

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ МАЯТНИКА КАПИЦЫ

Волянский Р.С., Послайко И.А.

Днепродзержинский государственный технический университет

Poslayko@mail.ru

Постановка задачи. Современный уровень развития силовой и микроэлектроники совместно с разработками в областях аккумуляторостроения и специальных электрических машин создают предпосылки для широкой разработки и внедрения различных стационарных и мобильных роботизированных систем. Одной из разновидностей таких систем являются андроидные системы, способные выполнять ряд специфических задач, например, доставку грузов в места, доступ в которые колесной и другой технике ограничен.

Однако управление такими системами не является тривиальным. Вследствие чего исследование процессов управления движением осуществляется на специально разработанных моделях, к которым относятся обратный маятник [1] и маятник Фуруты [2], позволяющие определить какие движения необходимо выполнять в горизонтальной плоскости для обеспечения устойчивого положения объекта. Однако достижение устойчивого положения гарантируется не только движением объекта в горизонтальной плоскости, но и движением в вертикальной плоскости. При этом в качестве модели удобно использовать маятник Капицы.

Маятником Капицы называется система, состоящая из сосредоточенной массы, прикрепленной к плечу, которое крепится к вибрирующему подвесу (рис.1).

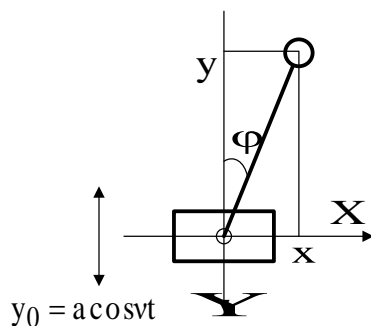


Рис.1 Маятник Капицы

Маятник получил название в честь академика и нобелевского лауреата П.Л. Капицы, построившего теорию для описания такой системы [3]. В пределе неподвижной точки подвеса, модель переходит в обычный математический маятник, для которого имеются два положения равновесия: в нижней точке и в верхней точке. При этом равновесие математического маятника в верхней точке является неустойчивым и любое сколь угодно малое возмущение приводит к потере равновесия.

Необходимо отметить, что изначально маятник разрабатывался Капицей как модель для описания процессов в атомной физике [3], поэтому его известное математическое описание не содержит сил трения и не учитывает массы подвеса и плеча. Таким образом, работа, посвященную уточнению математической модели маятника Капицы как механической системы, является актуальной, а ее целью является учет в математической модели сил трения и инерционности всех элементов маятника.

Решение задачи. Составление динамической модели маятника Капицы будем осуществлять исходя из уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - p \frac{\partial L}{\partial p\dot{\varphi}} = M_{fr}, \quad (1)$$

где $L = E_p - E_k$ - функция Лагранжа, представляющая собой разность потенциальной E_p и кинетической E_k энергии системы; φ , $p\dot{\varphi}$ - угол и скорость поворота маятника, p - оператор Лапласа.

В отличие от известного подхода [4], правая часть уравнения (1) не равна нулю, а содержит момент сил трения M_{fr} . Для простоты будем считать, что момент M_{fr} связан со скоростью движения линейной зависимостью

$$M_{fr} = \mu \cdot p\dot{\varphi}, \quad (2)$$

где μ - коэффициент трения.

Для составления функции Лагранжа рассмотрим рис.1.

Потенциальная энергия маятника определяется потенциальными энергиями каждого его звена

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}, \quad (3)$$

где E_{p1} - потенциальная энергия подвеса

$$E_{p1} = m_1 g y_0 = m_1 g a \cos vt, \quad (4)$$

E_{p2} - потенциальная энергия плеча

$$E_{p2} = m_2 g \left(\frac{y}{2} + y_0 \right) = -m_2 g \left(\frac{l_2}{2} \cos \varphi - a \cos vt \right), \quad (5)$$

E_{p3} - потенциальная энергия груза

$$E_{p3} = m_3 g (y + y_0) = -m_3 g (l_2 \cos \varphi - a \cos vt). \quad (6)$$

С учетом выражений (4) – (6) потенциальная энергия маятника (3) примет следующий вид

$$E_p = (m_1 + m_2 + m_3) g a \cos vt - \left(m_3 + \frac{m_2}{2} \right) g l_2 \cos \varphi \quad (7)$$

или, с учетом обозначений

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3 \quad (8)$$

$$m_\sigma = m_3 + \frac{m_2}{2}, \quad (9)$$

потенциальная энергия маятника окончательно можно представить в виде

$$E_p = m_\Sigma g a \cos vt - m_\sigma g l_2 \cos \varphi. \quad (10)$$

Как следует из выражения (10) полная потенциальная энергия маятника с колеблющимся подвесом определяется энергией внешних колебаний, образующих первое слагаемое, и собственно потенциальной энергией маятника, образующей второе слагаемое.

Перейдем теперь к рассмотрению кинетической энергии. Необходимо отметить, что все элементы маятника совершают движения, поэтому суммарную кинетическую энергию можно представить следующим образом

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}. \quad (11)$$

В выражении (11) E_{k1} - кинетическая энергия подвеса, колеблющегося в вертикальной плоскости со скоростью V_{vert}

$$E_{k1} = \frac{m_1 V_{vert}^2}{2} = \frac{m_1 a^2 v^2 \sin^2 vt}{2}, \quad (12)$$

E_{k2} - кинетическая энергия плеча, движущегося вдоль вертикальной и горизонтальной осей со скоростями V_{2vert} и V_{2hor}

$$E_{k2} = \frac{m_2 (V_{2vert}^2 + V_{2hor}^2)}{2}, \quad (13)$$

здесь

$$V_{2vert} = -p(0.5l_2 \cos \varphi - a \cos vt) = 0.5l_2 p \varphi \sin \varphi + av \sin vt; \quad (14)$$

$$V_{2hor} = -p(0.5l_2 \sin \varphi) = 0.5l_2 p \varphi \cos \varphi. \quad (15)$$

С учетом выражений (14) и (15) энергия (13) запишется в виде

$$E_{k2} = \frac{m_2}{2} (0.25l_2^2 (p\varphi)^2 \cos^2 \varphi + 0.25l_2^2 (p\varphi)^2 \sin^2 \varphi + a^2 v^2 \sin^2 vt + l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt) \quad (16)$$

или с учетом тригонометрических преобразований

$$E_{k2} = \frac{m_2}{2} (0.25l_2^2 (p\varphi)^2 + a^2 v^2 \sin^2 vt + l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt). \quad (17)$$

Кинетическую энергию E_{k3} груза можно описать зависимостью

$$E_{k3} = \frac{m_3}{2} (l_2^2 (p\varphi)^2 + a^2 v^2 \sin^2 vt + 2l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt). \quad (18)$$

Подстановка выражений (12), (17) и (18) в выражение (11) позволяет определить полную кинетическую энергию маятника

$$E_k = 0.5m_1 a^2 v^2 \sin^2 vt + 0.5m_2 (0.25l_2^2 (p\varphi)^2 + a^2 v^2 \sin^2 vt + l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt) + 0.5m_3 (l_2^2 (p\varphi)^2 + a^2 v^2 \sin^2 vt + 2l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt). \quad (19)$$

Выделим в выражении (19) составляющие, вызванные внешними колебаниями, и составляющие, определяемые движением маятника

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{2} a^2 v^2 \sin^2 vt + (0.25m_2 + m_3) \frac{l_2^2 (p\varphi)^2}{2} + (m_3 + 0.5m_2) l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt, \quad (20)$$

или с учетом обозначений (8) и (9)

$$E_k = \frac{m_\Sigma}{2} a^2 v^2 \sin^2 vt + m_\delta \frac{l_2^2 (p\varphi)^2}{2} + m_\sigma l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt, \quad (21)$$

$$\text{где } m_\delta = \frac{m_2}{4} + m_3. \quad (22)$$

Потенциальная энергия (10) и кинетическая энергия (21) маятника позволяют записать выражение для функции Лагранжа

$$L = \frac{m_\Sigma}{2} a^2 v^2 \sin^2 vt + m_\delta \frac{l_2^2 (p\varphi)^2}{2} + m_\sigma l_2 av p \varphi \sin \varphi \sin vt - m_\Sigma g a \cos vt + m_\sigma g l_2 \cos \varphi \quad (22)$$

и определить производные $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial L}{\partial p\dot{\varphi}}$ и $p \frac{\partial L}{\partial p\dot{\varphi}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_{\sigma}gl_2\sin\varphi + m_{\sigma}l_2avp\dot{\varphi}\cos\varphi\sin vt; \quad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p\dot{\varphi}} = m_{\delta}l_2^2p\dot{\varphi} + m_{\sigma}l_2av\sin\varphi\sin vt; \quad (24)$$

$$p \frac{\partial L}{\partial p\dot{\varphi}} = m_{\delta}l_2^2p^2\dot{\varphi} + m_{\sigma}l_2av^2\sin\varphi\cos vt + m_{\sigma}l_2avp\dot{\varphi}\cos\varphi\sin vt. \quad (25)$$

Производные (23)-(25) совместно с выражением (2) позволяют получить следующее дифференциальное уравнение, описывающее динамику маятника Капицы

$$m_{\delta}l_2^2p^2\dot{\varphi} = -m_{\sigma}gl_2\sin\varphi - m_{\sigma}l_2av^2\sin\varphi\cos vt - \mu p\dot{\varphi}. \quad (26)$$

Введя новую переменную

$$p\dot{\varphi} = \omega \quad (27)$$

и разделив левую и правую часть уравнения (26) на $m_{\delta}l_2^2$, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$p\dot{\varphi} = \omega; \quad p\dot{\omega} = -\frac{\mu}{m_{\delta}l_2^2}\omega - k_m \left(\frac{a}{l_2}v^2\cos vt + \frac{g}{l_2} \right) \sin\varphi, \quad (28)$$

где

$$k_m = \frac{m_{\sigma}}{m_{\delta}} = \frac{0.5m_2 + m_3}{0.25m_2 + m_3}. \quad (27)$$

Выводы. В отличие от известной модели маятника Капицы [4], разработанная модель позволяет учитывать трение в месте крепления плеча на подвесе. Использование переменного коэффициента трения позволяет описывать силы трения, изменяющиеся по сколь угодно сложным законам, расширяя тем самым область применения модели.

Разработанная модель показывает, что не смотря на движение всей системы в вертикальной плоскости, динамика маятника Капицы определяется исключительно массами груза и плеча и не зависит от массы подвеса. Причем анализ выражения (26) показывает, что второе слагаемое второго уравнения системы (25) больше чем в известной модели. Этот факт позволяет утверждать, что в реальной механической системе демпфирование колебаний происходит слабее, чем в известной модели маятника Капицы.

Литература

1. Aracil J. Kinetic energy shaping in the inverted pendulum/ J. Aracil; J. A. Acosta; F. Gordillo – Sevilla, Spain, 2009, pp 231-250
2. Cazzolato B.S. On the dynamics of the Furuta pendulum/ B.S. Cazzolato; Z. Prime – Australia, 2011, pp 14-19
3. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом, УФН, 1951, №44, 7–20с.
4. Астрахарчик Г.Е. Исследование маятника Капицы/ Электронный документ http://arxiv.org/1103_5981.pdf