу. По-друге, великі труднощі для теоретичного дослідження газодинамічних процесів складає їх значна нелінійність, що може призводити до різноманітних, а часто й неочікуваних, теоретичних і експериментальних результатів. Тому досить трудомісткі чисельні методи дослідження високошвидкісних течій, а також застосування існуючих програмних пакетів потребують залучення даних фізичних експериментів, які теж пов'язані із значними часовими і матеріальними затратами.

### 1.1. Деякі термодинамічні передумови газодинаміки

Внаслідок змінності густини газу рівняння руху та нерозривності не утворюють замкнену систему і потребують застосування термодинамічних співвідношень.

Однією з основних ідеалізацій класичної термодинаміки є уведення поняття **оборотності** процесів. Традиційно прийнято uważати, що умови оборотності термодинамічного процесу складаються з **рівноважності**, квазістатичності переходу від одного рівноважного процесу до другого та повної відсутності незворотності при перетворенні роботи в теплоту. Термодинамічна система (газ, двохфазна система) досягає рівноважного стану, коли її параметри досягають сталих («рівноважних») значень при збереженні зовнішніх умов незмінними необмежено довго — тоді градієнти параметрів газу в просторі та їх зміни в часі відсутні. Ідеалізація в класичній термодинаміці також передбачає наступне: при повільній зміні зовнішніх умов можна uważати кожний проміжний стан термодинамічної системи рівноважним при відповідно повільній зміні її параметрів протягом процесу. Таким чином, нерівноважну в строгому розумінні систему розглядають у вигляді певної суми «локально рівноважних» підсистем.

Нагадаємо, що за характером взаємодії з оточуючим середовищем термодинамічні системи розрізняють на такі типи: **ізолювані** системи — які не обмінюються ні енергією, ні речовиною з оточуючим середовищем; **закриті** (замкнені) системи — коли існує обмін з оточуючим середовищем лише енергією, але не речовиною; **відкриті** системи — при наявності як енерго-, так і масообміну з оточуючим середовищем. В частинному випадку відкритої системи — так званій проточній системі — газ може входити до цієї системи через одні ділянки контрольної поверхні, що обмежує систему, а через інші — виходити з неї. Щодо відкритих систем існує поняття **стаціонарного стану або руху**, якщо поля температури, тиску, профілі швидкості в потоці зберігаються постійними в часі при наявності загальних градієнтів температур, тисків і швидкостей. З огляду на це,

рівноважний стан системи можна розглядати як граничний стан відносно стаціонарного.

Якщо при зміні зовнішніх умов стани системи змінюються із скінченною швидкістю, тобто не є рівноважними, то і сам процес зміни термодинамічного стану відповідно є **нерівноважним**. Асимптотичний процес спрямування внутрішніх термодинамічних і хімічних параметрів газу або двофазних середовищ, у тому числі при їхньому русі, до рівноважних значень при зміні зовнішніх умов (наприклад, встановлення з плином часу порушеної рівноваги середовища) називають **«релаксацією»** (від лат. *relaxatio* — *послаблення*, наприклад поступове послаблення напруженого стану середовища після припинення дії факторів, що викликали цей стан). За **час релаксації  $\tau_r$**  приймається відрізок часу, за який різниця між вихідною величиною будь-якого параметра стану та його новим рівноважним значенням зменшилась в  $e$  разів при раптовій зміні зовнішніх умов. Якщо  $\tau_r$  є порівняним з характерним часом зміни зовнішніх умов для частинок середовища в потоці, то розрахункова модель має враховувати нерівноважний характер досліджуваного процесу. Яскравим прикладом **нерівноважного і необоротного процесу в газодинаміці** є ударне адіабатне стискання газу в стрибку ущільнення і його рух через стрибок. Цей процес супроводжується незворотною втратою механічної енергії, яка переходить в теплову з відповідним зростанням ентропії на стрибку ущільнення. Існують також інші види ударних хвиль: *стрибки конденсації* і *детонаційні хвилі*. Вони відбуваються з підводом (відводом) теплоти.

## 1.2. Загальні закони збереження

В газодинаміці закони збереження формулюються для довільного рухомого об'єму газу  $V(t)$ , який може деформуватися за часом  $t$ , зберігаючи масу незмінною (натомість, якщо розглядається незмінний об'єм, зафіксований в просторі, то позначатимемо його через  $V$ ). Згідно з методом Лагранжа опису руху рідин, запишемо загальні рівняння фізичних законів збереження, подальші розв'язки яких визначатимуть розподіли параметрів у високошвидкісних потоках.

а) Закон збереження маси:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (1.1)$$

де  $\rho$  — густина середовища,  $кг/м^3$ .

б) Закон збереження кількості руху, зміна якої, оскільки рухомий об'єм газу  $V(t)$  не є ізолюваною термодинамічною системою, відбувається під дією зовнішніх сил:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{R}, \quad (1.2)$$

де  $\vec{v}$  — вектор швидкості,  $m/c$ ;  $\vec{R}$  — головний вектор сил, прикладених до об'єму,  $H$ .

в) Закон збереження повної енергії, зміна якої у загальному випадку відбувається як за рахунок роботи  $A$  зовнішніх сил, так і за рахунок підведення теплоти  $Q'$ :

$$d \left( \int_{V(t)} \rho E dV \right) = A + Q',$$

де  $E = u + \frac{v^2}{2}$  — повна питома (зведена до одиниці маси газу) енергія,  $Дж/кг$ ;  $u$  — питома внутрішня енергія газу.

Зміна повної енергії за одиницю часу

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV = N + Q, \quad (1.3)$$

де  $N = \frac{A}{t}$  — потужність зовнішніх сил;  $Q = \frac{Q'}{t}$  — тепловий потік,  $Вт$ .

г) У загальній механіці рідин і газів розглядається також **закон моменту кількості руху**, який в інтегральній формі записується таким чином:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{L} dV = \vec{M}_0 + \vec{M}_S + \vec{M}_0^{en} + \vec{M}_S^{en},$$

де  $\vec{L} = \vec{L}_{orb} + \vec{L}_{en}$  — повний момент кількості руху маси газу, що складається з **орбітального** моменту відносно початку координат  $\vec{L}_{orb} = \int_{V(t)} [\vec{r}, \rho \vec{v}] dV$ , пов'язаного з рухом частинки як цілого, та **внутрішнього моменту**

кількості руху за рахунок обертань молекул  $\vec{L}_{en} = \int_{V(t)} \rho \vec{l}_m dV$ , де  $\vec{l}_m$  — внутрішній момент кількості руху одиниці

маси газу;  $\vec{M}_0 = \int_V [\vec{r}, \rho \vec{F}] dV$  — головний орбітальний момент масових сил,  $Н \cdot м$ ;  $\vec{M}_S = \int_S [\vec{r}, \vec{p}_n] dS$  —

головний орбітальний момент поверхневих сил;  $\vec{M}_0^{en} = \int_V \rho \vec{\Pi} dV$  — внутрішній момент від об'ємно-розподілених

джерел моменту, де  $\vec{\Pi}$  — внутрішній момент, віднесений до одиниці маси газу;  $\vec{M}_S^{en} = \int_S \vec{\pi}_n dS$  — внутрішній

момент, що проникає через поверхню  $S$ , де  $\vec{\pi}_n$  — щільність проникнення внутрішнього моменту.

За звичайних умов через хаотичність зіткнень молекул і атомів між собою, що призводить до їх обертання, сума внутрішніх моментів кількості руху дорівнює нулю. Якщо ізотропність розподілу цих моментів порушується, наприклад, при дії потужних магнітних або інших полів, сумарний внутрішній момент кількості руху відмінний від нуля [Валландер С.В. Лекції по гідроаеромеханіці. – Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1978. – 296 с.]. Даний курс лекцій не передбачає вивчення теорії турбомашин, тому, враховуючи його мету та обсяг, цей закон далі розглядатися не буде.

Для замикання системи рівнянь (1.1) – (1.3), яка узагальнено містить чотири невідомі змінні ( $\rho, \vec{v}, E, Q$ ), додамо рівняння стану, наприклад, рівняння Клапейрона для термічно ідеального газу:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (1.4)$$

де  $R = \frac{R_M}{M_2}$  — газова стала, Дж/(кг·К);  $R_M = 8,314$  Дж/(моль·К) — універсальна газова

стала;  $M_2$  — молярна маса газу, кг/моль;  $p$  — абсолютний термодинамічний тиск, що відповідає рівновазі газу, Па;  $T$  — абсолютна термодинамічна температура, К (як міра кінетичної енергії поступального руху молекул газу, що дорівнює внутрішній енергії, оскільки у термічно ідеального газу відсутня потенціальна енергія взаємодії молекул).

До прикладу, наближено: для повітря  $M = 0,029$  кг/моль; для кисню  $M = 0,032$  кг/моль; для азоту  $M = 0,028$  кг/моль; для вуглекислого газу  $M = 0,044$  кг/моль.

### 1.3. Диференціювання інтеграла по рухомому змінному об'єму

Перехід до опису руху газу за методом Ейлера можна здійснити, взявши похідну за часом від інтеграла деякої функції  $f(x, y, z, t)$  по виділеному об'єму, який залежить від часу (рис. 1, де  $V$  — початковий,  $V'$  — результуючий об'єм). З огляду на співвідношення (1.1) – (1.3), підінтегральна функція може приймати вигляд  $f(x, y, z, t) = \rho, \rho\bar{v}, \rho E$ .

Будемо вважати, що похідні та підінтегральні функції неперервні, що дає можливість міняти місцями оператори диференціювання та інтегрування, а також переходити від інтегральної форми законів збереження до диференціальної у змінних Ейлера.

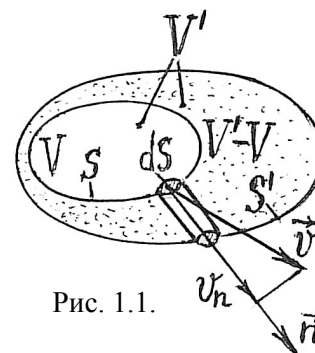


Рис. 1.1.

Фіксуючи увагу на лівих частинах рівнянь (1.1) – (1.3), знайдемо похідну

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x, y, z, t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V'} f(x, y, z, t + \Delta t) dV - \int_V f(x, y, z, t) dV}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V f(x, y, z, t + \Delta t) dV + \int_{V'-V} f(x, y, z, t + \Delta t) dV - \int_V f(x, y, z, t) dV}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V [f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)] dV + \int_{V'-V} f(x, y, z, t + \Delta t) dV}{\Delta t}. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

Розглянемо границю співвідношення, щодо містить перший інтеграл:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V [f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)] dV}{\Delta t} = \int_V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t} dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV.$$

Щодо границі співвідношення з другим інтегралом, то зауважимо, що різниця об'ємів  $V' - V$ , яка утворилася за час  $\Delta t$  в результаті зміни виділеного початкового об'єму, з точністю до нескінченно малих величин дорівнює сумі об'ємів  $dV = v_n \Delta t dS$  елементарних циліндрів, що заповнюють різницю об'ємів  $V' - V$  (див. рис.1).

При  $\Delta t \rightarrow 0$  площа поверхні  $S'$ , яка обмежує об'єм  $V'$ , мало відрізняється від площі поверхні  $S$  (порівняно із зміною об'єму), тому  $f(x, y, z, t + \Delta t) \rightarrow f(x, y, z, t)$ . Після граничного переходу маємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V'-V} f(x, y, z, t + \Delta t) dV}{\Delta t} = \int_{V'-V} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, t + \Delta t) v_n \Delta t dS}{\Delta t} = \oint_S f(x, y, z, t) v_n dS.$$

Підстановка отриманих виразів до формули (1.5) дає

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_S f v_n dS}. \quad (1.6)$$

Перший доданок в рівнянні (1.6) характеризує інтегральну швидкість зміни функції  $f$  для нерухомого та незмінного об'єму (**локальна складова** повної похідної від досліджуваного інтеграла). Другий доданок відображає швидкість зміни функції  $f$  у тій частині об'єму, яка під дією поля швидкості  $\vec{v}$  змінює положення в просторі за нескінченно малий час  $dt$  (**конвективна складова**, обумовлена переносом певного параметра — густини, кількості руху, енергії — через поверхню виділеного об'єму).

Застосуємо формулу Гаусса-Остроградського щодо конвективної складової повної похідної від інтеграла (1.6):

$$\oint_S f v_n dS = \int_S f \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}(f \vec{v}) dV. \text{ Тоді вираз (1.6) набуває вигляду}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{v}) \right] dV}. \quad (1.7)$$

Якщо врахувати, що  $\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div} \vec{v} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$ , то вираз (1.7) виглядатиме як

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_V \left[ \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \vec{v} \right] dV}. \quad (1.8)$$

Вирази (1.6) – (1.8) дозволяють записувати інтегральні рівняння законів збереження для нерухомого об'єму замість формулювання цих законів у вигляді (1.1) – (1.3) для змінного у часі рухомого об'єму  $V(t)$ .

До прикладу, за допомогою (1.6) можна змінити формулювання закону збереження маси:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho v_n dS = 0, \quad \text{або} \quad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho v_n dS. \quad (1.9)$$

Тобто, згідно з виразом (1.9), зміна маси газу у нерухомому (фіксованому в просторі за методом Ейлера) об'ємі здійснюється за рахунок потоку маси через обмежуючу його поверхню.

## 2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ГАЗОДИНАМІКИ

### 2.1. Рівняння нерозривності

Відповідно до підходу Лагранжа, закон збереження маси рухомого газу виглядає як

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0.$$

Ця похідна, з урахуванням наведених в розділі 1 співвідношень (1.1) і (1.7), зводиться до

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0,$$

де, нагадуємо, замість  $V(t)$  з'являється вже незмінний і нерухомий об'єм  $V$ .

Позначимо підінтегральну функцію через  $A(\vec{r}, t)$ . Тоді наведене вище рівняння однаково стверджується при зміні довільно обраного об'єму  $V$  на малий об'єм  $V_\varepsilon$ :

$$\int_{V_\varepsilon} A(\vec{r}, t) dV = 0. \quad (2.1)$$

Відповідно, середнє за об'ємом  $V_\varepsilon$  значення підінтегральної функції  $A(\vec{r}, t)$  є

$$\overline{A(\vec{r}, t)} = \frac{1}{V_\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} A(\vec{r}, t) dV = 0,$$

звідки випливає, що  $\overline{A(\vec{r}, t)} \cdot V_\varepsilon = 0$ , або  $\overline{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right]} \cdot V_\varepsilon = 0$ . Здійснимо граничний перехід при  $V_\varepsilon \rightarrow 0$ ; тоді в межах нескінченно малого об'єму позначення «середнього»

можна прибрати і отримати відоме диференціальне рівняння нерозривності для загального випадку нестационарної стисливої течії (звичайно, за відсутності просторово-розподілених джерел маси):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}, \quad (2.2)$$

або з урахуванням  $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.2')$$

Для стаціонарного руху стисливого газу

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Для будь-якого руху нестисливого середовища, зокрема газу при відносно невеликих швидкостях (як буде пізніше показано, при швидкостях, менших 20% швидкості звуку в газі) рівняння нерозривності набуває вигляду  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Подібні векторні поля швидкості називають вільними від джерел або **соленоїдними**, тобто трубчастими.

## 2.2. Рівняння кількості руху

Закон збереження кількості руху згідно з методом Лагранжа має вигляд

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{R}, \quad (2.3)$$

де  $\rho \vec{v}$  — щільність потоку маси (назва зрозуміла з виразу  $\frac{\rho \vec{v} \cdot \vec{S}}{S} = \rho v_n$ , де

$\rho \vec{v} \cdot \vec{S} = \rho |\vec{v}| |\vec{S}| \cos(\nu, n) = \rho v_n S$  — потік маси, або масова витрата;  $v_n$  — проекція

швидкості, нормальна до площинки  $S$ ).

Головний вектор сил, прикладених до рухомого і змінного за часом об'єму,  $\vec{R} = \vec{R}_m + \vec{R}_s$ ,

де  $\vec{R}_m = \int_V \rho \vec{F} dV$  — головний вектор масових сил,  $\vec{F}$  — одинична масова сила (напруження

масової сили),  $H/kg$ ;  $\vec{R}_s = \oint_s \vec{p}_n dS$  — головний вектор поверхневих сил як результат

взаємодії між різними областями газу,  $\vec{p}_n$  — вектор локального напруження поверхневої сили.

Таким чином, згідно з рівняннями (1.2), (1.6) і (1.7) розділу 1, маємо запис закону кількості руху у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \oint_S (\rho \vec{v}) v_n dS = \int_V \left[ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dV = \vec{R}_m + \vec{R}_s = \vec{R}, \quad (2.4)$$

де  $\vec{v} \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix}$  — діадний добуток двох векторів («діада», тензор 2-го рангу).

Якщо довести, що інтеграл по постійному об'єму  $V$  в правій частині рівняння (2.4) є силою інерції, то це означатиме, що рівняння в цілому виражатиме відомий з класичної механіки **принцип Д'Аламбера** (у змінних Ейлера), який справджується у будь-який момент руху газу. Тоді автоматично буде зняте і питання можливості залишати в інтегралах виразів для масових  $\vec{R}_m$  і поверхневих сил  $\vec{R}_s$  початкові і незмінні в часі величини об'єму  $V = \text{idem}$  та обмежуючої його поверхні площею  $S = \text{idem}$ , за якими здійснюється інтегрування.

Для початку розглянемо перенос кількості руху вздовж осі  $x$ , який здійснюється зі швидкістю  $v_x$ . Тоді підінтегральна функція виразу (2.4) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \text{div}(v_x \rho \vec{v}) &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \text{div}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \text{grad} v_x = v_x \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{v} \right) + \\ &+ \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} v_x \right) = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho \frac{dv_x}{dt}. \end{aligned}$$

При виведенні останнього виразу ми використали відому у векторному аналізі формулу:  $\text{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} \varphi$ , де  $\varphi$  — скалярна функція. Тут  $\varphi = v_x$ ,  $\vec{a} = \rho \vec{v}$ .

Остаточно, з урахуванням тривимірності переносу імпульсу із швидкостями  $v_x, v_y, v_z$ , маємо систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \text{div}(v_x \rho \vec{v}) &= \rho \frac{dv_x}{dt}; \\ \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \text{div}(v_y \rho \vec{v}) &= \rho \frac{dv_y}{dt}; \\ \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \text{div}(v_z \rho \vec{v}) &= \rho \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned}$$

Переходячи до векторного зображення підінтегрального виразу в законі кількості руху (2.4), отримаємо

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_V \left[ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dV = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \vec{R}, \quad (2.5)$$

що фактично відображає **теорему імпульсів у змінних Ейлера**, причому останній інтеграл по об'єму  $V = \text{idem}$  виражає даламберову силу інерції (з протилежним знаком), а

права частина — головний вектор всіх сил, визначений, як видно, інтегруванням по постійним об'єму і обмежуючій його поверхні, що й треба було довести.

Як видно з рівнянь (2.3) – (2.5), закон кількості руху справджується незалежно від того, по якому об'єму (рухомому і змінному в часі лагранжевому, чи фіксованому в просторі ейлеревому) здійснюється інтегрування.

Отже, на підставі рівняння (2.5) згідно з принципом Д'Аламбера у будь-який момент руху газу можна записати

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \oint_S \vec{p}_n dS. \quad (2.6)$$

Ми отримали інтегральну форму **рівняння динаміки суцільного середовища**.

З'ясуємо більш докладно фізичний зміст вектора напружень внутрішніх поверхневих сил  $\vec{p}_n$ , що діють в газі. Покажемо, що він відображає напружений стан середовища в точці, що передбачає просторове наближення до цієї точки, тобто «об'ємним» шляхом.

Для цього виділимо в рухомому газі елементарний об'єм  $\Delta V$ , наприклад, у формі тетраедра (рис. 2.1), до грані  $ABC$  якого площею  $\Delta S$  із зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  прикладений вектор напружень  $\vec{p}_n$ . Зауважимо, що зазвичай в механіці рідини та газу прийнято вважати площинку за вектор  $\Delta \vec{S}$ , додатний напрямком якого збігається із **зовнішньою нормаллю**  $\vec{n}$  до площинки, а модуль цього вектора дорівнює площі її поверхні:  $|\Delta \vec{S}| \equiv \Delta S$ . Прив'яжемо цей тетраедр до декартової системи координат  $Oxyz$

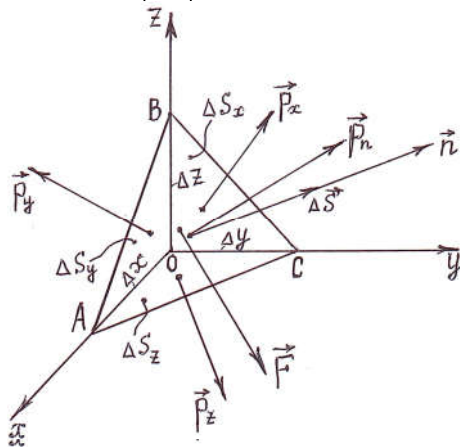


Рис. 2.1.

таким чином, щоб три взаємно перпендикулярні грані тетраедра явили собою проекції  $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$  площинки  $\Delta \vec{S}$  на три координатні площини  $yOz, xOz$  і  $xOy$  відповідно.

Примічаємо, що осі координат  $Ox, Oy$  і  $Oz$  можна розглядати як **внутрішні нормалі** трьох взаємно перпендикулярних граней  $BOC, AOB$  і  $AOC$ , ортами яких є, відповідно,  $-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}$ . Таким чином, ці грані є від'ємними площинками (на відміну від «головної» в нашому розгляді грані  $ABC$ , ортом зовнішньої нормалі якої слугує додатний орт  $\vec{n}^0$ ). До граней тетраедра прикладені поверхневі сили, замість яких на рисунку зображені відповідні їм напруження як сили, віднесені до одиниці площ  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ , спрямовані довільно до граней (що відповідає практично незмінному розподілу напружень за нескінченно малий відрізок часу руху елементарного об'єму). Позначення напружень відповідають напрямленням нормалей до

граней. До центра ваги тетраедра масою  $\Delta m$ , який рухається з прискоренням  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , прикладений вектор напруження масових сил  $\vec{F}$ .

Застосуємо теорему імпульсів для виділеного елементарного об'єму і отримаємо рівняння руху його у векторній формі:

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta \vec{R}_m + \Delta \vec{R}_s, \quad (2.7)$$

де  $\Delta m = \frac{1}{3} \frac{\rho}{2} \Delta x \Delta y \Delta z$ ;  $\Delta \vec{R}_m = \vec{F} \frac{\rho}{6} \Delta x \Delta y \Delta z$  — елементарна масова сила;

$\Delta \vec{R}_s = \vec{p}_n \Delta S - \vec{p}_x \Delta S_x - \vec{p}_y \Delta S_y - \vec{p}_z \Delta S_z$  — результуюча елементарна поверхнева сила, знаки мінус перед складовими якої показують, що зовнішні нормалі відповідних площадок спрямовані протилежно осям координат.

Таким чином, рівняння (2.7) набуває вигляду

$$\frac{\rho}{6} \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} \right) = \vec{p}_n \Delta S - \vec{p}_x \Delta S_x - \vec{p}_y \Delta S_y - \vec{p}_z \Delta S_z.$$

Поділимо обидві частини рівняння на  $\Delta S$  і врахуємо відомі з аналітичної геометрії співвідношення  $\Delta S_x / \Delta S = \cos(n, x)$ ,  $\Delta S_y / \Delta S = \cos(n, y)$ ,  $\Delta S_z / \Delta S = \cos(n, z)$ :

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta S} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} \right) = \vec{p}_n - \Delta \vec{p}_x \cos(n, x) - \Delta \vec{p}_y \cos(n, y) - \Delta \vec{p}_z \cos(n, z).$$

Спрямуємо об'єм тетраедра до нуля, стягуючи його до точки початку координат. Оскільки при граничному переході об'єм зменшується набагато швидше, ніж площа поверхні, то  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta S} = 0$ . В результаті отримуємо зв'язок між напруженнями в точці

$$\boxed{\vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z)}. \quad (2.8)$$

Формула напружень (2.8) відома як **формула Коші**.

Вектор  $\vec{p}_n$  не є звичайним вектором, оскільки, як видно, його величина залежить від орієнтації площинки дії, яка виділена в рухомій рідині, а також, в загальному випадку, від радіуса-вектора точки прикладання напруження і від часу:  $\vec{p}_n = \vec{p}_n(\vec{n}^0, \vec{r}, t)$ . Фізична величина, яка в даній точці характеризується вектором  $\vec{p}_n$ , що приймає безліч значень в залежності від орієнтації площинки дії, має назву **тензором напружень**.

Запишемо проекції вектора  $\vec{p}_n$  на осі координат:

$$p_{nx} = p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z),$$

$$p_{ny} = p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z),$$

$$p_{nz} = p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z).$$

Таким чином, напружений стан рухомого в'язкого середовища визначається дев'ятьма складовими напружень  $p_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) в кожній точці. Випишемо їх у вигляді матриці:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix}.$$

Ми отримали так званий **тензор напружень другого рангу** в точці середовища.

**Тензор** – величина, яку на будь-якому базисі векторного простору можна представити у вигляді системи чисел. Тензором  $k$ -го рангу в тривимірному просторі називають величину, яка характеризується  $3^k$  числами. Наприклад, при  $k=0$  маємо  $3^0=1$ , тобто тензор нульового рангу — скалярну величину (тиск, температура, ентальпія, ...); при  $k=1$  маємо  $3^1=3$ , тобто тензор першого рангу — будь-який вектор, що має три складових (швидкість, прискорення, градієнт температур, тепловий потік, ...); при  $k=2$  маємо  $3^2=9$ , тобто тензор другого рангу, що визначається дев'ятьма складовими (тензор напружень, тензор швидкостей деформацій, тензор турбулентних напружень, ...). Важлива особливість тензорів полягає не тільки і не стільки в компактності рівнянь з їх застосуванням, а головне — в **інваріантності** (незмінності) таких рівнянь при заміні системи координат на іншу.

Перший індекс компонент тензора напружень відповідає площинці дії напруження, а другий — осі, на яку воно проектується. На головній діагоналі матриці розміщені **нормальні напруження**  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ , решта скалярних величин  $p_{yx}$ ,  $p_{zx}$ , ... , тобто  $p_{ij}$  при  $i \neq j$ , — **дотичні напруження**, що діють у відповідних площадках.

Дію напружень в рухомому середовищі можна проілюструвати на прикладі граней малого кубічного елемента, побудованого від точки  $O$  (рис. 2.2).

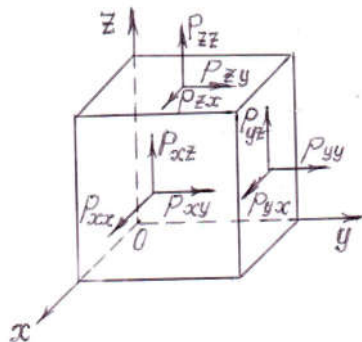


Рис. 2.2.

Прийнято, що додатні напрямки складових дотичних напружень є такими, що збігаються з додатними напрямками осей координат, якщо розтягувальні нормальні напруження на тій самій грані збігаються з напрямком відповідної осі.

Якщо ж розтягувальні напруження мають протилежний напрямок (як на гранях, паралельних зазначеним вище, бо, кожна грань куба має протилежну), то додатні напрямки

складових дотичних напружень мають бути змінені на протилежні.

На підставі теореми моментів відносно початку координат, взятих для напружень, що діють на грані елементарного куба, можна показати, що для ізотропних рідин на

кожній грані малого куба має місце **властивість взаємності дотичних напружень**:

$p_{xy} = p_{yx}$ ,  $p_{xz} = p_{zx}$ ,  $p_{yz} = p_{zy}$ , тобто  $p_{ij} = p_{ji}$ , тобто тензор  $\mathbf{P}$  є симетричним.

Кожна з граней куба має протилежну з розподілом напружень та їх напрямків у відповідності до наведеного вище правила. Тому при стягуванні рідкого елемента до точки  $O$  сукупність напружень в даній точці, як і у випадку тетраедра, може бути представлена тензором напружень  $\mathbf{P}$ .

Одна з основних властивостей тензора напруження полягає в тому, що при відсутності дотичних напружень (абсолютна або відносна рівновага, рух ідеальної рідини)  $p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$  діють тільки нормальні напруження, які проявляють себе через тиск:  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ , де  $p$  — тиск. При цьому тензор напружень стає сферичним:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Знак "-" зумовлений тим, що тиск спрямований за внутрішніми нормальми проти прийнятих додатних напрямків (вздовж зовнішніх нормалей) нормальних напружень.

Якщо підставити вектор напруження  $\vec{p}_n$  поверхневих сил за формулою (2.8) під поверхневий інтеграл в рівнянні (2.6), то, застосувавши теорему Гаусса-Остроградського, цей інтеграл набуває вигляду

$$\oint_S \vec{p}_n dS = \oint_S [\vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z)] dS = \int_V \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV,$$

де вираз під знаком інтеграла є дивергенцію тензора напружень  $\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = \text{Div } \mathbf{P}$ .

Підстановка останнього інтеграла в рівняння (2.6) дає

$$\int_V \left( \rho \frac{d\bar{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \text{Div} \mathbf{P} \right) dV = 0.$$

Цей інтеграл є справедливим для будь-якого об'єму, зокрема для малого об'єму  $V_\varepsilon$ .

Позначивши вираз в дужках через  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , маємо  $\int_{V_\varepsilon} \vec{B}(\vec{r}, t) dV = 0$ . Середня за об'ємом  $V_\varepsilon$

величина підінтегральної функції за теоремою «про середнє» є  $\bar{\vec{B}} = \frac{1}{V_\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} \vec{B}(\vec{r}, t) dV$ , звідки

$\bar{\vec{B}} \cdot V_\varepsilon = \left( \rho \frac{d\bar{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \text{Div} \mathbf{P} \right) \cdot V_\varepsilon = 0$ . Поділимо вираз на об'єм при граничному переході

$V_\varepsilon \rightarrow 0$ , згідно з яким можна нехтувати зміною функції  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  від точки до точки нескінченно малого об'єму, що дає право прибрати ризику усереднення над виразом в дужках. Після граничного переходу остаточно отримаємо **основне диференціальне рівняння динаміки в'язкої рідини (газу) «в напруженнях»:**

$$\boxed{\vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt}}. \quad (2.9)$$

Отримане рівняння відображає відомий з механіки **принцип Д'Аламбера**: в кожний момент руху будь-якої матеріальної системи всі сили, що прикладені до неї, включаючи й даламберові сили інерції, взаємно зрівноважуються. Абсолютна величина одиночної даламберової сили інерції (зведеної до одиниці маси, як і решта сил — масова і поверхнева в лівій частині рівняння) міститься в правій частині рівняння.

Запишемо це рівняння в координатній формі:

$$\begin{cases} F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \\ F_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{dv_y}{dt}, \\ F_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) = \frac{dv_z}{dt}. \end{cases} \quad (2.9')$$

Якщо врахувати, що проекції швидкості є складними функціями часу  $t$ :  $v_x = v_x[x(t), y(t), z(t), t]$ ,  $v_y = v_y[x(t), y(t), z(t), t]$ ,  $v_z = v_z[x(t), y(t), z(t), t]$ , то проекції прискорення рідкої частинки середовища являють собою **субстанціональні** (за Стоксом) похідні

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

або у векторній формі

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v},$$

де  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  — символічний вектор-оператор Гамільтона;  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  характеризує

локальне прискорення (локальну одиночну силу інерції), що дорівнює нулю для

стаціонарних рухів;  $(\vec{v}, \nabla)\vec{v}$  характеризує конвективне (переносне) прискорення (конвективну одиничну силу інерції), що існує завжди, крім випадку одновимірного стаціонарного і стабілізованого руху середовища.

Як видно, система з трьох рівнянь (2.9') є незамкненою (містить десять невідомих: шість компонент напружень, три проекції швидкості і густину; масові сили зазвичай відомі в конкретних задачах). Додавання до неї рівнянь нерозривності  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$  і стану, наприклад, рівняння Клапейрона для термічно ідеального газу  $\frac{p}{\rho} = RT$ , не знімає загальну **проблему замикання**, яка на сьогодні вирішується прийняттям певних гіпотез і штучних напівемпіричних моделей напружень в рідині або газі.

Навіть якби вдалося (гіпотетично) зазначену систему рівнянь замкнути, то залишилася б проблема завдання початкових і граничних умов, особливо щодо складових тензора напружень, не кажучи вже про очевидну невизначеність місцевих миттєвих величин цих складових, а також густини і проекцій векторів швидкості при турбулентному режимі.

### 2.3. Рівняння енергії та його різновиди

Звернемося до **закону збереження енергії** (1.3) розділу 1. Застосувавши перехід до змінних Ейлера згідно з (1.7) при  $f = \rho E = \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right)$ , маємо:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV = \int_V \left[ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \vec{v}) \right] dV = \int_V \rho \frac{dE}{dt} dV = N + Q. \quad (2.10)$$

Потужність зовнішніх сил враховує поверхневі і масові сили:

$$N = \oint_S \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS + \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV. \quad (2.11)$$

Тепловий потік, підведений до газу дорівнює

$$Q = -\oint_S \vec{q} \cdot \vec{n}^o dS + \int_V \rho q_v dV, \quad (2.12)$$

де  $\vec{q}$  – щільність теплового потоку, підведеного до газу ззовні теплопровідністю, конвекцією і випромінюванням,  $Bm/m^2$ ;  $\vec{n}^o$  – орт зовнішньої нормалі до площинки  $dS$  (протилежного напрямку відносно  $\vec{q}$ , але однакового напрямку з градієнтом температури  $\text{grad } T$ );  $q_v$  – питомий тепловий потік від внутрішніх джерел теплоти,  $Bm/kg$ .

Звернемо увагу на скалярний добуток  $\vec{p}_n \cdot \vec{v}$  під першим інтегралом виразу (2.11). З векторного і тензорного аналізу відомо, що перший множник  $\vec{p}_n$  можна навести у вигляді

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z) = n_x^o \vec{p}_x + n_y^o \vec{p}_y + n_z^o \vec{p}_z = \vec{n}^o \cdot \mathbf{P},$$

тобто маємо так званий скалярний добуток тензора  $\mathbf{P}$  на вектор зліва. Тоді перший інтеграл виразу (2.11), з урахуванням асоціативності скалярних добутків, набуває вигляду:

$$\oint_S \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS = \oint_S (\vec{n}^o \cdot \mathbf{P}) \cdot \vec{v} dS = \oint_S \vec{n}^o \cdot (\mathbf{P} \cdot \vec{v}) dS. \quad (2.13)$$

Введення (2.13) під перший інтеграл виразу (2.11), перехід від поверхневих інтегралів до об'ємних згідно з теоремою Гаусса-Остроградського у виразах (2.11), (2.12) і підстановка цих виразів до рівняння (2.10) приводить до **рівняння енергії в інтегральній формі**:

$$\int_V \rho \frac{d}{dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \int_V \text{div}(\mathbf{P} \cdot \vec{v}) dV - \int_V \text{div} \vec{q} dV + \int_V \rho q_v dV. \quad (2.14)$$

Оскільки об'єм  $V$  є довільним, то маємо **повне диференціальне рівняння енергії**:

$$\boxed{\rho \frac{d}{dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \text{div}(\mathbf{P} \cdot \vec{v}) - \text{div} \vec{q} + \rho q_v}. \quad (2.15)$$

Другий член в правій стороні рівняння (2.15) містить скалярний добуток тензора  $\mathbf{P}$  на вектор  $\vec{v}$  справа:

$$\mathbf{P} \cdot \vec{v} = \vec{i} (\vec{p}_x \cdot \vec{v}) + \vec{j} (\vec{p}_y \cdot \vec{v}) + \vec{k} (\vec{p}_z \cdot \vec{v}). \quad (2.16)$$

**У випадку нев'язкого і нетеплопровідного газу**  $\vec{p}_x = -\vec{i}p$ ,  $\vec{p}_y = -\vec{j}p$ ,  $\vec{p}_z = -\vec{k}p$ ;

$\mathbf{P} \cdot \vec{v} = -\vec{i}p(\vec{i} \cdot \vec{v}) - \vec{j}p(\vec{j} \cdot \vec{v}) - \vec{k}p(\vec{k} \cdot \vec{v}) = -p(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z) = -p\vec{v}$ ;  $\vec{q} = 0$ ,  $q_v = 0$ ; тоді (2.15) набирає вигляду

$$\boxed{\rho \frac{d}{dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \text{div}(p\vec{v})}. \quad (2.17)$$

В цьому рівнянні  $\text{div}(p\vec{v}) = p \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad} p$ , де доданок  $p \text{div} \vec{v}$  характеризує частину роботи сил тиску за одиницю часу (що змінює внутрішню енергію), пов'язаної з деформацією об'єму  $V$ , оскільки  $\text{div} \vec{v} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ; доданок  $\vec{v} \cdot \text{grad} p$  пов'язаний з переміщенням об'єму під дією  $\text{grad} p$ , що впливає на зміну кінетичної енергії газу. На зміну кінетичної енергії також частково впливає робота масових сил  $\rho \vec{F} \cdot \vec{v}$ .

При підстановці (2.16) в (2.15) для загального випадку **в'язкої течії з теплообміном**

$$\rho \frac{du}{dt} + \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \left[ \frac{\partial(\vec{p}_x \cdot \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{p}_y \cdot \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{p}_z \cdot \vec{v})}{\partial z} \right] - \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \text{div} \vec{q} - \rho q_v = 0.$$

Після диференціювання і перегрупування членів останнє рівняння зводиться до такого:

$$\left[ \rho \frac{du}{dt} - \left( \vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + \text{div} \vec{q} - \rho q_v \right] + \left[ \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \cdot \vec{v} \right) \right] = 0. \quad (2.18)$$

Вираз в останніх прямокутних дужках дорівнює нулю, оскільки можна помітити, враховуючи властивість дистрибутивності скалярного добутку векторів, що цей вираз являє собою суму всіх членів рівняння (2.6), перенесених вліво і помножених скалярно на вектор  $\vec{v}$ . Тоді від рівняння (2.18) залишається тільки перша його половина:

$$\rho \frac{du}{dt} - \left( \vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + \text{div} \vec{q} - \rho q_v = 0. \quad (2.19)$$

Розкладанням скалярних добутків в дужках, підстановкою в отримане рівняння проєкцій напружень відповідно до узагальненої гіпотези Ньютона та зведенням подібних членів з урахуванням того, що  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \neq 0$  для стисливого газу, після перетворень можна остаточно отримати **диференціальне рівняння термодинамічного закону збереження енергії** (в розумінні **незнищеності** енергії, оскільки збереження, або постійність, енергії має місце тільки при тепловій ізоляції системи та відсутності дії зовнішніх сил):

$$\boxed{\rho \frac{du}{dt} = -p \text{div} \vec{v} + \mu D - \text{div} \vec{q} + \rho q_v}, \quad (2.20)$$

де вираз  $\mu D = -\frac{2}{3} \mu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + 2\mu (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 4\mu (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zy}^2)$  характеризує роботу сил в'язкості (сил тертя) за одиницю часу, що переходить в теплоту і необоротно розсіюється («дисипує» – від лат. *dissipare* = розсіювати) в об'ємі газу;  $D$  – так звана **дисипативна функція**.

Диференціальне рівняння (2.20) також називають **рівнянням притоку теплоти**. Іноді це рівняння записують відносно питомої ентропії  $s$ . Для цього використовують об'єднане рівняння Першого та Другого законів термодинаміки:

$$T ds = du + p d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (2.21)$$

де  $T$  – термодинамічна температура,  $K$ ;  $s$  – питома ентропія,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ .

Поділимо обидві частини рівняння на  $dt$ :  $T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{du}{dt} - p \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$ ,

що після заміни  $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}$  на підставі рівняння нерозривності дає

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} - \frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \vec{v}.$$

Підставивши отриманий вираз до лівої частини рівняння (2.20), остаточно отримаємо

$$\boxed{\rho T \frac{ds}{dt} = \mu D - \operatorname{div} \vec{q} + \rho q_v}. \quad (2.22)$$

Якщо теплота із зовнішнього середовища підводиться лише теплопровідністю та наявні внутрішні джерела теплоти, то, враховуючи закон Біо-Фур'є  $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ , маємо:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \mu D + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho q_v. \quad (2.23)$$

Диференціальні рівняння (2.22) та (2.23) описують процеси, що супроводжуються зростанням ентропії внаслідок підведення або відведення теплоти, зокрема через теплоту тертя, що враховує доданок  $\mu D$ .

Для нев'язкого та нетеплопровідного газу з рівняння (2.23) безпосередньо випливає умова його ізоентропійного руху  $\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0$ .

### 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ХІМІЧНО РЕАГУЮЧИХ ГАЗОВИХ СУМІШЕЙ

#### 3.1. Рівняння збереження $i$ -ї компоненти

1) Розглядаємо  $i$ -ту компоненту в багатоконпонентній хімічно реагуючій газовій суміші. Використаємо перехід від лагранжевого підходу до підходу Ейлера, тобто формулюючи закон збереження маси шляхом переходу від рухомого та змінного об'єму  $V(t)$  в потоці газу до деякого фіксованого відносно нерухомої системи координат об'єму  $V$ . Зміна маси  $i$ -ї компоненти в об'ємі може відбуватися за рахунок втікання (витікання) цієї компоненти через поверхню  $S$ , що обмежує об'єм, а також за рахунок хімічних реакцій всередині об'єму. Запишемо закон збереження повної маси  $i$ -ї компоненти

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho_i dV = \int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV + \oint_S \rho_i \vec{v}_i \cdot d\vec{S} = \int_V \dot{m}_i dV,$$

де  $\rho_i, \vec{v}_i$  – густина та швидкість  $i$ -ї компоненти, що переноситься через поверхню;  $\dot{m}_i$  – маса  $i$ -ї компоненти, яка утворюється за одиницю часу в одиничному об'ємі у всіх хімічних реакціях. Застосування відповідного інтегралу по фіксованому об'єму  $V$  у правій стороні рівності можна пояснити за аналогією з аналізом загального випадку похідної за

часом від інтегралу  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x, y, z, t) dV$  в «об'ємній» частині граничного переходу (див. розділ 1).

Таким чином, рівняння балансу повної маси  $i$ -ї компоненти в об'ємі  $V$  становитиме

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \oint_S \rho_i \vec{v}_i \cdot d\vec{S} + \int_V \dot{m}_i dV . \quad (3.1)$$

Перший доданок в правій частині рівняння має знак мінус, оскільки при інтегруванні за поверхнею  $S$  при визначенні потоку маси використано зовнішню нормаль, і таким чином забезпечена відповідність знаків перших двох інтегралів рівняння (3.1).

Застосувавши формулу Гаусса–Остроградського щодо поверхневого інтегралу, отримаємо

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho_i \vec{v}_i) dV + \int_V \dot{m}_i dV . \quad (3.2)$$

Оскільки об'єм  $V$  вибраний довільним, то його можна вважати малим і в неперервному полі отримати

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{v}_i) = \dot{m}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3)$$

Підсумуємо (3.3) за всіма  $i$ , уводячи середньомасову швидкість суміші  $\rho \vec{v} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$  та враховуючи, що сума  $\sum_{i=1}^N \dot{m}_i = 0$ , оскільки у всіх хімічних реакціях повна маса речовини не змінюється. Остаточно отримаємо вже відомі нам рівняння нерозривності у змінних Ейлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{або} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.4)$$

2) Іноді щільність дифузійного потоку, що характеризує різницю масових потоків  $i$ -ї компоненти та суміші, визначають у вигляді:

$$\vec{J}_i = \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}). \quad (3.5)$$

Підстановка (3.5) [якщо врахувати  $\operatorname{div} \vec{J}_i = \operatorname{div}(\rho_i \vec{v}_i) - \operatorname{div} \rho_i \vec{v}$ ] в (3.3) дає

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_i + \operatorname{div}(\rho_i \vec{v}) = \dot{m}_i, \quad (3.6)$$

або

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \operatorname{div} \vec{v} = -\operatorname{div} \vec{J}_i + \dot{m}_i. \quad (3.7)$$

Якщо підставити  $\rho_i$ , виходячи з масової концентрації  $\alpha_i = \rho_i / \rho$  (маси  $i$ -ї компоненти в об'ємі  $V$  по відношенню до маси суміші), до рівняння (3.7), то матимемо

$$\frac{d(\alpha_i \rho)}{dt} + \rho \alpha_i \operatorname{div} \vec{v} = -\operatorname{div} \vec{J}_i + \dot{m}_i, \text{ або}$$

$$\rho \frac{d\alpha_i}{dt} + \alpha_i \frac{d\rho}{dt} + \alpha_i \rho \operatorname{div} \vec{v} = -\operatorname{div} \vec{J}_i + \dot{m}_i.$$

Оскільки, відповідно до (3.4), сума другого і третього доданків лівої частини

$$\alpha_i \frac{d\rho}{dt} + \alpha_i \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

то остаточно маємо:

$$\rho \frac{d\alpha_i}{dt} = -\operatorname{div} \vec{J}_i + \dot{m}_i, \quad (3.8)$$

де ліва частина рівняння містить субстанціальну похідну

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad} \alpha_i).$$

Цілком ясно, що за визначенням  $\sum_i \alpha_i = 1$ , а також  $\sum_i \vec{J}_i = 0$ .

Тому серед рівнянь (3.8), де  $i=1,2,\dots,N$ , незалежними є лише  $N-1$  рівнянь. Визначення виразів для  $\vec{J}_i$  та  $\dot{m}_i$  становить окрему задачу, розв'язання якої є необхідною для цілковитої достатності завдання рівняння збереження  $i$ -ї компоненти.

### 3.2. Рівняння збереження імпульсу

Рівняння імпульсу виводиться для суміші в цілому. Це дає можливість скористатися виведеним в розділі 2 диференціальним рівнянням динаміки суцільного середовища «в напруженнях»

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{Div} \mathbf{P}, \quad (3.9)$$

де  $\mathbf{P} = [p_{ij}]$  ( $i = x, y, z; j = x, y, z$ ) – тензор напружень;  $\vec{F}$  – вектор щільності масової сили.

Тотожними перетвореннями рівняння (3.9) можна звести до дивергентної форми:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v} + \mathbf{P}) + \rho \vec{F}, \quad (3.10)$$

де  $\vec{v} \vec{v}$  – діада, тобто тензор з компонентами  $v_i v_j$  ( $i = x, y, z; j = x, y, z$ );  $(\rho \vec{v} \vec{v} + \mathbf{P})$  – тензор щільності потоку імпульсу;  $\rho \vec{F}$  – «джерело» імпульсу.

Рівняння (3.10) характеризує баланс імпульсу  $\rho \vec{v}$ , привнесеному газом в одиничний нерухомий об'єм (тобто щільність секундного потоку маси)<sup>\*</sup>: зміна в часі  $\rho \vec{v}$  відбувається за рахунок конвективного переносу імпульсу та під дією поверхневих сил (див. вміст  $\mathbf{P}$ ), а також за рахунок масових сил, розподілених в нерухомому об'ємі.

\*) Імпульс маси газу, що він вносить у фіксований в просторі одиничний об'єм  $V=1$ :  $mV = \rho V \cdot v = \rho v$ . З іншого боку:

$\rho v = \frac{\rho v S}{S} = \frac{\dot{m}}{S}$  щільність (секундного) потоку маси  $\dot{m}$  через поверхню  $S$ , що обмежує виділений в просторі нерухомий об'єм.

### 3.3. Рівняння збереження енергії

Використаємо матеріал розділу 1, прийнявши функцію  $f(x, y, z, t) = \rho E$ , де

$E = u + \frac{v^2}{2}$ ;  $u$  – питома внутрішня енергія. Нагадаємо закон збереження енергії у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV = \int_V \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dV + \oint_S \rho E \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \left[ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \vec{v}) \right] dV = N + Q, \quad (3.11)$$

де  $N$  – потужність масових і поверхневих сил;  $Q$  – сумарний тепловий потік як із зовні, так і за рахунок внутрішніх джерел теплоти.

Інтегральне рівняння балансу енергії (3.11) узагальнено можна записати в такій формі:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV = \int_V \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dV + \oint_S \vec{J}_e dS, \quad (3.12)$$

де  $\vec{J}_e$  – узагальнена щільність потоку енергії при дії зовнішніх сил та за рахунок притоку теплоти.

В частинному випадку незмінності повної енергії рухомого об'єму газу, рівняння (3.12) при використанні перетворення Гаусса-Остроградського можна звести до дивергентної форми:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_e. \quad (3.13)$$

Аналіз рівнянь (3.11) і (3.12) показує, що потік повної енергії складається з: конвективного переносу енергії  $\rho \vec{v} E$ , де, як ми знаємо,  $E = u + \frac{v^2}{2}$ ; роботи поверхневих сил  $\mathbf{P} \cdot \vec{v}$  (скалярний добуток тензора на вектор справа), а також відомих зовнішніх і внутрішніх теплових складових в двох останніх доданках правої частини (2.15) (часто дію масових сил в газодинаміці не враховують через їх відносну малість для газів).

В даному випадку **багатокомпонентної хімічно реагуючої суміші** маємо на увазі, що  $(\mathbf{P} \cdot \vec{v})_\alpha = \sum_\beta P_{\alpha\beta} v_\beta$  являє собою  $\alpha$  – компоненту вектора  $(\mathbf{P} \cdot \vec{v})$ .

В рівняннях збереження частинного виду енергії необхідно враховувати джерельні члени, що виражають швидкість перетворення одного виду енергії в другий. Ця швидкість перетворення залежить від фізичних властивостей досліджуваного газу. Так, наприклад,

зіткнення молекул може відбуватися при частково непружному перетворенні енергії відносного поступального руху молекул в енергію їх коливань.

До прикладу, розглянемо баланс коливної енергії  $E_{vi}$  одиниці маси  $i$ -ї компоненти. При переході від лагранжева підходу до підходу Ейлера маємо

$$\int_V \frac{\partial(\rho_i E_{vi})}{\partial t} dV + \oint_S \vec{J}_{vi} \cdot d\vec{S} = \int_V \omega_{vi} dV, \quad (3.14)$$

де  $\vec{J}_{vi} = \rho_i \vec{v}_i E_{vi} + \vec{q}_{vi}$ ;  $\vec{q}_{vi}$  – неконвективний (немеханічний) потік коливної енергії;  $\omega_{vi}$  – швидкість утворення коливної енергії  $i$ -ї компоненти всередині об'єму.

В однокомпонентному газі  $\vec{J}_i = 0$ ,  $\omega_i = 0$ , а коливальна енергія змінюється за рахунок переносу  $\vec{q}_v$  і переходу  $\omega_v$  від інших видів енергії.

### 3.4. Рівняння виробництва ентропії

Для складних багатокомпонентних систем термодинаміка вводить функцію стану — **ентропію**. При оборотних процесах, протягом яких система проходить через послідовність рівноважних станів, в ізольованих системах ентропія є незмінною. В необоротних процесах ентропія зростає. В незамкненій термодинамічній системі приріст ентропії складається із частини, що поступає з оточуючого середовища, і частини, що виникає в самій системі.

Нехай термодинамічною системою слугує частинка газової суміші, достатньо велика для вмісту великої кількості молекул, але не настільки велика, щоб її можна було вважати неоднорідною. Тоді при введенні питомої ентропії суміші  $s$  з цією функцією стану можна поводитися, як і з густиною або внутрішньою енергією.

Аналогічно вище здійсненим переходам від лагранжевого підходу до підходу Ейлера, вибираємо фіксований і нерухомий газовий об'єм  $V$ , обмежений поверхнею  $S$ , та визначимо зміну в часі ентропії цього об'єму, враховуючи як перенос ентропії з газом через границю об'єму, так і «народження» ентропії всередині об'єму зі швидкістю утворення  $w_s$ :

$$\int_V \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dV + \oint_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} = \int_V w_s dV.$$

Перейдемо до малого об'єму; тоді для неперервних рухів отримаємо

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_s + w_s, \quad w_s \geq 0. \quad (3.15)$$

Потік ентропії  $\vec{J}_s$  складається з конвективного переносу ( $\rho \vec{v} s$ ) та інших видів переносу ентропії:  $\vec{J}_s = \rho \vec{v} s + \vec{q}_s$ .

## 4. ДИНАМІКА В'ЯЗКИХ СЕРЕДОВИЩ

### 4.1. Модель руху малої рідкої частинки

Рух рідкої частинки порівняно з рухом абсолютно твердого тіла має складніший характер, оскільки в процесі руху вона може значно деформуватися.

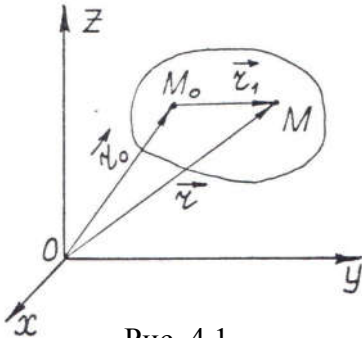


Рис. 4.1.

Нехай довільна точка  $M$  в рідкій частинці має радіус-вектор  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  (рис. 4.1). Точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  візьмемо за **полюс** з радіусом-вектором  $\vec{r}_0$  в нерухомій системі координат  $Oxyz$ .

Тоді вектор  $\overline{M_0M} = \vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ; його проекціями є

$$x_1 = x - x_0, \quad y_1 = y - y_0, \quad z_1 = z - z_0.$$

Розкладемо швидкість точки  $M$  в ряд Тейлора в малому околі полюса  $M_0$  у фіксований момент часу  $t$  (тобто,  $t$  – параметр), ричому через малість величин  $x_1, y_1, z_1$  обмежимося їх першими степенями, що є справедливим для аналізу досліджуваного руху **частинок малих розмірів**:

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right)_{M_0} x_1 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\right)_{M_0} y_1 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)_{M_0} z_1 + o(r_1).$$

Похідні визначені в точці полюса (далі їх індекс  $M_0$  опускаємо);  $o$  – символ порядку Ландау.

Запишемо проекцію  $v_x$  вектора швидкості на вісь  $Ox$ :

$$v_x(x, y, z, t) = v_x(x_0, y_0, z_0, t) + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1.$$

Для подальших перетворень додамо й відніmemo в рівнянні вираз  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1 \right)$ ;

отримаємо

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) = & v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) y_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) y_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

За умовою перший доданок  $v_{0x}$  – проекція швидкості поступального руху полюса.

Вирази в дужках в останніх двох доданках являють собою проекції вектора вихору

$$rot \vec{v} = [\nabla, \vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}; \quad rot_y \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad rot_z \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Вони характеризують обертання точок рідкої частинки відносно полюса з кутовою швидкістю  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{v}$ , що є локально справедливим для наче отверділого нескінченно малого об'єму рідини в даний момент часу.

Розглядаючи детально швидкості розтягування (стиснення), а також скошування прямокутного елементарного об'єму рідини (обмежуючись малими кутами скосу), можна показати, що решта доданків характеризує деформаційний рух частинки. Так, величина  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$  характеризує швидкість відносного видовження елемента рідкої частинки в напрямі осі  $Ox$  (аналогічно  $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$  в напрямках осей  $Oy$  і  $Oz$ ). Множник виду  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy}$  означає швидкість зміни кута прямокутного елемента з початковими гранями, паралельними осям  $Oy$  і  $Ox$ .

Аналогічний зміст мають множник  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz}$  щодо граней, паралельних осям  $Oz$  і  $Ox$ , а також решта схожих параметрів  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ,  $i, j = x, y, z$ ), які в скобках містять суми навхрест взятих похідних швидкості по координатах, в формулах для проєкцій швидкостей  $v_y(x, y, z)$  і  $v_z(x, y, z)$ .

Таким чином, (4.1) можна записати у вигляді

$$v_x = v_{0x} + \varepsilon_{xx}x_1 + \varepsilon_{xy}y_1 + \varepsilon_{xz}z_1 + \omega_y z_1 - \omega_z y_1.$$

Аналогічно для інших проєкцій швидкості маємо

$$v_y = v_{0y} + \varepsilon_{yx}x_1 + \varepsilon_{yy}y_1 + \varepsilon_{yz}z_1 + \omega_z x_1 - \omega_x z_1;$$

$$v_z = v_{0z} + \varepsilon_{zx}x_1 + \varepsilon_{zy}y_1 + \varepsilon_{zz}z_1 + \omega_x y_1 - \omega_y x_1.$$

Згідно з відомими з теоретичної механіки формулами Ейлера, останні два доданки в наведених рівняннях відображають проєкції вектора колової швидкості обертального руху даної точки  $M$  відносно миттєвої осі, що проходить через полюс  $M_0$ :  $\vec{v}_{\omega} = [\vec{\omega}, \vec{r}_1]$ .

Аналіз показує, що сукупність доданків з множниками  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) визначає швидкість деформаційного руху  $\vec{v}_{\text{деф}}$  рідкої частинки.

У векторній формі останні три рівняння системи можна записати у вигляді

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_1] + \vec{v}_{def}}. \quad (4.2)$$

Знайдений результат формулюється як теорема Коші-Гельмгольца: швидкість будь-якої точки рідкої частинки в даний момент часу складається із швидкості полюса  $\vec{v}_0$ , швидкості обертального руху навколо полюса  $\vec{v}_{ob}$  і швидкості деформаційного руху  $\vec{v}_{def}$ .

Величини швидкостей деформації можна виписати у матричній формі, і вони становлять так званий **тензор швидкостей деформації** (другого рангу, симетричний, оскільки очевидно, що  $\varepsilon_{i,j} \equiv \varepsilon_{j,i}$ , де  $i, j = x, y, z$ ):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \dot{\mathcal{S}}. \quad (4.3)$$

#### 4.2. Узагальнена гіпотеза Ньютона

В розділі 2, п. 2.2, ми отримали **основне диференціальне рівняння динаміки в'язкої рідини (газу) «в напруженнях»** (2.9):

$$\boxed{\vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right)} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \text{де } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v},$$

або в координатній формі — систему рівнянь (2.9'):

$$\begin{cases} F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \\ F_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{dv_y}{dt}, \\ F_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) = \frac{dv_z}{dt}. \end{cases}$$

Ця система диференціальних рівнянь є нелінійною (нелінійність створюють конвективні члени даламберової сили інерції в правій частині), має десять невідомих, до складу яких входять: густина  $\rho$ , шість складових напружень  $p_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) та три проекції вектора швидкості  $\vec{v}$ . Незамкненість системи рівнянь залишається навіть при додаванні до неї рівнянь нерозривності та термодинамічного стану. Це робить неможливим безпосереднє інтегрування даної системи рівнянь, не кажучи вже про

практичну неможливість завдання початкових і граничних умов, зокрема, щодо шістьох складових напружень (враховуючи **властивість взаємності дотичних напружень**:  $p_{xy} = p_{yx}$ ,  $p_{xz} = p_{zx}$ ,  $p_{yz} = p_{zy}$ ). Частковий вихід із цієї ситуації може дати припущення про певний зв'язок напружень із складовими швидкостей деформації рідких частинок — так звана **узагальнена гіпотеза Ньютона**.

Вивчаючи в'язкість рідини в «Механіці рідини і газу» або «Фізиці суцільних середовищ» ви познайомились із законом тертя Ньютона для дотичного напруження при одновимірному ламінарному русі рідини вздовж осі  $x$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy},$$

де  $v = v_x$  – швидкість течії;  $y$  – поперечна координата;  $\frac{dv}{dy}$  – відносна швидкість кутової деформації частинки;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини, *Па·с*.

У термінах тензорів напружень і швидкостей деформації цьому співвідношенню можна надати вигляду

$$p_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad (4.4)$$

оскільки при русі рідини вздовж осі  $x$

$$v_y = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy}.$$

В'язкісні напруження, що виникають при зсуві одного шару рідини відносно другого, спричиняють не тільки появу дотичних напружень, але й впливають на величину нормальних напружень. Тому припускають, що кожне з нормальних напружень в точці вздовж будь-якої осі  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$  можна уявити як суму двох складових, одна з яких нормальна до площинки і це є тиск  $p$  у в'язкій рідині, а друга обумовлена тільки молекулярною в'язкістю і не залежить від тиску (тобто має містити тільки добуток подвійного динамічного коефіцієнта в'язкості  $2\mu$  на одну з нормальних компонент тензора швидкостей деформації  $\varepsilon_{xx}$ , або  $\varepsilon_{yy}$ , або  $\varepsilon_{zz}$ ).

Щодо течії нестисливої рідини (газу), закон Ньютона гіпотетично узагальнюють на довільний тривимірний рух, вважаючи, що напруження, які залежать від в'язкості, пропорційні відповідним відносним швидкостям деформації рідкої частинки, а коефіцієнт пропорційності залишають саме таким, як і в формулі (4.4), тобто  $2\mu$ , для запобігання розбіжності з законом тертя Ньютона. Застосовуючи вже відомі нам позначення для

відносних швидкостей лінійних ( $\varepsilon_{ij}, i=j$ ) та кутових ( $\varepsilon_{ij}, i \neq j$ ) деформацій, згідно з гіпотезою випишемо проекції напружень на координатні осі:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\varepsilon_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\varepsilon_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\varepsilon_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ p_{xy} &= p_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ p_{xz} &= p_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \\ p_{yz} &= p_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Узагальнену гіпотезу Ньютона для нестисливих рідин та газів можна записати в тензорному вигляді:

$$\boxed{P = -pI + 2\mu \dot{S}}, \quad (4.6)$$

де  $P$  – тензор напружень;  $\dot{S}$  – тензор швидкостей деформації;  $p$  – тиск у в'язкій рідині;

$$I - \text{одиничний тензор: } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знак мінус у першому доданку (4.6) враховує, що тиск завжди діє проти зовнішніх нормалей.

Надамо рівнянню (4.6) матричну форму:

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Пригадавши операцію множення скалярів на матриці, можна переконатися, що вирази (4.5) містять усі частинні випадки напружень відповідно до місцеположення тих чи інших елементів квадратних матриць одного порядку.

Доречно нагадати відоме вам з «Опору матеріалів» твердження узагальненого закону Гука для пружного тіла, за яким механічні напруження пропорційні відповідним

відносним деформаціям. Натомість, у випадку рідини і газів гіпотетично прийнято, що напруження пропорційні відносним **швидкостям деформацій**.

З перших трьох виразів системи (4.5) знайдемо середнє арифметичне від величин нормальних напружень за трьома взаємно перпендикулярними напрямками

$$\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = -p + \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}.$$

Для нестисливих середовищ відповідно до рівняння нерозривності  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ , тому маємо  $\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = -p$ , де тиск  $p$  називають **гідродинамічним тиском**.

Таким чином, нормальні і дотичні складові тензора напружень  $\mathbf{P}$  в залежності від відповідних швидкостей деформації повністю даються виразами системи (4.5).

Для стисливих середовищ узагальнена гіпотеза Ньютона має більш складний вигляд:

$$\mathbf{P} = \left( -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) \mathbf{I} + 2\mu \dot{\mathbf{S}}. \quad (4.7)$$

Тоді дотичні напруження, які належать системі (4.5), залишаються в незмінному вигляді, а до складу кожного нормального напруження ще увійде член  $-\frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}$ .

Однак треба пам'ятати, що прямо пропорційні залежності (4.6) і (4.7) між тензорами  $\mathbf{P}$  і  $\dot{\mathbf{S}}$  не можна строго довести, а тим паче за наявності турбулентних пульсацій і макромасштабного переносу імпульсів рідких частинок. Тому узагальнену гіпотезу Ньютона слід вважати якоюсь мірою саме **робочою гіпотезою**, не доведеною строго математично та на фізичному рівні, але й поки що не спростованою практикою.

Як ми дізнаємося нижче, для рухів газів при числах Маха–Маієвського  $M \leq 0,2 \div 0,3$  (тобто, коли швидкість газу складає до 20–30% швидкості звуку в ньому) стисливістю можна нехтувати і вважати  $\rho = \text{const}$ . Тому у багатьох випадках при розв'язанні практичних задач в машинобудуванні за допомогою теорії руху в'язких рідин (газів) їх приймають нестисливими. Однак при розрахунках високошвидкісних потоків, характерних для задач аеродинаміки літальних апаратів, ракетних і газотурбінних двигунів, парових турбін, пневматичних і газових приводів, задач внутрішньої і зовнішньої балістики (відповідно при русі тіл всередині ствола або за його межами щодо різних видів озброєння) вплив стисливості робочих тіл треба обов'язково враховувати ( $\rho = \text{var}$ ), оскільки цей вплив може бути навіть більшим за вплив в'язкості. Тоді часто є

логічним приймати більш просту модель руху невязкого, але стисливого газу, за виключенням області прилежового шару в безпосередній близькості до обтічного тіла.

### 4.3. Рівняння руху Нав'є-Стокса в'язких рідин і газів

Запишемо рівняння руху рідини в напруженнях в проекції на вісь  $Ox$ :

$$F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \text{ де } \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Замінімо компоненти тензора напруження виразами через тиск і компоненти тензора швидкостей деформації спочатку згідно з прийнятою узагальненою гіпотезою Ньютона для нестисливої рідини (газу):

$$\begin{aligned} F_x + \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] = \\ = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \\ + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \Delta v_x + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \end{aligned}$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості,  $m^2/c$ .

Для нестисливого середовища вираз у дужках, згідно з рівнянням нерозривності, дорівнює нулю, тобто  $div \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ . Тоді остаточно  $x$ -компонента рівняння руху

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} - \nu \cdot \Delta v_x.$$

Аналогічним шляхом дістанемо рівняння руху в проекціях на осі  $Oy$  і  $Oz$ :

$$F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt} - \nu \cdot \Delta v_y;$$

$$F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} - \nu \cdot \Delta v_z,$$

або у векторній формі

$$\boxed{\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\vec{v}}{dt} - \nu \cdot \Delta \vec{v}}, \quad (4.8)$$

$$\text{де } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.$$

Іноді замість запису системи рівнянь, що відповідає векторної їх формі (4.8), користуються індексною формою запису відповідно до загальноприйнятих правил:

1) умова про підсумовування величин за індексом, який зустрічається двічі (за так званим «німим» індексом, наприклад, одним з  $x, y, z$ , або з 1, 2, 3 більш узагальнено);

2) умова про ранг — індекс, який зустрічається лише один раз (так званий «вільний» індекс), який пробігає значення від  $x$  до  $z$ , або від 1 до 3); тобто запис рівняння з одним «вільним» індексом еквівалентний запису трьох рівнянь. Тоді замість змінних  $x, y, z$  і таких саме індексів при проєкціях швидкості в декартовій системі координат використовують лише одне позначення  $x$  з відповідним цифровим індексом, наприклад,  $x_i, x_j, v_i$  ( $i=1, 2, 3$  або  $j=1, 2, 3$ ).

Відповідно до цих правил систему рівнянь за умови  $\rho = const$  можна записати в такій формі:

$$F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (4.8')$$

Нелінійне рівняння (4.8), або (4.8'), описує рух в'язкої нестисливої рідини (газу) і може бути трактоване як рівняння другого закону механіки Ньютона щодо одиниці маси рідини. Зауважимо, що при виведенні цього рівняння не було зроблено будь-яких припущень про режим течії. Формально для замикання отриманої системи рівнянь з невідомими  $v_x, v_y, v_z, p$  (як правило, вважають кінематичний коефіцієнт в'язкості та густину відомими за умовою:  $\nu \approx const, \rho = const$ ) до них додають рівняння нерозривності  $div \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ .

У випадку стисливого середовища підстановка напружень  $p_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ), виражених через компоненти тензора швидкостей деформацій  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) згідно з узагальненою гіпотезою Ньютона при  $\rho = var$ , дозволяє отримати рівняння руху у вигляді

$$\boxed{\vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\nu}{3} grad div \vec{v} - \nu \cdot \Delta \vec{v}}, \quad (4.9)$$

$$\text{або в координатній формі: } \begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} - \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} - \nu \cdot \Delta v_x, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt} - \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{v} - \nu \cdot \Delta v_y, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} - \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{v} - \nu \cdot \Delta v_z. \end{cases}$$

Диференціальні рівняння (4.8) і (4.9) називають **рівняннями Нав'є-Стокса** (1827 – **Navier**,  $\rho = \text{const}$ ; 1831 – Poisson,  $\rho = \text{var}$ ; 1834 – Saint-Venant; 1845 – **Stokes**).

Розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса мають бути підпорядковані умовам однозначності, зокрема **граничним (крайовим) і початковим умовам**.

Початкові умови полягають в завданні полів швидкості, тиску і густини (для стисливої рідини) в початковий момент часу:

$$\vec{v}(x, y, z, t_0) = \vec{v}^o(x, y, z); p(x, y, z, t_0) = p^o(x, y, z); \rho(x, y, z, t_0) = \rho^o(x, y, z).$$

Початкові умови виставляються тільки для нестационарних течій. Граничні умови виставляються для будь-яких течій. Вони поділяються на **кінематичні** (накладають обмеження на швидкості течії) та **динамічні умови** (в загальному випадку пов'язують тиск зі швидкістю). Наведемо приклади кінематичних умов: умова «на нескінченності» — завдання швидкості незбуреного потоку  $v_\infty$ , що набігає на тіло; умова «непротікання і безвідривної обтікання» — нормальні і дотичні складові швидкості рідких частинок на межі обтічного твердого тіла обертаються на нуль ( $v_n = 0; v_\tau = 0$ ) незалежно від змочуваності рідиною стінки, її матеріалу й ступеня чистоти непроникненої обтічної поверхні.

Прилипання рідини на стінці відбувається за рахунок сил адгезії з боку твердої стінки, а далі взаємодія молекул рідини зі стінкою завдяки силам в'язкості передається і на прилеглу рідину. Цей факт доведено багатьма фізичними вимірюваннями. У випадку плоского обтікання тіла ідеальною (нев'язкою) рідиною дотична складова швидкості на стінці  $v_\tau \neq 0$  і контур тіла є нульовою лінією течії. Натомість при русі в'язкої рідини поблизу твердого тіла його границя не є лінією течії. Прикладом найпростішої динамічної умови є умова на вільній поверхні краплинної рідини  $p = p_0$ .

Точні розв'язки сформульованої задачі механіки рідини та газу вдається отримати тільки для ламінарного руху і найпростіших початкових і граничних умов.

Одна з основних невирішених в гідромеханіці та математиці проблем полягає в тому, щоб довести або спростувати твердження, що тривимірні розв'язки диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса руху при великих числах Рейнольдса

(турбулентний режим) існують і вони єдині у будь-який момент часу.\*) Але в практиці чисельних розрахунків апріорно вважаються ці твердження доведеними і на цій підставі будуються математичні моделі турбулентних течій, які доповнюють штучними співвідношеннями з певним фізичним змістом, а також залежностями, отриманими на підставі фізичних експериментів.

---

\*) Щодо математичної обумовленості диференціальних рівнянь Нав'є–Стокса, то слід зауважити наступне.

**По-перше.** Навіть для нестисливої рідини (газу) проблема доведення теорем існування, єдності та стійкості (неперервності залежності результатів інтегрування від початкових даних задачі) розв'язків рівнянь Нав'є–Стокса для великих чисел Рейнольдса не має повного математичного завершення. Для тривимірного випадку нестисливої течії доведено, що гладкі розв'язки цих рівнянь можуть існувати принаймні **протягом короткого проміжку часу** і неперервно залежити від початкових даних (R. Temam [1977] *Navier-Stokes Equations*, North Holland; О.А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, М.: Наука, 1970).

<p><b>Примітка:</b> Гладка функція — неперервна функція, що має графік із скрізь існуючою дотичною. <b>Більш повно:</b> Гладка функція порядку <math>n</math> — функція <math>f</math>, що має на множині задання <math>D(f)</math> похідні порядку <math>n</math>, причому <math>f^{(n)}</math> є неперервною.</p>
---

Одна з **невирішених** проблем механіки рідини та газу саме й полягає в тому, щоб довести або спростувати твердження, що тривимірні розв'язки рівнянь нестисливої течії існують **у будь-який момент часу**. Для двовимірного випадку (у тому числі з урахуванням двовимірності турбулентних пульсацій параметрів) суто теоретично доведено, що розв'язки існують у будь-який момент часу як для в'язкої, так і для нев'язкої течії.

**По-друге.** Навіть у найпростішому прикладі розв'язку рівнянь Нав'є–Стокса динаміки в'язкого газу — в задачі про одновимірний стаціонарний рух газу, що супроводжується переходом надзвукового потоку в дозвуковий при проходженні через стрибок ущільнення (Л.Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, М.: Наука, 1987, с. 746), розв'язок **у точному розумінні позбавлений сенсу**, оскільки товщина **стрибка ущільнення** (який будемо вивчати пізніше) має порядок довжини вільного пробігу молекули. Тому в області стрибка модель суцільного середовища некоректна, що виключає можливість застосування рівнянь Нав'є–Стокса. І все ж, відомі намагання пошуків наближеного розв'язання цієї проблеми на підставі моделі суцільного середовища, тобто на рівняннях Нав'є–Стокса, з урахуванням впливу термодинамічної нерівноважності руху газу в області стрибка ущільнення (наприклад, Лунькин Ю.П. *О структуре ударных волн*, Журн. техн. физики, 1957, т.27, № 6). Також під керівництвом Г. Ліпмана (США) розроблено теорію, яка заснована на кінетичних міркуваннях. Така теорія стрибка задовільно збігається з результатами експериментів (Schmidt B., *Electron density measurements in shock waves in argon*, Intern. Congr. of applied mechanics, Stanford, 1968; Abstracts). Зараз мають місце деякі позитивні приклади наближених чисельних розв'язків систем нестационарних рівнянь Нав'є–Стокса, проте визначальним залишається фізичний експеримент.

---

Треба пам'ятати, що при турбулентному режимі течії рідини (газу) параметри  $p$ ,  $\rho$  і  $\vec{v}$ , що входять до рівнянь руху, є місцевими миттєвими (актуальними), які зазнають постійних хаотичних пульсацій, закономірності яких неможливо врахувати. Тому крім

принципових математичних труднощів обумовленості рівнянь Нав'є-Стокса існує проблема коректного завдання умов однозначності з урахуванням хаотичності пульсацій параметрів. Проте навіть якщо б вони були задані у всій області течії, то знайдені миттєві значення швидкості, тиску і густини використати на практиці було б практично неможливим.

Важливий крок в вирішенні цієї проблеми зробив **Осборн Рейнольдс**. Він запропонував вважати, що у випадку турбулентних течій рівняння Нав'є-Стокса справджуються і при цьому можна виділити пульсаційні складові напружень, швидкостей і тисків відносно усереднених значень параметрів. Тоді актуальні значення, наприклад, тиску і проєкцій швидкості, були наведені у вигляді

$$p = \bar{p} + p'; \quad v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z,$$

де  $\bar{p}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  – усереднені значення параметрів;  $p'$ ,  $v'_x$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  – пульсаційні значення параметрів.

Усереднення може бути або за часом, або статистичним, тобто «за ансамблем», (останнє практично здійснити дуже важко, тому здійснюють усереднення за часом). Для будь-якої пульсуючої величини  $f$  (швидкості, тиску тощо) маємо  $f = \bar{f} + f'$ ; усереднення за часом, згідно з теоремою «про середнє», визначається формулою

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (T - \text{період усереднення}). \quad (4.10)$$

Період усереднення обирається таким, що  $\overline{f'} = 0$ ; крім того, згладжування пульсуючого параметра за часом приводить до усередненої величини, яка вже не змінюється при повторному згладжуванні:  $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$ . За наявності ще одної функції  $f_1$ , що змінюється (пульсує), маємо на підставі (4.10):  $\overline{\bar{f} f_1} = \bar{f} \cdot \bar{f}_1$ , оскільки при підстановці  $\bar{f} f_1$  до формули (4.10) величина  $\bar{f}$  виноситься за знак інтеграла, а для функції  $f_1$  отримаємо дію формули (4.10).

Проведення операцій усереднення за О. Рейнольдсом членів рівняння Нав'є-Стокса (4.8') для нестисливого турбулентного газового потоку зводить його до вигляду

$$F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{\rho} \left( -\rho \overline{v'_i v'_j} \right). \quad (4.11)$$

Величини  $\left( -\rho \overline{v'_i v'_j} \right)$  утворюють *тензор турбулентних напружень* ( $i, j = x, y, z$ ), який характеризує обмін імпульсом між окремими ділянками турбулентного потоку при хаотичних зіткненнях і перемішуванні рідких частинок, що викликає додатковий опір

руху. Таким чином, порівняння рівнянь (4.11) і (4.8') показує, що до усередненого турбулентного потоку із звичайними в'язкими напруженнями молекулярної природи додаються турбулентні напруження, які спричинені макропереносом кількості руху скінченних об'ємів рідини (газу) поперечними пульсаціями. Систему рівнянь, що відповідає індексній формі запису (4.11), називають системою рівнянь турбулентного руху О. Рейнольдса.

Як видно, для турбулентної течії газу, навіть при нехтуванні його стисливості, отримана система рівнянь руху містить шість (враховуючи симетричність тензора) складових турбулентних напружень  $(-\rho \overline{v'_i v'_j})$ , три проекції усередненої швидкості та усереднений тиск. Таким чином, система рівнянь турбулентного руху Рейнольдса (4.11) не є замкненою, у тому числі при додаванні рівнянь нерозривності для усередненого і пульсаційного рухів (відповідно  $div \vec{v} = 0$ ,  $div \vec{v}' = 0$ ). Задача значно ускладнюється при врахуванні стисливості газу. Для замикання системи рівнянь йдуть шляхом прийняття тих чи інших напівемпіричних моделей турбулентних напружень  $(-\rho \overline{v'_i v'_j})$ .

## 5. ДИНАМІКА НЕВ'ЯЗКОГО ГАЗУ

### 5.1. Диференціальне рівняння руху Л. Ейлера

Нагадаємо, що в газодинаміці частіше розглядаються нев'язкі течії, оскільки при великих швидкостях (і, відповідно, числах Рейнольдса потоків) в'язкість, порівняно із стисливості, відіграє меншу роль у формуванні характеристик течії, а область її впливу обмежується лише пристінною зоною з відносно тонким примежовим шаром. Окремий інтерес для практики розрахунків і проектування об'єктів авіаційної і ракетної техніки має урахування явищ в'язко-нев'язкої взаємодії стрибків ущільнення з примежовим шаром. Якщо обмежитися нев'язкими високошвидкісними течіями газу, то із тензора напружень випадають дотичні складові і залишаються тільки нормальні напруження, причому  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ , де  $p$  — тиск. Тоді диференціальне рівняння (2.6) переходить в рівняння руху ідеальної стисливої рідини (газу) Л. Ейлера:

$$\boxed{\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{d\vec{v}}{dt}} \quad (5.1)$$

Для інтегрування рівняння Ейлера додаються початкові та крайові умови, відмінність яких від умов для рівняння Нав'є-Стокса руху в'язкої рідини полягає лише в тому, що при обтіканні тіла нев'язким середовищем не виконується умова «прилипання»: дотична складова швидкості на стінці  $v_\tau \neq 0$  і контур тіла є нульовою лінією течії.

При нехтуванні масовими силами запишемо основну систему рівнянь в газодинаміці:  
рівняння руху Л. Ейлера

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}; \quad (5.2)$$

рівняння нерозривності для стисливої рідини

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (5.3)$$

Наведені рівняння (в координатній формі їх 4) містять 5 невідомих (3 проекції швидкості, тиск і густину). Тому ці рівняння потрібно доповнити рівнянням стану. Для термічно ідеального газу це рівняння Клапейрона  $\frac{p}{\rho} = RT$ , де  $p$  — абсолютний тиск, Па;

$$R = \frac{R_M}{M_2} \text{ — газова стала, } \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad R_M \text{ — універсальна газова стала, } R_M = 8,3143 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}};$$

$$M_2 \text{ — молярна маса, } \frac{\text{кг}}{\text{моль}}. \quad T \text{ — термодинамічна температура за Кельвіном, К.}$$

**1 моль** — кількість речовини в системі, що складається з такої кількості атомів, молекул, іонів, яка дорівнює кількості атомів в 12 г чистого ізотопу вуглецю  $^{12}\text{C}$ . Молярні маси: повітря  $M_{\text{пов}} \approx 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ; кисню  $M_{\text{O}_2} \approx 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ; водню  $M_{\text{H}_2} \approx 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ; азоту  $M_{\text{N}_2} \approx 0,028 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ; вуглекислого газу  $M_{\text{CO}_2} \approx 0,044 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ; 1-атомного інертного газу гелію  $M_{\text{He}} \approx 0,004 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ .

## 5.2. Інтеграли диференціального рівняння руху Л. Ейлера

### 5.2.1. Загальний інтеграл для одновимірної течії газу та його наслідки

Як відомо з курсів «Механіка рідин і газів» і «Фізика суцільного середовища» для одновимірного стаціонарного і баротропного  $[\rho = \rho(p)]$  руху нев'язкої рідини вздовж лінії течії **загальний інтеграл рівняння руху Л. Ейлера** має вигляд

$$U - \int \frac{dp}{\rho(p)} - \frac{v^2}{2} = C(\psi), \quad (5.4)$$

де  $U$  — потенціал масових сил (наприклад, при дії сили тяжіння  $U = -gz + \text{const}$ ); для газу приймається  $U=0$ , тобто роботою масових сил нехтують;  $\int \frac{dp}{\rho(p)}$  — баротропний потенціал (так звана «функція тиску»);  $v$  — швидкість;  $\psi$  — функція течії, що ідентифікує лінію течії;  $C(\psi)$  — стала вздовж певної лінії течії для вихрового руху, але  $C \neq f(\psi)$  і  $C = \text{const}$  для потенціальної течії.

Розглянемо види течії газу при різних величинах числа Маха-Маїєвського  $M = v/a$ ,

де  $v$  – місцева швидкість течії;  $a$  – місцева швидкість звуку в газі, тобто швидкість поширення малих ( $\Delta\rho \ll \rho$ ) збурень в середовищі, які ще називають акустичними.

а) Як буде показано пізніше, в діапазоні значень  $0 < M \leq 0,2$  можна з достатньою точністю вважати, що густина  $\rho \approx \text{const}$ . Тоді в даному випадку  $a \rightarrow \infty$ , оскільки, як відомо з фізики,

$$a = \sqrt{dp/d\rho}. \quad (5.5)$$

При  $\rho \approx \text{const}$  з рівняння (5.4) випливає **відомий в гідромеханіці ідеальної рідини інтеграл Д. Бернуллі**:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = c(\psi),$$

де нова стала  $c(\psi)$  для певної лінії течії враховує константу інтегрування.

Якщо застосувати останнє рівняння для двох точок лінії течії (перерізів елементарної газової струминки), в одній з яких  $v_0 = 0$  (точка або переріз гальмування), а відповідний тиск приймає значення **повного тиску**  $p_0(\psi)$ , то його величина визначатиметься як

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0(\psi), \quad (5.6)$$

де поточні величини в лівій частині рівняння називають **статичним тиском** ( $p = p_{\text{ст}}$ ) і **динамічним тиском** ( $p_{\text{дин}} = \frac{\rho v^2}{2}$ ).

В більш загальному випадку змінної густини ( $\rho = \text{var}$ ) зазначені вище параметри з індексом «0», як і інші, відповідні їм, наприклад, температура  $T_0$ , густина  $\rho_0$ , швидкість звуку  $a_0$ , питомі ентальпія  $h_0$ , ентропія  $s_0$ , в «загальмованих» точці або перерізі елементарної струминки називають **параметрами гальмування**.

б) Як показують досліди, в діапазоні  $0,2 < M \leq (0,7 \div 0,8)$  зберігається наближено **ізотермічний рух** газу ( $T = T_0 \approx \text{const}$ ). Для термічно ідеального газу є справедливим закон Бойля-Маріотта, з якого можна виразити поточне значення густини  $\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$ . Тоді

функція тиску дорівнюватиме  $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \int \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln p + \text{const}$ , що при підстановці до

виразу (5.4), застосованого щодо двох точок лінії течії (перерізів елементарної струминки), при  $U = 0$  дає рівняння

$$\frac{p_0}{\rho_0} \ln p + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln p_0, \text{ або } \boxed{\frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p_0}{p} = \frac{v^2}{2}}, \quad (5.7)$$

де  $p_0, \rho_0$  — параметри гальмування (в реальній або умовній зоні, де  $u_0 = 0$ ).

Відповідно до **ізотермічної моделі Ньютона** ( $T = T_0 = const$ ), 1687 р., швидкість звуку для термічно ідеального газу в ньому знаходиться підстановкою закону Бойля-Маріотта  $p/\rho = C$  до формули (5.5):

$$a_T = \sqrt{\frac{d}{d\rho}(\rho C)} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{RT_0}.$$

Однак величина швидкості звуку за цією моделлю приблизно на 20% є меншою порівняно з реальними значеннями.

**в)** При  $M \geq 0,8$  співвідношення (5.7) порушуються, і при зростанні  $M$  відхилення процесу течії від ізотермічного закону збільшується. Тому в енергетичному машинобудуванні та авіакосмічній галузі часто розглядається **адіабатний процес** (процес без теплообміну з навколишнім середовищем). В гіпотетичному «адіабатному процесі без тертя» має зберігатися постійність ентропії ( $s=const$ ). В реальності таке припущення прийнято для наближено енергоізованих швидких течій на невеликих протяжностях (в горловині ракетного двигуна, в міжлопатковому просторі компресора, турбіни при безвідривному його обтіканні тощо). Вважають, що за таких умов теплообмін з оточуючими стінками і тертя не встигає істотно вплинути на характеристики течії. Для такого **ізоентропійного процесу** є справедливим **рівняння оборотної адіабати**

**(ізоентропи) Пуассона**  $\frac{p}{\rho^k} = const$ , де  $k = \frac{c_p}{c_v}$  — показник адіабати (ізоентропи);  $c_p$  —

питома теплоємність при сталому тиску;  $c_v$  — питома теплоємність при сталому об'ємі.

Зазначені питомі теплоємності пов'язані **формулою Майєра**:  $c_p - c_v = R$ . З двох останніх співвідношень легко отримати

$$c_p = \frac{k}{k-1} R; \quad c_v = \frac{1}{k-1} R. \quad (5.8)$$

Для повітря  $k \cong 1,4$ ;  $R_{нов} \cong 287,14 \frac{Дж}{кг \cdot K}$ .

Для двох станів газу рівнянням адіабати Пуассона є  $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$ , де, як і раніше, індекс

«0» мають параметри повністю і адіабатно загальмованої течії.

Враховуючи формули для питомих ентальпії  $h = u + \frac{p}{\rho}$  та внутрішньої енергії  $u$

термічно ідеального газу, за допомогою співвідношень (5.8) і рівняння Клапейрона маємо

$$h = c_p T = \frac{k}{k-1} RT = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}; \quad u = c_v T = \frac{1}{k-1} RT = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (5.9)$$

У випадку загальнішого політропного процесу рівняння політропи має вигляд

$$\frac{p}{\rho^n} = const, \text{ де } n = \frac{c - c_p}{c - c_v} \text{ — показник політропи; } c \text{ — питома теплоємність політропного процесу.}$$

Прийняття **ізоентропійної моделі** поширення звуку в газі (нехтуючи втратами енергії і передачею теплоти, що виділяється при швидкому стисненні газу звуковою хвилею, до суміжних шарів газу) з підстановкою до формули (5.5) тиску  $p$  з адіабати Пуассона  $\frac{p}{\rho^k} = C \Rightarrow p = C \rho^k$ , привело до більш адекватної **формули швидкості звуку**

**Лапласа-Пуассона**, 1810 р.,  $a^2 = Ck \rho^{k-1} = k p / \rho$ , або

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (5.10)$$

Для нерухомого повітря при  $t = 15^\circ\text{C}$  і нормальному атмосферному тиску  $a \approx 341$  м/с. Швидкість звуку у воді значно більша:  $a \approx 1500$  м/с.

Запишемо рівняння адіабати Пуассона  $\frac{p}{\rho^k} = C$ , звідки  $\rho = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{k}}$ . Підстановка цієї величини до інтеграла (5.4) після перетворень при  $U = 0$  зводить його до вигляду

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C(\psi).$$

Застосуємо цей інтеграл для двох точок лінії течії (перерізів елементарної струминки), причому одна з них є точкою адіабатного гальмування, де  $v_0 = 0$ :

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (5.11)$$

Таким чином, ми отримали **інтеграл Д. Бернуллі для адіабатного процесу стаціонарного вихрового руху невязкого газу** вздовж лінії течії (елементарної газової струминки), що наближено еквівалентно інтегруванню диференціального рівняння руху Л. Ейлера для цілого потоку невязкого газу, в границях від параметрів гальмування до поточних параметрів.

### 5.2.2. Форми інтеграла Д. Бернуллі

З урахуванням формули (5.10) для швидкості звуку, рівняння (5.11) можна записати в еквівалентному вигляді

$$\boxed{\frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}} \quad (5.12)$$

де  $a_0$  — швидкість звуку в загальмованому газі у стані спокою.

Отриманий вираз має назву **інтеграла Бернуллі–Сен-Венана**, оскільки, як і рівняння (5.11), фактично є інтегралом рівняння руху Л. Ейлера. З нього випливає, що швидкість звуку в газі зменшується при зростанні швидкості течії.

**Критична швидкість** досягається, коли швидкість течії дорівнює звуковій:  $v_* = a_*$ . У цій точці (або перерізі) решта параметрів течії також має назву «критичних» з відповідною позначкою:  $p_*, \rho_*, T_*, Q_{m*}, \dots$ . Підставивши величини  $v_* = a_*$  до інтеграла Бернуллі–Сен-Венана, можна отримати зв'язок критичної швидкості зі швидкістю звуку в нерухомому («загальмованому») газі  $a_0$ :

$$a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} RT_0. \quad (5.13)$$

З інтеграла Бернуллі–Сен-Венана (5.12) також легко знайти так звану «максимальну теоретичну швидкість», яка б гіпотетично мала місце при витіканні газової струминки в абсолютний вакуум, де тиск  $p=0$ , а отже й швидкість звуку  $a=0$ :

$$v_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \quad (5.14)$$

Досягнення максимуму швидкості у будь-якій зоні струминки газу потребувало б умови  $p \rightarrow 0$  (див. (5.11)), що викликало б виникнення пустот (повних розривів) в струминці.

Наприклад, для повітря ( $k=1,4$ ) при  $t_0=15^0C$ ,  $p_0=101325 \text{ Па}$  маємо  $v_{\max} \approx 760 \text{ м/с}$ . Це означає, що максимальна швидкість витікання повітря принципово не може перевищувати швидкість звуку в нерухомому повітрі більше, ніж в  $\sqrt{\frac{2}{k-1}} \approx 2,24$  рази.

Гіпотетичність «максимальної теоретичної швидкості»  $v_{\max}$  можна наочно підтвердити і іншим шляхом. На підставі першого виразу співвідношень (5.9) інтеграл Д. Бернуллі зводиться до еквівалентного йому **рівняння ентальпії** (частинного випадку **Першого закону термодинаміки для потоків**):

$$\boxed{h + \frac{v^2}{2} = h_0}, \quad (5.15)$$

де  $h_0$  — ентальпія гальмування (загальмованого потоку),  $h_0 = a_0^2 / (k - 1)$ .

Підведення теплоти до газу (якщо б воно мало місце) безпосередньо не відображене в рівнянні (5.15), проте теплові ефекти враховуються при обчисленні  $\int \frac{dp}{\rho(p)}$ , оскільки вони впливають на вид функції  $\rho(p)$ .

Теоретично максимум швидкості можна було б досягти, якби гіпотетично вдалося всю ентальпію (внутрішню енергію, яка для ідеального газу визначається інтенсивністю хаотичного теплового руху молекул) повністю перетворити на кінетичну енергію напрявленого руху газу: при  $h \rightarrow 0$  мали б  $\frac{v^2}{2} \rightarrow \frac{v_{\max}^2}{2} = h_0$ , звідки  $v_{\max} = \sqrt{2h_0}$ . Певна річ, досягти цього фізично неможливо.

Треба зазначити, що рівняння ентальпії (5.15), як і еквівалентний йому інтеграл Д. Бернуллі (5.11), які відображають закон збереження та перетворення енергії, справедливі і для течії в'язкого газу за відсутності зовнішнього теплообміну з оточуючим середовищем. Через дію сил внутрішнього тертя частина механічної енергії перетворюється в теплоту, що спричиняє зростання внутрішньої енергії  $u$ , а отже, ентальпії  $h$ , але при цьому зберігається умова  $h_0 = \text{const}$ .

Рівняння ентальпії можна записати у вигляді  $c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0 = h_0$ , звідки температура гальмування

$$\boxed{T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p}} \quad (5.16)$$

Звідси випливають такі висновки:

1) в енергоізолюваному потоці ідеального газу зростання швидкості  $v$  завжди супроводжується падінням температури  $T$ , оскільки  $h_0 = \text{const}$ ;

2) якщо у двох перерізах енергоізолюваного потоку  $v = \text{idem}$ , то в них і  $T = \text{idem}$  незалежно від будь-яких процесів, що здійснюються між цими перерізами;

3) при  $v \rightarrow 0$  газ приймає однакову температуру гальмування  $T_0$  незалежно від особливостей гальмування та виникаючих незворотних енергетичних втрат (приклади: температура гальмування у передній критичній точці обтічного тіла, де  $v = v_0 = 0$ ; при гальмуванні газу силами в'язкості біля стінки без теплообміну її температура  $T_{cr}$  буде близькою до  $T_0$  в газі).

Формула (5.16) пояснює причину «аеродинамічного нагріву» високошвидкісних тіл в газі або тіл, що обтікаються потоками газу з великими швидкостями. В **критичних точках** таких тіл, де  $v \rightarrow 0$  (головні частини ракет, лобові частини космічних апаратів, метеоритів при їх спуску у щільних шарах атмосфери Землі, обшивки літаків тощо) спостерігається наближення  $T \rightarrow T_0$ . Приклад наслідку: у літака SP-71 «Чорний дрозд», Локхід, найшвидшого в 1960–70 р.р., який долав відстань від Нью-Йорка до Лондона за 114 хв., розігрів корпусу при швидкості  $v = 2200 \frac{\text{міль}}{\text{год}} \approx 3542 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ , спричиняв збільшення загальної довжини літака приблизно до 1 фути ( $\approx 30,5$  см). Звідси випливає наскільки є важкою проблема врахування відповідних температурних напружень у сукупності з величезними аеродинамічними навантаженнями!

**Важливо пам'ятати**, що при вимірюванні температури швидкісного потоку газу треба одночасно вимірювати і його швидкість, оскільки показ температури буде близьким до температури  $T_0$  через гальмування газу в лобовій частині приладу для вимірювання температури (звичайного термометра, термопари, термометра опору). Тільки після цього можна вирахувати температуру рухомого газу:  $T = T_0 - \frac{v^2}{2c_p}$ .

Наведемо дані щодо температури гальмування потоку повітря при зустрічі з тілом, якщо до неї температура повітря складала  $T=300\text{ K}$  ( $27^\circ\text{C}$ ),  $a = \sqrt{kRT} \approx 347\text{ м/с}$  (табл.1).

Таблиця 1.

$v, \text{ м/с}$	100	350	1 000 ( $M \approx 2,9$ )
$T_0, \text{ K}$	305	360	800
$t_0, ^\circ\text{C}$	32	87	527

## 6. ВАЖЛИВІ ГАЗОДИНАМІЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

### 6.1. Газодинамічні формули щодо оборотних процесів течії

1) З рівняння ентальпії  $h + \frac{v^2}{2} = h_0$  можна отримати швидкість газу  $v = \sqrt{2(h_0 - h)}$ ,

де  $h_0$  — ентальпія загальмованого потоку;  $h$  — поточне значення ентальпії.

2) Зв'язок критичної і максимальної теоретичної швидкостей впливає з формул (2.21) і (2.22):

$$v_* = v_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

3) Зв'язок термодинамічних параметрів гальмування з поточними величинами їх отримаємо на підставі інтеграла Бернуллі для адіабатної течії з урахуванням рівняння стану Клапейрона

$$\frac{k}{k-1}RT + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1}RT_0. \quad (6.1)$$

а) Як нам відомо, при великих колозвуківих і надзвуківих швидкостях обтікання газом твердого тіла відбувається «аеродинамічний нагрів». З рівняння (6.1) можна отримати температуру гальмування в передній критичній точці тіла, у якій газ повністю адіабатно загальмовується:

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right),$$

де  $T$  і  $M$  — температура і число Маха-Маієвського потоку, що набігає.

Звідси маємо

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (6.2)$$

Середня температура обтічного тіла є дещо меншою порівняно з температурою гальмування в передній точці, що звичайно враховують **коефіцієнтом неповноти гальмування**  $\beta' = T'/T_0$ , причому  $\beta' \approx 0,8 \div 0,85$ . Тоді середня температура тіла, що обтікається навколо- або надзвуківим потоком газу, знаходиться як

$$T' = \beta' T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right).$$

Формула (6.2) у вигляді  $\frac{T_0 - T}{T} = \frac{k-1}{k} M^2$  дає розуміння, що **число Маха-Маієвського  $M$**  характеризує ступінь перетворення тепловмісту (ентальпії) в **кінетичну енергію потоку** (якщо домножити на питому ізобарну теплоємність  $c_p = const$  чисельник і знаменник лівої сторони, яка перетвориться на  $\frac{h_0 - h}{h}$  — відносну зміну ентальпії). Саме тому число  $M$  є основним критерієм подібності для високошвидкісних газових потоків.

б) З рівнянь адіабати Пуассона і Клапейрона випливає  $\frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}$  і, згідно з (6.2),

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (6.3)$$

в) З рівняння ж адиабати Пуассона маємо  $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k$ , що з урахуванням (6.3) дає

$$\boxed{\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (6.4)$$

4) На підставі формули швидкості звуку за Лапласом і Пуассоном при ізоентропійному поширенні його в газі  $a = \sqrt{kRT}$  маємо  $\frac{a_0}{a} = \left(\frac{kRT_0}{kRT}\right)^{1/2}$ , звідки випливає

$$\boxed{\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.5)$$

де  $a_0$ ,  $a$  — швидкості звуку відповідно в нерухомому та рухомому газі.

5) Оскільки в термічно ідеальному газі питома ентальпія  $h = c_p T$ , то згідно з формулою (6.2) маємо

$$\boxed{\frac{h_0}{h} = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (6.6)$$

6) Для критичних параметрів, при яких місцева швидкість потоку дорівнює місцевій швидкості звуку ( $M=1$ ), з формул (6.2) – (6.4) легко отримати

$$T_* = \frac{2}{k+1} T_0; \quad \rho_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \rho_0; \quad p_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_0. \quad (6.7)$$

З першого співвідношення випливає **висновок**: оскільки в адиабатному потоці температура гальмування  $T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p}$  в усіх точках потоку одна й та сама, то й критична

температура  $T_*$ , а відтак і критична швидкість  $a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0}$  у потоці, будуть загальними для усього потоку величинами. Це видно також із формули  $a_0/a_* = \sqrt{T_0/T_*}$ .

7) Крім числа  $M$  в газодинаміці використовується інший важливий критерій подібності для газових течій, який теж характеризує **ступінь перетворення тепловмісту в кінетичну енергію** — так звана **зведена швидкість (швидкісний коефіцієнт)**  $\lambda = \frac{v}{a_*}$ .

Це випливає із співвідношення теплового перепаду до тепловмісту при критичному

режимі при  $c_p = \text{const}$ :  $\frac{h_0 - h}{h_*} = \frac{T_0 - T}{T_*} = \frac{v^2 \cdot R}{2c_p T_* \cdot R} = \frac{v^2 (c_p - c_v)}{RT_* \cdot 2c_p} = \frac{v^2}{kRT_*} \frac{k-1}{2}$ , що при  $kRT_* = a_*^2$

дає зв'язок  $\lambda$  з відносним тепловим перепадом:

$$\frac{h_0 - h}{h_*} = \frac{T_0 - T}{T_*} = \lambda^2 \frac{k-1}{2}. \quad (6.8)$$

На підставі (6.8), з використанням першого співвідношення з (6.7), можна отримати

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2. \quad (6.9)$$

Очевидно, на критичному режимі течії ( $v = v_* = a_*$ ) маємо  $\lambda_* = M_* = 1$ .

Максимальній теоретичній швидкості газового потоку відповідає певна величина максимальної зведеної швидкості:

$$\lambda_{\max} = \frac{v_{\max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (6.10)$$

Для повітря ( $k=1,4$ ):  $\lambda_{\max} = 2,45$ ; для водяної пари ( $k=1,3$ ):  $\lambda_{\max} = 2,77$ .

**8)** Даному значенню числа  $M$  відповідає цілком певне значення зведеної швидкості:

$\lambda = \frac{v}{a_*} = \frac{Ma}{a_*} = M \frac{a}{a_0} \frac{a_0}{a_*}$ . Після підстановки формул (6.5) та  $a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}$  маємо

$$\lambda = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1 + \frac{2}{M^2}}}. \quad (6.11)$$

Згідно з формулою (6.11), при  $M=1$  дістаємо  $\lambda=1$ ; при  $M \rightarrow \infty$  маємо  $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}$ , тобто приходимо до формули (6.10). Для повітря при зміні  $M$  від 0 до  $\infty$  величина зведеної швидкості змінюється від 0 до  $\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{1,4+1}{1,4-1}} = \sqrt{6}$ .

**9)** Іноді в газодинамічних розрахунках масштабом швидкостей слугує максимальна теоретична швидкість потоку  $v_{\max} = \sqrt{2h_0} = \sqrt{2c_p T_0}$ . Тоді безрозмірне рівняння тепловмісту можна представити в наступному вигляді.

З рівняння ентальпії випливає відоме співвідношення  $T_0 - T = \frac{v^2}{2c_p}$ . Поділивши обидві частини рівності на температуру гальмування  $T_0$ , дістанемо  $\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{v^2}{v_{\max}^2} = \Lambda^2$ , де

величину  $\Lambda = \frac{v}{v_{\max}}$  називають **відносною швидкістю**, або **числом Чаплигіна**.

Помноживши чисельник і знаменник цього дробу на критичну швидкість  $a_*$ , виділивши при цьому зведену швидкість  $\lambda = \frac{v}{a_*}$ , отримаємо зв'язок величин  $\Lambda$  і  $\lambda$ :

$$\Lambda = \lambda \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \quad (6.12)$$

Урахування (6.11) дозволяє зв'язати числа  $\Lambda$  і  $M$ :

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}} \cdot \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{M^2(k-1)}}}. \quad (6.13)$$

При підстановці до (6.12)  $\lambda_{\max}$  за формулою (6.10) отримуємо  $\Lambda_{\max} = 1$ .

Деякі переваги використання числа Чаплигіна  $\Lambda$  обумовлені наступним. При зміні числа  $M$  від 0 до  $\infty$  маємо відповідні зміни:

$$\text{швидкості газу } v \text{ від } 0 \text{ до } v_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}};$$

$$\text{зведеної швидкості } \lambda \text{ від } 0 \text{ до певної скінченної величини } \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}};$$

$$\text{числа Чаплигіна } \Lambda \text{ від } 0 \text{ до } 1.$$

**10)** Для зручності проведення розрахунків використовують таблиці так званих «газодинамічних функцій» (скорочено ГДФ), у яких наводяться значення  $M$ ,  $\lambda$  та інші параметри. Існують ГДФ параметрів гальмування, потоку маси (масової витрати) і потоку імпульсу.

а) ГДФ параметрів гальмування зв'язані з істинними параметрами стану газу через число  $M$  і зведену швидкість (швидкісний коефіцієнт)  $\lambda$ . Перший випадок передбачає відношення параметрів гальмування до істинних параметрів газу відповідно до формул (6.2) – (6.4). У другому випадку беруться обернені величини:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \tau(\lambda); \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \varepsilon(\lambda); \\ \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \pi(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Безрозмірні параметри  $\tau(\lambda)$ ,  $\varepsilon(\lambda)$ ,  $\pi(\lambda)$  називають ГДФ параметрів гальмування, які наведені в таблицях в залежності від  $M$  і  $\lambda$  при різних показниках адиабати  $k$ .

б) **ГДФ потоку маси** отримують з умови однаковості масової витрати газу в довільному перерізі каналу і в критичному його перерізі:  $\rho v S = \rho_* a_* S_*$ , звідки

$$\frac{\rho v}{\rho_* a_*} = \frac{S_*}{S}. \quad (6.15)$$

Співвідношення щільностей потоку маси (які характеризують масову витрату через одиницю площі поперечних перерізів) у лівій стороні рівності позначають як  $q(\lambda) = \frac{\rho v}{\rho_* a_*}$

і називають **зведеною витратою**, або **коефіцієнтом масової витрати**.

Ця величина залежить від зведеної швидкості  $\lambda$  і показника адиабати  $k$ , і зв'язок між ними можна знайти на підставі рівностей (6.7), (6.14) та деяких підстановок. Остаточного отримавмо

$$q(\lambda) = \frac{v}{a_*} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_*} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} = \lambda \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \varepsilon(\lambda) = \lambda \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (6.16)$$

Звідси випливає, що при  $\lambda = 0$   $q(\lambda) = 0$ ;

при  $\lambda = \lambda_* = 1$   $q(\lambda) = 1$ ;

при  $\lambda = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$   $q(\lambda) = 0$ .

Із співвідношення (6.15) та характеру зміни  $q(\lambda)$  випливає, що сталість масової витрати газу, наприклад, в соплі Лавалля, зв'язана із зростанням щільності потоку маси при зменшенні площі поперечного перерізу та із зменшенням щільності потоку при зростанні площі перерізу.

За допомогою  $q(\lambda)$  зручно вираховувати масову витрату газу через  $p_0$  або через  $p$ :

$$Q_m = \rho v S = m S \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \cdot q(\lambda) = m S \frac{p}{\sqrt{T_0}} \cdot \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)}, \quad (6.17)$$

де  $m = \sqrt{\left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R}}$  — постійна для даного газу величина;  $p_0 = p / \pi(\lambda)$ .

ГДФ  $q(\lambda)$  і  $\pi(\lambda)$ , та їх співвідношення залежать лише від  $\lambda$ , тому можна ввести

$$\text{ГДФ } Y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \text{ Тоді формула (6.17) набуває вигляду}$$

$$Q_m = mS \frac{p}{\sqrt{T_0}} \cdot Y(\lambda). \quad (6.17')$$

Із збільшенням  $\lambda$  функція  $Y(\lambda)$  монотонно зростає, причому при  $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}$   $Y(\lambda) \rightarrow \infty$ . Формули (6.17) і (6.17') виражають масову витрату газу через параметри його стану в досліджуваному перерізі потоку, тому не залежать від характеру процесів, що відбуваються в потоці газу.

В критичному перерізі каналу ( $\lambda = \lambda_* = 1$ ), у якому  $q(\lambda) = 1$ , масова витрата визначається за формулою

$$Q_m = mS_* \cdot \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}. \quad (6.17'')$$

Для повітря [ $k = 1,4$ ;  $R = 287$  Дж/(кг·К)]  $m = 0,0404$  (м<sup>-1</sup>·с·К<sup>0,5</sup>). Для вихлопних газів в турбореактивних двигунах [ $k = 1,33$ ;  $R = 288,3$  Дж/(кг·К)]  $m = 0,0396$ . Для порохових газів в середньому можна вважати  $m = 0,035$ .

в) **ГДФ потоку імпульсу** отримують із закону кількості руху, який установлює зв'язок між імпульсом сили і зміною кількості руху. Щодо двох поперечних перерізів одновимірного потоку ідеального газу так зване **рівняння кількості руху в повних імпульсах** має вигляд  $p_1 S_1 - p_2 S_2 = Q_m (v_2 - v_1)$ , або  $p_1 S_1 + Q_m v_1 = p_2 S_2 + Q_m v_2$ .

Суму секундної кількості руху і сили тиску газу в певному перерізі потоку прийнято називати **повним імпульсом потоку**:

$$I = Q_m v + pS = Q_m \left( v + \frac{p}{\rho v} \right). \quad (6.18)$$

Скористаємося рівнянням Клапейрона, враховуючи при цьому (6.9) щодо  $T$ , а також формулу (5.13), тобто  $a_*^2 = \frac{2k}{k+1} RT_0$ :

$$\frac{p}{\rho} = RT = RT_0 \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) = a_*^2 \frac{k+1}{2k} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right).$$

Підставимо цей результат, а також співвідношення  $v = \lambda a_*$  в (6.18):

$$I = Q_m v + pS = Q_m \left( \lambda a_* + \frac{a_*}{\lambda} \frac{k+1}{2k} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \right). \quad (6.19)$$

Після перетворень можна прийти до виразу

$$I = Q_m v + pS = Q_m \frac{k+1}{2k} a_* z(\lambda), \quad (6.20)$$

де  $z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ .

Мінімальне значення функції  $z(\lambda) = 2$  відповідає критичній швидкості течії ( $\lambda_* = 1$ ).

Переконаємося в цьому:  $\frac{d}{d\lambda} z(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda_* = 1; z(\lambda_*) = 2.$

Це – мінімальне значення функції  $z(\lambda)$ , оскільки  $\frac{d}{d\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda^3} > 0$  при  $\lambda = \lambda_* = 1.$

Функція  $z(\lambda)$ , як видно, на відміну від решти ГДФ, не залежить від величини показника адіабати  $k$ , тобто від роду газу, тому її значення залишається однаковим для всіх газів. До того ж, при заміні величини  $\lambda$  оберненою їй величиною  $\lambda' = 1/\lambda$  значення функції не змінюється. Це свідчить про те, що одній величині  $z(\lambda)$  можуть відповідати два взаємно обернених значення зведеної швидкості  $\lambda$ : одне визначає дозвукову течію, а друге — надзвукову течію газу.

З рівняння (6.19) випливає, що для критичного перерізу ( $v_* = a_*, \lambda_* = 1$ ) маємо

$$I_* = Q_m a_* + p_* S_* = Q_m \left( a_* + a_* \frac{k+1}{2k} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \right) \right) = \frac{k+1}{k} Q_m a_*. \quad (6.21)$$

Порівнюючи вирази (6.21) і (6.20), бачимо, що ГДФ  $z(\lambda)$  відображає міру співвідношення повного імпульсу потоку у будь-якому перерізі каналу і повного імпульсу в критичному перерізі:

$$z(\lambda) = 2 \frac{I}{I_*} = 2 \frac{Q_m v + pS}{Q_m a_* + p_* S_*}. \quad (6.22)$$

Вираз (6.20) для повного імпульсу потоку значно спрощує запис і перетворення рівняння кількості руху газу. До того ж, він є дуже корисним при розрахунках течій з ударними хвилями, з підведення та відведенням теплоти, течій з тертям, з «ударом» при раптовому розширенні каналу, при розрахунках процесів змішування потоків, при визначенні сил на стінки каналів, при розрахунках реактивної тяги тощо.

Застосовуються також наступні ГДФ:

– відношення повного імпульсу потоку у будь-якому поточному перерізі каналу до повного імпульсу загальмованого потоку

$$f(\lambda) = \frac{I}{I_0} = \frac{Q_m v + pS}{p_0 S} \Rightarrow Q_m v + pS = p_0 S f(\lambda); \quad (6.23)$$

– відношення статичної частини повного імпульсу до повного імпульсу потоку у будь-якому перерізі каналу

$$r(\lambda) = \frac{pS}{I} = \frac{pS}{Q_m v + pS} \Rightarrow Q_m v + pS = \frac{pS}{r(\lambda)}. \quad (6.24)$$

Як видно, праві частини рівнянь (6.23) і (6.24) не містять витрати газу, температури або критичної швидкості. **Звідси приходимо до висновку:** якщо при заданих величинах  $S$

і  $\lambda$  повний або статичний тиск в потоці постійні, то і величина повного імпульсу зберігається постійною незалежно від температури і масової витрати газу.

## 6.2. Необоротні процеси течії

Звернемося до загального випадку необоротного процесу течії термічно ідеального газу. При течії в'язкого газу, коли робота сил тертя необоротно переходить в теплоту, або, як дізнаємося пізніше, при ударному адіабатному стисканні газу в стрибку ущільнення, відбувається зростання ентропії. Визначимо зростання ентропії спочатку при нескінченно малій зміні параметрів газу в такому потоці.

Запишемо рівняння **Першого принципу термодинаміки**, згідно з яким елементарна кількість підведеної до газу іззовні теплоти  $\delta q$  (теплоти «зовнішнього теплообміну») витрачається на зростання внутрішньої енергії  $du$  і на виконання «зовнішньої роботи» — роботи проти зовнішнього тиску  $\delta l'$  (в питомих величинах):

$$\delta q = du + \delta l' . \quad (6.25)$$

Рівняння (6.25) справджується як для оборотних, так і для необоротних процесів.

Ефективну «зовнішню роботу»  $\delta l'$  можна розглядати як різницю між термодинамічною роботою зміни об'єму (тобто, роботи розширення газу як робочого тіла)  $\delta l = pd(1/\rho)$  та незворотними втратами роботи  $\delta l_r$ , які витрачаються на роботу тертя і на кінетичну енергію завихрень в газі. Останні після їх згасання\* переходять в еквівалентну кількість теплоти (теплоти «внутрішнього теплообміну»)

$$\delta l_r = \delta q_r .$$

\*) Фактично це передбачає припущення про те, що процес такого переходу є рівноважний, але необоротний за умовами перетворення частини роботи в теплоту!

Теплота «внутрішнього теплообміну» по відношенню до робочого тіла є завжди додатною ( $\delta q_r > 0$ ) і наче додається до теплоти «зовнішнього теплообміну», але по факту призводить до зростання внутрішньої енергії. Отже, при підведенні до газу елементарної кількості теплоти  $\delta q = idem$  в необоротному процесі «зовнішня робота» зменшується на величину, еквівалентну  $\delta q_r$ , але на таку саме величину зростає внутрішня енергія газу.

Якщо вважати, що термодинамічна робота зміни об'єму повністю витрачається на подолання зовнішнього тиску (тобто, тиск робочого тіла (газу) є однаковий із зовнішнім тиском):  $\delta l = pd(1/\rho) = \delta l'$ , то тоді **Перший закон термодинаміки** запишеться як

$$\delta q = du + pd(1/\rho) . \quad (6.26)$$

Це строго виправдано для оборотних процесів ( $\delta l_r = \delta q_r = 0$ ), але у багатьох випадках різницею між оборотними та реальними процесами можна нехтувати, що значно

спрощує практичні розрахунки, і вважати, що повна кількість підведеної до газу іззовні теплоти включає і теплоту «внутрішнього теплообміну»  $\delta q_r$ .

При переході від елементарної до повної скінченої кількості підведеної до газу теплоти виявляється, що інтеграл від лівої частини рівняння (6.26) залежить від шляху процесу зміни стану газу, тобто від виду кривої, яка з'єднає початкову та кінцеву точки процесу на поверхні  $F(p, \rho, T) = 0$ . Отже,  $\delta q$  в (6.26) не є повним диференціалом. Як відомо з термодинаміки, після множення (6.26) на так званий **інтегруючий множник**  $\frac{1}{T}$ , вираз (6.26) стає повним диференціалом деякої функції  $s$  — **ентропії**:

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du + pd(1/\rho)}{T}. \quad (6.27)$$

Треба пам'ятати, що ця формула є справедливою як для ідеальних (оборотних), так і реальних (необоротних) систем з тією різницею, що для останніх умовно приймається, що підведена до газу теплота враховує і теплоту «внутрішнього теплообміну»  $\delta q_r$ .

Використання закону Джоуля  $du = c_v dT$  і рівняння Клапейрона  $\frac{p}{\rho} = RT$  для термічно ідеального газу дозволяє формулу (6.27) звести до вигляду

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}.$$

Інтегруючи останній вираз в границях від параметрів гальмування  $T_0, \rho_0, p_0$  до поточних величин параметрів  $T, \rho, p$  за умови постійності теплоємності  $c_v$ , отримаємо відповідне зростання питомої ентропії при необоротному адіабатному процесі руху газу:

$$s - s_0 = c_v \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} - R \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \ln T \Big|_{T_0}^T - R \ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho} = c_v \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Після підстановки питомої ізохорної теплоємності  $c_v = \frac{R}{k-1}$  та врахування рівняння Клапейрона легко отримати

$$s - s_0 = \frac{R}{k-1} \left[ \ln \frac{T}{T_0} - \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right] = \frac{R}{k-1} \left[ \ln \frac{p \cdot \rho_0}{\rho \cdot p_0} - \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right],$$

або остаточно

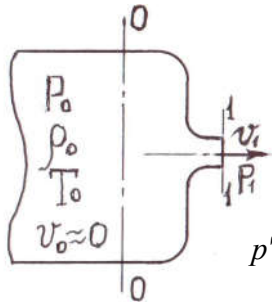
$$\boxed{s - s_0 = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^k}}. \quad (6.28)$$

Для адіабатних (ізоентропійних) течій нев'язкого газу без стрибків ущільнення з

рівняння адиабати Пуассона маємо  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$ , тоді з формули (6.28) випливає незмінність ентропії для таких процесів:  $s_0 = s$ .

### 6.3. Ізоентропійне витікання газу з резервуара

Нехай нев'язкий газ з параметрами  $p_0, \rho_0, T_0$  гальмування витікає адиабатно з резервуара великого об'єму ( $v_0 \approx 0$ ) через сопло, що звужується за формою струменя, зі швидкістю  $v_1$  на зрізі сопла в простір із тиском  $p'$  (так званім протитиском) (рис. 6.1).



Розв'яжемо інтеграл Бернуллі для ідеального газу, записаний для перерізів 0-0 і 1-1

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

відносно швидкості газу на зрізі сопла:  $v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)}$ .

Рис. 6.1.

Використовуючи рівняння адиабати Пуассона у формі  $\rho_0/\rho = (p_0/p)^{1/k}$ , отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0 \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (6.29)$$

Масова витрата газу в струмені при площі зрізу  $S$  сопла дорівнює  $Q_m = \rho_1 v_1 S$ , що після підстановки швидкості з (6.29) після перетворень дає

$$Q_m = S \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (6.30)$$

Формули (6.29) і (6.30) мають назву **формул Сен-Венана і Вантцеля** (1839 р.).

Проведемо дослідження на екстремум (максимум) виразу в дужках під коренем при введенні позначення  $\beta = \frac{p_1}{p_0}$ :

$$\frac{d}{d\beta} \left( \beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right) = 0 \Rightarrow \beta = \beta_{extr} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (6.31)$$

Перевірка показує, що друга похідна функції  $\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}$  в точці  $\beta_{extr}$  від'ємна. Таким чином можна стверджувати, що при досяганні співвідношення тисків  $p'/p_0 = p_1/p_0$

знайденого значення  $\beta_{extr}$  масова витрата газу на виході сопла буде максимальною. Легко довести, що величина  $\beta_{extr}$  дорівнює критичному співвідношенню тисків:  $\beta_{extr} \equiv \beta_* = p_*/p_0$ . Для цього достатньо в інтеграл Бернуллі–Сен-Венана підставити критичні величини  $a_*^2 = kp_*/\rho_*$ ,  $a_0^2 = kp_0/\rho_0$ , а також одне

з наведених вище співвідношень (6.7) 
$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В результаті переконуємося, що саме величина  $\beta_*$  забезпечує максимум масової витрати газу:  $Q_m/Q_{m*} = \max$ .

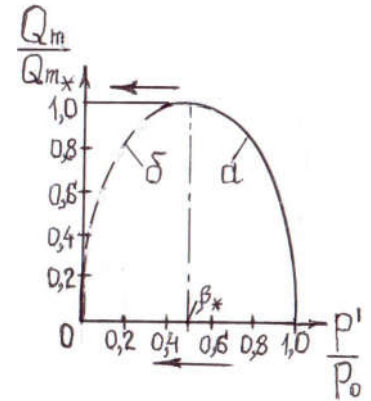


Рис. 6.2.

Якщо уявити, що в формулі (6.30) тиск в струмені на зрізі сопла  $p_1$  дорівнює протитиску в оточуючому просторі  $p'$ , то розрахунком масової витрати, представленій в безрозмірному вигляді  $Q_m/Q_{m*}$ , в діапазоні  $0 \leq \frac{p'}{p_0} \leq 1$  можна побудувати криву, наведену на рис. 6.2.

Коли різниця тисків  $p_0 - p'$  є відносно невеликою ( $v_1 < a$ ), то при повільному зменшенні протитиску  $\frac{p'}{p_0} < 1$  за ходом нижньої стрілки на рис. 6.2 швидкість витікання і масова витрата на виході сопла зростатимуть доти, доки швидкість на зрізі сопла сягатиме місцевої швидкості звуку  $v_* = a_*$  і, відповідно,  $\frac{p'}{p_0}$  досягне значення  $\beta_*$  (для повітря  $k \approx 1,4$  і  $\beta_* \approx 0,528$ ).

Цьому відповідає права вітка **a** на рис. 6.2, зростання якої зумовлене тим, що при  $M < 1$  відносна зміна (зменшення) густини за модулем є меншою, ніж відносне зростання швидкості:

$$\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| < \left| \frac{dv}{v} \right|.$$

Для доведення цієї нерівності треба скористатися диференціальним рівнянням руху нев'язкого газу Л. Ейлера для одновимірної стаціонарної течії газу при нехтувати масовими силами, яке можна записати у повних похідних:  $v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ , звідки  $dp = -\rho v dv$ \*, на підставі якого, при врахуванні формул  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$  і  $M = \frac{v}{a}$ , можна отримати  $M^2 = -\frac{(d\rho/\rho)}{(dv/v)}$ . Звідси випливає справедливність наведеної вище нерівності при  $M < 1$ . Після досягнення струменем критичної швидкості  $v_* = a_*$  на зрізі сопла подальше зменшення протитиску  $p'$ , що супроводжується відповідними збуреннями, поширюваними зі швидкістю звуку, вже не

мають змоги потрапляти до резервуару, оскільки вони зноситимуться потоком, який сам досяг швидкості звуку. Тому подальше зниження протитиску на ділянці  $0 \leq \frac{p'}{p_0} < \beta_*$  не призводить до зміни величин як швидкості витікання  $v_1$  (яка залишається постійною і рівною  $a_*$ ), так і відносної масової витрати, причому  $Q_m/Q_{m*} = 1$  (див. горизонтальну ділянку під верхньою стрілкою на рис. 6.2). Таке явище має назву «газодинамічного замикання» вихідного перерізу сопла, як кажуть, «звуковим бар'єром». Спадаюча вітка  $\theta$  на графіку рис. 6.2 відповідає **уявному** і недосяжному реально процесу витікання, формально отриманому за формулою (6.30) в діапазоні співвідношень тиску  $0 \leq \frac{p'}{p_0} < \beta_*$ ,

коли  $\theta$  мале місце зменшення густини газу відповідно до нерівності  $\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| > \left| \frac{dv}{v} \right|$  в міру наближення  $\frac{p'}{p_0}$  до 0.

Режим витікання газу в діапазоні співвідношень тисків  $1 > \frac{p'}{p_0} > \beta_*$  (коли  $p' = p_1$ ) називають **докритичним**, а в діапазоні тисків  $0 < \frac{p'}{p_0} < \beta_*$  (коли  $p_1 = p_* = \text{idem}$ ) — **надкритичним**.

Для отримання надзвукових швидкостей витікання газу замість звукувальних сопел з циліндричною вихідною частиною застосовують спеціальні геометричні сопла (сопла Лаваля), теплові (термічні), витратні (масові), механічні та комбіновані види сопел.

---

\*) Можна також скористатися рівнянням Бернуллі у формі  $\boxed{dp = -\rho v dv}$  (що витікає при диференціюванні рівняння Бернуллі при  $\rho = \text{const}$ :  $p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 = \text{const}$ ;  $dp + \rho \frac{2v}{2} dv = 0$ , або  $dp + \rho v dv = 0$ , звідки  $\boxed{dp = -\rho v dv}$ , щ. п. д.). Така форма рівняння передбачає, що при нескінченно малих змінах тиску  $dp$  густина  $\rho$  є практично незмінною. Таким чином, більш коректно, згадуючи рівняння Бернуллі, одразу писати його в диференціальній формі, яка передбачає змінність густини; при інтегруванні ж в конкретних випадках треба вже враховувати або  $\rho = \text{const}$ , або  $\rho = \text{var}$ . Але, все ж, бажано формулу  $dp = -\rho v dv$  отримувати одразу безпосередньо з рівняння Ейлера (яке передбачає  $\rho = \text{var}$  у загальному випадку), як в основному тексті.

---

#### 6.4. Деякі принципи отримання надзвукових швидкостей течії газу

Для газу рівняння нерозривності в гідравлічній формі означає збереження масової витрати  $Q_m = \rho v S = \text{const}$ . Логарифмічним диференціюванням вздовж осі  $x$  знаходимо

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0. \quad (6.32)$$

Рівняння руху Л. Ейлера для одновимірної течії при нехтуванні масовими силами

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dx},$$

звідки маємо

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{v}{a^2} \frac{dv}{dx}.$$

Підстановка останнього виразу до (6.32) дає

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{v}{a^2} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx},$$

або

$$\boxed{\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} (M^2 - 1)}. \quad (6.33)$$

Ми отримали **формулу П.-А. Гюгонію**.

Аналіз цього співвідношення показує, що при дозвукових швидкостях ( $M < 1$ ) зменшення площі перерізу труби спричинює збільшення швидкості. При надзвукових швидкостях ( $M > 1$ ) для збільшення швидкості потрібно збільшити площу перерізу каналу.

На згаданому вище принципі працює геометричне **сопло К. Г. П. Лаваля**. Його розраховують так, щоб у найвужчому перерізі швидкість течії була критичною:  $M = 1$  (рис. 6.3). Тоді в частині каналу, що розширюється, швидкість потоку стане надзвуковою

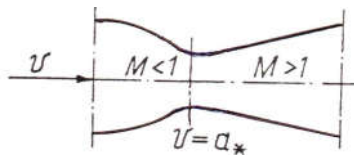


Рис. 6.3.

і буде зростати. Нижче буде показано, що надзвукові швидкості можна дістати також у теплових і витратних циліндричних соплах (підведенням і відведенням теплоти  $Q_T$

або маси  $m$  газу на різних ділянках каналу) (рис. 6.4), а також в механічних і комбінованих соплах.

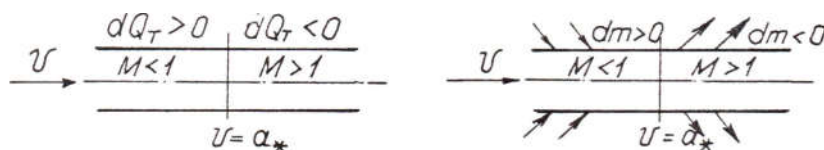


Рис. 6.4.

## 7. ОЦІНКИ ВПЛИВУ СТИСЛИВОСТІ ГАЗУ НА ПАРАМЕТРИ ТЕЧІЇ

### 7.1. Відомості про стисливість

Нагадаємо, що стисливість суцільного середовища – це його властивість змінювати об'єм, а отже, густину при зміні тиску. В багатьох задачах гідрогазодинаміки приймається наближення відсутності стисливості рідин і газів, що суттєво спрощує пошук розв'язку. Щодо краплинних рідин, таке наближення справджується з високою точністю, крім випадків досліджень поведінки рідин при високих тисках, явищ гідравлічного удару, течії струменів гідрогармат тощо. Наприклад, при зростанні тиску під рухомих поршнем в

циліндрі на 1 бар відносно зменшення об'єму води відповідає співвідношенню 1:20600. З іншого боку, таке збільшення тиску у випадку повітря при постійній температурі викликає відносно зменшення об'єму у співвідношенні 1:2 згідно із законом Бойля–Маріотта.

Однак, прояв властивості стисливості залежить не тільки від середовища, але у першу чергу від умов його руху. При русі тіла в газі (або газу, що його обтікає) з дозвуковою швидкістю  $v < a$  виникаючі збурення призводять до зміни тиску в газі, а отже, до відповідної зміни густини  $\rho$ , що викликає хвильовий процес по «вирівнюванню»  $\rho$  газу по всьому об'єму з місцевою швидкістю звуку  $a$  (тобто швидкістю малих збурень). При  $v < a$  процес вирівнювання  $\rho$  встигає охопити весь об'єм. По мірі наближення швидкості течії або руху тіла в газі до швидкості звуку зміна тиску викликає все більшу відносну зміну густини газу, його стисливість починає все більше позначатися спочатку на кількісних характеристиках течії, а при подальшому збільшенні швидкості і на її якісних особливостях. Так, при  $v > a$  у всій області течії або в її частині процес вирівнювання  $\rho$  по об'єму газу відбутися не встигає, що призводить до утворення і поширення поверхонь розриву густини, тиску, температури й швидкості, тобто так званих «стрибків ущільнення» і ударних хвиль. Це робить процес суттєво нерівноважним і нелінійним, який не можна представити у простому вигляді накопичення та знесення збурень. Таким чином, з практичної точки зору важливо отримати певні кількісні критерії впливу стисливості газу на параметри його течії.

## 7.2. Оцінка впливу стисливості газу за тиском

Почнімо з розгляду стаціонарного обтікання нерухомого тіла **нестисливим** ( $\rho = const$ ) і нев'язким газом (рис. 7.1).

В критичній точці А на нульовій лінії течії  $\psi_0 = 0$  швидкість  $v = v_0 = 0$ , тоді тиск загальмованого газу в цій точці на підставі інтеграла Д. Бернуллі дорівнює

$$\boxed{p_0 = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2}}, \quad (7.1)$$

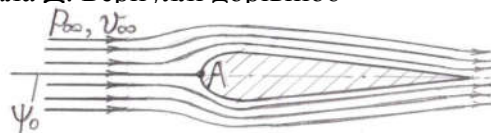


Рис. 7.1.

де  $p_\infty$ ,  $\rho = \rho_\infty$ ,  $v_\infty$  — тиск, густина і швидкість потоку, що набігає;  $p_0$  — повний тиск.

Таким чином, тиск у критичній точці А більше, ніж у незбуреному потоці, на величину динамічного тиску  $\frac{\rho v_\infty^2}{2}$  за рахунок гальмування газу. Це означає, що з **фізичної точки зору** індивідуальна частинка газу при її русі вздовж траєкторії, яка збігається з нульовою («критичною») лінією течії  $\psi_0 = 0$ , піддається стисненню, і густина

мала б зростати. Питання — на скільки? Певна річ, зміна густини мала б спостерігатися і для частинок, що належать іншим лініям течії, але найбільша зміна  $\rho$ , очевидно, притаманна частинкам «критичної» лінії течії в точці  $v_0 = 0$  порівняно з газовими частинками подалі від обтічного тіла. Зрозуміло, рівняння (7.1) отримано за умови  $\rho = const$  і формально ніяким чином не може відображати зазначені ефекти.

Для врахування стисливості газу звернемося до одновимірного диференціального рівняння стаціонарного руху  $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$  ідеальної рідини Л. Ейлера вздовж лінії течії при нехтуванні масовими силами через їх малість в газі ( $F = 0$ )

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} + v \frac{dv}{dl} = 0, \quad (7.2)$$

де  $l$  — координата вздовж лінії течії.

Процес течії газу приймаємо оборотно адіабатним ( $s = const$ ). З урахуванням формули адіабати Пуассона  $p/\rho^k = C$  ( $k$  – показник адіабати) рівняння (7.2) набуває вигляду

$$\left(\frac{C}{p}\right)^{1/k} \frac{dp}{dl} + \frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \quad C^{1/k} \frac{k}{k-1} \frac{d}{dl} p^{(k-1)/k} + \frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \text{ або}$$

$$\frac{d}{dl} \left[ \frac{k}{k-1} \left(\frac{C}{p}\right)^{1/k} \cdot p + \frac{v^2}{2} \right] = 0.$$

Знов використовуючи адіабату Пуассона, маємо

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0,$$

звідки отримаємо інтеграл щодо «критичної» лінії течії для будь-якої точки незбуреного потоку та точки гальмування А (відповідні параметри позначено індексами  $\infty$  та 0):

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (7.3)$$

Таким чином, ми ще раз отримали інтеграл Д. Бернуллі для стаціонарної адіабатної (ізоентропійної) течії стисливого газу вздовж лінії течії, який знайомий нам з п. 5.2.1.

З інтеграла (7.3), маючи на увазі рівняння адіабати  $\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^k}$ , отримаємо

$$p_0 = p_\infty \left( 1 + \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{p_\infty} \right)^{k/(k-1)} = p_\infty \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_\infty^2 \right)^{k/(k-1)}, \quad (7.4)$$

де використано співвідношення для швидкості звуку, тобто малих пружних деформацій в газі при ізоентропійному поширенні їх, — відома вам формула Лапласа–Пуассона  $a_\infty = \sqrt{k p_\infty / \rho_\infty}$ , а також число Маха-Маїєвського  $M_\infty = v_\infty / a_\infty$ . Оскільки поширення малих збурень в пружному середовищі відбувається досить швидко у вигляді певного хвильового процесу, то можна вважати, що деформації у кожному елементі об'єму газу відбуваються адіабатно та без істотних втрат енергії, тобто при постійній ентропії. Нагадаємо, що формула (7.4) міститься також в блоці так званих «ізоентропійних співвідношень», які ми вивчали в розділі 6.

Враховуючи величини показників адіабати для більшості газів, що зустрічаються в практичних задачах (для двохатомних газів  $k=1,4$ ; для трьохатомних  $k=1,33$ ), стверджуємо, що для дозвукових швидкостей другий доданок в дужках виразу (7.4)  $\frac{k-1}{2} M_\infty^2 \ll 1$ . Тоді це дає підставу при розкладанні другого множника правої частини (7.4) в біноміальний ряд обмежитись першими трьома членами, в результаті чого приходимо до виразу

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} \left( 1 + \frac{M_\infty^2}{4} \right) + \dots \quad (7.5)$$

{Нагадаємо біном Ньютона:  $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ ;

у нашому випадку  $x = \frac{k-1}{2} M_\infty^2$ ;  $x \ll 1$ ;  $m = \frac{k}{k-1}$  }.

Порівнюючи формулу (7.5) з рівнянням (7.1) для нестисливого газу, бачимо, що при  $\frac{M_\infty^2}{4} \ll 1$  вони збігаються. Таким чином, при дотриманні умови

$$\frac{M_\infty^2}{4} \ll 1 \quad (7.6)$$

газ при його русі можна вважати нестисливою рідиною!

Наведемо приклад.

Нехай повітря [ $k=1,4$ ;  $R=287,14 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ] рухається зі швидкістю незбуреного потоку  $v_\infty = 68 \text{ м/с}$ ,  $102 \text{ м/с}$ ,  $170 \text{ м/с}$  при нормальному барометричному тиску  $760 \text{ мм рт. ст.}$  ( $p_\infty = 101325 \text{ Па}$ ), температурі  $15^\circ\text{C}$  ( $T_\infty = 288 \text{ К}$ ), густині  $\rho_\infty = 1,225 \text{ кг/м}^3$ . Вирахуємо величини максимальної поправки  $M_\infty^2/4$ , повні тиски  $p_{0,p}$  і  $p_{0,s}$  для двох

досліджуваних випадків відповідно при  $\rho = const$ ,  $\rho = var (s = const)$  та їх відносну різницю  $\overline{\Delta p_0} = \frac{p_{0,s} - p_{0,\rho}}{p_{0,\rho}} \cdot 100\%$  (табл. 2). Швидкість звуку за даних умов складає

$$a_s = \sqrt{kp_\infty / \rho_\infty} = 340,35 \text{ м/с}.$$

Таблиця 2.

$v_\infty$ , м/с	$M_\infty$	$M_\infty^2/4$	$p_{0,\rho}$ Па	$p_{0,s}$ Па	$\overline{\Delta p_0}$ , %
68	0,2	0,01	104157,2	104185,52	0,027%
102	0,3	0,0225	107697,45	107840,83	0,133%
170	0,5	0,0625	119026,25	120132,57	0,93%

Таким чином, при швидкостях руху газу, що відповідають числам  $M_\infty \leq 0,5$ , зміна повного тиску з урахуванням стисливості газу не перевищує 1%.

### 7.3. Оцінка впливу стисливості газу за густиною

З використанням рівняння адиабати формула (7.4) перетворюється до вигляду

$$\rho_0 = \rho_\infty \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_\infty^2 \right)^{1/(k-1)}. \quad (7.7)$$

Розкладання другого множника правої частини (7.7) в біноміальний ряд за аналогічної умови  $\frac{k-1}{2} M_\infty^2 \ll 1$  дозволяє обмежитись першими трьома членами, в результаті чого приходимо до виразу

$$\rho_0 = \rho_\infty \left( 1 + \frac{M_\infty^2}{2} + \frac{M_\infty^4}{8} (2-k) + \dots \right) \approx \rho_\infty + \rho_\infty \frac{M_\infty^2}{2},$$

оскільки третій доданок в дужках набагато менший за перших два. Останній вираз дає

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty} \approx 1 + \frac{M_\infty^2}{2}, \quad (7.8)$$

а також

$$\rho_0 - \rho_\infty = \Delta\rho \approx \rho_\infty \frac{M_\infty^2}{2}, \text{ або } \boxed{\frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} \approx \frac{M_\infty^2}{2}}. \quad (7.9)$$

Очевидно, при відносно невеликих дозвукових швидкостях газу можна вважати, що  $\rho_0 \approx \rho_\infty$ , принаймні для  $M_\infty \leq 0,2 \div 0,3$  (відповідно з точністю від 2% до 4,5% на

вказаних границях, що цілком прийнятне для технічних розрахунків). При  $M_\infty = 0,5$  відносна зміна густини вже складатиме 12,5% , а при подальшому зростання числа Маха–Маїєвського до  $M_\infty \geq 1$  вплив стисливості стає визначальним.

### Висновки

1. Ми отримали критерії оцінки впливу стисливості газу за повним тиском і за густиною в залежності від швидкості його руху — формули (7.6) і (7.9).

2. **В практичних розрахунках** характеристик течії газових потоків (в тому числі обтікання тіл) прийнято вважати, що при числах Маха–Маїєвського  $M \leq 0,2 \div 0,3$  стисливістю можна нехтувати і вважати  $\rho = const$ .

## 8. ЗБУРЕННЯ В ГАЗІ. СИСТЕМИ ПРОСТИХ ХВИЛЬ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС

### 8.1. Загальна характеристика збурень в газі

Поняття «збурення» в газодинаміці означає місцеву зміну будь-якого з параметрів газу, наприклад місцеві підвищення або зниження тиску  $p$ , густини  $\rho$ , швидкості  $\vec{v}$  або їх комбінації. Збурення мають властивість поширюватися у вигляді хвиль як в об'ємі нерухомого газу, так і в потоках. В залежності від величини і характеру збурень розглядають такі їх види: *малі (слабкі) збурення та збурення і хвилі скінченної інтенсивності*.

Збурення називають **малим (слабким)** при дуже малій зміні якогось параметра (наприклад, тиску, густини). Малі збурення можуть змінюватися за будь-яким законом та поширюватися від джерела збурень у всьому полі пружного середовища як дуже малі деформації у вигляді деякого хвильового процесу. Прикладом малих збурень є акустичні збурення, що викликають поширення звукової хвилі з місцевою швидкістю звуку відповідно до наявних фізичних умов

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Властивість передавати коливальний рух звуковими (пружними) хвилями притаманна будь-якому суцільному середовищу — твердому, рідкому або газоподібному. Таким чином, поширюються, строго кажучи, не самі збурення, а сферичні хвилі від них. При малих збуреннях в газі усі параметри течії ( $p, \rho, T, \vec{v} \dots$ ) є неперервними функціями координат і часу, а величина приросту будь-якого параметра мала порівняно з його значенням до появи збурення, наприклад,  $\Delta p \ll p, \Delta \rho \ll \rho$ . Стрибокподібно змінюються не самі параметри газу, а швидкості їх зміни, тобто їх похідні або градієнти. Оскільки

поширення таких збурень є дуже швидким, то можна вважати, що малі деформації у кожному елементарному об'ємі газового середовища відбуваються адіабатно (без теплообміну із суміжними частинками газу) та практично без втрат енергії, тобто ізоентропійно ( $s = const$ ), коли справджується рівняння адіабати Пуассона  $\frac{P}{\rho^k} = C$ , де

$k = c_p/c_v$  – показник адіабати (для одноатомних газів 1,667; двоатомних 1,4;

трьохатомних і більше 1,3). Ізоентропійному поширенню дуже малих деформацій в газі відповідає адіабатний модуль об'ємного стиснення газу, а отже, можна покласти, що швидкість звуку розраховується згідно з **формулою Лапласа-Пуассона** (1810 р.) для

термічно ідеального газу  $a = a_s = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kRT}$ , оскільки згідно з рівнянням

Клапейрона:  $\frac{P}{\rho} = RT$ , де  $R = \frac{R_m}{M_2}$  – газова постійна,  $\frac{Дж}{кг \cdot K}$ ;  $R_m = 8,3143 \frac{Дж}{моль \cdot K}$  –

універсальна газова стала;  $M_2$  – молярна маса,  $\frac{кг}{моль}$ . Ізоентропійна модель поширення

малих збурень в газі добре підтверджується експериментальними даними.

Розглянемо більш детально механізм утворення та поширення звукових (акустичних) хвиль. Якщо стиснути об'єм газу і надати йому можливість розширяться, його пружність приведе в рух оточуючий газ. При цьому початково стиснутий газ розшириться не до первісного об'єму, а більше — розширюючись, він набере розгону. Робота, що початково була витрачена на стиснення, перейде в кінетичну енергію руху, яка, в свою чергу, буде витрачена на роботу стиснення оточуючого газового середовища. Але й воно не залишиться стиснутим: розширюючись, воно теж перетворить здійснену над ним роботу в кінетичну енергію і стисне прилеглий шар газу і т.д. Таким чином, по газу бігтиме **звукова хвиля** у вигляді періодичної послідовності згущень і розріджень. Відомо, що гази більшою мірою виявляють опір тільки зміні об'єму, але не форми, тобто по відношенню до різних перекосів та скручувань вони ніякої пружності не виявляють. Тому при описі поширення звукової (пружної) хвилі треба враховувати тільки розширення та стиснення кожного об'єму газу. При цьому швидкість поширення звуку визначається тільки властивостями самого газу і залежить від того, як швидко в ньому рух передається від одного об'єму до сусіднього (нагадаємо зв'язок модуля об'ємного стиснення  $E$  зі швидкістю звуку:  $E = \rho a^2$ ). Оскільки при поширенні звукових коливань робота витрачається не тільки на стиснення, але й на нагрівання газу, то при рівній з ізотермічній ступіні згущення частинок адіабатний спосіб потребує більшого тиску, ніж ізотермічний. Адіабатна пружність більше ізотермічної ( $E_s \approx 1,5 E_T$ , індекси відображають постійність

відповідних параметрів – ентропії і температури), що й пояснює появу в формулі для  $a_s$  коефіцієнта (показника адиабати)  $k > 1$ , відсутнього в **формулі Ньютона**  $a_t = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{RT}$  (1687 р.) для ізотермічної швидкості звуку ( $T=const$ , закон Бойля-Маріотта  $\frac{p}{\rho} = c$ ), яка дає розходження з фізичним дослідом у повітрі приблизно до 20%. Тільки при дуже малих частотах вимушених коливань газу від поршня з одного кінця труби, що створює наперемінно стиснення й розрідження газу в лабораторному досліді, їх поширення спостерігається як ізотермічне. Але швидкість поширення такого звуку (інфразвуку), яке нечутливе для вуха, є меншим порівняно зі швидкістю звичайного звуку (для дуже низьких частот приблизно в 1,19 разу). Якщо потік газу дозвуковий ( $v_\infty < a$ ), то порушення однорідності течії якимось джерелом збурення поширюється у всі сторони поля пружного газового середовища. Формула Лапласа-Пуассона для швидкості звуку в газі є набагато більш точною порівняно з формулою Ньютона.

**Збурення і хвилі скінченної інтенсивності** виникають при неперервній зміні будь-якого з параметрів (або їх комбінації) на певну скінченну величину.

Якщо ж скінченне збурення характеризується стрибкоподібною («миттєвою») зміною параметрів до певного скінченного значення, то спостерігається розрив неперервності зміни параметрів газу і мають місце так звані **збурення нескінченної інтенсивності**. Вони поширюються у вигляді **сильних хвиль збурення** зі швидкостями, набагато більшими за швидкість звуку, і мають назву **«ударних хвиль»**. Оскільки в ударній хвилі практично миттєво змінюються термодинамічний стан (в тому числі густина), характер і параметри руху газу на величини, порівняні із самими значеннями параметрів, то поверхню, яка відокремлює ударну хвилю від незбуреної області, називають **фронтом ударної хвилі** або **стрибком ущільнення**. При проходженні таких зон сильного збурення в газі через втрати механічної енергії виникає додатковий опір – так званий **хвильовий опір**. Припущення про миттєву зміну параметрів газу в ударній хвилі є певною ідеалізацією, оскільки в дійсності ця зміна є неперервною. Але відстань, на якій відбувається зміна параметрів газу (фактично товщина стрибка ущільнення), є дуже малою — порядку довжини вільного пробігу молекул  $\ell$ . Нагадаємо відомий приклад: якщо  $d \sim 10^{-10} \text{ м}$  – ефективний діаметр молекул, а  $n$  – кількість молекул в одиниці об'єму газу, то  $\ell \sim (nd^2)^{-1}$ . Так, для кисню за атмосферних умов  $\ell \approx 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ мм}$ .

**Сильні збурення** виникають на певних поверхнях в надзвукових і навколосвукових потоках у всій області течії або в її частині. У випадках, коли при обтіканні твердих тіл

дозвуковим потоком місцева швидкість течії газу локально досягає швидкості звуку, також виникає *хвильовий опір*. Це явище називають «хвильовою кризою». Воно пояснюється тим, що при обтіканні твердого тіла в певних точках або зонах його поверхні швидкість, за рахунок стиснення потоку тілом, може перевищувати швидкість  $v_\infty$  незбуреної течії газу перед ним. Коли в зазначених точках місцева швидкість стає рівною швидкості звуку, хоча швидкість незбуреного потоку  $v_\infty < a$ , то в цих зонах виникає перша ударна хвиля. По мірі зростання швидкості  $v_\infty$  потоку, що набігає, ця хвиля переміщується до передньої критичної точки обтічного тіла, і при досягненні певного постійного значення швидкості  $v_\infty$  ударна хвиля встановлюється на невеликій відстані попереду тіла.

## 8.2. Особливості збурень в до- та надзвукових потоках

1. У будь-якому потоці газу швидкість поширення збурень дорівнює сумі локальних значень швидкості звуку і швидкості потоку.

2. В залежності від величин швидкості потоку і геометрії обтічного тіла області поширення хвиль збурення можуть бути різними. Слабкі збурення можуть поширюватися по всій області потоку тільки в дозвуковому потоці. У критичному та надзвуковому потоках, як ми дізнаємось нижче, область поширення слабого збурення обмежена.

3. Надзвуковий потік набігає на обтічне тіло «всліпу»: він не «передчуває» попереду себе тіло як джерело збурення. Натомість, дозвуковий потік «відчуває» обтічне тіло значно раніше, ніж досягає його. Таким чином, в дозвуковому потоці вплив тіла виявляється на певній відстані уверх за течією через поле тиску.

## 8.3. Швидкість поширення малих збурень в нев'язкому газі, що покоїться

1. Зупинимося на з'ясуванні особливостей поширення малих збурень швидкості в газі. Для простоти пригадаємо опис одновимірного баротропного потоку ( $\rho = \rho(p)$ ), усі лінії течії якого паралельні осі  $x$ , а складова швидкості  $v$ , тиск  $p$ , густина  $\rho$  і температура  $T$  є функціями тільки координати  $x$  і часу  $t$ . Дією масових сил, як це прийнято для газу, нехтуємо. Тоді диференціальні рівняння руху Л. Ейлера і нерозривності утворюють *нелінійну систему* з трьома невідомими функціями  $v, p, \rho$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Для замикання (означеності) системи необхідно додати рівняння зв'язку між  $\rho$  і  $p$  або, в більш загальному випадку, рівняння Клапейрона та рівняння балансу енергії. Інтеграли такої системи мають задовольняти заданим початковим та граничним умовам.

2. Розв'яжемо найпростішу задачу про поширення створених в термічно та гідромеханічно ідеальному газі, що покоїться, достатньо малих збурень швидкості, тиску або густини. Нехай виникаючий від збурень рух є баротропний, одновимірний і паралельний осі  $x$ , залежить тільки від координати  $x$  і часу  $t$ . **Ставиться задача відшукати елементи збуреного руху.** Нехай  $v, p, \rho$  – параметри збуреного руху;  $p_0, \rho_0$  – тиск і густина в газі, що покоїться;  $v', p', \rho'$  – малі збурення швидкості, тиску й густини. Тоді параметри збуреного руху можна уявити як

$$v = v', p = p_0 + p', \rho = \rho_0 + \rho' \quad (8.2)$$

Підставимо ці значення в систему рівнянь (8.1) та відкинемо в них добутки малих величин та їх похідних по координатах як малі величини вищих порядків; врахуємо також, що з точністю до нескінченно малих першого порядку малості при баротропному русі

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial x} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} \quad (8.3)$$

Тоді замість нелінійної системи (8.1) отримаємо *лінійну систему* двох рівнянь з двома невідомими  $v', \rho'$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Систему (8.4) можна вважати *лінеаризованою* по відношенню до вихідної нелінійної системи (8.1), оскільки відкидання малих другого і вищих порядків зробили останню лінійною.

Ясно, що  $\rho$  газу зростає при збільшенні  $p$ , таким чином величина  $\frac{dp}{d\rho} > 0$  істотно.

Якщо ввести вже відоме нам позначення щодо нерухомого газу  $\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 = a_0^2$ , то систему

(8.4) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Систему рівнянь (8.5) можна звести до одного рівняння. Для цього здійснимо такі перетворення:

а) диференціюємо обидві частини першого рівняння по часу  $t$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = -a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t};$$

б) диференціюємо обидві частини другого рівняння по координаті  $x$ , та після множення на  $a_0^2$  маємо

$$a_0^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = -a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x};$$

в) віднімемо почленно друге рівняння з першого

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0. \quad (8.6)$$

Ми отримали лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку *гіперболічного типу*<sup>\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> Нагадаємо, якщо є лінійне ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними виду  $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$ , а для однорідного рівняння  $G=0$ , то маємо типи ДРЧП: при  $B^2 - 4AC=0$  – параболічний тип (описують процеси теплопровідності та дифузії); при  $B^2 - 4AC > 0$  – гіперболічний тип (описують хвильові рухи та коливальні системи); при  $B^2 - 4AC < 0$  – еліптичний тип (описують усталені процеси без будь-якої динаміки). В нашому випадку маємо  $B^2 - 4AC > 0$ , оскільки  $B=0$ ;  $A=1$ ;  $C=-a_0^2$ .

Аналогічне рівняння можна знайти для визначення  $\rho'$ , для чого перше рівняння системи (8.5) диференціюємо по  $x$ , а друге – по  $t$ , а потім з першого рівняння віднімемо друге:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0. \quad (8.7)$$

Аналогічне рівняння знайдемо для збурення тиску  $p'$ . З розкладання в ряд Тейлора маємо

$$p' = p - p_0 \approx \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 (\rho - \rho_0) = a_0^2 \rho'; \quad \rho' = \frac{p'}{a_0^2}.$$

Підставимо  $\rho'$  в (8.7), що дає

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (8.8)$$

3. Загальний розв'язок будь-якого з рівнянь (8.6)–(8.8) можна зобразити у вигляді суми, зокрема,

$$v' = f_1(x + a_0 t) + f_2(x - a_0 t), \quad (8.9)$$

причому вид функцій  $f_1, f_2$  залежить від початкових умов задачі.

Уведемо нові координати  $\xi_1, \xi_2$ , що пов'язані зі старими за допомогою рівностей

$$\xi_1 = x + a_0 t, \quad \xi_2 = x - a_0 t. \quad (8.10)$$

Кінематичний зміст такого перетворення: вісь координат  $O_1\xi_1$  розташована вздовж осі  $Ox$  і рухається поступально у бік від'ємного напрямку нерухомої осі  $Ox$  зі швидкістю  $a_0$ ; вісь координат  $O_2\xi_2$  також розташована вздовж осі  $Ox$ , але рухається поступально у бік додатного напрямку осі  $Ox$  і також зі швидкістю  $a_0$ .

Тоді розв'язок (8.9) набуває вигляду

$$v' = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2). \quad (8.11)$$

Розглянемо кожний доданок окремо, тобто наступні два частинних розв'язки рівняння (8.6):

$$v' = f_1(\xi_1) = f_1(x + a_0 t); \quad v' = f_2(\xi_2) = f_2(x - a_0 t). \quad (8.12)$$

Функція  $f_1(\xi_1)$  відображає у рухомій системі  $O_1\xi_1$  незалежний від часу розподіл збурень швидкості. Ця фіксована форма одновимірного збурення, що задана початковим його розподілом, переміщується згідно з першою рівністю з (8.12) як одне ціле вздовж від'ємного напрямку нерухомої осі  $Ox$  зі швидкістю  $a_0$ . Аналогічно цьому функція  $f_2(\xi_2)$ , що характеризує розподіл збурень швидкості у рухомій системі  $O_2\xi_2$ , являє собою другу фіксовану форму збурення, відмінну за своїм виглядом від першої, яка поширюється також як одне ціле в додатну сторону нерухомої осі  $Ox$  з такою ж швидкістю  $a_0$ .

**4. Покладаючи в цих розв'язках  $\xi_1 = const$  або  $\xi_2 = const$ , отримаємо дві системи плоских хвиль:**

$$x + a_0 t = const, \quad x - a_0 t = const. \quad (8.13)$$

Ми отримали дві площини, які рухаються в протилежні сторони зі швидкістю  $a_0$ , кожна перпендикулярно до осі  $Ox$ . Кожна з них несе постійні — задані початковими умовами значення збурень швидкості, тиску, густини або температури. **Такі хвилі називають простими.**

Загальний розв'язок рівняння (8.6), а отже, і аналогічних рівнянь для збурень густини й тиску складається, таким чином, із розв'язків, що відповідають двом **простим хвилям**, які поширюються в протилежні сторони. Рівняння (8.6), як і однотипні рівняння (8.7) і (8.8), є *одновимірними хвильовими рівняннями*.

Геометричне трактування отриманого розв'язку: він відображає наявність в площині  $(x, t)$  двох сімейств прямих (8.13) з кутовими коефіцієнтами  $\pm a_0$ , причому вздовж цих прямих зберігаються постійні значення збурень швидкості, густини, тиску газу, заданих початковими умовами. Це так звані **два сімейства характеристик хвильового рівняння (8.6)**.

Фізично дві такі **прості хвилі** створюються переміщеннями поршня з малою амплітудою навколо деякого початкового положення в циліндричній трубі.

5. Загальна для обох хвиль швидкість  $a_0$  і має назву *швидкості поширення малих збурень в газі*, що визначається відомою нам формулою

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Введений вище індекс «0» при  $a$  означав незбурений стан газу, але остання формула справджується і для довільного випадку рухомого газу, якщо величина  $a$  відповідає **місцевій швидкості поширення малих збурень відносно рухомого газу** в даній точці потоку. Типовим прикладом поширення малих збурень в суцільних середовищах є поширення звуку, тобто поширення хвиль слабкого стиснення та розрідження. Саме через це величину  $a$  і називають *швидкістю звуку*. Згідно з наведеною вище формулою, швидкість звуку залежить від термодинамічного закону поширення малих збурень (як кажуть, від характеру баротропності процесу). Для нестисливої рідини ( $\rho = const$ ) швидкість звуку  $a = \infty$ . Схема стисливого середовища ( $\rho = var$ ) передбачає скінченність швидкості поширення звуку.

6. Згідно з кінетичною теорією газів, швидкість звуку  $a$  має той самий порядок, що й середня квадратична швидкість вільного пробігу молекул газу  $v_m = \sqrt{v^2}$ , яка також пропорційна  $\sqrt{T}$  та розраховується як  $v_m = \sqrt{3RT}$ . Порівнянні цієї формули з формулою Лапласа–Пуассона для ізоентропійної швидкості звуку  $a = \sqrt{kRT}$  за умови однаковості порядків величин ( $a \sim v_m$ ), дає зв'язок цих швидкостей

$$a \sim v_m \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

Для повітря ( $k = 1,4$ ) величина  $a$  складає  $\approx 70\%$  від  $v_m$ .

## 9. ПОШИРЕННЯ МАЛИХ ТА СКІНЧЕННИХ ЗБУРЕНЬ В ОДНОРІДНОМУ ПОТОЦІ ГАЗУ

Ми дізналися, в стисливій рідині (газі) **малі збурення** довільного профілю поширюються у вигляді **акустичних хвиль** зі швидкістю звуку. Також якщо швидкість газу перевищує швидкість звуку у всій області течії або в її частині, то викають якісно нові явища — **ударні хвилі**, на яких термодинамічний стан і рух газу можуть різко змінюватися на величини, порівняні із самими значеннями відповідних параметрів. Одна з

головних задач газодинаміки як раз і полягає у вивченні механізмів утворення, властивостей ударних хвиль та їх впливу на параметри течії газу.

### 9.1. Обтікання точкового джерела збурень. Конус Маха.

Джерела, які періодично породжують акустичні хвилі, бувають різними: точкові джерела генерують сферичні хвилі, лінійні джерела — циліндричні хвилі. Для того, щоб зрозуміти механізм утворення ударних хвиль, розглянемо найпростіший приклад розповсюдження малих збурень в потоці газу. Спочатку нехай джерелом **малих збурень густини** є нерухома точка **O** в просторі з нерухомим газовим середовищем (рис. 9.1,а). Якщо газ однорідний, то поверхня однакової фази поширення збурення є сферичною з центром в точці **O**, яка розширюється на всі сторони з місцевою швидкістю звуку  $a$  звукових хвиль.

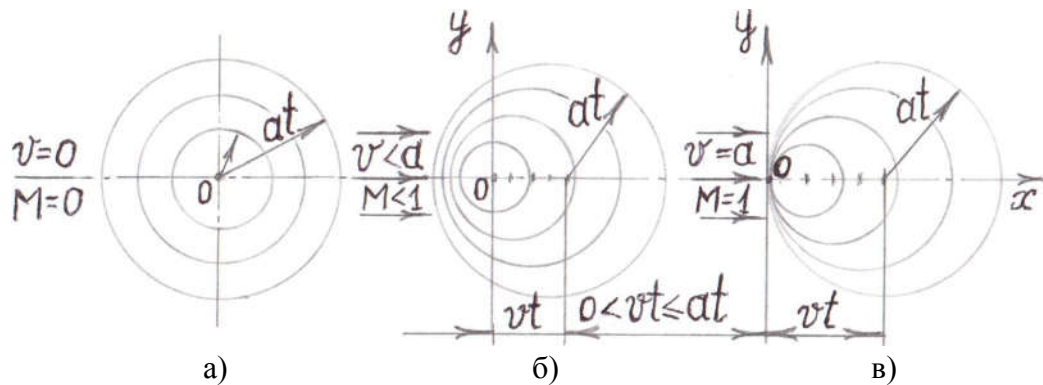


Рис. 9.1.

Якщо точкове джерело збурень густини знаходиться в рівномірному дозвуковому потоці, швидкість якого  $v < a$  ( $M < 1$ ), то сферичні звукові хвилі, генеровані точкою **O**, будуть зноситися потоком в напрямку вектора його швидкості (рис. рис. 9.1,б). Оскільки  $v < a$ , тобто виникаючі в точці **O** сферичні хвилі поширюються швидше, ніж зносяться потоком, то за час  $t$  нарощування радіуса сферичної хвилі  $at$  буде випереджати знесення центру хвилі  $vt$  відносно точки **O** за той саме час. Тому збурена зона розширюється нерівномірно — швидше в напрямку течії газу зі швидкістю  $a+v$ , повільніше в протилежному напрямку зі швидкістю  $a-v$ . Нарешті при  $v = a$  ( $M = 1$ ) границя збурень, що поширюються від точкового джерела, стає нормальною до напрямку швидкості потоку на достатньо великій ділянці (рис. 9.1,в).

При поширенні **малих збурень** в надзвуковому потоці  $v > a$  ( $M > 1$ ) центри хвиль збурень зносяться потоком: оскільки  $vt > at$ , то хвилі збурень не можуть поширюватися проти течії (рис. 9.2).

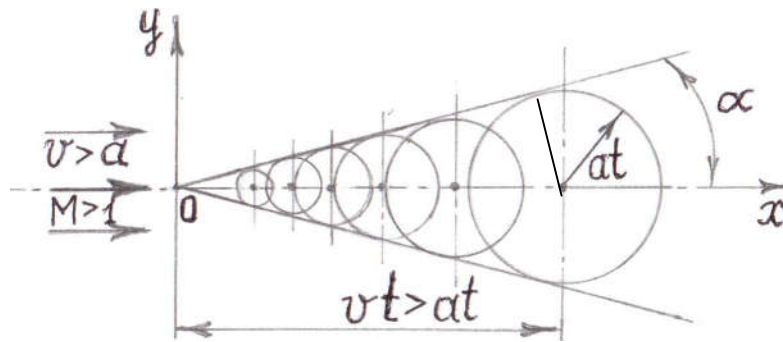


Рис. 9.2.

Поки за час  $t$  сферична хвиля пошириться на відстань  $at$  від точки-джерела збурень за радіусом, самий центр хвилі від цього джерела збурень буде знесений надзвуковим потоком від свого початкового положення  $O$  на відстань  $vt > at$  вздовж осі  $x$ . Концентрація малих збурень буде відбуватися всередині деякої конічної поверхні, що огинає сферичні хвилі. Цю поверхню з вершиною в точці  $O$  називають **граничною хвилею слабких збурень**, **конусом збурень Маха** (або просто **конусом Маха**), а також **характеристичним конусом**. Перетин бічної поверхні конуса з площиною течії, що проходить через джерело збурення, утворює слід на цій площині, який називають **лінією збурення**, або **характеристикою**. Кут при вершині конуса Маха називають **кутом збурення**  $\alpha$ , таким, що

$$\sin \alpha = \frac{at}{vt} = \frac{1}{M}.$$

Як видно з наведеної формули, при збільшенні числа Маха-Маїєвського  $M$  кут збурення  $\alpha$  зменшується, при зменшенні числа  $M$  кут  $\alpha$  збільшується, а при  $M = 1$   $\alpha = 90^\circ$ , тобто конус збурень перетворюється на площину.

Таким чином, суттєва різниця між до- та надзвуковими потоками, що набігають на джерело збурень, полягає в існуванні в надзвуковій течії так званої «**зони мовчання**»: частинки газу поза зоною конуса Маха «не знають» про збурення, які поширюються всередині цього конуса, оскільки уперед збурення не проникають, а зносяться у деяку область вниз за потоком.

Якщо точкове джерело збурень знаходиться на поверхні плоскої пластинки, яку обтікає поступальний і рівномірний надзвуковий потік, а поверхня пластинки збігається з однією з ліній течії (рис. 9.3), то межа області збурень збігається з відрізком певної прямої лінії — **характеристикою**. Вона утворює з напрямком швидкості  $v_\infty$  кут  $\alpha$ , що

визначається виразом  $\sin \alpha = \frac{1}{M}$ .

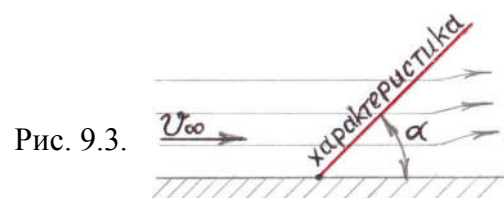


Рис. 9.3.

**Малі збурення** можуть виникати, наприклад, при обтіканні тонкого тіла з гострою крайкою. Іноді крила швидкісних літаків, артилерійських снарядів і ракет з певним наближенням розглядають як тонкі тіла. В дозвуковому потоці, що набігає, границя збурень знаходиться відносно далеко попереду тонкого тіла і при нульових кутах атаки його обтікання відбувається плавно (рис. 9.4), оскільки в дозвуковому потоці вплив тіла передається полем тиску і уверх за течією, тобто дозвуковий потік «відчуває» джерело збурень значно раніше, ніж його досягає. Натомість при  $v > a$  межа збурень знаходиться біля самого переднього вістря і до межі збурення тіло ніяк не впливає на потік, бо інформація про збурення просто зноситься надзвуковим потоком (рис. 9.5). При надзвуковому обтіканні відносно тонкого тіла межу збурень називають **приєднаним стрибком ущільнення**. Як видно з рис. 9.5, такі стрибки ущільнення можуть утворюватися не тільки попереду тіл, що обтікаються надзвуковим потоком (головні стрибки ущільнення або головні ударні хвилі), але й безпосередньо за їх хвостовою частиною (хвостові стрибки ущільнення або хвостові ударні хвилі). Виникнення хвостових стрибків ущільнення згідно з В. Шитовим пояснюється тим, що при обтіканні кормової частини тіла напівобмежені струмені повертаються на внутрішній тупий кут. Теоретично в частинному (гіпотетичному) випадку поздовжнього обтікання надзвуковим потоком прямолінійної гладкої стінки без будь-яких джерел збурень течія уявляється незбуреною.

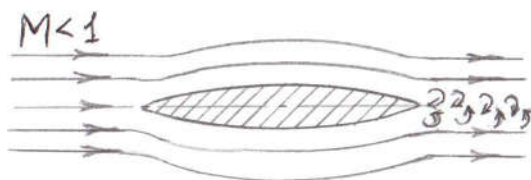


Рис. 9.4.

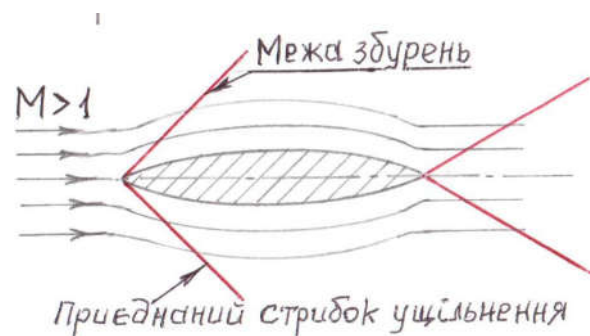


Рис. 9.5.

Але за реальних умов ідеально гладкої стінки не існує, оскільки навіть незначні горбки шорсткості на прямолінійній стінці, або мала зміна кривизни поверхні незмінно призводять до появи збурень в надзвуковому потоці та відбиттю хвиль тиску від обтічних сусідніх стінок.

## 9.2. Поняття про нелінійні хвилі

**При скінченній інтенсивності збурень** від їх джерела у вигляді не точки, а обтічного тіла (літака, ракети, астероїда тощо), особливо при  $v > a$ , тобто при великих збуреннях потоку, необхідно змінити наведені вище схему та аналіз течії. Однак картина

течії, хоча і в ускладненому вигляді, все ж наближено залишається аналогічною розглянутій вище за ознакою головної властивості — наявності «зони мовчання». Надзвуковий потік «не передчуває» джерела збурень, він «сліпо наштовхується» на тіло.

Строго кажучи, у випадку **скінченних збурень** довільного виду **нелінійність процесу** накопичення, зносу та взаємодії збурень не дає можливості простого уявлення фізичної картини явища. Припускають, що накопичення збурень спричиняє появу **пакета хвиль**, на якому параметри газу різко змінюються: якщо до пакета хвиль потік є однорідний, то після нього течія «прилаштовується» до повороту навколо перешкоди. Такий пакет хвиль і утворює власне **ударну хвилю**. У свою чергу ударні хвилі розділяють на **слабкі** (при  $(p_2 - p_1)/p_1 \ll 1$ , де  $p_1$  – тиск до ударної хвилі,  $p_2$  – тиск після неї) та **сильні** (при вибуху снаряда або бомби, коли  $\Delta p \gg p, \Delta \rho \gg \rho$ ). Інтенсивність хвилі характеризується співвідношенням  $p_2/p_1$ : чим більше  $p_2/p_1$ , тим більша швидкість ударної хвилі. Зміна густини (та інших параметрів) газу трапляється, як ми знаємо, практично «миттєво» до деяких певних значень, тому ударну хвилю називають також стрибком ущільнення. Певна річ, припущення про миттєвість зміни параметрів газу в ударній хвилі є ідеалізацією. В дійсності зміна термодинамічних параметрів і швидкостей є неперервною, але вона відбувається на дуже малій відстані, яка має порядок середньої довжини вільного пробігу молекул в газі. При подальшому русі ударної хвилі в реальному газі вона «розмивається» та зникає через дію в'язкості і теплопровідності.

Прикладна газодинаміка, як і класична термодинаміка, базується, головним чином, на **феноменологічному підході** — відсутності явного зв'язку з молекулярно-кінетичною сутністю досліджуваних закономірностей. Такий підхід, при всіх його узагальнюючих перевагах і важливих результатах відносно головних ознак і особливостей до- та надзвукових течій, а також можливості з'ясування відповідних фізичних параметрів газу, все ж обмежує глибину вивчення природи складних явищ, що супроводжують ці течії. Саме тому в межах феноменологічного підходу не вдається отримати єдиного задовільного опису неперервного розподілу параметрів газу в ударній хвилі, а також в певному околі до і після неї на мікроскопічному рівні. Тому й приймається припущення про існування стрибка ущільнення, тобто **розриву функцій**, які описують зміну параметрів газу на поверхні, що ототожнюють з ударною хвилею. При цьому поза поверхнею розриву функції вважають неперервними, а газ – термічно ідеальним (і навіть найчастіше нев'язким). Це дає можливість використання отриманих в попередніх розділах курсу рівнянь законів збереження.

Граничні хвилі слабких збурень, які утворюються при обтіканні надзвуковим потоком газу малих геометричних перешкод і поширюються зі швидкістю звуку, відносяться до слабких розривів неперервності в газі. Однак перетин граничних хвиль, що спостерігається при обтіканні, наприклад, увігнутої поверхні, спричиняє підсумовування слабких розривів і появи в результаті стрибків ущільнення, які відносяться вже до розряду сильних розривів неперервності в газі. Аналогічно, малі збурення, що створюються при надзвуковому русі, наприклад, крила літака кожним елементом його поверхні (невеличкими виступами, рисками, поясками, заклепками тощо), будуть накладатися одне на одне, що призведе вже до утворення попереду тіла сильного збурення, тобто **стрибка ущільнення**. Найбільшу інтенсивність стрибок ущільнення має безпосередньо перед тілом. По мірі віддалення від тіла інтенсивність збурень, викликаних наявністю тіла в потоці, під дією в'язкості послаблюється і *віддалік від тіла стрибок ущільнення плавно переходить в граничну хвилю слабких збурень*.

### 9.3. Поширення збурень скінченної інтенсивності. Загальна характеристика

#### 9.3.1. Утворення та кінематична характеристика прямої ударної хвилі

Схему утворення та оцінку швидкості поширення ударної хвилі можна прослідкувати на прикладі **ударної хвилі слабкої інтенсивності**.

Як ми знаємо, швидкість поширення малих збурень ( $\Delta\rho \ll \rho$ ), тобто звуку, в пружному суцільному середовищі визначається формулою

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \approx \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}}.$$

Для з'ясування механізму утворення ударних хвиль (стрибків ущільнення) та оцінки швидкості їх розповсюдження спочатку поставимо досліди на довгій циліндричній трубі з газом, на одному кінці якої є рухомий поршень.

**Спочатку стисло.** При русі поршня без прискорення зі швидкістю, меншою за швидкість звуку, постійно створювані ним збурення уходять від нього, оскільки вони поширюються зі швидкістю звуку. Тепер припустимо, що поршень прискорився та набув надзвукової швидкості, починаючи з деякого положення  $\Pi_1$ , і продовжував би такий саме рух до наступного положення  $\Pi_2$ . Якби збурення газу, що створені поршнем, поширювалися зі швидкістю звуку, то до моменту проходження поршнем положення  $\Pi_2$  вони мали б досягти якогось проміжного перерізу між  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Але, очевидно, це неможливо, бо поршень випереджає звукові збурення, а він — суцільний і непроникливий! Таким чином, поршень мав надавати частинкам газу не малі (звукові)

збурення, а «збурення майже ударом» — більш швидкі, ніж швидкість звуку, що й створювало б перед ним **стрибок ущільнення**.

**Більш докладно.** Змінимо умови попереднього досліду: нехай тепер поршень в трубі з нерухомим газом починає раптово рухатися з деякою швидкістю  $w$  і далі продовжує рухатися з цією ж швидкістю (рис. 9.6). Тоді викликані після початку руху поршня збурення будуть розповсюджуватися з різними місцевими швидкостями звуку у відповідності до інтенсивності ущільнення газу (на рис. 9.6 літерами  $a_0, p_0$  позначено швидкість звук і тиск в незбуреному газі). Ближче до поршня має місце максимальне ущільнення газу з тиском  $p_n$ , звідси й місцева швидкість  $a_n$  в перерізі  $n$  буде більшою, ніж у більш віддалених шарах газу:  $a_n > a$ . Тоді найбільш щільні задні шари будуть наздоганяти менш щільні передні шари за ходом руху.

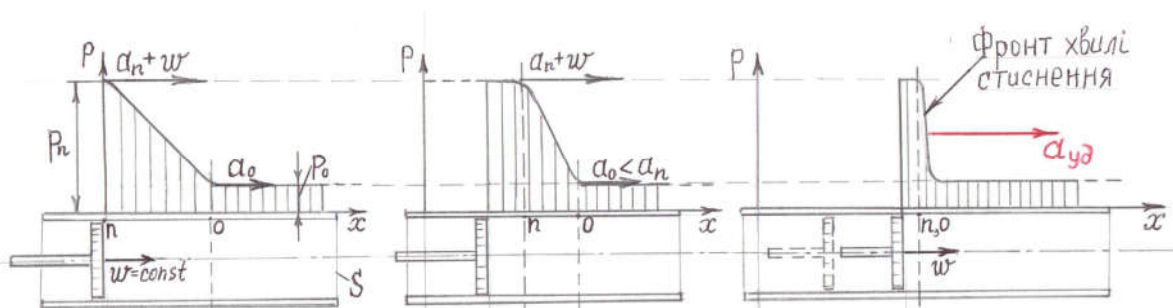


Рис 9.6.

Гребінь хвилі стику зі швидкістю  $a_n + w$  доганяє підніжжя хвилі, що рухається з меншою швидкістю  $a_0$ . Тому згодом при русі поршня графік  $p = p(x)$  або  $\rho = \rho(x)$  стає більш крутим, як видно з рис. 9.6. Далі хвиля стиснення трансформується в зовсім круту хвилю, на фронті якої — різкий стрибок, що рухається зліва направо у вигляді **ударної хвилі** зі швидкістю  $a_{уд} > a$ , при цьому має місце практично розрив функцій  $p = p(x)$ ,  $\rho = \rho(x)$ ,  $T = T(x)$ . Таким чином, ударні хвилі являють собою **самосформовані утворення в газі**. Спочатку не дуже різко окреслені ущільнення в газі по мірі руху автоматично переходять в різко обмежену ударну хвилю.

Нагадаємо, що товщина поверхні розриву термодинамічних параметрів і швидкостей в прямій ударній хвилі має порядок середньої довжини вільного пробігу молекул газу. При наступному русі утвореної у будь-який спосіб ударної хвилі в реальному газі ударна хвиля «розмивається» та зникає через дію в'язкості і теплопровідності в газовому середовищі.

Проведемо оцінку швидкості поширення **прямої ударної хвилі** і порівняємо її зі швидкістю звукової (акустичної) хвилі. Нехай на початку досліду з циліндричною трубою в ній містився нерухомий газ з параметрами  $p_0, \rho_0, T_0$  (рис. 9.7).

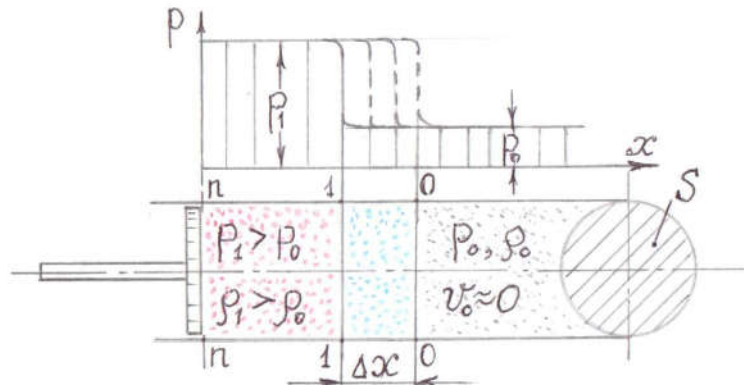


Рис. 9.7.

При наданні збурення рухомим поршнем і утворення хвилі стиснення, вона в деякий момент часу  $t_1$  зі швидкістю  $a_{y\partial}$  досягне перерізу  $1-1$ , а через відрізок часу  $\Delta t$  — перерізу  $0-0$  на відстані  $\Delta x$ . Швидкість фронту хвилі стиснення

$$a_{y\partial} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (9.1)$$

В об'ємі циліндра площею поперечного перерізу  $S$  на довжині  $\Delta x$  густина зросте на величину  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$ , а маса газу зросте відповідно на

$$\Delta m_{1-0} \equiv \Delta m = \Delta\rho \cdot S \cdot \Delta x. \quad (9.2)$$

Але в об'ємі  $n-0$  маса газу залишається однаковою  $m = idem$ . Тому зростання маси в об'ємі  $1-0$  на довжині  $\Delta x$  можливе тільки за рахунок руху газу слідом за фронтом хвилі стиснення із деякою швидкістю  $W$ , поки що невідомою. Супутній рух газу, що супроводжує ударну хвилю, називають **супутнім потоком**.

В результаті в об'єм  $1-0$  за час  $\Delta t$  зліва надійде маса газу  $\rho_1 S W \cdot \Delta t$ , де  $\rho_1 > \rho_0$ , зі збільшеним тиском  $p_1 > p_0$ . Порівняємо зазначені маси:  $\Delta\rho \cdot S \cdot \Delta x = \rho_1 S W \cdot \Delta t$ , звідки

$$W = \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\rho}{\rho_1} a_{y\partial}. \quad (9.3)$$

Для виключення невідомої швидкості  $W$  застосуємо закон зміни кількості руху (теорему імпульсів):

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P}, \quad (9.4)$$

де  $\vec{P}$  — вектор результуючої сили, яка виникає за рахунок різниці тисків  $\Delta p = p_1 - p_0$ .

До приходу хвилі стиснення в об'єм  $l-0$  маса газу в ньому складала  $\rho_o S \cdot \Delta x$  (при  $v_o = 0$ ). Фронт хвилі стиснення ежктує (підтягує) супутню масу  $\rho_o S \cdot \Delta x$ , збільшуючи її швидкість від  $v_o = 0$  до  $W$ . Таким чином, ця маса газу при одновимірному русі отримала прискорення (у скінченних різницях модулів швидкості)  $\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{W-0}{\Delta t}$ . Тоді теорема імпульсів у скінченних різницях отримає вигляд  $\rho_o S \cdot \Delta x \frac{W-0}{\Delta t} = (p_1 - p_o) S$ , звідки маємо

$$\Delta p = p_1 - p_o = \frac{\rho_o \Delta x W}{\Delta t} . \quad (9.5)$$

Врахуємо вирази (9.1), (9.3), а також  $\rho_1 = \rho_o + \Delta\rho$ , підставивши їх в (9.5):

$$\Delta p = \rho_o \frac{\Delta\rho}{\rho_o + \Delta\rho} a_{y\partial}^2 ,$$

звідки знайдемо швидкість руху фронту хвилі стиснення:

$$a_{y\partial} = \sqrt{\frac{\rho_o + \Delta\rho}{\rho_o} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta\rho}} . \quad (9.6)$$

Цілком природно, якщо  $\Delta\rho$  спільномірне з  $\rho_o$ , то таку хвилю на відміну від звукової називають **ударною хвилею** (відповідний індекс «*y\partial*») було нами введено заздалегідь). Для слабких збурень, якими є звукові (акустичні) хвилі,  $\Delta\rho \ll \rho_o$ , тому з виразу (9.6) одразу приходимо до відомої формули для швидкості звуку  $a \approx \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}}$ , причому підкореневий вираз, як ми вже знаємо, залежить від того, за яким законом (ізотермічним чи ізоентропійним) відбувається процес поширення хвиль стиску–розширення в газі.

Таким чином, формула (9.6) показує, що **швидкість розповсюдження ударної хвилі завжди перевищує швидкість звуку  $a$** .

При великих збуреннях, наприклад при вибухах, утворюється потужна ударна хвиля, для якої  $\Delta\rho \gg \rho$ . Вона поширюється спочатку зі швидкістю  $a_{y\partial}$ , яка істотно перевищує швидкість звуку  $a$ . Але по мірі просування хвилі її енергія падає, а швидкість поступово зменшується, поки не досягне швидкості звичайної акустичної хвилі.

Ми вже відмічали, що інтенсивність ударної хвилі характеризується співвідношенням тисків  $p_2/p_1$ . Згідно з експериментом, при вибуху мегатонної атомної бомби на відстані 2,5÷3 км від епіцентру вибуху  $p_2/p_1 \approx 2$ , що відповідає швидкості розповсюдження ударної хвилі, яка приблизно в 1,5 разу є більшою, ніж швидкість звуку в

нерухомому газі. Тому спостерігач (приладами, з укриття на певній відстані) спочатку спостерігатиме дію ударної хвилі, а тільки потім почує звук. Об'єкти, що опинились під дією ударної хвилі, не тільки сприймають як удар різкий перепад тисків при її проходженні, але й можуть зруйнуватись та спалахнути під дією гарячого ( $\sim 100^0\text{C}$ ) ураганного вітру ( $\sim 170\text{ м/с}$ ), який створює супутній потік, що рухається слідом за ударною хвилею. Повітря, яке розлітається від епіцентру вибуху з великою швидкістю, створює біля нього область дуже низького тиску. Тому через деякий час після проходження ударної хвилі повітря спрямовується з великою кількістю пилу і уламків по поверхні землі в зворотному напрямку до епіцентру. Саме це запилене й нагріте повітря підіймається уверх і створює той «гриб», який є характерним для наземних ядерних вибухів.

### 9.3.2. Ударні хвилі в надзвукових та навколосвукових потоках

Тепер припустимо, що в надзвуковому потоці існує джерело збурень, яке створює не акустичні, а скінченні ударні хвилі, що поширюються зі швидкістю  $a_{уд} > a$  (рис. 9.8).

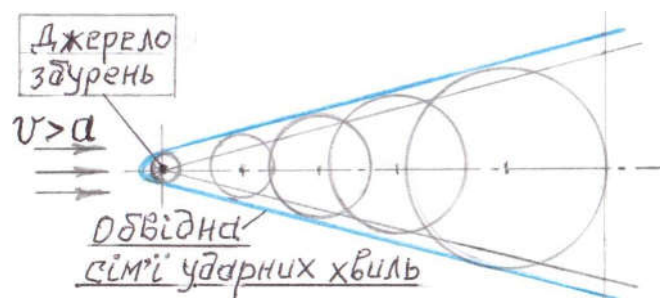


Рис. 9.8.

У перший момент хвиля, що відходить від джерела збурення, буде розповсюджуватися і проти потоку. Але при зустрічі з потоком і розширюючись, хвиля буде слабнути, її швидкість зменшуватиметься, наближаючись гранично до швидкості звуку  $a$ . За цих умов обвідна сім'я сферичних ударних хвиль замість простої конічної форми в головній частині буде нагадувати **гіперболоїд**, який потім переходить в конус слабких збурень.

Виникнення граничних хвиль, тобто концентрація збурень в деякій області простору, є характерною відзнакою надзвукового потоку. Як ми вже казали, реально кожна точка обтічного тіла є слабким джерелом збурень. Але, оскільки таких точок є велика множина, сукупність збурень у деякій обмеженій області течії **інтегрально породжує ударну хвилю**. Вона розташовується певним чином відносно тіла і супроводжує, як тінь, його рух доти, доки швидкість потоку, що набігає, залишається надзвуковою. Навіть при обтіканні тіла з  $v < a$ , тим паче при навколосвукових швидкостях, на поверхні можуть локально утворюватися області надзвукових швидкостей (результат проходження режиму хвильової

кризи), які звичайно закінчуються стрибками ущільнення (рис. 9.9), що значно збільшує лобовий опір.

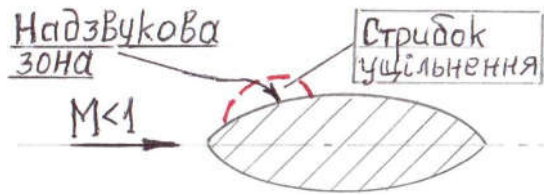


Рис. 9.9.

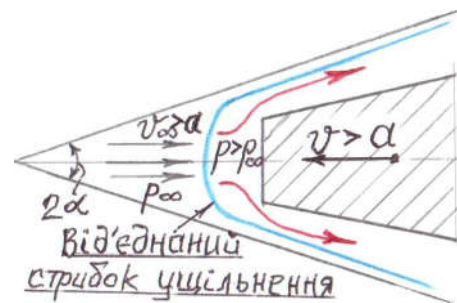


Рис. 9.10.

Розглянемо обтікання нерухомого або рухомого тупоногого тіла надзвуковим потоком (рис. 9.10). Безпосередньо перед головною частиною газ стискається і утворюється зона підвищеного тиску  $p > p_{\infty}$  і підвищеної густини, в результаті чого виникає ударна хвиля, яка поширюється зі швидкістю, більшою за швидкість звуку:  $a_{y\delta} > a$ . Однак швидкість хвилі буде не більше і не менше швидкості рухомого тіла (або швидкості потоку, що на нього набігає), оскільки хвиля не може відірватися від тіла і побігти уперед! Якщо відстань між фронтом хвилі і передньою частиною тіла збільшиться (в бік звуження характеристичного конуса збурень), то із зони підвищеного тиску  $p > p_{\infty}$  почнеться інтенсивне витіснення газу в напрямку стрілок вздовж бічної поверхні тіла. Але тоді перепад тиску на хвилі, тобто її сила, упаде, швидкість витікання по стрілках зменшиться і відстань між хвилею та обтічним тілом буде поновлена. Таким чином, за умов усталеного обтікання тіла з надзвуковою швидкістю попереду його буде **постійно знаходитись ударна хвиля, що має ту саму швидкість, що й тіло.** Відстань між ударною хвилею і головною частиною тіла залежить від форми цієї частини та швидкості  $v_{\infty}$  потоку, що набігає. За межами головної частини тіла фронт ударної хвилі нахилиється, її інтенсивність зменшується та кут нахилу ударної хвилі відносно вектора швидкості гранично стає рівним куту Маха — ударна хвиля вироджується у звичайну акустичну. Коли ми чуємо звук літака, що наближається, це означає, що його швидкість дозвукова ( $v < a$ ). Якщо ж літак летить з надзвуковою швидкістю ( $v > a$ ), то при його наближенні ми не отримаємо ніяких звукових сигналів, аж поки повз нас не пройде **ударна хвиля** зі швидкістю  $a_{y\delta} > a$ , яка сприймається вухом як потужних постріл.

### 9.3.3. Хвильовий опір

Втрати енергії при надзвуковому обтіканні твердого тіла обумовлені додатковим опором рухові, який виникає через утворення стрибків ущільнення. Цей додатковий опір

руху називають **хвильовим опором**.

Стрибки ущільнення виникають тільки в надзвуковому і навіколозвуковому потоках (в останньому випадку тільки в тих місцях тіла, де є надзвукова швидкість). Як ми вже знаємо, це явище має назву **хвильової кризи**. Цікаво, що при обтіканні крила літака дозвуковим потоком з числом  $M$ , меншим одиниці, але близьким до неї, на верхній і нижній поверхнях крила виникають надзвукові зони потоку, у яких місцеві швидкості перевищують місцеві швидкості звуку. Ці зони, як правило, закінчуються (обриваються) стрибком. В надзвукових потоках стрибки ущільнення звичайно зустрічаються там, де надзвукова течія зазнає гальмування або відбувається поворот потоку на деякий кут. Але хвилі збурення все ж повністю заповнюють всю область надзвукового потоку, що лежить позаду *конуса збурення*, який починається від передньої точки всього тіла. **При надзвуковому обтіканні будь-яка точка поверхні тіла являє собою джерело хвиль збурення, що відходять від тіла під кутом збурення  $\alpha$  конуса Маха.**

Хвильовий опір зумовлений тим, що сила, яка рухає тіло зі швидкістю  $v_\infty \geq a$ , має додатково виконувати роботу по підтриманню ударних хвиль, у яких мають місце незворотні втрати енергії з переходом її в теплоту. При переході через фронт ударної хвилі газовий потік різко змінює свої параметри: падає швидкість  $v$  потоку, зростають тиск ( $p_2 > p_1$ ), густина, температура і, як ми дізнаємось, ентропія (що указує на незворотність процесу). Хвильовий опір можна також трактувати як наслідок додаткового тиску, що виникає за стрибком ущільнення.

Для зниження хвильового опору обтічному тілу з  $v_\infty \geq a$  або з  $v_\infty \leq a$ , коли є небезпека хвильової кризи, доцільно надавати загострену форму (рис. 9.11; 9.12, а, б), щоби неминучі стрибки ущільнення розташовувалися не прямо проти потоку (не були «прямими стрибками»), а навкіс — це так звані «скісні» або «косі» стрибки, які поглинають менше енергії.

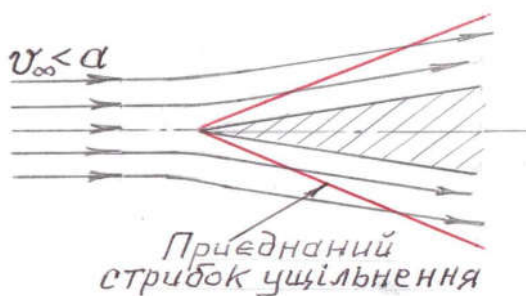


Рис. 9.11.

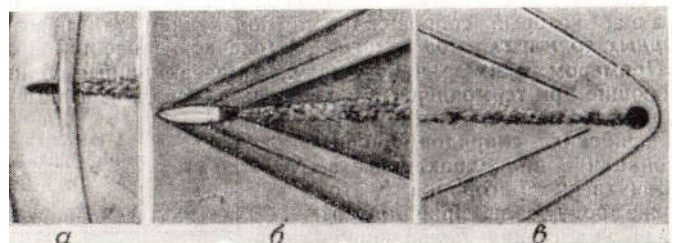


Рис. 9.12. Політ куль:

а) швидкість  $v_\infty$  не набагато більша швидкості звуку; б)  $v_\infty \approx 800 \text{ м/с}$ ; в)  $M = 2,23$  (сферична куля).

**Важливо:** добре обтічні форми, які відповідають найменшому опору у дозвуковому потоці, стають погано обтічними у надзвуковому потоці. В останньому випадку перед профілем тіла встановлюється криволінійний «від'єднаний стрибок ущільнення», близький у передній частині до прямого, що суттєво збільшує хвильовий опір (рис. 9.12, в; рис. 9.13).

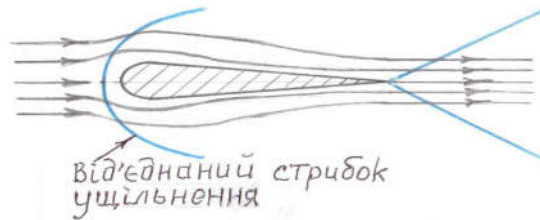


Рис. 9.13.

Але цей висновок не означає, що треба завжди намагатися профілювати, наприклад, головні частини ракет виключно загостреними! Тут потрібні міркування в комплексі: «аеродинаміка — теплофізика». Так, форма головних частин балістичних ракет бойового призначення обирається у відповідності до умов входу в атмосферу на заключному відрізку траєкторії. При швидкостях порядку  $M \geq 5$  важливим є урахування не тільки аеродинамічних сил, але й теплового стану головної частини. Форма обводів обирається такою, щоб зберегти допустиму температуру важливих конструктивних вузлів. Виявляється, що найбільш вигідна притуплена форма головної частини ракети. По-перше, це робиться для **перетворення частини дуже великої кінетичної енергії** відносного руху повітря (яка б призвела до надлишкового аеродинамічного нагріву і оплавлення тіла, оскільки тепловий потік пропорційний кубу швидкості) **в енергію поширення ударної хвилі.** По-друге, попри деяке зростання температури газу в критичній точці головної частини (яке так, чи інакше існує навіть і у випадку загостреної форми її), зростає місцева швидкість обтікання бічної поверхні її, а отже, зменшуються ентальпія і температура газу в напівобмеженому кільцевому струмені, що обтікає головну частину, хоча через наявність стрибків ущільнення плавність обтікання дещо порушується. **Добре відомий з прикладної аеродинаміки великих швидкостей факт [М.Ф. Краснов]:** плавно затуплені тіла в атмосфері при великих числах  $M$  нагріваються і руйнуються менше, ніж загострені! Деякі втрати швидкості ракети від трохи зростаючого опору через притупленість її головної частини компенсується зниженням ваги елементів теплового захисту, що зменшує енергетичні затрати, необхідні для запуску й польоту ракети на траєкторії виведення.

Якщо йде мова про космічний апарат, що спускається з орбіти, то відношення до лобового опору розглядається також з позицій застосування **регульованого засобу**

**гальмування** для запобігання надлишковому аеродинамічному нагріву. Форма обводів узгоджується як з температурними вимогами, так і з величиною перевантажень. Нарешті, щодо самої ракети-носія: її швидкість на траєкторії виведення включає як дозвуковий, так і надзвуковий режими польоту. Для зниження сумарної величини втрати швидкості через аеродинамічний опір та захисту від небажаного нагріву відповідальних елементів конструкції, в багатьох випадках на ракетах-носіях встановлюють головний обтічник, що може скидатися. Його позитивні термогазодинамічні якості при проектуванні ракети вибирають такими, щоб зберігалась спільномірність з необхідним зниженням масогабаритних характеристик ракети.

#### 9.3.4. Особливості стрибків ущільнення різної природи

Існує суттєва різниця в стрибках ущільнення при надзвуковому русі поршня в трубі (внутрішня задача газодинаміки) і при надзвуковому русі тіла (наприклад, крила літака) у вільному просторі (зовнішня задача газодинаміки). При надзвуковому русі поршня в трубі попереду поршня весь час буде накопичуватися маса газу, бо йому, раптово залученому поршнем, немає куди подітися крім випереджаючого руху вперед, постійно збільшуючи відстань між стрибком ущільнення і поршнем.

Натомість, при надзвуковому русі тіла у вільному просторі, коли тіло не тільки стискає газ попереду, а й «розштовхує» його в усі боки, відстань між стрибком ущільнення і тілом при усталеному русі **не змінюється; стрибок відносно тіла є нерухомим.** Те ж стосується і хвостових стрибків ущільнення.

Нагрів газу при дуже швидкому стисненні в стрибках ущільнення, коли теплообмін з оточуючим середовищем майже не встигає відбутися (адіабатне наближення аналізу), приводить до **цікавого ефекту** (фізичне пояснення якого буде наведено пізніше). Навіть при найбільш потужному стрибку ущільнення, який можна собі уявити, коли тиск  $p_2$  в потоці за стрибком в нескінченну кількість разів перевищує тиск  $p_1$  перед стрибком, густина газу  $\rho_2$  за стрибком не може перевищити певної границі: для повітря й двохатомних газів ( $k = 1,4$ ) ця границя є  $\rho_2 = 6\rho_1$ .

Якісне пояснення такої особливості є таким: зростання температури газу при його стисненні на скачку ущільнення протидіє стисненню, тобто при нагріванні газ стає начебто більш жорстким. В цьому проявляється відомий **принцип Ле-Шател'є–Брауна**: якщо стискати будь-яке тіло, не відводячи від нього теплоту, то температура буде змінюватися таким чином, щоб заважати стисненню.

## 10. ПОШИРЕННЯ МАЛИХ ЗБУРЕНЬ В ГАЗОРІДИННІЙ СУМІШІ

### 10.1. Загальні відомості про структуру та особливості багатофазних систем як робочих тіл енергетичних установок

Газорідинні суміші – це типові робочі середовища, що зустрічаються в технологіях генерації та наступної конденсації пари в установках атомної і теплової енергетики, на останніх ступінях конденсаційних парових турбін та майже за всією проточною частиною турбін атомних електростанцій, в струминних апаратах (інжекторах, ежекторах), в процесах випарювання, дистиляції, ректифікації, в холодильних і криогенних установках, в хімічній технології тощо.

Основна відмінність багатофазних (гетерофазних) систем від гомогенних полягає в тому, що в перших положення і форма міжфазних меж не можуть бути визначені заздалегідь на відміну від других, в яких межі області течії, як правило, бувають відомі і на яких задаються граничні умови при математичному описі процесу. До теперішнього часу у світовій практиці є лише одиничні приклади чисельного розв'язку навіть достатньо простих задач механіки газорідинних систем в строгій постановці. Тому на практиці при розв'язанні задач механіки багатофазних систем застосовують спрощені моделі. Найпростіша з них – *гомогенна модель* в одновимірному наближенні при усередненні параметрів багатофазного середовища (густини, в'язкості, швидкості) за об'ємом ємності або за перерізом каналу. Таким чином, реальне середовище умовно розглядається з позицій класичної квазістаціонарної термодинаміки як єдине термодинамічне тіло. Існує також ближча до реальності *модель відокремленої течії* із врахуванням силової та теплової взаємодії між паровою або газовою фазою та краплинною рідиною — так званих *умов сумісності*. Тоді рівняння збереження записують окремо для кожної з фаз, при цьому форма межі розділу вважається відомою. З розвитком ІТ-технологій та чисельних методів при розрахунках динаміки газорідинних систем популярність отримала *модель багатошвидкісного континууму*, згідно з якою в кожній точці об'єму, зайнятого сумішшю, яка складається з  $N$  фаз, визначають  $N$  густин,  $N$  швидкостей і т.п. При цьому вводяться гіпотези щодо форми і площі міжфазних меж та закономірностей переносу через них. Згідно з *методом контрольної комірки*, ідеалізується форма міжфазної поверхні, що дає можливість виявляти істотні фундаментальні закономірності і характеристики такої багатофазної системи.

При великих швидкостях газорідинних сумішей через відмінність в структурі і в локальних густинах компонент виникає суттєва нерівномірність течії. Наприклад, при конфузорній течії рідина, яка диспергована в потоці газу, відстає від нього, а в дифузор-

ній течії — випереджає. Також швидкісний потік, наприклад, парорідинної суміші може проявляти істотну термодинамічну нерівноважність. Так, водяна пара у надзвуковому метастабільному потоці може бути переохолоджена більше, ніж на 10 градусів, натомість перегрів рідинної фази при адіабатному розширенні води може досягати декількох десятків градусів.

**З точки зору газодинаміки** для нас дуже важливим є те, що при великих швидкостях течії газорідинних сумішей не можна нехтувати ефектами стисливості як газової фази, так і всієї суміші в цілому. Із зменшенням початкового перегріву та при переході до зони вологої пари стисливість виявляється все більшою мірою в однаковому діапазоні змін чисел Маха-Маієвського  $M$  щодо досліджуваної суміші. Так, при бульбашковій та пінній структурах суміші, коли, як ми дізнаємося нижче, **величина швидкості звуку мала**, а отже, число  $M$  зростає, в газорідинному потоці можуть виникати характерні стрибки ущільнення і хвилі розрідження навіть при дуже помірних швидкостях течії.

Крім того, експериментальні дослідження показують, що при течії слабо перегрітої та вологої водяної пари в соплових решітках турбін відбувається зміна розподілу тиску за обтічними профілями лопаток. Причина полягає в тому, що додатні градієнти тиску в дифузійній області на спинках лопатевих профілів дещо зростають із збільшенням числа  $M$ , причому на вологій парі вплив чисел  $Re$  і  $M$  стає більш значним. Незалежно від інших ефектів, створюваних рідкою фазою, це може приводити до зміни таких аеродинамічних характеристик, як профільні втрати енергії та кути виходу потоку, отже, до погіршення розрахункових режимів роботи паротурбінних установок.

Найбільш детально механіка і термодинаміка гетерогенних сумішей розглядається в таких спеціальних фундаментальних курсах (відображених у книгах з відповідними назвами, мова російська), як «Динамика многофазных сред» (Р.И. Нигматулин), «Механика двухфазных систем» (Д.А. Лабунцов, В.В. Ягов), «Газодинамика двухфазных сред» (Д.Е. Дейч, Г.А. Филиппов), «Гидродинамика газожидкостных систем» (С.С. Кутателадзе, М.А. Стырикович), «Термодинамика парожидкостных потоков» (М.Д. Вайсман).

## 10.2. Поширення звукових хвиль в газорідинній суміші

Для конкретності зупинимося на випадку двохфазної суміші. З метою наближеної оцінки впливу двохфазності середовища на швидкість поширення звукових хвиль скористаємося елементарною квазігомогенною моделлю, за якою неоднорідність системи враховується тільки через густини суміші і її компонент. Будемо вважати, що швидкість поширення звуку у цьому випадку описується подібно до однорідного середовища формулою

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho},$$

тобто поширення малих збурень в газорідинній суміші відбувається баротропно [ $\rho = f(p)$ ].

Нехай звукові хвилі розповсюджуються в краплинній рідині, яка насичена газовими бульбашками. Процес утворення такої суміші має назву «барботаж».

Уведемо поняття **об'ємної концентрації газу** в суміші

$$\alpha = \frac{V_2}{V},$$

де  $V_2, V$  — об'єми газової фази та суміші відповідно.

Тоді маємо такі очевидні співвідношення:

$$\frac{V_2 + V_p}{V} = 1, \text{ або } \alpha + \frac{V_p}{V} = 1, \text{ звідки } \frac{V_p}{V} = 1 - \alpha,$$

де остання формула визначає об'ємну концентрацію краплинної рідини в суміші ( $V_p$  — об'єм рідинної фази).

З рівняння балансу мас суміші та її компонент  $m = m_2 + m_p$ , поділеному на об'єм суміші, маємо співвідношення **для густин суміші**, газу та краплинної рідини

$$\boxed{\rho = \rho_2 \alpha + (1 - \alpha) \rho_p}. \quad (10.1)$$

Будемо вважати, що співвідношення  $m_2/m_p = \text{const}$  в елементарному об'ємі, звідки

$$\boxed{\rho_2 = \text{const} \cdot \rho_p \frac{V_p}{V_2} = \text{const} \cdot \rho_p \frac{1 - \alpha}{\alpha}}. \quad (10.2)$$

Прийmemo для простоти, що бульбашки газу повністю захоплюються рідиною, при цьому тиск в газовій бульбашці дорівнює тиску в рідині, а відтак в суміші  $p_2 = p_p = p$  у відповідній точці. До того ж будемо припускати, що температура в газовій бульбашці є постійною. На підставі закону Бойля-Маріотта для газової фази отримаємо:

$$\boxed{p = C \rho_2 = \text{Const} \cdot \rho_p \frac{1 - \alpha}{\alpha}}, \quad (10.3)$$

де уведено позначення щодо константи  $\text{Const} = C \cdot \text{const}$ .

З формули (10.3) визначимо об'ємну концентрацію газу  $\alpha$  в суміші:

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{p}{\text{Const} \cdot \rho_p} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\text{Const} \cdot \rho_p}{\text{Const} \cdot \rho_p + p}}. \quad (10.4)$$

Візьмемо від обох частин формули (10.1) похідну по  $p$ :

$$\frac{d\rho}{dp} = \alpha \frac{d\rho_z}{dp} + (1-\alpha) \frac{d\rho_p}{dp} + (\rho_z - \rho_p) \frac{d\alpha}{dp}. \quad (10.5)$$

Проведемо заміну

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{d\rho_z}{dp} = \frac{1}{a_z^2}, \quad \frac{d\rho_p}{dp} = \frac{1}{a_p^2}.$$

Знайдемо похідну від  $\alpha$  по  $p$ , використовуючи формулу (10.4) та останню з уведених вище замін. Після перетворень отримаємо

$$\frac{d\alpha}{dp} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\rho_p \cdot a_p^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{p}. \quad (10.6)$$

Підставимо (10.6) в (10.5), використовуючи відповідні швидкості звуку:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{a_z^2} + \frac{1-\alpha}{a_p^2} + \frac{\rho_z \alpha(1-\alpha)}{\rho_p a_p^2} - \frac{\rho_z \alpha(1-\alpha)}{p} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_p^2} + \frac{\rho_p \alpha(1-\alpha)}{p},$$

що після врахування в четвертому доданку ізотермічності стиснення газової бульбашки,

коли за моделлю Ньютона швидкість звуку  $a_z^2 = \frac{p}{\rho_z}$ ,  $p = \rho_z a_z^2$ , дає

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{a_z^2} + \frac{1-\alpha}{a_p^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_p^2} + \frac{\rho_p \alpha(1-\alpha)}{p} + \frac{\rho_z \alpha(1-\alpha)}{\rho_p a_p^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_z^2}.$$

Очевидно, можна прийняти, що  $\rho_z \ll \rho_p$ ,  $a_z \ll a_p$ ,  $\rho_z a_z \ll \rho_p a_p$ . Тоді маємо

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{a_z^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_z^2} + \frac{1-\alpha-\alpha+\alpha^2}{a_p^2} + \frac{\rho_p \alpha(1-\alpha)}{p},$$

або остаточно

$$\boxed{\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha^2}{a_z^2} + \frac{(1-\alpha)^2}{a_p^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_p}{p}}. \quad (10.7)$$

Ми отримали **формулу Вуда** [Wood A.B. A Textbook of Sound. – London: Bell @ Sons Ltd, 1941].

Перші два доданки в правій частині (10.7) відносно малі і можуть бути опущені, тому залишається лише третій доданок. Таким чином, на практиці можна користуватися наступною наближеною формулою для швидкості поширення малих збурень (швидкості звуку) в газорідній суміші:

$$\boxed{a^2 \approx \frac{p}{\alpha(1-\alpha)\rho_p}}. \quad (10.8)$$

Знайдемо, при якій концентрації газової фази  $\alpha$  в суміші можна отримати **мінімум швидкості звуку** в ній. Для цього треба дослідити на екстремум вираз в знаменнику:

$$\frac{d}{d\alpha}(\alpha - \alpha^2) = 1 - 2\alpha = 0, \text{ звідки } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Друга похідна дає

$$\frac{d}{d\alpha}(1 - 2\alpha) = -2 < 0,$$

тобто вираз в знаменнику формули (10.8) має максимум, а відтак саме при об'ємній концентрації газу в газорідинній суміші  $\alpha = \frac{1}{2}$  швидкість поширення звуку в ній буде мінімальною. Наприклад, для води з бульбашками повітря за звичайних умов тиску  $p \approx 100 \text{ кПа}$  цей мінімум дорівнює 20 м/с, тобто в 17 разів менше швидкості звуку в повітрі (340 м/с) та в 75 разів менше швидкості звуку у воді (1500 м/с).

Істотна відмінність має місце і при невеликій, наприклад 4%, об'ємній концентрації повітря у воді — тоді  $a = 50 \text{ м/с}$ .

Тепер стає зрозумілим, чому в двохфазних потоках, що рухаються з не дуже великими швидкостями (з точки зору класичної газодинаміки високих швидкостей) в проточних частинах парових турбін, особливо турбін вологої пари, в парогенеруючих елементах ядерних реакторів і парових котлів та деяких технологічних апаратах, числа

Маха-Маієвського робочого середовища  $M = v/a = v / \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  можуть досягати достатньо

великих значень, що **можуть відповідати надзвуковим режимам течії!** Як ми знаємо, за таких умов саме стисливість середовища суттєво впливає на характеристики течії.

В літературних джерелах, а також в оглядовій статті Війнгаардена [van Wijngaarden L. Onedimensional flow of liquids containing small gas bubbles. — Annual Review of Fluid Mechanics, 1972, v. 4, p. 370] можна знайти узагальнення отриманих вище формул швидкості звуку і подальший розвиток теорії поширення звукових хвиль з урахуванням різниці швидкостей краплинної рідини і газових бульбашок, вплив неізотермічності процесу стиснення бульбашок, в'язкості рідини, частоти звукових хвиль та інших фізичних деталей процесу.

Як ми вже дізналися, в рідинах модуль об'ємного стиску (bulk modulus) і, відповідно, швидкість звуку в значній мірі залежать від вмісту нерозчинених газів. Наведемо ще один цікавий факт, відомий в акустиці: в воді при нормальному атмосферному тиску достатньо вмісту одного проміле повітря, щоби швидкість звуку знизилась приблизно на 400 м/с !

Довідка: **проміль** – від лат. *pro mille* = «на тисячу» – одиниця відносної величини, тобто безрозмірного відношення будь-якої величини до однойменної величини, що прийнята за вихідну.

Позначення: ‰; 1 ‰ =  $10^{-3}=0,001=0,1\%$ . (В чистій дистильованій воді швидкість звуку  $a \approx 1500$  м/с).

## 11. ТЕЧІЯ З РОЗРИВАМИ. ТЕОРІЯ ПРЯМОГО СТАЦІОНАРНОГО СТРИБКА УЩІЛЬНЕННЯ. УДАРНА АДАБАТА

### Історія питання

Вперше можливість виникнення поверхонь розриву, на яких швидкості і термодинамічні параметри в надзвуковому газовому потоці змінюються стрибком, була теоретично показана видатним німецьким геометром Ріманом (Георг Фрідріх Бернхард Ріман) у 1860 р., але він припустився неточності, помилково вважаючи, що густина  $\rho$  і тиск  $p$  з обох сторін стрибка ущільнення пов'язані адіабатою Пуассона. Теорія стрибка ущільнення, яка установила правильний зв'язок між тиском  $p$  і густиною  $\rho$  до і після стрибка, була створена шотландським вченим Ренкіном (Уіл'ям Джон Макуорі Ренкін) в 1870 р. і французьким вченим Анрі Гюгоніо в 1887 р. з урахуванням розриву зазначених функцій  $p$  і  $\rho$  на стрибку. Ренкін виправив неточність Рімана, який не користувався рівнянням енергії, а брав параметри  $p$  і  $\rho$  з обох сторін стрибка такими, які пов'язані адіабатою Пуассона. Явище утворення стрибків ущільнення в соплі Лавалю було виявлене та досліджене словацьким інженером-механіком і теплотехніком Аурелєм Стодолою. Ці питання також вивчали Е. В. Й. В. Мах і Дж. У. Релей (Стретт).

### 11.1. Геометричні та динамічні особливості стрибків ущільнення

Поверхні розриву поділяють на плоскі та криволінійні, причому вони можуть бути по різному орієнтовані відносно напрямку вектора швидкості надзвукового потоку газу. Стрибок ущільнення називається **прямим**, якщо поверхня розриву нормальна до швидкості потоку (рис. 11.1, а), в протилежному випадку стрибок називають **косим** (рис. 11.1, б).

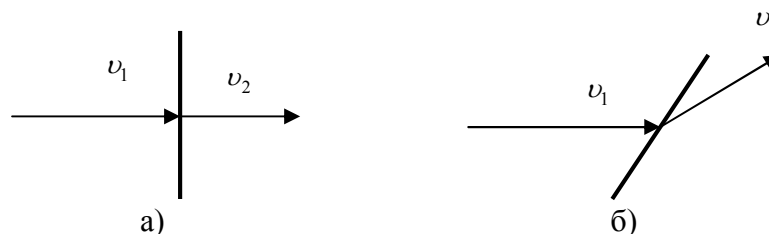


Рис. 11.1.

Сукупність прямого и системи косих стрибків утворює **криволінійний** стрибок ущільнення. Стрибки ущільнення супроводжуються зменшенням швидкості, зростанням тиску, густини, температури і втратами механічної енергії, оскільки різко зростає лобовий опір (саме це зростання опору називають **хвильовим опором**). Найбільший хвильовий

опір виникає при утворенні прямих стрибків ущільнення, які утворюються, наприклад, при надзвуковому обтіканні тупоносих тіл, при переході від дозвукової швидкості до надзвукової на поверхнях обтічних тіл, на нерозрахункових режимах в надзвукових соплах і т.п. При навколо- або надзвуковому русі тіла в газі наслідком появи стрибків ущільнення є також різка зміна розподілу тиску по поверхні тіла, а отже підйомної сили і аеродинамічного моменту, що важливо враховувати при розрахунках і конструюванні літальних апаратів, реактивних двигунів, газових турбін і осьових компресорів.

## 11.2. Теорія прямого стрибка ущільнення

Отже, розглянемо рух газу, при якому лінії течії до поверхні розриву є нормальними до поверхні розриву. Якщо поверхня розриву переміщується відносно обтічного тіла, то така поверхня називається *прямою ударною хвилею*. Якщо ж поверхня розриву нерухома відносно обтічного тіла, то вона називається *прямим стрибком ущільнення*

### Завдання.

Отримати **умови на прямому нерухомому стрибку ущільнення** — співвідношення, що пов'язують термодинамічні і кінематичні параметри течії по обидві сторони від поверхні розриву.

### Вихідні умови.

Як нам відомо, неперервний рух стисливої і нев'язкої рідини, при якому задовольняються умови нерозривності та адіабатності, є ізоентропійним ( $s = const$ ). Нам також відомо, що при русі газів в трубах можуть відбуватися різкі (скінченні за величиною) зміни  $p, \rho, T$  і швидкості  $\vec{v}$ . Такі «розриви» параметрів течії (названі ударними хвилями) в межах теорії ізоентропійного руху пояснити неможливо! Як побачимо нижче, утворення розривів на стрибку ущільнення навіть в ідеальному середовищі призводить до втрат механічної енергії, що виділяється у вигляді теплоти – до дисипації енергії. Тому рух газу із стрибком ущільнення не є ізоентропійним і рівняння

ідеальної адіабати Пуассона  $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k$  на стрибку вже справджуватися не буде.

Скористуємося тим, що за деяких обмежень закони збереження газової динаміки в інтегральному вигляді припускають розриви функціональних залежностей параметрів газу усередині області інтегрування. Обмеження на функціональні залежності: розрив має бути скінченним і мають існувати ліві і праві похідні.

### Виконання завдання.

Розглянемо одновимірний контрольний об'єм газу в теплоізольованій трубі постійного поперечного перерізу  $S$  (рис. 11.2), який включає стаціонарний прямий стрибок ущільнення.

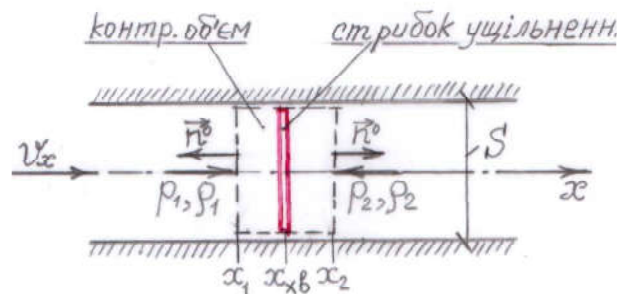


Рис. 11.2.

В даному випадку стрибок вважається нерухомим, який іноді називають «зупиненою ударною хвилею». Однак, в реальності, наприклад в дослідженій нами раніше задачі про поширення збурення при швидкому русі поршня в трубі, а також в задачах про вибух, детонацію тощо, ударна хвиля переміщується зі швидкістю, яка звичайно значно більше звукової.

Як можна собі уявити на момент аналізу реальність **зупиненої ударної хвилі**?

Задача про прямолінійний рух стрибка ущільнення може бути зведена до задачі про нерухомий стрибок уведенням системи координат, зв'язаною із стрибком, по відношенню до якої рух газу спрямований в протилежну сторону. За принципом відносності класичної механіки Галілея-Ньютона ми маємо право «обернути» рух: спостерігач, який рухається разом із стрибком з певною абсолютною швидкістю, може вважати себе нерухомим, а газ таким, що рухається з тією самою постійною швидкістю  $v_x$  назустріч руху ударної хвилі. Тоді ударна хвиля стає дійсно прямим стрибком ущільнення, нерухомим відносно стінок труби, а течія газу залишається стаціонарною.

Оскільки товщина такої ударної хвилі з координатою  $x_{xв}$  дуже мала:  $\Delta x = (x_2 - x_1) \rightarrow 0$ ,  $x_{xв} \in \Delta x$ , то можна покласти, що в зоні стрибка ущільнення відсутній теплообмін з оточуючим газом і з навколишнім середовищем через стінки труби, тим паче, що вони є теплоізольовані за умовою. Параметри газу перед та за стрибком ущільнення є різними: відповідно  $v_{x1}, p_1, \rho_1$  та  $v_{x2}, p_2, \rho_2$ , що є результатом розриву неперервності функціональних залежностей  $v_x(x), p(x), \rho(x)$ .

Доведемо, що для стаціонарного оберненого руху газу в циліндричній трубі постійного перерізу ( $S_1 = S_2$ ) **рівняння збереження щільності потоку імпульсу** (рівняння руху) на прямому нерухомому стрибку ущільнення має вигляд

$$\boxed{p_1 + \rho_1 v_{x_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{x_2}^2}. \quad (11.1)$$

{До речі, порівняйте з рівнянням Бернуллі для горизонтальної лінії течії нестисливої ідеальної рідини

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \}.$$

Доведення справедливості рівняння (11.1).

Пригадаємо вираз для похідної за часом інтеграла по об'єму, який залежить від часу:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x, y, z, t) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_S f v_n dS. \quad (11.2)$$

Якщо  $\vec{K} = \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV$  є вектор кількості руху, то **теорема імпульсів** має вигляд

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \oint_S \vec{p}_n dS, \quad (11.3)$$

де  $\vec{F}$  – густина масової сили (одинична масова сила),  $H/\kappa z$ ;  $\vec{p}_n$  – напруження поверхневої сили,  $Pa$ .

Права частина (11.3) — це головний вектор зовнішніх (відповідно масових і поверхневих) сил, що діють на рухомий об'єм за малий відрізок часу  $\Delta t \rightarrow 0$ , коли сам об'єм та поверхня, що його обмежує, мало змінюються, але зміна кількості руху все ж має місце через зміну швидкості руху  $\vec{v}$  газового об'єму. На підставі (11.2) і (11.3), з урахуванням того, що в даному випадку  $f(x, y, z, t) = \rho \vec{v}$ , теорема імпульсів набуває вигляду

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \oint_S (\rho \vec{v}) v_n dS = \int_V \rho \vec{F} dV + \oint_S \vec{p}_n dS,$$

або при нехтуванні масовими силами для газу, а також переходячи до тиску  $p$  від напруження поверхневої сили  $\vec{p}_n = p \vec{n}^o = -p \vec{n}^o$  (пам'ятаємо правило знаків для напружень), маємо для довільних об'єму та відповідної поверхні

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = -\oint_S [p \vec{n}^o + (\rho \vec{v}) v_n] dS}. \quad (11.4)$$

Перейдемо від загального до нашого випадку одновимірного руху газу в межах контрольного об'єму вздовж осі  $x$  в трубі із стрибком ущільнення, враховуючи прийнятий на рис. 11.2 додатний напрямок осі  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho v_x dx = - \left[ \int_{S_1} p(-1) dS + \int_{S_1} (\rho v_x)(-v_x) dS + \int_{S_2} p(+1) dS + \int_{S_2} (\rho v_x) v_x dS \right], \quad (11.5)$$

оскільки  $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}^o$ ; в проекціях на вісь  $x$  орти дорівнюють:  $n_x^o = -1$  в перерізі  $x_1$ ,  $n_x^o = +1$  в перерізі  $x_2$ .

При стаціонарному русі газу в межах контрольного об'єму ліва частина (11.5) дорівнює нулю, тоді після групування інтегралів маємо

$$\int_{S_1} (p + \rho v_x^2) dS = \int_{S_2} (p + \rho v_x^2) dS,$$

що при  $S_1 = S_2$  (циліндрична труба) дає остаточно зв'язок параметрів газу до і після стрибка ущільнення:

$$\boxed{p_1 + \rho_1 v_{x_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{x_2}^2}, \quad (11.6)$$

що й потрібно було довести — отримали повний збіг з рівнянням (11.1). Важливо відмітити, що отримане співвідношення не виключає можливості внутрішньої дисипації енергії, хоча до нього явно й не входять дотичні напруження на границях.

Помножимо (11.6) на вираз  $\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right)$  та врахуємо одомірне рівняння нерозривності

$$\rho_1 v_{x_1} = \rho_2 v_{x_2} \text{ при } S = idem: \quad (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) = (\rho_2 v_{x_2}^2 - \rho_1 v_{x_1}^2) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right), \text{ звідки}$$

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) = v_{x_2}^2 - v_{x_1}^2. \quad (11.7)$$

Вилучимо  $v_{x_2}^2 - v_{x_1}^2$  за допомогою інтеграла Бернуллі, що має зміст рівняння ентальпії для одновимірного адіабатного руху газу, вважаючи газ термічно ідеальним:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_{x_1}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_{x_2}^2}{2}, \text{ звідки } v_{x_2}^2 - v_{x_1}^2 = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right), \text{ що після підстановки в}$$

(11.7) дає

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right). \quad (11.7a)$$

Після ділення на тиск  $p_1$  і перетворень остаточно приходимо до формули

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (11.8)$$

Ми отримали відому **формулу Ренкіна-Гюгоніо** прямого стрибка ущільнення, що називають також **рівнянням ударної адіабати**, або просто **ударною адіабатою Гюгоніо**.

Назва «ударна адіабата» викликана тим, що при виведенні (11.8) не враховано підведення теплоти.

### Різновиди рівняння ударної адіабати.

**а)** Розв'язавши рівняння (11.8) відносно співвідношення густин, можна отримати

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}} = \frac{v_{x_1}}{v_{x_2}}. \quad \text{Іноді пишуть в іншому вигляді:} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2}}. \quad (11.9)$$

**б)** Співвідношення Ренкіна-Гюгоніо можна виразити через число Маха-Маієвського перед стрибком ущільнення  $M_1 = v_{x_1}/a_1 = v_{x_1}/\sqrt{k p_1/\rho_1}$ . Для цього найлегше скористатися рівнянням збереження імпульсу (11.6), поділивши обидві частини його на  $p_1$  та врахувавши  $\rho_1 v_{x_1} = \rho_2 v_{x_2}$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + M_1^2 k \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (11.10)$$

**в)** Якщо в формулі (11.10) замінити співвідношення густин  $\rho_1/\rho_2$  його виразом через  $p_2/p_1$ , використовуючи ударну адіабату у формі (11.9), то після перетворень отримаємо:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (11.11)$$

Якщо прирівняти праві частини рівнянь (11.10) і (11.11), то приходимо до формули

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2}. \quad (11.12)$$

При  $M_1 = 1$  потоку до стрибка згідно з (11.11) і (11.12) маємо  $p_2/p_1 = 1$  і  $\rho_1/\rho_2 = 1$ , але при усіх надзвукових потоках до стрибка ущільнення ( $M_1 > 1$ ) як тиск, так і густина при переході через стрибок **зростають!**

### Порівняння ударної адиабати з адиабатою Пуассона.

Для порівняння побудуємо графіки ідеальної адиабати Пуассона  $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k$  і

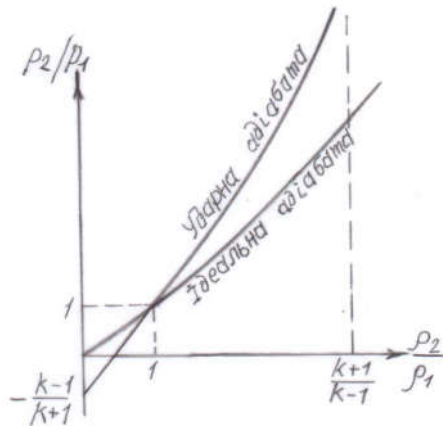


Рис. 11.3.

ударної адиабати Ренкіна-Гюгонію за формулою (11.8) (рис. 11.3). Якщо з рівняння ідеальної адиабати

Пуассона випливає, що при  $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$  співвідношення

густин теж  $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty$ , то інакше поводить себе ударна

адиабата: вона має вертикальну асимптоту

$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}$ , оскільки при підстановці цієї величини

в формулу (11.8) її знаменник дає нуль, а отже  $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$ .

Тобто, яким би великим не було співвідношення тисків  $\frac{p_2}{p_1}$ , відповідне

співвідношення густин  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  не може перевищувати  $\frac{k+1}{k-1}$ ! Обидві криві проходять через

одну точку  $\frac{p_2}{p_1} = 1$ ,  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$ , що легко перевірити за формулою (11.8). Правіше цієї точки

перетину ударна адиабата йде вище адиабати Пуассона, а лівіше – нижче її. Ударна

адиабата перетинає вісь абсцис в точці  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k-1}{k+1}$  (якщо покласти в (11.8)  $\frac{p_2}{p_1} = 0$ ), а вісь

ординат — в точці  $\frac{p_2}{p_1} = -\frac{k-1}{k+1}$  (якщо покласти  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0$  в формулі (11.8)).

Існування асимптоти  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}$  указує на те, що в стрибку ущільнення **ніяким**

високим тиском не можна не можна стиснути газ більше, ніж в  $\frac{k+1}{k-1}$  разів. Як ми

згадували в п.п. 9.3.4, фізично це пояснюється тим, що зростання температури газу при

його стисненні на стрибку ущільнення протидіє стисненню через намагання газу розширитись. Тобто газ від нагріву стає неначе більш жорстким. Наприклад, для повітря та інших двохатомних газів  $\frac{k+1}{k-1} = 6$ , бо  $\frac{1,4+1}{1,4-1} = \frac{2,4}{0,4} = 6$ . Однак в потоках реальних газів

адіабатність процесу порушується раніше, ніж досягається ця умова.

**Примітка.** Отриманий результат є справедливим тільки при не дуже високих температурах, принаймні не вище 5000°C. При дуже високих температурах у стрибку починається дисоціація молекул — розпад на атоми, що не враховується теорією простої ударної хвилі, яка викладена нами.

Як впливає з рис. 11.3, при будь-якому фіксованому значенні  $p_2/p_1 > 1$  величина  $\rho_2/\rho_1$ , що відповідає ударній адіабаті, є меншою, ніж для ідеальної адіабати Пуассона. Це може вказувати на те, що при ударному адіабатному стисканні газу в стрибку ущільнення і його русі через стрибок має місце певна незворотна втрата механічної енергії, яка переходить в теплову. Відповідне зростання питомої ентропії на прямому стрибку ущільнення можна знайти на підставі Першого принципу термодинаміки. Покажемо це в наступній лекції.

**Резюме.** Прямий стрибок ущільнення в трубі сталого перерізу розраховується за допомогою трьох співвідношень, які називають *умовами Ренкіна-Гюгоніо*, або *умовами динамічної сумісності на розриві* (індекси означають: 1 – до стрибка ущільнення, 2 – після стрибка):

збереження маси  $\rho_1 v_{x_1} = \rho_2 v_{x_2}$  (при  $S = idem$ );

збереження щільності потоку імпульсу  $p_1 + \rho_1 v_{x_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{x_2}^2$ ;

збереження енергії

$$\frac{v_{x_1}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_{x_2}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

### 11.3. Термодинамічні особливості прямих стрибків ущільнення

Як ми знаємо з термодинаміки, виведення рівняння ідеальної адіабати  $\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$  засноване на умові ізоентропійності процесу ( $s = const$ ). Ця умова є умовою оборотного перетворення механічної енергії в теплоту. Можна припустити, що різний характер графіків ідеальної та ударної адіабат обумовлений тим, що при ударному стисненні  $s \neq const$ . Тоді, застосовуючи наведений в підрозділі 6.2 термодинамічний аналіз загального випадку необоротного процесу, але тепер для вхідного та вихідного перерізів

одновимірного контрольного об'єму, який містить нерухомий стрибок ущільнення, можна отримати формулу, аналогічну формулі (6.28), для різниці питомих ентропій за стрибком і перед ним. Нагадаємо хід міркувань при аналізі необоротного термодинамічного процесу течії газу. Якщо вважати, що термодинамічна робота зміни об'єму повністю витрачається на подолання зовнішнього тиску (тобто, тиск робочого тіла (газу) є однаковий із зовнішнім тиском), рівняння **Першого закону термодинаміки** має вигляд  $\delta q = du + pdv_n$ , де  $v_n = 1/\rho$  – питомий об'єм газу. Перейдемо до диференціала ентропії, для чого обидві частини рівняння поділимо на абсолютну температуру як інтегруючий дільник та врахуємо рівняння Клапейрона:

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du}{T} + \frac{pdv_n}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv_n}{v_n}, \quad (11.13)$$

де  $\delta q$  – елементарна кількість теплоти (позначення  $\delta$  відповідає неповному диференціалу).

Підставимо в рівняння (11.13) ізохорну теплоємність у вигляді  $c_v = R/(k-1)$ , який отриманий з формул Майєра  $c_p - c_v = R$  та показника адіабати  $k = c_p/c_v$ :

$$ds = \frac{R}{k-1} \left[ \frac{dT}{T} + (k-1) \frac{dv_n}{v_n} \right]. \quad (11.14)$$

Інтегруємо (11.14) в границях параметрів, що відповідають вхідному та вихідному перерізам одновимірного контрольного об'єму, який містить нерухомий стрибок ущільнення (рис. 11.2), з наступною підстановкою  $v_n = 1/\rho$ :

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \left[ \ln \frac{T_2}{T_1} + (k-1) \ln \frac{v_{n2}}{v_{n1}} \right] = \frac{R}{k-1} \ln \left[ \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right].$$

Виключимо співвідношення температур  $\frac{T_2}{T_1}$ , використовуючи рівняння Клапейрона;

після перетворень **різниця питомих ентропій за стрибком і перед ним складатиме**

$$\boxed{s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^k}}. \quad (11.15)$$

Як видно з рис. 11.3, при будь-якому фіксованому співвідношенні тисків  $(p_2/p_1) > 1$  для ударної адіабати співвідношення густин  $\rho_2/\rho_1$  є меншим, ніж для ідеальної. Якщо для ідеальної адіабати знаменник в (11.15) дорівнює чисельнику (класичний випадок адіабати Пуассона,  $\ln 1 = 0$ ), тобто  $\Delta s = s_2 - s_1 = 0$ , то для ударної

адіабати знаменник менше чисельника. А оскільки логарифми чисел, більших одиниці є додатними, то для ударної адіабати  $s_2 > s_1$ .

**Висновок:** ударний стиск газу в стрибку ущільнення супроводжується зростанням ентропії, тобто незворотним перетворенням механічної енергії в теплову, коли при перетіканні газу через стрибок «втрачається» певна частина механічної енергії, хоча й рух газу в ударній хвилі є адіабатним. Це доводить важливу властивість утворення розривів в стрибках ущільнення: дисипація енергії має місце навіть у випадку руху ідеального (нев'язкого) середовища!

### Неможливість ударної хвилі розрідження.

Отримані вище формули, наприклад (11.9), а саме:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}},$$

формально описують і «стрибок розрідження», оскільки у вихідних рівняннях і при виведенні рівняння ударної адіабати співвідношення тисків  $p_2/p_1$  не пов'язане з будь-якими обмеженнями. Проте, якщо відсутня теплова дія на газ (адіабатні умови), то **ударна хвиля розрідження фізично неможлива**, оскільки в протилежному випадку, згідно з рис. 11.3 і наведеною вище формулою (11.15), це спричинило б нерівність  $s_2 < s_1$ , що суперечить Другому принципу термодинаміки.

**Доведемо це.** Для ідеальної адіабати  $\ln \frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^k} = 0$ , в той час як для ударної

адіабати при уявному існуванні «стрибка розрідження», тобто в діапазоні  $0 < \rho_2/\rho_1 < 1$ , ми б отримали, відповідно до рис. 11.3, менші значення чисельника в формулі (11.15) порівняно із значенням  $p_2/p_1$  для ідеальної адіабати, і мала б місце нерівність

$$\frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^k} < 1 \text{ (оскільки крива ударної адіабати проходить нижче кривої ідеальної адіабати).}$$

А оскільки логарифми чисел, менших одиниці – від'ємні, то за формулою (11.15) це призвело б до нерівності  $s_2 - s_1 < 0$ , що неможливо, оскільки було б еквівалентним твердженню про зменшення ентропії ізольованої системи. **А це суперечить Другому закону термодинаміки.**

До того ж, як видно з рис. 11.3, в діапазоні  $0 < \rho_2/\rho_1 < 1$  величина  $p_2/p_1$  може приймати і від'ємні значення, зокрема при  $0 \leq \frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{k-1}{k+1}$ . Тоді вираз  $\frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^k}$  під знаком логарифму також набув би від'ємного значення (а має бути обов'язково додатним), що з математичної точки зору є неможливим.

**Висновок:** ударні хвилі розрідження в енергоізолюваній системі є неможливими, а рівняння адиабати Ренкіна-Гюгоніо (11.8)–(11.12) справедливі лише при  $(\rho_2/\rho_1) \geq 1$ .

#### 11.4. Формула Прандтля добутку швидкостей на стрибку ущільнення

**Л. Прандтль (L. Prandtl)** отримав формулу: «добуток швидкостей газу до прямого стрибка та після нього дорівнює квадрату критичної швидкості», тобто  $\boxed{v_{x_1} \cdot v_{x_2} = a_*^2}$ .

Доведемо її справедливість.

Нагадаємо, що критична швидкість  $a_*$  — постійна для будь-якої струминки газу, що розмежовує в струминці ділянки дозвукової та надзвукової швидкостей, причому

$$a_* = a_o \sqrt{\frac{2}{k+1}}, \quad (11.16)$$

де  $a_o$  — швидкість звуку в загальмованому газі.

Виведемо формулу Л. Прандтля.

Запишемо рівняння енергії для одновимірного теплоізолюваного потоку до та після стрибка ущільнення на підставі інтеграла Бернуллі:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_{x_1}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_{x_2}^2}{2} = \frac{a_o^2}{k-1}. \quad (11.17)$$

Підставимо в праву частину (11.17) величину  $a_o^2 = a_*^2 \frac{k+1}{2}$  з формули (11.16), після чого виразимо співвідношення  $\frac{p_1}{\rho_1}$  і  $\frac{p_2}{\rho_2}$  через критичну швидкість

$$\begin{cases} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} v_{x_1}^2, \\ \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} v_{x_2}^2. \end{cases} \quad (11.18)$$

Пригадаємо рівняння збереження щільності потоку імпульсу (11.6):

$$\boxed{p_1 + \rho_1 v_{x_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{x_2}^2}.$$

Виразимо з нього різницю тисків, потім помножимо обидві частини рівняння на площу поперечного перерізу труби  $S$  та врахуємо рівняння нерозривності для стисливої рідини в гідравлічній формі (уведемо  $Q_m$  – масову витрату газу):

$$(p_2 - p_1)S = \rho_1 v_{x_1} S \cdot v_{x_1} - \rho_2 v_{x_2} S \cdot v_{x_2} = Q_m (v_{x_1} - v_{x_2}),$$

звідки отримаємо

$$v_{x_1} - v_{x_2} = \frac{p_2}{\rho_2 v_{x_2}} - \frac{p_1}{\rho_1 v_{x_1}}. \quad (11.19)$$

Підставимо в (11.19) значення  $\frac{p_1}{\rho_1}$  і  $\frac{p_2}{\rho_2}$  із системи (11.18), що після зведення

подібних членів дає

$$v_{x_1} - v_{x_2} = \frac{k+1}{2k} a_*^2 \frac{v_{x_1} - v_{x_2}}{v_{x_1} v_{x_2}} + \frac{k-1}{2k} (v_{x_1} - v_{x_2}). \quad (11.20)$$

Скоротивши на  $v_{x_1} - v_{x_2}$ , ми втратимо корінь  $v_{x_1} = v_{x_2}$ , але який нас не цікавить, оскільки він відповідає однаковому значенню тиску  $p_1 = p_2$ , що впливає з (11.19) при  $S = idem$ , а це означало б відсутність стрибка ущільнення.

Другий корінь знаходимо після скорочення на  $v_{x_1} - v_{x_2}$ :

$$1 = \frac{k+1}{2k} \frac{a_*^2}{v_{x_1} v_{x_2}} + \frac{k-1}{2k},$$

що справджується при

$$\boxed{v_{x_1} \cdot v_{x_2} = a_*^2}, \quad (11.21)$$

що й треба було довести. А це означає, що в стрибку ущільнення швидкість змінюється від надзвукової  $v_{x_1} > a_*$  до дозвукової  $v_{x_2} < a_*$  швидкості.

Рівняння (11.21) можна записати через коефіцієнти швидкості  $\lambda_1 = \frac{v_{x_1}}{a_*}$ ,  $\lambda_2 = \frac{v_{x_2}}{a_*}$ ,

тоді

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1}, \quad (11.22)$$

причому  $\lambda_1 > 1$ ,  $\lambda_2 < 1$ .

Нагадуємо, в досліджуваній вище задачі стрибок ущільнення приймався нерухомим («зупиненою ударною хвилею»). Це явище має незвичайну аналогію із зовсім іншим

фізичним явищем — так званим «гідравлічним стрибком». Тобто аналогом нерухомої ударної хвилі є стрибкоподібне стаціонарне підвищення вільної поверхні води з відповідним збільшенням глибини потоку при витіканні з-під щита:  $h_2 > h_1$  (рис. 11.4).

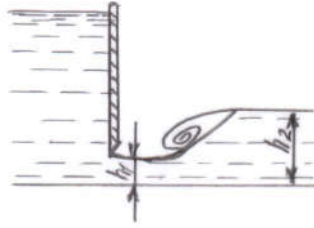


Рис. 11.4.

**Прямий стрибок ущільнення є формою переходу від надзвукового руху газу до дозвукового.** При цьому переході температура гальмування та критична швидкість газу залишаються незмінними. Переконаймося в цьому. Застосуємо інтеграл Бернуллі для перерізів потоку до стрибка ущільнення та після нього:

$$\begin{cases} \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_{x_1}^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_{o_1}; \\ \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_{x_2}^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_{o_2}, \end{cases} \quad (11.23)$$

де  $T_{o_1}$  і  $T_{o_2}$  — температури гальмування відповідно до та за стрибком ущільнення.

Оскільки ліві частини (11.23) є рівними, оскільки інтеграл Бернуллі еквівалентний рівнянню енергії, яке справджується на стрибку

$$h_1 + \frac{v_{x_1}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{x_2}^2}{2} = h_o,$$

то рівні і праві частини (11.23), тобто  $T_{o_1} = T_{o_2}$ . Така незмінність температури

гальмування (тобто, повної питомої ентальпії  $h_o = \frac{k}{k-1} RT_o = c_p T_o = \frac{a_o^2}{k-1}$ ) при переході

через стрибок пояснюється тим, що втрата механічної енергії, яка перетворюється в теплоту, не розсіюється завдячуючи адіабатності (теплоізолюваності) системи. Очевидно

також, що й величина критичної швидкості  $a_* = a_o \sqrt{\frac{2}{k+1}} = idem$  на стрибку, оскільки

$$a_o = \sqrt{kRT_o}.$$

Враховуючи отриманий результат  $T_{o_1} = T_{o_2}$ , на підставі рівняння Клапейрона для параметрів гальмування можна зробити висновок:  $\boxed{\frac{p_{o_1}}{\rho_{o_1}} = \frac{p_{o_2}}{\rho_{o_2}}}$  на стрибку ущільнення.

Отже, пам'ятаємо, що визначення кількісних змін параметрів потоку в прямому стрибку ущільнення в трубі з  $S=idem$  базується на таких співвідношеннях, які називають умовами Ренкіна-Гюгоніо, або **умовами динамічної сумісності на розриві**:

рівнянням нерозривності  $\rho_1 v_{x_1} S = \rho_2 v_{x_2} S,$

рівнянням імпульсів  $(p_1 - p_2)S = (\rho_2 v_{x_2}^2 - \rho_1 v_{x_1}^2)S,$

рівнянням ентальпії  $h_1 + \frac{v_{x_1}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{x_2}^2}{2},$

формулою Прандтля  $v_{x_1} \cdot v_{x_2} = a_*^2.$

На їх підставі після алгебраїчних виведень можна остаточно отримати [також див. (11.11), (11.12)]:

$$\boxed{\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1)}; \quad \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2};$$

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{2(k-1)(M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2)}{(k+1)^2 M_1^2}; \quad \frac{v_{x_1} - v_{x_2}}{v_{x_1}} = \left(1 - \frac{a_*^2}{v_{x_1}^2}\right) = \frac{(\lambda_1^2 - 1)}{\lambda_1^2}.$$

Втрату механічної енергії на прямому стрибку ущільнення можна характеризувати відношенням повних тисків за стрибком і до нього  $p_{o_2}$  і  $p_{o_1}$ :

$$\frac{p_{o_2}}{p_{o_1}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} M_1^{\frac{2k}{k-1}} \left[ \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(kM_1^2 - \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \right]^{-1}.$$

В практичних розрахунках користуються таблицями і графіками газодинамічних функцій (ГДФ), наведеними в підручниках і спеціальних джерелах з газодинаміки.

В інженерній практиці також зустрічаються два типи ударних хвиль з відводом (підводом) теплоти: *стрибок конденсації* і *детонаційна хвиля*. *Стрибок конденсації* виникає, наприклад, при конденсації парів води, що містяться в потоці повітря. Процес конденсації виникає виключно швидко й раптово, при цьому виділяється певна кількість теплоти, яка дорівнює теплоті випаровування. Умови виникнення стрибка конденсації дуже складні і до кінця ще не з'ясовані. *Детонація* виникає при швидкому згорянні вибухової речовини або рідкого пального (наприклад, бензину в двигунах внутрішнього згорання). Якщо поширення режиму нормального горіння (точніше, фронту нормального згорання).

поширення полум'я) відбувається зі швидкістю 1–2 м/с, то *детонаційної хвилі* – зі швидкістю 2000–3000 м/с ! Швидкість *детонаційної хвилі* залежить головним чином від складу суміші. Газодинамічна теорія детонації достатньо добре розроблена, проте вона складна. Значний інтерес для багатьох практичних цілей має детонаційне горіння у високошвидкісних неперервних потоках газових сумішей. За останній час отримано нові знання про горіння газів за **фронтом займистих ударних хвиль** та досліджено особливі детонаційні режими.

## 12. КОСІ СТРИБКИ УЩІЛЬНЕННЯ

### 12.1. Загальна характеристика косих стрибків

В п. 11.1. ми дізналися, що крім прямих існують косі (або скісні) стрибки ущільнення. Прямий стрибок ущільнення можна розглядати як граничний випадок косого стрибка, який утворюється в надзвуковому потоці при зміні надзвукового потоку свого напрямку, наприклад, при різкому повороті обтічної стінки на деякий кут  $\angle \theta$  (рис.12.1, а) або при зустрічі потоку з клиноподібним тілом (рис.12.1, б). На рис. 12.1 швидкості  $v_1, v_2$  надзвукового потоку паралельні сторонам кутів (стінкам) перед і за стрибком. Трикутники швидкостей треба розглядати по відношенню до контрольного об'єму 1, де нормальні проекції  $v_{n1}, v_{n2}$  перпендикулярні до стрибка ущільнення 2; дотичні проекції  $v_{\tau1}, v_{\tau2}$  паралельні стрибку.

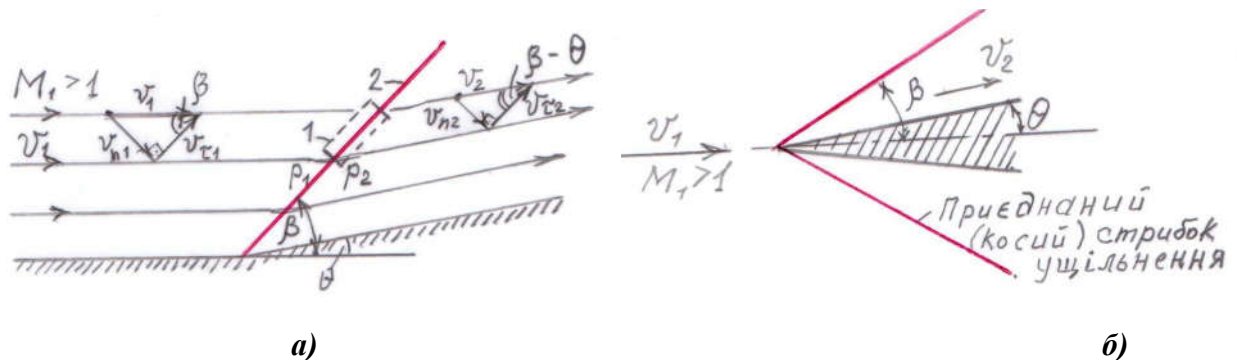


Рис. 12.1.

Для косого стрибка ущільнення можна брати співвідношення, що були отримані для прямого стрибка, якщо застосувати їх не для швидкостей  $v_1$  і  $v_2$  в напрямку руху потоку, а до проекцій  $v_{n1}$  і  $v_{n2}$ , нормальних до напрямку стрибка.

В п. 11.2 на підставі теореми імпульсів для прямого стрибка ущільнення ми отримали рівняння (11.6)

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (\text{тут } v_1 \equiv v_{x1}; v_2 \equiv v_{x2}).$$

Переходячи до косо́го стрибка, ми можемо записати останнє рівняння щодо нормального напрямку до стрибка у вигляді

$$p_1 + \rho_1 v_{n_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n_2}^2. \quad (12.1)$$

З урахуванням одновимірного рівняння нерозривності в межах контрольного об'єму

$$\rho_1 v_{n_1} = \rho_2 v_{n_2}, \quad (12.2)$$

з рівняння (12.1), аналогічно тому, як ми робили в процесі виведення (11.19), отримаємо

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_{n_1} (v_{n_1} - v_{n_2}). \quad (12.3)$$

Оскільки  $p_2 > p_1$ , то  $v_{n_1} > v_{n_2}$ , тобто нормальна складова вектора швидкості при перетині газом косо́го стрибка ущільнення зменшується. З'ясуємо, як поведуть себе дотичні складові. Для цього врахуємо, що проекція головного вектора сил тиску на напрямок вздовж стрибка дорівнює нулю. Тоді рівняння кількості руху для напрямку, паралельного стрибку, можна представити згідно з рівнянням нерозривності (12.2) як

$$0 = Q_m (v_{\tau_2} - v_{\tau_1}) = \rho_1 v_1 (v_{\tau_2} - v_{\tau_1}) = \rho_2 v_{n_2} v_{\tau_2} - \rho_1 v_{n_1} v_{\tau_1},$$

звідки випливає, що  $v_{\tau_1} = v_{\tau_2} = v_{\tau}$ . Таким чином, при проходженні стрибка ущільнення тангенціальні складові векторів швидкості до стрибка і після нього не змінюються.

Отже, косий стрибок ущільнення можна уявити собі у вигляді «прямого» стрибка, в якому зазнає розриву нормальна складова вектора швидкості та який переміщується за напрямком косо́го стрибка ущільнення зі швидкістю  $v_{\tau}$ .

Запишемо рівняння енергії у формі ентальпії

$$h_1 + \frac{v_{n_1}^2 + v_{\tau_1}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{n_2}^2 + v_{\tau_2}^2}{2}. \quad (12.4)$$

Врахуємо рівність  $v_{\tau_1} = v_{\tau_2}$  та вирази для ентальпії  $h = c_p T = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$ , тоді (12.4)

можна після перетворень звести до вигляду

$$\frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = v_{n_1}^2 - v_{n_2}^2. \quad (12.5)$$

Примітимо, що якщо в рівняннях збереження імпульсу та ентальпії (інтегралі Бернуллі) в **теорії прямого стрибка ущільнення** при виведенні формули Ренкіна-Гюгонію швидкості  $v_{x_1}$  і  $v_{x_2}$  поміняти на нормальні складові швидкостей  $v_{n_1}$  і  $v_{n_2}$ , то отримуємо повний збіг з рівняннями (12.1) і (12.5). Звідси випливає, що після перетворень останніх рівнянь аналогічно перетворенням рівнянь для прямого стрибка ущільнення,

отримаємо рівняння ударної адиабати для косоного стрибка у такому ж вигляді, як і для прямого, тобто у вигляді (11.8) і (11.9).

З трикутників швидкості до і після стрибка ущільнення маємо:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{n_1}}{v_{\tau_1}}; v_{\tau_1} = \frac{v_{n_1}}{\operatorname{tg} \beta} = v_{\tau_2} = \frac{v_{n_2}}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}.$$

Якщо врахувати рівняння нерозривності в нормальному до стрибка напрямку, то отримаємо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{n_1}}{v_{n_2}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}. \quad (12.6)$$

Числа Маха-Маієвського для потоку до косоного стрибка по швидкості  $v_1$  і по нормальній складовій швидкості  $v_{n_1} \in M_1 = v_1/a_1$ ,  $M_{n_1} = v_{n_1}/a_1$ .

Тоді, враховуючи  $\sin \beta = \frac{v_{n_1}}{v_1} = \frac{M_{n_1} \cdot a_1}{M_1 \cdot a_1}$ , маємо зв'язок  $M_{n_1} = M_1 \sin \beta$ .

Тому, використовуючи співвідношення Ренкіна-Гюгонію типу (11.12) у вигляді

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_{n_1}^2}{(k-1)M_{n_1}^2 + 2},$$

а також формулу (12.6), після перетворень можна отримати

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\operatorname{ctg} \beta (1 - M_1^2 \sin^2 \beta)}{(1 - M_1^2 \sin^2 \beta) + [(k+1)/2] M_1^2}. \quad (12.7)$$

Рівняння (12.7) пов'язує кут нахилу косоного стрибка ущільнення  $\beta$  з початковим числом  $M_1$  при заданих кутах  $\theta$  повороту обтічної стінки.

По рівнянню (12.7) можна побудувати графік (рис. 12.2, повітря), який показує, що при заданих значеннях початкового числа  $M_1$  і кута повороту стінки  $\theta$  існують два можливих кута  $\beta$  нахилу косоного стрибка ущільнення. Досліди показують, що при меншому значенні кута нахилу косоного стрибка  $\beta$  течія за ним залишається **надзвуковою**. При більших кутах  $\beta$  течія за такими стрибками **дозвукова**, тобто стрибок наче створює «підпір» основному потоку.

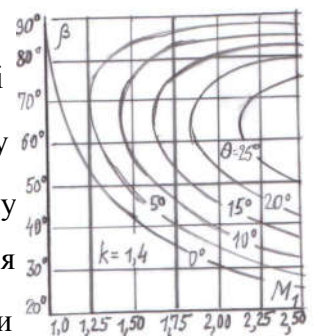


Рис. 12.2.

Відповідно, косий стрибок з меншим кутом нахилу називають **слабким стрибком**, а стрибок з більшим кутом нахилу — **сильним стрибком**. Згідно з фізичними дослідженнями з двох можливих кутових положень плоского косоного стрибка більш стійким є таке, що відповідає меншому значенню кута  $\beta$  між фронтом стрибка і напрямком основного потоку. Таким чином, на графіку рис. 12.2 практичну важливість мають нижні вітки

кривих під їх максимумами. З графіка випливає, що для заданого числа  $M_1$  існує деякий максимальний кут  $\theta_{\max}$  повороту стінки, при якому ще виникає косий стрибок ущільнення. При  $\theta > \theta_{\max}$  виникає пряма ударна хвиля, коли  $\beta = 90^\circ$ . При  $\theta = 0^\circ$  течію можна інтерпретувати як поширення нескінченно малого збурення з точки перетину попередньо розглянутого стрибка з горизонтальною стінкою (див. рис. 12.1.а). При  $\theta = 0^\circ$  з формули (12.7) маємо:  $M_1^2 \sin^2 \beta = 1$ , тобто  $\sin \beta = 1/M_1$ , отже в цьому граничному випадку косий стрибок ущільнення вироджується у звичайну хвилю Маха (конус Маха) для надзвукового потоку.

Доведемо, що при однакових числах Маха-Маієвського потоку, що набігає, співвідношення тисків  $p_2/p_1$  в косому стрибку ущільнення є меншими, ніж співвідношення тисків в прямому стрибку. На підставі рівнянь (12.2), (12.3) з урахуванням  $v_{1n} = v_1 \sin \beta$  можна отримати співвідношення тисків

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + kM_1^2 \sin^2 \beta \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right).$$

При заміні співвідношення густин співвідношенням тисків згідно з адіабатою Гюгонію, після перетворень приходимо до виразу

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{k-1}{k+1}. \quad (12.8)$$

Для прямого стрибка  $\sin^2 \beta = 1$ , а для косого  $\sin^2 \beta < 1$ . Тоді перший доданок в (12.8), а отже, співвідношення тисків у другому випадку буде меншим, ніж у першому. Це й треба було довести.

Чим менше співвідношення  $p_2/p_1$ , тим менше ударна адіабата відрізняється від ідеальної. Тоді при однакових значеннях числа  $M_1$  потоку, що набігає, **втрати енергії в косому стрибку ущільнення менші, ніж в прямому.**

## 12.2. Поняття про взаємодію примежового шару зі стрибком ущільнення

Відомо про вплив примежового шару на зовнішній потік при дозвуковому обтіканні тіла: через наростання товщини витіснення  $\delta^*$  примежового шару відбувається відхилення ліній течії зовнішнього потоку. Отже, навколо тіла зовнішній потік є саме таким, як при обтіканні фіктивного контуру, зміщеного на товщину витіснення від поверхні дійсного контуру. Один з методів розрахунку течії передбачає застосування послідовних наближень. Спочатку розглядається обтікання тіла ідеальною рідиною, потім по знайденому розподілу тиску вздовж поверхні на підставі рівнянь Прандтля примежового

шару розраховують його параметри (зокрема й товщину витіснення). Далі розраховується обтікання фіктивного тіла із зміщеним на величину  $\delta^*$  контуром і т. д. Зазвичай обмежуються першим наближенням, оскільки товщина витіснення найчастіше є малою порівняно з розмірами обтічного тіла.

**При великих швидкостях** обтікання тіл і виникненні стрибків ущільнення примежовий шар має більш сильний вплив на зовнішній потік і в деяких випадках суттєво змінює загальну картину течії. Причина полягає в тому, що в стрибку ущільнення в напрямку нормалі до його фронту (який практично мало відрізняється від напрямку потоку) зміни швидкості і температури великі порівняно із зміною вздовж стрибка; в примежовому шарі зміни цих параметрів вздовж потоку незначні, натомість поперек примежового шару великі. Таким чином, в області взаємодії примежового шару зі стрибком ущільнення швидкість і температура суттєво змінюються як поперек, так і вздовж потоку, при цьому основні припущення і теорії примежового шару, і теорії стрибка втрачають справедливість. Картина взаємодії залежить також від того, який примежовий шар — ламінарний або турбулентний, чи має місце відрив, чи відбувається у подальшому приєднання примежового шару до поверхні. Звідси впливає надзвичайна складність як теоретичних, так і експериментальних досліджень зазначеної області взаємодії, однак завдяки саме експериментам все ж вдалося уявити фізичну картину області взаємодії і визначити деякі кількісні закономірності.

Навіть утворення слабкого стрибка ущільнення викликає різке зростання тиску у зовнішньому потоці, що відображає властивість будь-якого стрибка. Зростання тиску передається назустріч потоку по дозвуковій частині примежового шару як своєрідний «підпір» для нього (стрибок ущільнення в зоні обтічної поверхні з примежовим шаром не досягає стінки, оскільки у внутрішній частині примежового шару, безпосередньо поблизу стінки, швидкості потоку є дозвуковими). Відхилення ліній течії від стінки породжує сімейство хвиль стиснення в надзвуковій частині примежового шару. При їх поширенні у зовнішній потік вони впливають на інтенсивність і форму головного стрибка ущільнення в безпосередній близькості до області взаємодії. Таким чином, у зовнішньому потоці при слабкому стрибку поздовжній градієнт тиску виявляється значно більшим, ніж у примежовому шарі. При слабкому стрибку відносно невеликі градієнти тиску в примежовому шарі не призводять до його відриву.

Водночас слід зазначити, що у **високошвидкісних потоках** мають місце відриви примежового шару, які викликаються не тільки великими додатними градієнтами тиску за рахунок форми обтічної поверхні, але й внаслідок появи стрибків ущільнення.

Так, при зростанні інтенсивності стрибка ущільнення у зовнішньому потоці поздовжній градієнт тиску поблизу стінки може збільшитись настільки, що викличе відрив примежового шару. В результаті збільшення відхилень ліній течії в надзвукову частину потоку утворюється розподіл тиску, необхідний для підтримки інтенсивності стрибка ущільнення. У загальному випадку умови в зовнішньому потоці (інтенсивність стрибка ущільнення, місцеве число  $M$ , прискорення або сповільнення течії) і форма обтічного тіла можуть приводити до двох сценаріїв. **За першим з них** потік після відриву знов приєднується до стінки, але під деяким кутом до неї, що викликає новий стрибок ущільнення. Іноді це призводить до повного відриву примежового шару. Таким чином, можуть з'являтися декілька послідовних стрибків ущільнення. Наприклад, це явище спостерігається при обтіканні крилових профілів з утворенням місцевих надзвукових зон, а також при течії в каналах із замикаючим стрибком ущільнення. **Згідно з другим сценарієм**, виникає розвинений відрив, механізм якого визначається умовами змішування і дуже великою мірою характером течії за точкою відриву. Приклади розвинутого відриву спостерігаємо при обтіканні крилового профілю при закритичному куті атаки, при обтіканні кругового циліндра, сфери, при течії перед уступом.

Схематично розглянемо типову картину взаємодії «спадного» стрибка ущільнення з ламінарним примежовим шаром на плоскій поверхні і характерний розподіл тиску на обтічній стінці (рис. 12.3). В незбуреному потоці (не доходячи до точки 1) тиск  $p_0 = idem$ . При наближенні до точки відриву 2 спостерігається зростання тиску, яке продовжується і за нею до деякого постійного у відривній зоні значення  $p_1$ . Наступне зростання тиску до значення  $p_2$  відповідає тиску за спадним та відбитим стрибками. Точка приєднання 5 розташована в цій зоні підвищення тиску.

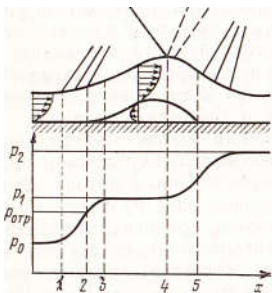


Рис. 12.3. Схема взаємодії стрибка ущільнення з ламінарним примежовим шаром: 1 – початок підвищення тиску; 2 – точка відриву; 3 – початок області постійного тиску; 4 – місце падіння стрибка ущільнення; 5 – точка приєднання потоку.

Вважають, що відрив примежового шару, викликаний взаємодією його зі стрибком ущільнення, залежить від двох параметрів, пов'язаних із тиском. Першим параметром є співвідношення  $p_{omp}/p_0$ , де  $p_{omp}$  – тиск в точці відриву;  $p_0$  – тиск в незбуреному потоці. Другий параметр, який має назву **критичного відношення тиску**  $p_1/p_0$ , де  $p_1$  – тиск в зоні відриву, характеризує зміну тиску в косому стрибку, що виникає перед точкою відриву. Визначна особливість явища взаємодії полягає в тому, що параметри потоку поблизу точки відриву не залежать від причини, яка викликає відрив, а залежать лише від чисел  $M_0$  і  $Re_0$  в незбуреному

потоці. Тому й параметри  $p_{omp}/p_0$  і  $p_1/p_0$  є універсальними функціями чисел  $M_0$  і  $Re_0$ . Згідно з наближеними теоріями Г. Гедда і Р. Хаккинена, при  $M_0 > 1,2$  відносний тиск в точці відриву і критичне відношення тиску визначаються формулами

$$\frac{p_{omp}}{p_0} = 1 + 0,57 \frac{kM_0^2}{[(M_0^2 - 1)Re_0]^{1/4}}; \quad \frac{p_1}{p_0} = 1 + 0,94 \frac{kM_0^2}{[(M_0^2 - 1)Re_0]^{1/4}}.$$

До формул входять число  $Re_0$ , при зменшенні якого сили в'язкості перешкоджатимуть відриву, а також число  $M_0$ , збільшення якого веде до зростання кількості руху в примежовому шарі, а це утрудняє відрив.

### 13. ЗАКОН ОБЕРНЕННЯ ДІЇ

На розділах 5 і 6 ми розглядали способи взаємного перетворення внутрішньої енергії і енергії пружного стану (енергії тиску) газу в кінетичну енергію газових потоків і навпаки. Однак процеси прискорення і гальмування, тобто зміни числа  $M$  як дозвукових, так і надзвукових газових потоків, можна здійснювати не тільки зміною прохідного перерізу каналу, а підведенням або відведенням теплоти, маси, механічної енергії, а також в комбінованих соплах.

Наприклад, з рівняння нерозривності для двох перерізів потоку стисливої рідини — газу  $\rho_1 v_{cp1} S_1 = \rho_2 v_{cp2} S_2$  випливає, що потік можна прискорювати не тільки за рахунок зменшення площі поперечного перерізу  $S$  каналу (для дозвукових потоків), а також за рахунок зменшення густини рідини ( $\rho_2 < \rho_1$ ) при  $S_1 = S_2$  при підведенні до газу теплоти. Як побачимо нижче, підведенням теплоти можна розігнати потік в циліндричному каналі тільки до швидкості, яка дорівнює місцевій швидкості звуку в газі, тобто **критичній швидкості**  $v_* = a_*$ . Але, при подальшому підігріванні газу в циліндричному каналі швидкість потоку не збільшується. Ніяким підігрівом не можна перевести потік в надзвуковий ( $v > a$ ) внаслідок виникнення так званого **«теплового опору»**, або **«теплового замикання каналу»**, або **«теплової кризи»**. Пояснення цього явища навіть із суто термодинамічної точки зору: зростання кількості підведеної теплоти  $q$  призводить до значного приросту ентропії  $\left( \Delta s = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} \right)$  і, отже, підвищених втрат енергії через необоротність термодинамічного процесу. До того ж, із зростанням швидкості потоку стисливого газу температура його може зменшуватися, що також підвищує ентропію і,

відповідно, незворотні втрати енергії. До «замикання» каналу призводить також утворена система косих стрибків ущільнення та їх взаємодія з відбитими від стінок хвилями.

### Основне рівняння умови обернення дії

Будемо вважати газ термічно ідеальним, але в'язким. Розглянемо комплексний вплив геометричних, теплових, витратних і механічних впливів на швидкість руху такого газу.

Логарифмічне диференціювання формули масової витрати  $Q_m = \rho v S$  дає

$$\frac{dQ_m}{Q_m} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S}. \quad (13.1)$$

Диференціюючи рівняння Клапейрона  $p = \rho RT$ , маємо  $dp = R(\rho dT + T d\rho)$ , звідки

$$\frac{dp}{\rho} = R \left( dT + T \frac{d\rho}{\rho} \right). \quad (13.2)$$

На підставі рівнянь (13.1) і (13.2) отримаємо

$$\frac{dp}{\rho} = R dT + RT \left( \frac{dQ_m}{Q_m} - \frac{dv}{v} - \frac{dS}{S} \right). \quad (13.3)$$

Скористаємося *узагальненим рівнянням Бернуллі*. Нагадаємо його зміст.

Для елементарної струминки при одновимірній течії нев'язкого і нестисливого газу рівняння Бернуллі має вигляд

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \text{ або } (p_2 - p_1)/\rho + (v_2^2 - v_1^2)/2 = 0.$$

При врахуванні стисливості газу ( $\rho = \text{var}$ ) рівнянню Бернуллі слід придати диференціальну форму, щоби надати можливості інтегрування його у відповідності до частинних умов досліджуваної задачі, тобто з урахуванням властивості руху  $p = p(\rho)$ :

$$\frac{dp}{\rho} + d \left( \frac{v^2}{2} \right) = 0. \quad (13.4)$$

Доповнення рівняння (13.4) елементарними питомою роботою тертя  $\delta l_{mp}$  і питомою технічною роботою  $\delta l_{mex}$  зводить (4.4) до *узагальненого рівняння Бернуллі*:

$$\boxed{\frac{dp}{\rho} + v dv + \delta l_{mp} + \delta l_{mex} = 0}. \quad (13.5)$$

Це рівняння називають також *рівнянням енергії в механічній формі*, або «*рівнянням живих сил*» для одиничної струминки.

Зіставлення рівнянь (13.3) і (13.5) з використанням залежності  $a^2 = kRT$  дає

$$RdT + \frac{a^2}{k} \left( \frac{dQ_m}{Q_m} - \frac{dS}{S} \right) + \frac{dv}{v} \left( v^2 - \frac{a^2}{k} \right) + \delta l_{mp} + \delta l_{mex} = 0. \quad (13.6)$$

Для виключення члена  $RdT$  треба застосувати одну з форм рівняння Першого закону термодинаміки для відкритих систем, враховуючи, що внутрішня теплота тертя дорівнює роботі сил тертя, а також застосовуючи один з виразів ентальпії (5.9)  $h = c_p T = kRT/(k-1)$ :

$$\delta q_{33} = dh + d \left( \frac{v^2}{2} \right) + \delta l_{mex} = \frac{k}{k-1} RdT + v dv + \delta l_{mex}, \quad (13.7)$$

де  $\delta q_{33}$  - елементарна кількість підведеної ззовні теплоти.

Рівняння (13.7) іноді називають **рівнянням тепловмісту**.

З рівняння (13.6) виразимо величину  $RdT$  і підставимо її в рівняння (13.7):

$$\delta q_{33} = \frac{k}{k-1} \left[ -\frac{a^2}{k} \left( \frac{dQ_m}{Q_m} - \frac{dS}{S} \right) - \frac{dv}{v} \left( v^2 - \frac{a^2}{k} \right) - \delta l_{mp} - \delta l_{mex} \right] + v dv + \delta l_{mex}.$$

Після перетворень останнього рівняння отримаємо зв'язок зміни швидкості потоку газу із зовнішніми впливами — геометричним, витратним, механічним, тепловим і дією тертя:

$$\boxed{(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S} - \frac{dQ_m}{Q_m} - \frac{1}{a^2} \delta l_{mex} - \frac{k-1}{a^2} \delta q_{33} - \frac{k}{a^2} \delta l_{mp}}. \quad (13.8)$$

Це рівняння отримав Л. А. Вуліс і воно було названо **умовою обернення дії**. При переході величини швидкості через критичне значення ( $v_* = a_*$ ) знак лівої частини рівняння (13.8) змінюється на протилежний, тобто дія кожного з фізичних факторів на течію газу є оберненою при до- та надзвукових режимах.

Відповідно до рівняння (13.8), розглянемо зв'язок реакції газових потоків з різними варіантами впливів на них.

1. Для прискорення в **дозвуковому** потоці ( $dv > 0$  при  $M < 1$ ) потрібні: звуження каналу ( $dS < 0$ ), підведення додаткової маси газу ( $dQ_m > 0$ ), теплоти ( $dq_{33} > 0$ ), наявність тертя ( $\delta l_{mp} > 0$ ) і здійснення газом технічної роботи, наприклад, в турбіні ( $\delta l_{mex} > 0$ ).

2. Саме такий характер фізичних впливів на **надзвуковий** потік ( $M > 1$ ) призводить до гальмування його ( $dv < 0$ ).

3. Дії протилежних знаків на **дозвуковий** потік ( $M < 1$ ) — розширення каналу ( $dS > 0$ ), відведення маси ( $dQ_m < 0$ ), теплоти ( $dq_{33} < 0$ ), зменшення тертя ( $\delta l_{mp} < 0$ ) і

здійснення роботи над газом, наприклад, в компресорі ( $\delta l_{mex} < 0$ ) — призводять до гальмування потоку.

4. Саме такий характер фізичних впливів на **надзвуковий** потік ( $M > 1$ ) призводить до прискорення його ( $dv > 0$ ).

**Висновок:** під впливом односторонньої фізичної дії швидкість газового потоку можна довести тільки до критичного значення ( $v_* = a_*$ ), але подолати його ніяк не можна.

Тепер ми можемо стверджувати, що підведенням теплоти до дозвукового потоку можна збільшити швидкість його, але не більше, ніж буде досягнуто число Маха-Маїєвського  $M = 1$ . Для подальшого переведення потоку в надзвуковий потрібна **зміна знаку дії**, тобто відведення теплоти. Підведення теплоти до надзвукового потоку викличе його гальмування, але для переводу в дозвуковий режим течії з подальшим його гальмуванням треба, починаючи з  $M = 1$ , здійснювати охолодження газу.

Певна річ, при будь-яких комбінаціях фізичних дій прискорення газового потоку в соплі можливе тільки при достатньому перепаді повних тисків перед і за соплом.

Розглянемо принципово можливі способи здійснення неперервного переходу швидкості течії газу через швидкість звуку, ідеї яких були висловлені Л. А. Вулісом в його докторській дисертації 1946 г.

**Геометричне сопло (сопло Лаваля).** Це вже відомий нам випадок суто *геометричної дії на потік*, коли  $dS \neq 0$  за відсутності інших впливів:  $dQ_m = 0$ ,  $\delta l_{mex} = 0$ ,  $\delta q_{zz} = 0$ ,  $\delta l_{mp} = 0$ . При цьому рівняння (13.7) перетворюється на знайому формулу Гюгоніо (6.33):

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S},$$

яка якісно показує умову отримання надзвукової швидкості нев'язкого газу в каналі змінного перерізу. Звуження каналу ( $dS < 0$ ) забезпечує прискорення дозвукового потоку ( $M < 1$ ), а розширення каналу ( $dS > 0$ ), починаючи від критичного перерізу ( $M = 1$ ), який при правильному розрахунку сопла збігається з найвужчим, забезпечує перехід до надзвукової швидкості ( $M > 1$ ) і подальше прискорення потоку.

**Витратне (масове) сопло.** За умов руху газового потоку без тертя ( $\delta l_{mp} = 0$ ) в трубі постійного перерізу ( $dS = 0$ ), відсутності обміну із зовнішнім середовищем роботою ( $\delta l_{mex} = 0$ ) і теплотою ( $\delta q_{zz} = 0$ ) рівняння (4.8) зводиться до вигляду

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = - \frac{dQ_m}{Q_m}. \quad (13.9)$$

Згідно з отриманим співвідношенням, збільшення швидкості руху газу ( $dv > 0$ ) досягається уведенням додаткової маси газу в дозвуковій ділянці труби ( $M < 1$ ), що відповідає  $dQ_m > 0$ , та відведенням газу ( $dQ_m < 0$ ) в надзвуковій частині ( $M > 1$ ) (рис. 13.1, а). Максимум масової витрати газу має місце в критичному перерізі такого сопла, де  $v_* = a_*$  і  $M = 1$ . Очевидно, даний рух газу без тертя є ізоентропійним.

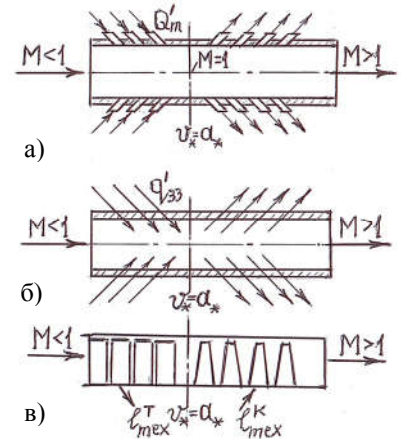


Рис. 13.1.

**Особливість витратного сопла:** якщо в соплі Лавалля на розрахунковому режимі можна отримати на виході потік тільки з одним числом  $M$ , і для кожної величини  $M$  треба мати сопло, що відповідає розрахунковому режиму, то у випадку витратного сопла можна в одній і тій самій циліндричній трубці за допомогою керування зміною витрати отримувати на виході різні надзвукові потоки. Саме тому витратні сопла знайшли застосування в дослідницьких надзвукових аеродинамічних трубах.

**Теплове (термічне) сопло.** З рівняння (13.8) випливає, що принципово циліндрична труба може виконувати функцію надзвукового сопла при підведенні теплоти в дозвуковій частині його ( $\delta q_{33} > 0$ ) та відведенням теплоти ( $\delta q_{33} < 0$ ) в надзвуковій (рис. 13.1, б). Дійсно, при постійній масовій витраті газу ( $dQ_m = 0$ ) і за умов  $dS = 0$ ,  $\delta l_{mex} = 0$ ,  $\delta l_{mp} = 0$ , але при  $\delta q_{33} \neq 0$ , рівняння (13.8) дає

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = - \frac{k-1}{a^2} \delta q_{33}. \quad (13.10)$$

Звідси випливає, що підвід теплоти ззовні ( $\delta q_{33} > 0$ ) до дозвукового потоку ( $M < 1$ ) прискорює газ ( $dv > 0$ ), а її відвід ( $\delta q_{33} < 0$ ) продовжує прискорювати потік в надзвуковому потоці ( $M > 1$ ). Натомість, при підведенні теплоти до надзвукового потоку і відведення її від дозвукового потоку призводять до уповільнення течії в трубці ( $dv < 0$ ).

Таким чином, в критичному перерізі такого сопла, де кількість підведеної теплоти до газу досягає максимуму (оскільки приплив теплоти за довжиною дозвукової ділянки труби зростає) слід змінити знак дії на потік. Оскільки в критичному перерізі теплового сопла  $v_* = a_*$ ,  $M = 1$ , то в ньому підвід теплоти відсутній ( $\delta q_{33} |_{kp} = 0$ ). Це означає, що в

критичному перерізі температура гальмування сягає максимальної величини, що впливає з рівняння тепловмісту (13.7), якщо його записати в скінченнорізницевих величинах:

$$h_{0_1} = h_0 - q_{33},$$

де  $h_{0_1}, h_0$  — величини повної ентальпії газу відповідно в початковому та довільному (поточному) перерізах сопла.

В теорії теплового опору<sup>\*)</sup> показано, що повний тиск при підведенні теплоти вздовж газового потоку падає, а при відведенні теплоти — зростає. Але, не дивлячись на зростання повного тиску в надзвуковій ділянці теплового сопла, статичний тиск газу (як і відповідна густина) із зростанням числа  $M$  монотонно знижуються.

---

<sup>\*)</sup> Вулис Л.А. О переходе через скорость звука в газовом течении. — ДАН СССР. — 1946. — Т. 54, № 8.  
Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. В 2 ч. Ч. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 600 с.

**Механічне сопло.** В циліндричному каналі за рахунок технічної роботи ( $\delta l_{mex} \neq 0$ ), але за відсутністю решти впливів ( $dS = 0, dQ_m = 0, \delta q_{33} = 0, dl_{mp} = 0$ ), принципово можливо здійснити перехід від дозвукової течії газу до надзвукової, на що указує рівняння (4.8):

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = -\frac{1}{a^2} \delta l_{mex}. \quad (13.11)$$

При виконанні газовим потоком при дозвуковому режимі ( $M < 1$ ) технічної роботи в розширювальній машині, наприклад в турбіні ( $\delta l_{mex} = \delta l_T > 0$ ), потік прискорюється ( $dv > 0$ ). В надзвуковому режимі ( $M > 1$ ) швидкість потоку зростає ( $dv > 0$ ), навпаки, при здійсненні механічної роботи над газом, наприклад, на лопатках компресора ( $\delta l_{mex} = \delta l_K < 0$ ) (рис. 13.1, в). В критичному перерізі такого «механічного сопла»  $M = 1, \delta l_{mex} \Big|_{кр} = 0$ .

Якщо спрямувати газовий потік на лопатки компресора, підводячи таким чином до газу механічну роботу  $\delta l_{mex} = \delta l_K < 0$ , то при дозвуковому режимі течії спостерігається зменшення швидкості ( $dv < 0$ ), а при надзвуковому — збільшення її ( $dv > 0$ ).

**Особливість механічного сопла:** з рівняння тепловмісту (13.7), якщо його записати в скінченнорізницевих величинах:  $h_{0_1} = h_0 + l_{mex}$ , де  $l_{mex}$  — технічна робота, здійснена газом між початковим і довільним (поточним) перерізами сопла, видно, що на дозвуковій ділянці сопла, де газ виконує роботу ( $\delta l_{mex} = \delta l_T > 0$ ), ентальпія гальмування (і, відповідно, температура гальмування) зменшуються. В критичному перерізі параметри гальмування проходять через **мінімум**. В надзвуковій частині сопла, де механічна енергія

підводиться до газу компресором ( $\delta l_{mex} = \delta l_k < 0$ ), ентальпія і температура гальмування зростають:  $h_0 > h_0|_{кр}$ ,  $T_0 > T_0|_{кр}$ . Можна показати, що в критичному перерізі тиск гальмування і густина гальмування проходять через мінімуми так саме, як і температура гальмування.

Для двох довільних перерізів ідеального механічного сопла при  $S = const$  маємо

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{v_2}{v_1} \frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}. \text{ Відсутність теплообміну і тертя забезпечують ізоентропійність течії:}$$

$$\rho_1 / \rho_2 = (p_1 / p_2)^{\frac{1}{k}} = (T_1 / T_2)^{\frac{1}{k-1}}. \text{ Оскільки } a_1 / a_2 = (T_1 / T_2)^{\frac{1}{2}}, \text{ то остаточно отримаємо}$$

$$M_2 / M_1 = (T_1 / T_2)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = (p_1 / p_2)^{\frac{k+1}{2k}} = (\rho_1 / \rho_2)^{\frac{k+1}{2}}. \text{ Таким чином, в механічному соплі монотонне зростання числа М супроводжується падінням температури, тиску і густини.}$$

Надзвукові швидкості можна отримувати різними комбінаціями елементів геометричного, витратного, теплового і механічного сопел, а також сумісним застосуванням зазначених вище факторів — підведення теплоти, речовини, механічної роботи тощо. Можливі також впливи електромагнітних полів для досягнення тих самих цілей. Розглянуті методи можна використовувати і в протилежному напрямку плавного переходу від надзвукових режимів течії до дозвукових (наприклад, в аеродинамічних трубах великих швидкостей течія в надзвукових дифузорах, див. нижче розділ 15).

## 14. РУХ ГАЗУ В КАНАЛАХ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

### 14.1. Сопло Лаваля

#### 14.1.1. Загальний аналіз форми геометричного сопла та течії газу в ньому

В розділі ми дізналися про явище «газодинамічного замикання», тобто про неможливість отримання надзвукових швидкостей при витіканні нев'язкого газу через отвори та сопла, що звужуються, назовні попри будь-який перепад тисків в ємності ( $p_o$ ) та в зовнішньому середовищі ( $p' \equiv p_n$ ), яке оточує ємність (див. формулу Сен-Венана і Вантцеля для  $Q_m$  та фізичне пояснення відповідної кривої на графіку рис. 3 щодо залежності  $Q_m / Q_{m*} = f(p_n / p_o)$ ). Познайомимось з одним із найпоширеніших способів отримання надзвукових швидкостей газу застосуванням так званого геометричного сопла, або сопла Лаваля.\*

\*) Карл Густав Патрик де Лаваль (1845–1913) – шведський інженер, винахідник парової турбіни, в якій для підвищення ефекту використання енергії струменя, пар, що потрапляє на лопатки турбіни, подається через запропонований Лавалем канал, який спочатку звужується, а потім розширюється.

Нагадаємо аналіз загального якісного принципу побудови сопла Лавалю, повторив виведення формули Гюгоніо (6.33) з деякими неprincipовими відмінностями. Масова витрата одновимірного потоку газу за умови збереження її вздовж осі  $x$

$$Q_m = \rho v S = \text{const}.$$

Здійснимо операцію логарифмічного диференціювання складних функцій:

$$\ln Q_m = \ln \rho + \ln v + \ln S, \quad \frac{1}{Q_m} \frac{dQ_m}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}, \quad \frac{dS}{S} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v}.$$

Підставимо в останню формулу відносну зміну густини, для чого скористаємося відомою формулою з п.п. 6.3, що відображає різну стисливість газу при до- та надкритичному режимах нев'язкої течії:

$$M^2 = -\frac{d\rho/\rho}{dv/v}.$$

Після перетворень отримаємо **формулу Гюгоніо**:

$$\boxed{\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1)}, \quad (14.1)$$

звідки й випливає, що для прискорення потоку ( $dv > 0$ ) при дозвукових швидкостях течії газу ( $M < 1$ ) сопло має звужуватися ( $dS < 0$ ), а при надзвукових течіях – розширюватися ( $dS > 0$ ) (рис. 14.1). Звідси також випливає, що дозвуковий потік можна загальмувати каналом, що розширюється (дифузором), а надзвуковий – каналом, що звужується (конфузором). Це випливає з аналізу знаків величин  $dv$ ,  $dS$  і  $(M^2 - 1)$ .

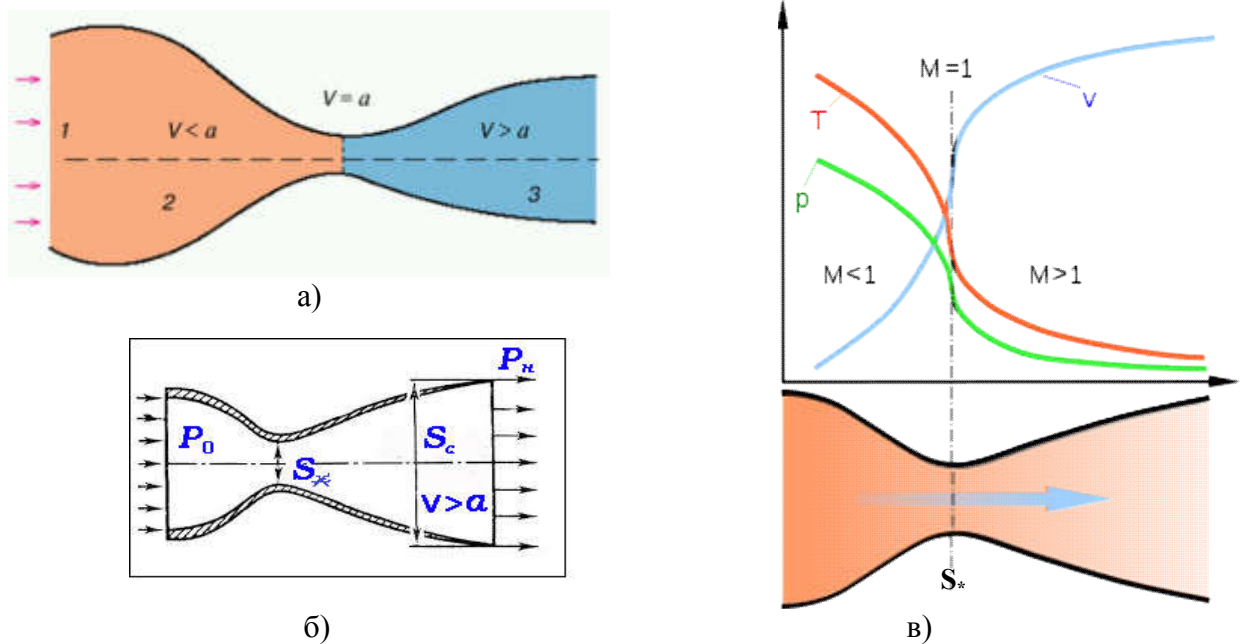


Рис. 14.1.

На описаному принципі побудовано і працює сопло Лавалю, який дослідним шляхом виявив зазначену вище своєрідну закономірність в розширенні газового потоку.

Розраховують сопло Лавалю так, щоб у найвужчому перерізі швидкість течії дорівнювала місцевій швидкості звуку:  $v = a$ ,  $M = 1$  (як ми вже знаємо, таку швидкість називають **критичною** і позначають  $v_* = a_*$ ) (рис. 14.1, а, б). Решта параметрів у цьому перерізі, названому **критичним**  $S_*$  (рис. 14.1, в), є також критичними і, відповідно, мають індекси «\*». Критичну швидкість ми вже раніше знаходили, виходячи з рівняння Бернуллі–Сен-Венана, отриманого з інтеграла Бернуллі для ізоентропійної течії газу:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_o}{\rho_o} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_o^2}{k-1}},$$

що при підстановці в ліву частину  $v_* = a_*$  дає  $a_* = a_o \sqrt{\frac{2}{k+1}}$ . В формулах нульовий індекс, як зазвичай, відповідає параметрам гальмування (нерухомого газу).

Отже, в критичному перерізі має бути критичним і співвідношення тисків  $\beta_* = p_*/p_o$ . Як ми вже знаємо з дослідження формули Сен-Венана і Вантцеля для  $Q_m$  на

екстремум,  $\beta_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ . З блоку ізоентропійних формул знаходимо зв'язок поточного

тиску з тиском загальмованого потоку  $\frac{p}{p_o} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ , що при  $v_* = a_*$  дає

$\beta_* = p_*/p_o = \left(1 - \frac{a_*^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ , де  $v_{\max}$  – гіпотетична максимальна швидкість за умови

уявного перетворення всієї теплової енергії газу в кінетичну енергію поступального руху.

Прирівнюючи праві частини обох виразів для  $\beta_*$ , маємо:

$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{a_*^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ , звідки для критичного перерізу сопла Лавалю отримаємо

$$v_* = a_* = v_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Таким чином, в критичному перерізі сопла отримана швидкість відокремлює дозвуковий режим течії від надзвукового. Газ, що протікає через критичний переріз, потрапляє в розширювальну частину і його тиск, а отже температура, падають (див. рис. 14.1, в), тобто частина внутрішньої енергії переходить в енергію поступального руху газу.

Якщо швидкість газу при підході до мінімального перерізу не досягає свого критичного значення, то потік і в розширювальній частині сопла залишається дозвуковим, а його швидкість у подальшому буде не зростати, а зменшуватись. Такий режим називають іноді «газодинамічним замиканням сопла». Ми вже стикалися з аналогічним явищем, коли вивчали витікання газу з великої ємності через сопло, що звужується. У випадку сопла Лавалю режим замикання сопла виникає за умов великого протитиску зовнішнього середовища за соплом або, що теж саме, при малому тиску  $p_o$  в камері.

#### 14.1.2. Формула сопла Лавалю

При одновимірному русі ідеального газу в реальному каналі змінного перерізу, зокрема в соплі Лавалю, стінки каналу можна розглядати як бічну поверхню трубки течії. Ставиться завдання визначити залежність числа Маха-Маєєвського  $M$  від розміру поперечного перерізу такої «трубки течії». Маючи залежність числа  $M$  вздовж сопла Лавалю, можна знайти зміну інших параметрів за допомогою вже відомих газодинамічних функцій (в блоці «ізоентропійних формул»):

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

де  $T_o, \rho_o, p_o$  — параметри гальмування.

З рівняння збереження масової витрати випливає

$$\boxed{\frac{S}{S_{\min}} = \frac{\rho_* v_*}{\rho v}}, \quad (14.2)$$

оскільки швидкість звуку (критична швидкість  $v_* = a_*$ ) досягається саме в мінімальному (критичному  $S_{\min} = S_*$ ) перерізі «трубки течії». Враховуючи відомі нам зв'язки між критичними параметрами  $T_*, \rho_*, p_*$  і параметрами гальмування (див. «ізоентропійні формули»), а також зв'язки між останніми і поточними (місцевими) параметрами і числом  $M$ , маємо такі співвідношення:

а) з одного боку  $T_o = T_* \frac{k+1}{2}$ , з іншого  $T_o = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)$ ; прирівняємо праві частини:  $T_* \frac{k+1}{2} = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)$ , звідки

$$\boxed{\frac{T_*}{T} = \frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}. \quad (14.3)$$

б) з одного боку  $\rho_o = \rho_* \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ , з іншого  $\rho_o = \rho \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$ ; прирівняємо:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (14.4)$$

Запишемо співвідношення швидкостей — критичної  $u_*$  до місцевої  $u$ :

$$\frac{u_*}{u} = \frac{u_*}{a} \frac{1}{M} = \frac{\sqrt{kRT_*}}{\sqrt{kRT}} \frac{1}{M} = \left( \frac{T_*}{T} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{M}, \text{ що з урахуванням (14.3) дає}$$

$$\frac{u_*}{u} = \left[ \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{M}. \quad (14.5)$$

Підставимо (14.4) і (14.5) до співвідношення площ перерізу сопла (14.2); після перетворень маємо

$$\frac{S}{S_{\min}} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{-(k+1)/[2(k-1)]}. \quad (14.6)$$

Ми отримали так звану **формулу сопла Лаваля**. З неї випливає, що число  $M$  в кожному перерізі сопла визначається тільки його даним перерізом.

На рис. 14.2 наведено графік функції (14.6). Вітки кривої при малих та великих  $M$  поводять себе таким чином:

$$\frac{S}{S_{\min}} \sim \frac{1}{M} \text{ при } M \ll 1;$$

$$\frac{S}{S_{\min}} \sim M^{2/(k-1)} \text{ при } M \gg 1.$$

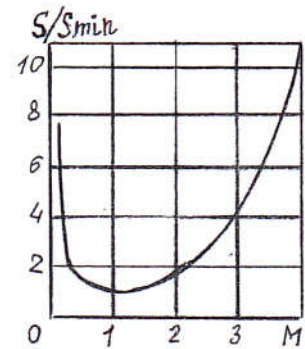
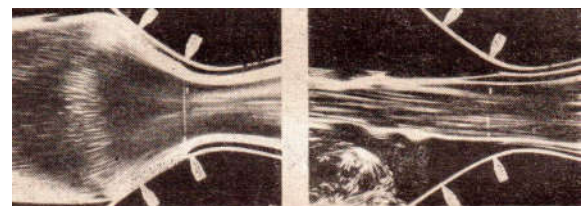


Рис. 14.2.

Наприклад, для потоку повітря  $k=1,4$ ; при  $M \gg 1$  маємо:  $S/S_{\min} \sim M^5$ .

Наведений вище розрахунок сопла Лаваля є **наближенням**, оскільки не враховував в'язкості газу. Очевидно, не дивлячись на рекомендації формули (14.6), в надзвуковій (розширювальній) частині сопла не слід робити різких змін перерізу, оскільки потік газу може і не слідувати за стінкою, а відірватися від неї з утворенням певної застійної (вихрової) зони між стінкою і основним потоком (рис. 14.3), що переводить сопло Лаваля в нерозрахунковий режим роботи з підвищеними втратами енергії реального потоку.

Рис. 14.3: а) безвідривна течія;  
б) відрив потоку.



а)

б)

## 14.2. Течія газу через сопло Лаваля при розрахунковому та нерозрахунковому режимах

### 14.2.1. Режими витікання газу через сопло Лаваля

Із попередньої лекції випливає, що параметри течії газу і площу поперечного перерізу сопла вздовж його осі можна уявити у вигляді однозначної функції числа Маха-Маієвського  $M$ . Очевидно, параметри, розраховані в залежності від співвідношення  $S/S_{min}$ , будуть мати дві вітки — дозвукову і надзвукову. Режим руху газу в соплі Лаваля також суттєво залежить від протитиску зовнішнього середовища за соплом  $p_n$ . Розглянемо якісно рух газу через сопло Лаваля при зменшенні протитиску. Будемо вважати, що параметри гальмування (зокрема  $p_o$ ) і форма сопла фіксовані.

На рис. 14.4 зображено графік можливої зміни вздовж сопла в залежності від протитиску. Спочатку розглянемо так званий *розрахунковий* режим витікання, коли тиск на вихідному зрізі сопла  $p$  дорівнює протитиску:  $p = p_n$ .

Якщо  $p_n$  буде більше або менше того, на яке сопло розраховане, то сопло буде працювати, як кажуть, на *нерозрахунковому* режимі.

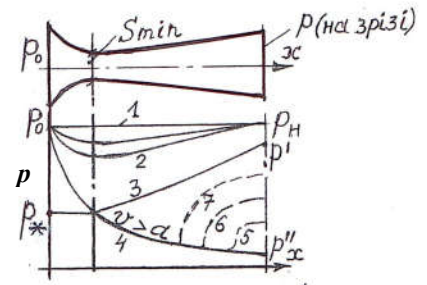


Рис. 14.4.

Зробимо аналіз роботи сопла поетапно.

- 1) При  $p_n = p_o$ , очевидно, рух всередині сопла відсутній, масова витрата газу  $Q_m = 0$ , тиск буде однаковим вздовж сопла (пряма 1).
- 2) По мірі зменшення зовнішнього протитиску  $p_n$  починається рух газу і встановлюється дозвукова течія в соплі: в частині сопла, що звужується, потік прискорюється, а в розширювальній частині гальмується згідно з рівнянням нерозривності. Розподіл тиску відображено на рис. 14.4 деякою кривою 2. Очевидно, мінімальний тиск завжди буде в найменшому перерізі  $S_{min}$  сопла.
- 3) При подальшому зменшенні протитиску  $p_n$  швидкість газу в мініальному перерізі може досягнути місцевої швидкості звуку — таким чином, цей мінімальний переріз стає *критичним перерізом*, тому й тиск в ньому дорівнює *критичному*  $p_*$ .
- 4) А тепер **виникає альтернатива**: або за критичним перерізом газ буде рухатися дозвуковим чином, а тиск вниз за потоком в розширювальній частині буде зростати від  $p_*$  до  $p'$  в струмені на зрізі сопла (крива 3), або газ буде рухатися далі надзвуковим чином, а тиск буде продовжувати падати до  $p''$  в струмені на зрізі сопла (крива 4).

Очевидно, ця альтернатива «вирішується» величиною протитиску  $p_n$ .

5) Для порівняння тиску  $p''$  на зрізі сопла з  $p_n$ , величину  $p''$  можна розрахувати наступним чином. Нам вже відома формула сопла Лавалю (14.6), що пов'язує величину площі  $S$  поперечного перерізу сопла Лавалю з числом  $M$ :  $S/S_{min}=f(M)$ :

$$\frac{S}{S_{min}} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{(k+1)/[2(k-1)]}.$$

Задавшись величиною  $S_{min}$ , можна розрахувати число  $M$  у вихідному перерізі сопла (яким теж треба задатися). Далі скористуємося однією з «ізоентропійних» формул — формулою зв'язку тиску з тиском гальмування  $p_o$ :

$$\frac{p_o}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

що дасть можливість відшукати розрахункове значення тиску  $p''$  в струмені на зрізі сопла

$$p \equiv p'' = p_o \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{1-k}}.$$

Отже, маємо: а) якщо тиск зовнішнього середовища (протитиск)  $p_n$  буде дорівнювати тиску  $p''$  в струмені на зрізі сопла, розрахованому за наведеною формулою, то газ буде рухатись за критичним перерізом  $S_{min}$  **надзвуковим** чином,  $v > a$ ;

б) якщо протитиск  $p_n$  в зовнішньому середовищі буде менше розрахованого  $p''$ , то подальше прискорення потоку і падіння тиску буде відбуватися поза соплом в надзвуковому струмені — так званий режим «**недорозширення**», а сопло називають «**недорозширеним**» — має місце додатковий розгін з пониженням тиску в надзвуковому струмені; при подальшому зниженні протитиску  $p_n$  течія в соплі Лавалю не змінюється, тобто ніяк не реагує на зміну протитиску, що пов'язано з наявністю надзвукової області потоку;

в) якщо ж протитиск  $p_n$  в зовнішньому середовищі буде більше розрахованого за останньою формулою тиску  $p$ , причому  $p'' \leq p \leq p'$ , то рух газу за критичним перерізом всередині сопла вже не може бути всюди надзвуковим — це так званий режим «**перерозширення**», а сопло в такому режимі називають «**перерозширеним**». За вихідним перерізом відбувається гальмування потоку і у цьому випадку всередині сопла утворюється **пряма ударна хвиля**, яка переводить у вихідному перерізі тиск в струмені до ударної хвилі з тиском  $p_n > p''$ . По мірі збільшення тиску на зрізі сопла від  $p''$  до  $p'$  ударна хвиля все глибше й глибше проникає усередину сопла (криві 5, 6, 7 на рис. 14.4).

I, нарешті, при  $p_n = p'$  ударна хвиля досягає критичного перерізу і переводить весь потік всередині сопла в дозвуковий.

В діапазоні тисків в струмені у вихідному перерізі сопла  $p'' < p < p'$  розрахункове витікання з сопла Лавалю неможливе!

Точного розрахунку сопла Лавалю з урахуванням в'язкості на сьогодні не існує, тому найчастіше конструктор виконує розрахунок методом спроб і похибок.

#### 14.2.2. Особливості сопла Лавалю, важливі для практики

Біля критичного перерізу потік дуже «чутливий» до зміни поперечного перерізу каналу. Наприклад, для зміни числа  $M$  на 10% (від  $M=0,9$  до  $M=1,0$ ) достатньо змінити площу перерізу на 1%, а для переходу від  $M=0,95$  до  $M=1,0$  достатньо змінити площу перерізу усього лише на 0,25%. Тому не можна підтримувати критичний режим на достатньо протяжній ділянці прямої труби: пристінний шар, що виникає за рахунок гальмування газу біля стінок (а на початковій ділянці за плавним входом це примежовий шар) начебто звужує переріз потоку, **що одразу відіб'ється на числі  $M$ !**

Для отримання на зрізі сопла Лавалю певного значення числа  $M$  необхідно, як ми знаємо, відповідним чином підібрати площу перерізу  $i$ , до того ж, треба мати достатній запас тиску  $p_o$  в камері перед соплом. Іншими словами, для досягнення потрібного числа  $M$  на зрізі сопла тиск в камері має в певну кількість разів перевищувати тиск оточуючого середовища (найчастіше це атмосфера).

Нехай тиск  $p_o$  в камері збільшився, тоді на зрізі сопла тиск теж збільшиться і газ буде витікати з надлишковим тиском. Десь за зрізом сопла тиск зрівняється з атмосферним, надлишок тиску витрачається в струмені на зростання швидкості. Оскільки для надзвукового потоку зростання швидкості потребує збільшення площі перерізу струменя (пригадаємо формулу Гюгонію), то струмінь начебто утворює в просторі «надзвукове сопло, що розширюється».

Якщо ж тиск  $p_o$  в камері за якоюсь причиною зменшиться, то на зрізі сопла Лавалю відбудеться зменшення тиску в струмені, причому у деяких випадках тиск може стати нижчим за атмосферний тиск. Швидкість витікання газу при цьому не зміниться, бо вона є функцією тільки співвідношення вихідного та критичного перерізів сопла.

Зміна тиску в атмосфері не позначається на витіканні газу із сопла при  $v > a$ , оскільки хвиля тиску, яка поширюється зі швидкістю звуку, зноситься надзвуковим газовим потоком. При виході газового струменя із сопла тиск у ньому має в кінці кінців зрівнятися з атмосферним, тобто підвищитись за рахунок гальмування надзвукового

поток. Цей процес, як було зазначено вище, супроводжується виникненням ударних хвиль.

Таким чином, тиск на зрізі даного надзвукового сопла практично не пов'язаний з тиском атмосфери, а залежить тільки від тиску в камері і від форми сопла. Тільки у випадку *розрахункового режиму* роботи сопла Лаваля тиск струменя на зрізі сопла дорівнює атмосферному:  $p=p_n$ . На *нерозрахункових режимах*, коли тиск на зрізі сопла більше або менше атмосферного, має відбуватися зміна тиску в струмені поза соплом.

Процес перетворення тиску в швидкість в надзвуковому і дозвуковому потоках має місце (у першому наближенні) без істотних втрат, тобто відбувається при постійній ентропії, таким чином він є близьким до ідеальної адіабати. Тому наведені нами раніше так звані «ізоентропійні формули» для розрахунку ідеального надзвукового сопла дають задовільні для практики результати і для реальних сопел.

### 14.3. Вплив в'язкості на характер течії в каналі змінного перерізу

Все ж наявність в'язкості призводить до додаткового перепаду тиску в каналі. Як відомо, в круглій циліндричній трубі втрати тиску визначаються формулою Дарсі–

Вейсбаха  $\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$ . Для каналу змінного перерізу запишемо цю формулу в

диференціальному вигляді:  $(dp)_{в'язк} = \lambda \frac{dx}{d} \frac{\rho v^2}{2}$ , де  $(dp)_{в'язк}$  — додатковий перепад тиску

через в'язкість. Тут наближено застосовано так званий «гідравлічний підхід» в газодинаміці, тому й коефіцієнт гідравлічного тертя  $\lambda$  приймається сталою величиною.

Останню формулу можна записати як  $\frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} \right)_{в'язк} = \frac{\lambda v^2}{d}$ . Тоді диференціальне рівняння

руху з урахуванням втрат тиску, зумовлених в'язким тертям, можна записати у вигляді, який враховує вплив тертя саме зазначеним вище додатковим перепадом тиску при одновимірному стаціонарному русі газу:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \lambda \frac{v^2}{2d}, \quad \text{звідки} \quad \boxed{\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{v dx} - \lambda \frac{v}{2d}}. \quad (14.7)$$

Врахуємо  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ , а також рівняння нерозривності одновимірного руху

$Q_m = \rho v S = idem$ , що після логарифмічного диференціювання дає  $\frac{1}{Q_m} \frac{dQ_m}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0$ , звідки  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$ .

Тоді рівняння (14.7) після перетворень зведеться до вигляду

$$\left( M^2 - 1 \right) \frac{dv}{dx} = \frac{v}{S} \frac{dS}{dx} - \lambda \frac{v}{4r} M^2, \quad (14.8)$$

де  $r$  — радіус каналу в даному перерізі.

Для будь-якого круглого поперечного перерізу  $S = \pi r^2$ , звідки  $\frac{dS}{dx} = \pi 2r \frac{dr}{dx}$  при врахуванні змінності радіусів  $r = r(x)$  в різних перерізах каналу вздовж осі течії  $x$ . Тоді (14.8) набуває вигляду

$$\left( M^2 - 1 \right) \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{r} \left( \frac{dr}{dx} - \lambda_1 \right), \quad \text{де } \lambda_1 = \frac{\lambda}{8} M^2. \quad (14.9)$$

Формула (14.9) дозволяє встановити низку особливостей течії газу в каналах змінного перерізу (табл. 3). З цієї формули випливає, що швидкість потоку стане дорівнювати швидкості звуку ( $M=1$ ) у тому перерізі каналу, де  $\frac{dr}{dx} = \lambda_1 > 0$ , що може відбутися в розширювальній частині каналу — дифузорі; натомість, за відсутності тертя, як відомо, швидкість потоку досягає швидкості звуку в мінімальному перерізі каналу.

З таблиці 3 випливає:

Таблиця 3.

при  $M < 1$  швидкість зростає не тільки в конфузорі, але й в **слабкому дифузорі** (малий кут розкриття), тобто при  $\frac{dr}{dx} < \lambda_1$ ; при  $M > 1$  швидкість зростає тільки

у деякому певному дифузорі, тобто при  $\frac{dr}{dx} > \lambda_1$ ;

у слабкому дифузорі, коли  $0 < \frac{dr}{dx} < \lambda_1$ , швидкість

при  $M > 1$  буде зменшуватись.

Число $M$	Похідна швидкості	$\frac{dr}{dx} - \lambda_1$
$M < 1$	$\frac{dv}{dx} > 0$	$\frac{dr}{dx} - \lambda_1 < 0$
	$\frac{dv}{dx} < 0$	$\frac{dr}{dx} - \lambda_1 > 0$
$M > 1$	$\frac{dv}{dx} > 0$	$\frac{dr}{dx} - \lambda_1 > 0$
	$\frac{dv}{dx} < 0$	$\frac{dr}{dx} - \lambda_1 < 0$

Аналогічні висновки, якісно відмінні від висновків при русі ідеального (нев'язкого) газу, можна зробити і для процесу зменшення швидкості.

З рівняння (14.9) легко отримати закон одновимірного адіабатного руху газу в циліндричній трубці при дії сил в'язкого тертя. Тоді при  $r = const$  з рівняння (14.9) маємо

$$\left( M^2 - 1 \right) \frac{dv}{dx} = -\lambda_1 \frac{2v}{r},$$

звідки випливає, що в дозвуковому потоці ( $M < 1$ ) на ділянці труби постійного перерізу потік прискорюється, а в надзвуковому потоці ( $M > 1$ ), навпаки, уповільнюється.

## 15. ТЕЧІЯ ГАЗУ В ДО- ТА НАДЗВУКОВИХ ДИФУЗОРАХ І РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ

### 15.1. Дифузори і конфузори: загальні відомості

Типовими представниками каналів змінного перерізу є дифузори і конфузори. **Дифузор** — частина каналу, в якій відбуваються зменшення швидкості потоку і збільшення тиску. Площа поперечного перерізу геометричних дифузорів дозвукових швидкостей зростає вздовж потоку (рис. 15.1). При значеннях центрального кута розкриття дозвукового дифузора  $\alpha > 7^\circ$ , а також із зростанням довжини при збереженні кута розкриття дифузора почнеться відрив потоку від його стінок з вихроутворенням, при цьому втрати енергії в дифузорі сильно зростають.

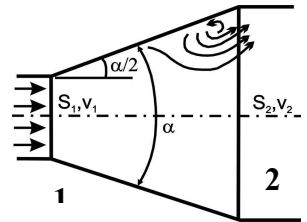


Рис. 15.1.

Причиною відриву потоку є виникнення додатного градієнта тиску вздовж течії, що викликає гальмування частинок газу в пристінній області, створює передумови для інтенсивного нарощування примежового шару і відриву потоку від стінки. Швидкості безпосередньо поблизу стінки стають настільки малими, що частинки газу додатного градієнта тиску починають рухатися у зворотному напрямку.

За значеннями числа Маха–Маієвського  $M$  на вході геометричні дифузори поділяють на такі: дозвукові, навіколздукові та надзвукові. Найбільш поширені дозвукові геометричні дифузори, які підрозділяються на плоскі, конічні, кільцеві і радіально-осьові.

Конструкція надзвукових дифузорів, нагадуючи сопло Лаваля, складається з двох частин — початкового звужувального каналу та наступної розширювальної ділянки (див. нижче).

**Конфузор** — частина каналу, в якій відбувається прискорення потоку рідини чи газу, динамічний тиск в напрямку руху потоку збільшується, а статичний — зменшується. Конструктивно конфузор являє собою плавний перехід від більшого перерізу до меншого (рис. 15.2).

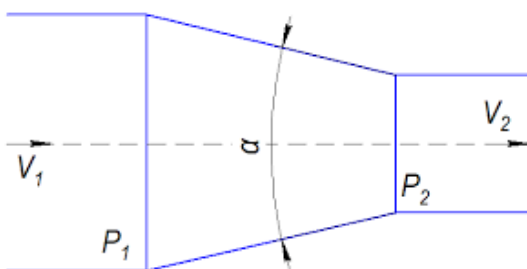


Рис. 15.2.

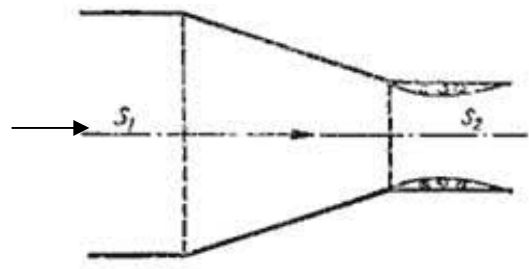


Рис. 15.3.

В конфузорі з невеликим кутом звуження каналу підвищеного вихроутворення не виникає, оскільки траєкторії частинок рідини викривляються достатньо плавно, тому втрати тиску обумовлені, головню, зростанням швидкості. Тому гідравлічний опір конфузора є завжди меншим порівняно з дифузором такого ж розміру. Зниження тиску при плавному звуженні потоку запобігає відриву потоку від стінок (в зовнішній задачі гідромеханіки конфузорна течія запобігає відриву примежового шару). Саме тому конфузорні патрубки використовують для приєднання воздухопроводів до всмоктувальної сторони вентиляторів з метою зниження втрат тиску, який розвивають вентилятори.

Однак, при збільшенні кутів звуження (рис. 15.3) конфузор наближається до раптового звуження (рис. 154). Підтискування під дію сил інерції вихідного струменя призводить до утворення вихрової зони і збільшення втрат енергії потоку.

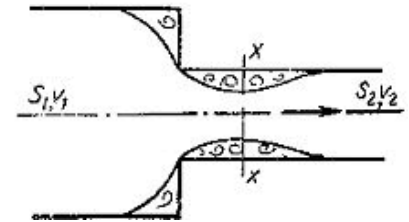


Рис. 15.4.

Все ж через найбільшу небезпеку відриву потоків і утворення зон зворотних течій саме в дифузорах задачі течії рідин і газів в них привертають найбільшу увагу фахівців при проектуванні гідроаеродинамічних систем. В дифузорних потоках профілі швидкості безперервно деформуються, а рух в примежовому шарі біля стінок, які розширюються, є менш стійким порівняно з циліндричними і, тим паче, із конфузорними каналами.

Говорячи про примежовий шар стосовно внутрішній задачі газодинаміки, мається на увазі початкова ділянка (яку строго є сенс уводити до розгляду, коли на вході в дифузор швидкості дозвукового потоку постійні). В цих випадках за довжину початкової ділянки приймається відстань від входу в дифузор до повного виродження ядра в потоці. В дифузорах навіть при невеликих центральних кутах розширення (але, як правило, більших  $6-7^{\circ}$ ) на деякій відстані від входу може трапитись відрив дозвукового потоку від стінок вже на початковій ділянці. При центральних кутах розширення дифузоров  $7^{\circ} < \alpha < 40^{\circ}$  відрив може спостерігатися не по всьому периметру поверхні, а тільки у деякій області, причому іноді вона перестрибує на протилежну стінку дифузора, а іноді переміщується по стінці. При  $\alpha > 40^{\circ}$  потік звичайно повністю відривається від всієї поверхні дифузора. При малих кутах розширення відрив потоку якщо й виникає, то на досить великій відстані від входу. Якщо на вибраній довжині дифузора відрив відсутній, то такий дифузор вважають безвідривним.

Необхідність вивчення потоків в дифузорах викликана широким застосуванням ділянок, що розширюються, в аеродинамічних і гідродинамічних трубах, газопроводах, нафтопроводах, в трубопроводах водопровідних і вентиляційних систем, в технологічному устаткуванні різного призначення, в турбомашинах, реактивних двигунах

тощо). В парових і газових турбінах, наприклад, значну долю всіх втрат енергії складають саме втрати у вихлопних патрубках. В аеродинамічних трубах втрати в дифузорах складають до 30% загальних втрат. Дуже важливе значення має дослідження потоків в дифузорних ділянках, типових для задач зовнішнього обтікання крил, решіток профілів компресорів і турбін.

У дифузорах, що проектуються, має відбуватися перетворення кінетичної енергії потоку газу в ентальпію по можливості з мінімальним зростанням ентропії (мінімальними втратами енергії). Отже, **основне призначення дифузорів** — поступове зменшення швидкості потоку і, відтак, «відновлення» тиску при мінімальних втратах.

В *ідеальному дифузори* гальмування газу відбувається ізоентропійно. Ефективність *реальних дифузорів* визначають **коефіцієнтом збереження повного тиску**

$$\sigma = p_{02} / p_{01}, \quad (15.1)$$

де  $p_{01}$  і  $p_{02}$  — тиски повного гальмування відповідно в потоці, що набігає, і на виході з дифузора.

Зменшення повного тиску гальмування на виході з дифузора обумовлене інтенсивною дисипацією кінетичної енергії потоку, викликаною інтенсивним нарощуванням примежового шару і відривом потоку від стінки під дією додатного градієнта тиску. Чим більші втрати, тим нижче значення  $\sigma$ . Втрати можна оцінювати і за різницею повних тисків:

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02} = (1 - \sigma) p_{01}. \quad (15.2)$$

Втрати повного тиску в дифузорах прийнято розділяти на втрати на тертя в примежовому шарі і місцеві втрати, обумовлені деформацією профілю швидкості при розширенні каналу, утворенням вихорів при відриві потоку від стінок та інтенсивним перемішуванням середовища. Порівняно з місцевими, втрати на тертя зазвичай є дуже малими.

## 15.2. Дозвукові геометричні дифузори

1) Почнімо з граничного випадку дифузора – раптового розширення каналу (рис. 15.5).

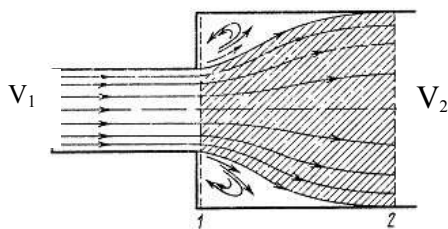


Рис. 15.5.

При раптовому розширенні каналу потік різко сповільнюється, начебто зазнаючи своєрідний «удар» (strike). Виведемо **формулу Борда- Карно** розрахунку незворотних втрат повного тиску (втрат «на удар») для випадку течії нестисливого

газу ( $\rho = const$ ), умовно приймаючи, що між перерізом  $S_1$  і перерізом  $S_2$  (безпосередньо за зоною відриву) тиск і швидкість потоку змінюються достатньо плавно, хоча й переріз у

місці розширення змінюється стрибком. Припускаємо також, що швидкості в живих перерізах  $S_1$  і  $S_2$  розподілені рівномірно і дорівнюють відповідним середнім швидкостям  $v_1$  і  $v_2$ , але тиск на виході з вузької частини каналу одразу розподіляється рівномірно вздовж перерізу  $S_2$ . **Формула Борда–Карно** виводиться на підставі інтеграла Бернуллі, умови збереження витрати і рівняння імпульсів:

$$\left. \begin{aligned} p_{01} &= p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}; & p_{02} &= p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}; \\ Q_m &= \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2; & (p_1 - p_2) S_2 &= Q_m (v_2 - v_1) - \text{для відсіку 1-2.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Остаточно:}$$

$$\Delta p_{0, str} = p_{01} - p_{02} = \rho \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}. \quad (15.3)$$

2) Застосуємо формулу Борда–Карно, модифікуючи її щодо дифузора на рис.15.1 введенням **коефіцієнта повноти удару  $\psi$** :

$$p_{01} - p_{02} = \psi \Delta p_{0, str} = \psi \rho \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}. \quad (15.4)$$

Експериментальна залежність коефіцієнта повноти удару від кута розкриття дифузора наведена на рис. 15.6.

Сумарна (від перерізу 1 до перерізу 2 на рис. 15.1) залежність коефіцієнта збереження повного тиску  $\sigma = p_{02}/p_{01}$  від числа Маха–Маієвського на вході в дифузор показана на рис. 15.7.

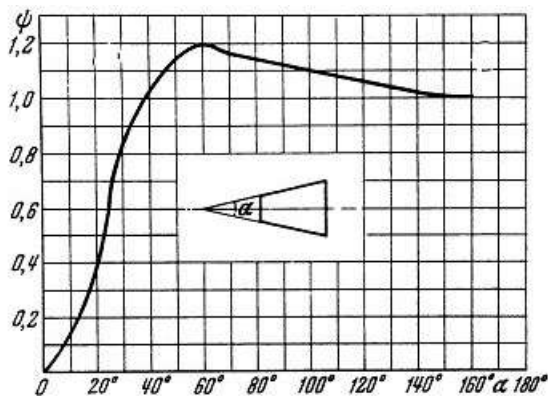


Рис.15.6. Залежність коефіцієнта повноти удару від кута розкриття дифузора.

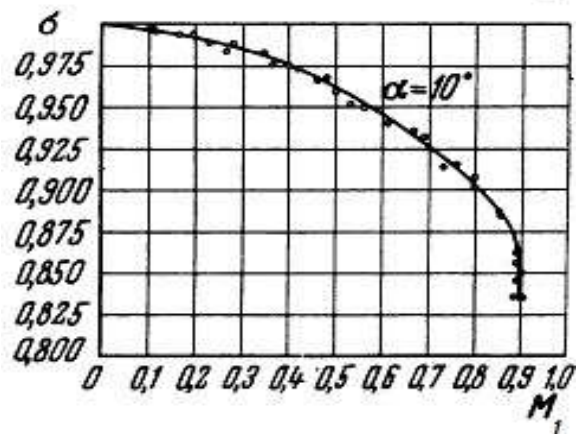


Рис.15.7. Залежність коефіцієнта збереження повного тиску від числа Маха–Маієвського.

Поява відриву потоку в дифузори значно знижує його ефективність, оскільки перешкоджає відновленню тиску та збільшує втрати енергії. Тому при проектуванні дифузорів важливо заздалегідь визначити точку відриву. Наближено її можна знайти по значенню формпараметра примежового шару

$f = \frac{dv}{dx} \frac{\delta^{*2}}{v}$ , де  $v$  – швидкість в ядрі дифузорного потоку;  $x$  – координата вздовж осі дифузора;  $\nu$  – кінематична в'язкість;

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{v_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{v_{\infty}} \right) dy - \text{товщина втрати імпульсу}; v_{\infty} - \text{швидкість потоку перед входом до}$$

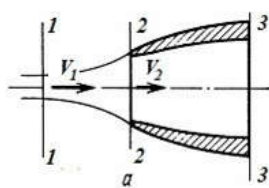
дифузора;  $u$  – змінна за поперечним перерізом примежового шару швидкість;  $\delta$  – товщина примежового шару. Згідно з експериментом, при ламінарному русі рідини в дифузорі в точці відриву  $s$  значення формпараметра  $f_s = -0,09$ . При турбулентному русі значення  $f_s$  залежить від ступеня дифузорності: в «сильних» дифузорах (коли  $\left| \frac{dv}{dx} \right| > 1,5$ )  $f_s = -1,0$ ; в «слабких» дифузорах  $f_s$  досягає значення  $-4,0$ ; в середніх дифузорах  $f_s = -2,0$ .

Якщо з розрахунку, чи з експерименту, відомі швидкість в ядрі потоку або зміна тиску за довжиною дифузора, а також розподіл швидкості  $u$  поперек примежового шару, то за допомогою теорії примежового шару можна розрахувати товщину втрати імпульсу  $\delta^{**}(x)$  та знайти  $f(x)$ . Знаючи  $f(x)$ , легко визначити координату  $x$ , в якій  $f = f_s$ , тобто знайти точку відриву  $s$  примежового шару на стінці дифузора.

Розрахунок втрат в дифузорах за допомогою теорії примежового шару можна знайти: Дейч М.Е., Зарянкин Л.Е. «Газодинамика диффузоров и выхлопных патрубков турбомашин», М.: Энергия, 1970. – 381 с.

### 3) Розглянемо роботу дозвукового дифузора повітряно-реактивного двигуна літака.

Робота дифузора визначається співвідношенням дозвукової швидкості польоту літака до швидкості повітря у вхідному отворі дифузора. Можливі конфігурації струменя перед дозвуковим геометричним дифузором показано на рис. 15.8, 15.9. У загальному випадку форма струменя на вході в двигун визначається відношенням площі поперечного перерізу струменя перед двигуном на нескінченності до площі вхідного отвору дифузора  $S_1/S_2$  (наприклад, див. рис. 15.8, а).



← Рис. 15.8. Можливі конфігурації струменя перед дифузором:  
а – зовнішнє часткове гальмування потоку;  
б – вхід в дифузор без зміни параметрів;  
в – із зовнішнім прискоренням потоку.

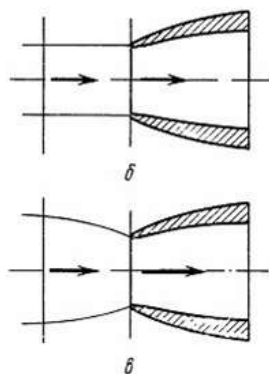
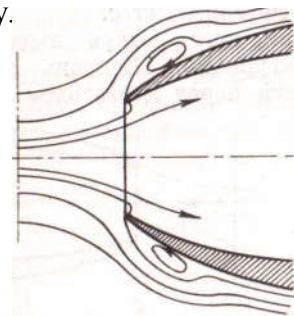


Рис. 15.9. Зрив струменя при великому вхідному отворі дифузора (струмінь підходить до стінки дифузора під великими кутами атаки).



Розглянемо спочатку варіант, коли струмінь входить в дифузор, не змінюючи своєї конфігурації, тобто  $S_1 = \frac{Q_m}{\rho_1 v_1} = S_2$ , де  $Q_m$  – масова витрата повітря через

двигун,  $кг/с$ . Очевидно, при цьому виконуються рівності, відповідно, швидкостей і тисків в перерізах 1 і 2 (рис. 15.8, б):  $v_1 = v_2, p_1 = p_2$ .

При зменшенні витрати повітря можна уявити, що струмінь перед двигуном наче утворює «повітряний дифузор» ще в атмосфері перед двигуном, коли швидкість струменя зменшується, а тиск збільшується (див. рис. 15.8, а).

При зростанні витрати повітря струмінь, що набігає на дифузор, набирає форми, що показана на рис. 15.8, в. Тоді зміна конфігурації струменя має супроводжуватися змінами швидкості і тиску відповідно до нерівностей:  $v_2 > v_1, p_2 < p_1$ .

Якщо масова витрата повітря є незмінною ( $Q_m = idem$ ), то форма струменя перед двигуном залежить від площі вхідного отвору дифузора. Варіюючи розмірами дифузора, можна отримати будь-який з трьох наведених вище варіантів режиму роботи дифузора.

Найбільш вигідним для роботи двигуна слід вважати такий режим, коли повітряний потік зазнає гальмування ще перед дифузором практично без втрат енергії, тоді відповідне зниження швидкості на вході до дифузора зменшує його внутрішній аеродинамічний опір.

Щодо зовнішнього лобового опору двигуна, який важливо враховувати при його проектуванні, то треба зазначити наступне. «Корисне», на перший погляд, укорочування дифузора, насправді призводить до зростання зовнішнього лобового опору, оскільки при цьому зростатимуть кути атаки передньої частини дифузора по відношенню до струменів, що підходять до неї. Це може призвести до зриву потоку з інтенсивним вихороутворенням на зовнішній поверхні носка двигуна (див. рис. 15.9).

Як показують експерименти, оптимальна умова роботи вхідної (дифузорної) ділянки дозвукового повітряно-реактивного двигуна спостерігається поблизу режиму  $v_2 \approx 0,5v_1$ .

При дозвукових швидкостях польоту і відсутності втрат енергії в дифузорі повний тиск потоку у будь-якому перерізі його зберігався б однаковим і рівним повному тиску в струмені повітря, що набігає. Однак, реально, через наявність втрат повний тиск в кінці дифузора завжди менше, ніж на початку його:  $p_{03} < p_{02}$ . Статичний тиск  $p$  вздовж дифузора внаслідок зменшення швидкості навпаки зростає.

4) **Гідравлічні втрати в дозвуковому дифузорі** визначаються в долях динамічного тиску в широкому (вихідному) перерізі його:

$$\Delta p_0 = p_{02} - p_{03} = \zeta_3 \frac{\rho_{03} v_3^2}{2}, \quad (15.4)$$

де  $\zeta_3$  – коефіцієнт гідравлічного опору дифузора, віднесений до вихідного перерізу  $S_3$ .

Звичайно зміною густини загальмованого потоку в дифузори нехтують, приймаючи  $\rho_{03} \approx \rho_{01}$ . При зведенні формули (15.4) до безрозмірного виду маємо

$$\frac{\Delta p_0}{p_{02}} = 1 - \frac{p_{03}}{p_{02}} = \zeta_3 \frac{k}{kp_{02}} \cdot \frac{v_3^2}{2}, \quad (15.5)$$

$$\rho_{01}$$

де  $\frac{kp_{02}}{\rho_{01}} = a_{01}^2 = \frac{k+1}{2} a_*^2$ .

З формули (15.5) можна отримати коефіцієнт збереження повного тиску в дифузори:

$$\sigma_d = \frac{p_{03}}{p_{02}} = 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_3 \frac{v_3^2}{a_*^2} = 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_3 \lambda_3^2, \quad (15.6)$$

де  $\lambda_3 = v_3/a_*$  – зведена швидкість в кінці дифузора.

Гідравлічний опір дифузора визначається сумою втрат на тертя і вихрових втрат. Останні відіграють основну роль і залежать від кута розкриття дифузора  $\alpha$ . Із зростанням кута  $\alpha$  вихрова зона переміщується від кінця дифузора до його початку і гідравлічні втрати зростають. Експерименти показують, що вихрові втрати в дифузори можна оцінювати як своєрідне пом'якшення опору удару, і визначати втрати згідно з формулами (15.3), (15.4) і графіком на рис. 15.6. Реально на практиці коефіцієнт повноти удару  $\psi < 1$ . Але при великому значенні кута розкриття дифузора  $\alpha \approx 60^\circ$  величина  $\psi$  досягає значення 1,2. При такому куті розкриття дифузора вихрова зона періодично уноситься потоком. Поновлення її вимагає додаткових затрат енергії, що й обумовлює нерівність  $\psi > 1$ .

Звичайно застосовують дозвукові дифузори з кутами  $\alpha = 6-8^\circ$ , що відповідає значенням  $\psi = 0,11-0,15$ , при цьому відриву струменів від стінок дифузора не спостерігається. Гідравлічний опір безвідривного дифузора можна також суттєво знизити, якщо замість прямолінійної форми надати його стінці дзвоноподібну форму.

### 15.3. Надзвукові геометричні дифузори

Надзвукові потоки гальмуються, як відомо, в каналах, що звужуються. Тоді для безперервного гальмування **надзвукового потоку** можна використати канал тої самої конфігурації, що й сопло Лавалю, який у даному випадку називають надзвуковим дифузори. В звужувальній частині каналу швидкість надзвукового потоку буде зменшуватися і при правильно вирахованому горлі сопла в ньому відбудеться критична швидкість. А далі в розширювальній частині здійснюється подальше гальмування вже дозвукового потоку.

Такий надзвуковий дифузор реалізувати на практиці важко, оскільки надзвуковий потік, що зазнає уповільнення, є нестійким до утворення ударних хвиль, які ще й викликають великі хвильові втрати енергії. Тому дифузори, в яких намагаються здійснити гальмування потоку виключно без генерації ударних хвиль (так звані ідеальні, або «ізоентропійні дифузори»), застосовуються в техніці досить рідко. Натомість, застосовуючи дифузори спеціальної форми, можна створювати ступінчасте гальмування надзвукового потоку за допомогою різноманітних систем косих стрибків ущільнення. Оскільки за звичайним плоским косим стрибком швидкість, як правило, залишається надзвуковою, то для повного гальмування потоку потрібно за останнім косим стрибком розмістити прямий стрибок або особливу ділянку криволінійної ударної хвилі з елементами «сильних» косих стрибків (з великими кутами нахилу  $\beta$ ), що переводять потік в дозвуковий (адже втрати енергії в косому стрибку менші, ніж в прямій ударній хвилі).

Саме такий прийом, запропонований К. Осватичем, і полягає в тому, що гальмування потоку газу відбувається в послідовності слабких косих ударних хвиль із завершальним прямим стрибком ущільнення (рис. 15.10).

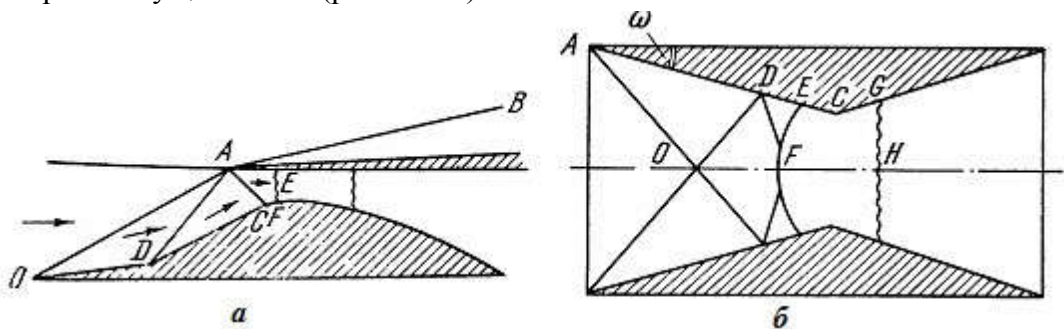


Рис. 15.10. Надзвукові геометричні дифузори: а – з частковим зовнішнім стисканням; б – з внутрішнім стисканням

На рис. 15.10,а зображено:  $OA$  – перший косий стрибок,  $DA$  – другий косий стрибок,  $CA$  – прямий завершальний стрибок ущільнення,  $AB$  – косий стрибок зовнішнього обтікання. На рис. 15.10,б зображено:  $AO$ ,  $OD$ ,  $DF$  – система косих стрибків,  $EF$  – завершальний містоподібний стрибок ущільнення.

Отже, виникає складна **задача керування системою стрибків ущільнення** в надзвуковому дифузорі з метою зведення втрат енергії до мінімуму! Можна відшукати оптимальні режими для складної системи стрибків шляхом послідовних розрахунків.

До прикладу, розглянемо схему розрахунку системи, що побудована з трьох стрибків ущільнення — двох косих і одного завершального прямого стрибка. Спочатку визначаються число  $M$  (або зведена швидкість = швидкісний коефіцієнт  $\lambda$ ) і тиск за першим косим стрибком при різних кутах нахилу його фронту. Потім на основі вже наявних даних щодо кожного значення  $M$  (або  $\lambda$ ) за першим косим стрибком підбирається

**оптимальна система** з решти двох стрибків (другий косий з наступним прямим). В результаті отримують криві  $\sigma=f(\beta)$  при різних значеннях числа Маха–Маієвського  $M_1$  потоку, що набігає. За цими кривими і устанавлюються оптимальні співвідношення для досліджуваної системи з трьох стрибків. Аналогічними послідовними розрахунками можна визначити оптимальні режими для довільної заданої кількості стрибків.

На рис.15.11 наведені криві оптимальних значень коефіцієнта повного тиску  $\sigma$  (співвідношення повного тиску за системою стрибків до повного тиску перед нею) в залежності від числа  $M_1$  перед дифузором для випадків: 1 – прямий стрибок; 2 – косий стрибок з наступним прямим стрибком; 3 – два косих стрибка з наступним прямим стрибком; 4 – три косих стрибка з наступним прямим.

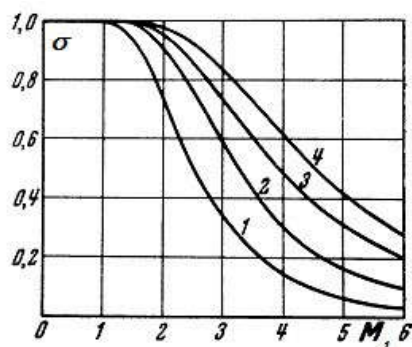


Рис. 15.11. Залежність оптимального коефіцієнта повного тиску від числа Маха–Маієвського потоку, що набігає, в системах з  $n$  стрибків ущільнення:  $(n-1)$  – косих стрибків + 1 прямий завершальний стрибок ущільнення

Отримані наведеним вище способом оптимальні режими відповідають максимальному відновленню тиску. Рис. 15.11 показує, що складні системи стрибків можуть давати значний ефект лише при дуже великих швидкостях. Так, при  $M_1 < 1,5$  гарні результати дає один прямий стрибок, при цьому немає потреби в більш складній системі стрибків в цій області швидкості. Але при  $M_1 \geq 1,5$  доцільно застосовувати вже двох-стрибкову систему (косий стрибок з наступним прямим). Переваги чотирьохстрибкової системи (три косих з наступним прямим стрибком) стають суттєвими тільки при  $M_1 \geq 2,5$ .

Отримані результати є застосовними безпосередньо до плоских дифузорів, а з незначними змінами і до вісесиметричних дифузорів.

#### 15.4. Застосування надзвукових дифузорів в аеродинамічних трубах

В аеродинамічних трубах (АДТ) високих швидкостей для гальмування («гасіння») надзвукових потоків за робочою частиною встановлюють надзвукові дифузори, конструкція яких, нагадуючи сопло Лавалю, складається з двох частин — початкового

звужувального каналу та наступної розширювальної ділянки. Рис. 15.12 ілюструє схеми АДТ з робочими частинами: відкритою (верхня) та у вигляді герметичної камери (нижня).

Позиції рис. 15.12 такі: 1 – сопло; 2 – робоча частина; 3 – надзвуковий дифузор. У першій, звужувальній, частині дифузора з надзвукова швидкість газу поступово зменшується до звукової за рахунок утворення стрибків ущільнення; потім дозвуковий потік потрапляє в розширювальну (дозвукову) частину каналу, де відбувається подальше гальмування потоку.

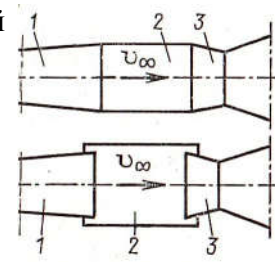


Рис. 15.12.

Як відомо, гальмування надзвукового потоку за допомогою косих стрибків ущільнення супроводжується меншими втратами повного тиску порівняно з гальмуванням за допомогою прямого стрибка. Тому надзвукову частину каналу дифузора профілюють таким чином, щоб гальмування потоку відбувалося в системі саме косих стрибків ущільнення. Важливою вимогою до дифузора є забезпечення малого додатного градієнта тиску  $\frac{dp}{dx} > 0$  для запобігання відриву примежового шару та інтенсивного вихороутворення.

## ДОДАТОК

### ВИМІРЮВАННЯ МІСЦЕВОЇ ШВИДКОСТІ В ДО- ТА НАДЗВУКОВОМУ ПОТОЦІ ГАЗУ НАПРІНОЮ ТРУБКОЮ ПІТО-ПРАНДТЛЯ

При набіганні газового потоку на носик трубки Піто-Прандтля (рис. 1) швидкість проти центрального отвору трубки стає нульовою  $v_0 = 0$ , а тиск дорівнює тиску гальмування  $p_0$ . Бічні отвори трубки сприймають статичний тиск потоку, що набігає. Позначимо параметри потоку, що набігає, як  $v_1, p_1, \rho_1$ . Розглянемо три варіанти вимірювання відповідно до величини швидкості потоку.

1) **Низька дозвукова швидкість ( $M_1 < 0,2$ ).** На підставі рівняння Д. Бернуллі для нестисливої рідини ( $\rho \approx const$ )

$$\frac{p_1 + \rho v_1^2}{2} = \frac{p_0}{2},$$

звідки знайдемо місцеву швидкість газу:

$$v_1 = \sqrt{2 \frac{p_0 - p_1}{\rho}}. \quad (1)$$

2) **Велика, але дозвукова швидкість  $[(0,2 \div 0,3) < M_1 < 1]$ .**

При ізоентропійному русі і гальмуванні газу на носіку

мініатюрної трубки  $\left( \rho = var; \frac{p}{\rho^k} = C \right)$  без досягання

хвильової кризи при обтіканні її справедливе рівняння енергії

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

звідки, враховуючи рівняння адиабати Пуассона  $p_1/\rho_1^k = p_0/\rho_0^k$ , можна отримати шукану місцеву швидкість газу:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}. \quad (2)$$

3) **Рух газу з надзвуковою швидкістю ( $M_1 > 1$ ).** Перед носиком трубки Піто-Прандтля утворюється ударна хвиля, центральна частина фронту якої практично являє собою **прямий стрибок ущільнення**. Тому формулу (2), а тим паче формулу (1), використовувати не можна, оскільки на стрибку ущільнення відбувається стрибкоподібна зміна швидкості і термодинамічних параметрів  $p, \rho$ . Таким чином, при проходженні

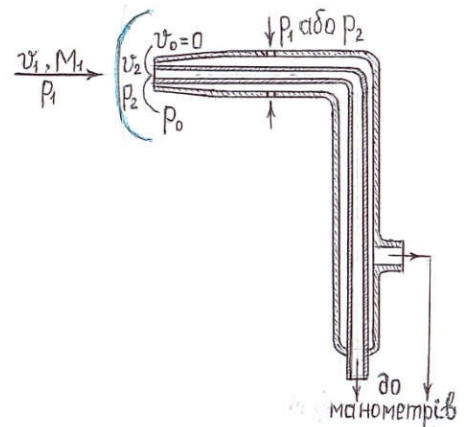


Рис. 1.

стрибка ущільнення маємо: перед стрибком параметри потоку, що набігає  $p_1, \rho_1, v_1$ ; безпосередньо за стрибком параметри потоку  $p_2, \rho_2, v_2$ ; на носіку трубки Піто-Прандтля — параметри гальмування  $p_0, \rho_0$ ;  $v_0 = 0$ .

Як ми знаємо, тиски  $p_1$  і  $p_2$  на прямому стрибку ущільнення зв'язує **формула Ренкіна-Гюгоніо**

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad (3)$$

а швидкості — формула Прандтля

$$v_1 \cdot v_2 = a_*^2, \quad (4)$$

де  $a_*$  — критична швидкість.

Для дозвукової області після стрибка ущільнення справджуються формула адіабати Пуассона та формула (2), при використанні яких для цієї області індекс 1 треба замінити на індекс 2. Тоді на підставі цих формул, а також співвідношень (3) і (4), після перетворень можна отримати **формулу Релея** зв'язку відношення тиску гальмування  $p_0$  (що безпосередньо сприймає центральний отвір трубки Піто-Прандтля) до статичного тиску потоку перед стрибком ущільнення  $p_1$  з числом Маха-Маієвського  $M_1$  потоку, що набігає на трубку:

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{k-1}{k+1} \left[ \frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{M_1^2}{\left( \frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (5)$$

Для вимірювань в потоці повітря ( $k=1,4$ ) формула Релея зводиться до вигляду

$$\frac{p_0}{p_1} = 166,7 \frac{M_1^2}{\left( 7 - \frac{1}{M_1^2} \right)^{2,5}}. \quad (6)$$

Як показують численні дослідження, при розташуванні бічних отворів трубки Піто-Прандтля на відстані 4–6 діаметрів трубки від її носика ці отвори достатньо точно сприймають статичний тиск  $p_1$  потоку, що набігає при дозвуковій швидкості і тиск  $p_2$  — при надзвуковій. Центральна трубка всередині приладу передає тиск гальмування  $p_0$ . Тиски вимірюються манометрами. Визначення швидкості потребує також вимірювання температури  $T_1$  потоку, що набігає:  $v_1 = M_1 a_1 = M_1 \sqrt{kRT_1}$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Основний

1. Liepman H.W., Roshko A. Elements of gasdynamics. Mineola, New York: Dover Publications, inc., 2002. 464 p.
2. Zucker R.D., Biblarz O. Fundamentals of gas dynamics, 2nd ed. Monterey, California: John Wiley@Sons, inc., 2002. 493 p.
3. Powers J.M. Lecture notes on gas dynamics. Notre Dame, Indiana, USA: University of Notre Dame. 2019. 166 p.
4. Путята В.Й., Сідляр М.М. Гідроаеромеханіка: підручник. Київ: Видавництво Київського університету, 1963. 480 с.
5. Гідрогазодинаміка. Курс лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 142 Енергетичне машинобудування, 143 Атомна енергетика, 144 Теплоенергетика / В. М. Турик; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані (1 файл: 8,37 Мбайт). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 145 с.  
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41225>

### Додатковий

6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для студ. вузов. 6-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 840 с.
7. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика: учеб. для студ. вузов: в 2 ч. 5-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. Ч. 1. 600 с.
8. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика: учеб. для студ. вузов: в 2 ч. 5-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. Ч. 2. 304 с.
9. Черный Г. Г. Газовая динамика: учеб. для универ. и вузов. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 424 с.
10. Milne–Thomson L. M. Theoretical hydrodynamics, 4th ed. New York: The Macmillan Company, 1962. 697 p.
11. Schlichting H. Boundary layer theory, 7th ed. New-York: McGraw—Hill Book Co., 1979. 817 p.
12. Von Kármán Th. Aerodynamics. New-York, Toronto, London: McGraw-Hill Paperbacks, Cornell University Press; London: Oxford University Press, 1963. 204 p.
13. Von Kármán Th. From low-speed aerodynamics to astronautics. Elsevier, Oxford University Press Ltd, 1963. 100 p.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Предмет, базові поняття та закони газодинаміки.....	3
1.1. Деякі термодинамічні передумови газодинаміки.....	5
1.2. Загальні закони збереження.....	6
1.3. Диференціювання інтеграла по рухомому змінному об'єму.....	8
2. Основні рівняння газодинаміки.....	10
2.1. Рівняння нерозривності.....	10
2.2. Рівняння кількості руху.....	11
2.3. Рівняння енергії та його різновиди.....	18
3. Закони збереження для багатоконпонентних хімічно реагуючих газових сумішей.....	21
3.1. Рівняння збереження $i$ -ї компоненти.....	21
3.2. Рівняння збереження імпульсу.....	23
3.3. Рівняння збереження енергії.....	24
3.4. Рівняння виробництва ентропії.....	25
4. Динаміка в'язких середовищ.....	26
4.1. Модель руху малої рідкої частинки.....	26
4.2. Узагальнена гіпотеза Ньютона.....	28
4.3. Рівняння руху Нав'є-Стокса в'язких рідин і газів.....	32
5. Динаміка нев'язкого газу.....	37
5.1. Диференціальне рівняння руху Л. Ейлера.....	37
5.2. Інтеграли диференціального рівняння руху Л. Ейлера.....	38
5.2.1. Загальний інтеграл для одновимірної течії газу та його наслідки.....	38
5.2.2. Форми інтеграла Д. Бернуллі.....	41
6. Важливі газодинамічні співвідношення.....	44
6.1. Газодинамічні формули щодо оборотних процесів течії.....	44
6.2. Необоротні процеси течії.....	51
6.3. Ізоентропійне витікання газу з резервуара.....	54
6.4. Деякі принципи отримання надзвукових швидкостей течії газу.....	56
7. Оцінки впливу стисливості газу на параметри течії.....	57
7.1. Відомості про стисливість.....	57
7.2. Оцінка впливу стисливості газу за тиском.....	58
7.3. Оцінка впливу стисливості газу за густиною.....	61

8. Збурення в газі. Системи простих хвиль та їх математичний опис.....	62
8.1. Загальна характеристика збурень в газі.....	62
8.2. Особливості збурень в до- та надзвукових потоках.....	65
8.3. Швидкість поширення малих збурень в нев'язкому газі, що покоїться.....	65
9. Поширення малих та скінченних збурень в однорідному потоці газу.....	69
9.1. Обтікання точкового джерела збурень. Конус Маха.....	70
9.2. Поняття про нелінійні хвилі.....	72
9.3. Поширення збурень скінченної інтенсивності. Загальна характеристика..	74
9.3.1. Утворення та кінематична характеристика прямої ударної хвилі.....	74
9.3.2. Ударні хвилі в надзвукових та навіколзвукових потоках.....	78
9.3.3. Хвильовий опір.....	79
9.3.4. Особливості стрибків ущільнення різної природи.....	82
10. Поширення малих збурень в газорідній суміші .....	83
10.1. Загальні відомості про структуру та особливості багатофазних систем як робочих тіл енергетичних установок.....	83
10.2. Поширення звукових хвиль в газорідній суміші.....	84
11. Течія з розривами. Теорія прямого стаціонарного стрибка ущільнення. Ударна адіабата.....	88
11.1. Геометричні та динамічні особливості стрибків ущільнення.....	88
11.2. Теорія прямого стрибка ущільнення.....	89
11.3. Термодинамічні особливості прямих стрибків ущільнення.....	95
11.4. Формула Прандтля добутку швидкостей на стрибку утілення.....	98
12. Косі стрибки ущільнення.....	102
12.1. Загальна характеристика косих стрибків.....	102
12.2. Поняття про взаємодію примежового шару зі стрибком ущільнення.....	105
13. Закон обернення дії.....	108
14. Рух газу в каналах змінного перерізу.....	114
14.1. Сопло Лавалю.....	114
14.1.1. Загальний аналіз форми геометричного сопла та течії газу в ньому....	114
14.1.2. Формула сопла Лавалю.....	117
14.2. Течія газу через сопло Лавалю при розрахунковому та нерозрахунковому режимах.....	119
14.2.1. Режими витікання газу через сопло Лавалю.....	119
14.2.2. Особливості сопла Лавалю, важливі для практики.....	121
14.3. Вплив в'язкості на характер течії в каналі змінного перерізу.....	122

15. Течія газу в до- та надзвукових дифузорах і розрахунок параметрів.....	124
15.1. Дифузори і конфузори: загальні відомості.....	124
15.2. Дозвукові геометричні дифузори.....	126
15.3. Надзвукові геометричні дифузори.....	130
15.4. Застосування надзвукових дифузорів в аеродинамічних трубах.....	132
Додаток. Вимірювання місцевої швидкості в до- та надзвуковому потоці газу напірною трубкою Піто–Прандтля.....	134
Список літератури.....	136