

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



РЕОЛОГІЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування»,
освітньою програмою «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних
та будівельних матеріалів і виробів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Реологія: Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 133 «Галузеве машинобудування», освітньої програми «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів і виробів» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. І. Івіцький. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 88 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 21.02.2019 р.)
за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету (протокол № 1 від 28.01.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

РЕОЛОГІЯ

Конспект лекцій з навчальної дисципліни

Укладач: *Івіцький Ігор Ігорович*, канд. техн. наук

Відповідальний редактор: *Гондляр О.В.*, д-р техн. наук, проф.

Рецензент: *Степанюк А.Р.*, канд. техн. наук, доц.

Призначення посібника – надати теоретичний програмний матеріал про реологічні властивості полімерних та силікатних матеріалів, математичне моделювання процесів течії таких матеріалів. Навчальний посібник містить описи 15 комплексних тем. У кінці посібника наведено список рекомендованих навчально-методичних матеріалів. Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування», освітньою програмою «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів і виробів»

© І. І. Івіцький, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ІХФ), 2019

ВСТУП

Конспект лекцій призначений для підготовки та проведення лекційних занять з навчальної дисципліни «Реологія» для студентів, які навчаються за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування», освітньою програмою «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів і виробів» денної форми навчання.

Навчальна дисципліна належить до циклу професійної підготовки та має статус обов'язкової. Міждисциплінарні зв'язки: навчальній дисципліні «Реологія» передують навчальні дисципліни, такі як: «Фізика», «Матеріалознавство», «Опір матеріалів», «Механіка твердого деформованого тіла».

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі результати навчання: знання реологічних властивостей матеріалів та методів їх вимірювання; методів розрахунку та моделювання процесу течії в'язких рідин та уміння планувати та виконувати експериментальне визначення реологічних властивостей матеріалів на лабораторному обладнанні; розраховувати параметри та здійснювати математичне моделювання процесу течії в'язких рідин.

Предмет та завдання дисципліни

Механіка - наука, яка вивчає закони механічного руху різних середовищ.

Механіка суцільних середовищ - частина механіки, яка вивчає рух твердих тіл, рідин та газів, які заповнюють простір суцільно, утворюючи, так званий, деформований континуум, відстань між точками якого під час руху змінюється.

Опір матеріалів, теорія пружності є частинами механіки, які вивчають рух у твердих ідеально пружних тілах.

Гідромеханіка, аеромеханіка вивчають рух в ідеально в'язких ньютонівських рідинах та ідеальних газах.

Теорія пластичності вивчає рух у більш складних пластичних середовищах. Течія у них виникає тільки при навантаженнях, які перевищують характерне для конкретного матеріалу критичне і значення - границю текучості.

Якщо матеріал займає проміжний стан між твердими пружними тілами і в'язкими рідинами, то такі матеріали відносяться до класу реологічних середовищ, і рух у них вивчає реологія.

Для реологічних середовищ є властивим те, що вони течуть як в'язкі або пластичні рідини, і при цьому у них накопичуються великі пружні деформації, як у твердих тілах.

Реологію можна розглядати як розділ механіки суцільних середовищ. У залежності від матеріалів, рух у яких вивчається, виділяють розділи у реології: реологія полімерних (у тому числі композиційних) матеріалів, реологія суспензій (у тому числі полімерних паст - пластизолей, латексів, красок), реологію еластомерів, реологію мастил і т.п.

Предметом реології являється опис процесів течії та накопичення пружних деформацій, які проходять синхронно в різних матеріалах при різних режимах деформування. Характерним для реології є те, що процес течії являється головним (визначним) серед других процесів.

Три види задач, які вирішуються в реології :

1. визначення типу течії;
2. розробка реологічних моделей;
3. експериментальне визначення реологічних властивостей матеріалів.

1. Напруження

1.1. Тензорні позначення

При розгляданні основних питань механіки і реології використання тензорних позначень спрощує викладання і робить його більш ясным.

1.2. Тензор напруження

В матеріалі, на який діють різні сили, виділимо елемент об'єму у вигляді куба, зорієнтованого по трьом осям координат (рис. 1.1).

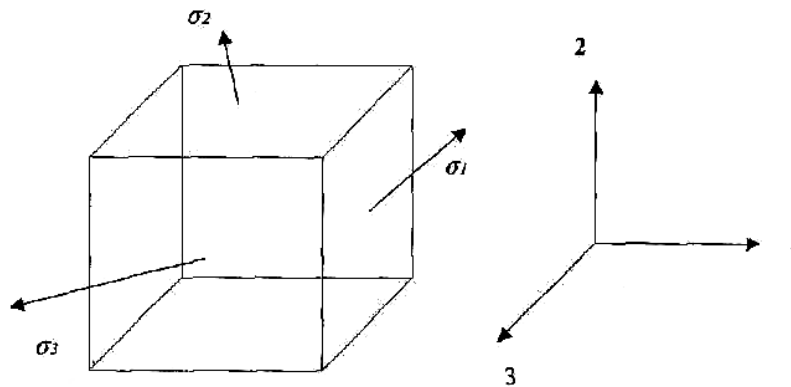


Рис. 1.1. Елементарний об'єм

Куб знаходиться в рівновазі тоді, коли сума векторів поверхневих сил σ_1 , σ_2 , σ_3 (σ_i ; $i = 1, 2, 3$) прикладених до 1-ї, 2-ї, 3-ї граней, дорівнює нулю (поверхневі сили замінюють дію на куб відкинутих частин матеріалу). Кожен із векторів σ_1 , σ_2 , σ_3 (σ_i ; $i = 1, 2, 3$) визначається трьома скалярами, тобто проєкціями на координатні вісі (рис. 1.2).

$$\begin{aligned} &\sigma_1(\sigma_{11}; \sigma_{12}; \sigma_{13}); \\ &\sigma_2(\sigma_{21}; \sigma_{22}; \sigma_{23}); \\ &\sigma_3(\sigma_{31}; \sigma_{32}; \sigma_{33}). \end{aligned}$$

Тензор напруження записують у вигляді

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

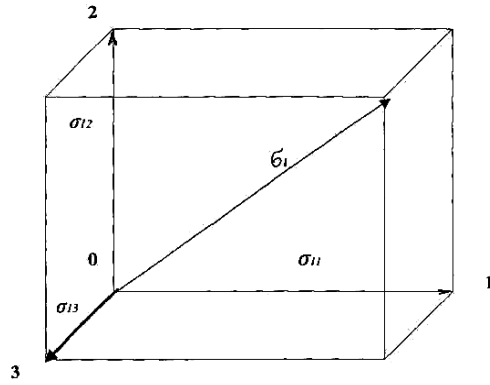


Рис. 1.2. Проекції вектора σ_1

Перший індекс, компонент тензора, ($i = 1, 2, 3$) вказує на орієнтацію грані куба (якщо $i = 2$, то вісь 2 нормальна до грані 2 куба).

Другий індекс ($j = 1, 2, 3$) вказує на яку вісь проектується вектор. Наприклад, σ_{31} являється проекцією вектора σ_3 на вісь 1.

Якщо $i = j$, то компоненти тензора являються нормальними до граней куба і діагональними (вони лежать на головній діагоналі в матриці тензора).

Якщо $i \neq j$, то компоненти тензора лежать на грані куба (являються зсувними до граней куба).

1.3. Головні осі і головні напруження тензора

Якщо координатні вісі 1, 2, 3 повернути на кут α (або β, γ) відносно вісі 1 (або 2, 3), то зміняться величини всіх 9-ти компонентів тензора по відомому закону.

Для будь-якого напруженого стану можливо знайти такі кути α, β, γ повороту координатних вісей 1, 2, 3, при яких в нових вісях 1', 2', 3' всі зсувні компоненти з індексами $i \neq j$ стануть рівними нулю, а нормальні компоненти з індексами $i = j$ отримують екстремальні значення.

Такі нові вісі 1', 2', 3' називають головними вісями, а компоненти $\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3$ називають головними напруженнями. Тензор напруження в неголовних вісях 1, 2, 3 з 9-ю компонентами

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

в головних 1', 2', 3' вісях має тільки три діагональні (нормальні) компоненти

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

1.4. Головні напруження при простому зсуві

При простому зсуві матеріал прилипає як до нерухокої поверхні, так і до поверхні, яка рухається відносно нерухокої поверхні зі швидкістю Θ на постійній відстані h (рис. 1.3).

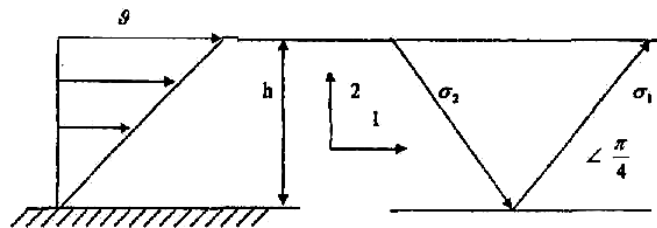


Рис. 1.3. Простий зсув

Якщо в процесі деформування в простому матеріалі не накопичуються високоеластична деформація, то розтягуючі головні напруження σ_1 і стискаючі головні напруження σ_2 діють під кутом $\pi/4$ до напрямку зсуву.

При простому зсуві величини нормальних (діагональних) компонент тензора напруження можна описати сфероїдом, через велику вісь якого проходить головне напруження σ_1 , а через малу вісь - σ_1 .

Тензор напруження при простому зсуві в неголовних вісях має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

При простому зсуві напрям деформації співпадає з віссю 1 системи координат (рис. 1.3).

Напруження зсуву дорівнює компонентам σ_{12} тензора в неголовних вісях

$$\tau = \frac{F}{S},$$

де F – сила зсуву рухої поверхні; S – площа рухої поверхні.

Таким чином запишемо

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В головних вісях, орієнтованих під кутом $\pi/4$ до напрямку зсуву, тензор напруження в простих матеріалах (наприклад низькомолекулярних) має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

1.5. Закон парності зсувних напружень або рівність Коши

Цей закон виконується в тому, що зсувні компоненти тензора ($i = j$) незалежно від порядку індексів рівні по модулю між собою

$$|\sigma_{ij}| = |\sigma_{ji}|,$$

наприклад

$$|\sigma_{12}| = |\sigma_{21}|.$$

Таким чином можна записати тензор 9 компонентами як тензор з 6 незалежними компонентами

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Такий тензор є симетричним: він має три нормальні і три зсувні компоненти.

1.6. Інваріанти тензора напруження

При повороті вісей координат міняються всі компоненти тензора, але є такі комплекси із цих компонентів, інваріанти, які залишаються постійними при будь-якому повороті системи координат. Перший (лінійний) I_1 , другий (квадратичний) I_2 , третій (кубічний) I_3 . Інваріанти тензора напруження в головних осях мають вигляд

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3,$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Інваріанти характеризують інтенсивність поля напружень одною величиною, яка не змінюється при повороті осей координат.

1.7. Сферичний тензор і дельта Кронекера

При всебічному стискуванні (рис. 1.4) тензор напруження має вигляд

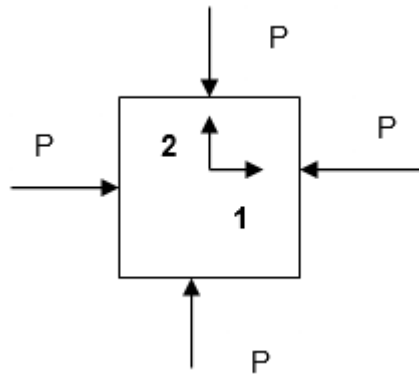


Рис. 1.4. Всебічне стискування

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & & \\ & \sigma_{22} & \\ & & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & & \\ & -p & \\ & & -p \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = -p\delta_{ij}, \quad (1.1)$$

де $\delta_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$ – дельта Кронекера або одиничний тензор; p – гідростатичний тиск.

В загальному випадку розглядають середній статичний тиск

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1,$$

де I_1 – перший інваріант тензора напруження в головних осях. Тензор (1.1) називають сферичним тензором.

1.8. Девіатор напруження при одновісному розтягу

Девіатор напруження σ'_{ij} – це такий тензор напруження, компоненти якого отримані відніманням компонент сферичного тензора із компонент повного тензора напружень

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \cdot \delta_{ij}, \quad (1.2)$$

де I_1 – перший інваріант повного тензора напруження, який при одновісному розтягу має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}.$$

Компоненти сферичного тензора напруження дорівнюють середньому нормальному напруженню

$$\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_0 + 0 + 0) = \frac{1}{3}\sigma_0. \quad (1.3)$$

Підставляючи (1.3) в (1.2) отримаємо

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\sigma_0 & & \\ & \frac{1}{3}\sigma_0 & \\ & & \frac{1}{3}\sigma_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\sigma_0 & & \\ & -\frac{1}{3}\sigma_0 & \\ & & -\frac{1}{3}\sigma_0 \end{vmatrix}.$$

Спільний множник $\frac{1}{3}\sigma_0$ винесемо за рамки матриці

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_0 \begin{vmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix}.$$

Перший інваріант девіатора повинен дорівнювати нулю

$$I_1 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

При одновісному напруженні (рис. 1.5) напрям дії напруження σ_0 співпадає з напрямом дії головного напруження σ_1 .

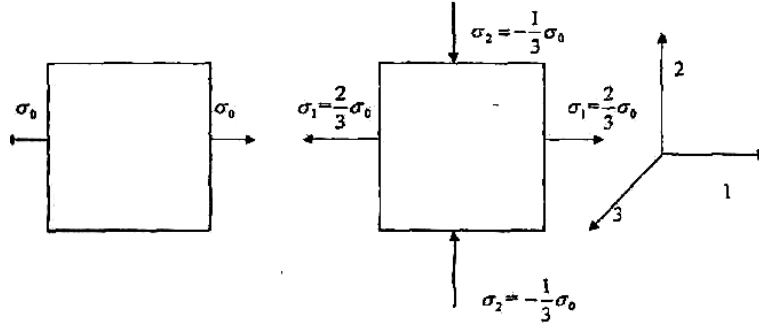


Рис. 1.5. Одновісний розтяг

Сферичний тензор напруження $\frac{1}{3} I_1 \cdot \delta_{ij}$ відповідальний тільки за стискання матеріалу з усіх сторін.

Девіатор напруження σ'_{ij} призводить до зміни форми матеріалу: розтягуючі компоненти $\sigma_1 = \frac{2}{3} \sigma_0$ відповідальні за видовження форми, а стискуючі $\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{1}{3} \sigma_0$ компоненти відповідають за звуження форми в поперечному напрямі 2 та 3.

Повний тензор напруження σ_{ij} відповідальний як за стискування, так і за зміну форми матеріалу.

1.9. Девіатор напруження при двовісному розтягу

При двовісному розтягу плівок або листів (рис. 1.6) напрям дії напруження σ_0 співпадає з напрямом дії головних напружень σ_1 та σ_2 .

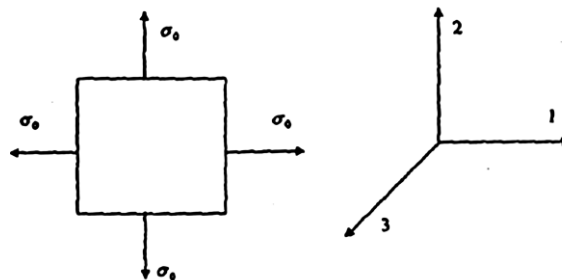


Рис. 1.6. Двовісний розтяг

Повний тензор напруження при двовісному розтягу має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & & \\ & \sigma_0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Перший інваріант тензора

$$I_1 = \sigma_0 + \sigma_0 + 0 = 2\sigma_0.$$

Середнє напруження в елементі об'єму

$$\frac{I_1}{3} = \frac{2}{3}\sigma_0.$$

Сферичний тензор, відповідальний за стискання, має вигляд

$$\frac{2}{3}\sigma_0\delta_{ij}. \quad (1.5)$$

Віднімаючи компоненту сферичного тензора (1.5) з компонент повного тензора (1.4), отримаємо компоненти девіатора напруження при двовісному розтягу

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_0 - \frac{2}{3}\sigma_0 & & \\ & \sigma_0 - \frac{2}{3}\sigma_0 & \\ & & -\frac{2}{3}\sigma_0 \end{vmatrix}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\sigma_0 & & \\ & \frac{1}{3}\sigma_0 & \\ & & -\frac{2}{3}\sigma_0 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник за рамки матриці

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{vmatrix}.$$

Тензор напруження являється дівіатором, оскільки

$$I_1 = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Компоненти дівіатора σ_1 і σ_2 відповідальні за видовження елемента об'єму по двом ортогональним вісям 1, 2.

В напрямі 3 діє в два рази більше напруження стискання елемента об'єму.

2. Деформації

2.1. Деформація розтягу по Генкі

Відносне в момент часу t видовження дорівнює (так звана „інженерна мірка“)

$$\varepsilon_{iM}(t) = \frac{\Delta l(t)}{l},$$

де $\Delta l(t)$ – абсолютне видовження в момент часу t

$$\varepsilon_{iM}(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0} = \frac{l(t)}{l_0} - 1, \quad (2.1)$$

де $l(t)$ – довжина елемента об'єму в момент часу t ; l_0 – початкова довжина елемента. Відношення

$$\frac{l(t)}{l_0} = \lambda(t), \quad (2.2)$$

називають ступенем видовження в момент часу t . Підставляючи (2.2) в (2.1) отримаємо

$$\varepsilon_{iM}(t) = \lambda(t) - 1. \quad (2.3)$$

При малих величинах видовження $\Delta l(t)$ величина відносної деформації $\varepsilon(t)$ практично не залежить від того, до чого відносить абсолютну деформацію: до початкової деформації l_0 , чи до кінцевої її величини.

При ступенях видовження $\lambda \geq 1,5 \dots 2$ відношення абсолютної деформації до початкової веде до втрати адитивності двох послідовних деформацій, оскільки в наступній деформації $\Delta l(t)$ буде віднесено до кінцевої деформації, отриманої при першому деформуванні.

При великих ступенях видовження буде математично коректно відносити нескінченно мале абсолютне видовження $dl(t)$ до текучої величини довжини $l(t)$.

В такому разі нескінченно мале відносне видовження $d\varepsilon^H(t)$ визначається як

$$d\varepsilon^H(t) = \frac{dl(t)}{l(t)}$$

Тоді відносна деформація в момент часу t в процесі видовження

$$d\varepsilon^H(t) = \int_0^t \frac{dl(t)}{l(t)}.$$

Перетворюючи вираз, отримаємо

$$d\varepsilon^H(t) = \ln l(t) - \ln l_0 = \ln \frac{l(t)}{l_0}. \quad (2.4)$$

Підставляючи (2.2) в (2.4), отримаємо

$$d\varepsilon^H(t) = \ln \lambda(t). \quad (2.5)$$

Перетворюючи (2.3), отримаємо

$$\lambda(t) = \varepsilon_{im}(t) + 1. \quad (2.6)$$

Підставляючи (2.6) в (2.5), отримаємо відношення між деформацією по Генкі та інженерною мірою деформації

$$\varepsilon^H(t) = \ln[1 + \varepsilon_{im}(t)].$$

Легко переконатись, що

$$\ln \lambda \approx \lambda - 1.$$

при величинах λ близьких до 1.

2.2. Девіатор деформації при одновісному розтягу

При одновісному розтягу (рис. 2.1) об'єм нестискаемого елемента перед деформуванням

$$V_0 = l_0 a_0^2, \quad (2.7)$$

дорівнює об'єму елемента після деформування

$$V_k = l_k a_k^2, \quad (2.8)$$

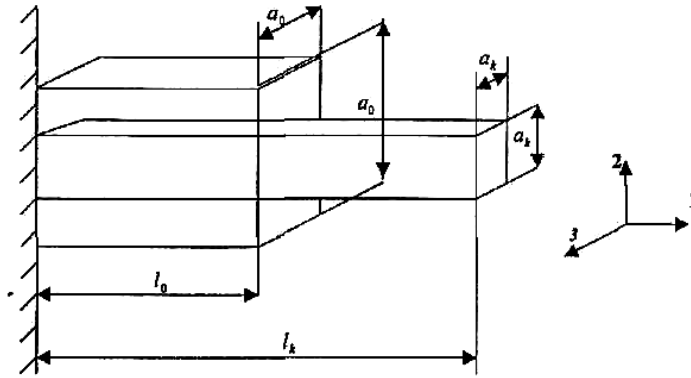


Рис. 2.1. Одновісний розтяг

Підставляючи (2.8) в (2.7), отримаємо

$$l_0 a_0^2 = l_k a_k^2. \quad (2.9)$$

Перетворюючи (2.9), отримаємо

$$\frac{l_k}{l_0} = \frac{a_0^2}{a_k^2} = \left(\frac{a_k}{a_0} \right)^{-2}. \quad (2.10)$$

Відношення

$$\lambda_1 = \frac{l_k}{l_0}, \quad (2.11)$$

називають ступінь видовження. Ступінь видовження по вісям 2 та 3

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{a_k}{a_0}. \quad (2.12)$$

Підставляючи (2.11) та (2.12) в (2.10) отримаємо

$$\lambda_1 = \lambda_2^{-2} = \lambda_3^{-2}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\lambda_1^{-\frac{1}{2}} = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (2.13)$$

Якщо деформується нестискаємий елемент об'єму, то виконується умова

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 1$$

Деформація повздовжня та поперечна по Генкі

$$\varepsilon_1^H = \ln\lambda_1; \varepsilon_2^H = \ln\lambda_2; \varepsilon_3^H = \ln\lambda_3. \quad (2.14)$$

Підставляючи (2.13) в (2.14), отримаємо компоненти тензора деформації

$$\varepsilon_2^H = \varepsilon_3^H = \ln\lambda_1^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln\lambda_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1^H.$$

Таким чином тензор деформації при одновісному розтягу нестискаємого елемента об'єму у головних осях має вигляд

$$\varepsilon_{ij}^H = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^H & & \\ & -\frac{1}{2}\varepsilon_1^H & \\ & & -\frac{1}{2}\varepsilon_1^H \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник за рамки матриці

$$\varepsilon_{ij}^H = \varepsilon_1^H \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Перший інваріант тензора

$$I_1 = \varepsilon_1^H \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

дорівнює нулю, це значить, що тензор являється девіатором.

2.3. Коефіцієнт Пуассона при одновісному розтягу

Коефіцієнт Пуассона визначається як відношення по модулю поперечної до повздовжньої деформації по Генкі

$$\mu^H = \left| \frac{\varepsilon_2^H}{\varepsilon_1^H} \right|. \quad (2.16)$$

Раніше було отримано

$$\varepsilon_2^H = \varepsilon_3^H = -\frac{1}{2}\varepsilon_1^H. \quad (2.17)$$

Підставляючи (2.17) в (2.16), отримаємо

$$\mu^H = \left| \frac{-\frac{1}{2}\varepsilon_1^H}{\varepsilon_1^H} \right| = 0,5.$$

Таким чином для нестискаємих елементів об'єму коефіцієнт Пуассона дорівнює 0,5 при будь-яких ступенях видовження .

2.4. Деформація при простому зсуві

При простому зсуві (рис. 2.2) відстань h між нерухою і рухою поверхнями витримується сталою. Відносний зсув γ (або просто «зсув») розраховують як відношення абсолютного зсуву U до відстані h

$$\gamma = \frac{U}{h} = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α – кут, який зменшується від $\pi/2$ до мінімальних значень.

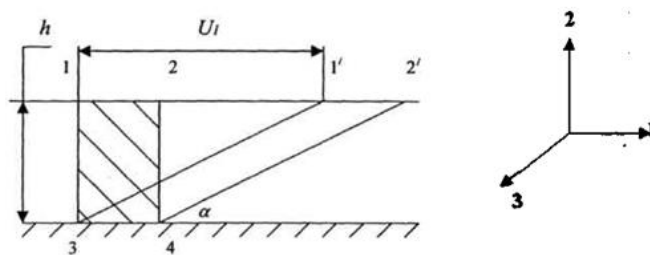


Рис. 2.2. Простий зсув

Як видно з рис. 2.2, при зсуві росте довжина елементів об'єму 1'-2'-3-4 під дією розтягуючих (нормальних) напружень.

По величині γ розраховують компоненти тензора напруження для простого зсуву

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\gamma.$$

Якщо при зсуві не накопичуються високоеластичні деформації (наприклад, при низькомолекулярних матеріалах), то тензор деформації в неголовних осях, зорієнтованих в напрямі зсуву, має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо винесемо множник за знак матриці, отримаємо

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Якщо при зсуві накопичуються високо еластичні деформації в полімерних матеріалах то тензор (2.18) в неголовних осях приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.19)$$

В головних осях тензор (2.19) має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Швидкості деформації

3.1. Швидкість деформації при простому зсуві

Проаналізуємо кінематику простого зсуву (рис. 3.1). Нижня поверхня нерухома, а верхня поверхня переміщується зі швидкістю v_1 у напрямі 1. Відстань між поверхнями стала і дорівнює h . Матеріал прилипає до цих поверхонь. Швидкість середовища між поверхнями змінюється від нуля на нижній поверхні до v_1 на верхній поверхні. В будь-якому шарі на відстані y від нижньої поверхні швидкість v_1 середовища

$$v_1(y) = v_1 \frac{y}{h}.$$

Розподіл швидкості $v_1(y)$ по зазору товщиною h між поверхнями в такому випадку буде лінійним (рис. 3.1).

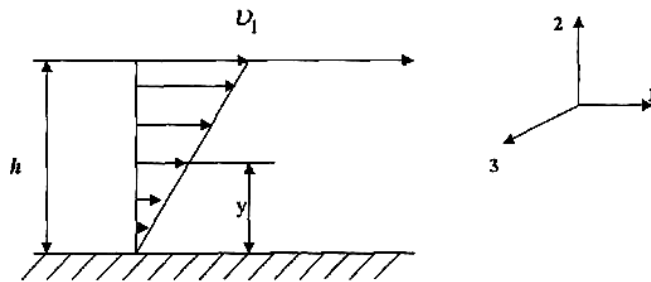


Рис. 3.1. Швидкість зсуву

Проекції швидкості на дві інші осі 2 та 3 дорівнюють нулю

$$v_2 = v_3 = 0.$$

Гradient швидкості $\text{grad } v_1$ в напрямі 2 розраховується як похідна швидкості v_1 за відстанню y

$$\text{grad } v_1 = \frac{dv_1}{dy}.$$

Якщо швидкість верхньої поверхні v_1 стала в часі та еюра швидкостей має вигляд, приведений на рис. 3.1, то gradient швидкості розраховується по формулі

$$\text{grad } v_1 = \frac{v_1}{h}. \quad (3.1)$$

В такому випадку абсолютний зсув

$$U_1 = v_1 \Delta t, \quad (3.2)$$

де Δt – інтервал часу, в якому реалізується зсув.

Підставляючи (3.2) в (3.1), отримаємо

$$\text{grad } v_1 = \frac{U_1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{h}. \quad (3.3)$$

Відносна деформація зсуву або просто зсув

$$\gamma = \frac{U_1}{h}. \quad (3.4)$$

Підставляючи (3.4) в (3.3), отримаємо

$$\text{grad } v_1 = \frac{\gamma}{\Delta t}.$$

При $v_1 = \text{const}$ похідна зсуву γ за часом t набуває вигляду

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{\gamma}{\Delta t} = \dot{\gamma}.$$

Таким чином

$$\text{grad } v_1 = \dot{\gamma}.$$

Так доказано, що швидкість зсуву дорівнює градієнту швидкості.

Тензор швидкості деформації при простому зсуві отримують шляхом диференціювання тензора зсуву (2.18) в неголовних вісях

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.2. Швидкість деформації при одновісному розтягу

Тензор швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_{ij}$ при одновісному розтягу у головних осях отримують шляхом диференціювання тензора деформації (2.15)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^H = \dot{\varepsilon}_1^H \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

4. Ідеально пружне тіло

4.1. Діаграма деформування ідеального пружного тіла Гука

Діаграма навантаження ідеально-пружного тіла (рис. 4.1) включає: 1-2 – миттєве навантаження; 2-3 – стале навантаження; 3-4 – миттєве розвантаження.

Діаграма деформування включає: 1-2 – миттєве деформування; 2-3 – стала деформація; 3-4 – миттєве пружне відновлення.

При деформуванні тіла Гука вся робота A зовнішніх сил накопичується у вигляді пружного потенціалу W , дисипація і нагрів тіла зовсім не відбувається

$$W = A; D = 0.$$

4.2. Закон Гука в тензорній формі

Для всіх видів деформування ідеально пружних тіл закон Гука в тензорній формі має вигляд

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}, \quad (4.1)$$

де σ'_{ij} – девіатор тензора напруження, відповідальний тільки за зміну форми тіла, оскільки за зміну об'єму відповідає шаровий тензор напруження; G – модуль пружності при зсуві; ε'_{ij} – девіатор деформації тіла, який фіксує тільки зміну його форми, а не об'єму.

4.3. Закон Гука в тензорній формі для одноосного розтягу

Девіатр напруження для одноосного розтягу в головних вісях має вигляд

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sigma_0}{3} \begin{vmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix}. \quad (4.2)$$

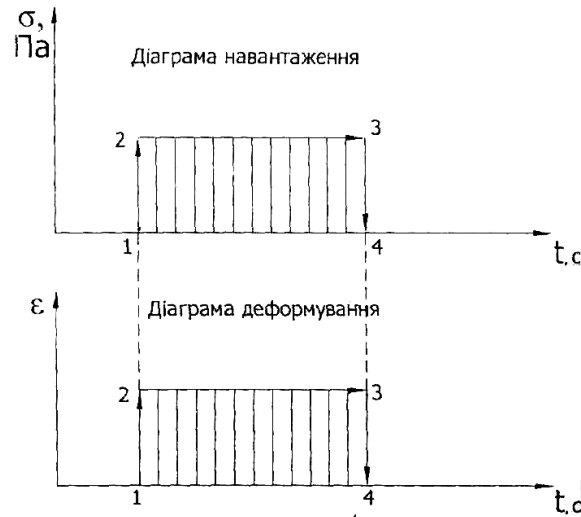


Рис. 4.1. Ідеально пружне тіло

Девіатор деформації при одновісному розтягу в головних вісях має вигляд

$$\varepsilon_{ij}^H = \varepsilon_1^H \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Підставляючи (4.3) та (4.2) в (4.1), отримаємо

$$\frac{\sigma_0}{3} \begin{vmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix} = 2G\varepsilon_1^H \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Відношення між компонентами девіаторів з індексами 11

$$\frac{\sigma_0}{3} \cdot 2 = 2G\varepsilon_1^H \cdot 1.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\sigma_0 = 3G\varepsilon_1^H. \quad (4.4)$$

Відношення між компонентами девіаторів з індексами 22 та 33

$$\frac{\sigma_0}{3} \cdot (-1) = 2G\varepsilon_1^H \cdot \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Перетворюючи, знову отримаємо (4.4).

Комплекс

$$E = 3G,$$

називають модулем Юнга.

4.4. Закон Гука в тензорній формі для простого зсуву

Тензор напруження для простого зсуву в неголовних вісях має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тензор деформації для простого зсуву в неголовних вісях має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, згідно з (4.1), отримаємо

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2G \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Відношення між компонентами з індексами 12 та 21

$$\tau = 2G \frac{1}{2} \gamma.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\tau = G\gamma.$$

Дана формула називається законом Гука в простій формі.

5. В'язка рідина

5.1. Діаграма деформування в'язкої рідини

Діаграма навантаження в'язкої рідини (рис. 5.1) включає: 1-2 – миттєве навантаження; 2-3 – стале навантаження; 3-4 – миттєве розвантаження.

Діаграма деформування включає: 1,2-3,4 – лінійний ріст деформації з сталою швидкістю; 3,4-∞ – стале значення деформації при повній відсутності її відновлення.

При деформуванні в'язкої рідини вся робота A зовнішніх сил дисипірує, перетворюючись у тепло D при повній відсутності накопичення пружнього потенціалу W

$$W = 0; D = A.$$

5.2. Закон Ньютона в тензорній формі

Для всіх видів деформування в'язких рідин закон Ньютона в тензорній формі має вигляд

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}'_{ij}, \quad (5.1)$$

де σ'_{ij} – девіатор тензора напруження, відповідальний тільки за зміну форми тіла, оскільки за зміну об'єму відповідає шаровий тензор; η – в'язкість при зсуві; $\dot{\epsilon}'_{ij}$ – девіатор швидкості деформації в'язкої рідини, який має відношення тільки до зміни форми, а не об'єму.

5.3. Закон Ньютона в тензорній формі для одноосного розтягу

Девіатор напруження для одноосного розтягу в головних вісях має вигляд

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sigma_0}{3} \begin{vmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix}. \quad (5.2)$$

Девіатор швидкості деформації при одноосному розтягу в головних вісях має вигляд

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^H = \dot{\varepsilon}_1^H \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Підставляючи (5.3) та (5.2) в (5.1), отримаємо

$$\frac{\sigma_0}{3} \begin{vmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix} = 2\eta \dot{\varepsilon}_1^H \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

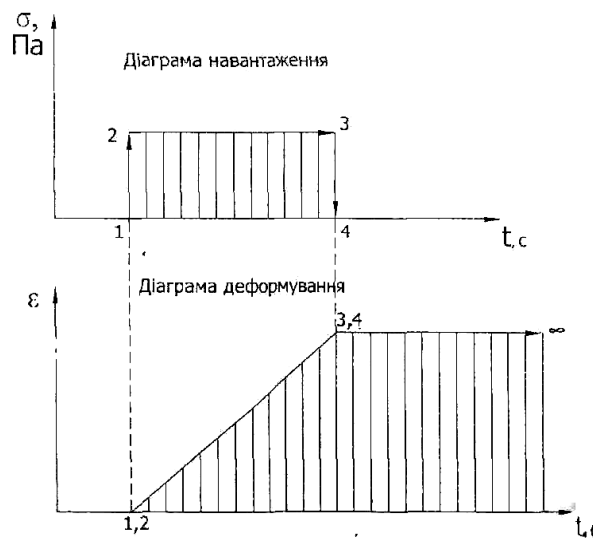


Рис. 5.1. В'язка рідина

Відношення між компонентами девіаторів з індексами 11

$$\frac{\sigma_0}{3} \cdot 2 = 2\eta \dot{\varepsilon}_1^H \cdot 1$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\sigma_0 = 3\eta \dot{\varepsilon}_1^H.$$

6. Течія ньютонівської рідини в циліндричній трубі

6.1. Розподіл напруження в трубі

Розглянемо умови рівноваги рідини в циліндричному каналі (трубі або капілярі). На вході в трубу (рис. 6.1) діє питомий тиск P , на виході із труби тиск дорівнює нулю. Рідина розглядається як пробка, втягнута в циліндричний отвір.

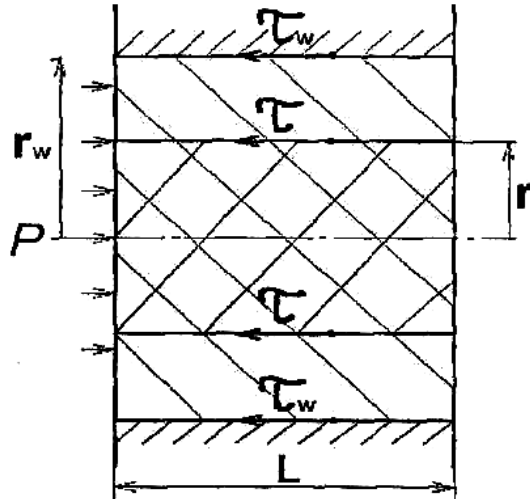


Рис. 6.1. Розрахункова схема.

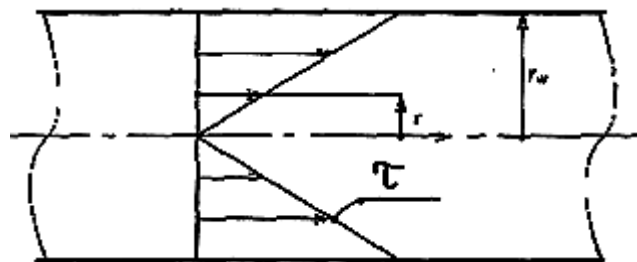


Рис. 6.2. Епюра напружень в трубі

В цій пробці умовно виріжемо циліндр радіусом r , величина якого лежить в діапазоні $0 < r < r_w$.

Введемо термін "безрозмірного радіуса", який визначається по формулі

$$\beta = \frac{r}{r_w}, \quad (6.1)$$

де r_w – радіус стінки труби. Безрозмірний радіус β змінюється в діапазоні $0 < \beta < 1$.

Площа поперечного перетину вирізаного циліндру

$$S_n = \pi r^2. \quad (6.2)$$

Площа контакту вирізаного циліндра з рідиною

$$S_k = 2\pi r l . \quad (6.3)$$

Підставляючи (6.1) в (6.2), отримаємо

$$S_n = \pi r_w^2 \beta^2 .$$

Підставляючи (6.1) в (6.3), отримаємо

$$S_k = 2\pi r_w l \beta .$$

Аксіальне зусилля, з яким тиск діє на вирізану пробку

$$F_n = P S_n = P \pi r_w^2 \beta^2 .$$

Аксіальне зусилля, яке утримує вирізаний циліндр в рідині

$$F_k = \tau(\beta) S_k = \tau(\beta) 2\pi r_w l \beta .$$

В режимі сталої течії рідини ці дві сили урівноваженні, тобто

$$F_n = F_k .$$

Таким чином

$$P \pi r_w^2 \beta^2 = \tau(\beta) 2\pi r_w l \beta .$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\tau(\beta) = \frac{P r_w}{2l} \beta .$$

Напруження τ_w на стінці труби

$$\tau_w = \frac{P r_w}{2l} . \quad (6.4)$$

Таким чином

$$\tau(\beta) = \tau_w \beta . \quad (6.5)$$

Епюра напружень в трубi не залежить вiд природи рiдини i для всiх матерiалiв має вигляд, зображений на рис. 6.2. Напруження в трубi змiнюється в дiапазонi $0 < \tau(\beta) < \tau_w$ по лiнiйному закону.

6.2. Розподiл швидкостей зсуву при сталiй течiї ньютонiвської рiдини в цилiндричному каналi

Для ньютонiвської рiдини мiж напруженнями зсуву та швидкостями зсуву iснує пряма пропорцiйнiсть

$$\tau = \eta \dot{\gamma}. \quad (6.6)$$

На поверхнi вирiзаного в рiдинi цилiндра радiусом r дiє напруження $\tau(\beta)$ при швидкостi зсуву $\dot{\gamma}(\beta)$, яка лежить в дiапазонi $0 < \dot{\gamma}(\beta) < \dot{\gamma}_w$.

На такiй поверхнi вираз (6.6) набуває вигляду

$$\tau(\beta) = \eta \dot{\gamma}(\beta),$$

де η – ньютонiвська в'язкiсть рiдини.

Або

$$\tau_w \beta = \eta \dot{\gamma}(\beta).$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\dot{\gamma}(\beta) = \frac{\tau_w}{\eta} \beta.$$

На стiнцi труби формула набуває вигляд

$$\dot{\gamma}_w = \frac{\tau_w}{\eta}. \quad (6.7)$$

Таким чином

$$\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\gamma}_w \beta. \quad (6.8)$$

Швидкiсть зсуву в трубi при течiї ньютонiвської рiдини змiнюється по радiусу по лiнiйному закону (рис. 6.3).

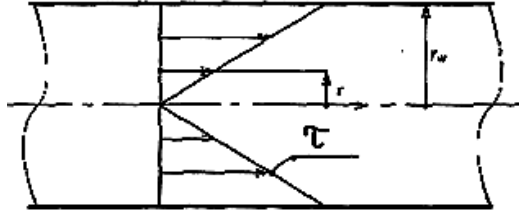


Рис. 6.3. Епюра швидкостей зсуву для ньютонівської рідини.

6.3. Розподіл швидкостей ньютонівської рідини при течії в циліндричному каналі

Швидкість зсуву $\dot{\gamma}(\beta)$ дорівнює градієнту швидкості $\frac{dv}{dr}$ із знаком мінус, оскільки при збільшенні радіуса r до r_w швидкість зменшується від v_{max} по центру труби до нуля на її стінці

$$\dot{\gamma}(r) = -\frac{dv(r)}{dr}.$$

Так як $r = r_w\beta$, то

$$dr = r_w d\beta. \quad (6.9)$$

Таким чином, отримаємо

$$\dot{\gamma}(\beta) = -\frac{1}{r_w} \cdot \frac{dv(\beta)}{d\beta}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$dv(\beta) = -r_w \dot{\gamma}(\beta) d\beta.$$

Або

$$dv(\beta) = -r_w \dot{\gamma}_w \beta d\beta.$$

Візьмемо невизначений інтеграл

$$dv(\beta) = -r_w \dot{\gamma}_w \int \beta d\beta.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$v(\beta) = -r_w \dot{\gamma}_w \frac{\beta^2}{2} + C.$$

Сталу інтегрування визначимо із умов прилипання рідини до стінок труби, при $\beta = 1$, $v(\beta) = 0$

$$0 = -r_w \dot{\gamma}_w \frac{1}{2} + C.$$

Звідси

$$C = \frac{1}{2} r_w \dot{\gamma}_w.$$

Підставляючи сталу інтегрування, отримаємо

$$v(\beta) = -\frac{1}{2} r_w \dot{\gamma}_w (\beta^2 - 1).$$

Перетворюючи, отримаємо

$$v(\beta) = \frac{1}{2} r_w \dot{\gamma}_w (1 - \beta^2). \quad (6.10)$$

Максимальне значення швидкості буде по центру труби при $\beta = 0$

$$v_{max} = \frac{1}{2} r_w \dot{\gamma}_w. \quad (6.11)$$

Підставляючи, отримаємо

$$v(\beta) = v_{max} (1 - \beta^2). \quad (6.12)$$

При $\beta = 1$ на стінці труби швидкість $v(\beta) = 0$, тобто вона прилипає до стінки $0 < v(\beta) < v_{max}$ і змінюється по параболі. Епюра швидкостей ньютонівської рідини в трубі має вигляд (рис. 6.4)

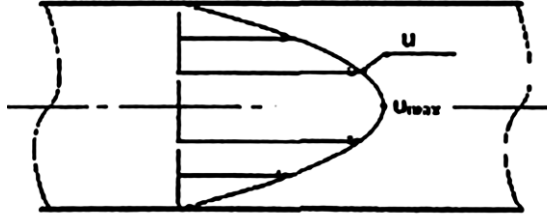


Рис. 6.4. Епюра швидкостей ньютонівської рідини в трубі.

6.4. Формула Пуазейля

На площі поперечного перетину труби виділимо елементарне кільце з текучим радіусом r товщиною dr .

Елементарна площа такого кільця

$$dS(r) = 2\pi r dr.$$

Підставляючи (6.9), отримаємо

$$dS(\beta) = 2\pi r_w^2 \beta d\beta.$$

Елементарна об'ємна витрата рідини через це кільце

$$dQ_V(\beta) = dS(\beta)v(\beta).$$

Підставляючи (6.12), отримаємо

$$dQ_V(\beta) = 2\pi r_w^2 \beta d\beta v_{max}(1 - \beta^2).$$

Підставляючи (6.11), отримаємо

$$dQ_V(\beta) = 2\pi r_w^2 \beta d\beta \frac{1}{2} r_w \dot{\gamma}_w (1 - \beta^2).$$

Перетворюючи, одержимо

$$dQ_V(\beta) = \pi r_w^3 \dot{\gamma}_w (\beta d\beta - \beta^3 d\beta).$$

Інтегруючи в межах від 0 до 1, отримаємо

$$Q_V = \pi r_w^3 \dot{\gamma}_w \left(\int_0^1 \beta d\beta - \int_0^1 \beta^3 d\beta \right).$$

Інтеграли

$$\int_0^1 \beta d\beta = \frac{\beta^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 \beta^3 d\beta = \frac{\beta^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Підставимо в вираз і отримаємо

$$Q_V = \frac{1}{4} \pi r_w^3 \dot{\gamma}_w.$$

Перетворюючи, отримаємо розрахункову формулу для швидкості зсуву на стінці труби

$$\dot{\gamma}_w = \frac{4Q_V}{\pi r_w^3}.$$

Підставляючи (6.4) та (6.7), отримаємо

$$\frac{Pr_w}{2l} \frac{1}{\eta} = \frac{4Q_V}{\pi r_w^3}.$$

Перетворюючи, отримаємо формулу Пуазейля

$$Q_V = \frac{P \pi r_w^4}{8l\eta}.$$

Оскільки r_w , l та η при течії ньютонівської рідини в незмінній трубі являються сталими величинами, то комплекс

$$\frac{8l\eta}{\pi r_w^4} = R,$$

являється величиною сталою, яку називають гідравлічним опором R

$$Q_V = \frac{P}{R}.$$

Об'ємна витрата ньютонівської рідини пропорційна тиску P і зворотно пропорційна гідравлічному опору R , який прямо пропорційний довжині труби l , в'язкості рідини η і зворотно пропорційний четвертому ступеню радіуса труби r_w .

7. Тангенціальна течія ньютонівської рідини в зазорі "циліндр-циліндр"

Величина зазору між циліндрами дорівнює (рис. 7.1)

$$h = \frac{D - d}{2}.$$

Якщо відношення $\frac{h}{D} < 0,1$ то кривизною течії нехтують і приймають схему простого зсуву (рис. 7.2). Швидкість поверхні ротора

$$v = \frac{1}{2} \omega d,$$

де ω – кутова швидкість ротора

$$\omega = 2\pi n,$$

де n – частота обертання ротора.

Швидкість зсуву в кільцевому зазорі товщиною h

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{h}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega d}{D - d}.$$

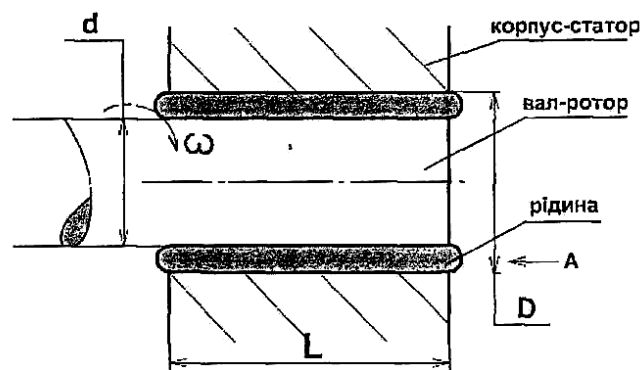


Рис. 7.1. Схема тангенціальної течії в зазорі тину "циліндр-циліндр"

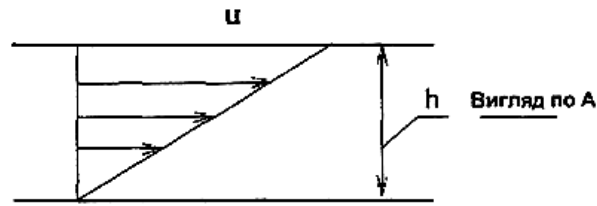


Рис. 7.2. Схема простого зсуву в зазорі типу "циліндр-циліндр".

При течії ньютонівської рідини, яка описується законом Ньютона

$$\tau = \eta \dot{\gamma},$$

виникають тангенціальні напруження

$$\tau = \eta \frac{\omega d}{D - d},$$

де η – в'язкість рідини.

Площа поверхні, на який діють ці напруження

$$S = \pi dl.$$

Тангенціальне зусилля на роторі

$$F = \tau S.$$

Підставляючи, отримаємо

$$F = \pi d^2 l \eta \frac{\omega}{D - d}.$$

Крутний момент на роторі

$$M = F \frac{d}{2}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$M = \frac{\pi}{2} d^3 l \eta \frac{\omega}{D - d}.$$

Потужність привода ротора

$$N = M \omega.$$

Підставляючи (7.13) в (7.14), отримаємо

$$N = \frac{\pi}{2} d^3 l \eta \frac{\omega^2}{D-d}.$$

Якщо в адіабатичних умовах в кільцевий зазор h проходить Q_V літрів рідини, то за рахунок дисипації її температура виросте на величину

$$\Delta T = \frac{N}{c Q_V \rho},$$

де ρ – густина рідини.

Підставляючи, отримаємо

$$\Delta T = \frac{\pi d^3 l \eta \omega^2}{2 c Q_V \rho (D-d)}.$$

8. Степенева рідина

8.1. Повна крива течії

Степенева рідина – це така рідина, течія якої проходить по степеневому закону залежності вязкості від швидкості зсуву (рис. 8.1).

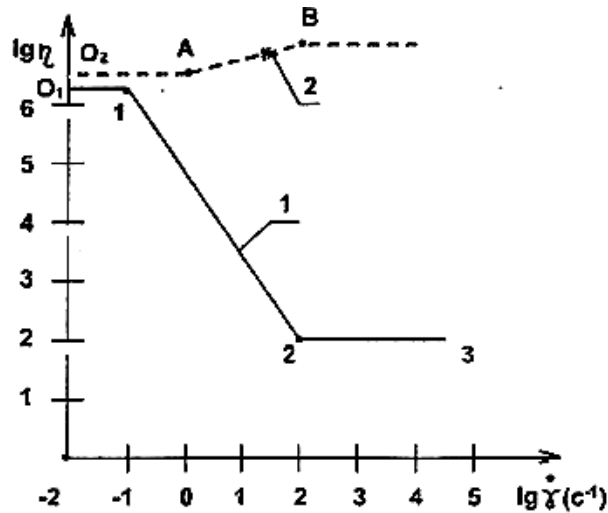


Рис. 8.1. Повні криві течії:

1 – псевдопластична рідина; 2 – дилатантна рідина; O_1-1 та O_2-A – течія при найбільшій ньютонівській в'язкості; 1-2 та A-B – течія степеневої рідини; 2-3 – течія при найменшій ньютонівській в'язкості.

Виконаємо перетворення

$$\eta = k(10^{\lg \dot{\gamma}})^{n-1},$$

$$\eta = k\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (8.1)$$

де k – коефіцієнт консистенції; n – індекс течії.

Вираз (8.1) називають степеневим законом.

Якщо праву та ліву частину рівняння помножить на $\dot{\gamma}$, то отримаємо

$$\eta\dot{\gamma} = k\dot{\gamma}^n.$$

Оскільки

$$\tau = \eta\dot{\gamma},$$

по закону Ньютона, то

$$\tau = k\dot{\gamma}^n. \quad (8.2)$$

Цей вираз являється більш поширеним на практиці степеневим законом, де η – називають ефективною в'язкістю.

Якщо індекс течії менше 1, то рідину називають псевдопластичною, яка робиться рідшою при збільшенні $\dot{\gamma}$. Якщо індекс течії $n > 1$, при збільшенні $\dot{\gamma}$ рідина робиться густіше і її називають дилатантною.

Це, як правило, високо наповнені полімерні матеріали.

9. Течія степеневі рідини в циліндричному каналі

9.1. Розподіл напруження в каналі

При течії любої рідини в циліндричному каналі напруження зсуву розташовуються по радіусу відповідно формулі

$$\tau(\beta) = \frac{Pr_w}{2l} \beta.$$

На стінці напруження

$$\tau_w = \frac{Pr_w}{2l},$$
$$\tau(\beta) = \tau_w \beta.$$

9.2. Розподіл швидкостей зсуву при сталій течії степеневі рідини в циліндричному каналі

Для степеневі рідини залежність між напруженнями зсуву t та швидкостями зсуву u має вигляд

$$\tau = k \dot{\gamma}^n.$$

На поверхні вирізаного в рідині циліндра радіусом r діє напруження τ при швидкості зсуву $\dot{\gamma}$. На такій поверхні вираз (8.2) набуває вигляду

$$\tau(\beta) = k \dot{\gamma}(\beta)^n.$$

Підставляючи (6.5), отримаємо

$$\tau_w \beta = k \dot{\gamma}(\beta)^n.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\dot{\gamma}(\beta) = \tau_w^{\frac{1}{n}} \beta^{\frac{1}{n}} k^{-1},$$

що на стінці труби при $\beta = 1$ набуває вигляду

$$\dot{\gamma}_w = \tau_w^{\frac{1}{n}} k^{-1}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\gamma}_w \beta^{\frac{1}{n}},$$

що при $n = 1$ перетворюється в (6.8) для ньютонівської рідини

$$\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\gamma}_w \beta.$$

Швидкість зсуву в трубі при течії степеневі рідини змінюється по радіусу вже не по лінійному закону (рис. 9.1).

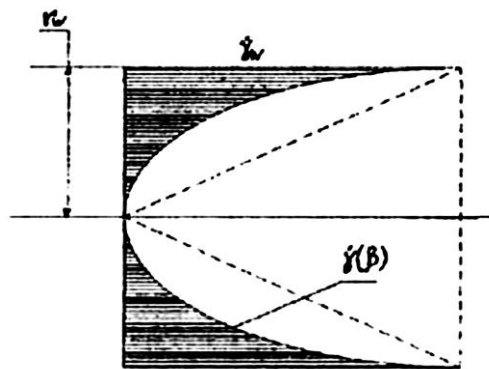


Рис. 9.1. Епюра швидкостей зсуву для степеневі рідини

9.3. Розподіл швидкостей по перерізу каналу при течії степеневі рідини в циліндричному каналі

При течії рідини в циліндричному каналі максимальна швидкість рідини виникає по центру каналу (радіус $r = 0$). При збільшенні відстані рідини від центру швидкість її зменшується. На стінці каналу рідина прилипає і швидкість її дорівнює нулю.

Швидкість зсуву дорівнює градієнту швидкості dv/dr із знаком мінус, який враховує зменшення швидкості при збільшенні радіуса шару рідини

$$\dot{\gamma}(r) = -\frac{dv(r)}{dr}.$$

Введемо термін безрозмірний радіус

$$\beta = \frac{r}{r_w},$$

де r – радіус; r_w – радіус стінки каналу.

Перетворюючи, отримаємо

$$r = r_w \beta; dr = r_w d\beta.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\dot{\gamma}(\beta) = -\frac{1}{r_w} \frac{dv(\beta)}{d\beta}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$dv(\beta) = -r_w \dot{\gamma}(\beta) d\beta,$$

де $\dot{\gamma}(\beta)$ – розподіл швидкості зсуву при течії степеневі рідини в трубі

$$\dot{\gamma}(\beta) = \dot{\gamma}_w \beta^{\frac{1}{n}}.$$

Підставимо розподіл швидкості зсуву в вираз розподілу швидкості

$$dv(\beta) = -r_w \dot{\gamma}_w \beta^{\frac{1}{n}} d\beta.$$

Візьмемо невизначений інтеграл

$$v(\beta) = -r_w \dot{\gamma}_w \frac{\beta^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C,$$

де C – стала інтегрування. Виконаєм перетворення

$$\frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}.$$

Таким чином

$$v(\beta) = -\frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w \beta^{\frac{n+1}{n}} + C.$$

Сталу інтегрування визначимо із умов прилипання рідини до стінок труби при $\beta = 1$, $v(\beta) = 0$, отримаємо

$$0 = -\frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w + C.$$

Звідки

$$C = \frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w.$$

Підставляючи сталу інтегрування в вираз

$$v(\beta) = -\frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w \beta^{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$v(\beta) = \frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w \left(1 - \beta^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

При $n = 1$ формула перетворюється в (6.10).

Максимальна швидкість при $\beta = 0$ розраховується по формулі

$$v_{max} = \frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w. \quad (9.1)$$

Підставляючи, отримаємо

$$v(\beta) = v_{max} \left(1 - \beta^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (9.2)$$

Чим більше індекс течії n відрізняється від 1, тим сильніше профіль швидкостей відрізняється від ньютонівського профіля: при рівних площах епюр для степеневі рідини епюра буде тупіша і швидкість в пристінному шарі буде зростати від нуля більш інтенсивно (рис. 9.2).

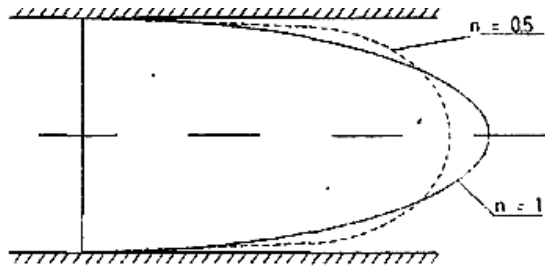


Рис. 9.2. Епюри швидкостей степеневої та ньютонівської рідин

9.4. Поправка Рабіновича

На площі поперечного перетину циліндричного каналу виділим елементарне кільце з радіусом r товщиною dr . Елементарна площа такого кільця

$$dS(r) = 2\pi r dr.$$

Підставляючи (6.9), отримаємо

$$dS(\beta) = 2\pi r_w^2 \beta d\beta.$$

Елементарна об'ємна витрата рідини через кільце

$$dQ_V(\beta) = dS(\beta)v(\beta).$$

Підставляючи (9.2), отримаємо

$$dQ_V(\beta) = 2\pi r_w^2 \beta d\beta v_{max} \left(1 - \beta^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Підставляючи (9.1), отримаємо

$$dQ_V(\beta) = 2\pi r_w^2 \beta d\beta \frac{n}{n+1} r_w \dot{\gamma}_w \left(1 - \beta^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Перетворюючи, отримаємо

$$dQ_V(\beta) = 2\pi \frac{n}{n+1} r_w^3 \dot{\gamma}_w \left(\beta d\beta - \beta^{\frac{n+1}{n}} \beta d\beta \right).$$

Перетворимо вираз

$$\beta^{\frac{n+1}{n}} \beta = \beta^{\frac{n+1}{n} + 1} = \beta^{\frac{2n+1}{n}}.$$

Інтегруючи вираз з врахуванням перетворення в межах від 0 до 1, отримаємо

$$Q_V = 2\pi \frac{n}{n+1} r_w^3 \dot{\gamma}_w \left(\int_0^1 \beta d\beta - \int_0^1 \beta^{\frac{2n+1}{n}} d\beta \right).$$

Перший інтеграл

$$I_1 = \int_0^1 \beta d\beta = \frac{\beta^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Другий інтеграл

$$I_2 = \int_0^1 \beta^{\frac{2n+1}{n}} d\beta = \frac{\beta^{\frac{2n+1}{n} + 1}}{\frac{2n+1}{n} + 1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{2n+1}{n} + 1}.$$

Виконаєм перетворення

$$\frac{2n+1}{n} + 1 = \frac{3n+1}{n}.$$

Підставляючи перетворення в результат інтегрування, отримаємо

$$I_2 = \frac{n}{3n+1}.$$

Таким чином

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} = \frac{3n+1-2n}{2(3n+1)} = \frac{n+1}{2(3n+1)}.$$

Підставивши результат інтегрування в вираз

$$Q_V = 2\pi \frac{n}{n+1} r_w^3 \dot{\gamma}_w \frac{n+1}{2(3n+1)}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$Q_V = \pi \frac{n}{3n+1} r_w^3 \dot{\gamma}_w.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\dot{\gamma}_w = \frac{3n+1}{n} \frac{Q_V}{\pi r_w^3}.$$

Помножимо та поділимо вираз на 4

$$\dot{\gamma}_w = \frac{3n+1}{4n} \frac{4Q_V}{\pi r_w^3}. \quad (9.3)$$

Комплекс

$$R = \frac{3n+1}{4n},$$

називається поправкою Рабіновича.

При $n = 1$ для ньютонівської рідини $R = 1$ і вираз (9.3) перетворюється в формулу для розрахунку швидкості зсуву на стінці каналу

$$\dot{\gamma}_w = \frac{4Q_V}{\pi r_w^3}.$$

Поправка Рабіновича враховує збільшення швидкості зсуву на стінці каналу в результаті притуплення профіля швидкостей для степеневих рідин.

10. Тангенціальна течія ступеневої рідини в зазорі "циліндр-циліндр"

Величина зазору між циліндрами (рис. 7.1)

$$h = \frac{D - d}{2}.$$

Якщо відношення $\frac{h}{D} < 0,1$ то кривизною течії нехтують і приймають схему простого зсуву (рис. 7.2).

Швидкість поверхні ротора

$$v = \frac{1}{2} \omega d,$$

де ω – кутова швидкість ротора

$$\omega = 2\pi n,$$

де n – частота обертання ротора.

Швидкість зсуву в кільцевому зазорі товщиною h

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{h}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega d}{D - d}.$$

При течії ступеневої рідини, яка описується ступеневим законом

$$\tau = k \dot{\gamma}^n,$$

виникають тангенціальні напруження

$$\tau = k \left(\frac{\omega d}{D - d} \right)^n,$$

де k – коефіцієнт консистенції; n – індекс течії ступеневої рідини.

Площа поверхні ротора, на якій діють напруження τ

$$S = \pi dl.$$

Зусилля, яке скручує ротор

$$F = S\tau.$$

Підставляючи, отримаємо

$$F = \pi dlk \left(\frac{\omega d}{D-d} \right)^n.$$

Крутний момент на роторі

$$M = \frac{1}{2} Fd.$$

Підставляючи, одержимо

$$M = \frac{\pi}{2} d^2 lk \left(\frac{\omega d}{D-d} \right)^n.$$

Потужність приводу на роторі

$$N = \omega M.$$

Підставляючи, отримаємо

$$N = \frac{\pi}{2} d^2 lk \omega \left(\frac{\omega d}{D-d} \right)^n.$$

Якщо через кільцевий канал товщиною h виникає об'ємна витрата Q_V рідини, що тече аксіальне, то вся виконана над рідиною робота перетвориться в тепло Q в результаті дисипації механічної енергії.

В адиабатичних умовах це тепло приведе до підвищення температури ΔT за рахунок дисипації

$$\Delta T = \frac{Q}{cG},$$

де c – теплоємність рідини; G – маса рідини.

Якщо розглядати процес протягом 1 с, то $Q = N$, $G = Q_V \rho$, де ρ – питома густина рідини.

Підставляючи, отримаємо

$$\Delta T = \frac{N}{cQ_V\rho}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\Delta T = \frac{\pi l k \omega^{1+n} d^{2+n}}{2cQ_V\rho(D-d)^n}.$$

11. Течія рідини із резервуара під тиском

11.1. Підвищення температури за рахунок дисипації

Не залежно від форми екструзійного каналу і від природи рідини підвищення температури за рахунок дисипації в адіабатичних умовах розраховується по формулі

$$\Delta T = \frac{Q}{cG}, \quad (11.1)$$

де Q – тепло, яке дорівнює роботі, виконаної над рідиною

$$A = FH,$$

де F – зовнішня сила, прикладена до рідини; H – відстань, пройдена з зусиллям F .

Якщо рідина витікає із резервуара (рис. 11.1) під дією поршня, що утворює питомий тиск P , то сила на поршні F

$$F = SP,$$

де S – площа поперечного перерізу поршня або резервуара

$$S = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Об'єм витисненої рідини

$$V = SH. \quad (11.2)$$

Підставляючи, отримаємо

$$A = Q = SPH. \quad (11.3)$$

Маса витисненої рідини

$$G = V\rho,$$

де ρ – питома густина рідини.

Підставляючи, одержимо

$$G = SH\rho.$$

Підставляючи в (11.1), одержимо

$$\Delta T = \frac{SPH}{cS\rho H}.$$

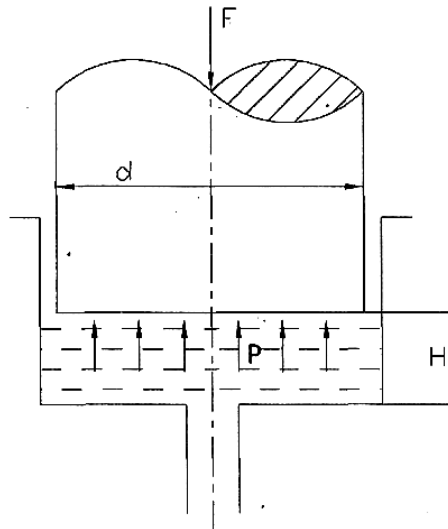


Рис. 11.1. Течія рідини із резервуара під тиском

Перетворюючи, одержимо

$$\Delta T = \frac{P}{c\rho}$$

В'язкість рідини, діаметр та довжина капіляра, по якому витікає рідина, визначають тиск P , від якого залежить підвищення температури ΔT .

11.2. Потужність приводу поршня

Якщо поршень переміщується зі швидкістю v , то час витиснення рідини із резервуара

$$\Delta t = \frac{H}{v}$$

За цей час виконується робота A . Потужність приводу поршня

$$N = \frac{A}{\Delta t}$$

Підставляючи (11.3), отримаємо

$$N = \frac{SPHv}{H}$$

Перетворюючи, одержимо

$$N = SPv$$

Об'ємна витрата рідини при таких умовах

$$Q_V = \frac{V}{\Delta t}.$$

Підставляючи (11.2), отримаємо

$$Q_V = \frac{SHv}{H}.$$

Перетворюючи, одержимо

$$Q_V = Sv.$$

Підставляючи отримаємо

$$N = Q_V P.$$

12. Температурна залежність в'язкості

12.1. Рівняння АФЕ

При охолодженні рідини її в'язкість збільшується все з більшою швидкістю (рис. 12.1).

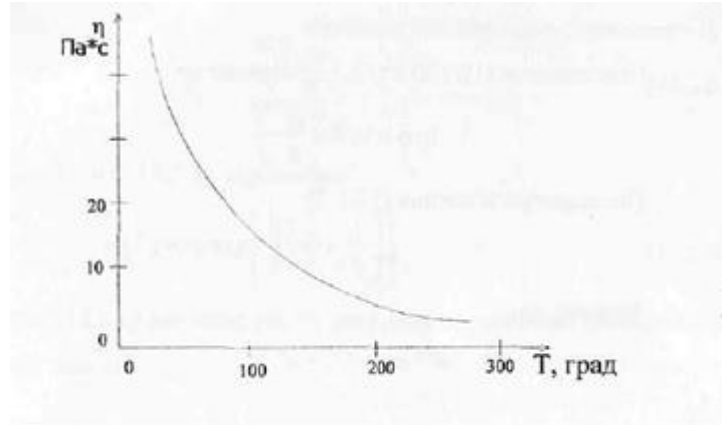


Рис. 12.1. Залежність в'язкості від температури

Щоб аналітично описати будь-який процес, треба знати оптимальний метод його лінеаризації. Для залежності в'язкості від температури оптимальним методом лінеаризації є представлення її в координатах

$$\ln \eta = f\left(\frac{1}{T}\right),$$

де $\ln \eta$ – логарифм в'язкості; $\frac{1}{T}$ – зворотна температура.

Експериментальні точки залежності апроксимують прямою $y = a + bx$ методом найменших квадратів.

В відомій літературі прийняті такі позначення

$$y = \ln \eta,$$

$$x = \frac{1}{T},$$

$$a = \ln B,$$

$$b = \frac{E}{R},$$

де E – енергія активації в'язкої течії, кДж/моль; R – універсальна газова стала, $R = 8,4$ Дж/моль·град; T – температура, К; B – передекспоненціальний множник.

Підставивши, отримаємо

$$\ln \eta = \ln B + \frac{E}{R T}.$$

Проекспоненціюємо рівняння

$$e^{\ln \eta} = e^{\ln B + \frac{E}{R T}}.$$

Знаючи, що

$$e^{\ln x} = x,$$
$$e^{a+b} = e^a e^b,$$

виконаємо перетворення

$$\eta = B e^{\frac{E}{R T}},$$

тобто

$$\eta = B \exp\left(\frac{E}{R T}\right).$$

Таким чином отримаємо рівняння Ареніуса-Френкеля-Ейрінга (АФЕ).

12.2. Формула для практичних розрахунків температурної залежності ньютонівської в'язкості

Якщо відома в'язкість ньютонівської рідини η_0 (базове значення) при температурі T_0 і відома енергія активації в'язкої течії, то є можливість розрахувати ньютонівську в'язкість $\eta(T)$ при заданій температурі T .

Рівняння АФЕ для базової температури має вигляд

$$\eta_0 = B \exp\left(\frac{E}{R T_0}\right),$$

і для заданої температури T

$$\eta(T) = B \exp\left(\frac{E}{RT}\right).$$

Поділивши рівняння, отримаємо

$$\frac{\eta(T)}{\eta_0} = \frac{\exp\left(\frac{E}{RT}\right)}{\exp\left(\frac{E}{RT_0}\right)}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left[\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]. \quad (12.1)$$

Зазначена формула дає можливість виконувати практичні розрахунки для ньютонівської рідини.

12.3. Температурна залежності в'язкості для степеневі рідини

Для степеневі рідини при зміні швидкості зсуву $\dot{\gamma}$ змінюється в'язкість, яку називають ефективною і розраховують по формулі

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}},$$

де $\tau(\dot{\gamma})$ – напруження зсуву при швидкості зсуву $\dot{\gamma}$

$$\tau(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^n.$$

Підставляючи степеневий закон, отримаємо

$$\eta(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^{n-1}.$$

При зміні температури індекс течії n приймають як сталу величину, а коефіцієнт консистенції k залежить від температури як і ефективна в'язкість. Це дозволяє в формулі (12.1) в'язкість замінити на коефіцієнт консистенції

$$k(T) = k_0 \exp\left[\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right], \quad (12.2)$$

де k_0 – коефіцієнт консистенції при базовій температурі T_0 .

Якщо треба розрахувати ефективну в'язкість при заданій температурі T і при відомій швидкості зсуву $\dot{\gamma}$, то розрахунок ведуть по формулі

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = k(T) \dot{\gamma}^{n-1}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = k_0 \exp \left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \dot{\gamma}^{n-1}.$$

12.4. Розрахунок енергії активації в'язкої течії для степеневі рідини

Якщо відомо значення коефіцієнтів консистенції k_0 і k при температурах T_0 і T , то є можливість розрахувати енергію активації E в'язкої течії для полімерного матеріалу в широкому діапазоні температур його переробки.

Перетворивши формулу (12.2) до вигляду

$$\frac{k(T)}{k_0} = \exp \left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right].$$

Логарифмуючи вираз

$$\ln \frac{k(T)}{k_0} = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right).$$

Перетворюючи, отримаємо

$$E = R \frac{\ln k(T) - \ln k_0}{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}}.$$

Зазначена формула дає можливість розрахувати величину енергії активації в'язкої течії E .

13. Максвелівська пружньов язка рідина

13.1. Модель Максвела

Модель Максвела складена з пружного (пружини з модулем G) та в'язкого (демпфера з в'язкістю η) елементів, які з'єднані послідовно (рис. 13.1).

При послідовному з'єднанні елементів їх деформації складаються

$$\gamma = \gamma_G + \gamma_\eta, \quad (13.1)$$

де γ_G – еластична деформація пружини; γ_η – деформація течії демпфера.

Напруження, які діють в пружині, дорівнюють напруженням які діють в демпфері

$$\tau = \tau_G + \tau_\eta.$$

Деформація пружини розраховується по закону Гука

$$\gamma_G = \frac{\tau}{G}. \quad (13.2)$$

Швидкість деформації демпфера розраховується по закону Ньютона

$$\dot{\gamma}_\eta = \frac{\tau}{\eta}.$$

Продиференціюємо (13.1)

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_G + \dot{\gamma}_\eta.$$

Диференціюючи (13.2), одержимо

$$\dot{\gamma}_G = \frac{1}{G} \dot{\tau}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \dot{\tau} + \frac{\tau}{\eta}. \quad (13.3)$$

Зазначений вираз називають рівнянням Максвела.

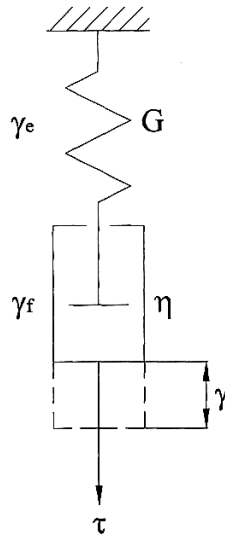


Рис. 13.1. Модель Максвелла

13.2. Модель Максвелла в процесі релаксації напруження

Процес релаксації напруження в пружнов'язких рідинах (моделях Максвелла) досліджують в режимі сталих деформацій (рис. 13.2).

Якщо в процесі релаксації деформація моделі стала, то швидкість деформації моделі

$$\dot{\gamma} = 0.$$

Підставляючи в (13.3), одержимо

$$0 = \frac{1}{G} \dot{\tau} + \frac{\tau}{\eta}.$$

Перетворюючи отримаємо

$$\frac{1}{G} \dot{\tau} = -\frac{\tau}{\eta},$$

тобто

$$\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\tau}{\eta}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{G}{\eta} dt.$$

Відношення

$$\frac{\eta}{G} = \lambda,$$

вимірюється в секундах і називається періодом релаксації λ . Підставивши, одержимо

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{1}{\lambda} dt.$$

Візьмемо невизначений інтеграл

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{1}{\lambda} \int dt.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\ln \tau = -\frac{1}{\lambda} t + C$$

Константа інтегрування C визначається із початкових умов, при $t = 0$, $\tau = \tau_0$. Підставивши, одержимо

$$\ln \tau_0 = C.$$

Підставивши константу інтегрування, одержимо

$$\ln \tau = -\frac{1}{\lambda} t + \ln \tau_0. \quad (13.4)$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\ln \frac{\tau}{\tau_0} = -\frac{t}{\lambda}.$$

Після експоненціювання, отримаємо

$$e^{\ln \frac{\tau}{\tau_0}} = e^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right). \quad (13.5)$$

13.3. Графічний метод визначення періоду релаксації

Якщо від початку деформування моделі Максвелла пройшло $t = \lambda$ секунд, то вираз (13.5) приймає вигляд

$$\tau = \tau_0 \exp(-1),$$

або

$$\tau = \tau_0 e^{-1} = \frac{\tau_0}{e}.$$

де $e = 2.72$ – основа натурального логарифма.

Це дозволяє графічно визначити період релаксації λ , як час, за який напруження τ_0 знижується в e разів (рис. 13.3).

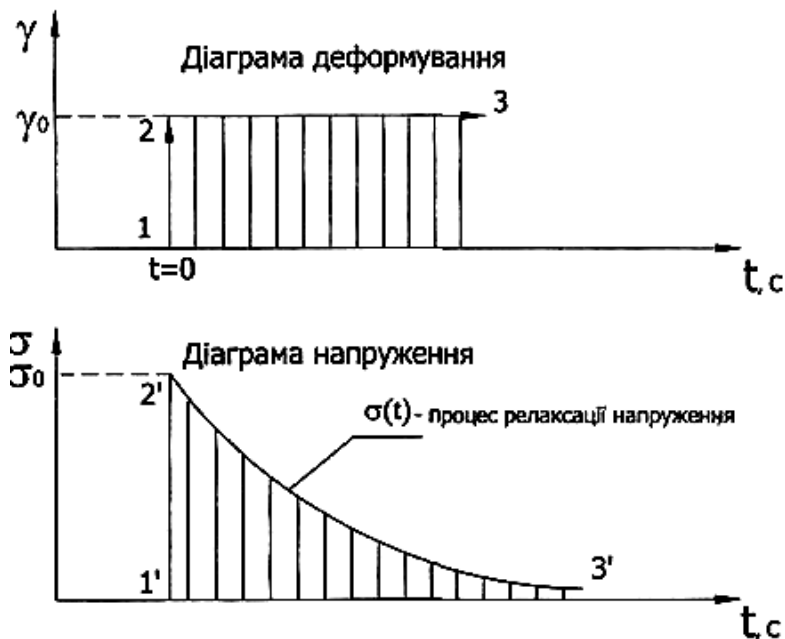


Рис. 13.2. Дослідження процесу релаксації напруження
 1-2 – миттєве деформування моделі Максвелла; 2-3 – стала деформація моделі;
 1'-2' – миттєве деформування пружини в моделі Максвелла; 2'-3' – пружне
 відновлення пружини за рахунок деформування демпфера.

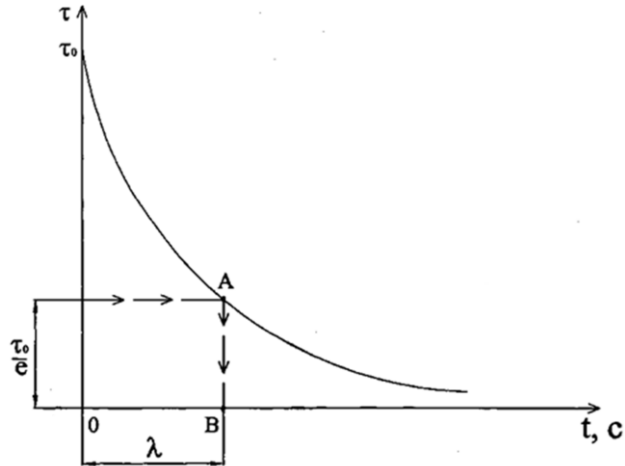


Рис. 13.3. Графічне визначення періоду релаксації

Для графічного визначення періоду релаксації λ необхідно:

1. Від початку вісі ординат відкласти в масштабі напруження τ_0/e ;
2. Знайти відповідну йому точку А на графіку релаксації;
3. На вісі абсцис знайти відповідну точку В, яка визначає період релаксації λ .

13.4. Аналітичний метод визначення періода релаксації

Перепишемо (13.4) у вигляді

$$\ln \tau = \ln \tau_0 - \frac{1}{\lambda} t.$$

Якщо прийняти, що

$$y = \ln \tau,$$

$$x = t,$$

$$a = \ln \tau_0,$$

$$b = -\frac{1}{\lambda},$$

то залежність прийме вигляд прямої

$$y = a + bx.$$

Тангенс кута нахилу цієї прямої розраховується за двома її точками (x_1, y_1) та (x_2, y_2) , тобто

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Підставляючи в вираз величини до заміни, отримаємо

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\ln \tau_2 - \ln \tau_1}{t_2 - t_1}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\lambda = \frac{t_2 - t_1}{\ln \tau_1 - \ln \tau_2}.$$

13.5. Хід процесу релаксації при зміні жорсткості пружини

Якщо модуль пружності G_2 збільшився в два рази порівняльно з початковим G_1 і більше нічого не змінилось, тобто

$$G_2 = 2G_1; \eta_2 = \eta_1; \gamma_2 = \gamma_1.$$

то період релаксації стане дорівнювати

$$\lambda_2 = \frac{\eta_2}{G_2} = \frac{\eta_1}{2G_1} = \frac{1}{2} \lambda_1.$$

Початкове напруження

$$\tau_{02} = G_2 \gamma_2 = 2G_1 \gamma_1 = 2\tau_{01}.$$

Якщо процес релаксації в першому випадку відомий, то у другому випадку є можливість його розрахувати (рис. 13.4).

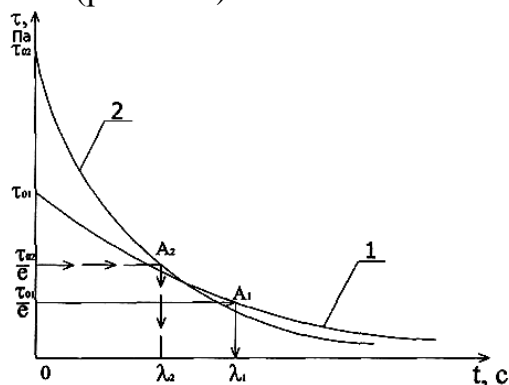


Рис. 13.4. Хід процесу релаксації при зміні модуля пружності.

13.6. Хід процесу релаксації при зміні в'язкості демпфера

Якщо в'язкість демпфера η_2 збільшилась в два рази порівняльно з початковою в'язкістю η_1 і більше нічого не змінилось, тобто

$$G_2 = G_1; \eta_2 = 2\eta_1; \gamma_2 = \gamma_1,$$

то період релаксації стане дорівнювати

$$\lambda_2 = \frac{\eta_2}{G_2} = \frac{2\eta_1}{G_1} = 2\lambda_1.$$

Початкове напруження не зміниться

$$\tau_{02} = G_2\gamma_2 = G_1\gamma_1 = \tau_{01}.$$

Якщо процес релаксації в першому випадку відомий, то у другому випадку його можливо розрахувати (рис. 13.5).

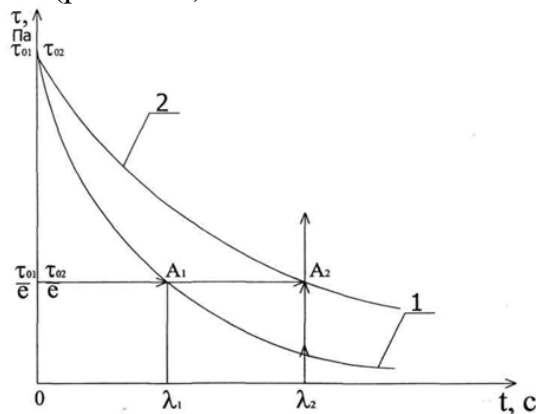


Рис. 13.5. Хід процесу релаксації при зміні в'язкості демпфера.

13.7. Хід процесу релаксації при зміні сталої деформації моделі

Якщо стала деформація моделі γ_2 збільшилась в два рази порівняльно з початковим γ_1 і більше нічого не змінилось, тобто

$$G_2 = G_1; \eta_2 = \eta_1; \gamma_2 = 2\gamma_1,$$

то період релаксації не зміниться

$$\lambda_2 = \frac{\eta_2}{G_2} = \frac{\eta_1}{G_1} = \lambda_1.$$

Початкове напруження зростає

$$\tau_{02} = G_2 \gamma_2 = G_1 2\gamma_1 = 2\tau_{01}.$$

Якщо процес релаксації в першому випадку відомий, то у другому випадку його можливо розрахувати (рис. 13.6).

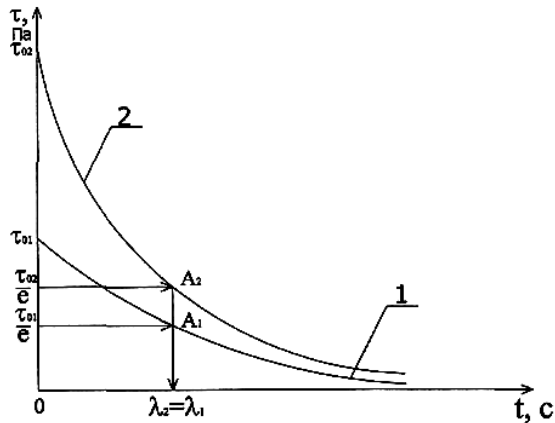


Рис. 13.6. Хід процесу релаксації при зміні сталої деформації моделі

13.8. Модель Максвела в режимі сталого навантаження

Діаграми сталого навантаження та деформування моделі Максвела наведені на рис. 13.7.

На діаграмі деформування:

1'-2' – миттєве деформування пружини, при чому еластична зворотна деформація пружини

$$\gamma_G = \frac{\sigma_0}{G}.$$

2'-3' – незворотна деформація демпфера зі швидкістю

$$\dot{\gamma}_\eta = \frac{\sigma_0}{\eta},$$

а деформація демпфера

$$\gamma_\eta = \dot{\gamma}_\eta (t_4 - t_1).$$

3'-4' – миттєве пружне відновлення пружини при розвантаженні моделі Максвела на величину γ_G ;

4'-5' – стала незворотна деформація демпфера при розвантаженні моделі Максвелла.

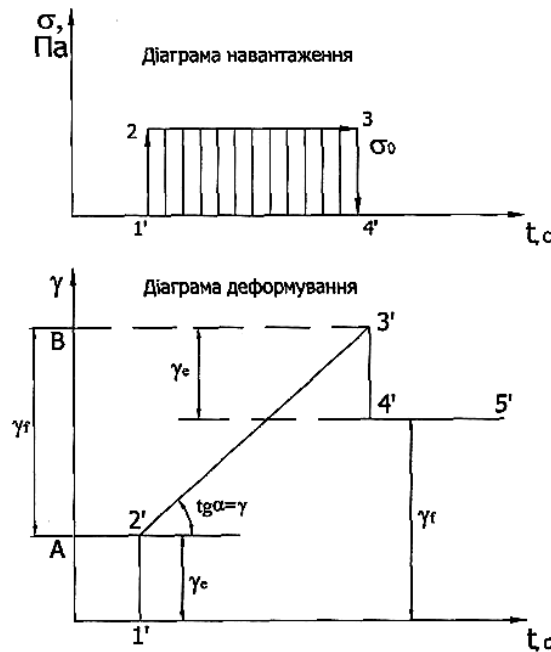


Рис. 13.7. Модель Максвелла в режимі сталого навантаження

13.9. Модель Максвелла в режимі сталого навантаження при зміні жорсткості пружини

Якщо в режимі сталого навантаження, при $\sigma_0 = \text{const}$, жорсткість пружини в моделі Максвелла збільшується, наприклад, в два рази, то порівняльно з базовою діаграмою, відбуваються такі зміни (рис. 13.8).

Таким чином, при $G_2 = 2G_1$, $\eta_2 = \eta_1$ одержимо

$$\gamma_{G2} = \frac{\sigma_0}{G_2} = \frac{\sigma_0}{2G_1} = \frac{1}{2} \gamma_{G1},$$

$$\gamma_{\eta2} = \dot{\gamma}_{\eta2} (t_4 - t_1) = \dot{\gamma}_{\eta1} (t_4 - t_1) = \gamma_{\eta1},$$

$$\dot{\gamma}_{\eta2} = \frac{\sigma_0}{\eta_2} = \frac{\sigma_0}{\eta_1} = \dot{\gamma}_{\eta1},$$

$$\text{tg}\alpha_2 = \gamma_{\eta2} = \gamma_{\eta1} = \text{tg}\alpha_1,$$

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

По отриманим результатам будемо нову діаграму деформування (рис. 13.8).

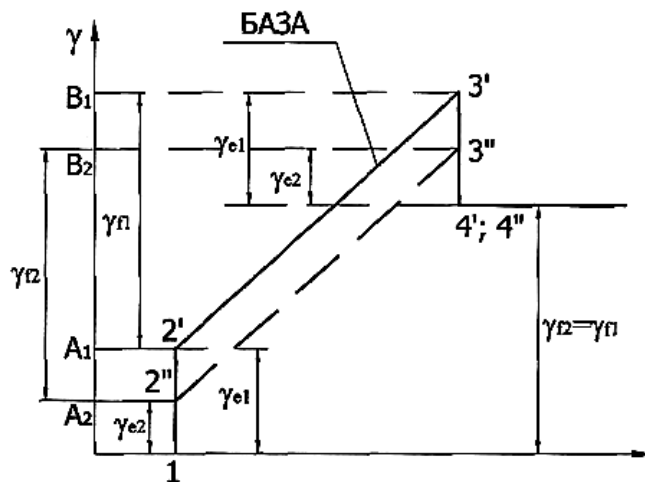


Рис. 13.8. Діаграми деформування моделі Максвелла: базова та нова з більшим модулем пружності пружини

13.10. Модель Максвелла в режимі сталого навантаження при зміні в'язкості демпфера

Якщо в режимі сталого навантаження в'язкість демпфера збільшується в 2 рази порівняльно з базовою діаграмою $\eta_2 = 2\eta_1$, то відбуваються зміни, зображені на рис. 13.9.

Таким чином, отримаємо

$$\gamma_{G2} = \frac{\sigma_0}{G_2} = \frac{\sigma_0}{G_1} = \gamma_{G1},$$

$$\gamma_{\eta 2} = \dot{\gamma}_{\eta 2} (t_4 - t_1) = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{\eta 1} (t_4 - t_1) = \frac{1}{2} \gamma_{\eta 1},$$

$$\dot{\gamma}_{\eta 2} = \frac{\sigma_0}{\eta_2} = \frac{\sigma_0}{2\eta_1} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{\eta 1},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \gamma_{\eta 2} = \frac{1}{2} \gamma_{\eta 1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha_1.$$

По отриманим результатам будуюмо нову діаграму деформування (рис. 13.9).

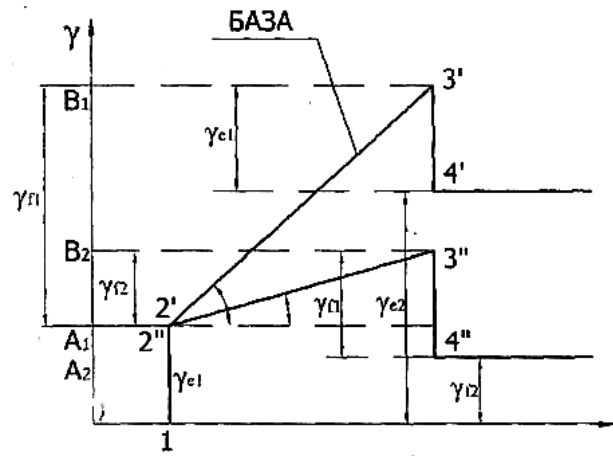


Рис. 13.9. Діаграми деформуванні моделі Максвелла: базова та нова з більшою в'язкістю демпфера

14. В'язкопружне тіло та модель Кельвіна-Фойгта

14.1. Модель та рівняння Кельвіна-Фойгта

В моделі Кельвіна-Фойгта (КФ) пружний елемент (пружина) з модулем G та в'язкий елемент (демпфер) з в'язкістю η з'єднані паралельно (рис. 14.1).

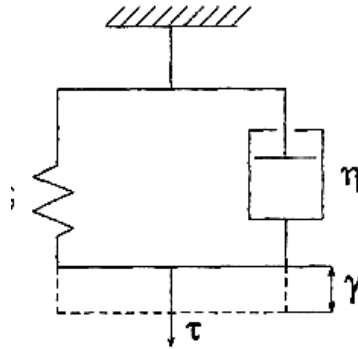


Рис. 14.1. Модель Кельвіна-Фойгта

Деформації γ_G пружини та γ_η демпфера завжди рівні. Сумарне напруження моделі складається з напруження в пружині τ_G та з напруження в демпфері τ_η

$$\tau = \tau_G + \tau_\eta.$$

Напруження в пружині визначають по закону Гука

$$\tau_G = G\gamma,$$

а в демпфері - по закону Ньютона

$$\tau_\eta = \eta\dot{\gamma}.$$

Підставляючи, отримаємо рівняння Кельвіна-Фойгта

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma}.$$

14.2. Модель КФ в режимі повзучості

Повзучість моделі КФ реалізується в режимі сталого навантаження (рис. 14.2)

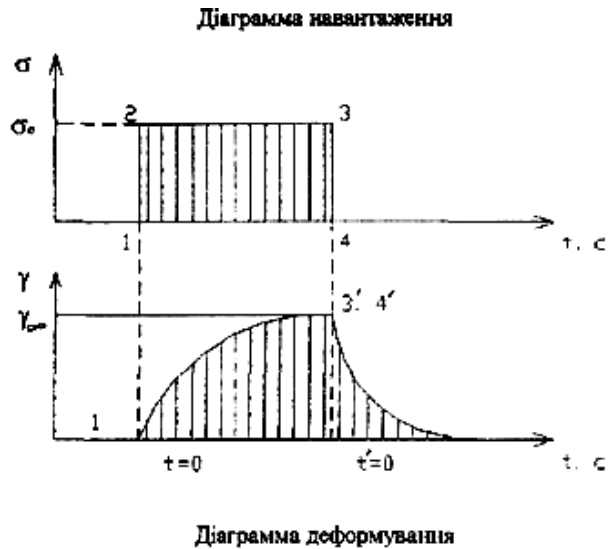


Рис. 14.2. Повзучість та пружне відновлення моделі КФ

В момент часу $t = 0$ до моделі КФ миттєво прикладається стале напруження. Опір деформуванню в перший момент часу виконує демпфер, оскільки пружина ще не розтягнута. По мірі деформування демпфера все більше розтягується пружина, яка поступово приймає на себе весь опір деформуванню. Оскільки пружина розвантажує демпфер, то швидкість переміщення поршня в демпфері зменшується. При $t \rightarrow \infty$ деформація моделі виростає до рівноважного значення

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau - G\gamma}{\eta} = \frac{d\gamma}{dt}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$dt = -\eta \frac{-d\gamma}{\tau - G\gamma}.$$

Оскільки при $0 < t < \infty$, то (14.2.1) набуває вигляду

$$dt = -\eta \frac{-d\gamma}{\tau_0 - G\gamma}.$$

Диференціал дорівнює

$$d(\tau_0 - G\gamma) = -Gd\gamma.$$

Помножимо та розділимо праву частину на G

$$dt = -\frac{\eta}{G} \frac{-G\gamma}{\tau_0 - G\gamma}.$$

Підставимо

$$dt = -\frac{\eta}{G} \frac{d(\tau_0 - G\gamma)}{\tau_0 - G\gamma}.$$

Візьмемо невизначений інтеграл від

$$t = -\frac{\eta}{G} \int \frac{d(\tau_0 - G\gamma)}{\tau_0 - G\gamma}.$$

Інтегруючи отримаємо

$$t = -\frac{\eta}{G} \ln(\tau_0 - G\gamma) + C.$$

Стала інтегрування визначається з початкових умов $t = 0$, $\gamma = 0$. Підставляючи, отримаємо

$$0 = -\frac{\eta}{G} \ln(\tau_0) + C,$$

або

$$C = \frac{\eta}{G} \ln(\tau_0).$$

Відношення

$$\theta = \frac{\eta}{G},$$

називають періодом ретардації моделі КФ. Підставляючи, отримаємо

$$t = -\theta \ln(\tau_0 - G\gamma) + \theta \ln(\tau_0).$$

Перетворюючи, отримаємо

$$-\frac{t}{\theta} = \ln\left(1 - \frac{G}{\tau_0} \gamma\right).$$

Оскільки при $t \rightarrow \infty$ все навантаження приймає на себе пружина, то рівноважна деформація γ_∞

$$\gamma_\infty = \frac{\sigma_0}{G}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$-\frac{t}{\theta} = \ln\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_\infty}\right). \quad (14.1)$$

Експоненціюємо

$$e^{-\frac{t}{\theta}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_\infty}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\gamma = \gamma_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)\right]. \quad (14.2)$$

14.3. Графічний метод визначення періоду ретардації

Якщо від початку навантаження моделі КФ пройшло $t = \theta$ секунд, то (14.2) дорівнює

$$\gamma = \gamma_\infty \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,633\gamma_\infty.$$

Зазначене рівняння являється основою для графічного методу визначення періоду ретардації на графіку повзучості (рис. 14.3).

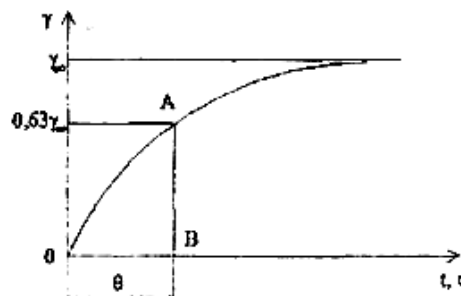


Рис. 14.3. Графічний метод визначення періоду ретардації моделі КФ

Період ретардації визначається як час, за якого деформація γ виростає до величини $0,633\gamma_\infty$.

При визначенні θ необхідно

1. Від початку на вісі ординат відкласти $0,633\gamma_\infty$;
2. Знайти відповідну точку А на графіку повзучості;
3. На вісі абсцис знайти відповідну точку В, яка визначає період ретардації.

14.4. Аналітичний метод визначення періоду ретардації

Якщо прийняти

$$y = \ln\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_\infty}\right),$$
$$x = t,$$
$$a = -\frac{1}{\theta},$$

то вираз (14.1) перетворюється до рівняння прямої, яка виходить з початку координат

$$y = ax.$$

Якщо відомі дві точки такої кривої (x_1, y_1) та (x_2, y_2) , то тангенс кута нахилу такої прямої

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$-\frac{1}{\theta} = \frac{\ln\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_\infty}\right) - \ln\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_\infty}\right)}{t_2 - t_1}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$\theta = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_\infty}\right) - \ln\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_\infty}\right)}.$$

14.5. Хід процесу повзучості при зміні жорсткості пружини

Якщо модуль пружності G_2 збільшився в два рази порівняльно з початковим G_1 і більше нічого не змінилось, тобто

$$G_2 = 2G_1; \eta_2 = \eta_1; \tau_{02} = \tau_{01},$$

то період релаксації стане дорівнювати

$$\theta_2 = \frac{\eta_2}{G_2} = \frac{\eta_1}{2G_1} = \frac{1}{2}\theta_1.$$

Рівноважна деформація зміниться до величини

$$\gamma_{\infty 2} = \frac{\tau_{02}}{G_2} = \frac{\tau_{01}}{2G_1} = \frac{1}{2}\gamma_{\infty 1}.$$

Якщо процес повзучості у першому випадку відомий, то у другому випадку є можливість його розрахувати.

14.6. Хід процесу повзучості при зміні в'язкості демпфера

Якщо в'язкість демпфера η_2 збільшилась в два рази порівняльно з початковою в'язкістю η_1 і більше нічого не змінилось, тобто

$$G_2 = G_1; \eta_2 = 2\eta_1; \tau_{02} = \tau_{01},$$

то період ретардації зміниться до величини

$$\theta_2 = \frac{\eta_2}{G_2} = \frac{2\eta_1}{G_1} = 2\theta_1.$$

Рівноважна деформація не зміниться

$$\gamma_{\infty 2} = \frac{\tau_{02}}{G_2} = \frac{\tau_{01}}{G_1} = \gamma_{\infty 1}.$$

Якщо процес повзучості у першому випадку відомий, то у другому випадку його хід є можливість розрахувати (рис. 14.4).

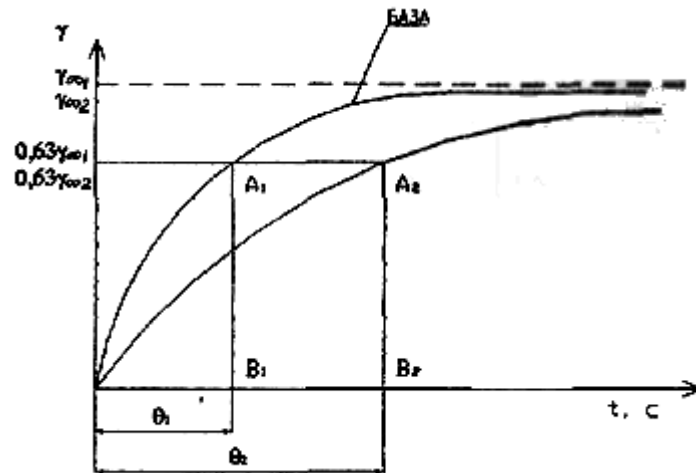


Рис. 14.4. Хід процесу повзучості при зміні в'язкості демпфера в моделі КФ

14.7. Хід процесу повзучості при зміні сталого навантаження моделі

Якщо стале напруження на моделі τ_{02} збільшилось в два рази порівняльно з початковим τ_{01} більше нічого не змінилося, тобто

$$G_2 = G_1; \eta_2 = \eta_1; \tau_{02} = 2\tau_{01},$$

то період ретардації не зміниться

$$\theta_2 = \frac{\eta_2}{G_2} = \frac{\eta_1}{G_1} = \theta_1.$$

Рівноважна деформація виросте

$$\gamma_{\infty 2} = \frac{\tau_{02}}{G_2} = \frac{2\tau_{01}}{G_1} = 2\gamma_{\infty 1}.$$

Якщо процес повзучості у першому випадку відомий, то у другому випадку його хід є можливість розрахувати (рис. 14.5).

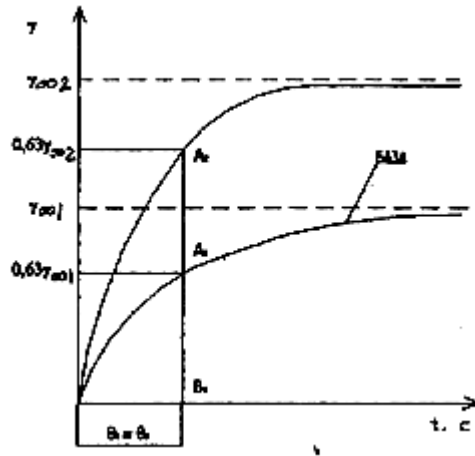


Рис. 14.5. Хід процесу повзучості при зміні сталого навантаження моделі КФ

15. Пластичні матеріали

15.1. Модель Сен-Венана

Модель Сен-Венана (рис. 15.1) зображується у вигляді трібометра, тобто елемента тертя. Рух (деформація) в такому елементі виникає лише тоді, коли навантаження на трібометр досягне критичного значення $\tau_{кр}$, яке називають границею текучості. До цього моменту, для $\tau < \tau_{кр}$, ніякої деформації в елементі не виникає. Такий параметр, як час, на величину $\tau_{кр}$ не впливає. Швидкість деформування а такій моделі при $\tau = \tau_{кр}$, може бути будь-яка в залежності від зовнішніх умов. В режимі сталої швидкості деформації (рис. 15.2) графік навантаження має вигляд горизонтальної прямої.



Рис. 15.1. Модель Сен-Венана

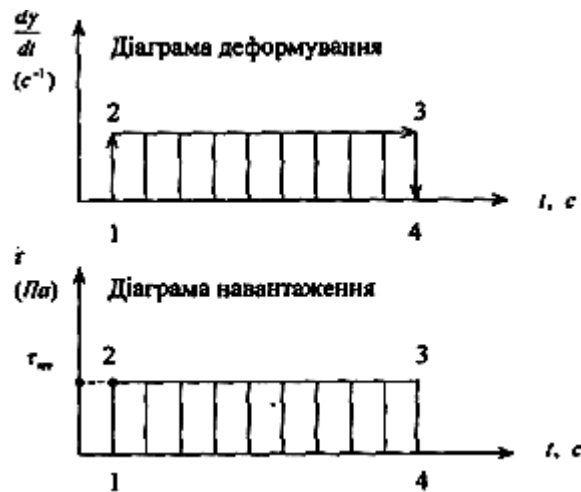


Рис. 15.2. Режим сталої швидкості деформації

Діаграма напруження - деформація моделі Сен-Венана не залежить від часу (рис. 15.3).

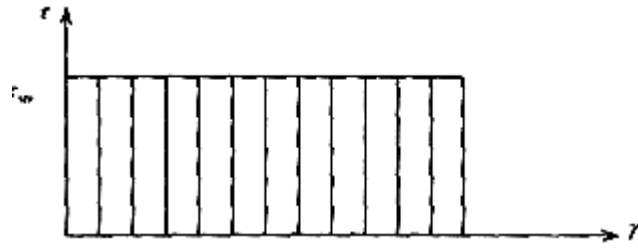


Рис. 15.3. Діаграма напруження-деформація

В режимі сталих навантажень діаграма деформації має вигляд (рис. 15.4).

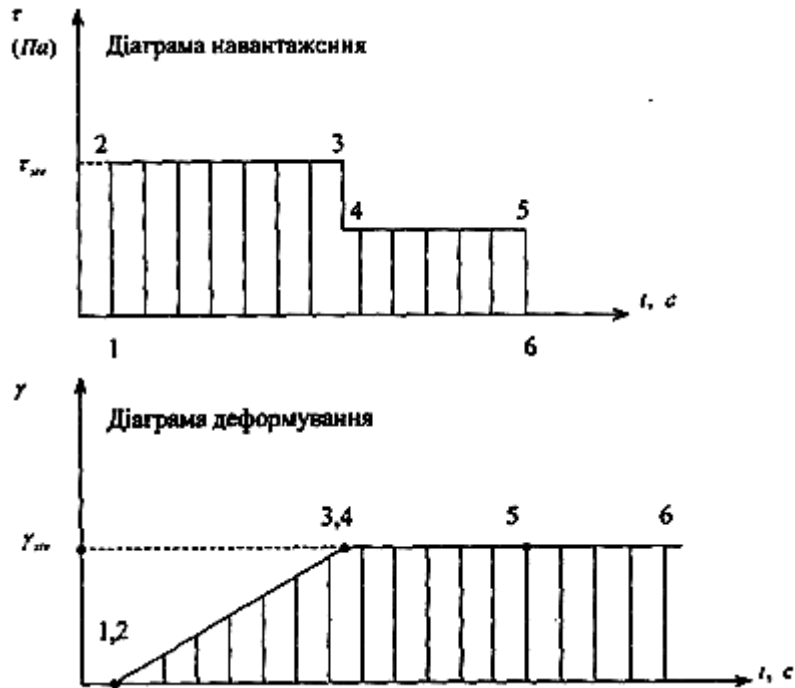


Рис. 15.4. Режим сталого навантаження

Вся деформація елемента тертя незворотня: при розвантаженні трібометра його деформація не відновлюється.

Елемент тертя (трібометр) не може бути навантаженим напруженням, більшим за $\tau_{кр}$, тобто він не може зробити опір зовнішній силі більший, ніж $\tau_{кр}$.

15.2. Складна пружиньо-пластична модель Шведова

Модель Шведова (рис. 15.5) дає можливість на феноменологічному рівні описати поведінку пружиньо-пластичного тіла в режимі сталих швидкостей деформацій (рис. 15.6).

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma}{G_y}.$$

В реальному матеріалі така деформація оборотна і має енергетичну природу, оскільки вона викликана збільшенням міжатомних відстаней і зміною валентних кутів. Величина ε_y не перевищує 2-3%.

15.4. Пластичне деформування моделі Шведова

При деформуванні пластичного тіла напруження досягає границі текучості $\tau_{кр}$ в елементі тертя (точка B_2 на графіку типу II). В реальному матеріалі цьому моменту відповідає початок утворення локальної "шийки" в зоні максимального дефекту або дислокації. Температура в цій вузькій зоні підвищується на 20...40 С° за рахунок дисипації. Тертя в трибометрі і в'язкість падають, що приводить до наступного зниження напружень σ , яке відповідає руйнуванню матеріалу (моделі) в зоні максимального дефекту (т. D_2).

15.5. Холодна витяжка з ефектом зміцнення

При деформуванні моделі Шведова зі сталою швидкістю $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \dot{\varepsilon}$ напруження в в'язкому елементі з дуже великою в'язкістю, яке визначається по формулі

$$\Delta \sigma_{\eta} = \eta \dot{\varepsilon},$$

могло б значно перевищувати $\tau_{кр}$ (графік типу III). Тоді демпфер не буде деформуватись, а деформація пружини G_M буде збільшуватися, що приведе до появи ефекту зміцнення зразка (при розрахунку на початковий його переріз)

$$\sigma = \tau_{кр} + \Delta \sigma_M,$$

де опір пружини

$$\Delta \sigma_M = G_M \varepsilon_{BC},$$

і деформації пружини

$$\varepsilon_{BC} = \varepsilon_3 - \varepsilon(B_3).$$

На графіку типу III

$$\Delta \sigma_M = c_3 c_3'.$$

Сили пружини G_M недостатньо, щоб деформувати трібометр у зворотньому напрямі і вся деформація моделі (матеріалу) є незворотною при розвантаженні моделі.

При нагріванні, коли сили $\tau_{кр}$ тертя і в'язкість η знижуються, сили пружини G_M становиться достатньо, щоб відновити деформацію трібометра і демпфера. При цьому виконується процес відновлення вимушеної високоеластичної деформації, який має назву "термічної усадки" для реальних середовищ.

15.6. Холодна витяжка без ефекта зміцнення

Якщо пружній елемент G_M має дуже високу жорсткість, тоді модель деформується і швидкість деформації демпфера дорівнює $\dot{\epsilon}$. Його опір деформуванню дорівнює (діаграма типу IV на рис. 15.6)

$$\Delta\sigma_M = \eta_M \dot{\epsilon},$$

і не залежить від величини накопиченої в матеріалі деформації. Опір деформування моделі Шведова

$$\sigma = \tau_{кр} + \Delta\sigma_M,$$

або

$$\sigma = \tau_{кр} + \eta_M \dot{\epsilon}.$$

Таким чином, при збільшенні швидкості деформації в ізотермічних умовах буде зростати в'язкісна складова опору матеріалу при сталому значенні $\tau_{кр}$, що приведе до збільшення навантаження на модель. В локальній області найбільшого дефекту при цьому швидше можуть виникати руйнівні напруження.

Якщо при сталій швидкості деформації підвищити температуру матеріалу, то зменшується в'язкість і тертя, але знижується міцність матеріалу. Коли ведуть пошук оптимальних режимів орієнтованої витяжки полімерних матеріалів, то ураховують всі за і всі проти стабілізації цього процесу. Оскільки пружина G_M не була деформована, а в'язкість η_M дуже велика, то і вся деформація моделі (матеріалу) є незворотною при розвантаженні моделі. Якщо витяжку матеріалу не доводять до руйнування, а зупиняють в точці S_4 , то буде реалізуватися для полімерів процес орієнтованої витяжки, при якому весь матеріал переходить в "шийку".

15.7. Високоеластична деформація

Цей розділ має відношення до деформування еластометрів (гум, гумових сумішей, термоеластопластів, каучуків), які при нормальній температурі знаходяться

у високоеластичному стані. Це відповідає моделі Шведова з низьким тертям $\tau_{кр}$ низьким модулем G_M та в'язкістю η_M .

Напруження, яке виникає, в пружині (діаграма типу V на рис. 15.6)

$$\Delta\sigma_M = G_M \varepsilon_{BC},$$

достатньо, щоб здвинути трибометр при зупинці процесу витяжки, тобто

$$\Delta\sigma_M = \tau_{кр} \text{ при } \dot{\varepsilon} = 0.$$

При цьому буде проходити процес пружного відновлення.

Опір деформуванню моделі

$$\sigma = \tau_{кр} + \Delta\sigma_M = \tau_{кр} + \Delta\sigma_\eta,$$

в більшій мірі залежить від швидкості деформування $\dot{\varepsilon}$, оскільки $\Delta\sigma_M = \Delta\sigma_\eta$, а швидкість деформування трибометра дорівнює швидкості деформування демпфера (вони включені паралельно). Деформація пружини є величиною сталою в режимі $\dot{\varepsilon} = \text{const}$

$$\varepsilon_M = \frac{\Delta\sigma_\eta}{G_M} = \frac{\Delta\sigma_M}{G_M}.$$

Чим більша швидкість деформування, тим більші напруження виникають при витяжці еластометрів (і моделі Шведова), тим більша ймовірність їх руйнування в зоні найбільшого дефекту або дислокації.

Для всіх типів руйнування, в точці C закінчується процес утворення шийки по всій довжині матеріалу. На ділянці графіка CD йде деформування уже гранично орієнтованого матеріалу, яке супроводжується деяким зміцненням перед руйнуванням зразка.

Якщо не доводити витяжку до руйнування, то частина накопленої в пружині деформації

$$\varepsilon'_M = \frac{\Delta\sigma_M - \tau_{кр}}{G_M},$$

буде відновлена, а друга частина

$$\varepsilon''_M = \frac{\tau_{кр}}{G_M},$$

буде заморожена в матеріалі за рахунок тертя в трибометрі.

Природа високоеластичної деформації - ентропійна. Накопичення і відновлення цієї деформації проходить в часі. Чим вище витяжка і випрямлення конформації полімерів, тим менше їх ентропія, тим вище ефект зміцнення матеріалів. В процесі термічної усадки самовільно проходить скорочення полімерної конформації і збільшення ентропії полімерів. Високоеластична деформація може досягати 4-9 одиниць в орієнтованих полімерах.

15.8. В'язко-пластична рідина Бінгама

Модель Бінгама (рис. 15.7) складається з паралельно з'єднаних демпфера і трибометра (елемент Ньютона і елемент Сен-Венана).

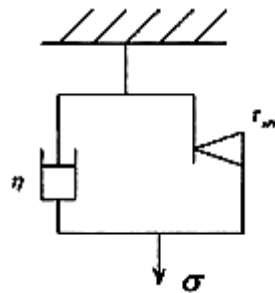


Рис. 15.7. Модель Бінгама

Деформування (течія) починається, коли навантаження на модель досягне границі текучості $\tau_{кр}$ в елементі Сен-Венана. Опір деформуванню трибометра не залежить від швидкості деформування і завжди є величиною сталою. Опір деформуванню демпфера залежить від

$$\Delta\sigma_{\eta} = \eta\dot{\epsilon}.$$

Опір деформуванню моделі Бінгама

$$\sigma = \tau_{кр} + \Delta\sigma_{\eta}.$$

Крива течії (залежність напруження від швидкості деформування) для рідини Бінгама (рис. 15.8)

$$AO = \tau_{кр}.$$

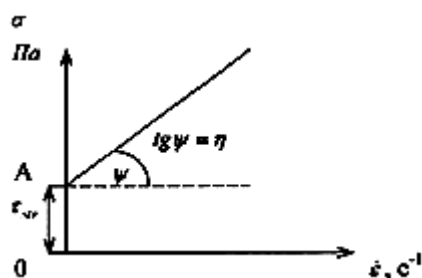


Рис. 15.8. Крива течії Бінгама починається вище початку координат на величину

При збільшенні $\dot{\epsilon}$ крива течії росте лінійно. Тангенс нахилу цієї лінії до осі абсцис дорівнює в'язкості η .

15.9. Класифікація рідин по кривим течії

На рис. 15.9 показані криві течії (залежності напруження зсуву від швидкості зсуву для різних типів рідин (по Бернхардту):

- 1 – ньютонівська рідина;
- 2 – неньютонівська псевдопластична степенева рідина;
- 3 – неньютонівська степенева дилатантна рідина;
- 4 – пластична рідина Сен-Венона;
- 5 – в'язко-пластична рідина Бінгама.

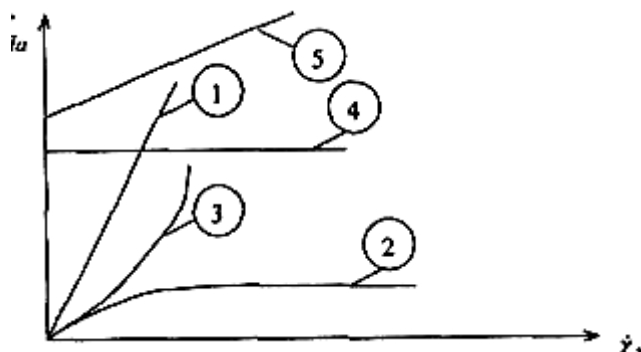


Рис. 15.9. Криві течії в простих (арифметичних, тобто нелогарифмічних) координатах

Ньютонівська рідина тече відповідно закону Ньютона

$$\tau = \eta \dot{\gamma}.$$

Течія починається при самих низьких значеннях напруження зсуву. Її в'язкість є величиною сталою і не залежить від величини швидкості зсуву.

Неньютонівська степенева псевдопластична рідина тече відповідно степеневому закону

$$\tau = k\dot{\gamma}^n,$$

де k – коефіцієнт консистенції, який численно дорівнює в'язкості при швидкості зсуву $\dot{\gamma} = 1$; n – індекс течії, який вказує на величину відхилення від ньютонівської течії: при $n = 1$ – рідина буде ньютонівською; при $n < 1$ – рідина буде псевдопластиком, в'язкість якого зменшується при збільшенні швидкості зсуву (він розріджується при збільшенні $\dot{\gamma}$).

Неньютонівська степенева дилатантна рідина тече відповідно степеневому закону, але індекс її течії $n > 1$. В'язкість такої рідини збільшується при збільшенні швидкості зсуву. До таких рідин відносять дисперсійно наповнені полімерні системи.

Пластична рідина Сен-Венана веде себе як тверде тіло і не деформується до тих пір, поки напруження в ній не досягне границі текучості $\tau_{кр}$. У режимі сталої швидкості деформування напруження не зростає при збільшенні $\dot{\epsilon}$, тобто

$$\tau = \tau_{кр}.$$

В'язко-пластична рідина Бінгама веде себе як тверде тіло і не деформується до тих пір, поки напруження в ній не досягне границі текучості $\tau_{кр}$. У режимі сталої швидкості деформування напруження в такій рідині зростає при збільшенні відповідно формулі

$$\dot{\epsilon} = \frac{\tau - \tau_{кр}}{\eta},$$

тобто

$$\tau = \tau_{кр} + \eta\dot{\epsilon}.$$

Всі реальні рідини більше чи менше приближаються до приведених вище моделей у відповідному діапазоні параметрів процесу течії.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ НАВЧАЛЬНО-МЕТОЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

1. Малкин А. Я. Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – Санкт-Петербург : Профессия, 2007. – 560 с.
2. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров / Д. Х. Чанг. – Москва : Химия, 1979. – 368 с.
3. Бернхардт Э. Переработка термопластичных материалов / Э. Бернхардт. – Москва : Химия, 1965. – 747 с.
4. Уорд И. Механические свойства твердых полимеров / И. Уорд. – Москва : Химия, 1975. – 350 с.
5. Сокольський О. Л. Визначення в'язкості пристінного шару у формуючих каналах обладнання для переробки полімерів / О. Л. Сокольський, І. І. Івіцький, В. І. Сівецький, І. О. Мікульонок // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2014. — №2(94). — С. 66—69.
6. Sokolskyi A. L. Method of Accounting Wall Slip Polymer in Modeling Channel Processing Equipment / A. L. Sokolskyi, I. I. Ivitskiy // Modern Scientific Research and their Practical application. — 2014. — Vol. J21410 . — P. 137—140.
7. Sivetskiy V. I. Methods for Determining the Presence, Character and Value of Wall Effects in Flow of Polymer Material / V. I. Sivetskiy, O. L. Sokolskiy, I. I. Ivitskiy // Technology Audit and Production Reserves. — 2015. — Vol 3, N 4(23). — P. 48—52.
8. Двойнос Я. Г. Уточнена методика оброблення експериментальних даних капілярної віскозиметрії / Я. Г. Двойнос, О. Л. Сокольський, І. І. Івіцький // Вісник НТУУ «КПІ». Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. — 2015. — №1(14). — С. 51—54.
9. Сівецький В. І. Визначення залежності швидкості полімерних матеріалів поблизу стінки круглого каналу від напруження зсуву / В. І. Сівецький, О. Л. Сокольський, І. І. Івіцький, В. М. Куриленко // Вісник НТУУ «КПІ». Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. — 2015. — №1(14). — С. 44—47.
10. Івіцький І. І. Формування полімерних матеріалів. Дослідження впливу геометричних параметрів каналів обладнання на величину пристінних ефектів / І. І. Івіцький, О. Л. Сокольський, І. О. Мікульонок, В. І. Сівецький // Хімічна промисловість України. — 2015. — №4(129). — С. 41—44.
11. Сівецький В. І. Моделювання гомогенізації розплавів термопластів у бар'єрному змішувачі з урахуванням ефекту пристінного проковзування / В. І. Сівецький, О. Л. Сокольський, М. С. Кушнір, І. І. Івіцький // Вісник НТУУ «КПІ». Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. — 2016. — №1. — С. 45—50.
12. Ivitskiy I. I. Influence of a Lubricant on the Flow Parameters of a Molten Polymeric Material in Channels of Forming Devices / I. I. Ivitskiy, A. L. Sokolskiy, I. O. Mikulionok // Chemical and Petroleum Engineering. — 2017. — Vol 53, Issue 1-2. — P. 84—88.
13. Ivitskiy I. I. Extrusion of Intellectual Polymer Materials / I. I. Ivitskiy // Web of Scholar. — 2018. — N 5(23), Vol 1. — P. 15—18.

14. Івіцький І. І. Експериментальні дослідження процесу плавлення полімеру / І. І. Івіцький, О. Л. Сокольський // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки. — 2018. — Том 29(68), №3. — С. 14—19.
15. Івіцький І. І. Моделювання процесу плавлення полімерного матеріалі в каналі екструдера 3D принтера / І. І. Івіцький, В. В. Соловей, О. Л. Сокольський // Modern Scientific Researches. — 2018. — Issue 4, Vol. 1. — С. 25—28.
16. Івіцький І. І. Вплив параметрів тривимірного друку на фізико-механічні властивості виробів із термопластів / І. І. Івіцький, В. В. Соловей, О. Л. Сокольський // Вісник НТУУ «КПІ». Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. — 2018. — № 1(17). — С. 17—23.

ЗМІСТ

ВСТУП	1
Предмет та завдання дисципліни	2
1. Напруження.....	4
1.1. Тензорні позначення.....	4
1.2. Тензор напруження.....	4
1.3. Головні осі і головні напруження тензора	5
1.4. Головні напруження при простому зсуві	6
1.5. Закон парності зсувних напружень або рівність Коши	7
1.6. Інваріанти тензора напруження.....	7
1.7. Сферичний тензор і дельта Кронекера	8
1.8. Девіатор напруження при одновісному розтягу.....	9
1.9. Девіатор напруження при двовісному розтягу	10
2. Деформації	13
2.1. Деформація розтягу по Генкі.....	13
2.2. Девіатор деформації при одновісному розтягу	14
2.3. Коефіцієнт Пуассона при одновісному розтягу	16
2.4. Деформація при простому зсуві	17
3. Швидкості деформації	19
3.1. Швидкість деформації при простому зсуві.....	19
3.2. Швидкість деформації при одновісному розтягу	20
4. Ідеально пружне тіло.....	22
4.1. Діаграма деформування ідеального пружного тіла Гука.....	22
4.2. Закон Гука в тензорній формі.....	22
4.3. Закон Гука в тензорній формі для одновісного розтягу	22
4.4. Закон Гука в тензорній формі для простого зсуву	24
5. В'язка рідина	25
5.1. Діаграма деформування в'язкої рідини.....	25
5.2. Закон Ньютона в тензорній формі	25
5.3. Закон Ньютона в тензорній формі для одновісного розтягу.....	25
6. Течія ньютонівської рідини в циліндричній трубі.....	27
6.1. Розподіл напруження в трубі.....	27
6.2. Розподіл швидкостей зсуву при сталій течії ньютонівської рідини в циліндричному каналі	29
6.3. Розподіл швидкостей ньютонівської рідини при течії в циліндричному каналі	30
6.4. Формула Пуазейля	32
7. Тангенціальна течія ньютонівської рідини в зазорі "циліндр-циліндр" .	35
8. Степенева рідина	38
8.1. Повна крива течії	38
9. Течія ступеневої рідини в циліндричному каналі	40
9.1. Розподіл напруження в каналі.....	40
9.2. Розподіл швидкостей зсуву при сталій течії ступеневої рідини в циліндричному каналі	40
9.3. Розподіл швидкостей по перерізу каналу при течії ступеневої рідини в циліндричному каналі	41

9.4.	Поправка Рабіновича	44
10.	Тангенціальна течія ступеневої рідини в зазорі "циліндр-циліндр"	47
11.	Течія рідини із резервуара під тиском.....	50
11.1.	Підвищення температури за рахунок дисипації	50
11.2.	Потужність приводу поршня	51
12.	Температурна залежність в'язкості	53
12.1.	Рівняння АФЕ.....	53
12.2.	Формула для практичних розрахунків температурної залежності ньютонівської в'язкості	54
12.3.	Температурна залежності в'язкості для ступеневої рідини	55
12.4.	Розрахунок енергії активації в'язкої течії для ступеневої рідини	56
13.	Максвелівська пружнєво-язка рідина	57
13.1.	Модель Максвелла.....	57
13.2.	Модель Максвелла в процесі релаксації напруження.....	58
13.3.	Графічний метод визначення періоду релаксації	60
13.4.	Аналітичний метод визначення періоду релаксації	61
13.5.	Хід процесу релаксації при зміні жорсткості пружини	62
13.6.	Хід процесу релаксації при зміні в'язкості демпфера	63
13.7.	Хід процесу релаксації при зміні сталого деформації моделі	63
13.8.	Модель Максвелла в режимі сталого навантаження	64
13.9.	Модель Максвелла в режимі сталого навантаження при зміні жорсткості пружини	65
13.10.	Модель Максвелла в режимі сталого навантаження при зміні в'язкості демпфера	66
14.	В'язкопружне тіло та модель Кельвіна-Фойгта	68
14.1.	Модель та рівняння Кельвіна-Фойгта	68
14.2.	Модель КФ в режимі повзучості.....	68
14.3.	Графічний метод визначення періоду ретардації.....	71
14.4.	Аналітичний метод визначення періоду ретардації.....	72
14.5.	Хід процесу повзучості при зміні жорсткості пружини	73
14.6.	Хід процесу повзучості при зміні в'язкості демпфера	73
14.7.	Хід процесу повзучості при зміні сталого навантаження моделі	74
15.	Пластичні матеріали.....	76
15.1.	Модель Сен-Венана	76
15.2.	Складна пружинно-пластична модель Шведова	77
15.3.	Крихке руйнування моделі Шведові	78
15.4.	Пластичне деформування моделі Шведова	79
15.5.	Холодна витяжка з ефектом зміцнення	79
15.6.	Холодна витяжка без ефекта зміцнення	80
15.7.	Вискоеластична деформація	80
15.8.	В'язко-пластична рідина Бінгама	82
15.9.	Класифікація рідин по кривим течії	83
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ НАВЧАЛЬНО-МЕТОЧНИХ МАТЕРІАЛІВ		
.....		85