Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»

**В. М. Васильєв**

# Теорія ймовірностей в радіотехніці

**Навчальний посібник**

Практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи»
спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»*

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

УДК 519.2:621.37](075.8)

**Рецензент** *Одарченко Р. С.*, д-р техн. наук, проф.,
Національний авіаційний університет

**Відповідальний редактор** *Жук С. Я.*, д-р техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*(протокол № 6 від 30.03.2023 р.)*
*за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету*
*(протокол № 03/2023 від 27.02.2023 р.)*

Навчальний посібник призначений для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей в радіотехніці» і спрямований на розширення, поглиблення та кращого засвоєння знань з теорії ймовірностей та математичної статистики та їх застосувань в радіотехніці.

Розглядається практичне застосування теорії ймовірностей та математичної статистики в радіотехнічних системах спостереження, системах зв'язку, для аналізу точнісних характеристик радіонавігаційних систем, а також для аналізу надійності радіотехнічного обладнання. Кожен розділ навчального посібника супроводжується завданнями практичного характеру і контрольними запитаннями.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Радіотехнічні комп’ютеризовані системи» спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка».

Матеріал, викладений в посібнику, може бути корисним також для інших технічних спеціальностей під час вивчення теорії ймовірностей та її застосувань.

**УДК 519.2:621.37](075.8)**

.

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг 5,32 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. М. Васильєв, 2023
© КПІ ім. Ігоря Сікорського (РТФ), 2023

## ЗМІСТ

**Вступ** ..... 6

**Розділ 1. Випадкові події** ..... 8

**Тема 1. Визначення ймовірностей подій. Моделювання випадкових подій та оцінка їх ймовірностей** ..... 8

1.1. Статистичне означення ймовірності ..... 8

1.2. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності ..... 10

1.3. Безпосередній підрахунок ймовірності з використанням елементів комбінаторики ..... 11

1.4. Операції над випадковими подіями ..... 13

1.5. Моделювання випадкових подій та оцінка їх ймовірностей ..... 18

Контрольні запитання ..... 22

**Тема 2. Основні теореми теорії ймовірностей** ..... 23

2.1. Формула повної ймовірності ..... 23

2.2. Формула Байєса (теорема гіпотез) ..... 25

2.3. Теорема о повторенні дослідів. Формула (схема) Бернуллі ..... 28

2.4. Завдання для самостійного виконання ..... 31

Контрольні запитання ..... 32

**Розділ 2. Випадкові величини** ..... 33

**Тема 3. Закони розподілу. Числові характеристики. Моделювання випадкових величин** ..... 33

3.1. Випадкові величини. Закони розподілу ..... 33

3.2. Числові характеристики випадкових величин ..... 37

3.3. Найпоширеніші основні закони розподілу ..... 41

3.4. Моделювання випадкових величин та оцінка їх характеристик ..... 46

Контрольні запитання ..... 52

**Розділ 3. Системи випадкових величин** ..... 53

**Тема 4. Системи випадкових величин. Функціональні перетворення** ..... 53

4.1. Функція розподілу і щільність ймовірностей системи двох випадкових величин ..... 53

4.2. Функціональні перетворення випадкових величин ..... 55

4.3. Композиція нормальних законів розподілу ..... 57

4.4. Застосування композиції законів розподілу в задачах навігації ..... 59

Контрольні запитання ..... 62

**Розділ 4. Елементи математичної статистики** ..... 63

**Тема 5. Метод максимуму апостеріорної ймовірності в задачі виявлення сигналів** ..... 63

5.1. Постановка проблеми ..... 63

5.2. Метод максимальної правдоподібності ..... 64

5.3. Метод максимуму апостеріорної ймовірності ..... 69

5.4. Метод максимуму апостеріорної ймовірності в задачі виявлення сигналів ..... 71

Контрольні запитання ..... 75

**Тема 6. Метод найменших квадратів в задачі обробки результатів радіонавігаційних вимірів** ..... 76

6.1. Задача регресійного аналізу ..... 76

6.2. Формулювання методу найменших квадратів ..... 77

6.3. Метод найменших квадратів у регресійному аналізі ..... 79

6.4. Задача оцінки координат і швидкості рухомого об’єкта за результатами вимірювань ..... 82

Контрольні запитання ..... 84

**Розділ 5. Теорія ймовірностей в радіотехніці** ..... 86

**Тема 7. Випадкові потоки. Системи масового обслуговування** ..... 86

7.1. Випадкові потоки сигналів, їх види, характеристики та моделювання ..... 87

7.2. Моделювання пуассонівського потоку ..... 89

7.3. Обслуговуючи системи та їх характеристики ..... 90

7.4. Моделювання обслуговуючих систем ..... 92

Контрольні запитання ..... 96

**Тема 8. Похибки вимірювань радіонавігаційних систем, робочі зони** ..... 97

8.1. Види та математичні моделі похибок радіовимірювальних систем ..... 97

8.2. Характеристики статистичних оцінок похибок ..... 98

8.3. Похибки радіотехнічних систем навігації як системи випадкових величин ..... 101

8.4. Статистичні характеристики похибок визначення місцеположення при координатних перетвореннях ..... 103

8.5. Визначення робочої зони радіонавігаційної системи ..... 107

Контрольні запитання ..... 109

**Тема 9. Оцінка надійності радіотехнічних систем** ..... 110
9.1. Показники надійності систем ..... 110
9.2. Статистичні оцінки показників надійності систем ..... 113
9.3. Оцінка структурної надійності систем ..... 114
9.4. Приклади оцінки надійності навігаційних систем ..... 117
Контрольні запитання ..... 120
**Список літератури** ..... 122
**Додаток А. Таблиці** ..... 124

# Вступ

Математичним апаратом багатьох спеціальних дисциплін, які присвячені вивченню функціонування різноманітних радіотехнічних систем, їх надійності, оптимальній і адаптивній обробці сигналів при наявності завад є теорія ймовірностей і математична статистика.

Теорією ймовірностей називається математична наука, яка вивчає закономірності у випадкових явищах. Випадковим називається явище, яке при багатократному повторенні одного й того самого експерименту (випробування) кожного разу протікає дещо інакше, а яким чином, наперед невідомо.

Радіотехнічні системи відносяться до інформаційних систем передачі, збору і обробки інформації. Двадцяте століття було століттям зародження і бурхливого розвитку радіотехнічних систем, без яких неможливо уявити повсякденну діяльність і розвиток суспільства. У сучасних умовах радіотехнічні системи отримали подальший розвиток на основі вбудованих (обчислювальних) систем та впровадження новітніх інформаційних технологій.

Основна і загальна вимога, що висувається до будь-якої радіотехнічної системи, полягає в достовірному і своєчасному отриманні інформації з випромінювань з обмеженою енергією. Достовірному прийому інформації в радіотехнічних системах заважає ряд факторів. По-перше, сигнали, як носії інформації, яка заздалегідь невідома на приймальній стороні, мають випадковий характер. По-друге, невід'ємною складовою будь-якої радіотехнічної системи є радіоканал розповсюдження сигналів. При поширенні в реальних радіоканалах з неповністю відомими і змінними параметрами, сигнали також зазнають випадкових спотворень. По-третє, особливістю радіотехнічних систем є їх функціонування в умовах ненавмисних і навмисних завад і внутрішніх шумів. Завади – це сигнали, які приходять на вхід приймача радіотехнічної системи, вид яких для отримувача інформації є невідомим і які заважають її нормальній роботі. Крім того, до випадкового характеру функціонування радіотехнічних систем призводять можливі відмови роботи елементів радіообладнання, робота в режимах, що не відповідають передбаченим або заданим тощо.

Даний навчальний посібник призначений для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей в радіотехніці» і спрямований на розширення, поглиблення та кращого засвоєння знань з теорії ймовірностей та математичної статистики та їх застосувань в радіотехніці.

Поряд із розбором типових прикладів з базових положень і теорем теорії випадкових подій, законів розподілу, характеристик випадкових величин, систем випадкових величин, а також математичної статистиці, в посібнику розглядаються приклади і ставляться завдання щодо застосування теорії ймовірностей і математичної статистиці в радіотехнічних системах для статистичного виявлення сигналів, статистичної обробки даних систем спостереження, оцінки навігаційних характеристик, аналізу похибок радіонавігаційних систем, аналізу пропускної спроможності систем, а також оцінки структурної надійності систем.

Навчальний посібник складається з дев'яти тем практичних занять відповідно до затвердженої робочої програми з дисципліни «Теорія ймовірностей в радіотехніці», яка відноситься до циклу професійної підготовки бакалаврів за освітньою програмою «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи» спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка».

# Розділ 1. Випадкові події

## Тема 1. Визначення ймовірностей подій. Моделювання випадкових подій та оцінка їх ймовірностей

**Випадковим** називається явище, яке при багатократному повторенні одного й того самого експерименту (випробування) кожного разу протікає дещо інакше, а яким чином, наперед невідомо.

При вивченні явищ і створенні їх моделей існує два підходи: детермінований і ймовірнісний. Детермінований підхід дозволяє описати результат кожного окремого випробування. Всі фактори, які впливають на результат, що спостерігається в експерименті, вважаються відомими. При ймовірнісному (стохастичному) підході результат окремого випробування наперед невідомий. На практиці це обумовлено неможливістю врахувати всі фактори, що впливають на результат. Тому в теорії ймовірностей переходять від аналізу закономірностей протікання явища у конкретному випробуванні до закономірностей, які характеризують це явище в багатьох випробуваннях. Ці закономірності вже носять детермінований характер.

### 1.1. Статистичне означення ймовірності

Вихідним поняттям теорії ймовірностей являється поняття ***стохастичного експерименту***, тобто такого експерименту, результат якого передбачити неможливо.

***Означення. Випробування*** – це стохастичний експеримент, що виконується за певної незмінної сукупності умов, результати якого піддаються спостереженню.

***Означення. Випадкова подія*** – це така подія, яка може відбутись або не відбутись при проведенні випробування. Випадкові події позначаються великими латинськими літерами ***A, B, C*** … . Події, які ніколи не виникнуть в результаті проведення даного стохастичного експерименту, називають ***неможливими***. Якщо подія завжди виникає в результаті випробування, то така подія носить назву ***достовірної***.

У зв’язку з тим, що передбачити точний результат окремого випробування неможливо, виникає питання про **частоту**, з якої відбувається та або інша подія при багаторазових випробуваннях.

Нехай при $N$-кратному проведенні випробування деяка подія $A$ відтворюється $M$ разів (рис. 1.1). При цьому в кожному випробуванні подія $A$ відтворюється або не відтворюється один раз.

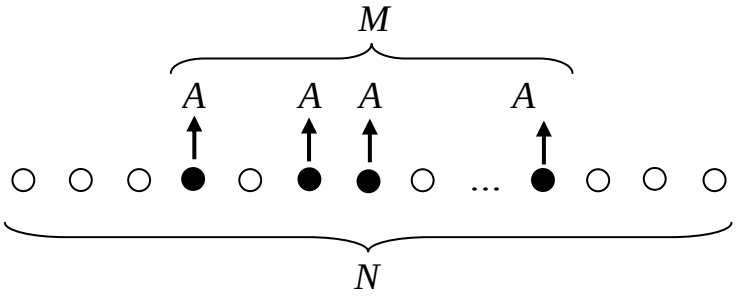



Рис. 1.1. Відносна частота події

Відносною частотою $\nu(A)$ події $A$ називається відношення числа випробувань $M$, в яких подія $A$ має місце, до загального числа проведених випробувань $N$

$$\nu(A) = M / N. \tag{1.1}$$

Від серії до серії випробувань відносна частота $\nu(A)$ змінюється. Однак завдяки властивості статистичної стійкості відносні частоти групуються відносно деякого середнього значення. Число, відносно якого групуються при багатократних випробуваннях відносні частоти випадкової події, називаються його ***ймовірністю*** і позначається $P(A)$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} M / N. \tag{1.2}$$

Дане визначення ймовірності отримало назву ***статистичного***. Із формул (1.1), (1.2) випливає, що

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.3}$$

Ймовірність достовірної події, яка в результаті випробування неодмінно відбудеться, дорівнює одиниці. Ймовірність неможливої події, яка в результаті випробування не може відбутись, дорівнює нулю.

Недоліком статистичного визначення ймовірності є те, що воно не дозволяє визначати ймовірність випадкової події без проведення значної кількості випробувань.

## 1.2. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності

Як вже відмічалося, вихідним поняттям теорії ймовірностей являється поняття ***стохастичного експерименту***, ***випробування.***

***Означення.*** **Елементарною подією** називають найпростіший результат випробування в певному стохастичному експерименті. Елементарні події позначаються літерами $\omega_i$ або $\omega$ і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

***Означення.*** Сукупність усіх можливих елементарних подій випробування називають **простором елементарних** подій і позначають $\mathbf{\Omega}$.

Якщо множина елементарних подій є зліченною, тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати, то простір елементарних подій називають *дискретним*. Він може бути обмеженим і необмеженим. У противному разі (тобто коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число) простір елементарних подій називають *неперервним*. Дискретний обмежений простір елементарних подій можна представити множиною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, тобто він складається з $n$ елементарних подій $\omega_i, i = \overline{1,n}$.

***Означення.*** Випадкова подія називається ***складеною***, якщо вона відбувається, коли відбувається одна з декількох визначених елементарних подій $\omega_i, \omega_j, ..., \omega_m$. Подію $\boldsymbol{A}$ також можна описати на мові теорії множин як сукупність (множину) елементарних подій $A = \{\omega_i, \omega_j, ..., \omega_m\}$. При такому представленні подія $A$ є підмножиною простору елементарних подій $\Omega$, $A \subseteq \Omega$. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: *A, B, C, D*, … .

Елементарні події, що входять в $\boldsymbol{A}$, називаються **сприятливими** для $\boldsymbol{A}$. Подія $\boldsymbol{A}$ настає, якщо настає яка-небудь елементарна подія, що входить в $\boldsymbol{A}$.

З врахуванням множинного представлення подій, сама множина $\mathbf{\Omega}$ називається **достовірною подією,** оскільки будь-яка з елементарних подій завжди відбувається у випробуванні**.** Відповідно порожня множина $\varnothing$ – називається **неможливою подією**.

***Означення.*** Випадкові події називаються ***несумісними***, якщо внаслідок експерименту вони не можуть відбутися разом. Множини елементарних подій відповідних несумісних складених подій не містять однакових елементів. Це означає, що коли одна з подій відбулась у випробувані, друга подія відбутись не може.

***Означення.*** Події називаються ***рівноможливими***, якщо мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення випробування.

***Означення.*** Події створюють ***повну групу***, якщо внаслідок експерименту якась із подій обов'язково настане.

***Означення.*** Дослід з простором елементарних подій, які є між собою несумісними, рівноможливими і утворюють повну групу називають ***схемою випадків***.

Розглянемо стохастичний експеримент з обмеженим дискретним простором елементарних подій $\mathbf{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}}$, який є схемою випадків. Нехай $\boldsymbol{A}$ – випадкова подія, що містить $\boldsymbol{m}$ сприятливих елементарних подій. Для кількісного вимірювання можливості появи випадкових подій для схеми випадків вводиться поняття ймовірності події.

**Ймовірністю** випадкової події $\boldsymbol{A}$ називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій $m$ ($0 \le m \le n$), які сприяють появі $A$ (рис.1.1), до кількості всіх елементарних подій $n$ простору $\Omega$:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.4}$$

## 1.3. Безпосередній підрахунок ймовірності з використанням елементів комбінаторики

Щоб обчислити ймовірність тієї чи іншої випадкової події для певного класу задач із дискретним і обмеженим простором елементарних подій, необхідно вміти обчислити кількість $n$ усіх елементарних подій (множину $\Omega$) і число $m$ елементарних подій, які сприяють появі випадкової події.

***Приклад 1.1.*** Дві однотипні радіостанції, попередньо налаштовані на одну з трьох фіксованих частот, рознесені в просторі відносно один одного. Яка ймовірність того, що обидві радіостанції опиняться налаштованими на одну і ту ж частоту, якщо на кожній станції незалежно один від одного довільним чином включається тільки один канал?

***Розв'язання:***

Позначимо через $A$ подію, що відповідає тому, що обидві радіостанції виявляються увімкненими на одну і ту ж зафіксовану частоту.

Цифрами 1,2,3 позначимо номера зафіксованих частот та складемо таблицю можливих результатів:

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 |
| 12 | 22 | 32 |
| 13 | 23 | 33 |

де перша цифра у кожному результаті відповідає номеру частоти першої радіостанції, а друга – номеру частоти другої радіостанції.

Неважко підрахувати, що $n$=9, $m$=3.

Тоді, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Для безпосереднього визначення $n$ і $m$, які входять в формулу визначення ймовірності $P(A)$, часто використовують рівняння комбінаторики. У комбінаториці оперують ***множинами*** однотипних елементів. Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані. Множину називають ***упорядкованою***, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів. У противному разі множину називають ***невпорядкованою***. Базові рівняння комбінаторики наведені у табл. 1.1.

*Таблиця 1.1*

**Базові рівняння комбінаторики**

| **Позначення** | **Визначення** | **Приклад** | **Формула** |
|---|---|---|---|
| $P_l$ | **Перестановка** – сполучення, що відрізняються одні від інших лише порядком | Перестановка з 3 елементів: *abc, acb, bca, bac, cab, cba* | $P_l = l!$ |
| $A_l^k$ | **Розміщення** – сполучення, що відрізняються одні від інших самими елементами і їх порядком | Розміщення з 3 елементів по 2: *ab, ac, bc, ba, ca, cb* | $A_l^k = \frac{l!}{(l-k)!}$ |
| $a_l^k$ | **Розміщення з повторенням** – такі розміщення, в яких допускається повтор елементів | Розміщення з повторенням 3 елементів по 2: *aa, ab, ac, bb, bc, ba, ca, cb, cc* | $a_l^k = l^k$ |
| $C_l^k$ | **Комбінації** – сполучення, що відрізняються одні від одного тільки самими елементами | Розміщення з 3 елементів по 2: *ab, ca, cb* | $C_l^k = \frac{A_l^k}{P_l} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ |

## 1.4. Операції над випадковими подіями

Основною задачею теорії ймовірностей є визначення ймовірності деякої події. Вона вирішується шляхом врахування співвідношень між подіями, які відбуваються у випробуванні. Ці співвідношення називають операціями над подіями. Розглянемо деякі з цих операцій і їх множинні аналоги. В множинному підході під операціями над подіями розуміють операції над відповідними множинами.

***Додавання.*** С***умою подій A і B*** називається така подія $C = A + B$, яка внаслідок експерименту настає, якщо мають місце або подія $A$, або подія $B$, або події $A$ і $B$ разом.

На основі теорії множин подія $C$ знаходиться шляхом об'єднання множин елементарних подій, що становлять події $A$ і $B$, тобто $C = A \bigcup B$. Вона включає елементарні події, сприятливі або для події ***A***, або для події ***B***, або для обох подій ***A*** і ***B.***

***Множення. Добутком подій A і B*** називається така подія $C = AB$, яка внаслідок експерименту настає, коли відтворюються обидві події $A$ і $B$. На основі множинного підходу подія $C$ знаходиться шляхом перетину множин елементарних подій, що становлять події $A$ і $B$, тобто $C = A \bigcap B$. Вона включає елементарні події, які сприятливі і для події ***A,*** і для події ***B.***

Добуток несумісних подій є неможлива подія. Множина елементарних подій неможливої події є пуста множина.

***Віднімання. Різницею*** двох подій $A$ і $B$ називається така подія $C = A - B$, яка настає тоді, коли настає подія ***A*** і не настає подія ***B***. На основі множинного підходу подія $C$ знаходиться шляхом операції віднімання множин $C = A \setminus B$. Вона включає елементарні події, які є елементами множини ***A***, але не є елементами множини ***B.***

***Протилежною подією*** $\overline{A}$ для події $A$ називається подія, яка завжди наступає, коли не наступає подія $A$. В множинному підході подія $\overline{A}$ ***розраховується як*** доповнення $A$ до $\Omega$. Вона складається з таких елементарних подій, що не входять до події $A$.

Протилежні події $A$ і $\overline{A}$ несумісні й утворюють повну групу подій. Для протилежних подій мають місце рівняння

$$A\overline{A} = \varnothing, \qquad A + \overline{A} = \Omega. \tag{1.5}$$

***Операції над подіями*** зручно ілюструвати за допомогою діаграм (рис. 1.2), на яких простір елементарних подій **Ω** зображено у вигляді прямокутника, а події – у вигляді кругів (круги Ейлера).

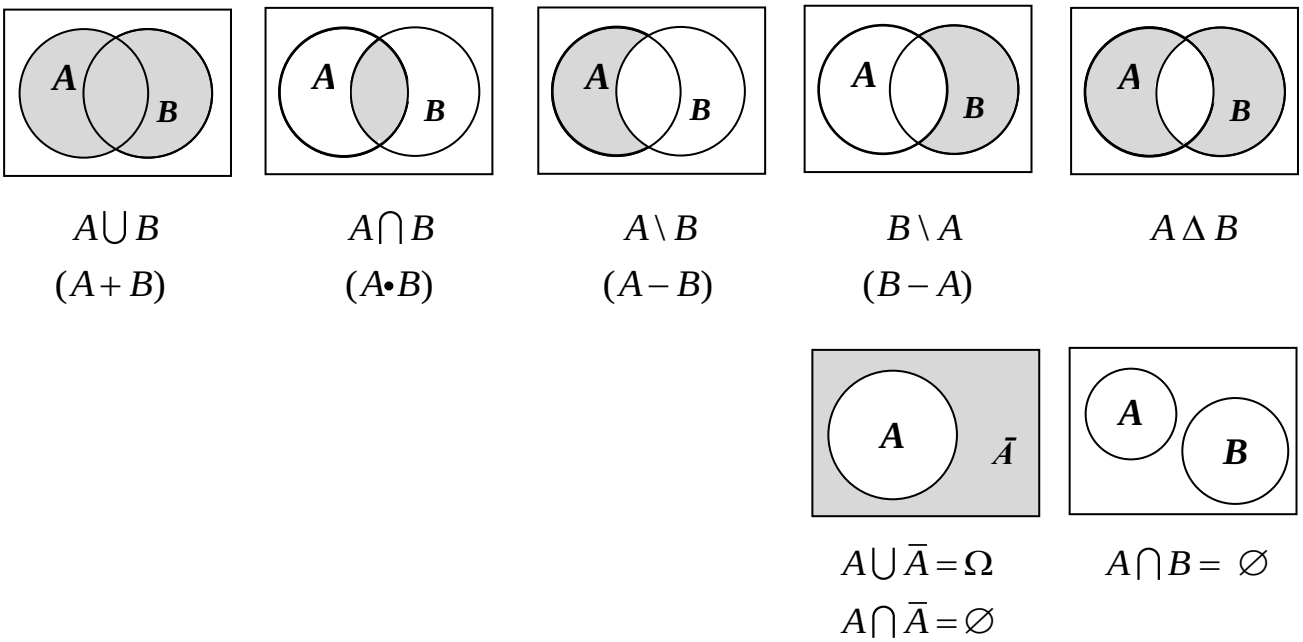



Рис. 1.2. Операції над подіями

Властивості операцій над подіями:

1. $A \bigcup \bar{A} = \Omega, \qquad A \bigcap \bar{A} = \varnothing;$
2. $\bar{A} = \Omega \setminus A;$
3. $A \bigcup \varnothing = A, \qquad A \bigcap \varnothing = \varnothing;$
4. $A \bigcup \Omega = \Omega, \qquad A \bigcap \Omega = A;$
5. $A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A;$
6. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C);$
7. $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C);$
8. $(A \bigcap B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C);$
9. $(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C);$
10. $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcap \bar{B}, \quad \overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$ (правило де Моргана).

Події $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ утворюють ***повну групу подій*** **(гіпотез),** якщо їх об’єднанням є достовірна подія і всі вони попарно несумісні, тобто поява кожної з них виключає появу довільної іншої.

В табл. 1.2 наведено переклади з мови опису випробувань на мову теорії множин.

*Таблиця 1.2*

**Відповідність позначень подій ї операцій при опису випробувань та в теорії множин**

| Позначення | Терміни | |
|---|---|---|
| | **Традиційна мова опису досліду з випадковими подіями** | **Мова теорії множин** |
| $\Omega$ | Простір елементарних подій, достовірна подія. | Універсальна множина |
| $\omega_i$ | Елементарна подія | Елемент множини |
| $A, B$ | Випадкові події $A, B$ | Підмножини $A, B$ |
| $A+B$ | Сума випадкових подій $A, B$ | Об'єднання множин $A \bigcup B$ |
| $AB$ | Добуток випадкових подій $A, B$ | Перетин множин $A \bigcap B$ |
| $A-B$ | Різниця випадкових подій $A, B$ | Різниця множин $A \setminus B$ |
| $\overline{A}$ | Подія протилежна для $A$ | Доповнення множини $A$ |
| $\varnothing$ | Неможлива подія | Пуста множина |

Необхідно пам'ятати, що розглянуті операції можна проводити над подіями, які належать одному й тому ж простору елементарних подій $\Omega$.

***Приклад 1.2.*** Надано схему електричного ланцюга (рис. 1.3).

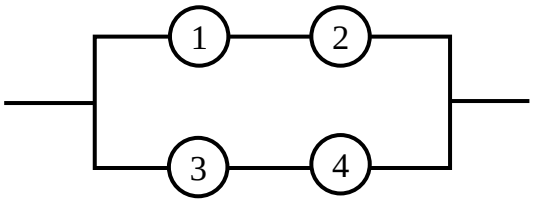



Рис. 1.3. Схема електричного ланцюга

Виразіть подію *A,* яка полягає в тому, що струм через ланцюг буде проходити.

***Розв'язання.*** Позначимо через $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ події, які полягають в тому, що відповідні елементи електричного ланцюга працюють.

Струм через ланцюг буде проходити, якщо працюють елементи 1 і 2, або елементи 3 і 4, тому

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4).$$

***Приклад 1.3.*** Одне й теж повідомлення передається двічі.

Подія *A – отримання повідомлення при першій передачі*;

Подія *B – отримання повідомлення при другій передачі.*

Записати подію, яка полягає в тому, що:

1) повідомлення буде отримане принаймні один раз (подія *C*);

2) повідомлення буде отримане рівно один раз (подія *D*);

3) повідомлення не буде отримане (подія *E*).

***Розв'язання.***

1) Якщо повідомлення буде отримане принаймні один раз, то це означає, що воно було отримано або при першій передачі, або при другій, або при обох, тобто

$$C = A \cup B.$$

2) Повідомлення буде отримане рівно один раз тільки тоді, коли при першій передачі воно отримано, а при другій – ні, або при першій не отримано, а при другій отримано, тобто

$$D = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

3) Якщо повідомлення не буде отримане, то це означає, що воно не буде отримане при обох передачах, тобто

$$E = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

**Умовна ймовірність.** Подальшим розвитком поняття ймовірності є умовна ймовірність. Ймовірність події *A,* яка розраховується при умові, що відбулася інша подія *B*, називається ***умовною*** і позначається як $P(A|B)$. ***Безумовною*** ймовірністю події *A* називається ймовірність $P(A)$, при розрахунку якої невідомо відбулася інша подія *B* або ні.

Умовна ймовірність $P(A|B)$ визначається за формулою

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1.6)$$

Аналогічно для умовної ймовірності $P(B|A)$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1.7)$$

Події $A$ і $B$ називаються ***статистично незалежними***, якщо

$$P(A|B)=P(A) \quad \text{і} \quad P(B|A)=P(B). \qquad (1.8)$$

При невиконанні умов (1.8) події називаються ***статистично залежними***. Для статистично залежних подій ймовірність однією з них залежить від того, відбулася інша подія, чи ні.

***Приклад 1.4.***

У шухляді міститься 3 транзистори із яких 1 є бракованим. Навмання із шухляди беруться два транзистори. Обчислити:

1) ймовірність того, що другий транзистор несправний;

2) ймовірність того, що другий транзистор несправний, якщо відомо, що перший транзистор справний.

***Розв'язання.*** Нехай $a, b$ – справні транзистори, $c$ – несправний транзистор. Дослід – витягаються два транзистори.

Подія $B$ – другий транзистор несправний. Простір елементарних подій досліду включає $A_3^2=3!/(3-2)!=6$ елементів: $ab, bc, ac, ba, ca, cb$. Цій події $B$ сприяють елементарні події $ac$, $bc$. Згідно класичного визначення ймовірність того, що другий транзистор несправний, дорівнює

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Відомо $A$ – перший транзистор справний. Кількість елементарних подій, що сприяють $B$ за умови $A$, дорівнює 1 ($ac$). Розмір простору елементарних подій за умови $B$ дорівнює 2 ($ac$, $bc$). Тоді

$$P(B|A)=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, події $A$ і $B$ є статистично залежними.

## 1.5. Моделювання випадкових подій та оцінка їх ймовірностей

Програмна імітація випадкових подій зводиться до генерації деякої стандартної (базової) випадкової послідовності з наступним її функціональним перетворенням.

У разі дискретного моделювання як базову послідовність беруть послідовність $\{x_i\} = x_0, x_1, \cdots, x_n$, яка являє собою реалізацію незалежних, рівномірно розподілених на інтервалі від 0 до 1 випадкових чисел $\{r_i\} = r_0, r_1, \cdots, r_n$.

У системах програмування зазвичай існують стандартні підпрограми – так звані датчики випадкових чисел, які дозволяють сформувати стандартну (базову) псевдовипадкову послідовність, а також підпрограми, що формують послідовності з іншими законами розподілення.

### Моделювання простої випадкової події

**Випадкова подія *A*** задається імовірністю її появи $P_A$.

Моделювання полягає в тому, що задане значення ймовірності події зіставляють із базовою випадковою послідовністю $x_i$, що імітує рівномірний розподіл $f(x)$ на інтервалі [0,1]. При цьому подію ***A*** визначають як подію, яка за обраного значення випадкової величини задовольняє нерівність

$$x_i \le P_A. \tag{1.9}$$

У цьому випадку імовірність події визначається як (рис. 1.4)

$$P(x_i \le P_A) = \int_0^{P_A} f(x)dx = \int_0^{P_A} dx = P_A. \tag{1.10}$$

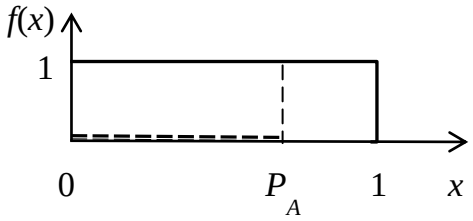



Рис. 1.4. Ймовірність події

Протилежна подія $\bar{A}$ полягає в тому, що $x_i > P_A$.

**Завдання. Моделювання простої випадкової події**

Виконати моделювання випадкової події $A$ та розрахувати ймовірність її появи та ймовірність її відсутності.

Вихідні дані**:**

$P_A$ – ймовірність події $A$;

$N$ – кількість випробувань.

**Процедура моделювання** передбачає вибір значень рівномірно розподілених величин $x_i$ та порівняння їх з $P_A$. Подія є закінченням випробування, якщо умова (1.9) $x_i \le P_A$ виконується.

Відповідно до схеми алгоритму (рис. 1.5) спочатку задається значення імовірності появи події $P_A$ та число випробувань $N$.

Потім виконується звертання до підпрограми ***rand***, що видає випадкове число ***r = rand*** з рівномірним розподілом на інтервалі [0,1].

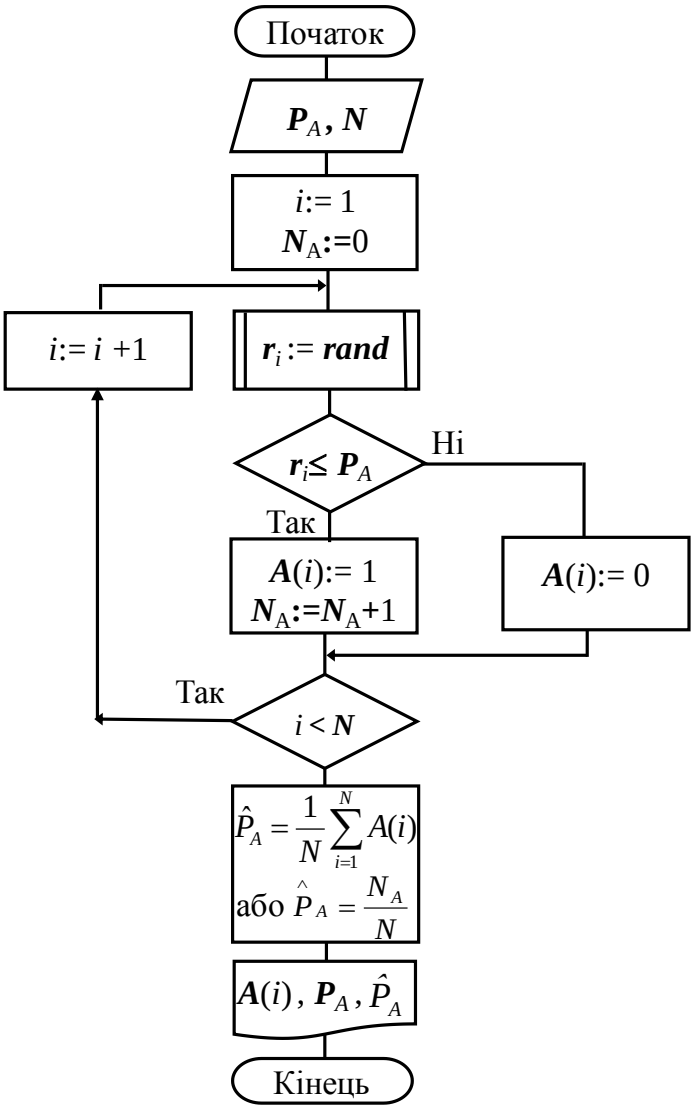



Рис. 1.5. Схема алгоритму моделювання події з заданою ймовірністю

Це число $\boldsymbol{r}$ порівнюється із заданою імовірністю $P_A$ .

Якщо подія $\boldsymbol{A}$ в $i$-му випробуванні відбулася (тобто $r_i \le P_A$), то це фіксується (в масив $\boldsymbol{A}(i)$ записується одиниця) і в лічильник подій $N_A$ додається одиниця. Також фіксується відсутність події (в масив $\boldsymbol{A}(i)$ записується нуль), якщо $r_i > P_A$.

Оцінка ймовірності події визначається частотою настання події $A$, тобто

$$\hat{P}_A = \frac{N_A}{N}, \tag{1.11}$$

де $N_A$ – кількість випадків настання події $\boldsymbol{A}$; $N$ – кількість випробувань.

## Моделювання повної групи подій

**Визначаються події** $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, A_k$, кожна подія має відповідну ймовірність настання $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_m, \ldots,\ P_k$. При цьому $\boldsymbol{A}_m$ визначаємо як подію, яка полягає у тому, що обране значення випадкової величини задовольняє нерівність

$$l_{m-1} < x_i \le l_m \qquad \text{і} \qquad l_m = \sum_{i=1}^{m} P_i . \tag{1.12}$$

У цьому випадку ймовірність події $\boldsymbol{A}_m$ дорівнює $P_{A_m} = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = P_m$, оскільки $l_m - l_{m-1} = P_m$.

**Процедура моделювання** передбачає послідовне порівняння випадкових чисел $r_i$ зі значенням $P_m$ і $P_{m\text{-}1}$ (рис. 1.6).

Подія $\boldsymbol{A}_m$ є закінченням випробування, якщо умова (1.12) виконується.

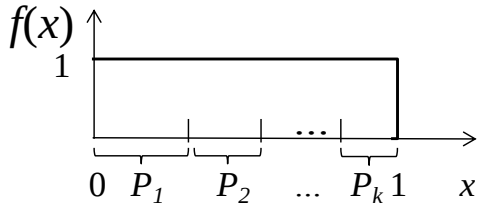



Рис. 1.6. Ймовірність у повній групі подій

## Моделювання сумісних незалежних подій

**Незалежні випадкові події, наприклад *A* і *B*,** мають імовірності появи відповідно $P_A$ і $P_B$.

Можливими наслідками сумісних випробувань будуть чотири події:

$$AB\ (A \text{ і } B),\quad \overline{A}B\ (\text{ні } A \text{ і } B),\quad A\overline{B}\ (A \text{ і ні } B),\quad \overline{A}\,\overline{B}\ (\text{ні } A \text{ і ні } B)$$

з ймовірностями відповідно

$$P_A P_B,\qquad (1-P_A)P_B,\qquad P_A(1-P_B),\qquad (1-P_A)(1-P_B). \tag{1.13}$$

Ці чотири події складають повну групу подій, тобто

$$P_A P_B + P_{\overline{A}} P_B + P_A P_{\overline{B}} + P_{\overline{A}} P_{\overline{B}} = 1. \tag{1.14}$$

За такої постановки задача моделювання зводиться до перевірки умови (1.12)

$$l_{m-1} < x_i \le l_m. \tag{1.15}$$

## Моделювання сумісних залежних подій

**Сумісно залежні випадкові події, наприклад *A* і *B*,** мають імовірності настання відповідно $P_A$ і $P_B$. Вважається, що одна з умовних ймовірностей, наприклад, умовна ймовірність $P(B|A)$ настання події ***B***, за умови, що подія ***A*** трапилася, задається.

Для моделювання визначаються імовірності можливих подій

$$AB,\quad \overline{A}B,\quad A\overline{B},\quad \overline{A}\,\overline{B}. \tag{1.16}$$

Враховуючи, що таки події утворюють повну групу подій, тобто

$$P_A P_B + P_{\overline{A}} P_B + P_A P_{\overline{B}} + P_{\overline{A}} P_{\overline{B}} = 1, \tag{1.17}$$

отримуємо:

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A),$$

$$P(A\overline{B}) = P(A)[1 - P(B\,|\,A)],$$

$$P(\overline{A}B) = [1 - P(A)]P(B\,|\,\overline{A}),$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B\,|\,\overline{A}].$$

Отже, задача моделювання сумісних залежних подій зводиться до перевірки умови (1.12) $l_{m-1} < x_i \le l_m$.

Але для моделювання треба знайти умовну ймовірність $P(B|\overline{A})$.

**Знаходження** $P(B|\overline{A})$ при відомих $P(B|A)$, $P_A$ і $P_B$.

Безумовна ймовірність події $B$ $\rightarrow$ $P(B) = P(BA) + P(B\overline{A})$, або $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$ – коли одночасно є або не має події *A*.

Ймовірність $P(B)$ можна записати як $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$, звідси знайдемо $P(B|\overline{A})$

$$P(B|\overline{A}) = [P(B) - P(A)P(B|A)] / P(\overline{A})$$

і остаточно

$$P(B|\overline{A}) = [P(B) - P(A)P(B|A)] / [1 - P(A)]. \qquad (1.18)$$

**Література до теми 1:** [1–3], [5], [7–13], [17].

## *Контрольні запитання*

1. Запишіть вираз статистичного визначення ймовірності і поясніть його зміст.
2. Дайте визначення елементарної та складеної події, простору елементарних подій і наведіть їх приклади.
3. Якими властивостями володіють елементарні події випробування, що називається схемою випадків?
4. Запишіть вираз класичного визначення ймовірності, а також вкажіть її властивості.
5. Дайте визначення основних операцій над випадковими подіями та їх геометричну інтерпретацію.
6. Яка ймовірність називається умовною? Як її можна визначити на основі статистичного, класичного і геометричного визначень ймовірності?
7. Які події називаються статистично незалежними, а які несумісними?

# Тема 2. Основні теореми теорії ймовірностей

## 2.1. Формула повної ймовірності

На практиці подія може з'явитись як випадковий наслідок інших подій, які мають назву «причина». Подія характеризується умовними ймовірностями при умові, що з'явились відповідні причини. При цьому причини також є випадковими і з'являються з відповідними ймовірностями. При вирішенні задач часто виникає необхідність визначити ймовірність появи події, якщо відомі причини, які до неї можуть призвести.

***Приклад 2.1.*** Подія $A$ – відмова транзистору. *Причини, ймовірності причин* і відповідні *умовні ймовірності* відмови транзистора наведено в табл. 2.1

*Таблиця 2.1*

**Апріорні дані про відмови транзисторів**

| Причина відмови | Имовірність причини $P(H_i)$ | Умовна ймовірність відмови $P(A\|H_i)$ |
|---|---|---|
| 1. Локальний перегрів | 0,40 | 0,80 |
| 2. Попадання вологи | 0,20 | 0,75 |
| 3. Обгорання дротів | 0,25 | 0,90 |
| 4. Інші причини | 0,15 | 0,60 |

Причини, які є несумісними і створюють повну групу, називають ***гіпотезами*** та позначаються як $H_i,\ i=\overline{1,N}$. Тому сума ймовірностей $H_i,\ i=\overline{1,N}$ дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^{N} P(H_i)=1. \qquad (2.1)$$

Взаємозв'язок подій і їх можливих причин можна представити у вигляді ***графу можливих наслідків*** (рис. 2.1), де $P(A)$, $P(B)$ – безумовні ймовірності подій $A$, $B$; $P(A|H_i)$, $P(B|H_i)$, $i=\overline{1,N}$ – умовні ймовірності подій $A$, $B$, за умови що мають місце гіпотези $H_i,\ i=\overline{1,N}$.

Передбачається, що ймовірності кожної із гіпотез $P(H_i),\ i=\overline{1,N}$ і умовні ймовірності події $A$ при кожній із гіпотез $P(A\,|\,H_i),\ i=\overline{1,N}$ відомі.

Необхідно визначити безумовну (повну) ймовірність $P(A)$ події $A$ з врахуванням усіх гіпотез.

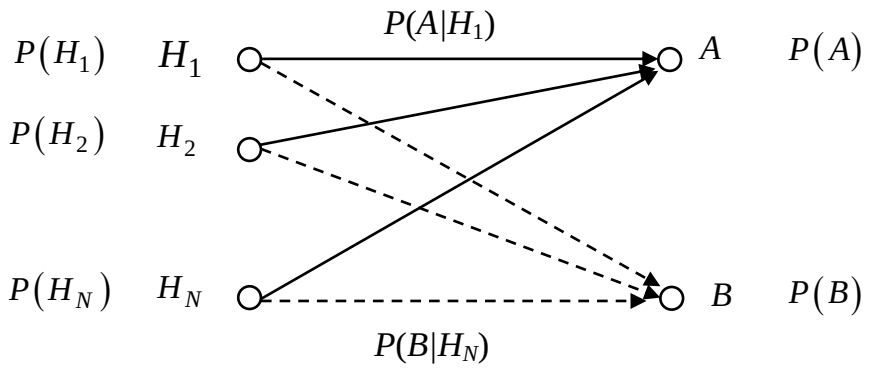



Рис. 2.1. Граф можливих наслідків подій

**Формула повної ймовірності**

Формула повної ймовірності є узагальненням теорем додавання і множення ймовірностей.

**Постановка задачі**

*Нехай випадкова подія A може відбуватись лише сумісно з однією із несумісних між собою подій $H_1, H_2, ..., H_N$ , що утворюють повну групу*

$$\left( \bigcup_{i=1}^{N} H_i = \Omega,\ H_i \cap H_j = \varnothing \quad при\ \ i \neq j \right), \tag{2.2}$$

*які називають гіпотезами, $P(H_i) > 0$, ($i$=1,2,...,$N$).*

*Тоді ймовірність події A обчислюють за формулою*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i) P(A \mid H_i). \tag{2.3}$$

Повна ймовірність $P(A)$ події $A$ дорівнює сумі добутків ймовірностей гіпотез $P(H_i)$ на умовні ймовірності $P(A|H_i)$ події $A$ при кожній із гіпотез $H_i$ , $i = \overline{1, N}$ .

***Приклад 2.2.*** Подія $A$ – відмова транзистору. Причини, ймовірності причин і відповідні умовні ймовірності відмови транзистора наведені в табл. 2.1

Розрахувати ймовірність відмови транзистору за даними з табл. 2.1.

***Розв'язання.*** Безумовна (повна) ймовірність $P(A)$ події відмови транзистора $A$ з врахуванням усіх гіпотез $H_i$ , $i = \overline{1,4}$ дорівнює

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i) P(A \mid H_i), \quad P(A)=0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}75+0{,}25\cdot 0{,}9+0{,}15\cdot 0{,}6=0{,}785.$$

## 2.2. Формула Байєса (теорема гіпотез)

Ця теорема є основною під час вирішення задачі оптимальної обробки сигналів за наявністю завад.

**Постановка задачі**

Нехай здійснилась подія $A$, причиною якої може бути одна з несумісних гіпотез $H_i$, $i=\overline{1,N}$ . ***При цьому яка саме відбулася гіпотеза невідомо.*** Відомі безумовні ймовірності гіпотез $P(H_i)$ та умовні ймовірності $P(A|H_i)$ події $A$ при кожній із гіпотез $H_i$, $i=\overline{1,N}$. Необхідно визначити ймовірність того, що гіпотеза $H_i$ є причиною події $A$, яка відбулася.

Ймовірність того, що гіпотеза $H_i$ є причиною події $A$, яка відбулася, є умовна ймовірність $P(H_i|A)$ появи гіпотези $H_i$ при умові, що подія відбулася (якщо $H_i$ з'являється в досліді, то вона є причиною $A$). На основі теореми множення ймовірностей

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i\,|\,A)=P(H_i)P(A\,|\,H_i).$$

Звідки

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{P(A)}. \qquad (2.4)$$

**Формулу Байєса виходить після** застосування формулу повної ймовірності (2.3) і має вигляд

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{\sum_{i=1}^{N}P(H_i)P(A\,|\,H_i)}. \qquad (2.5)$$

Умовна ймовірність гіпотези $P(H_i\,|A)$ дорівнює відношенню ймовірності сумісного здійснення гіпотези $H_i$ і події $A$ до повної ймовірності події $A$.

Ймовірності гіпотез $P(H_i)$, $i=\overline{1,N}$ до появи події $A$ (до проведення досліду) називають ***апріорними***. Ймовірності гіпотез $P(H_i\,|\,A)$, $i=\overline{1,N}$, які отримані за формулою Байєса після появи події $A$ (після проведення досліду), називають ***апостеріорними.***

Оскільки гіпотези $H_i$ , $i=\overline{1,N}$ є несумісними і складають повну групу, то для апостеріорних ймовірностей для $P(H_i\,|\,A)$, $i=\overline{1,N}$ також справедливий висновок теореми складання ймовірностей

$$\sum_{i=1}^{N}P(H_i\,|\,A)=1. \qquad (2.6)$$

Формулу Байєса використовують для прийняття рішення про те, з якою з гіпотез необхідно пов'язувати появу події *A*. Для рішення необхідно обчислити умовні ймовірності $P(H_i \mid A),\ i=\overline{1,N}$ при умові, що відбулася подія *A*. Гіпотеза $H_i$, яка має максимальну ймовірність, визначається в якості причини події *A*.

***Приклад 2.3.*** Визначити найбільш ймовірну причину відмови транзистору за даними, які наведені в табл. 2.1.

***Розв'язання.*** Безумовна (повна) ймовірність *P*(*A*), яка розрахована у попередньому *Прикладі 2.2*, дорівнює *P*(*A*)=0,785.

Використовуючи формулу Байєса розрахуємо апостеріорні ймовірності гіпотез $P(H_i \mid A),\ i=\overline{1,N}$

$$P(H_1 \mid A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}8}{0{,}785}=0{,}408;$$

$$P(H_2 \mid A)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}75}{0{,}785}=0{,}191;$$

$$P(H_3 \mid A)=\frac{0{,}25\cdot 0{,}9}{0{,}785}=0{,}287;$$

$$P(H_4 \mid A)=\frac{0{,}15\cdot 0{,}6}{0{,}785}=0{,}114.$$

Аналізуючи результат можна зробити висновок, що найбільш ймовірна причина відмови транзистору є гіпотеза $H_1$ – локальний перегрів.

***Приклад 2.4.*** Два стрільці незалежно один від одного роблять по ***одному пострілу*** по мішені. Ймовірність влучення першого – $p_1$=0,8, другого – $p_2$=0,4.

Відомо, що є ***одне влучення***.

Знайдіть ймовірність того, що в мішень влучив ***перший стрілець***.

***Розв'язання.*** До початку випробувань можливі такі ***гіпотези***:

$H_1$ – *жоден стрілець не влучив в мішень;*

$H_2$ – *перший стрілець влучив, другий – ні;*

$H_3$ – *другий стрілець влучив, перший – ні;*

$H_4$ – *обидва стрільці влучили в мішень.*

Позначимо ***події***:

$A_1$ – *перший стрілець влучив в мішень;*

$A_2$ – *другий стрілець влучив в мішень;*

*A* – *є одне влучення.*

Події $A_1$ і $A_2$ незалежні, тому

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 p_2;$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = (1-p_1)(1-p_2).$$

Для кожної гіпотези будемо мати

$$H_1 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2, \quad P(H_1) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12;$$

$$H_2 = A_1 \cap \bar{A}_2, \quad P(H_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48;$$

$$H_3 = \bar{A}_1 \cap A_2, \quad P(H_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08;$$

$$H_4 = A_1 \cap A_2, \quad P(H_4) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32.$$

Умовні ймовірності випадкової події $A$ дорівнюють:

$$P(A|H_1) = 0;$$

$$P(A|H_2) = 1;$$

$$P(A|H_3) = 1;$$

$$P(A|H_4) = 0.$$

За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i)P(A|H_i)$ маємо:

$$P(A) = 0{,}12 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1 + 0{,}32 \cdot 0 = 0{,}56.$$

За формулою Байєса (2.5.)

$$P(H_2 | A) =$$
$$= \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4)} =$$
$$= \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1 + 0{,}32 \cdot 0} = \frac{0{,}48}{0{,}56} = \frac{6}{7}.$$

***Приклад 2.5.*** На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю $\boldsymbol{p}$ поступає суміш корисного сигналу з завадою $\boldsymbol{u=s+v}$, а з ймовірністю $(1-\boldsymbol{p})$ – тільки одна завада $\boldsymbol{u=v}$. Якщо поступає корисний сигнал разом з завадою, то пристрій реєструє наявність сигналу з ймовірністю $\boldsymbol{p_1}$, якщо тільки завада – з ймовірністю $\boldsymbol{p_2}$.

Відомо, що пристрій *виявив наявність* якогось сигналу.

Знайти ймовірність того, що в складі вхідного сигналу є корисний сигнал.

***Розв'язання.*** До початку випробувань можливі такі гіпотези:
$H_1$ *– надходить суміш корисного сигналу* $\mathbf{s}$ *і завади , тобто* $u=\mathbf{s}+v$ ;
$H_2$ *– надходить тільки завада* $u=v$ .
Апріорі відомо, що:

$P(H_1)= p$; $P(H_2)= (1- p)$.

Позначимо $\boldsymbol{A}$ – подія наявності корисного сигналу.
Умовні (**апостеріорні** ) ймовірності випадкової події $A$:

$$P(A|H_1) = p_1;$$
$$P(A|H_2) = p_2.$$

За формулою повної ймовірності (2.3) маємо:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

За формулою Байєса (2.5)

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{pp_1}{pp_1 + (1-p)p_2}.$$

## 2.3. Теорема о повторенні дослідів. Формула (схема) Бернуллі

В теорії передачі повідомлень, під час контролю якості продукції, в теорії стрільби тощо виникає задача визначення ймовірності появи деякої події $A$ в результаті серії дослідів, в кожному з яких ця подія може здійснюватись, а може і не здійснюватись. Простіше всього така задача вирішується тоді, коли досліди є незалежними, тобто ймовірність того або іншого результату досліду не залежить від того, які результати мали інші досліди. Спосіб рішення подібних задач надає теорема о повторенні дослідів (формула Бернуллі).

**Постановка задачі**

***Схема Бернуллі*** – це послідовність незалежних друг від другу дослідів з двома можливими наслідками. У кожному досліді подія $A$ може здійснюватись з ймовірністю $p$, а може і не здійснюватись $\bar{A}$ з ймовірністю $q = 1- p$. Необхідно визначити ймовірність того, що в серії з $N$ дослідів (рис. 2.2) подія $A$ з'явиться рівно $K$ разів.

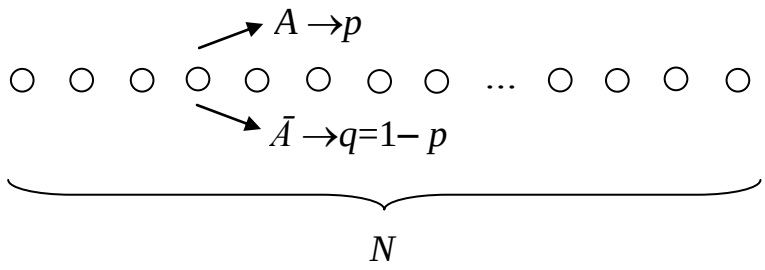



Рис. 2.2. Схема Бернуллі

***Формула Бернуллі доводиться за методом*** індукції, в результаті визначається формула для ***ймовірності того,*** що в серії з $N$ дослідів подія $A$ з'явиться рівно $K$ разів

$$P_N(K) = C_N^K p^K q^{N-K}, \tag{2.7}$$

де $C_N^K$ – комбінація з $N$ по $K$; $p$ – ймовірність появи події $A$; $q$ – ймовірність її відсутності.

Ймовірності $P_N(K)$ називаються також **біноміальними.**

Очевидно, що

$$\sum_{K=0}^{N} C_N^K p^K q^{N-K} = 1. \tag{2.8}$$

Користуючись розглянутою теоремою можна обчислити ймовірність появи події $A$ в $N$ дослідах не менше ніж $M$ разів. Оскільки події, які полягають у появі події $A$ в серії з $N$ дослідів $M, M+1, \ldots, N$ разів, є несумісними, то

$$P_N(K \geq M) = P_N(M) + P_N(M+1) + \ldots + P_N(N) = \sum_{K=M}^{N} C_N^K p^K q^{N-K}. \tag{2.9}$$

Аналогічно ймовірність появи події $A$ в $N$ дослідах не більше ніж $M$ разів дорівнює

$$P_N(K \leq M) = \sum_{K=0}^{M} C_N^K p^K q^{N-K}. \tag{2.10}$$

Ймовірність того, що в $N$ випробуваннях успіх настане не менше $m_1$ і не більше $m_2$ разів, дорівнює

$$P_N(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_N(m). \tag{2.11}$$

Ймовірності $P_N(K)$ при даному $N$ спочатку зростають при зростанні $K$ від 0 до деякого значення $K_0$, а потім зменшуються при зростанні $K$ від $K_0$ до $N$. Тому $K_0$ називається **найімовірнішим числом успіхів в** $N$ випробуваннях. Це число дорівнює цілій частині числа $(N+1)p$. Якщо число $(N+1)p$ ціле, то найімовірнішим числом успіхів є також число $K_0-1$ з тією же ймовірністю.

У випадку, коли число випробувань $N$ велике, а ймовірність успіху $p$ мала (*як правило* $p < 0{,}1$; $Npq \le 9$), замість формули Бернуллі застосовують наближену формулу Пуассона (**закон появи рідких подій**)

$$P_N(K) = C_N^K p^K q^{N-K} \quad \to \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}, \qquad \text{де} \quad \lambda = Np. \tag{2.12}$$

***Приклад 2.6.*** Прийнята кодова комбінація з 5 символів. Ймовірність помилки при прийомі одного символу $q$ =0,1. Визначити ймовірність того, що:

– усі символи прийняті вірно;

– при прийомі має місце одна помилка;

– отримано не більше однієї помилки.

***Розв'язання.***

Ймовірність того, що усі символи прийняті вірно,

$$P_5(K=5) = C_5^5 p^5 q^0 = p^5 = (1-0{,}1)^5 = 0{,}59.$$

Ймовірність того, що при прийомі має місце одна помилка,

$$P_5(K=4) = C_5^4 p^4 q = 5p^4 q = 5(1-0{,}1)^4 0{,}1 = 0{,}325.$$

Ймовірність того, що отримано не більше однієї помилки,

$$P_5(K \ge 4) = P_5(K=4) + P_5(K=5) = 0{,}915.$$

Формула $P_N(K) = C_N^K p^K q^{N-K}$ має незручності при великих $N$. В цьому випадку для підрахунку ймовірності $P_N(K)$ використовують наближені формули. Якщо $N$ є великим, $p$ – малим, а $Np=\lambda$ має скінчене значення, то використовують наближену формулу Пуассона (2.12)

$$P_N(K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}.$$

**Випадок послідовності випробувань із різними ймовірностями.** У практичній діяльності не завжди у ***n*** незалежних випробуваннях ймовірності настання події *A* однакові. Наприклад, вони можуть дорівнювати $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ймовірності ненастання події *A* відповідно: $q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2; \ldots$; $q_n = 1 - p_n$.

У цьому випадку використовують твірну функцію

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k z). \qquad (2.13)$$

Потрібна ймовірність $P_n(k = m)$ дорівнює коефіцієнту при $z^m$ у (2.13).

## 2.4. Завдання для самостійного виконання

**Завдання 1**. Припустимо, що ймовірність виходу літака на заданий об'єкт (подія *A*) на великих висотах дорівнює 0,8, на середніх – 0,95 і на малих – 0,6.

Визначити ймовірність *P*(*A*) виходу літаків на заданий об'єкт, якщо на малих висотах передбачається виконати 70 % всіх польотів, на середніх – 10 % і на великих – 20 %.

***Пояснення***.

Подія *A* – вихід літака на заданий об'єкт.

Гіпотези:

$H_1$ – літак виходить на заданий об'єкт на малій висоті;

$H_2$ – літак виходить на заданий об'єкт на середній висоті;

$H_3$ – літак виходить на заданий об'єкт на великій висоті.

Визначаються: апріорні ймовірності гіпотез $P(H_i)$, $i$=1,2,3.

Визначаються: умовні ймовірності $P(A|H_i)$ виходу на заданий об'єкт при зазначених гіпотезах.

Визначається: ймовірність *P*(*A*) виходу літака на заданий об'єкт за формулою повної ймовірності:

**Завдання 2.** Відомо, що на маршруті польоту з пункту *M* в пункт *N* ймовірність того, що вітер буде:

– зустрічним – 0,6;

– попутним – 0,3;

– відсутній – 0,1.

За статистикою відомо, що якщо літак своєчасно вилітає з пункту *M*, то прибуває в пункт *N* **за розкладом** з ймовірністю:

– 0,5 при зустрічному вітрі;

– 0,8 при попутному вітрі;

– 0,9 при штилі.

Відомо, що в пункт $N$ літак реально прибув точно **за розкладом** (подія $A$). Знайти ймовірності того, що при цьому вітер був зустрічний, попутний і що вітру не було.

***Пояснення:***

Подія $A$ – літак прибув точно за розкладом.

Можливі гіпотези:

$H_1$ – вітер зустрічний;

$H_2$ – вітер попутний;

$H_3$ – вітру немає.

Визначаються: апріорні ймовірності гіпотез $P(H_i)$, $i$=1,2,3.

Визначаються: умовні ймовірності $P(A|H_i)$ прибуття літака в пункт $N$ за розкладом при зазначених гіпотезах.

За формулою Байєса розраховуються ймовірності зустрічного, попутного вітру і штилю.

**Література до теми 2:** [1–3], [5], [7–13], [17].

## *Контрольні запитання*

1. Які події називаються гіпотезами? Запишіть формулу для розрахунку повної ймовірності події і поясніть її.
2. Які ймовірності називаються апріорними, а які апостеріорними? Запишіть формулу Байєса і поясніть її.
3. Яке випробування називається схемою Бернуллі? Як розраховується ймовірність появи події не менше заданої кількості разів в серії експериментів?
4. Як визначається простір елементарних подій випробування, яке складається з двох експериментів? Надайте його геометричну інтерпретацію.
5. Надайте геометричну інтерпретацію добутку подій, які відбуваються в різних експериментах складеного випробування.
6. Як розраховується ймовірність суми подій, які відбуваються в різних експериментах складеного випробування?

# Розділ 2. Випадкові величини

## Тема 3. Закони розподілу. Числові характеристики. Моделювання випадкових величин

### 3.1. Випадкові величини. Закони розподілу

Величина ***X*** називається ***випадковою***, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення, яке наперед невідомо. Випадкові величини позначаються великими літерами латинського алфавіту ***X, Y, Z***,…, а конкретні значення, які вони приймають, малими ***x, y, z***,… . Те, що у випробуванні випадкова величина $X$ прийняла значення $x$, позначається $X = x$.

Співвідношення, яке встановлює в той чи іншій формі залежність між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями називається **законом розподілу ймовірностей**.

Залежність між ймовірностями $p(x_i)$ і відповідними значеннями дискретної випадкової величини $x_i$ називається ***рядом ймовірностей***. Вона може бути задана у вигляді ***таблиці*** (табл. 3.1)***, графіка*** (рис. 3.1) або ***аналітичного виразу*** $p(x_i) = \varphi(x_i)$. При цьому множина можливих значень величини $X$ є впорядкованою, тобто $j > i$, якщо $x_j > x_i$.

***Приклад 3.1.***

Закон розподілу випадкової величини $X$ має вигляд (табл. 3.1)

*Таблиця 3.1*

**Заданий ряд ймовірностей**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(x_i)$ | 0,504 | 0,398 | 0,092 | 0,006 |

многокутник розподілу має вигляд (рис. 3.1).

***Властивості ряду ймовірностей***

1. Ймовірності $p(x_i)$, $i = \overline{1,n}$ приймають значення

$$0 \le p(x_i) \le 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

2. Те, що випадкова величина $X$ набула конкретного значення $X = x_i$,

можна розглядати як елементарну подію $\omega_i$. Такі події є несумісними і складають повну групу подій, тому

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1. \tag{3.2}$$

3. Ймовірність $P(x_k \le X < x_l)$ того, що дискретна випадкова величина $X$ прийме значення на інтервалі $x_k \le X < x_l$, визначається за формулою

$$P(x_k \le X < x_l) = \sum_{i=k}^{l-1} p_i. \tag{3.3}$$

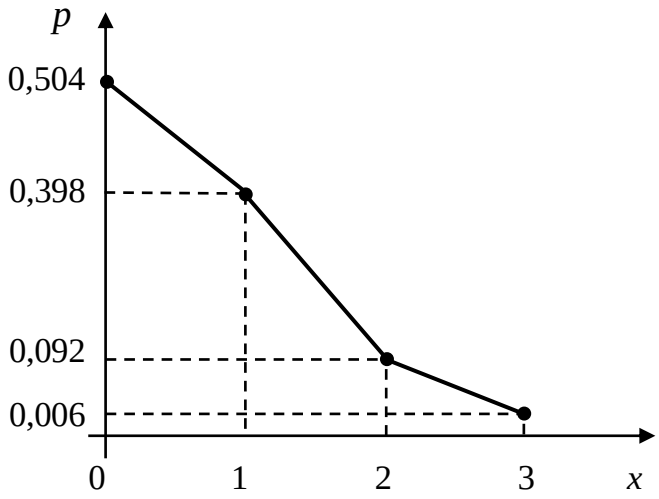



Рис. 3.1. Многокутник розподілу

Закон розподілу ймовірностей можна подати також в формі ***функції розподілу ймовірностей***, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин.

Ф***ункцією розподілу ймовірностей*** називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова подія $X$ прийме значення, що не перевищує $x$

$$F(x) = P(X \le x). \tag{3.4}$$

Для дискретної випадкової величини згідно формули (3.3) значення $F(x)$ може бути розраховано за формулою

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=1}^{l} p(x_i), \tag{3.5}$$

де $l$ – номер максимального числа $x_l$, яке задовольняє вимозі $x_l \le x$.

Графік функції розподілу для дискретної випадкової величини, що задана рядом ймовірностей (табл. 3.1) і графіком рис. 3.1 показано на рис. 3.2.

Зверніть увагу на те, що графік функції розподілу ймовірностей $F(x)$ має розриви, а

$$F(x) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i) = 1, \tag{3.6}$$

Оскільки функція розподілу $F(x)$ утворюється додаванням значень ряду ймовірностей $p(x_i),\ i = \overline{1,n}$ , вона називається ***інтегральним законом***.

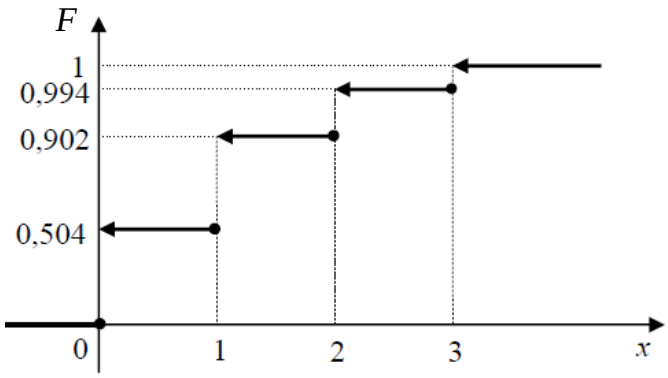



Рис. 3.2. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини

***Властивості функції розподілу ймовірностей*** $F(x)$

1. Функція розподілу $F(x)$ приймає значення

$$0 \le F(x) \le 1. \tag{3.7}$$

2. Функція розподілу $F(x)$ є не спадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$ .

$F(-\infty) = 0$ – подія, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме значення менше ніж $-\infty$ **,** є *неможливою*.

$F(\infty) = 1$ – подія, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме будь яке своє значення, є достовірною.

3. Імовірність того, що випадкова величина $X$ набуде можливого значення в інтервалі $a < X \le b$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a). \tag{3.8}$$

Для ***неперервних*** випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати за допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

***Щільністю ймовірностей*** неперервної випадкової величини ***X*** називається границя відношення ймовірності попадання її значень $P(x \le X \le x + \Delta x)$ в інтервал $\Delta x$ до величини інтервалу $\Delta x$ за умови, що величина інтервалу спрямовується до нуля

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (3.9)$$

Використовуючи властивості функції розподілу $F(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad (3.10)$$

***Щільністю ймовірностей*** неперервної випадкової величини $X$ також називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad (3.11)$$

На основі цього визначення щільність ймовірностей також називають диференційним законом розподілу.

Оскільки

$$dF(x) = f(x)dx, \qquad (3.12)$$

то добуток $f(x)dx$ – це ймовірність того, що випадкова величина $X$ міститиметься у проміжку $[x, x+dx]$

$$f(x)dx = F(x + dx) - F(x) = P(x \le X \le x + dx). \qquad (3.13)$$

Геометрично на графіку щільності ймовірностей $f(x)dx$ відповідає площа прямокутника з основою $dx$ і висотою $f(x)$ (рис. 3.3).

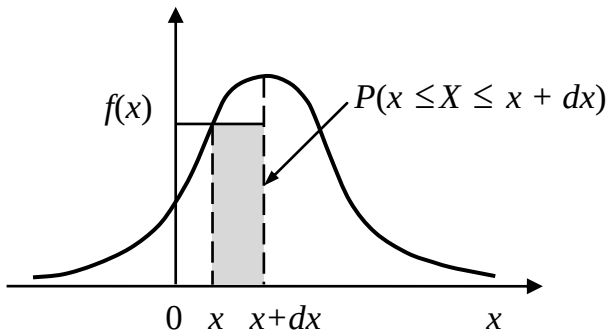



Рис. 3.3. Елемент ймовірності

***Властивості щільності ймовірностей***

1. Щільність ймовірностей є невід'ємною

$$f(x) \geq 0. \tag{3.14}$$

2. ***Умова нормування*** неперервної випадкової величини $X$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{3.15}$$

Якщо неперервна випадкова величина $X$ визначена лише на проміжку $[a, b]$, то умова нормування має такий вигляд

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \tag{3.16}$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал $[a, b]$ обчислюється за формулою

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{3.17}$$

## 3.2. Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу ймовірностей як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри називають *числовими характеристиками випадкових величин*. Найбільш важливими числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання і дисперсія.

***Математичним сподіванням*** дискретної випадкової величини є імовірнісним узагальненням поняття середнього арифметичного і визначається як число $m_X$, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень величини $x_i$ на відповідні ймовірності $p(x_i)$ їхнього виникнення

$$m_X = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i). \tag{3.18}$$

Між математичним сподіванням і середнім арифметичним існує такий же зв'язок, як між ймовірністю і відносною частотою. Математичне сподівання є число, відносно якого, завдяки властивості статистичної стійкості, групуються при багатократних випробуваннях середні арифметичні значення випадкової величини.

Для **неперервної** випадкової величини, розглядаючи неперервну величину як граничний випадок дискретної, приходять до визначення математичного сподівання за формулою

$$m_X = M[X] = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \qquad (3.19)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу [*a*, *b*], то

$$m_X = M[X] = \int_a^b x f(x) dx. \qquad (3.20)$$

***Приклад 3.2.***

Розрахувати математичне сподівання неперервної випадкової величини *X*, яка має рівномірну щільність ймовірностей $f(x) = 1/(b-a)$.

***Розв'язання.***

$$M[X] = \int_a^b x\, f(x) dx \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \bigg|_a^b = \frac{b+a}{2}.$$

Математичне сподівання випадкової величини міститься всередині інтервалу [*a*, *b*] , являючи собою центр розподілу цієї величини *X*.

***Властивості математичного сподівання***

1. Математичне сподівання від сталої величини ***c*** дорівнює самій сталій

$$M[c] = c. \qquad (3.21)$$

2. Сталу величину можна виносити за знак математичного сподівання

$$M[cX] = cM[X]. \qquad (3.22)$$

3. Якщо *a* і *b* є сталими величинами, то

$$M[aX + b] = aM[X] + b. \qquad (3.23)$$

4. Математичне сподівання суми (різниці) випадкових величин $X$, $Y$ дорівнює сумі (різниці) їх математичних сподівань

$$M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]. \qquad (3.24)$$

5. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин $X$, $Y$ дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M[XY] = M[X]M[Y]. \qquad (3.25)$$

Математичне сподівання випадкової величини має розмірність, яка збігається з розмірністю випадкової величини.

Для оцінки ступеня відхилення (розсіювання) випадкової величини від її математичного сподівання (***центра розсіювання***), тобто $\overset{\circ}{X} = X - m_X$, вводиться числова характеристика, яку називають дисперсією.

**Дисперсія випадкової величини** $D_X = \sigma_X^2$ визначає середнє значення квадрату відхилення випадкової величини від математичного сподівання.

Для дискретної випадкової величини дисперсія розраховується за формулою

$$\sigma_X^2 = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p(x_i) \qquad (3.26)$$

для неперервної величини

$$\sigma_X^2 = D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx. \qquad (3.27)$$

Із властивостей (3.21), (3.22), (3.24), (3.25) випливає

$$D[X] = M[(X - m_X)^2]. \qquad (3.28)$$

Отже, ***дисперсія характеризує ступінь розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання***.

Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті. Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

***Середнім квадратичним відхиленням*** випадкової величини $X$ називають корінь квадратний із дисперсії

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]}. \tag{3.29}$$

***Властивості дисперсії***

1. Якщо $c$ – стала величина, то $D[c] = 0$. (3.30)

2. $D[cX] = c^2 D[X]$. (3.31)

3. Якщо $a$ і $b$ – сталі величини, то $D[aX + b] = a^2 D[X]$. (3.32)

4. Для незалежних випадкових величин $X$, $Y$

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]. \tag{3.33}$$

5. Дисперсію можна обчислити (використовуючи (3.28)) також за формулою

$$D[X] = M[X^2] - m_X^2. \tag{3.34}$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною ($\sigma_X^2 \geq 0$).

***Приклад 3.3.***

Розрахувати дисперсію і середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини $X$, яка має рівномірну щільність розподілу на інтервалі [a, b].

***Розв'язання.***

Використаємо властивість дисперсії (3.34)

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} =$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення має вигляд

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

## 3.3. Найпоширеніші основні закони розподілу

**Рівномірний розподіл.** Величина $\boldsymbol{X}$ розподілена рівномірно на проміжку $[a, b]$, якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність розподілу її ймовірностей має такий вигляд (рис. 3.4):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{3.35}$$

Для рівномірно розподіленої випадкової величини на проміжку $[a, b]$ (рис. 3.5):

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}, \quad a \le x_1 \le x_2 \le b, \tag{3.36}$$

тобто ймовірність потрапляння $\boldsymbol{X}$ в інтервал $[x_1, x_2]$ дорівнює відношенню довжини цього інтервалу до довжини всього проміжку $[a, b]$.

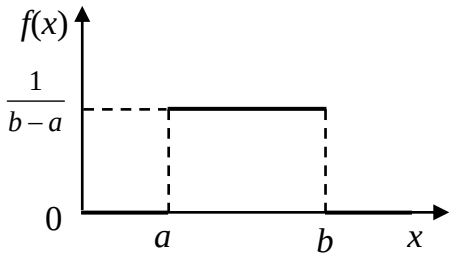



Рис. 3.4. Щільність ймовірностей рівномірного розподілу на проміжку $[a, b]$

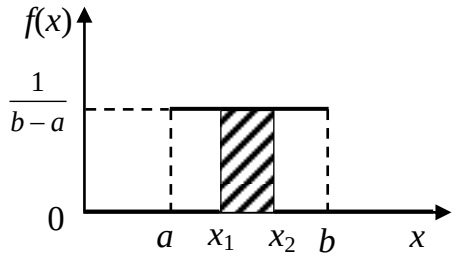



Рис. 3.5. Ймовірність потрапляння в інтервал $[x_1, x_2]$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу має такий вигляд (рис. 3.6):

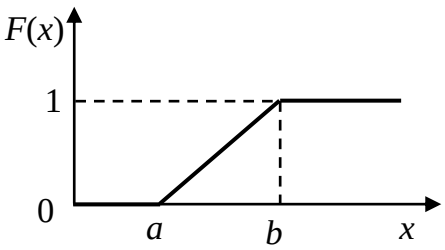



Рис. 3.6. Функція розподілу ймовірностей рівномірного закону

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{3.37}$$

Числові характеристики цього розподілу були знайдені вище:

$$M[X]=\frac{b+a}{2}\ ,\quad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}. \tag{3.38}$$

**Показниковий розподіл.** Випадкову величину $X$ називають розподіленою за показниковим законом, якщо її щільність розподілу ймовірностей має такий вигляд (рис. 3.7):

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases} \tag{3.39}$$

де $\lambda > 0$ – параметр розподілу.

Інтегральна функція розподілу випадкової величини $X$, розподіленої за показниковим законом, має такий вигляд (рис. 3.8)

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{3.40}$$

Відповідно

$$P(a\le X\le b)=\begin{cases}e^{-a\lambda}-e^{-b\lambda}, & a\ge 0;\\ 1-e^{-b\lambda}, & a<0,\quad b>0;\\ 0, & b<0.\end{cases} \tag{3.41}$$

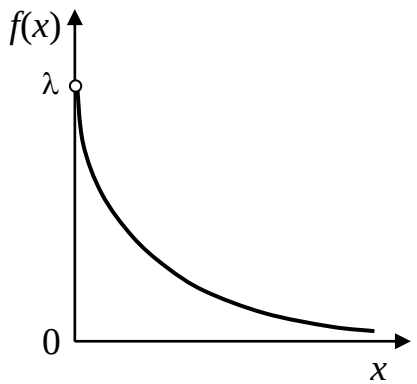



Рис. 3.7. Щільність ймовірностей показникового розподілу

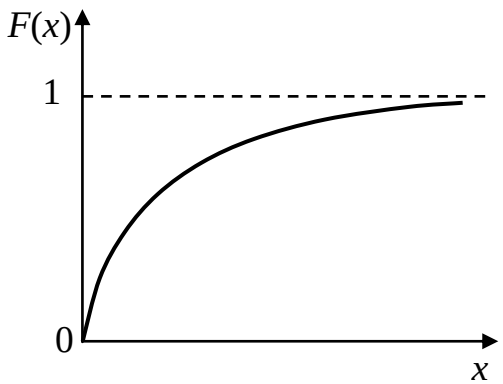



Рис. 3.8. Функція розподілу ймовірностей показникового закону

Математичне сподівання та показового розподілу дорівнюють відповідно:

$$M[X]=\frac{1}{\lambda},\qquad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.42}$$

**Нормальний закон розподілу.** Неперервну випадкову величину $X$ називають розподіленою нормально з параметрами $m$, σ (σ >0), якщо її щільність ймовірностей має вигляд (рис. 3.9)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.43)$$

де $m$, σ – параметри розподілу.

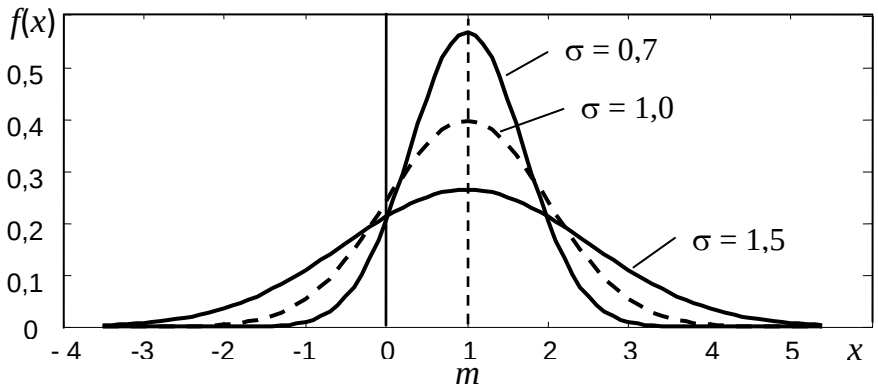



Рис. 3.9. Щільність ймовірностей нормального закону розподілу

Графік функції $f(x)$ називають *нормальною кривою* або ***кривою Гауса***. Вона має максимум $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ при $x=m$ та точки перегину при $x=m \pm \sigma$, симетрична відносно прямої $x = m$, і має вісь *Ox асимптотою.*

За $m$=0 та σ=1 нормальну криву називають *нормованою, з функцією щільності розподілу ймовірностей*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (3.44)$$

це функція Лапласа, вона табульована, зокрема в електронній формі.

Нормальний закон розподілу повністю визначається своїм математичним сподіванням та дисперсією (середнім квадратичним відхиленням σ):

$$M[X]=m, \quad D[X]=\sigma^2. \qquad (3.45)$$

***Функція розподілу для нормального закону*** (рис. 3.10)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (3.46)$$

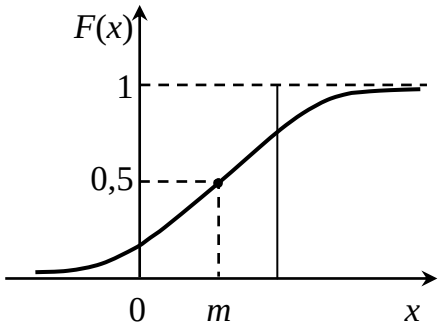



Рис. 3.10. Функція розподілу ймовірностей нормального закону

Функцію розподілу $F(x)$ можна представити наступним чином

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(v)dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-\frac{(v-m)^2}{2\sigma^2}\}dv=\left\{\begin{matrix} r=\dfrac{v-m}{\sigma} \\ z=\dfrac{x-m}{\sigma}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=\Phi(z).$$

Інтеграл

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\{-\frac{r^2}{2}\}dr \qquad (3.47)$$

має назву ***інтеграла ймовірностей*** (***нормальна функція розподілу***)

Якщо використовувати таблицю значень функції Лапласа виду (табл. А.1)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad (3.48)$$

то інтегральна функції розподілу визначається як

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)-\Phi(-\infty)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}.$$

### *Властивості функції Лапласа*

$\Phi(x)$ – визначна на всій осі абсцис,

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

$\Phi(0) = 0$,

$\Phi(+\infty) = 0{,}5$.

***Ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал*** **[*a*, *b*]** обчислюють за формулою

$$P(a \le x \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \qquad (3.49)$$

Для відрізків $x$, що кратні середньоквадратичному σ, можна записати:

1. $P(m-\sigma \le x \le m+\sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 0{,}68$

2. $P(m-2\sigma \le x \le m+2\sigma) = 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}95$

3. $P(m-3\sigma \le x \le m+3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0{,}997$.

Такий спосіб оцінки діапазону можливих значень випадкової величини має назву «***Правило трьох сигма»*** (рис. 3.11). Для 3σ це означає, що нормально розподілена випадкова величина $X$ майже повністю (з точністю до часток відсотка) розміщується на ділянці $m \pm 3\sigma$.

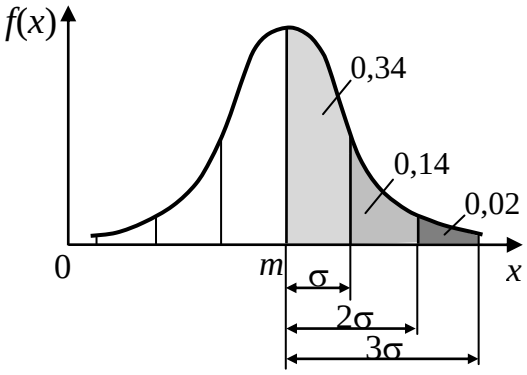



Рис. 3.11. Правило трьох сигма

## 3.4. Моделювання випадкових величин та оцінка їх характеристик

У сучасних системах програмування зазвичай існують стандартні підпрограми, які генерують випадкові числа, що відповідають багатьом законам розподілу. Але корисним буде дізнатися про методи, на яких ґрунтуються деякі процедури.

Програмна імітація випадкових величин і випадкових завад будь-якої складності зводиться до генерації деякої стандартної (базової) послідовності з наступним її функціональним перетворенням. У разі дискретного моделювання як базову послідовність беруть послідовність $\{x_i\} = x_0, x_1, \cdots, x_n$, яка являє собою реалізацію незалежних, рівномірно розподілених на інтервалі від 0 до 1 випадкових чисел $\{r_i\} = r_0, r_1, \cdots, r_n$.

Моделювання неперервної випадкової величини, заданої щільністю розподілу $f(x)$, можна виконати за допомогою граничних теорем, методу обернених функцій, методу кускової апроксимації та інших методів.

**Метод граничних теорем**

Суть методу полягає в тому, що при моделюванні відтворюються умови, за яких для заданого закону розподілу стають справедливими граничні теореми теорії ймовірностей. Так, моделювання випадкової величини з нормальним законом розподілу може бути виконано на основі центральної граничної теореми, згідно з якою сума достатньо великої кількості незалежних однаково розподілених випадкових величин має асимптотичний нормальний розподіл.

***Приклад. Моделювання випадкової величини з нормальним законом розподілу.***

В якості базової послідовності береться послідовність значень рівномірно розподіленої випадкової величини. Якщо взяти $n$ значень рівномірно розподіленої на інтервалі [0,1] послідовності $x_i$ (рис. 3.12), математичне сподівання якої $M[x] = m_x = 1/2$, а дисперсія $D[x] = D_x = 1/12$, і потім скласти її суму $x' = \sum_{i=1}^{n} x_i$, то відповідно до центральної граничної теореми отримаємо одне значення нормально розподіленої випадкової величини $x'$ (рис. 3.13) з математичним сподіванням $M[x'] = m_{x'} = n/2$ та дисперсією $D[x'] = D_{x'} = n/12$.

Якщо взяти $n = 12$ і відняти від суми число 6, то отримаємо зручну для подальшого використання нормовану нормально розподілену випадкову величину $y = x' - 6$ (рис. Б.2) з математичним сподіванням $M[y] = m_y = 0$ та дисперсією $D[y] = D_y = 1$.

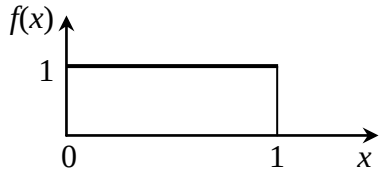



Рис. 3.12. Рівномірний розподіл на інтервалі [0,1]

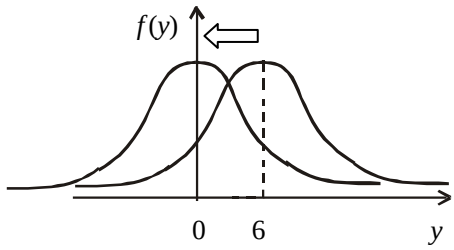



Рис. 3.13. Нормальний розподіл з одиничною дисперсією

## Метод обернених функцій

Цей метод ґрунтується на наявності однозначного зв'язку між рівномірно розподіленою на інтервалі [0,1] випадковою величиною $r$ (рис. 3.14) і випадковою величиною $x$ із заданою щільністю розподілу $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i \,. \tag{3.50}$$

Щоб отримати число, яке належить послідовності випадкових чисел $\{x\}$ із заданою щільністю розподілу $f(x)$, необхідно розв'язати рівняння (3.50) відносно $x_i$ і отримати вираз, який перетворює рівномірно розподілену величину у випадкову величину із необхідною щільністю розподілу.

***Приклад. Моделювання рівномірно розподіленої на інтервалі*** $[a,\ b]$ випадкової величини, яка має щільність розподілу $f(x) = 1/(b-a)$.

Використовуючи співвідношення (3.50), маємо

$$\int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{b-a}dx = \int_{a}^{x_i} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x_i - a}{b-a} = r_i \,.$$

Звідси знаходимо явний вираз для формування випадкового числа з необхідним розподілом (рис. 3.15)

$$x_i = a + (b-a)r_i, \tag{3.51}$$

де $r_i$ – випадкове число, отримане від датчика випадкових чисел (рис. 3.14), рівномірно розподілених на інтервалі [0,1].

Рис. 3.14. Рівномірний розподіл на інтервалі [0,1]

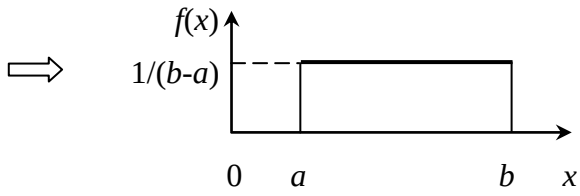



Рис. 3.15. Рівномірний розподіл на інтервалі [*a*, *b*]

***Завдання*. Виконати моделювання випадкової величини, розподіленої за законом Релея.**

Закон розподілу Релея застосовується при дослідженнях радіотехнічних систем, а саме, при моделюванні випадкових завад.

Функція щільності ймовірностей за законом Релея має вигляд (рис. 3.16)

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r > 0; \\ 0, & r \le 0, \end{cases} \tag{3.52}$$

де σ – параметр розподілу.

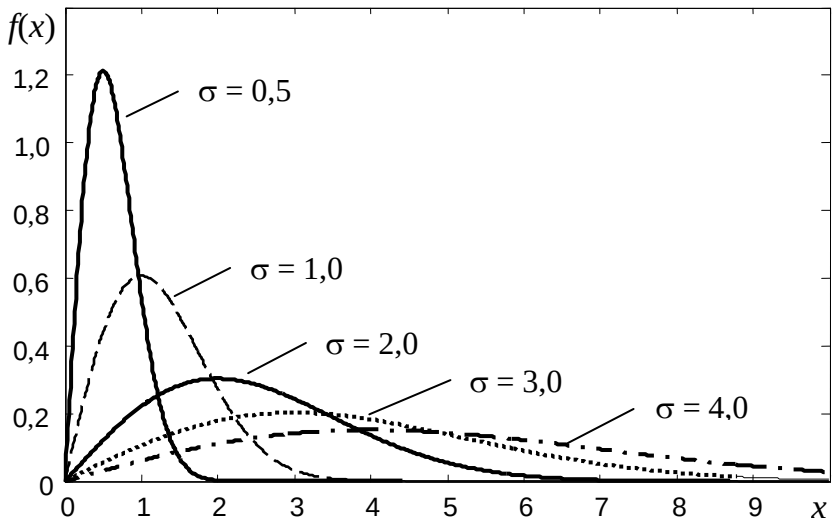



Рис. 3.16. Щільність ймовірностей розподілу Релея

Задаючи числове значення параметру σ, змоделювати випадкову величину, розподілену за законом Релея, використовуючи метод обернених функцій.

## Метод кускової апроксимації

Метод ґрунтується на заміні щільності ймовірностей $f(x)$ кусково-постійною функцією (рис. 3.17) на заданому інтервалі [*a*, *b*]. Інтервал розбивають на *m* підінтервалів. При цьому припускають, що на кожному підінтервалі $f(x)$ постійна. Випадкову величину записують у вигляді $x = a_k + x_k$, де $a_k$ – абсциса лівої границі *k*-го підінтервалу. Для спрощення інтервал розбивають так, щоб ймовірність влучення випадкової величини в будь-який підінтервал $[a_k, a_{k+1}]$ була б постійною $P_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{m}$. Звідси знаходять границі $a_k$ підінтервалів. При цьому $P_1 + P_2 .. + ... P_m = \sum_1^m \frac{1}{m} = 1$.

***Процедура моделювання.***

Процедура моделювання складається з таких дій. Генерують випадкове число $r_i$, рівномірно розподілене на інтервалі [0, 1]. За значенням цього числа визначають підінтервал, а отже, і ліву границю $a_k$. Генерують наступне число $r_{i+1}$, яке масштабують множенням на $(a_{k+1} - a_k)$, і розраховують випадкове число $x_i = a_k + (a_{k+1} - a_k) r_{i+1}$. Тобто генерується величина ***x***, рівномірно розподілена на інтервалі $(a_k - a_{k+1})$.

Для розрахунку наступного випадкового числа $x_{i+1}$ процедуру повторюють.

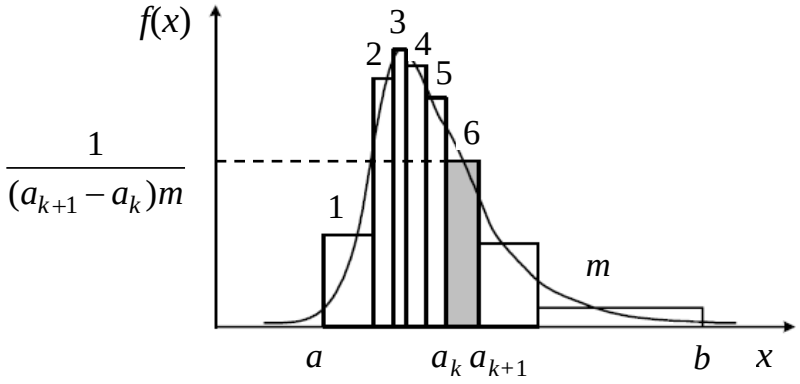



Рис. 3.17. Кусково-постійна апроксимація функції щільності ймовірностей

## Перевірка результатів моделювання

**Гістограми** є одним із кращих способів швидко дізнатись багато про дані, включаючи середнє значення, діапазон, модальність, вигляд та викиди.

Гістограма – це зображення у вигляді набору стовпчиків (рис. 3.18), кожен з яких відображає частоту (кількість) або відношення (кількість випадків/загальна кількість значень) випадків для заданого діапазону значень.

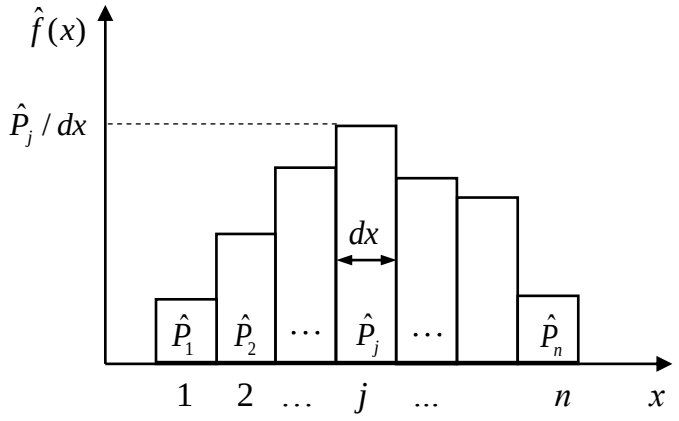



Рис. 3.18. Гістограма

Зазвичай стовпчики відображаються вертикально с відліком кількості (або відношень) за вертикальною віссю. Щоб вручну збудувати гістограму, треба визначити діапазон даних для кожного стовпчика (розряду), підрахувати кількість випадків, коли значення потрапляє в кожний розряд, і нарисувати стовпчики таким чином, щоб вказати цю кількість.

Щоб оцінити ймовірність можливих значень випадкової величини $x$, тобто закон розподілу, область можливих значень випадкової величини розбивають на $n$ інтервалів.

Потім підсумовують кількість $N_j$ улучень випадкової величини $x$ в ці інтервали. Оцінку для ймовірності влучення випадкової величини в $j$-й інтервал визначають як частоту влучень у цей інтервал

$$\hat{P}_j = \frac{N_j}{N}. \tag{3.53}$$

За цими значеннями можна побудувати гістограму. На кожному $j$-му інтервалі (розряді) як підставі будують прямокутник, площа якого дорівнює $\hat{P}_j$ так, щоб площа, обмежена гістограмою, дорівнювала одиниці.

У процесі оброблення результатів статистичного моделювання часто виникає задача визначення емпіричного закону розподілу випадкової величини.

Для її розв'язання за результатами моделювання знаходять значення вибіркового закону розподілу $\hat{F}(x)$ (чи функції щільності $\hat{f}(x)$) і висувають гіпотезу $H_0$ про те, що емпіричний розподіл узгоджується з відомим теоретичним розподілом $F(x)$.

Далі цю гіпотезу перевіряють за допомогою статистичних критеріїв згоди таких, як критерії згоди Колмогорова, Пірсона, Смірнова та ін.

Для перевірки гіпотези $H_0$ вибирають деяку випадкову величину $U$, що характеризує ступінь розбіжності теоретичного й емпіричного розподілу.

***Критерій згоди Пірсона*** ґрунтується на визначенні як міри розбіжності теоретичного й емпіричного розподілів величину

$$U = \sum_{j=1}^{n} c_j (\hat{P}_j - P_j)^2, \tag{3.54}$$

де $n$ – кількість підінтервалів, на які розбивається інтервал значень величини $x$; $c_j = \dfrac{N}{P_j}$; $N$ – кількість реалізацій випадкової величини $x$; $\hat{P}_j$ – оцінка ймовірності; $P_j$ – ймовірність улучення випадкової величини в $j$-й підінтервал, обчислена з теоретичного розподілу.

Якщо $N \to \infty$, закон розподілу сформованої випадкової величини $U$ майже не залежить від функції розподілу $F(x)$ і від $N$, а залежить тільки від кількості підінтервалів і наближається до закону розподілу $\chi^2$ (хі-квадрат), тобто $U=\chi^2$, з $(n-r-1)$ ступенями свободи, де $r$ – число параметрів теоретичного закону розподілу (наприклад, для нормального закону $r = 2$ – це математичне сподівання та дисперсія).

Функція розподілу $F(\chi^2_т) = P(\chi^2 \le \chi^2_т)$ для хі-квадрат табульована.

***Процедура перевірки складається з таких етапів:***

1) розбивають область значень величини $x$ на $n$ підінтервалів;

2) визначають частоту влучень значень величини $x$ у $j$-й підінтервал

$$\hat{P}_j = \frac{N_j}{N}.$$

3) обчислюють теоретичне значення ймовірностей улучення значень $x$ у $j$-й підінтервал $P_j$;

4) обчислюють ступінь розбіжності теоретичної й емпіричної $U$ ймовірностей;

5) за обчисленим значенням $U=\chi^2$ та числом ступенів свободи за таблицею розподілу $\chi^2$ визначають ймовірність того, що величина $\chi^2$ з $(n-r-1)$ ступенями свободи не перевершить це значення;

6) роблять висновок: якщо ймовірність того, що значення розбіжності більше, ніж обчислене, перевищує деякий рівень значущості, то гіпотеза $H_0$ про вид розподілу підтверджується, тому що розбіжності можна вважати несуттєвими, зумовленими випадковими чинниками. Якщо ймовірність мала, то гіпотеза $H_0$ відкидається, оскільки розбіжності не можна вважати несуттєвими.

Зручно також скористатися таблицею критичних точок розподілу $\chi^2$. За числом ступенів свободи і заданим рівнем значущості за цією таблицею знаходиться критична точка $\chi^2_{\text{кр}}$ і виконується порівняння з обчисленим значенням $U=\chi^2$. Якщо $U<\chi^2_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити припущення про закон розподілу, тобто гіпотеза $H_0$ приймається.

**Література до теми 3:** [7–13], [17].

## *Контрольні запитання*

1. Яка величина називається випадковою? Які види випадкових величин вам відомі?
2. Дайте визначення ряду ймовірностей дискретної випадкової величини. Які він має властивості?
3. Дайте визначення функції розподілу ймовірностей випадкової величини. Перелічіть її властивості.
4. Дайте визначення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини. Як вона пов’язана з функцією розподілу?
5. Як розраховується математичне сподівання дискретної та неперервної випадкових величин? Що воно характеризує?
6. Перелічіть властивості операції обчислення математичного сподівання.
7. Як розраховується дисперсія дискретної та неперервної випадкових величин? Що вона характеризує?
8. Перелічіть властивості операції обчислення дисперсії.
9. В чому суть моделювання за методом граничних теорем?
10. На чому полягає моделювання за методом обернених функцій?
11. Чим відрізняється розрахунок центральних моментів випадкової величини від обчислення початкових моментів?
12. Як виконується моделювання за методом кускової апроксимації?

# Розділ 3. Системи випадкових величин

## Тема 4. Системи випадкових величин. Функціональні перетворення

У практичних застосуваннях теорії ймовірностей дуже часто доводиться стикатися з завданнями, в яких результат випробування описується не однією випадковою величиною, а двома або більше випадковими величинами, що утворюють комплекс або систему (складене випробування).

***Систему з*** $N$ ***випадкових величин*** можна розглядати як точку в $n$-вимірному просторі з випадковими координатами $X_1, X_2, ..., X_N$. Тому таку систему також називають $N$- ***вимірною випадковою величиною*** або $N$-***вимірним випадковим вектором***.

Прикладом системи із трьох випадкових величин є дальність *R*, азимут θ і кут місця β об'єкту, які вимірюються з деякими випадковими похибками відповідними каналами радіолокаційною системою спостереження (рис. 4.1).

Рис. 4.1. Визначення положення об'єкту у кутомірно-далекомірної системі спостереження

### 4.1. Функція розподілу і щільність ймовірностей системи двох випадкових величин

Для системи з двох неперервних випадкових величин $X$ і $Y$, які приймають значення на інтервалах $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$, ф***ункція розподілу визначається як*** ймовірність одночасного виконання того, що випадкова

величина $X$ прийме значення, не більшого за $x$, а $Y$ не більшого за $y$

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P((X\le x)(Y\le y)). \qquad (4.1)$$

Останній вираз в (4.1) означає, що функція розподілу $F(x,y)$ дорівнює добутку подій $X\le x$ і $Y\le y$.

Двомірна щільність ймовірностей $f(x,y)$ є змішаною похідною другого порядку від функції розподілу $F(x,y)$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (4.2)$$

Функцію розподілу $F(x,y)$ можна отримати шляхом інтегрування щільності ймовірностей

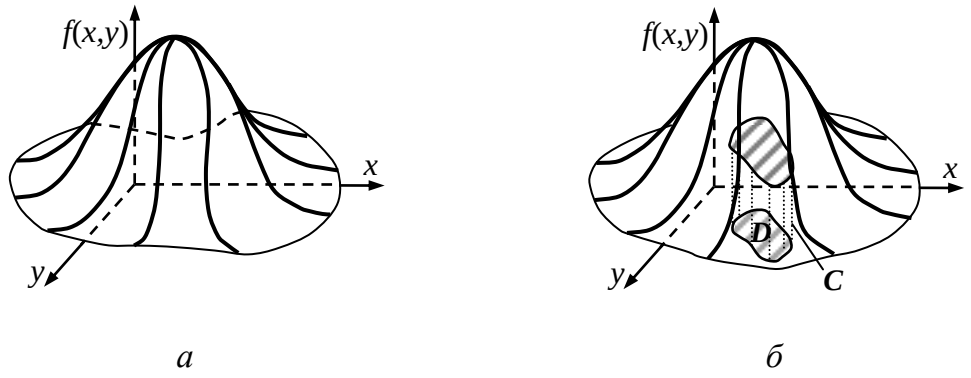
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(v,\eta)dvd\eta. \qquad (4.3)$$

***Властивості щільності ймовірностей*** $f(x,y)$**.**

1. Двовимірна щільність ймовірностей $f(x,y)$ є невід'ємною

$$f(x,y)\ge 0. \qquad (4.4)$$

Ця властивість випливає із визначення щільності ймовірностей $f(x,y)$, як змішаної похідної другого порядку від функції розподілу $F(x,y)$, яка є неспадною за змінними $x$ і $y$. Двомірна щільність ймовірностей $f(x,y)$ представляє собою деяку поверхню над площиною $(x,y)$ (рис. 4.2, *а*).




*а* *б*

Рис. 4.2. Двомірна щільність ймовірностей (*а*) та ймовірність попадання в задану область (*б*)

2. Умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1. \qquad (4.5)$$

3. Ймовірність $P(D)$ попадання випадкової точки в довільну область $D$ (рис. 4.2, *б*) визначається за формулою

$$P(D) = \iint_D f(x,y)dxdy\,. \qquad (4.6)$$

Геометрично ймовірність попадання в область $D$ зображується об'ємом циліндричного тіла $C$, обмеженого зверху поверхнею розподілу, що спирається на область $D$.

## 4.2. Функціональні перетворення випадкових величин

Випадкові величини, що створюють систему, можуть бути зв'язані функціональною залежністю. Таке перетворення також можна розглядати як функцію випадкових аргументів.

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин $X$ і $Y$ відповідає одне можливе значення випадкової величини $Z$, то $Z$ називають ***функцією двох випадкових величин*** $Z=\phi(X,Y)$.

**Визначення щільності ймовірностей суми двох випадкових величин.** Важливе значення для практики має задача визначення щільності ймовірностей суми випадкових величин. Обмежимось розглядом цієї задачі на прикладі суми двох випадкових величин $X$ і $Y$

$$Z = X + Y\,. \qquad (4.7)$$

Ймовірність того, що $Z$ менше деякої величини $\gamma$, еквівалентна тому, що всі значення $X$ і $Y$ знаходяться в області $D$ зліва від лінії $x + y = \gamma$ на рис. 4.3.

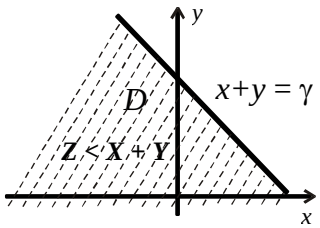



Рис. 4.3. Визначення суми двох величин

Для визначення функції розподілу $F(z)$ величини $Z$, тобто $F(z) = P(Z < z)$, застосуємо загальну формулу (4.6):

$$F(z) = P(Z < z) = P((X,Y) \subset D) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy \right\} dx;$$

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy \right\} dx. \qquad (4.8)$$

Диференціюючи вираз (4.8) за $z$, що входить у верхню границю внутрішнього інтегралу, отримаємо щільність ймовірностей $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx, \qquad (4.9)$$

або

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy.$$

Якщо $X$ і $Y$ статистично незалежні і мають відповідні щільності ймовірностей $f(x)$ і $f(y)$, то

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z-y)f(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx. \qquad (4.10)$$

Для статистично незалежних випадкових величин $X$ і $Y$ щільність ймовірностей їх суми $f(z)$ розраховується як згортка щільностей ймовірностей цих випадкових величин.

Функція $f(z)$ утворена з функцій $f(x)$ і $f(y)$ за наведеними формулами, називається ***згорткою*** або ***композицією*** цих функцій.

***Приклад 4.1***. Для незалежних випадкових величин $X$ і $Y$ відомі щільності їх розподілів

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, \quad (0 \le x < \infty); \quad f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}, \quad (0 \le y < \infty).$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

***Розв'язання.*** За формулою $g(z)=\int\limits_0^z f_1(x)\,f_2(z-x)dx$ обчислимо:

$$g(z)=\int\limits_0^z \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\frac{1}{5}e^{-\frac{(z-x)}{5}}dx=\frac{1}{15}e^{-\frac{z}{5}}\int\limits_0^z e^{-\frac{2x}{15}}dx=\frac{1}{15}e^{-\frac{z}{5}}\left(-\frac{15}{2}e^{-\frac{2x}{15}}\right)\Bigg|_0^z=\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\left(1-e^{-\frac{2z}{15}}\right).$$

Оскільки можливі значення $X$ і $Y$ невід'ємні і $Z = X + Y$, то $z \geq 0$. Отже

$$g(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\left(1-e^{-\frac{2z}{15}}\right), & 0\leq z<+\infty.\\ 0, & -\infty<z<0\end{cases}$$

## 4.3. Композиція нормальних законів розподілу

Нехай $X$ та $Y$ – нормально розподілені і ***незалежні*** випадкові величини зі щільностями ймовірностей

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \qquad f_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}. \qquad (4.11)$$

Треба виконати композицію цих законів, тобто знайти закон розподілу для $Z = X + Y$.

Застосовуючи загальну формулу (4.10) отримаємо

$$f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)dx=\frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(z-x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dx. \qquad (4.12)$$

Після проведення відповідних перетворювань отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[z-(m_x+m_y)]^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}}=\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}. \qquad (4.13)$$

В результаті отримано нормальний закон розподілу з центром розсіювання $m_z = m_x + m_y$ і дисперсією $\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$.

Таким чином, при композиції нормальних законів виходить знову нормальний закон, причому математичні сподівання і дисперсії (або квадрати ймовірних відхилень) підсумовуються.

Правило композиції нормальних законів може бути узагальнене на випадок довільного числа незалежних випадкових величин.

Якщо є $n$ незалежних випадкових нормально розподілених величин: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, з центрами розсіювання $m_{x1}, m_{x2}, \ldots, m_{xn}$ і середніми квадратичними відхиленнями $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \ldots, \sigma_{xn}$, то величина

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.14}$$

також підпорядкована нормальному закону з параметрами

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}; \qquad \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2. \tag{4.15}$$

Якщо система випадкових величин ($X$, $Y$) розподілена за нормальним законом, але величини $X$ і $Y$ **залежні**, то можна довести, так само як раніше, виходячи із загальної формули, що закон розподілу величини $Z = X + Y$ є теж нормальний закон. Центри розсіювання як і раніше складаються алгебраїчно, але для середніх квадратичних відхилень правило стає більш складним:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y,$$

де $\rho$ – коефіцієнт кореляції величин $X$ і $Y$.

При додаванні декількох залежних випадкових величин, підпорядкованих у своїй сукупності нормальному закону, закон розподілу суми також виявляється нормальним з параметрами

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}; \qquad \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j} \rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}^2, \tag{4.16}$$

де $\rho_{ij}$ – коефіцієнт кореляції величин $X_i$, $X_j$, а підсумовування поширюється на всі різні попарні комбінації величини $X$.

## 4.4. Застосування композиції законів розподілу в задачах навігації

### Завдання для самостійного виконання

***Завдання 1***. Оцінити помилку бомбометання.

Помилка бомбометання викликана спільною дією наступних факторів: 1) технічне розсіювання бомб; 2) неточність прицілювання за дальністю; 3) неточна наводка в бічному напрямку. Всі ці фактори є незалежними.

Технічне розсіювання бомб дає одиничний еліпс розсіювання у вигляді кола радіусом $r$ = 20 м. Помилка прицілювання за дальністю діє тільки в напрямку польоту і має середньоквадратичне відхилення $\sigma_y$ = 40 м; центр розсіювання має зсув вперед за напрямом польоту на $m_y$=5 м. Помилка бічного наведення діє тільки в напрямку, перпендикулярному до напрямку польоту, і має середньоквадратичне відхилення $\sigma_x$=30 м; центр розсіювання зміщений вправо на $m_x$=10 м (рис. 4.4).

***Завдання.*** Оцінити ймовірність помилки бомбометання через параметри нормального закону, якому підпорядкована сумарна помилка бомбометання, викликана спільною дією всіх перерахованих факторів.

***Пояснення.*** Так як головні осі всіх перерахованих в завданні еліпсів (другий і третій еліпси є виродженими) паралельні, то можна застосувати правило композиції нормальних законів з ***незалежними*** складовими. Вибираємо вісь О$y$ в напрямку польоту, а вісь О$x$ – перпендикулярно до нього. Треба знайти $\sigma_{\Sigma x}$ та $\sigma_{\Sigma y}$.

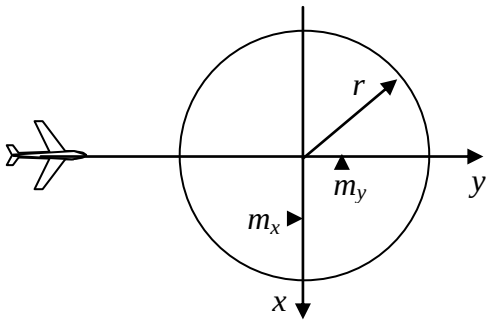



Рис. 4.4. Фактори, що впливають на помилку бомбометання

***Завдання 2.*** Оцінити бічне відхилення літака від заданого маршруту.

Розглянемо метод навігації, що називається «Зональна навігація» (Area Navigation, RNAV – Regional Navigation) – це метод навігації, що дозволяє повітряним суднам виконувати політ за будь-якою бажаною траєкторією в

межах дії радіомаякових навігаційних засобів або в межах, визначених можливостями автономних засобів навігації або їх комбінацією.

Впровадження зональної навігації полягає не тільки в тому, щоб забезпечити політ за довільною траєкторією, а в тому, щоб точність її витримування відповідала встановленим в даному регіоні вимогам. У сучасній аеронавігації ці вимоги встановлюються у вигляді так званих необхідних навігаційних характеристик (Required Navigation Performances – RNP).

Визначення компонентів навігаційної помилки наведено на рис. 4.5, припускаючи, що використовується автопілот. Величина похибки визначення шляху PDE (Path Definition Error) показана невеликою за умови, що немає систематичних помилок, таких як помилка кодування навігаційної бази даних або помилка через неадекватні геодезичні посилання. Технічна похибка польоту FTE (Flight Technical Error) – визначається характеристиками пілота у використанні польотних даних FD (Flight Data) або характеристик керування автопілоту при ручному керуванні літака на визначеній системою керування польотом FMS (Flight Management System) траєкторії польоту. Похибка FTE має статистичний розподіл у бічному напрямку. Навігаційна похибка NSE (Navigation System Error) – це похибка навігаційної системи при обчисленні положення повітряного судна. NSE має круговий статистичний розподіл навколо справжнього положення літака. З цього кругового розподілу можна отримати поперечний компонент NSE, який є важливим для бічної навігації RNP.

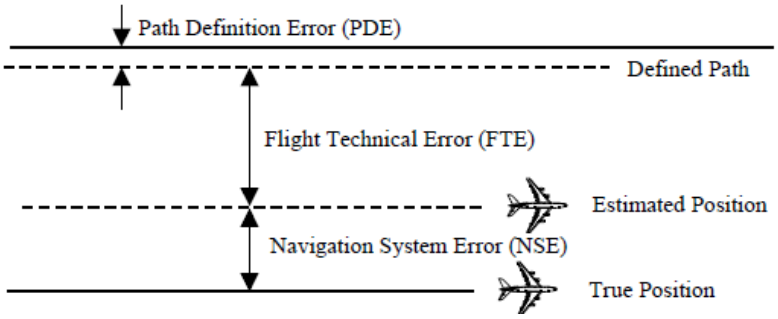



Рис. 4.5. Види похибок

Загальна системна похибка TSE (Total System Error) визначається наступним чином

$$\mathrm{TSE}=\sqrt{(\mathrm{FTE})^2+(\mathrm{NSE})^2+(\mathrm{PDE})^2}\,. \qquad (4.17)$$

Може розглядатися також спрощене рівняння

$$TSE=\sqrt{(FTE)^2+(NSE)^2} \qquad (4.18)$$

Загальна похибка TSE за рівнянням (4.18) має статистичний розподіл у поперечному напрямку (рис. 4.6).

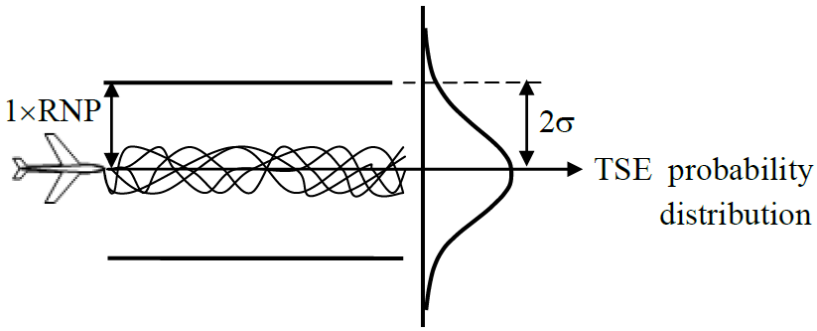



Рис. 4.6. Розподіл ймовірностей загальної похибки

***Завдання.*** Визначити ймовірність знаходження літака у межах коридору маршруту польоту при польоті протягом 0,5 години.

Вихідні дані:

– ширина коридору 10000 м;
– похибка виходу літака на початок траси $\sigma_{\Delta x1}$=500 м;
– похибка курсової системи $\sigma_{\Delta\psi}$=0,5 кутового градусу;
– швидкість польоту 200 м/с.

***Пояснення.*** На рис. 4.7 умовно показано розподіл похибки виходу літака на трасу і похибки курсової системи, які можуть призвести до виходу літака за межи встановленого коридору при польоту на трасі.

Розглядаються дві складові. Перша – це похибка $\Delta x_1$ виходу на лінію заданого шляху. Друга – похибки курсової системи літака $\Delta\psi$, яка призводить до відхилення $\Delta x_2$ літака від лінії заданого шляху у бічному напрямку.

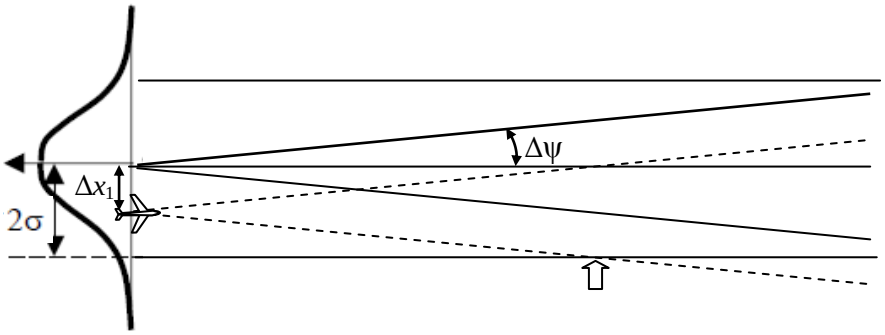



Рис. 4.7. Композиція навігаційних похибок

**Література до теми 4:** [5–8], [10–19].

## *Контрольні запитання*

1. Наведіть практичні приклади системи випадкових величин.
2. Дайте визначення двомірного ряду ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин. В чому полягає його властивість – умова нормування?
3. Як розраховуються умовні ймовірності значень випадкових величин, що входять в систему, і якими властивостями ці ймовірності володіють?
4. Які випадкові величини називаються статистично незалежними?
5. Як визначається ймовірність попадання значення двомірного дискретнозначного випадкового вектору в прямокутну область?
6. Дайте визначення функції розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин і її геометричну інтерпретацію?
7. Надайте властивості функції розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин.
8. Дайте визначення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин і її геометричну інтерпретацію?
9. Надайте властивості щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин.
10. Які умовні закони розподілу системи двох неперервних випадкових величин вам відомі? Як вони визначаються?
11. За якими формулами розраховуються умовні начальні і центральні моменти випадкових величин, що входять в систему?
12. Що є згорткою щільностей ймовірностей двох випадкових величин?
13. Як визначається композиція випадкових величин для нормального закону розподілу?

# Розділ 4. Елементи математичної статистики

## Тема 5. Метод максимуму апостеріорної ймовірності в задачі виявлення сигналів

### 5.1. Постановка проблеми

В радіотехнічних системах прийому та оброблення інформації первинною є задача виявлення інформаційних сигналів, які на шляху розповсюдження зазнають численних впливів, зазвичай випадкового характеру. При великому рівні завад проблема визначення корисного сигналу представляє собою досить складне завдання.

Багато методів визначення сигналів ґрунтуються на байєсівському підході. К такім методам відносяться метод максимальної правдоподібності та метод максимуму апостеріорної ймовірності.

В реальних радіотехнічних системах завжди існують шуми вимірювання, що обумовлено як власним шумом приймача, так і "завадами" в навколишньому просторі.

Виміряний сигнал може бути представлений як

$$U = S + \nu, \tag{5.1}$$

де $S$ – це істинний сигнал; $\nu$ – випадковий шум вимірювання.

Для вирішення проблеми виявлення сигналу використовується теорія статистичних рішень. При застосуванні теорії статистичних рішень сигнал (5.1) представляється у вигляді

$$U = \gamma S + \nu, \tag{5.2}$$

де $\gamma = \begin{cases} 0, & \textit{якщо сигналу не має}; \\ 1, & \textit{якщо сигнал присутній}. \end{cases}$

Відповідно до прийнятого критерію оптимальності встановлюється поріг виявлення сигналу $U_0$. Тоді рішення приймається в результаті порівняння вхідного сигналу з заданим порогом

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } U \le U_0; \\ 1, & \textit{якщо } U > U_0. \end{cases}$$

Проблема полягає в правильному виборі порога виявлення $U_0$ (рис. 5.1).

***Правильне рішення:***

1. Сигналу не виявлено і насправді не було корисного сигналу.
2. Сигнал виявлений і насправді був корисний сигнал.

***Неправильне рішення:***

3. Сигнал виявлено, але насправді не було корисного сигналу (цю ситуацію називають «хибною тривогою»).
4. Сигнал не виявлено, але насправді був корисний сигнал (цю ситуацію називають «пропуском сигналу»).

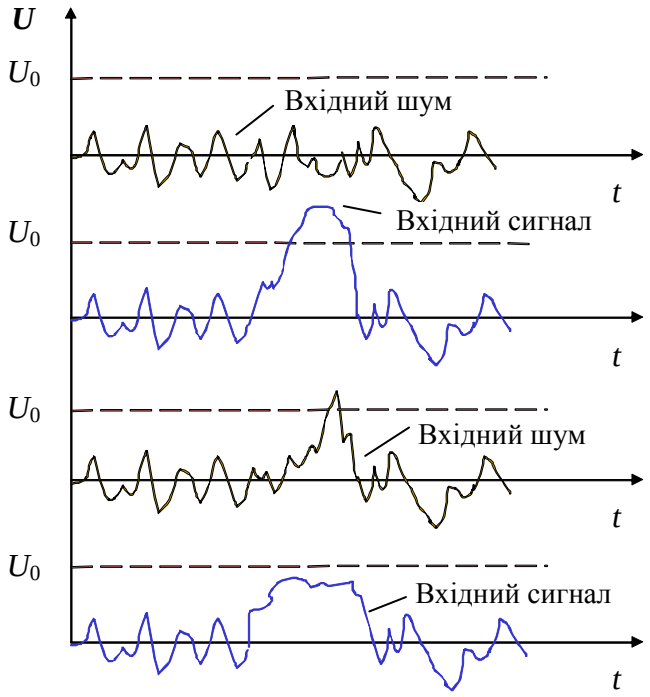



Рис. 5.1. Варіанти прийняття рішення

## 5.2. Метод максимальної правдоподібності

Ідея методу максимуму правдоподібності полягає в тому, що за оцінку $\hat{\theta}$ беруть таке значення параметра θ, для якого ймовірність отримання вже наявної вибірки максимальна.

Нехай щільність ймовірностей $f(x,\theta)$ випадкової величини $X$ залежить від одного невідомого параметра $\theta$. Її можна представити як умовну щільність ймовірностей $f(x|\theta)$ з відомими параметрами, оскільки θ вважається відомим. Вибірку значень $x_1, x_2, ..., x_N$ випадкової величини $X$ можна розглядати як реалізацію системи $N$ випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_N)$.

Умовна щільність ймовірностей $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$ при відомому значенні параметра $\theta$ дозволяє визначити найбільш вірогідну реалізацію системи випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_N)$, ймовірність появи якої максимальна.

Це реалізація, при якій щільність ймовірностей $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$ досягає максимального значення. З іншого боку, якщо вибірка $x_1, x_2, ..., x_N$ вже отримана, але ж значення параметра $\theta$ невідоме, доцільно взяти в якості оцінки $\hat{\theta}$ значення, при якому щільність ймовірностей $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$ досягає максимального значення

$$f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \hat{\theta}) = \max_{\theta} f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta).$$

Це означає, що ця вибірка є найбільш вірогідною для закону розподілу $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \hat{\theta})$.

Умовна щільність ймовірностей $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$, яка розглядається як функція невідомого параметру $\theta$ при отриманій вибірці $x_1, x_2, ..., x_N$, називається ***функцією вірогідності*** $L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$. Оцінка $\hat{\theta}$ параметру $\theta$ називається ***максимально вірогідною***, якщо вона максимізує функцію вірогідності $L(\theta)$.

Якщо функція вірогідності $L(\theta)$ має похідну, то оцінка $\hat{\theta}$ може бути знайдена шляхом вирішення рівняння

$$\frac{dL(\hat{\Theta})}{d\theta} = 0. \tag{5.3}$$

***Приклад 5.1.*** Знайти оцінку максимальної правдоподібності параметрів $a$ і $\sigma$ нормального розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.4}$$

за вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

***Розв'язання.*** Складемо функцію правдоподібності

$$L(a,\sigma)=\frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (5.5)$$

Звідси

$$\ln L=-n\ln\sigma-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^n-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}. \qquad (5.6)$$

Відповідно до методу максимальної правдоподібності (5.3) розв'яжемо систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial a}=0;\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-na=0;\\ -n\sigma^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}a=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x};\\ \sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\bar{s}^2.\end{cases} \qquad (5.7)$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку для визначення точки екстремуму:

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial a^2}=-\frac{n}{\sigma^2};\qquad \frac{\partial^2\ln L}{\partial\sigma^2}=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{\sigma^4};\qquad \frac{\partial^2\ln L}{\partial a\partial\sigma}=-\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)}{\sigma^3}. \qquad (5.8)$$

Тоді

$$A=\left.\frac{\partial^2\ln L}{\partial a^2}\right|_{\substack{a=\bar{X}\\ \sigma=\bar{s}}}=-\frac{n}{\bar{s}^2}<0;\qquad C=\left.\frac{\partial^2\ln L}{\partial\sigma^2}\right|_{\substack{a=\bar{X}\\ \sigma=\bar{s}}}=\frac{n}{\bar{s}^2}-\frac{3\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\bar{s}^4}=-\frac{2n}{\bar{s}^2}; \qquad (5.9)$$

$$B=\left.\frac{\partial^2\ln L}{\partial a\partial\sigma}\right|_{\substack{a=\bar{X}\\ \sigma=\bar{s}}}=-\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{\bar{s}^3}=0;$$

оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0.$

Отже для $A, B, C$ (5.9) маємо

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{n}{\bar{s}^2}\right)\cdot\left(-\frac{2n}{\bar{s}^2}\right) = -\frac{2n^2}{\bar{s}^4} > 0 \quad \text{і} \quad A < 0\,,$$

тому функція $\ln L$ в точці $(\bar{x}, \bar{s}^2)$ має максимум.

Для параметрів $(a, \sigma^2)$ оцінкою максимальної правдоподібності є $(\bar{x}, \bar{s}^2)$.

***Застосування методу максимальної правдоподібності в задачі виявлення сигналу* (5.2).**

Функція правдоподібності визначається як: $L(S) = p(U|S)$ – це умовна ймовірність появи сигналу вимірювання $U$ при наявності корисного сигналу $S$, що приймає значення $S_i$ , тобто

$$L(S_1), L(S_2), \ldots, L(S_k).$$

Найбільш вірогідним є таке значення $S$, для якого функція правдоподібності максимальна. Таким чином вибирається максимальне значення max $(L(S_i))$, а звідси знаходиться відповідне значення $S_i$ .

***Процедура виявлення:***

1. Знайти вираз для $L(S)$.
2. Обчислить значення $L(S_i)$.
3. Знайти максимальне значення max $L(S_i)$ і звідси виходить значення $S_i$.

Для задачі виявлення сигналу можливо два значення $k$ =2 (так /ні): $S_0$, $S_1$ і відповідно $L(\gamma_0)$, $L(\gamma_1)$.

Таким чином, при використанні методу максимальної правдоподібності рішення про наявність сигналу приймається, якщо відношення функцій правдоподібності $L(\gamma_1)/L(\gamma_0)$ буде більше одиниці, тобто:

$$\frac{L(\gamma_1)}{L(\gamma_0)} = \Lambda > 1. \qquad (5.10)$$

***Приклад 5.2.*** Завада $v$ є випадкова величина типу «білий шум» з нормальним законом розподілу $N(0, \sigma^2)$, з нульовим середнім і дисперсією $\sigma^2$.

Визначити правило прийняття рішення з використанням методу максимальної правдоподібності.

***Розв'язання.*** Для нормального розподілу щільність ймовірностей випадкової величини $\nu$

$$f(\nu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{5.11}$$

Функції правдоподібності визначаються як умовні ймовірності

$$L(\gamma_1) = p(u \mid \gamma_1), \qquad L(\gamma_0) = p(u \mid \gamma_0).$$

Якщо рішення приймається за наявністю $k$ вимірювань, то для (5.11)

$$p(u \mid \gamma_1) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}(u_j - \gamma_1 s_j)^2\right\}, \tag{5.12}$$

$$p(u \mid \gamma_0) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}(u_j - \gamma_0 s_j)^2\right\}. \tag{5.13}$$

Знайдемо відношення функцій правдоподібності

$$\begin{aligned}\Lambda = \frac{p(\gamma_1)}{p(\gamma_0)} &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{k}(u_j - \gamma_1 s_j)^2 - \sum_{j=1}^{k}(u_j - \gamma_0 s_j)^2\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{k}(u^2{}_j - 2u_j s_j + s_j^2) - \sum_{j=1}^{k}u_j^2\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.14}$$

або

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\sum_{j=1}^{k}u_j s_j + \sum_{j=1}^{k}s_j^2\right]\right\} > 1. \tag{5.15}$$

Зручніше взяти логарифм цього виразу, тоді отримаємо

$$\ln\Lambda = -\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\sum_{j=1}^{k}u_j s_j + \sum_{j=1}^{k}s_j^2\right]\right\} > 0. \tag{5.16}$$

Звідси ***рішення про наявність корисного сигналу приймається, якщо***

$$2\sum_{j=1}^{k}u_j s_j - \sum_{j=1}^{k}s_j^2 > 0\ , \quad \text{або} \qquad \sum_{j=1}^{k}u_j s_j > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}s_j^2. \tag{5.17}$$

## 5.3. Метод максимуму апостеріорної ймовірності

При розгляді методу максимальної правдоподібності параметр, що оцінюється, розглядався як невідомий, про який немає ніякої інформації. Разом з тим, на практиці часто спостерігаються ситуації, коли невідомий параметр є випадковою величиною. Використання додаткової інформації дозволяє покращити якість оцінки параметру. В статистичній радіотехніці саме цей метод покладено в основу побудови теорії оптимальної нелінійної фільтрації випадкових процесів.

Нехай щільність ймовірностей $f(x,\theta)$ випадкової величини $X$ залежить від одного невідомого параметра $\theta$. Невідомий параметр $\theta$ є випадковою величиною з відомою щільністю ймовірностей $f(\theta)$. Визначимо умовну щільність ймовірностей параметру $\theta$ за умови, що отримана вибірка $x_1, x_2, ..., x_N$ випадкової величини $X$. Згідно з формулою Байєса

$$f(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta) f(\theta)}{f(x_1, x_2, ..., x_N)}, \qquad (5.18)$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$ – умовна щільність ймовірностей вибірки $x_1, x_2, ..., x_N$, за умови, що значення параметра $\theta$ відомо точно; $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ – безумовна щільність ймовірностей вибірки $x_1, x_2, ..., x_N$, яка розраховується за формулою

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta) f(\theta) d\theta .$$

Для репрезентативної вибірки з незалежними спостереженнями умовна щільність ймовірностей $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$ має вигляд

$$f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i \mid \theta) . \qquad (5.19)$$

За умови, що вибірка $x_1, x_2, ..., x_N$ відома, умовна щільність ймовірностей $f(x_1, x_2, ..., x_N \mid \theta)$ перетворюється у функцію правдоподібності $L(\theta)$, і формулу Байєса (5.18) можна переписати у вигляді

$$f(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{L(\theta) f(\theta)}{f(x_1, x_2, ..., x_N)} . \qquad (5.20)$$

Щільність ймовірностей $f(\theta)$ невідомого параметра $\theta$, яка відома до отримання вибірки (проведення експерименту) називається ***апріорною***. Умовна щільність ймовірностей $f(\theta | x_1, x_2, ..., x_N)$ параметру $\theta$ за умови, що отримана вибірка $x_1, x_2, ..., x_N$ називається ***апостеріорною***. Оцінка $\hat{\theta}$ параметру $\theta$, яка максимізує апостеріорну щільність ймовірностей $f(\theta | x_1, x_2, ..., x_N)$ називається ***оцінкою за максимумом апостеріорної щільності ймовірностей***.

За умови, що вибірка $x_1, x_2, ..., x_N$ відома, безумовна щільність ймовірностей вибірки $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ дорівнює константі і не впливає на положення точки екстремуму апостеріорної щільності ймовірностей. Тоді оцінка за максимумом апостеріорної щільності ймовірностей задовольняє вимозі

$$L(\hat{\theta}) f(\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(\theta) f(\theta). \tag{5.21}$$

Скориставшись, як і в методі максимуму правдоподібності, властивістю логарифму, переходять до пошуку максимуму функції $\ln(L(\theta) f(\theta))$ з рівняння

$$\frac{d \ln(L(\hat{\theta}) \prod_{i=1}^{N} f(x_i \mid \hat{\theta}))}{d\theta} = \frac{d \ln L(\hat{\theta})}{d\theta} + \sum_{i=1}^{N} \frac{d \ln f(x_i \mid \hat{\theta})}{d\theta} = 0. \tag{5.22}$$

Якщо щільність ймовірностей $f_{\bar{\theta}}(x)$ випадкової величини $X$ залежить від кількох невідомих параметрів $\bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_L)$, то повторюючи хід міркувань можна показати, що оцінка за максимумом щільності ймовірностей знаходиться шляхом вирішення системи рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{\partial \ln L(\hat{\bar{\theta}})}{\partial \theta_1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln f(x_i \mid \hat{\bar{\theta}})}{\partial \theta_1} = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \ln L(\hat{\bar{\theta}})}{\partial \theta_L} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln f(x_i \mid \hat{\bar{\theta}})}{\partial \theta_L} = 0. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Особливості пошуку оцінки за максимумом щільності ймовірностей на основі рішення системи рівнянь (5.23) аналогічні пошуку оцінки максимальної вірогідності.

Метод максимуму апостеріорної ймовірності забезпечую більш високу точність оцінювання у порівнянні з методом максимальної правдоподібності. Це обумовлено тим, що він враховує не тільки отримані у результаті експерименту апостеріорні дані, а також наявну апріорну інформацію щодо невідомих параметрів.

## 5.4. Метод максимуму апостеріорної ймовірності в задачі виявлення сигналів

***Метод максимуму апостеріорної ймовірності*** базується на формулі Байєа для умовної ймовірності (умовної ймовірності того, що був посланий сигнал $S$ за умови, що прийнятий сигнал $U$)

$$p(S\,|\,U) = \frac{p(U\,|\,S)\,p(S)}{p(U)}. \tag{5.24}$$

Для $k$ дискретних значень

$$p(S\,|\,U) = \frac{p(U\,|\,S)\,p(S)}{\sum_{j=1}^{k} p(S_j)\,p(U\,|\,S_j)}. \tag{5.25}$$

Для задачі виявлення сигналу $k$ =2 , тоді

$$p(\gamma_1\,|\,U) = \frac{p(U\,|\,\gamma_1)\,p(\gamma_1)}{p(\gamma_0)\,p(U\,|\,\gamma_0) + p(\gamma_1)\,p(U\,|\,\gamma_1)},$$

$$p(\gamma_0\,|\,U) = \frac{p(U\,|\,\gamma_0)\,p(\gamma_0)}{p(\gamma_0)\,p(U\,|\,\gamma_0) + p(\gamma_1)\,p(U\,|\,\gamma_1)}, \tag{5.26}$$

де $p(\gamma_1)$ – ймовірність появи сигналу, $p(\gamma_0) = 1 - p(\gamma_1)$ – ймовірність того, що сигнал відсутній.

Рішення про наявність сигналу приймається, якщо:

$$\frac{p(\gamma_1\,|\,U)}{p(\gamma_0\,|\,U)} > 1.$$

Після підстановки

$$\frac{p(\gamma_1 | U)}{p(\gamma_0 | U)} = \frac{p(U | \gamma_1) p(\gamma_1)}{p(U | \gamma_0) p(\gamma_0)} = \Lambda \frac{p(\gamma_1)}{p(\gamma_0)} > 1, \tag{5.27}$$

або $\Lambda > \dfrac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)}$, або $U > U_0$, де $U_0$ – значення порогу виявлення.

***Приклад 5.3.*** Завада $v$ є випадкова величина типу «білий шум» з нормальним законом розподілу $N(0, \sigma^2)$, з нульовим середнім і дисперсією $\sigma^2$.

Визначити правило прийняття рішення з використанням методу максимуму апостеріорної ймовірності.

***Розв'язання.***

Для прийняття рішення про наявність сигналу необхідно, щоб відношення функцій правдоподібності було

$$\Lambda > \frac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)}.$$

Після логарифмування отримуємо

$$\ln \Lambda > \ln \frac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)}.$$

За умови нормального розподілу похибки вимірів вище було визначено

$$\ln \Lambda = -\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[ -2 \sum_{j=1}^{k} u_j s_j + \sum_{j=1}^{k} s_j^2 \right] \right\} > 0, \tag{5.28}$$

тоді

$$-\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[ -2 \sum_{j=1}^{k} u_j s_j + \sum_{j=1}^{k} s_j^2 \right] \right\} > \ln \frac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)} \ . \tag{5.29}$$

Звідси

$$2 \sum_{j=1}^{k} u_j s_j - \sum_{j=1}^{k} s_j^2 > 2\sigma^2 \ln \frac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)}. \tag{5.30}$$

***Рішення про наявність сигналу приймається, якщо***

$$\sum_{j=1}^{k} u_j s_j > \sigma^2 \ln \frac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} s_j^2. \qquad (5.31)$$

Поріг $U_0$ для виявлення одиночного імпульсу ($k$ =1) на тлі завад, що є «білим шумом» з нормальним законом розподілу, може бути розрахований за формулою

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{S} \ln \frac{p(\gamma_0)}{p(\gamma_1)} + \frac{1}{2} S. \qquad (5.32)$$

Рішення про наявність сигналу приймається, якщо $U > U_0$.

**Прийняття рішення про виявлення сигналу супроводжується помилкою двох видів:**

1. Хибна тривога (помилка першого роду) – якщо за відсутністю корисного сигналу завада («чистий шум» ν) перевищує поріг виявлення $U_0$. Імовірність хибної тривоги (рис. 5.2):

$$P_F = \int_{U_0}^{\infty} f(v)dv. \qquad (5.33)$$

2. Пропуск цілі (помилка другого роду) – якщо за наявністю корисного сигналу прийнятий сигнал не перевищує поріг $U_0$. Ймовірність пропуску сигналу:

$$P_M = 1 - P_D, \qquad (5.34)$$

де $P_D = \int_{U_0}^{\infty} f(U)dU$ – ймовірність вірного виявлення сигналу (рис. 5.3).

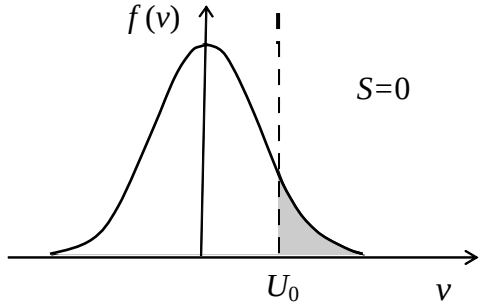



Рис. 5.2. Ймовірність хибної тривоги

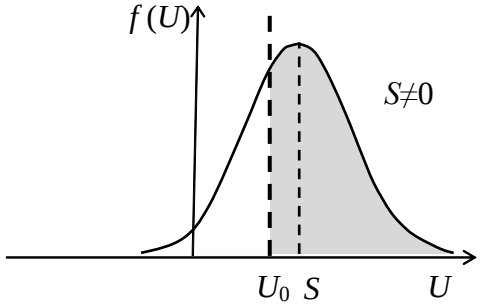



Рис. 5.3. Ймовірність вірного виявлення

**Завдання 1.** Розрахувати і побудувати графік залежності значення порога виявлення від ймовірності появи сигналу при виявленні одиночного сигналу за методом максимуму апостеріорної ймовірності.

**Завдання 2.** Розрахувати і побудувати графіки залежності ймовірності правильного виявлення, ймовірності пропуску цілі та ймовірності хибної тривоги від ймовірності появи сигналу при виявленні одиночного сигналу за методом максимуму апостеріорної ймовірності.

**Завдання 3.** Вирішити завдання, що вказано у **завданні 2**, методом статистичного моделювання на комп'ютері.

***Вихідні дані:***

Приймається сигнал: $U = \gamma S + \nu$.

Нормоване значення корисного сигналу: $S = 1$.

Завада $\nu$ розподілена за нормальним законом: $N(0, \sigma^2)$; $\sigma$ – задається.

***Примітка.*** Для обчислення необхідних ймовірностей шляхом інтегрування можна скористатися функцією MATLAB **normcdf.**

**Синтаксис:** p = normcdf(x, mu, sigma)

x – вектор, що включає границі зміни випадкової величини, розподіленої за нормальним законом;

mu – математичне сподівання;

sigma – середньоквадратичне значення;

p – масив результатів обчислення;

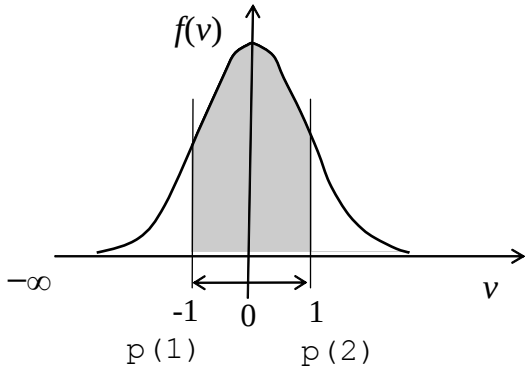
p(1) – перший елемент масиву – ймовірність знаходження у діапазоні від $-\infty$ до першої границі;

p(2) – другий елемент масиву – ймовірність знаходження у діапазоні від $-\infty$ до другої границі.

***Приклад.*** Визначити ймовірність того, що значення випадкової величини $\nu$, розподіленої за нормальним законом з нульовим математично сподіванням і одиничною дисперсією, буде знаходитися в інтервалі від –1 до + 1.

```
p = normcdf([-1 1],0,1);
E=p(2)-p(1)

E =
   0.6827
```



**Література до теми 5:** [1–3], [5–15], [18].

### *Контрольні запитання*

1. Що називається функцією правдоподібності і як вона визначається?
2. Як визначається максимальне значення функції правдоподібності?
3. Що дає логарифмування функції правдоподібності?
4. Вкажіть властивості оцінки за методом максимальної правдоподібності.
5. Наведіть процедуру знаходження оцінки параметрів за методом максимальної правдоподібності.
6. Дайте математичну постановку задачі виявлення сигналу. Варіанти прийняття рішень, види помилок.
7. Покажіть застосування методу максимальної правдоподібності в задачі виявлення сигналу.
8. На чому полягає метод максимуму апостеріорної ймовірності?
9. Вкажіть на відмінності методу максимуму апостеріорної ймовірності від методу максимальної правдоподібності.
10. Покажіть застосування методу максимуму апостеріорної ймовірності для вирішення задачі виявлення сигналу.
11. Вкажіть, яку апріорну інформацію необхідно мати для застосування методу максимальної правдоподібності та методу максимуму апостеріорної ймовірності?

# Тема 6. Метод найменших квадратів в задачі обробки результатів радіонавігаційних вимірів

Основним завданням систем спостереження за рухомими об’єктами є визначення та прогнозування траєкторій руху за даними вимірювань траєкторних параметрів з метою безперервного відстеження рухомих об’єктів. Це називається вторинним обробленням сигналів, де на відміну від первинного етапу виконується оброблення не поодинокого сигналу а сукупності даних, що надходять послідовно.

Класичним методом оптимальної обробки даних для оцінки параметрів траєкторії є метод найменших квадратів (МНК). МНК також застосовується для розв’язання задачі лінійної регресії.

## 6.1. Задача регресійного аналізу

Лінійний регресійний аналіз об'єднує широке коло завдань, пов'язаних з побудовою функціональних залежностей між двома групами числових змінних: $x_1, \dots, x_p$ і $y_1, \dots, y_q$ .

Для стислості об'єднаємо $x_1, \dots, x_p$ в багатовимірну змінну $\boldsymbol{x}$, а $y_1, \dots, y_q$ – в змінну $\boldsymbol{y}$, і будемо говорити про дослідження залежності між $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$. При цьому ми будемо вважати $\boldsymbol{x}$ незалежною змінною, що впливає на значення $\boldsymbol{y}=\{y_1, \dots, y_q\}$. Залежна змінна $\boldsymbol{y}$ також називається відгуком, а $\boldsymbol{x}=\{x_1, \dots, x_p\}$ – фактором, що впливають на відгук.

*Початкові дані.* Статистичний підхід до задачі побудови (точніше, відновлення) функціональної залежності $\boldsymbol{y}$ від $\boldsymbol{x}$ ґрунтується на припущенні, що нам відомі деякі вихідні (експериментальні) дані $(x_i, y_i)$, де $y_i$ – значення відгуку за заданим значенням фактора $x_i$, а $i$ змінюється від 1 до $n$. Пару значень $(x_i, y_i)$ часто називають результатом одного виміру, а $n$ – числом вимірів.

*Регресійна модель.* Припустимо, що значення відгуку $\boldsymbol{y}$, що спостерігаються, можна подумки розділити на дві частини: одна з них закономірно залежить від $\boldsymbol{x}$, тобто є функцією $\boldsymbol{x}$; інша частина – випадкова по відношенню до $\boldsymbol{x}$. Позначимо першу через $f(\boldsymbol{x})$, другу через $\boldsymbol{\varepsilon}$ і представимо відгук $\boldsymbol{y}$ вигляді

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{6.1}$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}$ – деяка випадкова величина. Випадковий доданок $\boldsymbol{\varepsilon}$ висловлює або

внутрішньо притаманну відгуку мінливість, або вплив на нього факторів, не врахованих в співвідношенні (6.1), або те й інше разом. Іноді **ε** називають помилкою експерименту, пов'язуючи її присутність з недосконалістю методу вимірювання $\boldsymbol{y}$. Застосовуючи співвідношення (6.1) до наявних вихідних даних, отримуємо

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i=1,..., n .$$

**Лінійний регресійний аналіз**

Задача регресійного аналізу називається лінійним регресійним аналізом, якщо функція $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})$ лінійно залежить від параметрів $\boldsymbol{a}$,

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \tag{6.2}$$

де $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ – деяка відома матриця, елементи якої залежать від $\boldsymbol{x}$, а $\boldsymbol{a}$ – вектор, складений з невідомих параметрів.

Наприклад, в найпростішої одновимірної задачі лінійної регресії передбачається, що зв'язок між $x$ і $y$ має вигляд

$$y = a_0 + a_1 x + \varepsilon, \tag{6.3}$$

де $a_0$, $a_1$ – невідомі параметри. Тоді $\boldsymbol{a}$ це двовимірний параметр $\{a_0, a_1\}$.

## 6.2. Формулювання методу найменших квадратів

***Визначення.*** Методом найменших квадратів (МНК) називається спосіб підбору параметрів регресійної моделі, виходячи з мінімізації суми квадратів залишків (нев’язок).

***Формулювання МНК зводиться до наступного.*** Отримані результати $\boldsymbol{n}$ спостережень (вимірювань) величини $\boldsymbol{y}$ $(y_1, \ldots , y_n)$ пов’язані з $\boldsymbol{m}$ параметрами $\boldsymbol{a}(a_0, a_1 ,...,a_m)$, які необхідно оцінити, функціональною залежністю

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}), \tag{6.4}$$

де $\boldsymbol{x}$ – вектор відомих значень величин $(x_1, x_2 ,..., x_n)$.

При цьому вимірювання (спостереження) $\boldsymbol{y}$ здійснюються з помилками $\boldsymbol{e}$, які є адитивними, тобто

$$y_i^* = y_i + e_i = f(x_i,\boldsymbol{a}) + e_i . \tag{6.5}$$

Таким чином невідомими є параметри $a_0,\ldots,a_m$ (вектор $\boldsymbol{a}$).

Помилка оцінки параметрів $\boldsymbol{a}$ визначаються виразом

$$\varepsilon = y - f(x,\hat{\boldsymbol{a}}), \tag{6.6}$$

тобто ***залишками.*** Величину ε називають також ***нев'язкою***.

В МНК в якості критерію приймається min суми квадратів нев'язок для всіх оцінюваних параметрів, тобто

$$J = \sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i,\hat{a})]^2 \to \min_a . \tag{6.7}$$

Для визначення умови, при якої справедлива ця вимога, необхідно знайти похідні за кожним з оцінюваних параметрів і прирівняти їх до нуля, тобто

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a_0} = 0; \\ \dfrac{\partial J}{\partial a_1} = 0; \\ \vdots \\ \dfrac{\partial J}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Оцінки параметрів визначаються в результаті розв'язання отриманої лінійної системи рівнянь щодо параметрів, які оцінюються.

***Приклад 6.1***. Результати ***n*** спостережень (вимірювань) величини $\boldsymbol{y}$ ($y_1,..,y_n$) пов'язані тільки з одним невідомим параметром $a$, який необхідно оцінити, функціональною залежністю

$$y = f(x,a) = a = \text{const},$$

тобто

$$y^* = a + e, \quad y_1,...,y_n.$$

Запишемо суму квадратів нев'язок

$$J = \sum_{i=1}^{n}[y_i^* - a]^2 \to \min_a .$$

Диференціюючи за параметром $a$ і прирівнюючи отриманий результат до нуля, знайдемо оцінку параметра

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i^* - a] = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^* - \sum_{i=1}^{n} a = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^*,$$

тобто оцінка визначається як середнє значення наявних $n$ спостережень.

## 6.3. Метод найменших квадратів у регресійному аналізі

### Метод найменших квадратів у розв'язанні задачі лінійної регресії

Цей випадок широко застосовується на практиці. Так називають задачу регресії, в якій $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ – одномірні величини (тому ми будемо позначати їх $x$ і $y$), а функція має вигляд (рис. 6.1)

$$f(x, \boldsymbol{a}) = a_0 + a_1 x, \tag{6.9}$$

де $\boldsymbol{a} = \{a_0, a_1\}$.

В цьому випадку

$$y_i^* = a_0 + a_1 x_i + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{6.10}$$

Тут $x_1, \ldots, x_n$ – задані числа (значення фактора); $y_1^*, \ldots, y_n^*$ – спостережені значення відгуку; $e_1, \ldots, e_n$ – незалежні (не спостережувані) однаково розподілені випадкові величини.

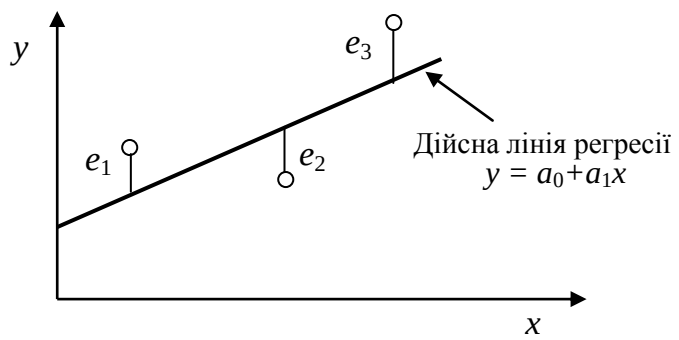



Рис. 6.1. Лінійна регресія

Для функціонального зв’язку (6.9)

$$J = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)]^2 \to \min_{a_0, a_1},$$

а система рівнянь похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial \hat{a}_0} = -2\sum\left(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i\right) = 0; \\ \dfrac{\partial J}{\partial \hat{a}_1} = -2\sum\left(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i\right) x_i = 0, \end{cases} \tag{6.11}$$

звідси

$$\begin{cases} \sum^{n} y_i = n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum^{n} x_i \ ; \\ \sum^{n} y_i x_i = \hat{a}_0 \sum^{n} x_i + \hat{a}_1 \sum^{n} x_i^2 \ . \end{cases} \tag{6.12}$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь щодо шуканих параметрів за правилом Крамера, отримаємо

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = \Delta_1 / \Delta; \\ \hat{a}_1 = \Delta_2 / \Delta, \end{cases} \tag{6.13}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum^{n} x_i \\ \sum^{n} x_i & \sum^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum^{n} x_i^2 - \left(\sum^{n} x_i\right)^2; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum^{n} y_i & \sum^{n} x_i \\ \sum^{n} y_i x_i & \sum^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = \sum^{n} y_i \sum^{n} x_i^2 - \sum^{n} y_i x_i \sum^{n} x_i;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} n & \sum^{n} y_i \\ \sum^{n} x_i & \sum^{n} y_i x_i \end{vmatrix} = n\sum^{n} y_i x_i - \sum^{n} x_i \sum^{n} y_i \ .$$

## Розв’язання задачі регресії для поліноміальної моделі

У загальному випадку для поліноміальної моделі степеня $m$

$$y = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \tag{6.14}$$

маємо систему рівнянь для оцінки коефіцієнтів (параметрів) моделі, яка має вигляд

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum^{n} x_i + a_2 \sum^{n} x_i^2 + \cdots + a_m \sum^{n} x_i^m = \sum^{n} y_i \,; \\ a_0 \sum^{n} x_i + a_1 \sum^{n} x_i^2 + a_2 \sum^{n} x_i^3 + \cdots + a_m \sum^{n} x_i^{m+1} = \sum^{n} y_i \, x_i \,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 \sum^{n} x_i^m + a_1 \sum^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum^{n} x_i^{m+2} + \cdots + a_m \sum^{n} x_i^{m+n} = \sum^{n} y_i \, x_i^m \,. \end{cases} \tag{6.15}$$

Для степеня $m$=1: $y = a_0 + a_1 x$ і ця система запишеться як

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum^{n} x_i = \sum^{n} y_i \,; \\ a_0 \sum^{n} x_i + a_1 \sum^{n} x_i^2 = \sum^{n} y_i \, x_i \,, \end{cases} \tag{6.16}$$

тобто маємо систему рівнянь простої лінійної регресії (6.12), яка вирішується за виразом (6.13)

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = \Delta_1 / \Delta; \\ \hat{a}_1 = \Delta_2 / \Delta. \end{cases}$$

**Задача 1.** Записати вираз для розрахунку оцінок параметрів $a_0$ , $a_1$ для поліноміальної моделі степеня $m$=1 (6.16).

***Методичні вказівки.***

Система (6.16) розв’язується з використанням правила Крамера.

**Задача 2.** Записати рішення системи рівнянь (6.16) в матричному вигляді.

***Методичні вказівки.***

1. Ввести до розгляду вектори та матрицю:

– вектор невідомих параметрів

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^T; \tag{6.17}$$

– вектор виміряних значень

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & \cdots & y_n^* \end{bmatrix}^T; \tag{6.18}$$

– матрицю $X$ розміром $n \times 2$, де перший стовбець складається з одиниць, а другий стовпець – зі значень $x$, які є відомими

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T. \tag{6.19}$$

2. Для заданих векторів і матриці записати у матричному вигляді операції, що відповідають левій частини системи рівнянь, і так само для правої частини.

3. Перетворити отримане матричне рівняння відносно вектора невідомих параметрів, пам'ятаючи, що для матричних перетворень $C^1C^{-1} = I$, де $I$ - одинична матриця, і $IC=C$.

## 6.4. Задача оцінки координат і швидкості рухомого об'єкта за результатами вимірювань

**Завдання для самостійного виконання**

***Постановка завдання.***

Координати $x$, $y$ рухомого об'єкту, якій рухається з постійною швидкістю, вимірюються і надходять в $i$-й момент часу $t_i$. Вимірювання можуть відбуватися через постійний інтервал часу (тобто равнодіскретні вимірювання) або через нефіксовані інтервали часу (нерівнодискретні вимірювання). Для кожної виміряної координати, наприклад $x$, її виміри, позначені як $x^*$, для моменту вимірювання $t_i$ можна записати:

$$\begin{aligned} x^*(t_1) &= x_0 + V_x t_1; \\ x^*(t_2) &= x_0 + V_x t_2; \\ &\vdots \\ x^*(t_n) &= x_0 + V_x t_n, \end{aligned} \tag{6.20}$$

де $x_0$ – координата початкового положення об’єкту для моменту $t_0$; $V_x$ – швидкість руху вздовж цієї координати.

Аналогічне дається постановка для іншої координати $y$.

Більш реалістичним буде розглядати рух об’єкту с заданим курсом $\psi$ і шляховою швидкістю $V$. Тоді належіть задавати швидкості $V_x$ , $V_y$ як проекції (складові) вектора шляхової швидкості на відповідні вісі координат, використовуючи значення заданого курсу $\psi$ (рис. 6.2).

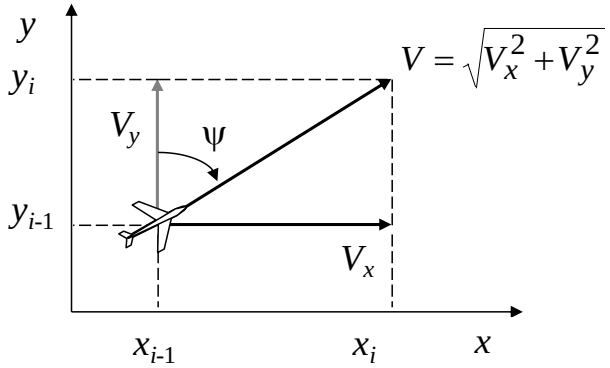



Рис. 6.2. Розкладання вектора швидкості на складові

Якщо вимірювання відбуваються через фіксований інтервал часу, що дорівнює $T$ (рівнодискретні вимірювання), то $t_i - t_{i-1} = T$.

**Задача.** Оцінити параметри траєкторії (тобто координати і швидкість) об'єкта, якій не маневрує і рухається з постійною швидкістю $V$ = const, за даними вимірів координат $x$, $y$ , що надходять через рівні проміжки часу в моменти $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$. Вимірювання координат виконуються з випадковими похибками $v_x$, $v_y$, які характеризуються дисперсією $\sigma_v^2$ (приймається рівноточне вимірювання для обох координат).

Для такої задачі невідомими є значення початкових координат $x_0, y_0$ і швидкості повздовж відповідних координат $V_x, V_y$.

Треба відмітити, що задача вирішується роздільно для координати $x$ і координати $y$.

**Порядок виконання:**

1. Записати систему виміряних значень координат для відповідних моментів часу, використовуючи систему (6.20) з урахування похибок вимірів.

2. Для координати $x$ записати систему у вигляді поліноміальної моделі першого порядку, для якої

$$a_0 = x_0; \qquad a_1 = V_x; \qquad x_{i1} = 1; \qquad x_{i2} = t_i.$$

3. Записати вирази для знаходження невідомих параметрів $x_0$ і $V_x$ шляхом розв’язання цієї системи.

4. Змоделювати на комп'ютері траєкторію польоту об’єкту уздовж осі координат $x$ відповідно до виразу: $x(t) = x(0) + V_x t$. При цьому задати:

– координату початкової точки $x(0)$ (для налагодження програми задати, наприклад, $x(0) = 0$);

– швидкість польоту уздовж осі координат $x$ як $V_x = V \sin\psi$ (для налагодження програми задати, наприклад, $V$= 150 м/с , $\psi$=45°);

– період надходження вимірів, наприклад, $T$ = 5 с;

– число точок локації, наприклад $n$ = 10.

5. Зімітувати виміри координати $x$ для заданих моменті часу відповідно до виразу:

$$x^*(i) = x(i) + v_x(i),$$

де $v_x(i)$ – похибки вимірювання координати $x$, при цьому задати математичне сподівання $M[v] = 0$, а також середньоквадратичне значення похибки, наприклад $\sigma_v$=100 м.

6. Отримати рішення системи рівнянь щодо невідомих параметрів за виразами, отриманими за пунктом 3 порядку виконання.

7. За отриманими оцінками $\hat{x}_0$ і $\hat{V}_x$ розрахувати оцінки координати $\hat{x}(i)$ для всіх моментів $t_i$ надходження вимірів.

8. Графічно порівняти значення вимірів координати $x$*, оцінки координати $\hat{x}$ та дійсні значення $x$.

Для повного рішення задачі треба повторити вказану процедуру для координати $y$.

**Література до теми 6:** [4–8], [12–14].

## *Контрольні запитання*

1. У чому полягає задача регресійного аналізу?
2. Які припущення приймаються в регресійному аналізі?
3. Як формулюється задача побудови регресійної моделі?
4. Дайте класифікацію видів регресії.
5. Наведіть приклади регресійних моделей.

6. Наведіть критерій, за яким знаходяться невідомі параметри регресійної моделі.
7. Якою є процедура класичного регресійного аналізу?
8. Які моделі називають лінійними? Що називають порядком регресійної моделі?
9. Яким є загальний вигляд поліноміальної регресійної моделі?
10. Сформулюйте постановку методу найменших квадратів.
11. Запишіть критерій оцінки, який використовується у методі найменших квадратів.
12. На прикладі покажіть у чому полягає фізичний зміст коефіцієнтів регресійної моделі, які визначаються за методом найменших квадратів.
13. Що називається нев'язкою у методі найменших квадратів і як вона пов'язана з помилками вимірів?
14. Що означає рівноточність і рівнодискретність у вимірюваннях?
15. Надайте послідовність знаходження оцінок за методом найменших квадратів на прикладі лінійної моделі.
16. Для лінійної моделі, що описує рух об'єкту, покажіть як знаходяться оцінки координат траєкторії руху при обробці вимірів за методом найменших квадратів.

# Розділ 5. Теорія ймовірностей в радіотехніці

## Тема 7. Випадкові потоки. Системи масового обслуговування

В області телекомунікацій застосовуються таки розділи теорії ймовірностей як випадкові процеси, потоки і теорія масового обслуговування

Для дослідження системи комутації або мережі зв'язку, визначення її пропускної здатності і характеристик якості обслуговування широко застосовується теорія масового обслуговування, що розроблена для дослідження систем масового обслуговування (СМО).

В самих різних областях практики має місце необхідність у вирішенні своєрідних ймовірнісних задач, пов'язаних з роботою систем масового обслуговування. Прикладами таких систем можуть служити: телекомунікаційні системи, телефонні станції, транспортні системи, пасажиропотоки, довідкові бюро і т. і. Кожна така система складається з якогось числа обслуговуючих одиниць, які називають «каналами» обслуговування. В якості каналів можуть фігурувати: лінії зв'язку; транспортні лінії; різні прилади; оператори, які виконують певні операції і т. і. Системи масового обслуговування можуть бути як одно-, так і багатоканальними.

Робота будь-якої системи масового обслуговування полягає у виконанні потоку вимог або заявок, що надходить до неї. Заявки надходять одна за одною в деякі, взагалі кажучи, випадкові, моменти часу. Обслуговування прийнятої заявки триває деякий час і канал після звільнення знову готовий для прийому заявок. Кожна система масового обслуговування характеризується пропускною спроможністю, яка залежить від числа каналів і їх продуктивності.

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення залежності між характером потоку заявок, продуктивністю окремих каналів, числом каналів і ефективністю обслуговування.

В якості показників ефективності роботи системи обслуговування можуть застосовуватися різні величини і функції, наприклад: середній відсоток заявок, які отримують відмову і залишають систему без обслуговування; середній час «простою» каналів і системи в цілому; середній час очікування заявок у черзі; ймовірність того, що заявка, яка надійшла, негайно буде прийнята до обслуговування; закон розподілу довжини черги і т.д. Кожна з цих характеристик в кінцевому результаті дає розуміння про пропускну здатність системи обслуговування.

## 7.1. Випадкові потоки сигналів, їх види, характеристики та моделювання

Випадкові потоки визначається характером фізичних процесів, що перебігають у інформаційних системах.

Потоки можуть мати різну структуру й інтенсивність. Потоки розділяють на однорідні й неоднорідні, випадкові й регулярні, стаціонарні й нестаціонарні, ординарні й неординарні, без післядії, з обмеженою післядією і з післядією загального виду.

Потік подій однорідний, якщо він характеризується тільки моментами надходження цих подій. Неоднорідний потік характеризується додатковим набором ознак.

Регулярним називають потік, у якому події випливають одна за одною через строго визначені проміжки часу.

Потік називають стаціонарним, якщо ймовірність надходження визначеної кількості вимог протягом визначеного відрізка часу залежить від його величини і не залежить від початку його відліку на осі часу, тобто не залежить від того, де саме на осі часу розміщено цей відрізок.

Потік є ординарним, якщо ймовірність улучення на елементарну ділянку двох і більше подій дуже мала порівняно з ймовірністю влучення однієї події. Це означає практичну неможливість появи двох і більше вимог у той самий момент часу.

Потік подій називають потоком без післядії, якщо для будь-яких непересічних ділянок часу кількість подій, що потрапляють на одну із них, не залежить від кількості подій, що потрапляють на інші. Відсутність післядії припускає взаємну незалежність перебігу процесу в інтервалах часу, які між собою не перекриваються.

Потоком з обмеженою післядією називають потік, для якого проміжки часу між послідовними подіями являють собою незалежні випадкові величини.

Потік, що має три основні властивості: стаціонарність, відсутність післядії й ординарність – називають найпростішим.

У переважній кількості завдань, особливо прикладного характеру, розглядають пуассонівський потік, що має властивості ординарності і відсутності післядії.

***Стаціонарний пуассонівський потік*** називають найпростішим. Ймовірність надходження $k$ вимог за проміжок часу $t$ у такому потоці задається формулою Пуассона (рис. 7.1):

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (7.1)$$

де $\lambda$ – щільність потоку вимог.

Зокрема, ймовірність того, що за час $t$ не надійде жодної заявки, буде $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

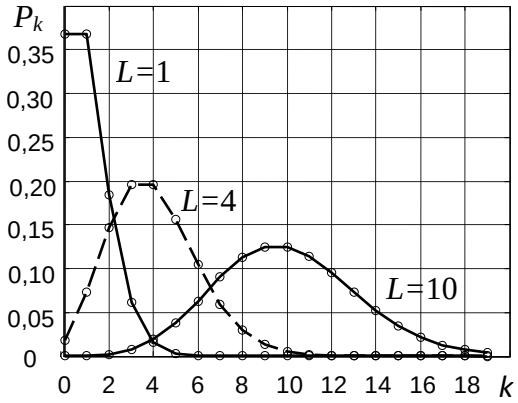



Рис. 7.1. Пуассонівський закон розподілу $P(X = k) = \frac{L^k}{k!} e^{-L}$

***Потік Пальма*** є потоком з обмеженою післядією, у якому інтервали часу $\tau_1, \tau_2, \ldots$ між послідовними подіями являють собою незалежні випадкові величини з щільністю розподілу $f(\tau_i)$. Стаціонарний пуассонівський потік (найпростіший потік) є окремим випадком стаціонарного потоку Пальма, у якому інтервали часу між сусідніми подіями розподілені за показовим законом.

Щільність розподілу першого інтервалу визначають за формулою

$$f_1(\tau_1) = \lambda \left[ 1 - \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau \right] = \lambda \left[ 1 - F(\tau_1) \right], \qquad (7.2)$$

де $\lambda = \left[ \int_0^{\infty} \tau \, f(\tau) d\tau \right]^{-1}$.

Процедура моделювання стаціонарного потоку Пальма із заданою щільністю розподілу інтервалів $f(\tau)$ аналогічна процедурі моделювання пуассонівського потоку:

– спочатку за формулою Пальма (7.2) визначають щільність розподілу першого інтервалу $f_1(\tau_1)$;

– використовуючи один з методів моделювання випадкової величини, за заданою щільністю $f_1(\tau_1)$ знаходять значення першого інтервалу $\tau_1$;

– визначають момент появи першої події $t_1 = t_0 + \tau_1$;

– моделюють послідовність $\tau_i$ випадкових величин, що відповідають заданій щільності розподілу $f(\tau)$ інтервалів часу між подіями і визначають моменти появи подій у потоці $t_i = t_{i-1} + \tau_i, \quad i \geq 2.$

***Потік Ерланга*** є потоком з обмеженою післядією, що випливає з розрідження найпростішого потоку. Потік Ерланга *k*-го порядку виходить, якщо в потоці залишається кожна *k*-та подія, а інші відкидаються. Інтервали між подіями визначають як суму сусідніх інтервалів вихідного найпростішого потоку подій. Щільність розподілу інтервалів у потоці Ерланга *k*-го порядку визначають виразом

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0. \tag{7.3}$$

За досить великого *k* потік Ерланга можна вважати приблизно нормальним з математичним сподіванням $k/\lambda$ і дисперсією $k/\lambda^2$.

## 7.2. Моделювання пуассонівського потоку

У найпростішому потоці інтервали часу $\tau$ між двома сусідніми подіями розподілено за показниковим законом з параметром $\lambda$, тобто $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$.

Властивість стаціонарного пуассонівського потоку дозволяє розробити досить простий алгоритм моделювання. Для цього задають момент надходження першої заявки $t_1$, а потім, послідовно задаючи випадковим чином значення інтервалів часу $\tau_i$, розподілених за показниковим законом, визначають моменти надходження наступних заявок:

$$t_2 = t_1 + \tau_1; \quad t_3 = t_2 + \tau_2; \quad \ldots t_{i+1} = t_i + \tau_i. \tag{7.4}$$

Для моделювання випадкової величини, що відповідає інтервалам часу τ, розподіленим за показниковим законом, можна використати метод обернених функцій. Відповідно до цього методу процедура перетворення рівномірно розподілених на інтервалі [0,1] випадкових чисел $r_i$ у випадкові числа $\tau_i$ із показниковим законом розподілу зводиться до розв'язання щодо $\tau_i$ рівняння

$$\int_{-\infty}^{\tau_i} f(\tau) d\tau = r_i, \quad \text{або} \quad \int_{-\infty}^{\tau_i} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = r_i. \tag{7.5}$$

Після обчислення інтеграла одержимо $1-e^{-\lambda\tau_i}=r_i$. Розв'язуючи це рівняння щодо $\tau_i$, визначимо $\tau_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i)$ або з огляду на те, що випадкові числа $(1-r_i)$ мають також рівномірний закон розподілу на інтервалі [0,1], $\tau_i=-\frac{1}{\lambda}\ln r_i$.

## 7.3. Обслуговуючи системи та їх характеристики

Системи масового обслуговування – це клас математичних систем, розроблених у теорії масового обслуговування для формалізації процесів функціонування систем, призначених для обслуговування якихось подій (заявок, вимог).

Основними компонентами СМО є вхідні потоки заявок, що обслуговує система, черги заявок, прилади (канали, лінії) обслуговування, вихідні потоки.

Основне завдання теорії масового обслуговування – визначення кількісних показників функціонування СМО і їх залежностей від параметрів вхідного потоку, структури системи, технології обслуговування.

Загальною особливістю завдань, пов'язаних з СМО, є випадковий характер досліджуваних явищ.

Прилад обслуговування ( П ), що складається з нагромаджувача заявок (Н) та каналу обслуговування заявок ( К ), зображено на рис 7.2.

У нагромаджувача може одночасно перебувати $l=\overline{0,L}$ заявок, де $L$ – ємність нагромаджувача. На кожен елемент приладу обслуговування надходять потоки подій: у нагромаджувач надходить потік заявок $\lambda$, а в канал – потік обслуговувань $u$. На виході приладу формується вихідний потік обслугованих заявок $y$.

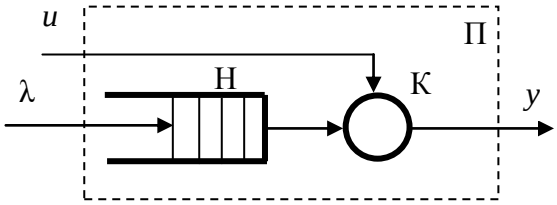



Рис. 7.2. Схема обслуговуючого приладу

Обслуговуюча система характеризується структурними характеристиками та дисциплінами очікування й обслуговування. За складом СМО поділяють на системи з одним обслуговуючим приладом (одноканальні) і з багатьма

приладами обслуговування (багатоканальні). Багатоканальні системи можуть складатися з однотипних і різнотипних приладів. Канал може обслуговуватись за один етап (за одну фазу) чи за кілька етапів (багатофазні системи). Значного поширення набула класифікація СМО за часом перебування вимог у системі до початку обслуговування: системи з відмовою, системи з необмеженим часом очікування і системи змішаного типу.

Систему масового обслуговування називають системою з відмовою (втратою), якщо заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, негайно одержує відмову і залишає систему (губиться).

За наявності вільних каналів можна розглядати різні алгоритми розподілу заявок по каналах: строгий (невипадковий) чи випадковий (хаотичний) розподіл по вільних каналах.

Систему масового обслуговування називають системою з очікуванням, якщо заявка, що застала всі канали зайнятими, стає в чергу і чекає, поки не звільниться який-небудь канал. Якщо час очікування в черзі необмежений, то система є «чистою системою з очікуванням». Якщо час обмежений якимись умовами, то систему називають «системою змішаного типу».

Одна з найважливіших характеристик СМО – час обслуговування $t_{\text{об}}$.

Найбільш часто досліджують такі показники функціонування СМО:

– ймовірність втрати вимоги (відмова обслуговування): $P_{\text{відм}}$;

– ймовірність того, що обслуговуванням вимог у системі зайнято $k$ приладів: $P_k$;

– середню кількість зайнятих приладів (каналів), що характеризує ступінь завантаження системи: $N_{\text{З}} = \sum_{k=1}^{n} kP_k$;

– середню кількість вільних каналів: $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k$;

– коефіцієнт простою приладів: $K_{\text{п}} = \dfrac{N_0}{n}$;

– коефіцієнт зайнятості устаткування: $K_{\text{з}} = \dfrac{N_{\text{з}}}{n}$;

– середній час очікування в черзі за наявності $n$ приладів: $\bar{t}_{\text{оч}} = \int_0^{\infty} t\, dP(t_{\text{оч}} > t)$, де $P(t_{\text{оч}} > t) = \sum_{k=0}^{n} P_k P_k(t_{\text{оч}} > t)$; $P_k(t_{\text{оч}} > t)$ – умовна ймовірність того, що час очікування $t_{\text{оч}} > t$ за умови, що в момент надходження вимог у системі вже обслуговувалися $k$ вимог;

– ймовірність того, що час перебування в черзі не буде тривати більше визначеного: $P(t_{\text{оч}} < t) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k P_k(t_{\text{оч}} < t)$;

– середню довжину черги: $Q = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) P_k$ якщо $k \geq n$, де $P_k$ – ймовірність того, що в системі міститься $k$ вимог;

– середню кількість вимог, що перебувають у системі: $E = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = Q + N_з$;

– ймовірність того, що кількість вимог у черзі більша від деякої кількості: $P(k > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k$ .

Для оцінювання ефективності СМО можна використовувати також вартісні показники: вартість обслуговування заявки; вартість втрат через чергу; вартість збитків через відмову обслуговування; вартість одиниці часу простою СМО; вартість експлуатації приладів СМО.

Суть імітаційного моделювання СМО на комп’ютері полягає в такому:

– складають алгоритми, за допомогою яких формуються потоки вхідних вимог із заданими характеристиками;

– моделюють процеси, що перебігають у СМО;

– багаторазово відтворюють процеси обслуговування;

– отримані результати статистично обробляють для визначення показників ефективності СМО.

## 7.4. Моделювання обслуговуючих систем

Моделюючи обслуговуючу систему потрібно описати крім структури системи також алгоритм її функціонування, що являє собою набір правил поведінки заявок у системі в різних неоднозначних ситуаціях. Неоднорідність заявок враховується за допомогою введення класів пріоритетів.

Для деяких типів СМО дуже складно виконувати аналітичне розв’язання задач, пов’язаних з їх функціонуванням. Так, нестаціонарна фаза навіть для найпростіших систем потребує складних математичних методів.

Теоретичні висновки й аналітичні вирази можуть бути незручними для розв’язання прикладних задач. Розрахунки значно спрощуються за припущення, що процеси в СМО є марківськими.

На практиці інтерес становить випадок, коли величина часу обслуговування заявок $t_{\text{об}}$ має показниковий розподіл:

$$f(t_{об}) = \mu e^{-\mu t_{об}}, \qquad t_{об} > 0 \text{ (7.6)}, \tag{7.6}$$

де $\mu$ – величина, обернена середньому часу обслуговування однієї заявки: $\mu = 1/m_{t_{об}}$; $m_{t_{об}} = M[t_{об}]$.

Теоретичні результати дослідження СМО зазвичай потребують експериментальної перевірки. Точність числових оцінок залежить передусім від цілей дослідження й адекватності математичного опису системи, а також від обраних показників ефективності, їх взаємозв'язку.

Ефективним методом дослідження й оцінювання числових параметрів СМО є статистичне моделювання. Суть методу статистичного моделювання полягає в побудові для процесу функціонування досліджуваної системи деякого моделювального алгоритму, що імітує поведінку системи і взаємодію елементів системи з урахуванням випадкових вхідних впливів і впливів зовнішнього середовища, і реалізації цього алгоритму на комп'ютері.

Розглянемо алгоритм моделювання простої одноканальної СМО, схему якого показано на рис. 7.3.

Мета моделювання – оцінювання ймовірності відмови й ймовірності обслуговування заявок.

У блоці 2 формуються випадкові послідовні моменти $t_i$ надходження заявок на обслуговування відповідно до заданої щільності $f(\tau)$ розподілу інтервалів $\tau$ між заявками.

Блок 4 перевіряє зайнятість каналу обслуговування із надходженням чергової $i$-ї заявки.

Якщо заявка, що надійшла, застає канал вільним, то фіксується час початку оброблення $t_{i\,п}$, що дорівнює часу надходження заявки (блок 5) і керування передається на блок 8, що формує випадковий час $\tau_{об}$ обслуговування цієї заявки відповідно до заданої щільності $f_{об}(\tau_{об})$ часу обслуговування.

У блоці 10 обчислюється час $t_{зв}$ звільнення системи після обслуговування $i$-ї заявки, що надійшла.

Блок 12 підраховує кількість обслугованих заявок $J$.

Якщо заявка, що надійшла, застала канал зайнятим (блок 4), то вона стає в чергу, при цьому керування передається на блок 3, де формується час очікування $\tau_{оч}$.

Якщо час очікування випадковий, то він формується відповідно до заданої щільності $f_{оч}(\tau_{оч})$.

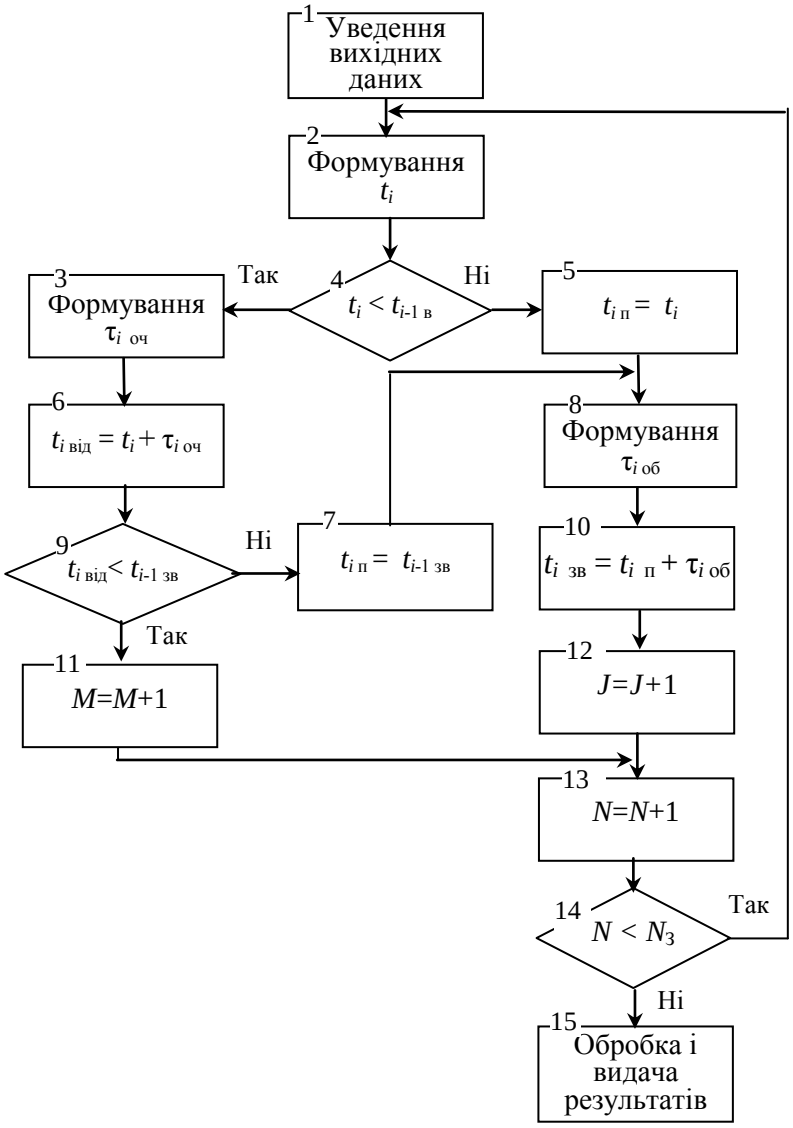



Рис. 7.3. Схема алгоритму моделювання одноканальної СМО

У блоці 6 розраховується момент часу $t_{від}$, до якого заявка може перебувати в стані очікування обслуговування, після чого одержує відмову.

Можливість обслуговування чи відмови аналізується в блоці 9 через порівняння розрахованого моменту часу $t_{від}$ з моментом звільнення системи після обслуговування попередньої ($i$-1)-ої заявки.

Якщо система не звільняється до моменту $t_{від}$ , то фіксується факт відмови заявки в лічильнику відмов $M$ (блок 11).

Якщо система встигає звільнитися, то заявка знімається з очікування і надходить на обробку, при цьому в блоці 7 установлюється час початку обробки нової заявки, що дорівнює часу звільнення системи від попередньої заявки, і керування передається на блок 8.

У блоці 13 підраховується загальна кількість $N$ заявок, що надійшли в систему.

Блок 14 контролює закінчення моделювання для заданої кількості заявок $N_З$.

Обробка результатів моделювання (блок 15) полягає в оцінюванні ймовірності обслуговування заявок $P_{об} = \frac{J}{N_З}$ і ймовірності відмови $P_{від} = \frac{M}{N_З}$.

Аналогічним чином можна побудувати алгоритм моделювання багатоканальної СМО. Однак він ускладнюється через потребу алгоритмізувати правило вибору каналу обслуговування.

**Завдання для самостійного виконання.**

Виконати моделювання одноканальної СМО для двох варіантів:

1. Система обслуговування без очікування (рис.7.4 ).

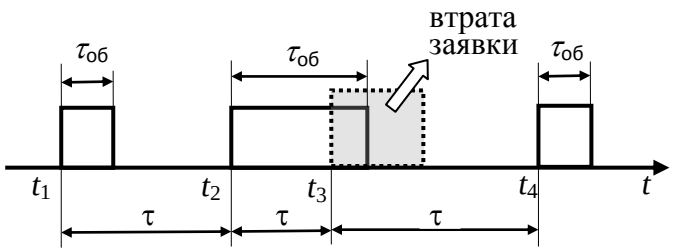



Рис. 7.4. Випадок втрати заявки на обслуговування

2. Система обслуговування з очікуванням (рис.7.3).

***Вихідні дані:***

1. Алгоритм одноканальної СМО (рис. 7.3).

2. Вхідній потік заявок – пуассонівський, в якому інтервали часу τ між двома сусідніми подіями розподілено за показниковим законом $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ з параметром λ.

2. Час оброблення $\tau_{об}$ кожної заявки – постійний.

3. Система без очікування.

***Порядок виконання:***

1. Скласти алгоритм роботи одноканальної СМО для заданих умов завдання.

2. Скласти алгоритм та програму формування пуассонівського потоку заявок використовуючи метод обернених функцій для імітування інтервалів часу між заявками.

3. Скласти програму, що моделює СМО для заданих умов завдання.

4. Програмно реалізувати (змоделювати) роботу СМО та обчислити ймовірність обслуговування (і не обслуговування) заявок, що надходять в СМО за пуассонівським потоком.

**Література до теми 7:** [5–8], [16].

### *Контрольні запитання*

1. Якими показниками характеризується випадковий потік?
2. Вкажіть види випадкових потоків.
3. Сформулюйте визначення пуассонівсьго потоку і його властивості.
4. Дайте визначення потоку Пальма. Чім він відрізняється від пуассонівського потоку?
5. За яких умов можна використовувати розподіл Пуассона для опису потоку даних?
6. Опишіть послідовність дій при моделюванні випадкового потоку.
7. Дайте визначення системи обслуговування та вкажіть основні характеристики системи.
8. Що означає дисципліна обслуговування в каналах зв’язку?
9. Як інтенсивність надходження заявок і час обслуговування впливають на характеристики системи обслуговування?

# Тема 8. Похибки вимірювань радіонавігаційних систем, робочі зони

## 8.1. Види та математичні моделі похибок радіовимірювальних систем

До числа основних характеристик радіотехнічних вимірювальних систем належить точність вимірів.

**Точність радіонавігаційних систем (РНС)** як засобів вимірювання – ступінь близькості до нуля похибки, тобто різниці між істинним значенням вимірюваного параметра і його реальним значенням за показаннями вимірювача.

Якщо переробляється і витягується дискретна інформація, то можливості РНС за точністю характеризують її достовірністю, тобто ймовірністю $P_{\text{пр}}$ правильного виділення інформації:

$$P_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{n} P_i(a) P_i(a \mid a_{\text{п}}), \tag{8.1}$$

де $P_i(a)$ – апріорна ймовірність виділення $i$-го елемента повідомлення про вимірювану величину; $P_i(a|a_{\text{п}})$ – ймовірність виділення $i$-го елемента повідомлення при фактичному його значенні $a_{\text{п}}$.

Аналогічно можна визначити повну ймовірність помилки $P_{\text{пом}}$ при виділенні інформації. Оскільки правильні і помилкові рішення про вимірювані параметри представляють собою несумісні події, що утворюють повну групу, то $P_{\text{пр}} = 1 - P_{\text{пом}}$.

Похибки радіонавігаційних вимірів можна поділити на три основні групи: ***методичні, апаратурні*** (інструментальні) і ***суб'єктивні***.

**1.** ***Методичні похибки*** є наслідком неточності початкових математичних моделей, що описують досліджуваний об'єкт (вимірюваний процес), а також відмінності алгоритмів і методики вимірювань від тих, що були покладені при проєктуванні систем.

**2.** ***Апаратурні*** (інструментальні) похибки з'являються в результаті того, що прийняті для побудови РНС алгоритми вимірювання, як правило, не можуть бути точно реалізовані практично. Це пов'язано з недосконалістю технології виробництва апаратури, її несправностями, похибками регулювань та калібрування, зміною параметрів навколишнього середовища (температури, вологості, тиску та ін.), а також старінням апаратури.

**3.** ***Суб'єктивні*** похибки (похибки оператора) є наслідком індивідуальних особливостей оператора, властивостей його організму (гостроти органів зору, слуху, реакції при зміні інформації), ступеня професійної підготовки та ін.

За характером прояви і впливу на наступні етапи переробки і використання вимірювальної інформації похибки РНС поділяють на

– **систематичні** (постійні або змінюються за певним законом)

– **випадкові**.

Найпростіша математична модель процесу вимірювань:

$$a(t) = M(t)[S(t,\theta) + e(t)], \tag{8.2}$$

де $a(t)$ – величина вимірюваного навігаційного параметра на виході РНС; $S(t,\theta)$ – радіосигнал, що має інформацію про вимірюваний параметр $\theta$; $e(t)$ – зовнішні і внутрішні адитивні завади (шуми); $M(t)$ – масштабний коефіцієнт (перетворення), що залежить від методу і схеми побудови РНС.

У разі, коли складова $e(t)$ пов'язана мультиплікативно з вимірюваним параметром, модель записується як

$$a(t) = M(t)S(t,\theta)[1 + e(t)]. \tag{8.3}$$

Повна похибка вимірювальних перетворень є багатовимірний нестаціонарний випадковий процес і є функцією виду

$$a(t) - a^{\circ}(t) = \psi[M(t), S(t,\theta), e(t)],$$

де $a°(t)$ – істинне значення параметра $a(t)$.

## 8.2. Характеристики статистичних оцінок похибок

У багатьох практичних випадках похибка радіонавігаційних вимірів може розглядатися як стаціонарний, ергодичний випадковий процес або випадкова величина.

Середнє значення (математичне сподівання) цього процесу або величини становить систематичну похибку, а відхилення від середнього значення характеризує випадкову похибку.

Найбільш повними характеристиками похибок вимірювань є розподіл спільних $P(a, a°)$ і умовних ймовірностей $P(a|a°)$ , або спільна $f(a, a°)$ і умовна щільності ймовірностей $f(a|a°)$ .

Замість $f(a|a°)$ часто використовують умовну щільність ймовірностей розподілу значень самої похибки $f(e|a°)$ або, при відсутності статистичного зв'язку похибки з вимірюваної величиною, безумовну щільність ймовірностей $f(e)$. Однак зазначені характеристики не завжди відомі і зручні для використання.

На практиці використовують більш компактні оцінки точності вимірювань, що представляють собою функціонали від зазначених розподілів.

До найбільш широко застосовуваним оцінкам похибок РНС відносять екстремальні і статистичні оцінки.

В якості екстремальних оцінок похибки зазвичай вказують найбільші їх значення, отримані в довільно обмеженому ряду вимірювань.

Використовується поняття модуля максимальної абсолютної похибки

$$(\Delta a)_{\max} = | a - a^{\circ} |_{\max} \tag{8.4}$$

і модуля максимальної відносної похибки

$$(\sigma a)_{\max} = \frac{| a - a^{\circ} |_{\max}}{a}. \tag{8.5}$$

Методи статистичної оцінки похибок засновані на використанні понять середнього значення, середньоквадратичного відхилення і дисперсії, довірчих інтервалів і довірчих ймовірностей, а також поняття середнього ризику (середній вартості).

Для одновимірних законів умовних розподілів похибок, як безперервних випадкових величин, середнє значення дорівнює їх математичному сподіванню

$$m_a = \int_{-\infty}^{\infty} | a - a^{\circ} | \, f(a | a^{\circ}) da, \tag{8.6}$$

а середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_a = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_a)^2 f(a | a^{\circ}) da \right)^{1/2}. \tag{8.7}$$

Поняття довірчих інтервалів і ймовірностей вводять для вказівки допустимих меж (допусків) $\pm \varepsilon_0$, за які не виходить (в яких знаходиться) із заданою довірчою ймовірністю $\beta_д$ похибка системи $| \boldsymbol{e}_д |$, яка описується за

допомогою статистичних оцінок $m_a$, $\sigma_a$ і інших моментів більш високого порядку, тобто

$$P\{|e_д|\le\varepsilon_0\}=\beta_д. \tag{8.8}$$

Так, довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання $\hat{m}_a$ (рис. 8.1)

$$I_\beta=(\hat{m}_a-\varepsilon_0;\hat{m}_a+\varepsilon_0). \tag{8.9}$$

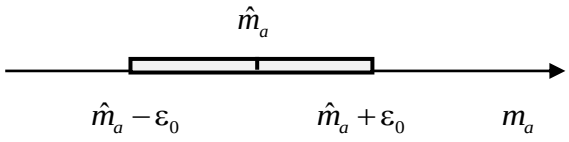



Рис. 8.1. Інтервальна оцінка математичного сподівання

Для визначення довірчої ймовірності за заданим довірчим інтервалом необхідне знання щільності ймовірностей розподілу похибки $f(e)$, тому що

$$\beta_д=\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} f(e)de. \tag{8.10}$$

***Оцінка результуючої похибки*** РНС визначається шляхом підсумовування окремих похибок всіх складових у ланцюгу перетворення інформації.

Це завдання вирішується за правилами алгебраїчного або геометричного підсумовування окремих похибок. Якщо, наприклад, підсумовуються випадкові похибки двох величин (що характеризують точність того чи іншого вузла системи), пов’язаних взаємним кореляційним зв’язком, то при використанні критерію середньоквадратичного відхилення результуюча похибка визначається за формулою

$$\sigma_\Sigma=\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}, \tag{8.11}$$

де ρ – коефіцієнт взаємної кореляції двох величин.

При слабкому кореляційному зв’язку або його відсутності (ρ = 0)

$$\sigma_\Sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \tag{8.12}$$

тобто результуюча похибка знаходиться за правилом алгебраїчного підсумовування складових.

## 8.3. Похибки радіотехнічних систем навігації як системи випадкових величин

Для визначення того або іншого навігаційного параметра може бути необхідним використання вимірів декількох радіонавігаційних систем. Наприклад, координати місцеположення об'єкту можна визначити за даними вимірів далекомірної і кутомірної навігаційної системи. Тому похибки вимірювань радіонавігаційних систем, що застосовуються у визначенні навігаційних параметрів слід розглядати як систему випадкових величин.

У загальному випадку для системи двох **залежних** випадкових величин ***x, y*** щільність ймовірностей розподілу, за умови нормального розподілу, виражається формулою

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}. \tag{8.13}$$

Математичні сподівання $\boldsymbol{m_x}$ , $\boldsymbol{m_y}$ , середні квадратичні відхилення $\boldsymbol{\sigma_x}$ , $\boldsymbol{\sigma_y}$ і коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{\rho}$ дають вичерпну статистику нормального розподілу на площині.

Якщо коефіцієнт кореляції ρ=0, то випадкові величини ***x, y*** виявляються не тільки не корельованими, а й незалежними. При $\rho = 0$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]=f(x)f(y).$$

Якщо $\rho \neq 0$, то величини ***x, y*** будуть залежні. Так при певному ***x*** умовний закон розподілу випадкової величини ***y*** може бути представлений у вигляді

$$f(y\,|\,x)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\left[y-m_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]^2\right\}. \tag{8.14}$$

В даному випадку щільність нормального закону розподілу буде з центром розсіювання

$$m_{y|x}=m_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)$$

і середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}.$$

Зі співвідношення (8.13) видно, що криві рівної щільності нормального розподілу будуть описуватися рівнянням еліпса

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = \text{const},$$

який називається еліпсом розсіювання. Центр еліпса знаходиться в точці ($m_x$, $m_y$), а його півосі визначаються з виразів:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sigma_x^2 \cos^2\alpha + \rho\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha; \\ \sigma_b^2 &= \sigma_x^2 \sin^2\alpha - \rho\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\alpha, \end{aligned} \tag{8.15}$$

де α – кут між великою піввіссю еліпса розсіювання і віссю *Ox,* який визначається зі співвідношення

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \tag{8.16}$$

Середньоквадратичний еліпс розсіювання – це такий еліпс, у якого півосі дорівнюють відповідно $\sigma_a$ і $\sigma_b$ (рис. 8.2).

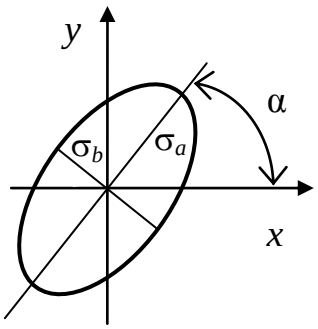



Рис. 8.2. Середньоквадратичний еліпс розсіювання

Положення еліпса розсіювання залежить від знака коефіцієнта кореляції (рис. 8.3)

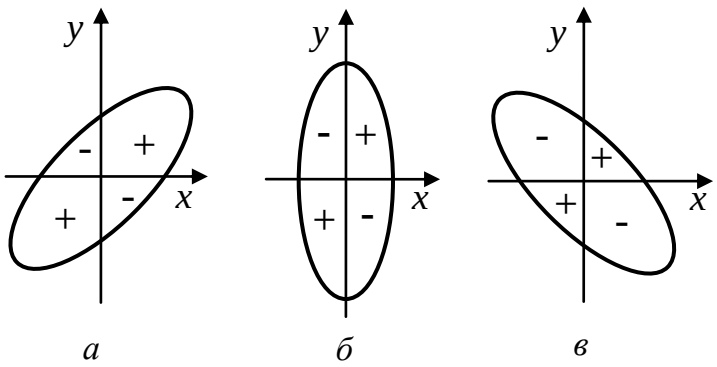



Рис. 8.3. Положення еліпса розсіювання: *а* – (ρ > 0); *б* – (ρ = 0); *в* – (ρ < 0)

## 8.4. Статистичні характеристики похибок визначення місцеположення при координатних перетвореннях

Основними джерелами координатної інформації про місцезнаходження об’єктів є кутомірно-далекомірні радіонавігаційні системи (КДС), що вимірюють похилу дальність $\rho$ до об’єкта і азимут $\theta$ (рис. 8.4).

Точність вимірювання дальності $\rho$ і азимуту $\theta$ характеризується величиною випадкових похибок вимірювань відстані $\nu_\rho$ і азимута $\nu_\theta$.

Похибки вимірювання мають систематичну і випадкову складові. Зазвичай вважають, що систематична похибка скомпенсована. Випадкові похибки зумовлені впливом великої кількості факторів і зазвичай вважаються нормально розподіленими.

Похибки вимірювання дальності і азимута можна вважати взаємно незалежними.

Похибки вимірювання дальності і азимуту приймаються як адитивні, тому результати вимірювання в *i*-му моменті часу, які позначаються як $\rho^*$ і $\theta^*$, можуть бути записані у вигляді

$$\rho^*(i) = \rho(i) + \nu_\rho(i); \qquad \theta^*(i) = \theta(i) + \nu_\theta(i). \qquad (8.17)$$

Для КДС випадкові похибки вимірів можна вважати незалежними в часі і такими, що являють собою некорельовані послідовності типу «білий шум», що математично записується

$$M[v_\rho(i)v_\rho(k)] = \sigma_\rho^2\delta_{ik}; \qquad M[v_\theta(i)v_\theta(k)] = \sigma_\theta^2\delta_{ik},$$

де $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = k; \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq k. \end{cases}$

Для встановлених інтервалів дальності дисперсії похибок вимірювання дальності і азимута вважають постійними $\sigma_\rho = \text{const}$; $\sigma_\theta = \text{const}$ (рис. 8.5).

Математичне співвідношення між вимірами в полярних координатах і декартових координатах визначається виразами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \qquad \theta = \text{arctg}\frac{x}{y}\ . \tag{8.18}$$

З урахуванням адитивності похибок вимірювань (8.18) можна записати як

$$\rho^* = \sqrt{x^2 + y^2} + v_\rho\,; \qquad \theta^* = \text{arctg}\frac{x}{y} + v_\theta. \tag{8.19}$$

Якщо обробка параметрів траєкторії виконується в декартових координатах *x, y*, то перед обробкою вимірювання повинні перетворюватися з полярних координат у декартові координати з використанням виразів:

$$x^* = \rho^* \sin\theta^*\,; \qquad y^* = \rho^* \cos\theta^*\ . \tag{8.20}$$

У цьому випадку зв’язок між декартовими координатами *x, y* та виміряними полярними параметрами ρ*, θ* стає нелінійним, а отже, статистичні похибки характеристик розрахованих декартових координат втрачають властивість адитивності та властивість сталості, оскільки вони стають залежними від позиції об’єкта відносно місця положення КДС.

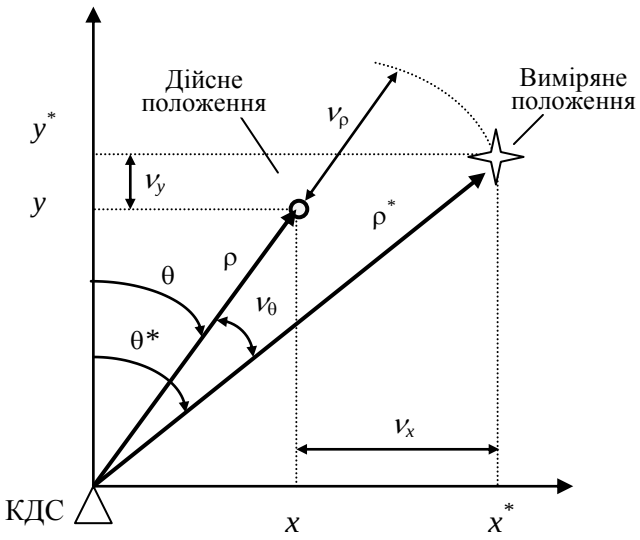



Рис. 8.4. Зв'язок похибок вимірів дальності і азимуту з похибками визначення прямокутних координат

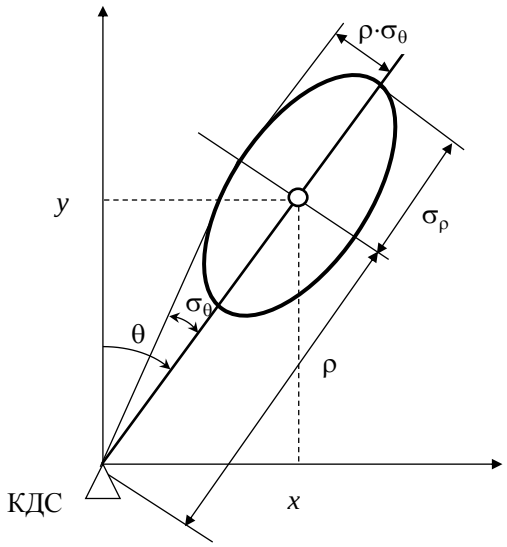



Рис. 8.5. Побудова еліпса розсіювання похибок вимірів дальності і азимуту у визначенні положення об’єкта

Для оцінки статистичних характеристик похибки обчислення декартових координат використовується відоме правило лінеаризації для отримання виразу

$$x^*(i) \cong x(i) + v_x(i); \qquad y^*(i) \cong y(i) + v_y(i), \tag{8.21}$$

де $x^*$, $y^*$ – розраховані за вимірами декартові координати; $v_x$, $v_y$ – відповідні випадкові похибки обчислення декартових координат.

**Статистичні характеристик похибок при координатних перетвореннях.** Вирішимо задачу оцінки статистичних характеристик похибки обчислення декартових координат для координати $x$ (аналогічно для координати $y$).

Запишемо зв'язок координати $x$ з виміряними значеннями дальності і азимута

$$x^* = f(\rho^*, \theta^*) = \rho^* \sin\theta^*. \tag{8.22}$$

Виконаємо лінеаризацію виразу (8.22) шляхом розкладання функції $f(\rho^*, \theta^*)$ в ряд Тейлора відносно істинних значень $\rho$, $\theta$, відкидаючи члени ряду вище першого порядку

$$x^* = f(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho^* - \rho) + \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta^* - \theta) = x + \frac{\partial f}{\partial \rho}\nu_\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}\nu_\theta. \tag{8.23}$$

Звідси похибка визначення координати $x$ дорівнює

$$\nu_x = \frac{\partial f}{\partial \rho}\nu_\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}\nu_\theta = \sin\theta\, \nu_\rho + \rho\cos\theta\, \nu_\theta. \tag{8.24}$$

Визначимо дисперсію цієї похибки

$$D_{\nu_x} = \sigma_x^2 = M[\nu_x^2] = M[\nu_\rho^2 \sin^2\theta + 2\rho\nu_\rho\nu_\theta \sin\theta\cos\theta + \rho^2\nu_\theta^2\cos^2\theta]. \tag{8.25}$$

Застосуємо операцію математичного сподівання до кожного доданку у (8.25), при цьому врахуємо, що оскільки похибки вимірювання дальності і азимута незалежні, то $M[\nu_\rho\nu_\theta] = 0$.

В результаті отримаємо

$$\sigma_x^2 = \sigma_\rho^2 \sin^2\theta + \rho^2\sigma_\theta^2\cos^2\theta. \tag{8.26}$$

Аналогічно знаходиться вираз для дисперсії похибки для координати $y$

$$\sigma_y^2 = \sigma_\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2\sigma_\theta^2 \sin^2\theta . \qquad (8.27)$$

Звертає увагу той факт, що дисперсії похибок визначення прямокутних координат (8.26), (8.27) залежить від положення об’єкта (значень $\rho$, $\theta$), в той час як дисперсії похибок вимірювань дальності і кута не змінюються.

## Завдання для самостійного виконання

**Завдання 1.** Отримати вираз (8.27) для визначення дисперсії похибки визначення координати $y$ за даними вимірів кутомірно-далекомірної системи для заданих значень дисперсій похибок вимірювань дальності і азимута.

**Завдання 2.** Розрахувати і побудувати графіки зміни середньоквадратичних похибок визначення прямокутних координат в залежності від місцеположення об'єкта (рис. 8.6).

***Вихідні дані:***

Середньоквадратична похибка вимірювання дальності $\sigma_\rho$= 100 м, азимута $\sigma_\theta$= 10 '.

Місцезнаходження об'єкта задається в наступних точках (рис. 8.6):

– ряд значень дальності: $\rho$= 25 км, 50 км, 100 км;

– ряд значень азимуту: $\theta$ = 0°, 10°, 20°, ..., 90°.

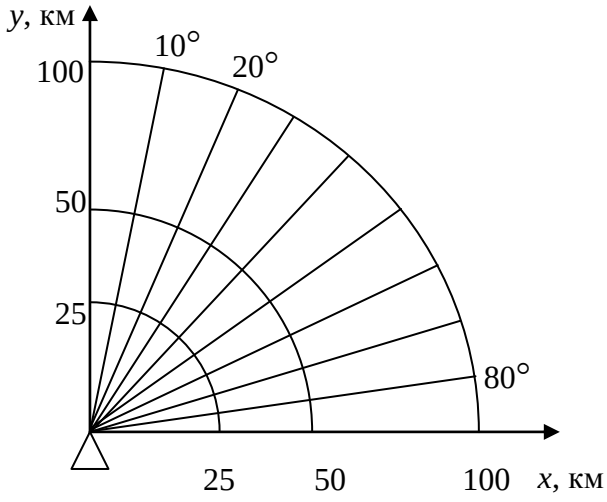



Рис. 8.6. Пояснення до завдання

***Порядок виконання завдання:***

1. Для заданих значень похибок вимірювань дальності і азимута (рис. 8.6) розрахувати середньоквадратичні похибки визначення прямокутних координат $\sigma_x$, $\sigma_y$ і радіальну середньоквадратичну похибку $\sigma_r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ для різних значень дальності ($\rho$= 25 км, 50 км, 100 км) і азимута ($\theta$ = 0°, 10°, 20°, ..., 90°).

2. Побудувати графіки залежностей похибок визначення прямокутних координат від азимута для заданих значень дальності ( $\rho$= 25 км, 50 км, 100 км).

**Завдання 3.** Вирішити завдання, поставлене в завданні 2, методом статистичного моделювання на комп'ютері.

***Порядок виконання завдання:***

1. Скласти і зобразити схему алгоритму статистичного моделювання.

2. Скласти підпрограму імітації випадкових похибок вимірювань дальності і азимута і зробити імітацію вимірювань для заданих значень дальності і азимута.

3. Скласти підпрограму перерахунку з полярної системи координат в прямокутну.

4. Скласти програму та здійснити на комп’ютері статистичне моделювання з метою визначення середньоквадратичних значень похибок обчислення прямокутних координат і радіальну похибку для заданих значень $\rho$, $\theta$.

5. Результати, отримані шляхом статистичного моделювання, представити в таблиці, зобразити графічно і порівняти з результатом, отриманим розрахунковим шляхом в завданні 2.

***Примітка***. Для імітації випадкових похибок вимірювання із заданими середньоквадратичними значеннями $\sigma_\rho$ і $\sigma_\theta$ можна скористатися стандартною підпрограмою формування нормально розподілених випадкових чисел (наприклад, функція **randn** в пакеті Matlab видає нормально розподілені випадкові числа $N(0,1)$).

## 8.5. Визначення робочої зони радіонавігаційної системи

Для повної оцінки навігаційних можливостей РНС, порівняння їх між собою і раціонального розміщення наземних станцій проводиться побудова ліній (кривих) рівної точності визначення місцеположення об’єкт (тобто ліній, для яких в кожній точці виконується умова $\sigma_r$ = const) і робочої зони системи.

**Робоча зона** РНС – частина простору, в межах якого похибка визначення навігаційних параметрів з використанням системи (і відповідна похибка визначення ліній, поверхонь положення або місцеположення об’єкта) не перевищує заданого значення з обраною ймовірністю.

При побудові робочої зони РНС визначають значення області простору, в межах якої похибка вимірювання параметрів не перевищує (із заданою ймовірністю) обраного, наприклад середньоквадратичного, значення $\sigma_r \le \sigma_{r\,\text{доп}}$.

Зазвичай в практиці навігаційних розрахунків використовується наближена методика оцінки місцеположення об’єкта на основі середнього

квадрата відхилення об’єкта від його дійсного положення в просторі і на площині (а не відносний розподіл похибок за координатними осями). Тоді для оцінки точності визначення місцеположення об’єкта на площині можна використати вираз для розрахунку дисперсії радіальної похибки

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma}(\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + 2\rho\sigma_{n1}\sigma_{n2}\cos\gamma), \qquad (8.28)$$

де $\sigma_{n1}^2, \sigma_{n2}^2$ – дисперсії похибок визначення двох ліній положення, за перетином яких визначається місцеположення об’єкта; $\gamma$ – кут перетину ліній положення; $\rho$ – коефіцієнт кореляції, що характеризує ступінь взаємозв’язку похибок.

**Визначення робочої зони для кутомірно-далекомірної системи.**

Для кутомірно-далекомірного способу оцінки місцеположення об’єкту (рис. 8.7) середньоквадратична похибка визначення лінії положення для далекомірної системи (лінія рівних відстаней ЛРВ) дорівнює $\sigma_{n1} = \sigma_D$, а похибка визначення лінії положення кутомірної системи (лінія рівних пеленгів ЛРП) дорівнює $\sigma_{n2} = D\sigma_\theta$. Ці лінії положення перетинаються під прямим кутом $\gamma = 90^\circ$, тому вираз (8.28) запишеться як

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_D^2 + D^2\sigma_\theta^2}. \qquad (8.29)$$

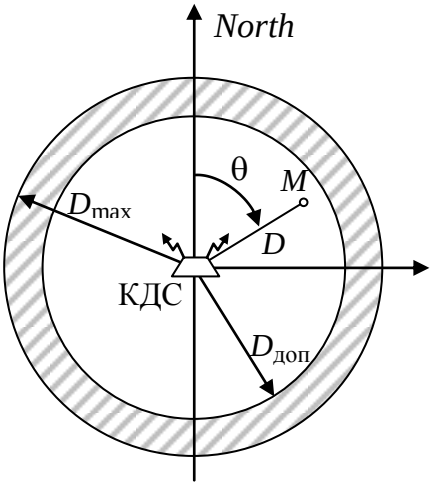



Рис. 8.7. Робоча зона для кутомірно-далекомірної системи

З (8.29) видно, що точність визначення місцеположення за допомогою КДС залежить лише від точності визначення ліній положення, так як кут $\gamma$ їх

перетину завжди дорівнює 90°. Для побудови кривих заданої точності, що обмежують робочу зону КДС, з виразу (8.29) маємо (рис. 8.7)

$$D_{\text{доп}} = \sqrt{\sigma^2_{r\,\text{доп}} - \sigma^2_D} \Big/ \sigma_\theta = \text{const},$$

тобто рівняння кола радіуса $D_{\text{доп}}$, описане навколо місцеположення КДС.

Зовнішня межа робочої зони визначається максимальною дальністю дії $D_{max}$ радіозасобів.

**Література до теми 8:** [5–7], [16], [19].

### *Контрольні запитання*

1. Надайте статистичні характеристики похибок вимірювань в радіотехнічних системах.
2. Що означає еліпс розсіювання для радіонавігаційних систем?
3. Як побудувати еліпс розсіювання похибок визначення положення об’єкта у прямокутній системі координат за відомими статистичними характеристиками навігаційної системи, що вимірює у полярній системі координат?
4. Як змінюються статистичні характеристики похибок при координатних перетвореннях з полярної системи у прямокутну?
5. Коли виникає проблема лінеаризації при обробленні сигналів радіонавігаційних систем?
6. Пояснить застосування методу лінеаризації, що виконується шляхом розкладання в ряд Тейлора.

## Тема. 9. Оцінка надійності радіотехнічних систем

**Надійність** – це властивість системи зберігати у часі у встановлених межах значення всіх параметрів, що характеризують його здатність виконувати потрібні функції у заданих режимах та умовах застосування, технічного обслуговування, зберігання і транспортування.

Теорія надійності – наука, що вивчає закономірності розподілу відмов технічних пристроїв, причини та моделі їх виникнення.

Математичний напрямок розвитку теорії надійності виник у радіоелектроніці і пов'язаний з розвитком математичних методів оцінки надійності, особливо стосовно складних систем, з розробкою методів статистичної обробки інформації про надійність, розробкою структур систем, що забезпечують високий рівень їх надійності.

Основною теоретичною базою цього напряму є теорія ймовірностей та математична статистика, а також теорія випадкових процесів, теорія масового обслуговування.

Застосування ймовірнісного підходу в теорії надійності безпосередньо простежується у назві показників надійності, таких як ймовірність безвідмовної роботи; ймовірність відмови; частота відмов; інтенсивність відмов; середнє напрацювання до першої відмови і т.д.

### 9.1. Показники надійності систем

Технічні стани, у яких можуть перебувати системи (з позиції надійності) поділяються на справні, несправні, працездатні, непрацездатні і граничні.

**Відмова** – це подія, що вказує на порушення стану працездатності системи.

Системи поділяють на відновлювані й невідновлювані в залежності від можливості їх відновлення в конкретних умовах експлуатації.

Невідновлювана система – це система, для якої в нормативно-технічній або конструкторській (проектної) документації за даних умов експлуатації не передбачено проведення відновлення працездатного стану.

**Ймовірність відмови** $Q(t)$ визначається ймовірністю того, що за певних умов експлуатації в заданому інтервалі часу $t$ виникне хоча б одна відмова

$$Q(t) = P(T \le t). \tag{9.1}$$

де $T$ – час настання відмови. Час настання відмови є величиною випадковою.

**Ймовірність безвідмовної роботи** $P(t)$ визначається ймовірністю того, що за певних умов експлуатації в заданому інтервалі часу $t$ або у межах заданого напрацювання не відбудеться жодної відмови

$$P(t) = P(T > t), \tag{9.2}$$

Безвідмовна робота системи і її відмова – події несумісні і протилежні, тому

$$P(t) + Q(t) = 1. \tag{9.3}$$

В процесі роботи системи функція ймовірності **безвідмовної роботи** $P(t)$ монотонно спадає, в той час як ймовірність відмови $Q(t)$ збільшується, тобто при $t \to \infty$ $P(\infty) = 0$, і система з часом відмовить $Q(t \to \infty)=1$.

**Частота відмов** $a(t)$ визначається щільністю ймовірностей часу роботи системи до першої відмови, тобто

$$a(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{-dP(t)}{dt} \ . \tag{9.4}$$

**Інтенсивність відмов** $\lambda(t)$ визначається відношенням частоти відмов $a(t)$ до ймовірності безвідмовної роботи $P(t)$ на даний момент часу $t$

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}. \tag{9.5}$$

З формул (9.4) і (9.5) можна записати

$$\lambda(t) = -\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}.$$

Звідки

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt}[\ln P(t)]. \tag{9.6}$$

Після множення обох частин рівності (9.6) на $(-dt)$ та інтегрування в межах від 0 до $t$ отримаємо

$$-\int_0^t \lambda(t)dt = -\int_0^t d[\ln P(t)] = \ln P(t) - \ln P(0) = \ln P(t) - \ln(1) = \ln P(t). \tag{9.7}$$

З цієї рівності (9.7) отримуємо вираз, який називають **основною формулою надійності**

$$P(t) = \exp\left( -\int_0^t \lambda(t)dt \right). \tag{9.8}$$

Вираз (9.8) показує зв'язок основних показників надійності невідновлюваних систем $P(t)$, $Q(t)$, $a(t)$ і $\lambda(t)$. Знаючи один із них, можна визначити інші. Так, якщо $\lambda$ = const, то $P(t) = e^{-\lambda t}$, а при $t$ = 0 значення ймовірність відмов дорівнює $\lambda = a(0)$.

Практичне значення має також **середня інтенсивність відмов** у заданому інтервалі часу $t_2 - t_1$

$$\bar{\lambda}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt \tag{9.9}$$

та **середнє напрацювання до першої відмови** $T_{\text{ср}}$, яке визначається математичним сподіванням часу роботи системи до відмови і обчислюється за щільністю розподілу часу безвідмовної роботи (частотою відмов)

$$T_{cp} = M[t] = \int_0^\infty ta(t)dt, \tag{9.10}$$

для $t > 0$; $P(0) = 1$, а $P(\infty) = 0$.

Середнє напрацювання може бути застосоване для порівняння систем за показниками безвідмовності.

Важливе значення має визначення дисперсії часу безвідмовної роботи, скориставшись звісною формулою

$$\sigma_t^2 = M[t^2] - (M[t])^2. \tag{9.11}$$

Момент другого порядку визначається з урахуванням (9.4) за формулою

$$M[t^2] = \int_0^\infty t^2 a(t)dt = -\int_0^\infty t^2 dP(t). \tag{9.12}$$

З врахуванням того, що $P(t) = 1$ при $t = 0$ а $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 P(t) = 0$, можна також записати

$$M[t^2] = 2\int_0^\infty tP(t)dt. \qquad (9.13)$$

Тоді для (9.12), (9.13) дисперсія часу безвідмовної роботи системи знаходиться з формули (9.11)

$$\sigma_t^2 = M[t^2] - (M[t])^2 = 2\int_0^\infty tP(t)dt - \left(\int_0^\infty tP(t)dt\right)^2. \qquad (9.14)$$

## 9.2. Статистичні оцінки показників надійності систем

На практиці використовують ймовірнісні показники надійності, які визначають за результатами статичної обробки експериментальних даних.

**Статистична оцінка ймовірності відмови** визначається за формулою

$$\hat{Q}(t) = \frac{n(t)}{N}, \qquad (9.15)$$

де $n(t)$ – кількість систем, що відмовили за час $t$; $N$ – загальна кількість систем, що підлягають випробуванням.

**Статистична оцінка ймовірності безвідмовної роботи** визначається за виразом

$$\hat{P}(t) = \frac{N - n(t)}{N} = \frac{N_t}{N}, \qquad (9.16)$$

де $N_t$ – кількість систем, що залишилися справними на кінець часу випробовування.

**Статистична оцінка частоти відмов** (щільності ймовірностей відмов) визначається відношенням

$$\hat{a}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N\Delta t}, \qquad (9.17)$$

де $n(\Delta t)$ – кількість систем, які відмовили в інтервалі часу від $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$; $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$ – інтервал часу; $t_i$ – час початку $i$-го інтервалу; $t_{i+1}$ – час кінця $i$-го інтервалу.

**Статистична оцінка інтенсивності відмов**

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp}\Delta t}, \tag{9.18}$$

де $N_{cp} = (N_i + N_{i+1})/2$ – середня кількість працездатних систем в інтервалі часу $\Delta t$; $N_i$ – кількість працездатних систем на початку інтервалу часу $\Delta t$; $N_{i+1}$ – кількість працездатних систем в кінці інтервалу часу $\Delta t$ .

**Статистичну оцінку середнього напрацювання до першої відмови** можна знайти, знаючи моменти виходу з ладу всіх $i = \overline{1, N}$ систем

$$\hat{T}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}, \tag{9.19}$$

де $t_i$ – час безвідмовної роботи $i$-ої системи.

Статистичну оцінку середнього напрацювання до першої відмови можна також розрахувати за даними про кількість систем, що вийшли з ладу в $i$-му інтервалі часу, за формулою

$$\hat{T}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i t_{cp_i}}{N}, \tag{9.20}$$

де $t_{cp_i} = (t_{i+1} - t_i)/2$; $m = t_k / \Delta t$; $t_i$ – час початку $i$-го інтервалу; $t_{i+1}$ – час кінця $i$-го інтервалу; $t_k$ – час, протягом якого вийшли із ладу всі системи; $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$.

## 9.3. Оцінка структурної надійності систем

**Структурна надійність системи** визначається як результуюча надійність при заданій структурі і відомих значеннях надійності всіх блоків і елементів, що входять до складу системи.

Якщо відмова системи настає при відмові одного з його елементів, то така система має **основне з'єднання** елементів. Відмова якогось елемента у таких системах є подією випадковою і незалежною, а ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу $t$ дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи її елементів протягом того ж часу

$$P(t) = p_1(t)\,p_2(t)...p_N(t) = \prod_{i=1}^{N} p_i(t)\,, \tag{9.21}$$

або

$$P(t) = \exp\left( -\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \lambda_i(t)dt \right). \tag{9.22}$$

Так для експоненціального закону розподілу відмов

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-t/T_{cp}}\,, \qquad a(t) = \lambda e^{\lambda t}\,, \quad T_{cp} = 1/\lambda\,, \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,, \tag{9.23}$$

де $\lambda_i$ – інтенсивність відмов $i$ -го елемента.

При розрахунку високонадійних систем можна користуватися наближеними формулами:

$$P(t) \approx 1 - t\sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i = 1 - \lambda t, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i, \quad T = 1/\left( \sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i \right) = 1/\lambda, \quad a(t) \approx \lambda(1 - \lambda t),$$

$$p_1(t)\,p_2(t)...p_N(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i(t), \quad p_i^N(t) = 1 - Nq_i(t), \quad \sqrt[N]{p_i(t)} = 1 - q_i(t)/N, \tag{9.24}$$

де $r$ – число типів елементів; $q_i(t)$ – ймовірність відмов $i$ -го елемента.

Таким чином, якщо технічний пристрій являє собою систему, що складається з послідовно з’єднаних елементів, котрі працюють незалежно один від одного (рис. 9.1), то її надійність може бути визначена на підставі формули за теоремою множення ймовірностей

$$P_c = \prod_{i=1}^{n} p_i\,. \tag{9.25}$$

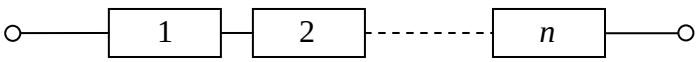



Рис. 9.1. Послідовне з’єднання елементів

При послідовному з’єднанні елементів відмова одного з них ($p_i$ = 0) призводить до відмови всієї системи. Якщо $p_i$ = const, то очевидно $P_c = p^n$ .

Надійність системи може бути істотно підвищена шляхом резервування найбільш важливих елементів, тобто їх паралельного з’єднання.

Очевидно, що блок паралельно з’єднаних елементів (рис. 9.2) вийде з ладу лише при відмові всіх його елементів, тобто

$$Q_c = \prod_i^k q_i = \prod_i^k (1 - p_i)\,. \tag{9.26}$$

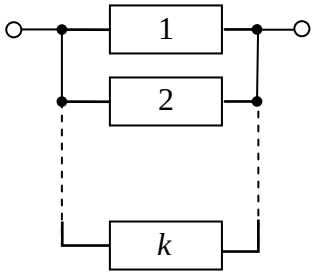



Рис. 9.2. Паралельне з’єднання елементів

Тоді

$$P_c = 1 - Q_c = 1 - \prod_i^k (1 - p_i)\,, \tag{9.27}$$

де $k$ – число паралельних ланцюгів.

Якщо $p_i = p = \text{const}$, то

$$P_c = 1 - (1 - p)^k\,. \tag{9.28}$$

Резервування може бути загальним (рис. 9.3) і роздільним (рис. 9.4).

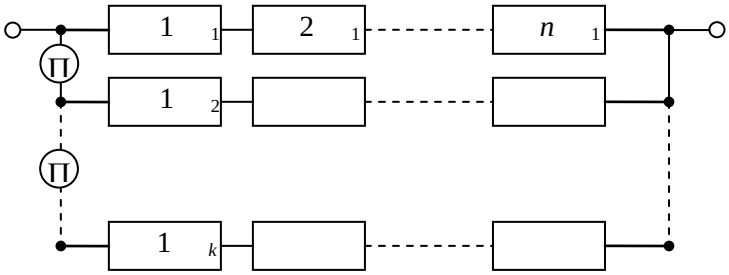



Рис. 9.3. Загальне резервування

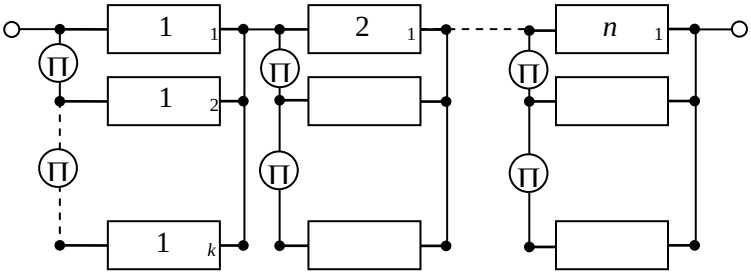



Рис. 9.4. Роздільне резервування

Ймовірність безвідмовної роботи системи при загальному резервуванні можна визначити за формулою

$$P_{заг} = 1 - \left(1 - \prod_{i}^{n} p_i\right)^k , \qquad (9.29)$$

а при роздільному резервуванні

$$P_{роз} = \prod_{i}^{n} [1 - (1 - p_i)^k]. \qquad (9.30)$$

Якщо $p_i$ = const , то ці співвідношення (9.29), (9.30) запишуться у вигляді

$$P_{заг} = 1 - (1 - p^n)^k, \qquad (9.31)$$

$$P_{роз} = [1 - (1 - p)^k]^n. \qquad (9.32)$$

Резервування, при якому включається резерв за допомогою перемикаючих пристроїв П, називається заміщенням (рис. 9.3 і рис. 9.4), на відміну від постійного включення резерву (рис. 9.2).

Якщо надійність перемикаючих пристроїв висока, то заміщення при роздільному резервуванні дає суттєвий виграш у порівнянні із загальним резервуванням, що вимагає значно меншого числа перемикаючих пристроїв.

При оцінюванні показників надійності систем за статистичною інформацією про відмови під час експлуатації визначається закон розподілу відмов і його параметри. За знайденим законом розраховується будь-яка характеристика надійності систем. Методика визначення закону розподілу містить у собі такі етапи: підготовка отриманих даних, побудова гістограми та перевірка відповідності закону розподілу з використанням одного з критеріїв згоди (Колмогорова, Пірсона, Стьюдента, Фішера чи ін.).

## 9.4. Приклади оцінки надійності навігаційних систем

Для навігаційних систем практично встановлено, що число $k$ появи відмов технічних пристроїв протягом певного проміжку часу $t$ підкоряється закону розподілу Пуассона з ймовірністю

$$P_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (9.33)$$

де $\lambda$ – щільність потоку відмов, тобто середня кількість відмов, що припадають на одиницю часу.

Кількісною мірою надійності апаратури є ймовірність безвідмовної роботи апаратури $k = 0$ протягом часу $t$, що описується експоненціальним законом

$$P_н = e^{-\lambda t}. \tag{9.34}$$

За допомогою співвідношень (9.33) і (9.34) можна встановити щільність розподілу часу $f(t) = dP / dt$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{9.35}$$

тоді

$$t_{cp} = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{9.36}$$

і ймовірність безвідмовної роботи

$$P_н = e^{-t/t_{cp}} \ . \tag{9.37}$$

При пуассонівському потоці відмов середній час $t_{cp}$ безвідмовної роботи апаратури є вичерпною характеристикою її надійності, що дозволяє визначати ймовірність безвідмовної роботи протягом будь-якого заданого часу.

Для наближених підрахунків ймовірності безвідмовної роботи апаратури в польоті, коли $t < t_{cp}$, замість формули (9.37) можна користуватися більш простим співвідношенням.

Розкладемо (9.37) в ряд

$$P_н = e^{-t/t_{cp}} = 1 - \frac{\left(\frac{t}{t_{cp}}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{t}{t_{cp}}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{t}{t_{cp}}\right)^3}{3!} + \ldots \tag{9.38}$$

Якщо для практичних підрахунків ймовірності прийняти точність 0,001 і обмежитися двома членами розкладання, то помилка за рахунок відкинутих членів знакозмінного ряду (9.3) не перевищить першого відкинутого члена

$$\left(\frac{t}{t_{cp}}\right)^2 \le 0,002,$$

тоді

$$\frac{t_{ср}}{t} \geq 22,4.$$

Отже, якщо час *t*, для якого підраховується ймовірність безвідмовної роботи апаратури, в 20 – 25 разів менше часу $t_{ср}$ , то для підрахунків можна користуватися простим співвідношенням

$$P_н \approx 1 - \frac{t}{t_{ср}}. \qquad (9.39)$$

**Завдання для самостійного виконання.**

***Завдання 1. Оцінити надійність роботи курсової системи літака.***

***Вихідні дані.***

Середній час безвідмовної роботи радіокомпаса в польоті $t_{ср}$ = 50 годин.

1. Визначити ймовірність того, що протягом часу *t* = 15 хв., необхідного для виконання заходу на посадку літака, радіокомпас не відмовить.

2. Як підвищується ймовірність, якщо на літаку встановлені два радіокомпаса, що працюють незалежно один від одного?

3. Чому дорівнює середній час безвідмовної роботи двох радіокомпасів і у скільки разів зменшується ймовірність відмови здвоєної системи?

***Пояснення.***

Для обчислення середнього часу безвідмовної роботи системи з двох радіокомпасів використати інтегральну форму (9.36), де відповідно до (9.34) $P_н = e^{-\lambda t}$, а ймовірність безвідмовної роботи системи $P_с$ записати через ймовірності безвідмовної роботи двох радіокомпасів з виразу (9.28) при *k*=2.

***Завдання 2. Оцінити надійність роботи резервованої комплексної курсової системи літака.***

***Вихідні дані.***

У комплекс курсової системи входять два гіроагрегата ($ГА_1$ і $ГА_2$ ), які можуть корегуватися або від датчика корекції $ДК_1$, або від другого датчика корекції $ДК_2$ (рис. 9.5). При відмові гіроагрегата $ГА_1$ включається гіроагрегат $ГА_2$; якщо неможливе використовувати датчик корекції $ДК_1$, курсова система перемикається в режим корекції від $ДК_2$.

*Визначити* надійність курсової системи протягом п’ятигодинного польоту, якщо середній час безвідмовної роботи кожного з гіроагрегата однаковий і дорівнює 500 годин, а середній час безвідмовної роботи датчиків корекції дорівнює для $ДК_1$ – 5000 год і для $ДК_2$ – 25 год.

Ймовірність виявлення виходу з ладу гіроагрегата $ГА_1$ і своєчасного перемикання на $ГА_2$ складає $P_{п1} = 0{,}7$ , а ймовірність своєчасного перемикання курсової системи з режиму корекції $ДК_1$ на режим $ДК_2$ дорівнює $P_{п2} = 0{,}85$.

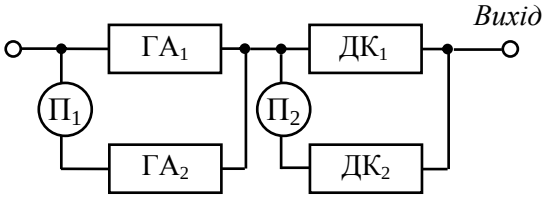



Рис. 9.5. Склад комплексу курсової системи

***Пояснення.***

1. Спочатку обчислюються ймовірності кожного елементу системи $P_{ГА1}$, $P_{ГА2}$, $P_{ДК1}$, $P_{ДК2}$.

2. Далі обчислюються ймовірність $P_{ГА}$ безвідмовної роботи першого блоку, що складається з двох паралельно з'єднаних гіроагрегатів і перемикача $П_1$, а також ймовірність $P_{ДК}$ безвідмовної роботи другого блоку, що складається з двох паралельно з'єднаних датчиків корекції $ДК_1$, $ДК_2$ і перемикача $П_2$.

3. Нарешті обчислюється ймовірностей $P_c$ безвідмовної роботи всієї системи.

**Література до теми 9:** [3], [5], [19–20].

## *Контрольні запитання*

1. Які властивості включає в себе поняття надійності технічних засобів?
2. Що вимагає застосування теорії ймовірностей для аналізу надійності систем?
3. Перелічіть основні показники надійності невідновлюваних технічних засобів.
4. Наведіть вирази для визначення статистичних оцінок показників надійності.
5. Як визначається потік відмов та його статистичні характеристики?

6. Наведіть математичні вирази статистичної оцінки характеристик потоку відмов.
7. Які показники надійності відносять до комплексних?
8. Наведіть способи підвищення надійності систем.
9. Вкажіть основні види структурного резервування та наведіть відповідні формули для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи.

# Список літератури


1. Авраменко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. /В. І. Авраменко, І. К. Карімов. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2013. – 245 с.

2. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К.: ЦУЛ, 2010. – 424 с.

3. Васілевський О. М. Нормування показників надійності технічних засобів: навч. посіб. / О. М. Васілевський, О. Г. Ігнатенко. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 160 с.

4. Васильєва Л. В. Регресійні моделі та аналіз часових рядів: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Л. В. Васильєва, О. А. Кльованик. – Краматорськ : ДДМА, 2010. – 176 с.

5. Васильєв В.М. Теорія ймовірностей в радіотехніці: підручник / В.М. Васильєв, С.Я. Жук. – К.: НТУУ «КПІ», 2023. – 362 с.

6. Васильєв В.М. Моделювання аеронавігаційних систем. Оброблення інформації та прийняття рішень у системі керування повітряним рухом: навч. посіб. / В.М. Васильєв, В.П. Харченко. – К.: НАУ, 2008. – 108 с.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. – 10-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 575 с.

8. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів / І.І. Горбань. – Київ, 2003. – 244 с.

9. Дорош А. К. Теорія ймовірностей та математична статистика / А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 268 с.

10. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

11. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб. у 2-х ч. – Ч. І. Теорія ймовірностей / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. –304 с.

12. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб. у 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2001. – 338 с.

13. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.

14. Каніовська І. Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / І. Ю. Каніовська. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", ТОВ "Фірма «Періодика»", 2004. – 156 с.

15. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика: посіб. / М.В. Карташов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 494 с.

16. Імовірнісні моделі випадкових сигналів та полів у прикладах і задачах: навч. посіб. / В. О. Омельченко, В. М. Безрук, Я. П. Драган [та ін.]; за ред. В. О. Омельченко. – К.: ІСДО, 1995. – 272 с.

17. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: навч. посіб. /А.В. Скороход. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.

18. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / В.М. Турчин. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2014. – 556 с.

19. Шеремет Ю.М. Статистичні методи аналізу технологічних процесів у радіоапаратобудуванні: навч. посіб. / Ю.М. Шеремет, О.М. Вибойщик, І.В. Віхоть. – Львів: ПП «Телемаркет», 1996. – 180 с.

20. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення. – К.: Держстандарт України, 1994. – 91 с.

# Додаток А. Таблиці

*Таблиця А.1*

**Таблиця значень функції Лапласа** $\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 0,50 | 0,19146 | 1,00 | 0,34134 | 1,50 | 0,43319 | 2,00 | 0,47725 | 3,00 | 0,49865 |
| 0,01 | 0,00399 | 0,51 | 0,19497 | 1,01 | 0,34375 | 1,51 | 0,43448 | 2,02 | 0,47831 | 3,05 | 0,49886 |
| 0,02 | 0,00798 | 0,52 | 0,19847 | 1,02 | 0,34614 | 1,52 | 0,43574 | 2,04 | 0,47932 | 3,10 | 0,49903 |
| 0,03 | 0,01197 | 0,53 | 0,20194 | 1,03 | 0,34849 | 1,53 | 0,43699 | 2,06 | 0,48030 | 3,15 | 0,49918 |
| 0,04 | 0,01595 | 0,54 | 0,20540 | 1,04 | 0,35083 | 1,54 | 0,43822 | 2,08 | 0,48124 | 3,20 | 0,49931 |
| 0,05 | 0,01994 | 0,55 | 0,20884 | 1,05 | 0,35314 | 1,55 | 0,43943 | 2,10 | 0,48214 | 3,25 | 0,49942 |
| 0,06 | 0,02392 | 0,56 | 0,21226 | 1,06 | 0,35543 | 1,56 | 0,44062 | 2,12 | 0,48300 | 3,30 | 0,49952 |
| 0,07 | 0,02790 | 0,57 | 0,21566 | 1,07 | 0,35769 | 1,57 | 0,44179 | 2,14 | 0,48382 | 3,35 | 0,49960 |
| 0,08 | 0,03188 | 0,58 | 0,21904 | 1,08 | 0,35993 | 1,58 | 0,44295 | 2,16 | 0,48461 | 3,40 | 0,49966 |
| 0,09 | 0,03586 | 0,59 | 0,22240 | 1,09 | 0,36214 | 1,59 | 0,44408 | 2,18 | 0,48537 | 3,45 | 0,49972 |
| 0,10 | 0,03983 | 0,60 | 0,22575 | 1,10 | 0,36433 | 1,60 | 0,44520 | 2,20 | 0,48610 | 3,50 | 0,49977 |
| 0,11 | 0,04380 | 0,61 | 0,22907 | 1,11 | 0,36650 | 1,61 | 0,44630 | 2,22 | 0,48679 | 3,55 | 0,49981 |
| 0,12 | 0,04776 | 0,62 | 0,23237 | 1,12 | 0,36864 | 1,62 | 0,44738 | 2,24 | 0,48745 | 3,60 | 0,49984 |
| 0,13 | 0,05172 | 0,63 | 0,23565 | 1,13 | 0,37076 | 1,63 | 0,44845 | 2,26 | 0,48809 | 3,65 | 0,49987 |
| 0,14 | 0,05567 | 0,64 | 0,23891 | 1,14 | 0,37286 | 1,64 | 0,44950 | 2,28 | 0,48870 | 3,70 | 0,49989 |
| 0,15 | 0,05962 | 0,65 | 0,24215 | 1,15 | 0,37493 | 1,65 | 0,45053 | 2,30 | 0,48928 | 3,75 | 0,49991 |
| 0,16 | 0,06356 | 0,66 | 0,24537 | 1,16 | 0,37698 | 1,66 | 0,45154 | 2,32 | 0,48983 | 3,80 | 0,49993 |
| 0,17 | 0,06749 | 0,67 | 0,24857 | 1,17 | 0,37900 | 1,67 | 0,45254 | 2,34 | 0,49036 | 3,85 | 0,49994 |
| 0,18 | 0,07142 | 0,68 | 0,25175 | 1,18 | 0,38100 | 1,68 | 0,45352 | 2,36 | 0,49086 | 3,90 | 0,49995 |
| 0,19 | 0,07535 | 0,69 | 0,25490 | 1,19 | 0,38298 | 1,69 | 0,45449 | 2,38 | 0,49134 | 3,95 | 0,49996 |
| 0,20 | 0,07926 | 0,70 | 0,25804 | 1,20 | 0,38493 | 1,70 | 0,45543 | 2,40 | 0,49180 | 4,00 | 0,49997 |
| 0,21 | 0,08317 | 0,71 | 0,26115 | 1,21 | 0,38686 | 1,71 | 0,45637 | 2,42 | 0,49224 | 4,05 | 0,49997 |
| 0,22 | 0,08706 | 0,72 | 0,26424 | 1,22 | 0,38877 | 1,72 | 0,45728 | 2,44 | 0,49266 | 4,10 | 0,49998 |
| 0,23 | 0,09095 | 0,73 | 0,26730 | 1,23 | 0,39065 | 1,73 | 0,45818 | 2,46 | 0,49305 | 4,15 | 0,49998 |
| 0,24 | 0,09483 | 0,74 | 0,27035 | 1,24 | 0,39251 | 1,74 | 0,45907 | 2,48 | 0,49343 | 4,20 | 0,49999 |
| 0,25 | 0,09871 | 0,75 | 0,27337 | 1,25 | 0,39435 | 1,75 | 0,45994 | 2,50 | 0,49379 | 4,25 | 0,49999 |
| 0,26 | 0,10257 | 0,76 | 0,27637 | 1,26 | 0,39617 | 1,76 | 0,46080 | 2,52 | 0,49413 | 4,30 | 0,49999 |
| 0,27 | 0,10642 | 0,77 | 0,27935 | 1,27 | 0,39796 | 1,77 | 0,46164 | 2,54 | 0,49446 | 4,35 | 0,49999 |
| 0,28 | 0,11026 | 0,78 | 0,28230 | 1,28 | 0,39973 | 1,78 | 0,46246 | 2,56 | 0,49477 | 4,40 | 0,49999 |
| 0,29 | 0,11409 | 0,79 | 0,28524 | 1,29 | 0,40147 | 1,79 | 0,46327 | 2,58 | 0,49506 | 4,45 | 0,50000 |
| 0,30 | 0,11791 | 0,80 | 0,28814 | 1,30 | 0,40320 | 1,80 | 0,46407 | 2,60 | 0,49534 | 4,50 | 0,50000 |
| 0,31 | 0,12172 | 0,81 | 0,29103 | 1,31 | 0,40490 | 1,81 | 0,46485 | 2,62 | 0,49560 | 4,55 | 0,50000 |
| 0,32 | 0,12552 | 0,82 | 0,29389 | 1,32 | 0,40658 | 1,82 | 0,46562 | 2,64 | 0,49585 | 4,60 | 0,50000 |
| 0,33 | 0,12930 | 0,83 | 0,29673 | 1,33 | 0,40824 | 1,83 | 0,46638 | 2,66 | 0,49609 | 4,65 | 0,50000 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,34 | 0,13307 | 0,84 | 0,29955 | 1,34 | 0,40988 | 1,84 | 0,46712 | 2,68 | 0,49632 | 4,70 | 0,50000 |
| 0,35 | 0,13683 | 0,85 | 0,30234 | 1,35 | 0,41149 | 1,85 | 0,46784 | 2,70 | 0,49653 | 4,75 | 0,50000 |
| 0,36 | 0,14058 | 0,86 | 0,30511 | 1,36 | 0,41309 | 1,86 | 0,46856 | 2,72 | 0,49674 | 4,80 | 0,50000 |
| 0,37 | 0,14431 | 0,87 | 0,30785 | 1,37 | 0,41466 | 1,87 | 0,46926 | 2,74 | 0,49693 | 4,85 | 0,50000 |
| 0,38 | 0,14803 | 0,88 | 0,31057 | 1,38 | 0,41621 | 1,88 | 0,46995 | 2,76 | 0,49711 | 4,90 | 0,50000 |
| 0,39 | 0,15173 | 0,89 | 0,31327 | 1,39 | 0,41774 | 1,89 | 0,47062 | 2,78 | 0,49728 | 4,95 | 0,50000 |
| 0,40 | 0,15542 | 0,90 | 0,31594 | 1,40 | 0,41924 | 1,90 | 0,47128 | 2,80 | 0,49744 | 5,00 | 0,50000 |
| 0,41 | 0,15910 | 0,91 | 0,31859 | 1,41 | 0,42073 | 1,91 | 0,47193 | 2,82 | 0,49760 | | |
| 0,42 | 0,16276 | 0,92 | 0,32121 | 1,42 | 0,42220 | 1,92 | 0,47257 | 2,84 | 0,49774 | | |
| 0,43 | 0,16640 | 0,93 | 0,32381 | 1,43 | 0,42364 | 1,93 | 0,47320 | 2,86 | 0,49788 | | |
| 0,44 | 0,17003 | 0,94 | 0,32639 | 1,44 | 0,42507 | 1,94 | 0,47381 | 2,88 | 0,49801 | | |
| 0,45 | 0,17364 | 0,95 | 0,32894 | 1,45 | 0,42647 | 1,95 | 0,47441 | 2,90 | 0,49813 | | |
| 0,46 | 0,17724 | 0,96 | 0,33147 | 1,46 | 0,42785 | 1,96 | 0,47500 | 2,92 | 0,49825 | | |
| 0,47 | 0,18082 | 0,97 | 0,33398 | 1,47 | 0,42922 | 1,97 | 0,47558 | 2,94 | 0,49836 | | |
| 0,48 | 0,18439 | 0,98 | 0,33646 | 1,48 | 0,43056 | 1,98 | 0,47615 | 2,96 | 0,49846 | | |
| 0,49 | 0,18793 | 0,99 | 0,33891 | 1,49 | 0,43189 | 1,99 | 0,47670 | 2,98 | 0,49856 | | |

*Таблиця А.2*

## Значення величини $\chi_s^2$ залежно від імовірності $P(\chi^2>\chi_s^2)$

| Число ступенів свободи | $P(\chi^2>\chi_s^2)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,2 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 1,64 | 2,7 | 3,8 | 5,4 | 6,6 | 7,9 | 9,5 | 10,83 |
| 2 | 3,22 | 4,6 | 6,0 | 7,8 | 9,2 | 11,6 | 12,4 | 13,8 |
| 3 | 4,64 | 6,3 | 7,8 | 9,8 | 11,3 | 12,8 | 14,6 | 16,3 |
| 4 | 6,0 | 7,8 | 9,5 | 11,7 | 13,3 | 14,9 | 16,9 | 18,5 |
| 5 | 7,3 | 9,2 | 11,1 | 13,4 | 15,1 | 16,3 | 18,9 | 20,5 |
| 6 | 8,6 | 10,6 | 12,6 | 15,0 | 16,8 | 18,6 | 20,7 | 22,5 |
| 7 | 9,8 | 12,0 | 14,1 | 16,6 | 18,5 | 20,3 | 22,6 | 24,3 |
| 8 | 11,0 | 13,4 | 15,5 | 18,2 | 20,1 | 21,9 | 24,3 | 26,1 |
| 9 | 12,2 | 14,7 | 16,9 | 19,7 | 21,7 | 23,6 | 26,1 | 27,9 |
| 10 | 13,4 | 16,0 | 18,3 | 21,2 | 23,2 | 25,2 | 27,7 | 29,6 |
| 11 | 14,6 | 17,3 | 19,7 | 22,6 | 24,7 | 26,8 | 29,4 | 31,3 |
| 12 | 15,8 | 18,5 | 21,0 | 24,1 | 26,2 | 28,3 | 31,0 | 32,9 |
| 13 | 17,0 | 19,8 | 22,4 | 25,5 | 27,7 | 29,8 | 32,5 | 34,5 |
| 14 | 18,2 | 21,1 | 23,7 | 26,9 | 29,1 | 31,0 | 34,0 | 36,1 |
| 15 | 19,3 | 22,3 | 25,0 | 28,3 | 30,6 | 32,5 | 35,5 | 37,7 |
| 16 | 20,5 | 23,5 | 26,3 | 29,6 | 32,0 | 34,0 | 37,0 | 39,2 |
| 17 | 21,6 | 24,8 | 27,6 | 31,0 | 33,4 | 35,5 | 38,5 | 40,8 |
| 18 | 22,8 | 26,0 | 28,9 | 32,3 | 34,8 | 37,0 | 40,0 | 42,3 |
| 19 | 23,9 | 27,3 | 30,1 | 33,7 | 36,2 | 38,5 | 41,5 | 43,8 |
| 20 | 25,0 | 28,4 | 31,4 | 35,0 | 37,6 | 40,0 | 43,0 | 45,3 |
| 21 | 26,2 | 29,6 | 32,7 | 36,3 | 38,9 | 41,5 | 44,5 | 46,8 |
| 22 | 27,3 | 30,8 | 33,9 | 38,7 | 40,3 | 42,5 | 46,0 | 48,3 |
| 23 | 28,4 | 32,0 | 35,2 | 39,0 | 41,6 | 44,0 | 47,5 | 49,7 |
| 24 | 29,6 | 33,2 | 36,4 | 40,3 | 43,0 | 45,5 | 48,5 | 51,2 |
| 25 | 30,7 | 34,4 | 37,7 | 41,6 | 44,3 | 47,0 | 50,0 | 52,6 |
| 26 | 31,8 | 35,6 | 38,9 | 42,9 | 45,6 | 48,0 | 51,5 | 54,1 |
| 27 | 32,9 | 36,7 | 40,1 | 44,1 | 47,0 | 49,5 | 53,0 | 55,5 |
| 28 | 34,0 | 37,9 | 41,3 | 45,4 | 48,3 | 51,0 | 54,5 | 56,9 |
| 29 | 35,1 | 39,1 | 42,6 | 46,7 | 49,6 | 52,5 | 56,0 | 58,3 |
| 30 | 36,3 | 40,3 | 43,8 | 48,0 | 50,9 | 54,0 | 57,5 | 59,7 |

*Закінчення таблиці А.2*

| Число ступенів свободи | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,50 | 0,30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00016 | 0,0006 | 0,0039 | 0,016 | 0,064 | 0,148 | 0,455 | 1,07 |
| 2 | 0,020 | 0,040 | 0,103 | 0,211 | 0,446 | 0,713 | 1,386 | 2,41 |
| 3 | 0,115 | 0,185 | 0,352 | 0,584 | 1,005 | 1,424 | 2,366 | 3,66 |
| 4 | 0,30 | 0,43 | 0,71 | 1,06 | 1,65 | 2,19 | 3,36 | 4,9 |
| 5 | 0,55 | 0,76 | 1,14 | 1,61 | 2,34 | 3,0 | 4,35 | 6,1 |
| 6 | 0,87 | 1,13 | 1,63 | 2,20 | 3,07 | 3,83 | 5,35 | 7,2 |
| 7 | 1,24 | 1,56 | 2,17 | 2,83 | 3,82 | 4,67 | 6,35 | 8,4 |
| 8 | 1,65 | 2,03 | 2,73 | 3,49 | 4,59 | 5,53 | 7,34 | 9,5 |
| 9 | 2,09 | 2,563 | 3,32 | 4,17 | 5,38 | 6,39 | 8,34 | 10,7 |
| 10 | 2,56 | 3,06 | 3,94 | 4,86 | 6,18 | 7,27 | 9,34 | 11,8 |
| 11 | 3,1 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 7,0 | 8,1 | 10,3 | 12,9 |
| 12 | 3,6 | 4,2 | 5,2 | 6,3 | 7,8 | 9,0 | 11,3 | 14,0 |
| 13 | 4,1 | 4,8 | 5,9 | 7,0 | 8,6 | 9,9 | 12,3 | 15,1 |
| 14 | 4,7 | 5,4 | 6,6 | 7,8 | 9,5 | 10,8 | 13,3 | 16,2 |
| 15 | 5,2 | 6,0 | 7,3 | 8,5 | 10,3 | 11,7 | 14,3 | 17,3 |
| 16 | 5,8 | 6,6 | 8,0 | 9,3 | 11,2 | 12,6 | 15,3 | 18,4 |
| 17 | 6,4 | 7,3 | 8,7 | 10,1 | 12,0 | 13,5 | 16,3 | 19,5 |
| 18 | 7,0 | 7,9 | 9,4 | 10,9 | 12,9 | 14,4 | 17,3 | 20,6 |
| 19 | 7,6 | 8,6 | 10,1 | 11,7 | 13,7 | 15,4 | 18,3 | 21,7 |
| 20 | 8,3 | 9,2 | 10,9 | 12,4 | 14,6 | 16,3 | 19,3 | 22,8 |
| 21 | 8,9 | 9,9 | 11,6 | 13,2 | 15,4 | 17,2 | 20,3 | 23,9 |
| 22 | 9,5 | 10,6 | 12,3 | 14,0 | 16,3 | 18,1 | 21,3 | 24,9 |
| 23 | 10,2 | 10,3 | 13,1 | 14,8 | 17,2 | 19,0 | 22,3 | 26,0 |
| 24 | 10,9 | 12,0 | 13,8 | 15,7 | 18,1 | 19,9 | 23,3 | 27,1 |
| 25 | 11,5 | 12,7 | 14,6 | 16,5 | 18,9 | 20,9 | 24,3 | 28,1 |
| 26 | 12,2 | 13,4 | 15,4 | 17,3 | 19,8 | 21,8 | 25,3 | 29,3 |
| 27 | 12,9 | 14,1 | 16,2 | 18,1 | 20,7 | 22,7 | 26,3 | 30,3 |
| 28 | 13,6 | 14,8 | 16,9 | 18,9 | 21,6 | 23,6 | 27,3 | 31,4 |
| 29 | 14,3 | 15,6 | 17,7 | 19,8 | 22,5 | 24,6 | 28,3 | 32,5 |
| 30 | 15,0 | 16,3 | 18,5 | 20,6 | 23,4 | 25,5 | 29,3 | 33,5 |

*Таблиця А.3*

# Критичні точки розподілу $\chi^2$

| Число ступенів свободи | Рівень значущості | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,95 | 0,975 | 0,999 |
| 1 | 6,6 | 5,0 | 3,8 | 0,0039 | 0,00098 | 0,00016 |
| 2 | 9,2 | 7,4 | 6,0 | 0,103 | 0,051 | 0,020 |
| 3 | 11,3 | 9,4 | 7,8 | 0,352 | 0,216 | 0,115 |
| 4 | 13,3 | 11,1 | 9,5 | 0,711 | 0,484 | 0,297 |
| 5 | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 1,15 | 0,831 | 0,554 |
| 6 | 16,8 | 14,4 | 12,6 | 1,64 | 1,24 | 0,872 |
| 7 | 18,5 | 16,0 | 14,1 | 2,17 | 1,69 | 1,24 |
| 8 | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 2,73 | 2,18 | 1,65 |
| 9 | 21,7 | 19,0 | 16,9 | 3,33 | 2,70 | 2,09 |
| 10 | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 3,94 | 3,25 | 2,56 |
| 11 | 24,7 | 21,9 | 19,7 | 4,57 | 3,82 | 3,05 |
| 12 | 26,2 | 23,3 | 21,0 | 5,23 | 4,40 | 3,57 |
| 13 | 27,7 | 24,7 | 22,4 | 5,89 | 5,01 | 4,11 |
| 14 | 29,1 | 26,1 | 23,7 | 6,57 | 5,63 | 4,66 |
| 15 | 30,6 | 27,5 | 25,0 | 7,26 | 6,26 | 5,23 |
| 16 | 32,0 | 28,8 | 26,3 | 7,96 | 6,91 | 5,81 |
| 17 | 33,4 | 30,2 | 27,6 | 8,67 | 7,56 | 6,41 |
| 18 | 34,8 | 31,5 | 28,9 | 9,39 | 8,23 | 7,01 |
| 19 | 36,2 | 32,9 | 30,1 | 10,1 | 8,91 | 7,63 |
| 20 | 37,6 | 34,2 | 31,4 | 10,9 | 9,59 | 8,26 |
| 21 | 38.9 | 35,5 | 32,7 | 11,6 | 10,3 | 8,90 |
| 22 | 40,3 | 36,8 | 33,9 | 12,3 | 11,0 | 9,54 |
| 23 | 41,6 | 38,1 | 35,2 | 13,1 | 11,7 | 10,2 |
| 24 | 43,0 | 39,4 | 36,4 | 13,8 | 12,4 | 10,9 |
| 25 | 44,3 | 40,6 | 37,7 | 14,6 | 13,1 | 11,5 |
| 26 | 45,6 | 41,9 | 38,9 | 15,4 | 13,8 | 12,2 |
| 27 | 47,0 | 43,2 | 40,1 | 16,2 | 14,6 | 12,9 |
| 28 | 48,3 | 44,5 | 41,3 | 16,9 | 15,3 | 13,6 |
| 29 | 49,6 | 45,7 | 42,6 | 17,7 | 16,0 | 14,3 |
| 30 | 60,9 | 47,0 | 43,8 | 18,5 | 16,8 | 15,0 |